AMC 12A 2018

1

Una gran urna contiene 100 bolas, de las cuales un 36% son rojas y el resto son azules. ¿Cuántas bolas azules hay que quitar para que el porcentaje de bolas rojas en la urna sea del 72%? (No se quita ninguna bola roja)

(A) 28 (B) 32 (C) 36 (D) 50 (E) 64

2

Al explorar una cueva, Carl encuentra unas rocas de 5 quilos de valor 14$ la unidad, unas rocas de 4 quilos de valor 11$ la unidad, y unas rocas de 1 quilo de valor 2$ la unidad. Hay al menos 20 piedras de cada peso. Él puede cargar con 18 quilos como máximo. ¿Cuál es el valor máximo, en dólares, del total de rocas que puede extraer de la cueva?

(A) 48 (B) 49 (C) 50 (D) 51 (E) 52

3

Determina el número de posibilidades que tiene un estudiante para programarse 3 cursos de matemáticas (álgebra, geometría y teoría de números) en un horario de seis períodos si no se pueden tomar dos cursos de matemáticas en períodos consecutivos. (Los cursos que tome el estudiante durante los otros 3 períodos no son relevantes).
(Usando las iniciales, dos ejemplos de horarios aceptables serían AXGXTX, o AXXTXG, donde X es cualquier otro curso que no sea A,T o G)

(A) 3 (B) 6 (C) 12 (D) 18 (E) 24

4

Alice, Bob y Charlie van de excursión y se preguntan como de lejos está el pueblo más cercano. Alice dice: “Estamos al menos a 6 millas de distancia”, y Bob replica: “Estamos como mucho a 5 millas de distancia”, y entonces Charlie remarca: “Realmente el pueblo más cercano está a 4 millas como mucho”. Resulta que ninguna de las tres afirmaciones es cierta. Sea d la distancia en millas al pueblo más cercano. ¿Cuál de los siguientes intervalos es el conjunto de todos los posibles valores de d ?

(A) $(0,4)$ (B) $(4,5)$ (C) $(4,6)$ (D) $(5,6)$ (E) $(5,\infty)$

5

Determina la suma de todos los posibles valores de k para los cuales los polinomios x^2-3x+2 y x^2-5x+k tienen una raíz en común.

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 10

6

Sean m y n ciertos enteros positivos tales que $m+10<n+1$ y que la media aritmética y la mediana del conjunto $\{m, m+4, m+10, n+1, n+2, 2n\}$ son iguales a n. Determina $m+n$.

(A) 20   (B) 21   (C) 22   (D) 23   (E) 24

7

Determina el número de enteros n (no necesariamente positivos) para los cuales

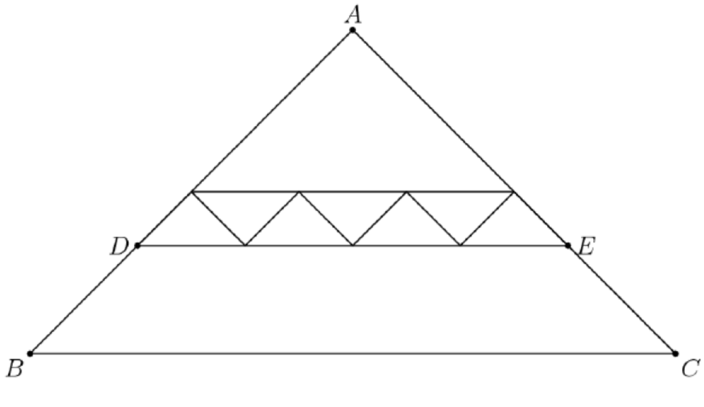
$$4000 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

es un entero.

(A) 3   (B) 4   (C) 6   (D) 8   (E) 9

8

Todos los triángulos que parecen en el esquema inferior son semejantes al triángulo isósceles ΔABC, con $AB = AC$. Cada uno de los 7 triángulos pequeños tiene área 1, y ΔABC tiene área 40. Determina el área del trapecio DBCE.



(A) 16   (B) 18   (C) 20   (D) 22   (E) 24

9

Determina el subconjunto de $[0, \pi]$ más grande que describe los valores de y para los cuales

$$\sin(x+y) \le \sin(x) + \sin(y)$$

para todo x entre 0 y π, inclusive.

(A) $y=0$ (B) $0 \le y \le \frac{\pi}{4}$ (C) $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$ (D) $0 \le y \le \frac{3\pi}{4}$ (E) $0 \le y \le \pi$

10

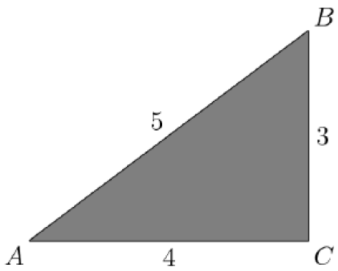
Determina el número de pares (x, y) que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+3y=3 \\ \big|\,|x|+|y|\,\big| = 1 \end{cases}$$

(A) 1   (B) 2   (C) 3   (D) 4   (E) 8

11

Doblamos un triángulo de papel de longitudes 3, 4 y 5 pulgadas de forma que el punto A coincida con el punto B. ¿Cuál es la longitud en pulgadas del doblez?



(A) $1+\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\frac{7}{4}$ (D) $\frac{15}{8}$ (E) 2

12

Sea S un subconjunto de 6 elementos de $\{1,2,...,12\}$ con la propiedad de que si a y b son elementos de S y $a<b$, entonces b no es un múltiple de a. Determina el menor valor posible de los elementos de S.

(A) 2   (B) 3   (C) 4   (D) 5   (E) 7

13

Determina la cantidad de números enteros no negativos que se pueden escribir de la forma

$$a_7 \cdot 3^7 + a_6 \cdot 3^6 + a_5 \cdot 3^5 + a_4 \cdot 3^4 + a_3 \cdot 3^3 + a_2 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3^1 + a_0 \cdot 3^0$$

donde $a_i \in \{-1, 0, 1\}$ para todo $0 \le i \le 7$.

(A) 512   (B) 729   (C) 1094   (D) 3281   (E) 59048

14

La solución de la ecuación $\log_{3x} 4 = \log_{2x} 8$, donde x es un número real positivo que no es 1/3 ni 1/2, se puede escribir como p/q, donde p y q son enteros coprimos positivos. Determina $p+q$.

(A) 5   (B) 13   (C) 17   (D) 31   (E) 35

15

Un código de scanner consiste en una cuadrícula de $7x7$ cuadrados, algunos pintados de negro y el resto de blanco. Debe haber al menos un cuadrado pintado de cada color en esta cuadrícula de 49 cuadrados. Diremos que un código es *simétrico* queda inalterable cuando toda la cuadrícula se rota un múltiplo de 90º alrededor de su centro y en el sentido de las agujas del reloj, o cuando se somete a una reflexión respecto de las rectas que unen las esquinas opuestas, o se somete a una reflexión respecto de las rectas que unen los puntos medios de los lados opuestos. Determina el número de posibles códigos simétricos.

