AIME I 2018

Este documento forma parte del Compendium www.toomates.net/biblioteca/CompendiumAIME.pdf

1

Sea S el número de pares ordenados de enteros (a,b), con $1 \leq a \leq 100$ y $b \geq 0$ tales que el polinomio $x^2 + ax + b$ se puede factorizar como un producto de dos factores lineales no necesariamente diferentes con coeficientes enteros. Determina el residuo cuando S se divide entre 1000.

2

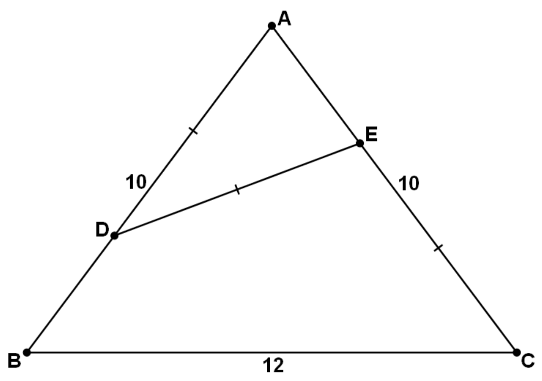
El número n se escribe en base 14 como $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}$, se escribe en base 15 como $\underline{a}\,\underline{c}\,\underline{b}$ y se escribe en base 6 como $\underline{a}\,\underline{c}\,\underline{a}\,\underline{c}$, con $a > 0$. Determina el número n en base 10.

3

Kathy tiene 5 cartas rojas y 5 cartas verdes. Las mezcla y toma 5 al azar, que coloca alineadas. Digamos que Kathy quedará contenta si y solo si todas las cartas rojas tomadas están han quedado adyacentes, y todas las cartas verdes han quedado igualmente adyacentes. Por ejemplo, si sale “RRVVV”, “VVVVR” o “RRRRR” quedará contenta, pero si sale “RRRVR” no lo será. ¿Cuál es la probabilidad de que quede contenta?

4

Sea ΔABC un triángulo en el que $AB = AC = 10$ y $BC = 12$. Sea D un punto situado en el interior del lado $\overline{AB}$ y E un punto situado en el interior de $\overline{AC}$ tales que $AD = DE = EC$. Determina AD.



5

Para cada par ordenado de números reales (x,y) satisfaciendo

$$\log_2(2x+y) = \log_4\left(x^2 + xy + 7y^2\right)$$

Existe un número real K tal que

$$\log_3(3x+y) = \log_9\left(3x^2 + 4xy + Ky^2\right)$$

Determina el producto de todos los valores posibles de K.

6

Sea N la cantidad de números complejos z con la propiedad que $|z|=1$ y $z^{6!}-z^{5!}$ sea un número real. Determina el residuo cuando N se divide entre 1000.

7

Sea un prisma hexagonal recto de altura 2, cuyas bases son hexágonos regulares de lado 1. Cualquier grupo de tres vértices del total de 12 determinan un triángulo. Determina el número de esos triángulos que son isósceles (incluyendo triángulos equiláteros).

8

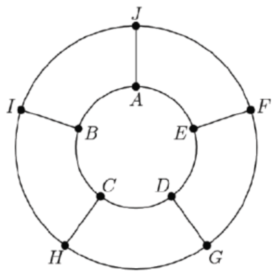
Sea ABCDEF un hexágono equiangular tal que $AB=6$, $BC=8$, $CD=10$, $DE=12$. Denotamos por d el diámetro de la circunferencia más grande que podemos trazar en el interior del hexágono. Determina d^2.

9

Determina el número de subconjuntos de cuatro elementos de $\{1,2,3,4,...,20\}$ con la siguiente propiedad: Contiene dos números distintos que suman 16 y dos números distintos que suman 24. Por ejemplo: $\{3,5,13,19\}$ y $\{6,10,20,18\}$ son aceptables.

10

Disponemos de una rueda consistente en dos circunferencias y cinco radios, con una etiqueta en cada punto de contacto entre los radios, tal y como aparece en la figura. Un gusano avanza por la rueda, empezando en el punto A. Este gusano avanza en cada paso desde un punto etiquetado a uno adyacente. Por la circunferencia interna este gusano solo puede avanzar en el sentido contrario al de las agujas del reloj, mientras que por la circunferencia exterior este gusano solo puede avanzar en el sentido de las agujas del reloj. Por ejemplo, el gusano puede realizar el camino AJABCHCHIJA, que tiene 10 pasos. Sea n el número de caminos de 15 pasos que empiezan y acaban en A. Determina el residuo cuando n se divide entre 1000.



