AIME II 2018 Enunciados

1

Sean los puntos A, B y C alineados en este orden a lo largo de un camino recto donde la distancia de A a C es de 1800 metros. Ina corre el doble de rápido que Eve, y Paul corre el doble de rápido que Ina. Los tres corredores empiezan a correr al mismo tiempo, Ina empezando en A y corriendo hacia C, Paul empezando en B y corriendo hacia C, y Eve empezando en C y corriendo hacia A. Cuando Paul se encuentra con Eve, da media vuelta y corre hacia A. Sabiendo que Paul e Ina llegan a B al mismo tiempo, determina la longitud, en metros, de A a B.

2

Sean los puntos A, B y C alineados en este orden a lo largo de un camino recto donde la distancia de A a C es de 1800 metros. Ina corre el doble de rápido que Eve, y Paul corre el doble de rápido que Ina. Los tres corredores empiezan a correr al mismo tiempo, Ina empezando en A y corriendo hacia C, Paul empezando en B y corriendo hacia C, y Eve empezando en C y corriendo hacia A. Cuando Paul se encuentra con Eve, da media vuelta y corre hacia A. Sabiendo que Paul e Ina llegan a B al mismo tiempo, determina la longitud, en metros, de A a B.

3

Determina la suma de todos los números enteros positivos $b < 1000$ tal que el número 36_b (escrito en base b) es un cuadrado perfecto y el número 27_b (también escrito en base b) es un cubo perfecto.

4

Se toma aleatoriamente y de forma uniforme un número real a del intervalo $[-20,18]$. La probabilidad de que todas las raíces del polinomio

$$x^4 + 2ax^3 + (2a-2)x^2 + (-4a+3)x - 2$$

sean reales se puede escribir de la forma m/n, donde m y n son enteros coprimos. Determina $m+n$.

5

Sean x, y, z números complejos tales que $xy = -80 - 320i$, $yz = 60$, $zx = -96 + 24i$, donde $i = \sqrt{-1}$. Sean a, b números reales tales que $x + y + z = a + bi$. Determina $a^2 + b^2$.

6

Se toma aleatoriamente y de forma uniforme un número real a del intervalo $[-20,18]$. La probabilidad de que todas las raíces del polinomio

$$x^4 + 2ax^3 + (2a-2)x^2 + (-4a+3)x - 2$$

sean reales se puede escribir de la forma m/n, donde m y n son enteros coprimos. Determina $m+n$.

7

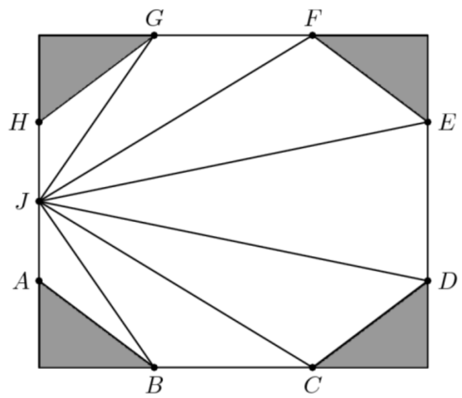
Sea el triángulo ΔABC de lados $AB = 9$, $BC = 5\sqrt{3}$ y $AC = 12$. Marcamos los puntos $A = P_0, P_1, P_2, ..., P_{2450} = B$ en el segmento $\overline{AB}$ de forma que P_k se encuentra entre P_{k-1} y P_{k+1} para todo $k = 1,2,...,2449$, y marcamos los puntos $A = Q_0, Q_1, Q_2, ..., Q_{2450} = C$ en el segmento $\overline{AC}$ de forma que Q_k se encuentra entre Q_{k-1} y Q_{k+1} para todo $k = 1,2,...,2449$. Además, todo segmento $\overline{P_kQ_k}$, con $k = 1,2,...,2449$, es paralelo a $\overline{BC}$. Estos segmentos cortan el triángulo en 2450 regiones, consistiendo en 2449 trapecios y un triángulo. Todas estas 2450 regiones tienen el mismo área. Determina el número de segmentos $\overline{P_kQ_k}$, con $k = 1,2,...,2450$ cuya longitud es racional.

8

Una rana está posicionada en el origen del plano coordenado. Desde el punto (x, y) puede saltar a los puntos $(x+1, y)$, $(x+2, y)$, $(x, y+1)$, $(x, y+2)$. Determina el número de secuencias de salto diferentes en los que la rana, saliendo de $(0,0)$, acaba en $(4,4)$.

9

Sea ABCDEFGH el octágono con lados de longitud $AB = CD = EF = GH = 10$ y $BC = DE = FG = HA = 11$ que se ha formado eliminado los triángulos 6-8-10 de las esquinas de un rectángulo 23×27, con lado $\overline{AH}$ en el lado corto del rectángulo, tal y como se indica en la figura. Sea J el punto medio de $\overline{AH}$, y dividimos este octágono en 7 triángulos trazando los segmentos $\overline{JB}$, $\overline{JC}$, $\overline{JD}$, $\overline{JE}$, $\overline{JF}$ y $\overline{JG}$. Determina el área del polígono convexo cuyos vértices son los baricentros de estos 7 triángulos.



10

Determina el número de funciones $f(x)$ de $\{1,2,3,4,5\}$ en $\{1,2,3,4,5\}$ que satisfacen $f(f(x)) = f(f(f(x)))$ para todo x de $\{1,2,3,4,5\}$.

11

Determina el número de permutaciones de 1, 2, 3, 4, 5, 6 tales que para cada k con $1 \le k \le 5$, al menos uno de los primeros k términos de la permutación es mayor que k.

12

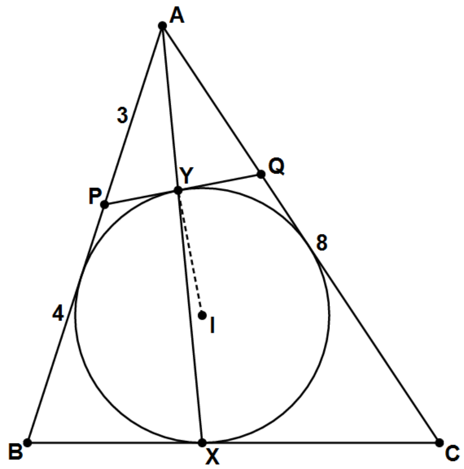
Sea ABCD un cuadrilátero convexo con $AB = CD = 10$, $BC = 14$ y $AD = 2\sqrt{65}$. Supongamos que las diagonales de ABCD se cortan en un punto P, y que la suma de las áreas de los triángulos ΔAPB y ΔCPD es igual a la suma de las áreas de los triángulos ΔBPC y ΔAPD. Determina el área del cuadrilátero ABCD.

13

Misha lanza un dado convencional de seis caras hasta que obtiene la secuencia 1 – 2 – 3 en este orden en tres lanzamientos consecutivos. Determina la probabilidad de que el número de lanzamientos sea impar.

14

Supongamos que el incírculo ω de un triángulo ΔABC es tangente a $\overline{BC}$ en X. Sea $Y \neq X$ el otro punto de intersección de $\overline{AX}$ con ω. Los puntos P y Q pertenecen a $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, de forma que $\overline{PQ}$ es tangente a ω en Y. Suponiendo además que $AP = 3$, $PB = 4$, $AC = 8$, entonces $AQ = \dfrac{m}{n}$, con m y n enteros positivos coprimos. Determina $m + n$.