(A) 510 (B) 1022 (C) 8190 (D) 8192 (E) 65534

16

Determina el intervalo que describe el conjunto de valores de a para los cuales las curvas

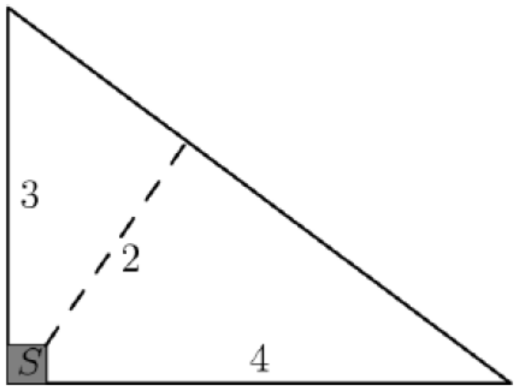
$$x^2 + y^2 = a^2 \ , \ y = x^2 - a$$

se cortan exactamente en tres puntos del plano cartesiano real.

(A) $a = \frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$ (C) $a > \frac{1}{4}$ (D) $a = \frac{1}{2}$ (E) $a > \frac{1}{2}$

17

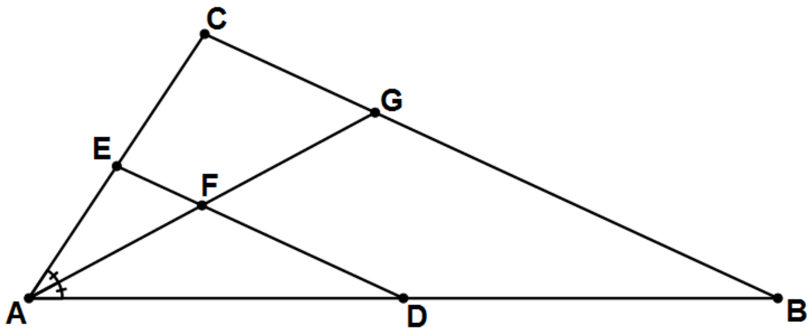
Un granjero llamado Pitágoras cultiva un campo en forma de triángulo rectángulo, con catetos de longitud 3 y 4. En la esquina que forma un ángulo recto ha dejado sin cultivar un pequeño cuadrado S cuya forma, desde el aire, se asemeja al símbolo de ángulo recto. Cultiva el resto del campo. La menor distancia entre S y la hipotenusa es 2. Determina la fracción cultivada del campo.



(A) $\frac{25}{27}$ (B) $\frac{26}{27}$ (C) $\frac{73}{75}$ (D) $\frac{145}{147}$ (E) $\frac{74}{75}$

18

Sea el triángulo ΔABC con $AB = 50$ y $AC = 10$ y área 120. Sea D el punto medio de $\overline{AB}$ y E el punto medio de $\overline{AC}$. La bisectriz de $\angle ABC$ corta $\overline{DE}$ y $\overline{BC}$ en F y G, respectivamente. Determina el área del cuadrilátero FDBG.



(A) 60 (B) 65 (C) 70 (D) 75 (E) 80

19

Sea A el conjunto de todos los enteros cuyos únicos factores primos son 2, 3 y 5. La suma infinita

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{18}+\frac{1}{20}+\ldots$$

de todos los recíprocos de los elementos de A se puede escribir como $\frac{m}{n}$, donde m y n son enteros positivos relativamente primos. Determina $m+n$.

(A) 16 (B) 17 (C) 19 (D) 23 (E) 36

20

Sea un triángulo ΔABC rectángulo isósceles con $AB = AC = 3$. Sea M el punto medio de la hipotenusa $\overline{BC}$. Sean I y E puntos en $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, respectivamente, con $AI > AE$, de forma que AIME sea un cuadrilátero cíclico. Si el triángulo ΔEMI tiene área 2, la longitud CI se puede escribir como $\frac{a-\sqrt{b}}{c}$ con a,b,c enteros positivos y b no divisible por el cuadrado de ningún primo. Determina el valor de $a+b+c$.

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

21

Determina el polinomio que tiene la raíz real mayor:

(A) $x^{19}+2018x^{11}+1$ (B) $x^{17}+2018x^{11}+1$ (C) $x^{19}+2018x^{13}+1$
(D) $x^{17}+2018x^{13}+1$ (E) $2019x+2018$

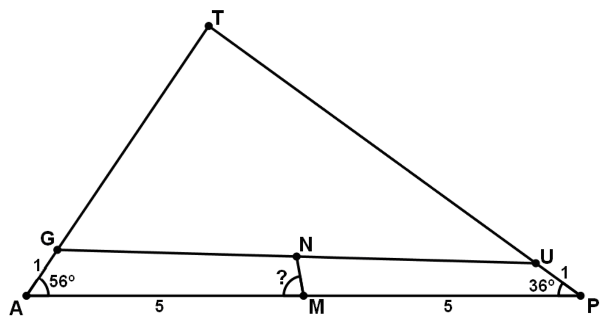
22

Las soluciones de las ecuaciones $z^2 = 4 + 4\sqrt{15}i$ y $z^2 = 2 + 2\sqrt{3}i$, donde $i = \sqrt{-1}$, forman los vértices de un paralelogramo en el plano complejo. El área de este paralelogramo se puede escribir como $p\sqrt{q} - r\sqrt{s}$, donde p, q, r, s son enteros positivos y ni q ni s son divisibles por el cuadrado de ningún número primo. Determina $p + q + r + s$.

(A) 20   (B) 21   (C) 22   (D) 23   (E) 24

23

Sea el triángulo ΔPAT tal que $\angle P = 36^{\circ}$, $\angle A = 56^{\circ}$ y $PA = 10$. Sean los puntos U y G perteneciendo a los lados $\overline{TP}$ y $\overline{TA}$, respectivamente, de forma que $PU = AG = 1$. Sean M y N los respectivos puntos medios de los segmentos $\overline{PA}$ y $\overline{UG}$. Determina la medida en grados del ángulo agudo determinado por las rectas MN y PA.



(A) 76   (B) 77   (C) 78   (D) 79   (E) 80

24

Alicia, Bob y Carol juegan al siguiente juego: Cada uno de ellos elige un número real entre 0 y 1, y gana aquel cuyo número está entre los otros dos. Alicia informa que ella elegirá un número aleatorio entre 0 y 1 de forma uniforme, y Bob informa que él elegirá un número aleatorio entre 1/2 y 2/3 de forma uniforme. Sabiendo esta información, ¿Qué número deberá elegir Carol para maximalizar sus posibilidades de ganar?

(A) 1/2   (B) 13/24   (C) 7/12   (D) 5/8   (E) 2/3

25

Fijado un entero positivo n, y tres dígitos a, b, c diferentes de cero, sea A_n el entero de n dígitos todos ellos iguales a a, sea B_n el entero de n dígitos todos ellos iguales a b, y sea C_n el entero de 2n dígitos (no de n dígitos) todos ellos iguales a c. Determina el mayor valor posible de $a + b + c$ para el que existen al menos dos valores de n tales que $C_n - B_n = A_n^2$.

(A) 12   (B) 14   (C) 16   (D) 18   (E) 20

AMC12A 2018 Soluciones (Letra)

1. D
2. C
3. E
4. D
5. E
6. B
7. E
8. E
9. E
10. C
11. D
12. C
13. D
14. D
15. B
16. E
17. D
18. D
19. C
20. D
21. B
22. A
23. E
24. B
25. D

AMC12A 2018 Soluciones desarrolladas

1

Planteamos la ecuación $\dfrac{36}{100-x}=\dfrac{72}{100}\Leftrightarrow 100-x=\dfrac{36\cdot 100}{72}=50\Leftrightarrow x=50$ (D)

2

Lo mejor que puede hacer es tomar 2 piedras de 5 quilos y 2 piedras de 4 quilos, con un total de 18 quilos y un valor de $2\cdot 14+2\cdot 11=50\$$ (C)

Otras opciones, como por ejemplo: 3 piedras de 5 quilos y 3 piedras de 1 quilo generan un valor de $3\cdot 14+3\cdot 2=48\$$, que es menor.