11

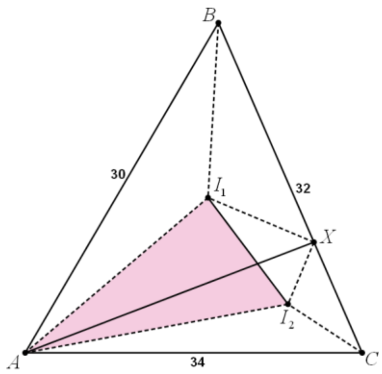
Determina el menor entero positivo n tal que, cuando ese escribe 3^n en base 143, sus últimas dos cifras en dicha base son 01.

12

Para cada subconjunto T de $U=\{1,2,3,...,18\}$, sea $s(T)$ la suma de los elementos de T, definiendo $s(\emptyset)=0$. Si T se toma aleatoriamente entre todos los subconjuntos de U, la probabilidad de que $s(T)$ sea divisible entre 3 es m/n, con m y n enteros positivos coprimos. Determina m.

13

Sea ΔABC el triángulo con lados $AB = 30$, $BC = 32$, $AC = 34$. Fijado un punto X en el interior del lado $\overline{BC}$, sean I_1, I_2 los incentros de los triángulos ΔABX y ΔACX respectivamente. Determina el área mínima del triángulo ΔAI_1I_2 cuando X se mueve en el interior del lado $\overline{BC}$.



14

Sea un heptágono $SP_1P_2P_3EP_4P_5$. Una rana empieza saltando desde el vértice S. Desde cualquiera de los vértices del heptágono excepto E, la rana puede saltar a cualquiera de sus dos vértices adyacentes. La rana se para cuando alcanza el vértice E. Determina el número de secuencias diferentes de no más de 12 saltos que acaban en E.

15

David ha encontrado cuatro palitos de diferentes longitudes que se pueden usar para formar tres cuadriláteros convexos cíclicos no congruentes entre ellos: A, B y C, que se pueden inscribir en una circunferencia de radio 1. Denotaremos por φ_A la medida del ángulo agudo determinado por las diagonales del cuadrilátero A, y definimos φ_B y φ_C de forma similar. Supongamos que $\sin\varphi_A = 2/3$, $\sin\varphi_B = 3/5$ y $\sin\varphi_C = 6/7$. Los tres cuadriláteros tienen la misma área K, que se puede escribir de la forma m/n para ciertos enteros positivos m y n coprimos. Determina $m+n$.

Soluciones.

1

$$x^2 + ax + b = (\alpha_1 x + \beta_1)(\alpha_2 x + \beta_2) = \alpha_1\alpha_2 x + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)x + \beta_1\beta_2$$

Luego

$$1 = \alpha_1\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2 = 1$$

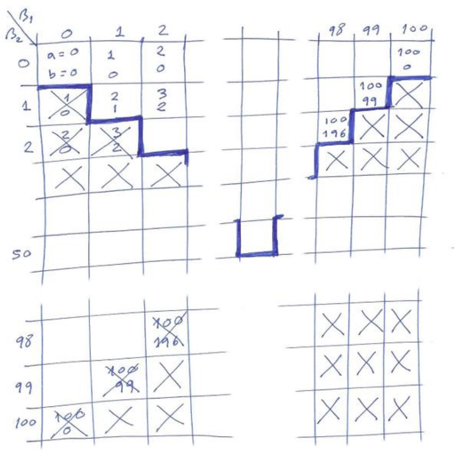
$$a = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1$$

$$0 \le b = \beta_1\beta_2 \Rightarrow \beta_1, \beta_2 \ge 0$$

Luego el problema se reduce a encontrar todas las parejas (a,b) de la forma

$$1 \le a = \beta_2 + \beta_1 \le 100 \,,\ \beta_1, \beta_2 \ge 0$$

Haciendo una tabla de doble entrada β_1, β_2, eliminado las parejas cuya suma excede 100 por la derecha y eliminando las repeticiones que van produciendo por la izquierda:



El total es:

$$101 + 99 + 97 + \ldots + 1 = \sum_{k=0}^{50} 101 - 2k = 101 \cdot 51 - 2\sum_{k=0}^{50} k = 101 \cdot 51 - 2\,\frac{50 \cdot 51}{2} =$$

$$= 51(101 - 50) = 51^2 = 2601$$

Pero debemos restar 1 de la combinación $\beta_1 = \beta_2 = 0$ que tampoco es aceptable.
Así pues, $S = 2600$, y la respuesta correcta es 600.