15

Determina el número de funciones f de $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ en los enteros tales que $f(0) = 0$, $f(6) = 12$ y

$$|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq 3|x - y|$$

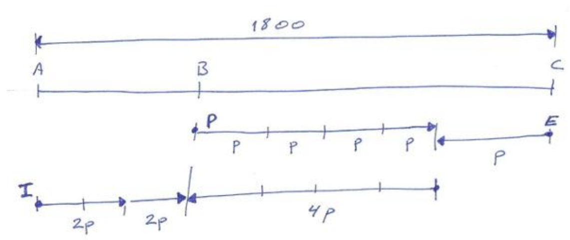
para todo x, y en $\{0,1,2,3,4,5,6\}$.

AIME II 2018 Soluciones

1

Paul corre cuatro veces la velocidad de Eve, luego recorrerá cuatro veces la distancia de Eve, digamos 4p y 1p. En el momento en que se encuentran Paul y Eve, Ina habrá recorrido la mitad de camino que Paul, es decir, 2p, y Paul tendrá que recorrer 4p, y Ina 2p, luego en total, los 1800 metros se descomponen en

$$1800 = 2p + 2p + 4p + p = 9p \Rightarrow p = 1800/9 = 200m$$

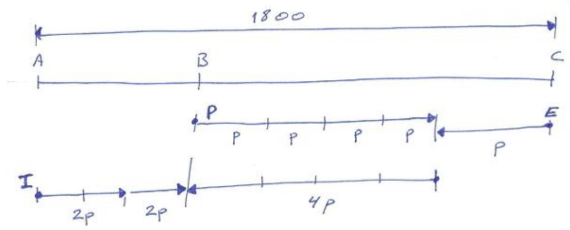


Y por tanto de A a B hay 4p, es decir, 800 m.

2

Paul corre cuatro veces la velocidad de Eve, luego recorrerá cuatro veces la distancia de Eve, digamos 4p y 1p. En el momento en que se encuentran Paul y Eve, Ina habrá recorrido la mitad de camino que Paul, es decir, 2p, y Paul tendrá que recorrer 4p, y Ina 2p, luego en total, los 1800 metros se descomponen en

$$1800 = 2p + 2p + 4p + p = 9p \Rightarrow p = 1800/9 = 200m$$



Y por tanto de A a B hay 4p, es decir, 800 m.

3

Primera versión.

$27_b = 2b + 7$ es un cubo perfecto, es decir, $2b + 7 = m^3$ para cierto entero m.

$b < 1000 \Rightarrow m^3 = 2b + 7 < 2007$

Puesto que hay menos cubos perfectos que cuadrados perfectos, listamos todos los cubos:

$$2^3 = 8,\ 3^3 = 27,\ 4^3 = 64,\ ...,\ 12^3 = 1728$$

Puesto que $2b + 7$ es siempre impar, podemos eliminar de la lista todos los cubos pares, y quedarnos solo con

$$3^3, 5^3, 7^3, 9^3, 11^3$$

$36_b = 3b+6$ es un cuadrado perfecto, es decir, $3b+6=n^2$ para cierto entero n.

$n^2 = 3b+6 = 3(b+2) \Rightarrow 3 \mid n^2 \Rightarrow 3 \mid n \Rightarrow n = 3k \Rightarrow n^2 = (3k)^2 = 9k^2$

Luego nos podemos quedar solo con aquellos cubos divisibles entre 9: 3^3, 9^3

Ya solo nos queda comprobar si estos candidatos se adaptan a nuestras condiciones:
$3^3 = 27 = 2b+7 \Leftrightarrow b = 10 \Rightarrow 3b+6 = 36 = 6^2$, luego la base 10 es aceptable.
$9^3 = 729 = 2b+7 \Leftrightarrow b = 361 \Rightarrow 3 \cdot 361 + 6 = 1089 = 33^2$

Luego el resultado es $361+10 = 371$.

Segunda versión.
$36_b = 3b+6 = 3(b+2) = n^2$ es un cuadrado perfecto, luego $n = 3k \Rightarrow n^2 = 9k^2$.
$3(b+2) = 9k^2 \Rightarrow b+2 = 3k^2 \Rightarrow b = 3k^2 - 2$

El valor de k está limitado superiormente: $b < 1000 \Rightarrow 3k^2 - 2 < 1000 \Rightarrow k < 18$

Sustituyendo en la segunda ecuación:
$m^3 = 2b+7 = 2(3k^2-2)+7 = 6k^2 - 4 + 7 = 6k^2 + 3 = 3(2k^2+1)$

y vemos que 3 es divisor de m^3, y por tanto 3 es divisor de m.
También vemos que es impar:
$2k^2 \ par \Rightarrow 2k^2 + 1 \ impar \Rightarrow 3(2k^2+1) \ impar$

Y que está acotado superiormente:
$b < 1000 \Rightarrow m^3 = 2b+7 < 2 \cdot 1000 + 7 < 2007$

y $13^2 = 2197$, luego $m < 13$

Los cubos que cumplen las condiciones anteriores son dos: 3^3, 9^3, y como en la versión anterior, solo nos queda comprobar que, efectivamente, satisfacen las condiciones del enunciado.

Fuente de estas versiones: www.artofproblemsolving.com

4
Probando mediante Ruffini encontramos dos soluciones reales (El Teorema de las Raíces racionales reduce la búsqueda a $\{1, -1, 2, -2\}$):

$$\begin{array}{r|ccccc}
 & 1 & 2a & 2a-2 & -4a+3 & -2 \\
-1 & & -1 & -2a-1 & -4a+1 & -2 \\
\hline
 & 1 & 2a+1 & 4a-1 & 2 & 0 \\
2 & & 2 & 4a-2 & 2 & \\
\hline
 & 1 & 2a-1 & 1 & 0 &
\end{array}$$

Luego

$$x^4+2ax^3+(2a-2)x^2+(-4a+3)x-2=(x+1)(x-2)\left(x^2+(2a-1)x+1\right)$$

Así pues, este polinomio tendrá las cuatro raíces reales si y solo si

$$x^2+(2a-1)x+1$$

Tiene sus dos raíces reales, es decir, cuando

$$\Delta=(2a-1)^2-4\cdot1\cdot1\geq0\Leftrightarrow(2a-1)^2\geq4=2^2\Leftrightarrow\begin{cases}2a-1\geq2\Leftrightarrow a\geq3/2\\2a-1\leq-2\Leftrightarrow a\leq-1/2\end{cases}$$

Luego el conjunto de valores de a aceptables es $[-20,-1/2]\cup[3/2,18]$, cuya longitud es

$$-\frac{1}{2}-(-20)+18-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{40}{2}+\frac{36}{2}-\frac{3}{2}=\frac{-1+40+36-3}{2}=\frac{72}{2}=36$$

El segmento total mide $18-(-20)=38$ unidades de largo, luego la probabilidad es

$$P=\frac{36}{38}=\frac{18}{19}$$

y la respuesta es $18+19=37$.