3

Los cursos de matemáticas se pueden organizar a lo largo de los 6 períodos de cuatro formas diferentes:

$$1-3-5\ ,\ 1-3-6\ ,\ 1-4-6\ ,\ 2-4-6$$

Para cada una de estas posibilidades, hay $3\cdot 2=6$ formas diferentes de ordenar los tres cursos de matemáticas, haciendo un total de $6\cdot 4=24$ horarios diferentes (E).

4

Las negaciones de las tres frases del enunciado nos dan los intervalos $(0,6)$, $(5,\infty)$ y $(4,\infty)$, cuya intersección es el intervalo $(5,6)$ (D)

5

Factorizando el polinomio x^2-3x+2 vemos que tiene raíces 1 y 2. Luego el polinomio x^2-5x+k debe tener una de estas raíces.

Si $x=1$ es raíz de x^2-5x+k entonces $1^2-5\cdot 1+k=0\Rightarrow k=5-1=4$.

Si $x=2$ es raíz de x^2-5x+k entonces $2^2-5\cdot 2+k=0\Rightarrow k=10-4=6$.

Por lo tanto, la suma de los posibles valores de k es $4+6=10$ (E).

6

Aplicando la definición de media aritmética, tenemos:

$$n=\frac{m+m+4+m+10+n+1+n+2+2n}{6}\Leftrightarrow 6n=3m+4n+17\Leftrightarrow 2n=3m+17$$

Está claro que los elementos de este conjunto están ordenados de menor a mayor, luego, aplicando la definición de mediana, tenemos:

$$n=\frac{m+10+n+1}{2}\Leftrightarrow 2n=m+n+11\Leftrightarrow n=m+11$$

Luego solo nos queda resolver el sistema:

$$2(m+11)=3m+17\Leftrightarrow 2m+22=3m+17\Leftrightarrow 5=m\Rightarrow n=5+11=16$$

Luego la respuesta correcta es $16+5=21$ (B)

7

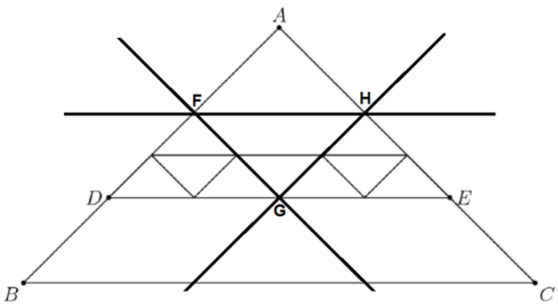
Si n es positivo, $4000\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n = 2^5\cdot 5^3\,\frac{2^n}{5^n}$ que será entero para $n=0,1,2,3$.

Si n es negativo, $4000\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n = 2^5\cdot 5^3\,\frac{5^{-n}}{2^{-n}}$ que será entero para $n=-1,-2,-3,-4,-5$.

En total hay 9 casos (E)

8

Prolongamos uno de los lados de los triángulos pequeños determinando los segmentos FG y GH tal y como se muestra en el siguiente esquema:



Está claro que $FG \,//\, AC$ y que G es el punto medio de DE, luego F es el punto medio de AD y H es el punto medio de AE. Así pues, los triángulos ΔDFG, ΔGHE, ΔFGH y ΔFAH son todos congruentes y semejantes a ΔBAC. Así pues, ΔBAC tiene área 16, y el área del trapecio DBCE es $40-16=24$ (E).

Nota: En https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AMC_12A_Problems/Problem_8 podemos encontrar hasta seis soluciones alternativas, todas ellas alrededor de estos mismos conceptos.

9

Aplicando la identidad trigonométrica de la suma de ángulos:

$$\sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\sin(y)\cos(x)$$

Puesto que $x,y\in[0,\pi]$, $0\le\sin(x)\le 1$, $-1\le\cos(y)\le 1$, luego $\sin(x)\cos(y)\le\sin(x)$

Y de la misma manera $\sin(y)\cos(x)\le\sin(y)$

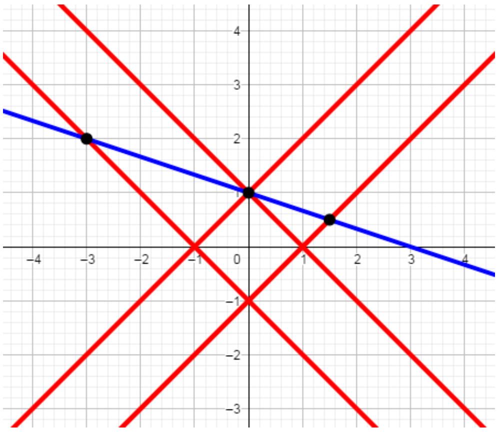
Y por tanto siempre se cumple la desigualdad del enunciado para todo par $x,y\in[0,\pi]$.

La respuesta es (E).

10

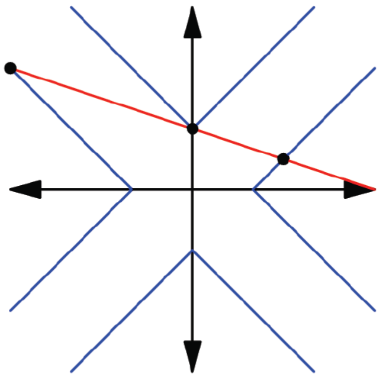
$$\big||x|+|y|\big|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} |x|+|y|=1 \Leftrightarrow |y|=1-|x| \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-|x| \\ y=-(1-|x|)=|x|-1 \end{cases} \\ |x|+|y|=-1 \Leftrightarrow |y|=-1-|x| \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1-|x| \\ y=-(-1-|x|)=|x|+1 \end{cases} \end{cases}$$

Si, además, representamos $x+3y=3$, vemos que el conjunto de rectas se corta en tres puntos:



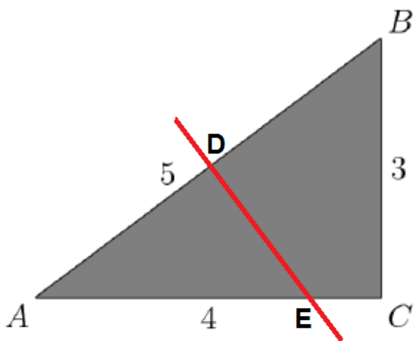
La solución es 3 (C)

Observación: El gráfico que aparece en la solución oficial (https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AMC_10A_Problems/Problem_12) es ligeramente diferente:



11

Al doblar el papel generamos la mediatriz del lado $\overline{AB}$, que cortará en D a $\overline{AB}$ y en E a $\overline{AC}$.



Está claro que ΔABC es un triángulo rectángulo, y puesto que $DE \perp AB$,

$$\Delta ABC \approx \Delta AED \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC} \Leftrightarrow \frac{5/2}{4} = \frac{DE}{3} \Rightarrow DE = \frac{3 \cdot 5/2}{4} = \frac{15}{8} \quad \text{(D)}$$

12
Está claro que 1 no puede ser mínimo de S, pues sería divisor de cualquier otro elemento posible, llegando a contradicción.