2

Las condiciones del enunciado se corresponden con el siguiente sistema de ecuaciones diofánticas:

$$\begin{cases} n = 14^2 a + 14b + c \\ n = 15^2 a + 15c + b \\ n = 6^3 a + 6^2 c + 6a + c \end{cases}$$

cumpliendo, además: $0 < a < 6$, $0 \le c < 6$, $0 \le b < 14$

Simplificamos la tercera ecuación:

$$n = 6^3 a + 6^2 c + 6a + c = a(6^3 + 6)a + c(6^2 + 1) = 222a + 37c$$

y la sustituimos en las otras dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 222a + 37c = 14^2 a + 14b + c \Leftrightarrow 0 = -26a + 14b - 36c \Leftrightarrow 0 = -13a + 7b - 18c \\ 222a + 37c = 15^2 a + 15c + b \Leftrightarrow 0 = 3a + b - 22c \end{cases}$$

Multiplicamos la segunda ecuación por 7 y le restamos la primera:

$$\begin{cases} 0 = -13a + 7b - 18c \\ 0 = 21a + 7b - 154c \end{cases} \Rightarrow 0 = 34a - 136c = 34(a - 4c)$$

Luego $a = 4c$

Puesto que $0 < a < 6$, la única posibilidad es que $c = 1$, y por tanto $a = 4$, y

$$n = 222 \cdot 4 + 37 \cdot 1 = 888 + 37 = 925$$

3

El número total de casos posibles, puesto que hay diez cartas, y las tomamos de 5 en 5, será $V_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$. (Y no de $2^5 = 32$ como se podría suponer).

Para contabilizar los casos favorables, los vamos a ordenar en función del número de cartas rojas que aparezcan.

a) 0 cartas rojas: “VVVVV”.
Hay $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ casos diferentes.

b) 1 carta roja: “RVVVV”.
Hay $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 600$ casos, y puesto que la carta roja puede estar al principio o al final, hay $600 \cdot 2 = 1200$ casos diferentes.

c) 2 cartas rojas: “RRVVV”.
Hay $5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1200$ casos, y puesto que las dos “RR” pueden estar al principio o al final, hay $1200 \cdot 2 = 2400$ casos diferentes.

d) 3 cartas rojas: “RRRVV”
Hay $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 1200$ casos, y puesto que las dos “RRR” pueden estar al principio o al final, hay $1200 \cdot 2 = 2400$ casos diferentes.

e) 4 cartas rojas: “RRRRV”.
Hay $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 600$ casos, y puesto que la carta verde puede estar al principio o al final, hay $600 \cdot 2 = 1200$ casos diferentes.

f) 5 cartas rojas: “RRRRR”.
Hay $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ casos diferentes.

En total: $120 + 1200 + 2400 + 2400 + 1200 + 120 = 7440$ casos favorables.

La probabilidad es, por tanto, $P=\frac{7440}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=\frac{31}{126}$

4

Aplicando el Teorema del Coseno al triángulo ΔABC:

$$12^2=10^2+10^2-2\cdot 10\cdot 10\cos A\Rightarrow \cos A=\frac{12^2-10^2-10^2}{-2\cdot 10\cdot 10}=\frac{7}{25}$$

Sea $x=AD=DE=EC$. Aplicando el Teorema del Coseno al triángulo ΔADE, que es isósceles en D, pues $AD=DE$, y por tanto $\angle AED=\angle A$,

$$AD^2=AE^2+DE^2-2AE\cdot DE\cdot\cos\angle AED$$

$$x^2=(10-x)^2+x^2-2x(10-x)\frac{7}{25}\Leftrightarrow$$

$$0=(10-x)\left(10-x-2x\frac{7}{25}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}10-x=0\Leftrightarrow x=0\\ 10-x-\frac{14x}{25}=0\Leftrightarrow x=\frac{250}{39}\end{cases}$$

La primera solución queda descartada pues suponemos que el punto está en el interior del segmento, y por tanto la solución es $\frac{250}{39}$

5

De la identidad $\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c$ se deduce

$$\log_a a^2\cdot\log_{a^2}c=\log_a c\Rightarrow 2\cdot\log_{a^2}c=\log_a c\Rightarrow\log_{a^2}c=\frac{\log_a c}{2}$$