5

Primera versión. Resolviendo el sistema.

$$\begin{cases}xy=-80-320i=-80(1+4i)\\yz=60\\zx=-96+24i=24(-4+i)\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}yz=60\Rightarrow y=\dfrac{60}{z}\\xy=-80(1+4i)\end{array}\right\}\Rightarrow x\frac{60}{z}=-80(1+4i)\Rightarrow\frac{x}{z}=-\frac{80}{60}(1+4i)=-\frac{4}{3}(1+4i)\Rightarrow x=-\frac{4}{3}z(1+4i)$$

$$zx=24(-4+i)\Rightarrow z\left(-\frac{4}{3}z(1+4i)\right)=24(-4+i)\Rightarrow z^2=\frac{24(i-4)}{\left(\dfrac{-4}{3}\right)(1+4i)}=-18i$$

Las raíces cuadradas de i son $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, luego las raíces cuadradas de $-18i$ son

$$z=\pm3(i-1)$$

Sea $z=3(i-1)$. Entonces:

$$y=\frac{60}{z}=\frac{60}{3(i-1)}=-10-10i$$

$$xy=-80(1+4i)\Rightarrow x=\frac{-80(1+4i)}{-10-10i}=20+12i$$

Finalmente:
$x+y+z=7+5i \Rightarrow a=7, b=5 \Rightarrow a^2+b^2=7^2+5^2=49+25=74$

Nota: las condiciones del enunciado se cumplen tanto para
$z=3(i-1)$, $y=-10-10i$, $x=20+12i$ como para $z=-3(i-1)$, $y=10+10i$, $x=-20-12i$.

Segunda versión. Mediante notación exponencial.
Pasamos a notación exponencial: $x=r_1e^{i\theta_1}$, $y=r_2e^{i\theta_2}$, $z=r_3e^{i\theta_3}$.

$$|xy|=r_1\cdot r_2=|-80-320i|=80\sqrt{17}$$
$$|yz|=r_2\cdot r_3=|60|=60$$
$$|xz|=r_1\cdot r_3=|-96+24i|=24\sqrt{17}$$

Este sistema tiene por solución: $r_1=4\sqrt{34}$, $r_2=10\sqrt{2}$ y $r_3=3\sqrt{2}$

$$xy=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}=-80-320i=80\sqrt{17}e^{i\arctan(4)} \Rightarrow \theta_1+\theta_2=\arctan(4)$$
$$yz=r_2r_3e^{i(\theta_2+\theta_3)}=60=60e^{i0} \Rightarrow \theta_2+\theta_3=0 \Rightarrow \theta_3=-\theta_2$$
$$xz=r_1r_3e^{i(\theta_1+\theta_3)}=-96+24i=24\sqrt{17}e^{i\arctan(-1/4)} \Rightarrow \theta_1+\theta_3=\arctan(-1/4)$$

$$\left.\begin{array}{l}\theta_1+\theta_2=\arctan(4)\\ \theta_1-\theta_2=\arctan(-1/4)\end{array}\right\} \Rightarrow 2\theta_2=\arctan(4)-\arctan(-1/4)=\pi/2 \Rightarrow \theta_2=\pi/4$$
Y por tanto $\theta_3=-\theta_2=-\pi/4$.

De todo lo anterior deducimos que $y=10\sqrt{2}e^{i\pi/4}=10+10i$, $z=3\sqrt{2}e^{-i\pi/4}=3-3i$
y utilizando $xy=-80-320i$, deducimos que $x=-20-12i$.

Como en la primera versión, basta sumar $x+y+z$ para llegar al resultado 74.

Fuente de esta versión: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AIME_II_Problems/Problem_5

6
Probando mediante Ruffini encontramos dos soluciones reales (El Teorema de las Raíces racionales reduce la búsqueda a $\{1,-1,2,-2\}$):

$$\begin{array}{r|ccccc} & 1 & 2a & 2a-2 & -4a+3 & -2 \\ -1 & & -1 & -2a-1 & -4a+1 & -2 \\ \hline & 1 & 2a+1 & 4a-1 & 2 & 0 \\ 2 & & 2 & 4a-2 & 2 & \\ \hline & 1 & 2a-1 & 1 & 0 & \end{array}$$

Luego
$$x^4+2ax^3+(2a-2)x^2+(-4a+3)x-2=(x+1)(x-2)\left(x^2+(2a-1)x+1\right)$$

Así pues, este polinomio tendrá las cuatro raíces reales si y solo si

$$x^2+(2a-1)x+1$$

Tiene sus dos raíces reales, es decir, cuando
$$\Delta=(2a-1)^2-4\cdot 1\cdot 1\geq 0 \Leftrightarrow (2a-1)^2\geq 4=2^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-1\geq 2 \Leftrightarrow a\geq 3/2 \\ 2a-1\leq -2 \Leftrightarrow a\leq -1/2 \end{cases}$$

Luego el conjunto de valores de a aceptables es $[-20,-1/2]\cup[3/2,18]$, cuya longitud es
$$-\frac{1}{2}-(-20)+18-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{40}{2}+\frac{36}{2}-\frac{3}{2}=\frac{-1+40+36-3}{2}=\frac{72}{2}=36$$

El segmento total mide $18-(-20)=38$ unidades de largo, luego la probabilidad es
$$P=\frac{36}{38}=\frac{18}{19}$$
y la respuesta es $18+19=37$.

7

Fijando un $k=1,2,...,2450$, los triangulos ΔABC y ΔAP_kQ_k son semejantes por Tales, ya que $P_kQ_k \,//\, BC$.

Las regiones separadas por segmentos tienen la misma área $\dfrac{[\Delta ABC]}{2450}$.

Los trapecios se pueden unir de forma que $[\Delta AP_kQ_k]=k\dfrac{[\Delta ABC]}{2450}$

Es decir, la razón de proporcionalidad entre las áreas de los triángulos es:
$$\frac{[\Delta AP_kQ_k]}{[\Delta ABC]}=\frac{k}{2450}=\frac{k}{2\cdot 5^2\cdot 7^2}$$

Sabemos que las áreas están en proporción el cuadrado de la razón de semejanza de las longitudes de los lados, luego la razón de proporcionalidad de las longitudes es:
$$\alpha=\sqrt{\frac{k}{2\cdot 5^2\cdot 7^2}}=\frac{\sqrt{k/2}}{5\cdot 7}$$

Y por tanto

$P_kQ_k=\alpha BC=\alpha\cdot 5\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{k/2}}{5\cdot 7}\cdot 5\sqrt{3}=\dfrac{1}{7}\sqrt{\dfrac{3k}{2}}=\dfrac{1}{7}\sqrt{\dfrac{3\cdot 3k}{3\cdot 2}}=\dfrac{3}{7}\sqrt{\dfrac{k}{6}}$ que será un número racional si y solo si $\sqrt{\dfrac{k}{6}}$ es racional, es decir, para todos los k tales que $k/6$ sea un cuadrado perfecto:
$$k/6=p^2 \Rightarrow k=6p^2$$

$p=1\Rightarrow k=6\cdot 1^2=6$, $p=2\Rightarrow k=6\cdot 2^2=24$, ... , $p=20\Rightarrow k=6\cdot 20^2=2400$,

Con $p=21\Rightarrow k=6\cdot 21^2=2646$ ya nos pasamos luego hay 20 valores de k aceptables.