El 2 tampoco puede ser mínimo, pues es incompatible con 4, 6, 8, 10 y 12, y con el resto tenemos un único posible conjunto $S = \{3,5,7,9,11\}$ que no es aceptable porque 3 y 9 no son compatibles.

El 3 tampoco puede ser mínimo: Los otros candidatos son: 4, 5, 7, 8, 10, 11, y en este caso el 5 es incompatible con el 10, y el 4 es incompatible con el 8 luego eliminando alguno de ellos nos quedan solo 4 candidatos posibles, y no llegamos a los 6 necesarios.

Con el 4 de mínimo tenemos candidatos posibles 5, 6, 7, 9, 10, 11. El 5 es incompatible con el 10, y con el resto podemos hacer un posible conjunto $S = \{4,6,7,9,10,11\}$. Así pues, el valor mínimo es 4 (C).

13
Haciendo el listado exhaustivo de todos los valores que vamos obteniendo para valores pequeños de n, vemos que los conjuntos

$$S_n = \left\{ a_n \cdot 3^n + a_{n-1} \cdot 3^{n-1} + ... + a_1 \cdot 3^1 + a_0 \cdot 3^0 \ , -1 \le a_i \le 1 \right\}$$

Constan de 3^n enteros, sin que se produzcan repeticiones, y se cumple $0 \in S_n$, y hay simetría: $x \in S_n \Leftrightarrow -x \in S_n$.
Así pues, en particular, para el caso $n = 7$, tendremos $3^8 = 3^4 \cdot 3^4 = 81 \cdot 81 = 6561$ números diferentes: 3280 negativos, 3280 positivos y el cero. El total de elementos no negativos es, por tanto, 3281 (D).

14
Aplicando la identidad del cambio de base: $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c \Rightarrow \log_a b = \dfrac{\log_a c}{\log_b c}$

Tenemos:

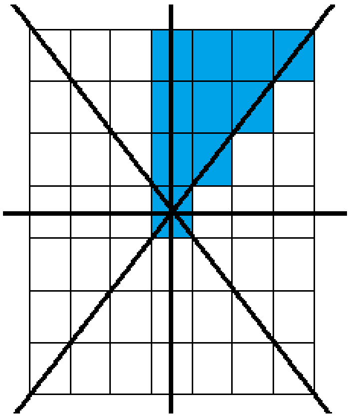
$$\log_{3x} 4 = \log_{2x} 8 \Leftrightarrow \log_{3x} 2^2 = \log_{2x} 2^3 \Leftrightarrow 2\log_{3x} 2 = 3\log_{2x} 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{3} = \frac{\log_{2x} 2}{\log_{3x} 2} = \log_{2x} 3x \Leftrightarrow$$

$$(2x)^{2/3} = 3x \Leftrightarrow (2x)^2 = (3x)^3 \Leftrightarrow 4x^2 = 3^3 x^3 \Leftrightarrow\Leftrightarrow 4 = 3^3 x \Leftrightarrow x = \frac{4}{27}$$

Y la respuesta correcta es $4 + 27 = 31$ (D)

15
Observando el efecto de las transformaciones que deben dejar el código invariante deducimos que el código queda determinado por 9 casillas, que pueden ser, por ejemplo, las que aparecen en el siguiente esquema:



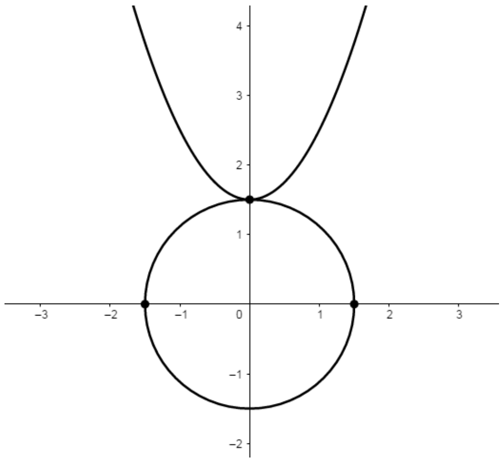
Luego, en total, y teniendo en cuenta que no puede ser totalmente blanca o totalmente negra, habrá $2^{10}-2=1024-2=1022$ posibilidades distintas.

16

La curva $x^2+y^2=a^2$ describe una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $|a|$.

La curva $y=x^2-a$ describe una parábola con vértice $V=(0,-a)$ y ramas hacia arriba.

Si $a<0$, la parábola está por encima de la circunferencia y solo tienen el vértice como punto en común.



Si $a=0$, la circunferencia se reduce al punto $(0,0)$ y por lo tanto es obvio que no puede haber tres puntos en común.

Si $a>0$

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ y=x^2-a \end{cases} \Rightarrow x^2+\left(x^2-a\right)^2=a^2 \Leftrightarrow x^2+x^4+a^2-2a\,x^2=a^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+x^4-2a\,x^2=0 \Leftrightarrow x^2\left(1+x^2-2a\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 1+x^2-2a=0 \Leftrightarrow x^2=2a-1 \end{cases}$$

Y la ecuación $x^2=2a-1$ tendrá dos soluciones si y solo si $2a-1>0 \Leftrightarrow a>\dfrac{1}{2}$ (E)

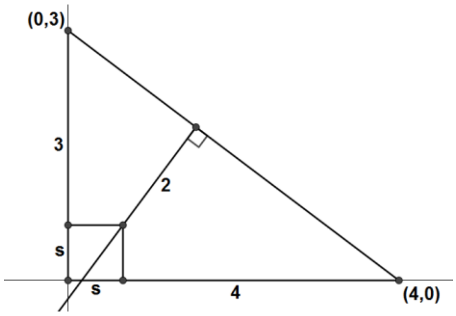
17

Primera versión. Mediante geometría cartesiana y fórmula de la distancia punto-recta.
La recta asociada a la hipotenusa tendrá ecuación

$$y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} 3 = 0 \cdot a + b \\ 0 = 4 \cdot a + b \end{cases} \Rightarrow b = 3, a = -3/4 \Rightarrow y = \frac{-3}{4}x + 3 \Rightarrow 4y = -3x + 12$$

$$\Rightarrow 3x + 4y = 12$$

Aplicando ahora la fórmula de la distancia entre un punto y una recta, siendo $P = (s, s)$ el vértice del cuadrado S,



Tenemos

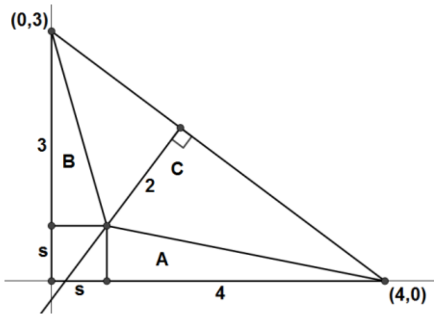
$$2 = \frac{|3s + 4s - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3s + 4s - 12|}{5} \Leftrightarrow 10 = |7s - 12| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10 = 7s - 12 \Leftrightarrow 22 = 7s \Leftrightarrow s = 22/7 \\ 10 = -(7s - 12) = -7s + 12 \Leftrightarrow s = 2/7 \end{cases}$$

Puesto que $22/7 > 3$, la única solución aceptable es $s = 2/7$.
Para este valor, el área del cuadrado S es $s = (2/7)^2$
El área del triángulo es $3 \cdot 4/2 = 6$, y por tanto el área cultivada es $6 - (2/7)^2$, y la razón que nos piden determinar es

$$\frac{6 - (2/7)^2}{6} = \frac{6 \cdot 7^2 - 2^2}{6 \cdot 7^2} = \frac{290}{294} = \frac{145}{147} \quad \text{(D)}$$

Segunda versión. Descomponiendo la figura en triángulos.
Está claro que la hipotenusa del triángulo es $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.