Que se puede aplicar a la primera ecuación:

$$\log_2(2x+y)=\log_4\left(x^2+xy+7y^2\right)=\log_{2^2}\left(x^2+xy+7y^2\right)=\frac{\log_2\left(x^2+xy+7y^2\right)}{2}\Rightarrow$$

$$2\log_2(2x+y)=\log_2\left(x^2+xy+7y^2\right)\Rightarrow\log_2\left((2x+y)^2\right)=\log_2\left(x^2+xy+7y^2\right)\Rightarrow$$

$$(2x+y)^2=x^2+xy+7y^2\Rightarrow 4x^2+4xy+y^2=x^2+xy+7y^2\Rightarrow$$

$$0=4x^2+4xy+y^2-x^2-xy-7y^2=3x^2+3xy-6y^2=3\left(x^2+xy-2y^2\right)\Rightarrow$$

$$0=x^2+xy-2y^2=(x-y)(x+2y)\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ x=-2y\end{cases}$$

Y también a la segunda:

$$\log_3(3x+y)=\log_9\left(3x^2+4xy+Ky^2\right)=\log_{3^2}\left(3x^2+4xy+Ky^2\right)=$$

$$=\frac{\log_3\left(3x^2+4xy+Ky^2\right)}{2}\Rightarrow 2\log_3(3x+y)=\log_3\left(3x^2+4xy+Ky^2\right)\Rightarrow$$

$$\log_3\left((3x+y)^2\right)=\log_3\left(3x^2+4xy+Ky^2\right)\Rightarrow(3x+y)^2=3x^2+4xy+Ky^2$$

Si $x=y$ esta ecuación queda

$$(4x)^2 = 3x^2 + 4x^2 + Kx^2 = (7+K)x^2 \Rightarrow 16x^2 = (7+K)x^2$$

Puesto que $x = y = 0$ no es aceptable pues entonces $\log_3(3x+y) = \log_3 0$ y no existe el logaritmo de cero, podemos suponer $x \neq 0$ y simplificar x^2 para llegar a

$$16 = 7 + K \Rightarrow K = 16 - 7 = 9$$

Si $x = -2y$, la segunda ecuación queda:

$$(3(-2y)+y)^2 = 3(-2y)^2 + 4(-2y)y + Ky^2 \Rightarrow$$
$$(y-6y)^2 = 12y^2 - 8y^2 + Ky^2 = (4+K)y^2 \Rightarrow$$
$$(-5y)^2 = 25y^2 = (4+K)y^2$$

De nuevo, puesto que la opción $x = y = 0$ no es aceptable, podemos simplificar el factor y^2 para llegar a

$$25 = 4 + K \Rightarrow K = 21$$

Así pues, la respuesta es $21 \cdot 9 = 189$.

6

Primera versión.

Pasando a forma exponencial: $z = e^{i\theta}$,

$z^{6!} = z^{720} = e^{720i\theta}$

$z^{5!} = z^{120} = e^{120i\theta}$

$z^{6!} - z^{5!} \in IR \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z^{6!}) = \mathrm{Im}(z^{5!})$, y, puesto $|z| = 1$, esto solo puede pasar si sucede una de las dos condiciones siguientes:

a) $z^{6!} = z^{5!} \Leftrightarrow e^{720i\theta} = e^{120i\theta} \Rightarrow 720\theta = 120\theta \Leftrightarrow 600\theta = 0$,

ecuación que tiene 600 soluciones, puesto que estamos trabajando $\mathrm{mod}\, 2\pi$.

b) $z^{6!}, z^{5!}$ son reflexiones la una de la otra respecto del eje imaginario.

Luego $e^{720i\theta} = e^{(\pi - 120\theta)i} \Rightarrow 720\,\theta = \pi - 120\theta \Leftrightarrow 840\,\theta = \pi$, ecuación que tiene 840 soluciones.

Un total de $600 + 840 = 1440$ soluciones, y por tanto su residuo al dividirlo entre 1000 es 440.

Segunda versión.

Puesto que $|z| = 1$, $\bar{z} = \dfrac{1}{z^{-1}}$

Puesto que $z^{6!} - z^{5!}$ es real, será igual a su conjugado, luego

$$z^{6!} - z^{5!} = z^{720} - z^{120} = \overline{z^{720} - z^{120}} = \bar{z}^{720} - \bar{z}^{120} = \frac{1}{z^{720}} - \frac{1}{z^{120}} \Rightarrow z^{720} - z^{120} = \frac{1}{z^{720}} - \frac{1}{z^{120}}$$

Multiplicando ambos lados por z^{720} obtenemos un polinomio de grado 1440, que tendrá 1440 soluciones complejas.

