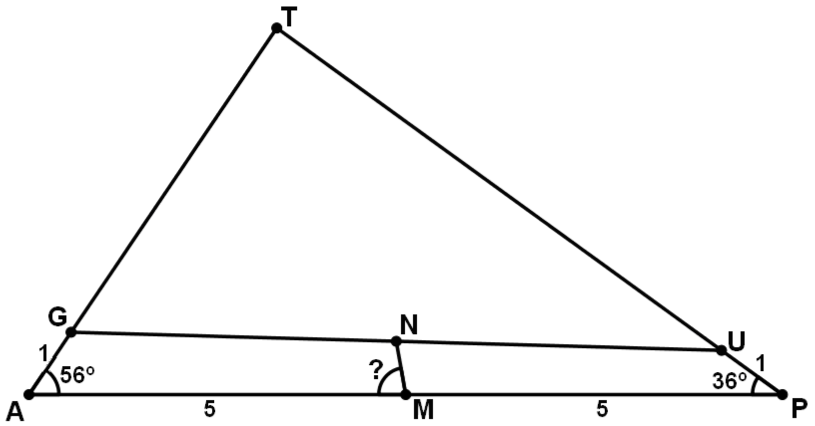
## AMC 12A 2018 Problema #23

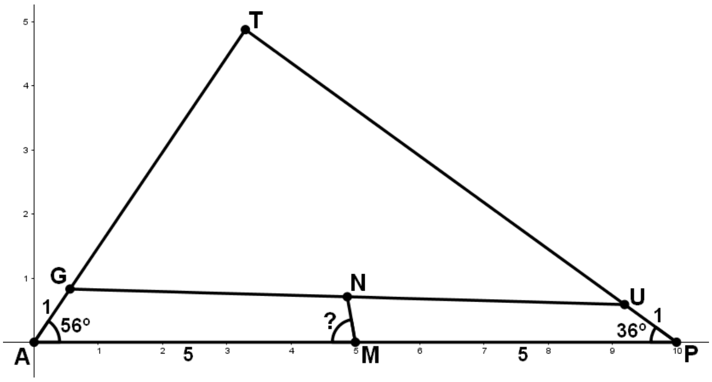
Sea el triángulo $\Delta PAT$ tal que $\angle P = 36º$, $\angle A = 56º$ y $PA = 10$. Sean los puntos U y G perteneciendo a los lados $\overline{TP}$ y $\overline{TA}$, respectivamente, de forma que $PU = AG = 1$. Sean M y N los respectivos puntos medios de los segmentos $\overline{PA}$ y $\overline{UG}$. Determina la medida en grados del ángulo agudo determinado por las rectas MN y PA.




(A) 76   (B) 77   (C) 78   (D) 79   (E) 80

**Solución.**

**Primera versión**. Mediante geometría cartesiana y trigonometría.
Sea $A=(0,0)$, $P=(10,0)$, $M=(5,0)$.




Entonces $G=(\cos 56º,\sin 56º)$, $U=(10-\cos 36º,\sin 36º)$, y por tanto

$$N=\left(\frac{\cos 56º+10-\cos 36º}{2},\frac{\sin 56º+\sin 36º}{2}\right)=\left(\frac{\cos 56º-\cos 36º}{2}+5,\frac{\sin 56º+\sin 36º}{2}\right)$$

El vector $\overrightarrow{MN}$ será $\overrightarrow{MN}=N-M=\left(\frac{\cos 56º-\cos 36º}{2},\frac{\sin 56º+\sin 36º}{2}\right)$, y aplicando la identidad de la semisuma de ángulos (TR/5.1r):