Sea s el lado del cuadrado S.

El triángulo grande de área $3 \cdot 4/2 = 6$ se puede descomponer en el cuadrado S de área s^2, el triángulo A de área $\frac{s(4-s)}{2}$, el triángulo B de área $\frac{s(3-s)}{2}$ y el triángulo C de área $\frac{2 \cdot 5}{2} = 5$.
Así pues,

$$6 = s^2 + \frac{s(4-s)}{2} + \frac{s(3-s)}{2} + 5 \Rightarrow 1 = s^2 + 2s - \frac{s^2}{2} + \frac{3s}{2} - \frac{s^2}{2} \Rightarrow$$

$$1 = 2s + \frac{3s}{2} = \frac{7s}{2} \Rightarrow s = \frac{2}{7}$$

Y se continúa como en la primera versión.

Nota: Consulta en https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AMC_12A_Problems/Problem_17
Hasta seis versiones diferentes para la resolución de este problema.

18

Aplicando el Teorema de la bisectriz, $\frac{CG}{10} = \frac{GB}{50} \Leftrightarrow \frac{CG}{GB} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$

$$\frac{BC}{CG} = \frac{BG + GC}{CG} = \frac{BG}{CG} + 1 = 5 + 1 = 6 \Rightarrow \frac{CG}{BC} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{GB}{BC} = \frac{5}{6}$$

Y por tanto, puesto que, por Elementos 6.1, las áreas son proporcionales a las razones de las bases, (ver GA/8.2.6), tenemos:

$$[\Delta AGB] = \frac{5}{6}[\Delta ABC] = \frac{5}{6}120 = 100$$

Por otro lado, por semejanza de triángulos, F es el punto medio del segmento $\overline{AG}$ y el triángulo ΔAFD será semejante a ΔAGB con una razón de proporcionalidad 1/2, y por tanto la razón de proporcionalidad del área será su cuadrado, es decir, 1/4:

$$[\Delta AFD] = \frac{1}{4}[\Delta AGB] = \frac{1}{4}100 = 25 \Rightarrow [\Delta FDBG] = 100 - 25 = 75 \quad \text{(D)}$$

Nota: En https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AMC_12A_Problems/Problem_18 encontramos hasta 7 desarrollos diferentes de este problema.

19

Queremos calcular la siguiente serie: $\sum_{0 \le a,b,c < \infty} 2^a 3^b 5^c$

Si fijamos un b y un c, tenemos:

$$\sum_{0 \le a,b,c < \infty} \frac{1}{2^a 3^b 5^c} = \sum_{0 \le a < \infty} \frac{1}{2^a 3^b 5^c} = \sum_{0 \le a < \infty} \frac{1}{2^a 3^b 5^c} = \frac{1}{3^b 5^c} \sum_{0 \le a < \infty} \frac{1}{2^a} = \frac{1}{3^b 5^c}\left(\frac{1}{1-(1/2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{3^b 5^c}(2) = 2\frac{1}{3^b 5^c}$$

Donde hemos aplicado la fórmula de la serie geométrica (PA/12.2).

Luego ahora podemos hacer lo mismo fijando b y haciendo la suma infinita en c:

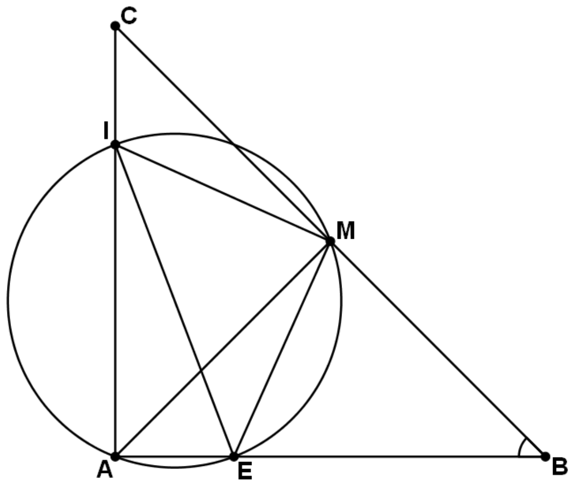
$$\sum_{0\le a,b,c<\infty}\frac{1}{2^a3^b5^c}=\sum_{0\le c<\infty}2\frac{1}{3^b5^c}=2\sum_{0\le c<\infty}\frac{1}{3^b5^c}=2\frac{1}{3^b}\sum_{0\le c<\infty}\frac{1}{5^c}=2\frac{1}{3^b}\left(\frac{1}{1-(1/5)}\right)=$$
$$=2\frac{1}{3^b}\left(\frac{5}{4}\right)=2\frac{5}{4}\frac{1}{3^b}=\frac{5}{2}\frac{1}{3^b}$$

A ahora haciendo la suma infinita en b :

$$\sum_{0\le a,b,c<\infty}\frac{1}{2^a3^b5^c}=\sum_{0\le b<\infty}\frac{5}{2}\frac{1}{3^b}=\frac{5}{2}\sum_{0\le b<\infty}\frac{1}{3^b}=\frac{5}{2}\left(\frac{1}{1-1/3}\right)=\frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{15}{4}$$

Y la solución es $15+4=19$

20



Por ser AIME cíclico, $\angle IME=180º-\angle CAB=180º-90º=90º$.
Por otro lado, por ser AM la mediana de un triángulo isósceles, también es su altura, es decir $\angle AMB=90º$, y por tanto $\Delta AMB\approx\Delta CAB$, de donde se deduce que $AB=AC\Rightarrow AM=MB$, $\angle MAB=\angle ABM=45º$.
Por ser AIME cíclico, $\angle MIE=\angle MAE=45º$, y puesto que $\angle IME=90º$, se deduce que $\angle IEM=45º$, y por tanto ΔIME es un triángulo rectángulo isósceles: $IM=ME$.

$$2=\left[\Delta EMI\right]=\frac{IM\cdot ME}{2}=\frac{IM^2}{2}\Rightarrow IM^2=4\Rightarrow IM=ME=2\Rightarrow IE^2=8$$

De nuevo, por ser AIME cíclico, $\angle CIM=\angle AEM$ y puesto que $\angle EAM=\angle ICM$, $\Delta AEM\approx\Delta CIM$, pero $EM=IM$, y por tanto $\Delta AEM\cong\Delta CIM$, de donde se deduce que $AE=IC$.
Así pues, si $x=IC=AE$, aplicando Pitágoras,

$$AE^2+AI^2=IE^2\Leftrightarrow x^2+(3-x)^2=8\Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{7}}{2}$$

y puesto que, por hipótesis, $AI>AE$, se deduce, finalmente, que $x=\frac{3-\sqrt{7}}{2}$

y la respuesta correcta es $3+7+2=12$ (D)

21

Observamos que los cinco polinomios presentados cumplen $p(-1)=-2018<0$ y $p(0)=1>0$.
Observamos también que todos los polinomios tienen potencias de x de grado impar, y que en el polinomio B se encuentran los exponentes menores (excepto E)
Sabemos que si $a\in(-1,0)$, entonces $a^n<a^m$ si $n>m$ y n,m son impares, luego las posibles raíces de A, C y D siempre serán menores (más negativas) que las posibles raíces de B.
Así pues, solo nos queda comparar B y E.