8

Llamaremos H_1, H_2, V_1 y V_2 a los saltos respectivos $(x+1,y)$, $(x+2,y)$, $(x,y+1)$, $(x,y+2)$.

Está claro que la rana ha de realizar cuatro pasos hacia la derecha y cuatro pasos hacia arriba. Estos pasos se pueden realizar en cualquier orden.

Con ocho saltos, la única secuencia posible es

H_1 H_1 H_1 H_1 V_1 V_1 V_1 V_1 y todas sus permutaciones posibles.

$$P_8^{4,4} = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2} = 2\cdot 7\cdot 5 = 70$$

Con siete saltos:

H_2 H_1 H_1 V_1 V_1 V_1 V_1 y todas sus permutaciones posibles.

H_1 H_1 H_1 H_1 V_2 V_1 V_1 y todas sus permutaciones posibles.

$$P_7^{2,4} = \frac{7!}{2!4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{2} = 7\cdot 3\cdot 5 = 105 \to 105\cdot 2 = 210$$

Con seis saltos:

H_2 H_2 V_1 V_1 V_1 V_1 y todas sus permutaciones posibles.

H_1 H_1 H_1 H_1 V_2 V_2 y todas sus permutaciones posibles.

$$P_6^{2,4} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15 \to 15\cdot 2 = 30$$

H_2 H_1 H_1 V_2 V_1 V_1 y todas sus permutaciones posibles.

$$P_6^{2,2} = \frac{6!}{2!2!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{2} = 6\cdot 5\cdot 2\cdot 3 = 180$$

Con cinco saltos:

H_2 H_2 V_2 V_1 V_1 y todas sus permutaciones posibles.

V_2 V_2 H_2 H_1 H_1 y todas sus permutaciones posibles.

$$P_5^{2,2} = \frac{5!}{2!2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{2} = 30 \to 30\cdot 2 = 60$$

Con cuatro saltos:

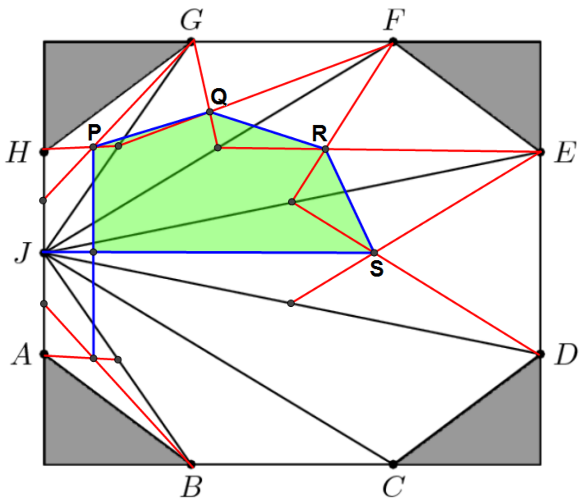
H_2 H_2 V_2 V_2 y todas sus permutaciones posibles.

$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$$

En total: $70+210+30+180+60+6=556$ secuencias posibles.

9

Dibujamos los puntos medios de los lados y con ellos trazamos las medianas y localizamos los baricentros. Al hacer el dibujo vemos que, por simetría, podemos reducir nuestro estudio a la parte superior:



Determinamos las coordenadas cartesianas de los puntos:

$$J=(0,0)\,,\ H=(0,5.5)\,,\ G=(8,11.5)\,,\ F=(19,11.5)\,,\ E=(27,5.5)$$

Y aplicamos la fórmula de las coordenadas del baricentro (ver GA/20.9.2)

$$P=\frac{J+H+G}{3}=\frac{(0,0)+(0,5.5)+(8,11.5)}{3}=\frac{(8,17)}{3}=(8/3,17/3)$$

$$Q=\frac{J+G+F}{3}=\frac{(0,0)+(8,11.5)+(19,11.5)}{3}=\frac{(27,23)}{3}=(9,23/3)$$

$$R=\frac{J+F+E}{3}=\frac{(0,0)+(19,11.5)+(27,5.5)}{3}=\frac{(46,17)}{3}=(46/3,17/3)$$

$$S=\frac{2}{3}(27,0)=(18,0)$$

Descomponiendo la figura en un rectángulo y dos triángulos obtenemos su área:

$$\left(\frac{46}{3}-\frac{8}{3}\right)\cdot\frac{17}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{46}{3}-\frac{8}{3}\right)\left(\frac{23}{3}-\frac{17}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(18-\frac{46}{3}\right)\left(\frac{17}{3}\right)=$$

$$=\frac{38}{3}\cdot\frac{17}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{38}{3}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{17}{3}=92$$

Así pues, el área del polígono del enunciado es $92\cdot 2=184$.

Observación. Una vez determinados los puntos, el área se podría haber determinado también mediante la fórmula “Shoelace” (ver GA/18.6.5).

10

La condición del enunciado equivale a decir que todo elemento de $\{1,2,3,4,5\}$ tiene un ciclo de longitud igual o menor que 3:

Longitud 1:

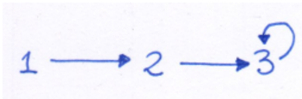
$$f(x)=x \Rightarrow \begin{cases} f(f(x))=f(x)=x \\ f(f(f(x)))=f(f(x))=f(x)=x \end{cases}$$

Longitud 2:

$$f(x)=y\neq x,\ f(y)=y \Rightarrow \begin{cases} f(f(x))=f(y)=y \\ f(f(f(x)))=f(f(y))=f(y)=y \end{cases}$$

Longitud 3:

$$f(x)=y\neq x,\ f(y)=z\neq x,y,\ f(z)=z \Rightarrow \begin{cases} f(f(x))=f(y)=z \\ f(f(f(x)))=f(f(y))=f(z)=z \end{cases}$$



Sin embargo, podemos observar que la condición del enunciado no se cumpliría para longitudes superiores a 3.

Sea a el número de elementos con ciclo de longitud 1, sea b el número de elementos con ciclo de longitud 2 y sea c el número de elementos con ciclos de longitud 3.

Está claro que $a+b+c=5$, y que si $a<4$ entonces $b>0$, puesto que si existe un elemento con ciclo igual a 3, $f^3(x)=x$, entonces $f^2(f(x))=f^3(x)=x$ y por tanto $f(x)$ será un elemento cuyo ciclo tendrá longitud 2.

Está claro también que $a>0$.

Ordenaremos los casos empezando por a, y luego por b:

1. $a=5$, $b=0$, $c=0$

   1 caso.

2. $a=4$, $b=0$, $c=1$

   No se puede dar.

3. $a = 4$, $b = 1$, $c = 0$

$5 \cdot 4 = 20$ casos.

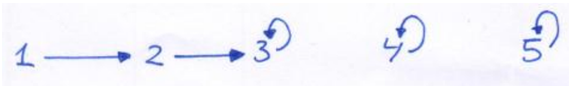
4. $a = 3$, $b = 0$, $c = 2$

No se puede dar.