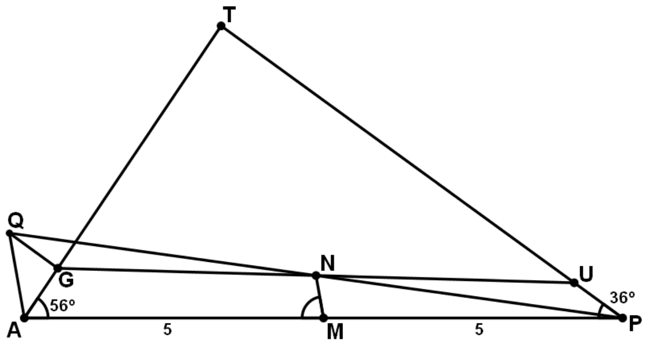
$$\tan\alpha=\frac{(\sin 56º+\sin 36º)/2}{(\cos 56º-\cos 36º)/2}=\frac{\sin 56º+\sin 36º}{\cos 56º-\cos 36º}\overset{(*)}{=}\frac{\sin 56º+\sin 144º}{\cos 56º+\cos 144º}=\tan(100º)$$

El ángulo agudo que nosotros estamos buscando será $180º–100º=80º$ (E)

**Nota**: Un desarrollo alternativo en (*) aplicando las igualdades de paso de suma a producto es:

$$\frac{\sin 36º+\sin 56º}{\cos 36º-\cos 56º}\overset{(*)}{=}\frac{2\sin 46º\cos 10º}{-2\sin 46º\sin(-10º)}=\frac{\sin 80º}{\cos 80º}=\tan(80º)$$

**Segunda versión. Mediante triángulos semejantes.**
Sea Q el punto de la recta NP tal que $QN=NP$. Trazamos los segmentos $\overline{AQ}$ y $\overline{GQ}$.



Por ser N y M puntos medios de dos lados del triángulo $\Delta AQP$ tenemos $AQ // MN$ y $\angle PMN = \angle PAQ$.
Está claro que los triángulos $\Delta NUP$ y $\Delta NGQ$ son congruentes, por lo que $QG = UP = 1$, y $\angle GQN = \angle NPU$. De $QG = AG = 1$ se deduce que $\Delta AGQ$ es isósceles en G y por tanto $\angle AQG = \angle GAQ$.
Observemos el triángulo $\Delta APQ$:

$$\angle GQN + \angle QPA = \angle QPU + \angle QPA = \angle P = 36º$$

Luego

$$56º + \angle GAQ + \angle AQG + \angle GQN + \angle QPA = 180º \Rightarrow$$

$$56º + \angle GAQ + \angle AQG + 36º = 180º \Rightarrow$$

$$2\angle GAQ = \angle GAQ + \angle AQG = 180º - 56º - 36º = 88º \Rightarrow \angle GAQ = 44º$$

Y finalmente:

$$\angle PMN = \angle PAQ = \angle PAG + \angle GAQ = 56º + 44º = 100º \Rightarrow \angle AMN = 180º - 100º = 80º$$

**Tercera versión**. Mediante lugar geométrico.
Trazamos la bisectriz $TX$ del ángulo $\angle T$. $\angle ATX = \angle XTP = 44º$ y por tanto $\angle AXT = 180º - 45º - 44º = 80º$. Vamos a demostrar que $MN // XT$, y por tanto $\angle AMN = \angle AXT = 80º$.

Se puede observar que la recta MN es independiente de la longitud concreta $AG = UP = 1$, es decir, que obtenemos la misma recta MN tomando cualquier distancia $AG = UP = x$ que queramos. El lugar geométrico de los puntos $N_x$ al tomar el punto medio del segmento $\overline{G_x U_x}$ con $AG_x = PU_x = x$ es una recta puesto que los puntos $G_x$ y $U_x$ varían linealmente con $x$. El punto M aparece tomando $x = 0$, luego M pertenece a dicha recta.

Sean $N' = N_x$, $G' = G_x$, y $U' = U_x$ para el caso concreto $x = AT$.
Entonces $N' \in TP$ (el punto $N'$ pertenece a TP y no a AT porque $PT > AT$)
También está claro que $G' = T$.