La raíz de E es $a=\frac{-2018}{2019}\cong -0.99$.

Observamos que $\frac{-1}{2}=-0.50$ es aproximadamente una raíz del polinomio B:

$$\left(\frac{-1}{2}\right)^{17}+2018\left(\frac{-1}{2}\right)^{11}+1=\frac{-1}{2^{17}}-\frac{2018}{2^{11}}+1=\frac{-1}{2^{17}}-\frac{2018}{2048}+1\cong\frac{-1}{2^{17}}-\frac{1}{2}+1\cong 0$$

Y podemos asegurar que la raíz de B será mayor que la raíz de E.
Así pues, la respuesta correcta es (B).

Fuente: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AMC_12A_Problems/Problem_21

22

Calculamos las raíces de $4+4\sqrt{15}i$:

$$4+4\sqrt{15}i=z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi\Rightarrow\begin{cases}a^2-b^2=4\\2ab=4\sqrt{15}\end{cases}$$

$$\left|4+4\sqrt{15}i\right|=\sqrt{4^2+\left(4\sqrt{15}\right)^2}=\sqrt{4^2+4^2\cdot 15}=\sqrt{4^2(1+15)}=\sqrt{16^2}=16$$

$$16=\left|z^2\right|=\left|z\right|^2\Rightarrow 16=a^2+b^2$$

Luego

$$20=2a^2\Rightarrow 10=a^2\Rightarrow\begin{cases}a=\sqrt{10}\Rightarrow 2\sqrt{10}b=4\sqrt{15}\Rightarrow b=\frac{4\sqrt{15}}{2\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{3\cdot 5}}{2\sqrt{2\cdot 5}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{6}\\a=-\sqrt{10}\Rightarrow b=-\sqrt{6}\end{cases}$$

Las dos raíces cuadradas son $z_1=\sqrt{10}+\sqrt{6}i$, y $z_2=-\sqrt{10}-\sqrt{6}i$
cumpliendo: $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=\sqrt{10+6}=\sqrt{16}=4$
El ángulo α que determina z_1 como punto del plano cumple:

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{4},\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{4}$$

Calculamos las raíces de $2+2\sqrt{3}i$:

$$2+2\sqrt{3}i=z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi\Rightarrow\begin{cases}a^2-b^2=2\\2ab=2\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\left|2+2\sqrt{3}i\right|=\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{2^2+2^2\cdot 3}=\sqrt{2^2(1+3)}=\sqrt{16}=4$$

$$4=\left|z^2\right|=\left|z\right|^2\Rightarrow 4=a^2+b^2$$

Luego

$$6=2a^2 \Rightarrow 3=a^2 \Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt{3} \Rightarrow 2\sqrt{3}b=2\sqrt{3} \Rightarrow b=1 \\ a=-\sqrt{3} \Rightarrow b=-1 \end{cases}$$

Las dos raíces cuadradas son $z_3=\sqrt{3}+i$, y $z_4=-\sqrt{3}-i$, cumpliendo:

$$|z_3|=|z_4|=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$$

El ángulo β que determina z_3 como punto del plano cumple:

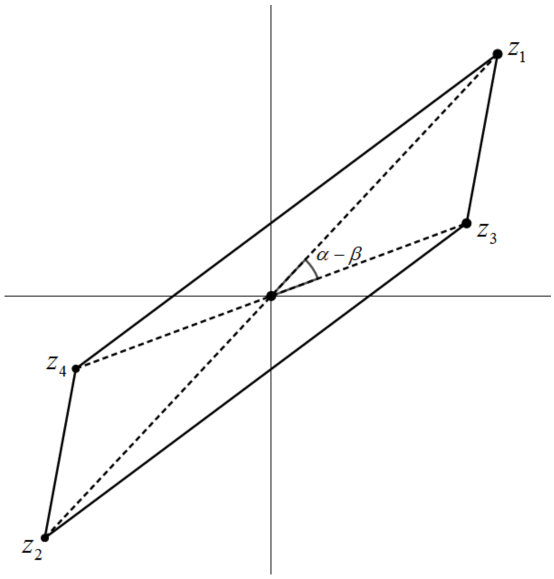
$$\sin\beta=\frac{1}{2},\ \cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Luego el ángulo entre los puntos z_1 y z_3 cumple

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{6}}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{4}\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{8}$$

Y el área del triángulo que determinan los puntos z_1 y z_3 y el origen de coordenadas es:

$$A=\frac{1}{2}|z_1||z_2|\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}4\cdot 2\cdot\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{8}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}$$



Y el área total será $4A=4\left(\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}\right)=6\sqrt{2}-2\sqrt{10}$, y la respuesta al problema es

$6+2+2+10=20 \quad$ (A)

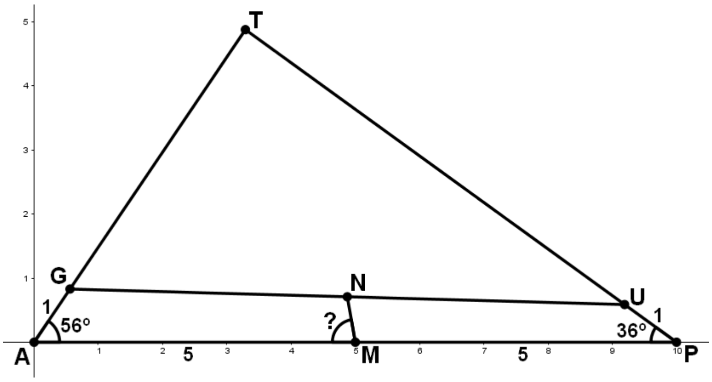
Observación: Una forma mucho más sencilla de calcular el área del triángulo sabiendo las coordenadas es mediante la fórmula "Shoelace" (ver GA/18.6.6): $(0,0)$, $\left(\sqrt{10},\sqrt{6}\right)$, $\left(\sqrt{3},1\right)$:

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{10} & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{6} & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left|\sqrt{10}\cdot 1-\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}\right|=\frac{1}{2}\left(3\sqrt{2}-\sqrt{10}\right)$$

23

Primera versión. Mediante geometría cartesiana y trigonometría.

Sea $A=(0,0)$, $P=(10,0)$, $M=(5,0)$.