5. $a = 3$, $b = 1$, $c = 1$

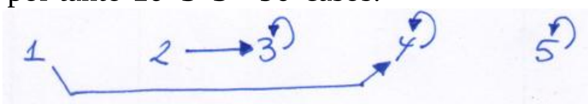
$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{20}{2} = 10$ grupos de 3 elementos de ciclo 1,

$10 \cdot 2 \cdot 3 = 60$ casos.



6. $a = 3$, $b = 2$, $c = 0$

$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{20}{2} = 10$ grupos de 3, y los otros dos pueden ir a cualquiera de los 3 elementos de ciclo 1, por tanto $10 \cdot 3 \cdot 3 = 90$ casos.



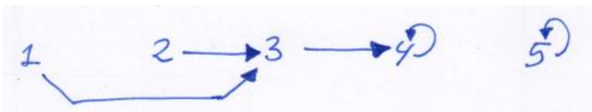
7. $a = 2$, $b = 0$, $c = 3$

No se puede dar.

8. $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$

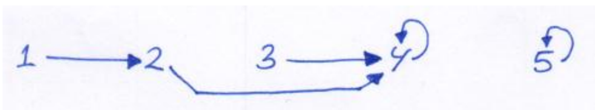
$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{20}{2} = 10$ grupos de 2 elementos que tendrán asociados ciclos de longitud 1,

$10 \cdot 3 \cdot 2 = 60$ casos.



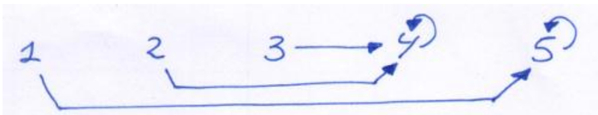
9. $a = 2$, $b = 2$, $c = 1$

$10 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 240$ casos.



10. $a = 2$, $b = 3$, $c = 0$

$10 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 80$ casos.

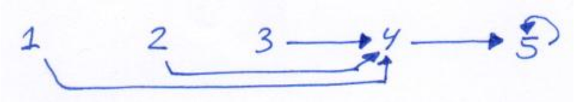


11. $a=1, b=0, c=4$

No se puede dar.

12. $a=1, b=1, c=3$

Tenemos 5 candidatos para el elemento de ciclo 1.
Después, 4 candidatos para el elemento de ciclo 2.
Los tres que quedan han de ir todos al candidato de ciclo 2.
En total, $5 \cdot 4 = 20$ casos.



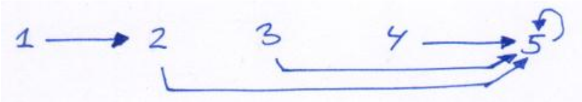
13. $a=1, b=2, c=2$

Tenemos 5 candidatos para el elemento de ciclo 1.
De los 4 restantes, seleccionamos 2 para tener ciclo de longitud 2.

$$5 \cdot \binom{4}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 5\frac{4!}{2!2!} \cdot 2 \cdot 2 = 5\frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 120 \text{ casos.}$$

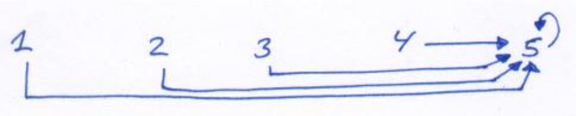
14. $a=1, b=3, c=1$

$$5 \cdot \binom{4}{3} \cdot 3 = 5 \cdot \frac{4!}{3!1!} \cdot 3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ casos.}$$



15. $a=1, b=4, c=0$

Hay 5 casos.



En total, tendremos $1+20+60+90+60+240+80+20+120+60+5=756$ casos.

Observaciones. En la solución "oficial" de AoSP, encontramos la fórmula general para determinar el número de elementos en cada caso:

$$\binom{5}{a} \cdot \binom{5-a}{b} \cdot a^b \cdot b^c$$

También se indica que este problema apareció en la prueba "**Standford Math Tournament, Advanced Topics Test**" del 2011, y en "**Mock AIME 2**" 2010 (problema 7)

Fuente de la solución: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AIME_II_Problems/Problem_10

11

El número total de permutaciones es $P_6 = 6! = 720$, vamos a contar el número de permutaciones que no cumplen la condición del enunciado, es decir, que para cada k con $1 \le k \le 5$, todos los primeros k términos de la permutación son menores o iguales que k.

Caso 1: $k = 1$
Son todas las permutaciones que empiezan con 1: 1*****, es decir: $P_5 = 5! = 120$.

Caso 2: $k = 2$.
Son todas las permutaciones que empiezan por todas las permutaciones posibles de 12, es decir: 12**** y 21****. Las primeras ya están contadas en el caso 1, luego son todas las que empiezan por 21: $P_4 = 4! = 24$.

Caso 3: $k = 3$
Son todas las permutaciones que empiezan por todas las permutaciones posibles de 123, es decir:

123*** Ya contadas en el caso 1	132*** Ya contadas en el caso 1
213*** Ya contadas en el caso 2	231***
312***	321***

Luego hay $3P_3 = 3 \cdot 3! = 18$

Caso 4: $k = 4$
Son todas las permutaciones que empiezan por todas las permutaciones posibles de 1234, es decir:

1234** Ya contadas en el caso 1	1243** Ya contadas en el caso 1
1324** Ya contadas en el caso 1	1342** Ya contadas en el caso 1
1423** Ya contadas en el caso 1	1432** Ya contadas en el caso 1
2134** Ya contadas en el caso 2	2143** Ya contadas en el caso 2
2314** Ya contadas en el caso 3	2341**
2413**	2431**
3124** Ya contadas en el caso 3	3142**
3214** Ya contadas en el caso 3	3241**
3412**	3421**
4123**	4132**
4213**	4231**
4312**	4321**

Luego hay $13P_2 = 13 \cdot 2! = 26$

Caso 5: $k = 5$
Son todas las permutaciones que empiezan por todas las permutaciones posibles de 12345, es decir:
1***** Ya contadas en el caso 1

21**** Ya contadas en el caso 2	231*** Ya contadas en el caso 3
23415* Ya contadas en el caso 4	23451*
23514*	23541*
24135* Ya contadas en el caso 4	24153*

24315* Ya contadas en el caso 4	24351*
24513*	24531*
25134*	25143*
25314*	25341*
	11 Casos que empiezan por 2
31245* Ya contadas en el caso 3	31254* Ya contadas en el caso 3
31425* Ya contadas en el caso 4	31452*
31524*	31542*
32145* Ya contadas en el caso 3	32154* Ya contadas en el caso 3
32415* Ya contadas en el caso 4	32451*
32514*	32541*
34125* Ya contadas en el caso 4	34152*
34215* Ya contadas en el caso 4	34251*
34512*	34521*
35124*	35142*
35214*	35241*
35412*	35421*
	16 Casos que empiezan por 3
41235* Ya contadas en el caso 4	41253*
41325*	41352*
41523*	41532*
42135* Ya contadas en el caso 4	42153*
42315* Ya contadas en el caso 4	42351*
42513*	42531*
43125* Ya contadas en el caso 4	43152*
43215* Ya contadas en el caso 4	43251*
43512*	43521*
45123*	45132*
45213*	45231*
45312*	45321*
	20 Casos que empiezan por 4
5*****	$P_4 = 24$ Casos que empiezan por 5

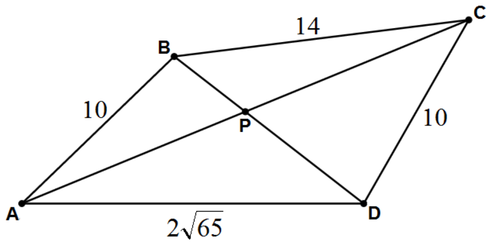
En total hay $11+16+20+24=71$ casos.