Sea $a = AT$, $b = TP$ y $c = PT$. Entonces $AG' = PU' = AT = a$.
$PN' = \dfrac{a+b}{2}$ (????), y por tanto $\dfrac{PN'}{PT} = \dfrac{(a+b)/2}{b} = \dfrac{a+b}{2}$

Por otro lado, aplicando el Teorema de la bisectriz:

$$\frac{XP}{AX} = \frac{TP}{AT} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{XP}{c - XP} = \frac{b}{a} \Rightarrow a\,XP + b\,XP = cb \Rightarrow XP = \frac{cb}{a+b}$$

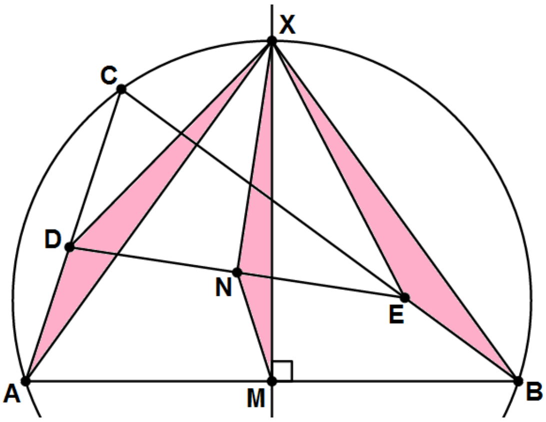
$$PM = c/2 \Rightarrow \frac{PM}{PX} = \frac{c/2}{cb/(a+b)} = \frac{a+b}{2b}$$

Así pues, hemos visto que $\dfrac{PN'}{PT} = \dfrac{PM}{PX}$, y por tanto la recta que contiene todos los $N_x$ debe ser paralela a la recta AX, tal y como queríamos ver.

**Cuarta versión**. Mediante una semejanza espiral y Punto de Miquel.

Nos basamos en el siguiente lema:

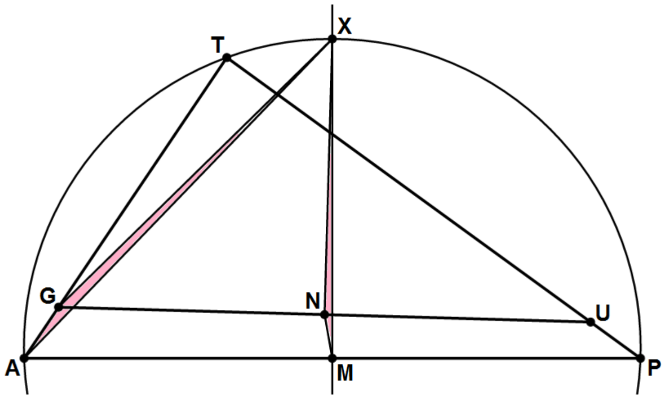
Dado un triángulo $\Delta ABC$ y puntos D y E en $\overline{AC}$ y en $\overline{BC}$ respectivamente, tales que $AD = BE$, el punto medio X del arco mayor de $ACB$ en la circunferencia circunscrita $(\Delta ABC)$ es el punto de Miquel asociado al cuadrilátero ADEB.




Luego es el centro de la semejanza espiral que envía el segmento $\overline{DE}$ a $\overline{AB}$.
Puesto que una semejanza espiral envía puntos medios a puntos medios, enviará el punto medio N del segmento $\overline{DE}$ al punto medio M del segmento $\overline{AB}$, y por tanto:

$$\angle XMN = \angle XAD = \angle XBE$$

Con este lema ya podemos prescindir los incómodos puntos N y M. Volviendo a nuestro problema:




El triángulo $\Delta PAX$ es isósceles, y por tanto

$$2\angle PAX = 180 - \angle PXA = 180 - \angle PTA = 180 - 88 = 92 \Rightarrow \angle PAX = 46^{\circ}$$

Luego

$$\angle XMN = \angle XAG = \angle PAT - \angle PAX = 56^{\circ} - 46^{\circ} = 10^{\circ}$$

Y finalmente: $\angle AMN = 90 - \angle XMN = 90^{\circ} - 10^{\circ} = 80^{\circ}$

**Fuente de las versiones 2, 3 y 4**: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AMC_12A_Problems/Problem_23