Entonces $G=(\cos 56^\circ, \sin 56^\circ)$, $U=(10-\cos 36^\circ, \sin 36^\circ)$, y por tanto

$$N=\left(\frac{\cos 56^\circ+10-\cos 36^\circ}{2}, \frac{\sin 56^\circ+\sin 36^\circ}{2}\right)=\left(\frac{\cos 56^\circ-\cos 36^\circ}{2}+5, \frac{\sin 56^\circ+\sin 36^\circ}{2}\right)$$

El vector $\overrightarrow{MN}$ será $\overrightarrow{MN}=N-M=\left(\frac{\cos 56^\circ-\cos 36^\circ}{2}, \frac{\sin 56^\circ+\sin 36^\circ}{2}\right)$, y aplicando la identidad de la semisuma de ángulos (TR/5.1r):

$$\tan\alpha=\frac{(\sin 56^\circ+\sin 36^\circ)/2}{(\cos 56^\circ-\cos 36^\circ)/2}=\frac{\sin 56^\circ+\sin 36^\circ}{\cos 56^\circ-\cos 36^\circ}\overset{(*)}{=}\frac{\sin 56^\circ+\sin 144^\circ}{\cos 56^\circ+\cos 144^\circ}=\tan(100^\circ)$$

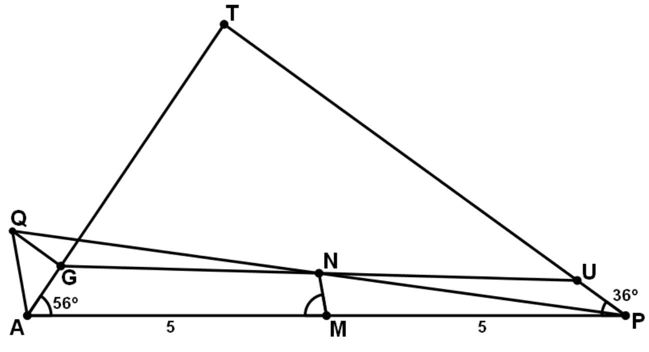
El ángulo agudo que nosotros estamos buscando será $180^\circ-100^\circ=80^\circ$ (E)

Nota: Un desarrollo alternativo en (*) aplicando las igualdades de paso de suma a producto es:

$$\frac{\sin 36^\circ+\sin 56^\circ}{\cos 36^\circ-\cos 56^\circ}\overset{(*)}{=}\frac{2\sin 46^\circ\cos 10^\circ}{-2\sin 46^\circ\sin(-10^\circ)}=\frac{\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ}=\tan(80^\circ)$$

Segunda versión. Mediante triángulos semejantes.

Sea Q el punto de la recta NP tal que $QN=NP$. Trazamos los segmentos $\overline{AQ}$ y $\overline{GQ}$.



Por ser N y M puntos medios de dos lados del triángulo ΔAQP tenemos $AQ // MN$ y $\angle PMN=\angle PAQ$.

Está claro que los triángulos ΔNUP y ΔNGQ son congruentes, por lo que $QG = UP = 1$, y $\angle GQN = \angle NPU$. De $QG = AG = 1$ se deduce que ΔAGQ es isósceles en G y por tanto $\angle AQG = \angle GAQ$.

Observemos el triángulo ΔAPQ:

$$\angle GQN + \angle QPA = \angle QPU + \angle QPA = \angle P = 36º$$

Luego

$$56º + \angle GAQ + \angle AQG + \angle GQN + \angle QPA = 180º \Rightarrow$$

$$56º + \angle GAQ + \angle AQG + 36º = 180º \Rightarrow$$

$$2\angle GAQ = \angle GAQ + \angle AQG = 180º - 56º - 36º = 88º \Rightarrow \angle GAQ = 44º$$

Y finalmente:

$$\angle PMN = \angle PAQ = \angle PAG + \angle GAQ = 56º + 44º = 100º \Rightarrow \angle AMN = 180º - 100º = 80º$$

Tercera versión. Mediante lugar geométrico.

Trazamos la bisectriz TX del ángulo $\angle T$. $\angle ATX = \angle XTP = 44º$ y por tanto $\angle AXT = 180º - 45º - 44º = 80º$. Vamos a demostrar que $MN // XT$, y por tanto $\angle AMN = \angle AXT = 80º$.

Se puede observar que la recta MN es independiente de la longitud concreta $AG = UP = 1$, es decir, que obtenemos la misma recta MN tomando cualquier distancia $AG = UP = x$ que queramos. El lugar geométrico de los puntos N_x al tomar el punto medio del segmento $\overline{G_x U_x}$ con $AG_x = PU_x = x$ es una recta puesto que los puntos G_x y U_x varían linealmente con x. El punto M aparece tomando $x = 0$, luego M pertenece a dicha recta.

Sean $N' = N_x$, $G' = G_x$, y $U' = U_x$ para el caso concreto $x = AT$.

Entonces $N' \in TP$ (el punto N' pertenece a TP y no a AT porque $PT > AT$)

También está claro que $G' = T$.

Sea $a = AT$, $b = TP$ y $c = PT$. Entonces $AG' = PU' = AT = a$.

$PN' = \dfrac{a+b}{2}$ (????) , y por tanto $\dfrac{PN'}{PT} = \dfrac{(a+b)/2}{b} = \dfrac{a+b}{2}$

Por otro lado, aplicando el Teorema de la bisectriz:

$$\frac{XP}{AX} = \frac{TP}{AT} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{XP}{c - XP} = \frac{b}{a} \Rightarrow a\,XP + b\,XP = cb \Rightarrow XP = \frac{cb}{a+b}$$

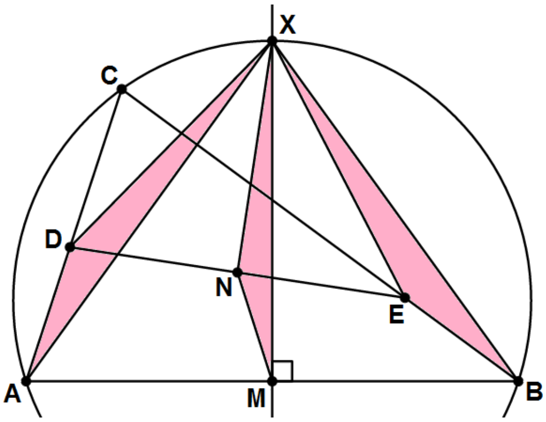
$$PM = c/2 \Rightarrow \frac{PM}{PX} = \frac{c/2}{cb/(a+b)} = \frac{a+b}{2b}$$

Así pues, hemos visto que $\dfrac{PN'}{PT} = \dfrac{PM}{PX}$, y por tanto la recta que contiene todos los N_x debe ser paralela a la recta AX, tal y como queríamos ver.

Cuarta versión. Mediante una semejanza espiral y Punto de Miquel.

Nos basamos en el siguiente lema:

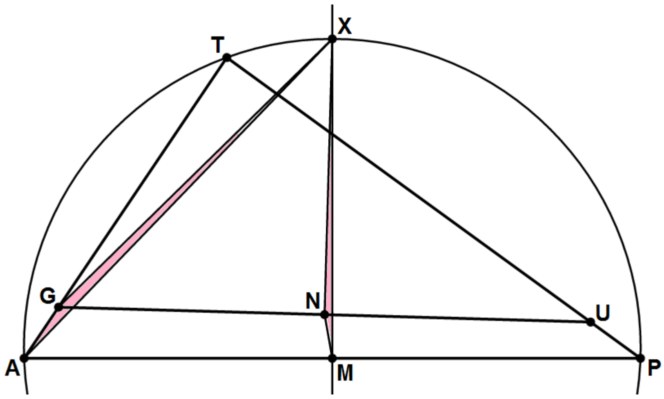
Dado un triángulo ΔABC y puntos D y E en $\overline{AC}$ y en $\overline{BC}$ respectivamente, tales que $AD = BE$, el punto medio X del arco mayor de ACB en la circunferencia circunscrita (ΔABC) es el punto de Miquel asociado al cuadrilátero ADEB.