Así pues, que no cumplan la condición del enunciado hay
$120+24+18+26+71=259$

Y finalmente, casos que sí cumplan la condición hay $720-259=461$.

Observación: En https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AIME_II_Problems/Problem_11
Se pueden encontrar otras soluciones alternativas, sin pasar al complementario, (tal vez) más elegantes que esta.

12



Utilitzando que $\sin\alpha = \sin(180-\alpha)$ tenemos:

$$[\Delta APB]+[\Delta CPD]=[\Delta BPC]+[\Delta APD] \Leftrightarrow$$

$$\frac{AP\cdot BP\cdot \sin\angle APB}{2}+\frac{DP\cdot CP\cdot \sin\angle DPC}{2}=\frac{AP\cdot DP\cdot \sin\angle APD}{2}+\frac{BP\cdot CP\cdot \sin\angle BPC}{2} \Leftrightarrow$$

$$AP\cdot BP + DP\cdot CP = AP\cdot DP + BP\cdot CP \Leftrightarrow$$

$$AP\cdot BP + DP\cdot CP - AP\cdot DP - BP\cdot CP = 0 \Leftrightarrow$$

$$(AP-CP)(BP-PD)=0$$

Luego el punto P de corte de las dos diagonales es el punto medio de una de ellas. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $AP = CP$.

Y por tanto $[\Delta APD]=[\Delta CPD]$ y $[\Delta APB]=[\Delta BPC]$ y por consiguiente

$$[\Delta APB]+[\Delta CPD]=[\Delta BPC]+[\Delta APD] \Leftrightarrow$$

$$[\Delta BPC]+[\Delta CPD]=[\Delta APB]+[\Delta APD] \Leftrightarrow$$

$$[\Delta BDC]=[\Delta ABD] \Leftrightarrow$$

$$\frac{AB\cdot AD\cdot \sin\angle A}{2}=\frac{BC\cdot CD\cdot \sin\angle C}{2} \Leftrightarrow$$

$$10\cdot 2\sqrt{65}\cdot \sin\angle A = 14\cdot 10\cdot \sin\angle C \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{65}\sin\angle A = 7\sin\angle C \Rightarrow$$

$$65\sin^2\angle A = 49\sin^2\angle C \quad (1)$$

Por otro lado, aplicando el Teorema del Coseno:

$$BD^2 = 10^2 + \left(2\sqrt{65}\right)^2 - 2\cdot 10\cdot 2\sqrt{65}\cos A$$

$$BD^2 = 10^2 + (14)^2 - 2\cdot 10\cdot 14\cos C$$

Y por tanto:

$$10^2 + 4\cdot 65 - 2\cdot 10\cdot 2\sqrt{65}\cos A = 10^2 + 14^2 - 2\cdot 10\cdot 14\cos C \Leftrightarrow$$

$$260 - 40\sqrt{65}\cos A = 196 - 280\cos C \Leftrightarrow$$

$$260 - 196 = 40\sqrt{65}\cos A - 280\cos C \Leftrightarrow$$

$$32 = 20\sqrt{65}\cos A - 140\cos C \Leftrightarrow 8 = 5\sqrt{65}\cos A - 35\cos C$$

$$\frac{8}{5}=\sqrt{65}\cos A-7\cos C\Rightarrow 65\cos^2 A=\left(\frac{8}{5}+7\cos C\right)^2$$

$$\Rightarrow 65\left(1-\sin^2 A\right)=\left(\frac{8}{5}+7\cos C\right)^2$$

$$\Rightarrow 65\left(1-\frac{49\sin^2 C}{65}\right)=\left(\frac{8}{5}+7\cos C\right)^2\Leftrightarrow$$

$$65-49\sin^2 C=\left(\frac{8}{5}\right)^2+2\frac{8}{5}7\cos C+49\cos^2 C\Leftrightarrow$$

$$65=\left(\frac{8}{5}\right)^2+2\frac{8}{5}7\cos C+49\left(\sin^2 C+\cos^2 C\right)\Leftrightarrow$$

$$65=\left(\frac{8}{5}\right)^2+2\frac{8}{5}7\cos C+49\Leftrightarrow$$

$$16=\left(\frac{8}{5}\right)^2+2\frac{8}{5}7\cos C\Leftrightarrow\cos C=\frac{3}{5}\Rightarrow\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$

Y por tanto, finalmente:

$$[ABCD]=2[\Delta BDC]=2\frac{14\cdot 10\sin C}{2}=140\frac{4}{5}=112\,.$$

Fuente de esta solución: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AIME_II_Problems/Problem_12

13

Primera versión.

Sea f_n la probabilidad de que el número de lanzamientos sea n.

Observamos que f_n es una función de densidad, es decir:

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i=1$$

Está claro que $f_0=f_1=f_2=0$ puesto que al menos tiene que lanzar el dado 3 veces.

También está claro que $f_3=\frac{1}{6^3}=\frac{1}{216}$.

Nosotros queremos determinar la probabilidad de un lanzamiento impar:

$$P=f_1+f_3+f_5+\ldots=\sum_{i=1}^{\infty} f_{2i-1}$$

Para determinar f_n observamos que “sacar 123 en la tirada n y no antes” equivale a “sacar 123 en la tirada n” y “no sacar 123 en las tiradas anteriores hasta n-3”, es decir:

$$f_n=\frac{1}{216}\left(1-\sum_{i=1}^{n-3} f_i\right)$$

Por otro lado, vemos que

$$f_n - f_{n+1} = \frac{1}{216}\left(1-\sum_{i=1}^{n-3} f_i\right) - \frac{1}{216}\left(1-\sum_{i=1}^{n-2} f_i\right) = \frac{1}{216}\left(1-\sum_{i=1}^{n-3} f_i - 1 + \sum_{i=1}^{n-2} f_i\right) =$$
$$= \frac{1}{216}\left(\sum_{i=1}^{n-2} f_i - \sum_{i=1}^{n-3} f_i\right) = \frac{1}{216} f_{n-2}$$

Así pues, $f_n = f_{n+1} + \frac{1}{216} f_{n-2}$

Con esta igualdad ya podemos lanzarnos a calcular la probabilidad de P:

$$P = \sum_{i=1}^{\infty} f_{2i-1} = \sum_{i=1}^{\infty}\left(f_{2i-1+1} + \frac{1}{216} f_{2i-1-2}\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(f_{2i} + \frac{1}{216} f_{2i-3}\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} f_{2i} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{216} f_{2i-3} = \sum_{i=1}^{\infty} f_{2i} + \frac{1}{216}\sum_{i=1}^{\infty} f_{2i-3}$$

En esta última igualdad observamos que $\sum_{i=1}^{\infty} f_{2i}$ es la probabilidad de que aparezca la combinación en una tirada par, es decir, el complementario de P:

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_{2i} = 1 - P$$

Y que

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_{2i-3} = P$$

Con lo que llegamos a la ecuación

$$P = (1-P) + \frac{1}{216} P$$

que se resuelve fácilmente:

$$2P = 1 + \frac{1}{216} P \Leftrightarrow 2P - \frac{1}{216} P = 1 \Leftrightarrow \left(2 - \frac{1}{216}\right) P = 1 \Leftrightarrow \frac{431}{216} P = 1 \Leftrightarrow P = \frac{216}{431}$$

Segunda versión (no rigurosa).

Sean P_{par} y P_{impar} las probabilidades de un número par o impar de lanzamientos.

Está claro que $P_{par} + P_{impar} = 1$.

Podemos interpretar este problema en términos de probabilidad condicionada.

La probabilidad de obtener "123" en la primera vez, es 1/216, y si no, las probabilidades se invierten (esto habría que justificarlo convenientemente). Luego, mediante la fórmula de la probabilidad total:

$$P_{impar} = \frac{1}{216}\cdot 1 + \left(1 - \frac{1}{216}\right) P_{par} = \frac{1}{216}\cdot 1 + \left(1 - \frac{1}{216}\right)\left(1 - P_{impar}\right) =$$
$$= \frac{1}{216} + \frac{215}{216}\left(1 - P_{impar}\right)$$

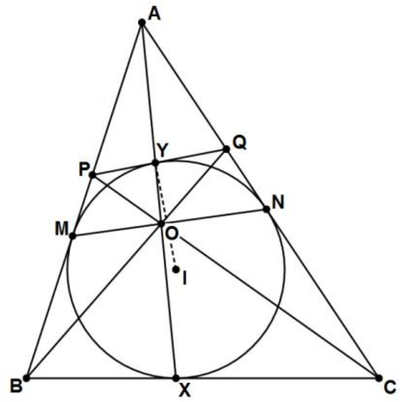
Llegando a la ecuación equivalente a la primera versión.

Fuente de estas soluciones:
https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AIME_II_Problems/Problem_13

14

Primera versión (Mediante geometría proyectiva).

Sean M y N los puntos de contacto entre el circuncírculo ω y los lados respectivos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Aplicando el Teorema de Brianchon (ver GA/12.7.5) a los hexágonos tangenciales QNCBMP y PYQCXB deducimos que las rectas MN, CP, BQ y XY son concurrentes en un punto al que llamaremos O.



Además, por GA/12.5.3 sabemos que $(A,O;Y,X)=-1$

Por otro lado, sea $Z=PQ\cap BC$. La polar de Z es XY, y el punto A pertenece a XY, luego aplicando el Teorema de La Hire (GA/13.5.2), Z pertenecerá a la polar de A, que es MN, luego las rectas PQ, MN y BC son concurrentes en un mismo punto Z.

Observamos que tenemos una perspectividad con centro Z, que conservará razón doble, luego:

$$-1=(A,O;Y,X)=(A,M;P,B)=(A,N;Q,C)$$

De la primera igualdad, y trabajando con valor absoluto ya que nuestros segmentos no están orientados:

$$-1=(A,M;P,B)=\frac{AP\cdot MB}{AB\cdot MP}=\frac{3\cdot(7-AM)}{7\cdot(AM-3)}\Rightarrow AM=\frac{21}{5}$$

Y de la misma manera, con la segunda igualdad, y teniendo en cuenta que $AM=AN$ por GA/11.4.10,

$$1=(A,N;Q,C)=\frac{AQ\cdot NC}{AC\cdot NQ}=\frac{AQ\cdot(8-21/5)}{8\cdot(21/5-AQ)}\Rightarrow AQ=\frac{168}{59}$$

Y la respuesta correcta es $168+59=227$.

Segunda versión. (Mediante Teorema del Seno).

Como en la versión anterior, sean M y N los puntos de contacto entre el circuncírculo ω y los lados respectivos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

Sea $\alpha=\angle BAX$, y sea $\beta=\angle PYA=\angle QYX$.

Puesto que $\angle QYX$ y $\angle YXC$ subtienden el mismo arco de ω, tenemos

$$\beta=\angle PYA=\angle QYX=\angle YXC$$

Por otro lado, puesto que $MP = PY$ por ser ambas tangentes, aplicando el Teorema del Seno al triángulo ΔAPY :

$$\frac{AM}{AP} = \frac{AP + PM}{AP} = 1 + \frac{PM}{AP} = 1 + \frac{PY}{AP} = 1 + \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Y ahora aplicando el Teorema del Seno al triángulo ΔABX :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AB - BM}{AB} = 1 - \frac{BM}{AB} = 1 - \frac{BX}{AB} = 1 - \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Y sumando las dos igualdades anteriores llegamos a

$$2 = \frac{AM}{AB} + \frac{AM}{AP} = \frac{AM}{7} + \frac{AM}{3} \Rightarrow AM = \frac{21}{5}$$

Aplicando el mismo argumento al triángulo ΔAQY obtenemos la ecuación

$$2 = \frac{AN}{AQ} + \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AQ} + \frac{AM}{AC} = \frac{21}{5}\left(\frac{1}{AQ} + \frac{1}{8}\right) \Rightarrow AQ = \frac{168}{59}$$

Fuente de estas dos versiones:
https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AIME_II_Problems/Problem_14
(en donde podemos encontrar otra tercera versión, mediante una combinación del Teorema del Seno y del Teorema del Coseno).

15

Nota preliminar: La resolución que expongo no es nada elegante. A posteriori, más bien parece una tentativa más o menos exitosa de sobrevivir en un mar de casos y condiciones. Pero las soluciones digamos oficiales de
https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AIME_II_Problems/Problem_15
tampoco las he encontrado nada esclarecedoras.

$$|x-y| \le |f(x) - f(y)| \le 3|x-y| \Leftrightarrow 1 \le \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \le 3 \Leftrightarrow 1 \le \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \le 3$$

Por lo tanto podemos interpretar este problema en términos de pendiente de la función: La variación vertical respecto de la variación horizontal.

$$1 \le \left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| \le 3$$

Para $\Delta x = 1$, está claro que $1 \le |\Delta y| \le 3$ y por lo tanto, de un valor x al siguiente $x+1$, los incrementos verticales admitidos son seis: $+3, +2, +1, -1, -2 - 3$.

Así pues, de momento, $f(1) \in \{3, 2, 1, -1, -2, -3\}$, $f(5) \ge 9$, $f(4) \ge 6$, $f(3) \ge 3$, $f(2) \ge 0$.