Luego es el centro de la semejanza espiral que envía el segmento $\overline{DE}$ a $\overline{AB}$.
Puesto que una semejanza espiral envía puntos medios a puntos medios, enviará el punto medio N del segmento $\overline{DE}$ al punto medio M del segmento $\overline{AB}$, y por tanto:

$$\angle XMN = \angle XAD = \angle XBE$$

Con este lema ya podemos prescindir los incómodos puntos N y M. Volviendo a nuestro problema:



El triángulo ΔPAX es isósceles, y por tanto

$$2\angle PAX = 180 - \angle PXA = 180 - \angle PTA = 180 - 88 = 92 \Rightarrow \angle PAX = 46^{\circ}$$

Luego

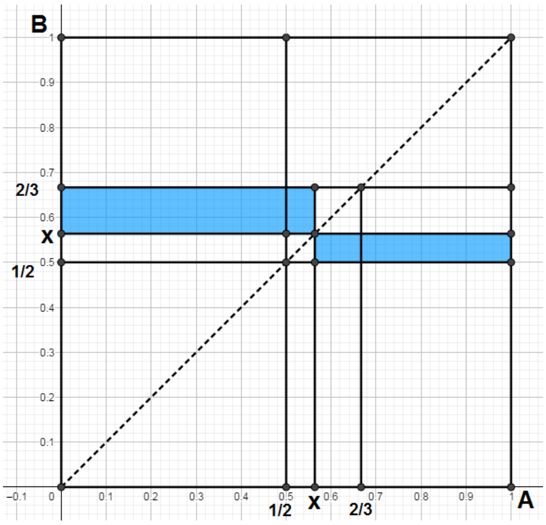
$$\angle XMN = \angle XAG = \angle PAT - \angle PAX = 56^{\circ} - 46^{\circ} = 10^{\circ}$$

Y finalmente: $\angle AMN = 90 - \angle XMN = 90^{\circ} - 10^{\circ} = 80^{\circ}$

Fuente de las versiones 2, 3 y 4: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AMC_12A_Problems/Problem_23

24

Interpretando este problema en términos de áreas, la probabilidad de ganar para $C = x$ es proporcional al área $P_1: A < x < B$ o $P_2: B < x < A$, que corresponde a los dos rectángulos que aparecen en la siguiente figura:



Con lo que podemos modelizar la probabilidad de ganar mediante la fórmula

$$f(x) = x\left(\frac{2}{3} - x\right) + (1-x)\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{2x}{3} - x^2 + x - \frac{1}{2} - x^2 + \frac{1}{2}x = -2x^2 + \frac{13}{6}x - \frac{1}{2}$$

Es decir, una parábola con las ramas hacia abajo, cuyo mínimo lo encontramos en su vértice:

$$v = \frac{-b}{2a} = \frac{-13/6}{2(-2)} = \frac{13}{24} \quad \text{(B)}$$

Nota: En https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AMC_12A_Problems/Problem_24 encontramos un razonamiento alternativo interesante mediante probabilidad condicional.

25

Aplicando la suma de la sucesión geométrica:

$$A_n = \underbrace{\bar{a}\bar{a}\ldots\bar{a}}_{n} = a \cdot \underbrace{11\ldots1}_{n} = a\left(10^0 + 10^1 + \ldots 10^n\right) = a \cdot \frac{10^n - 1}{9}$$

$$B_n = \underbrace{\bar{b}\bar{b}\ldots\bar{b}}_{n} = b \cdot \frac{10^n - 1}{9}$$

$$C_n = \underbrace{\bar{c}\bar{c}\ldots\bar{c}}_{2n} = c \cdot \underbrace{11\ldots1}_{2n} = c \cdot \left(\frac{10^{2n} - 1}{9}\right) = c \cdot \frac{(10^n - 1)(10^n + 1)}{9}$$

$$C_n - B_n = A_n^2 \Leftrightarrow c \cdot \frac{(10^n - 1)(10^n + 1)}{9} - b \cdot \frac{10^n - 1}{9} = \left(a \cdot \frac{10^n - 1}{9}\right)^2 = a^2 \cdot \left(\frac{10^n - 1}{9}\right)^2$$

puesto que $n > 0$ podemos cancelar el factor $\frac{10^n - 1}{9}$ para llegar a

$$c \cdot (10^n + 1) - b = a^2 \cdot \left(\frac{10^n - 1}{9}\right)$$

Esta ecuación es lineal en 10^n, luego si es cierta para dos valores de n concretos será cierta para cualquier n.

Para $n=1$ $c\cdot(10+1)-b=a^2\cdot\left(\frac{10-1}{9}\right)\Leftrightarrow 11c-b=a^2$

Para $n=2$ $c\cdot(100+1)-b=a^2\cdot\left(\frac{100-1}{9}\right)\Leftrightarrow 101c-b=11a^2$

$$\left.\begin{array}{l}11c-b=a^2\\101c-b=11a^2\end{array}\right\}\Rightarrow 101c-b-11c+b=11a^2-a^2\Leftrightarrow 90c=10a^2\Leftrightarrow 9c=a^2$$

$$\left.\begin{array}{l}11c-b=a^2\\101c-b=11a^2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}110c-10b=10a^2\\101c-b=11a^2\end{array}\right\}\Rightarrow 110c-10b-101c+b=10a^2-11a^2$$

$$\Rightarrow 9c-9b=-a^2\Rightarrow a^2-9b=-a^2\Rightarrow 9b=-2a^2\Rightarrow b=\frac{2a^2}{9}$$

Queremos encontrar el valor máximo de $a+b+c=a+\frac{2a^2}{9}+\frac{a^2}{9}=a+\frac{a^2}{3}$

Equivale a encontrar el valor máximo de a.

La ecuación $9c=a^2$ tiene tres soluciones (a,c) : $(3,1)$, $(6,4)$, $(9,9)$.

Pero sustituyendo para encontrar b: $11c-b=a^2\Rightarrow b=11c-a^2$

$(3,1)\Rightarrow b=11-9=2$, $(6,4)\Rightarrow b=44-36=8$, $(9,9)\Rightarrow b=99-81=18$

Vemos que la solución $(9,9)$ no es aceptable pues incumple la condición $b\le 9$.

Observamos que se cumple siempre para $a=6, b=8, c=4$. Lo podemos ver con un ejemplo:

$$n=4\rightarrow 6^2\cdot 1111=39996=40000-4=40000+4-8=4(10^4+1)-8$$

Si observamos los números que se obtienen de la forma $a^2\underbrace{11...1}_{n}$:

1 – 1111	2 – 4444	3 – 9999	4 – 17776	5 – 27775
6 – 39996	7 – 54439	8 – 71104	9 – 89991	

Vemos que el siguiente candidato para obtener un número "parecido" a 10^n sería

$$a=9\rightarrow 9^2\cdot 11...11=89...91$$

Pero vemos que no es aceptable:

$$n=4\rightarrow 9^2\cdot 1111=89991=90000-9=90000+9-18=9(10^4-1)-18$$

Pero b no puede ser 18.

Luego la solución es $6+8+4=18$ (D).

Fuente: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AMC_12A_Problems/Problem_25