Para $\Delta x = 2$, tenemos

$$1 \le \left|\frac{\Delta y}{2}\right| \le 3 \Leftrightarrow 2 \le |\Delta y| \le 6$$

Completando una tabla "Primer paso vs Segundo paso" y sombreando los valores que no cumplen esta condición nos queda:

Δy	+3	+2	+1	-1	-2	-3
+3	6	5	4	2	1	0
+2	5	4	3	1	0	-1
+1	4	3	2	0	-1	-2
-1	2	1	0	-2	-3	-4
-2	1	0	-1	-3	-4	-5
-3	0	-1	-2	-4	-5	-6

Luego los únicos casos aceptables para $f(2)$ son: $f(2)=2,3,4,5,6$

Para $\Delta x = 3$, tenemos

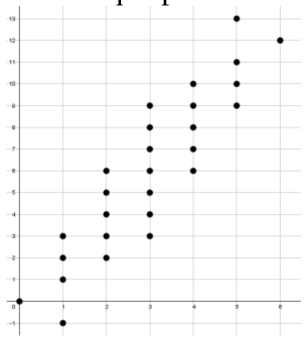
$$1 \leq \left|\frac{\Delta y}{3}\right| \leq 3 \Leftrightarrow 3 \leq |\Delta y| \leq 9$$

Completando una tabla "Primeros dos pasos vs Tercer paso" y sombreando los valores que no cumplen esta condición nos queda:

Δy	+3	+2	+1	-1	-2	-3
+6	9	8	7	5	4	3
+5	8	7	6	4	3	2
+4	7	6	5	3	2	1
+3	6	5	4	2	1	0
+2	5	4	3	1	0	-1
-2	1	0	-1	-3	-4	-5
-3	0	-1	-2	-4	-5	-6
-4	-1	-2	-3	-5	-6	-7
-5	-2	-3	-4	-6	-6	-8
-6	-3	-4	-5	-7	-8	-9

Así pues, puesto que necesito $f(6)=12$, y puesto que $f(2) \leq 6$, los únicos valores aceptables para $f(3)$ son: $f(3)=9,8,7,6,5,4,3$

Eliminando algunos otros casos, los valores que puede tomar la función son los siguientes:



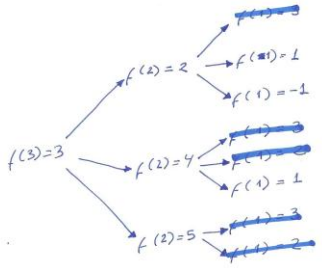
Que son lo suficientemente reducidos como para poder separar por casos:

A) $f(3)=3$.

Hacia delante: 1 camino:

$$f(3)=3 \to f(4)=6 \to f(5)=9$$

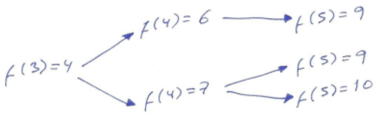
Hacia atrás: 3 caminos:



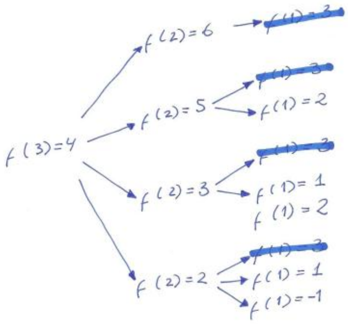
Total: 3 caminos.

B) $f(3) = 4$

Hacia delante: 3 caminos:



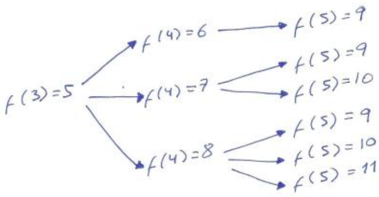
Hacia atrás: 5 caminos:



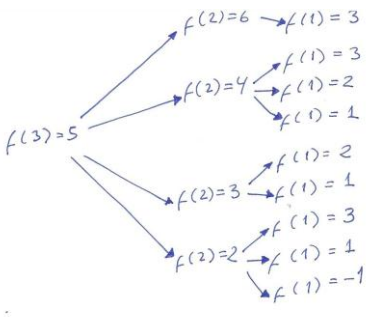
Total: 15 caminos.

C) $f(3) = 5$

Hacia delante: 6 caminos:



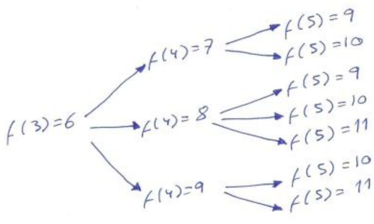
Hacia atrás: 9 caminos:



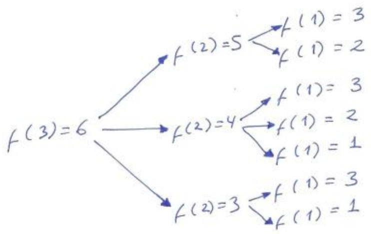
Total: 54 caminos.

D) $f(3) = 6$

Hacia delante: 7 caminos.



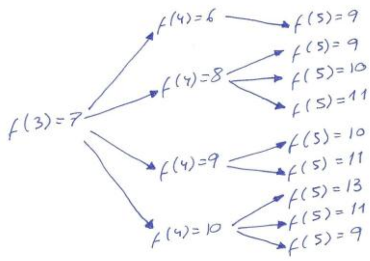
Hacia atrás: 7 caminos.



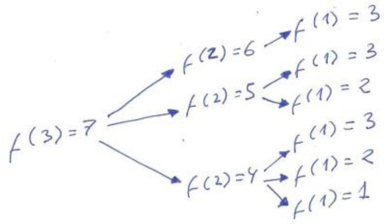
Total: 49 caminos.

E) $f(3)=7$

Hacia delante: 9 caminos.



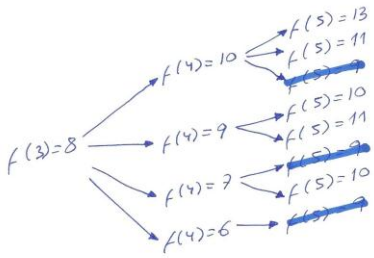
Hacia atrás: 6 caminos.



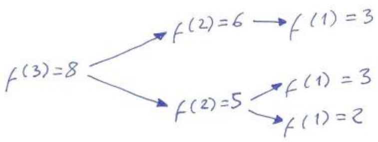
Total: 54 caminos.

F) $f(3)=8$

Hacia delante: 5 caminos.



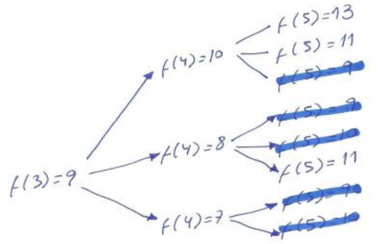
Hacia atrás: 3 caminos.



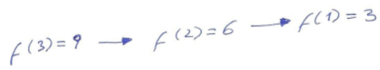
Total: 15 caminos.

G) $f(3)=9$

Hacia delante: 3 caminos.



Hacia atrás: 1 camino.



Total: 3 caminos.

Además, debemos descontar las combinaciones que hacen incompatible el grupo $\{ f(2), f(3), f(4) \}$ que son:

$f(2)=6,\ f(3)=3,\ f(4)=6$, $\quad$ $f(2)=6,\ f(3)=5,\ f(4)=6$,
$f(2)=6,\ f(3)=4,\ f(4)=6$, $\quad$ $f(2)=6,\ f(3)=3,\ f(4)=6$,
$f(2)=6,\ f(3)=7,\ f(4)=6$, $\quad$ $f(2)=6,\ f(3)=8,\ f(4)=6$,
$f(2)=6,\ f(3)=9,\ f(4)=6$, $\quad$ $f(2)=6,\ f(3)=8,\ f(4)=7$.

Con lo que llegamos finalmente a: $3+15+54+49+54+15+3-8=185$ funciones.