Tercera versión.

$$z^{6!} - z^{5!} \in IR \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z^{6!}) = \mathrm{Im}(z^{5!}) \Leftrightarrow \sin(720\,\theta) = \sin(120\,\theta) \Leftrightarrow \sin(720\,\theta) - \sin(120\,\theta) = 0$$

Aplicando la identidad trigonométrica "Resta-A-Producto", tenemos

$$0=\sin(720\,\theta)-\sin(120\,\theta)=2\cos\left(\frac{720\,\theta+120\,\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{720\,\theta-120\,\theta}{2}\right)=$$

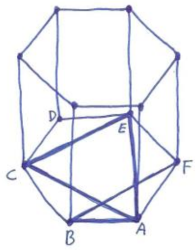
$$=2\cos\left(\frac{840\,\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{600\,\theta}{2}\right)=2\cos\left(\frac{840\,\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{600\,\theta}{2}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(\frac{840\,\theta}{2}\right)=0\\ \sin\left(\frac{600\,\theta}{2}\right)=0\end{cases}$$

La primera ecuación tiene 840 soluciones y la segunda 600, haciendo un total de 1440 soluciones.

Fuente: Soluciones #3, #4 y #2 respectivamente de la web "artofproblemsolving.com"

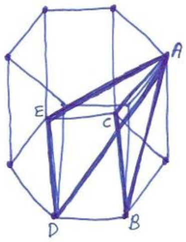
7

En el interior de las bases vemos que, fijado un vértice A, podemos formar los triángulos isósceles ΔABF (6 triángulos) y ΔACE (dos triángulos) del siguiente esquema:



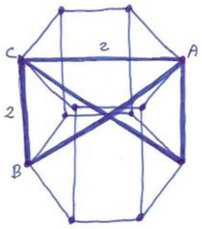
con un total de $8\cdot 2=16$ triángulos.

De una base a la otra, vemos que, fijado un vértice A, podemos formar los triángulos isósceles ΔABC y ΔADE del siguiente esquema:



con un total de $6\cdot 2\cdot 2=24$ triángulos.

Pero, puesto que la longitud entre vértices opuestos del hexágono es 2, y coincide con la altura, también los triángulos ΔABC del siguiente esquema:



con un total de $6\cdot 2=12$ triángulos.

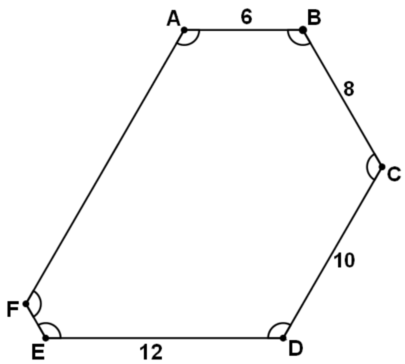
En total podemos formar $16+24+12=52$ triángulos isósceles.

8

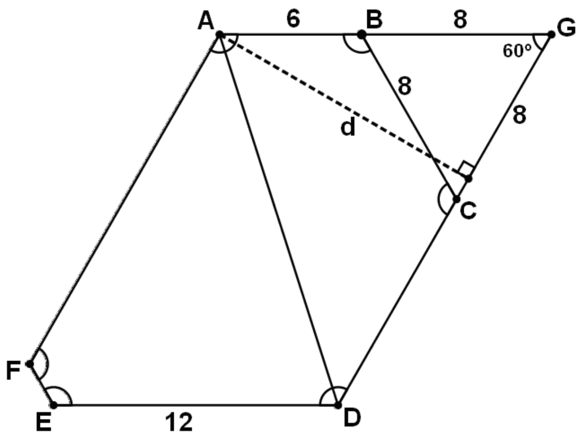
Sabemos que la suma de ángulos internos de un polígono de n lados es igual a $180(n-2)$, luego en nuestro caso , $180(6-2)=180\cdot 4=720^{\circ}$.

Puesto que es equiangular, cada uno de los ángulos internos medirá $\frac{720}{6}=120^{\circ}$.

Podemos dibujar este hexágono mediante regla y transportador de ángulos, y observaremos que sus lados opuestos son paralelos.



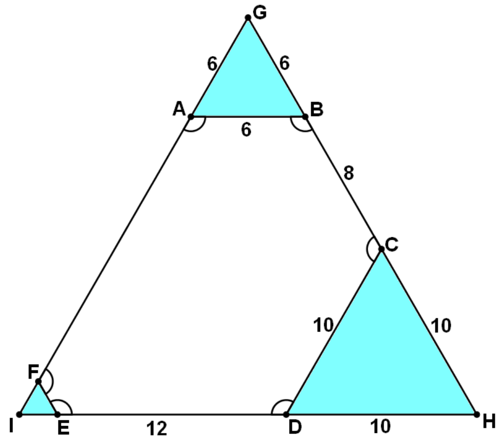
En efecto, prolongando los lados AB y CD hasta encontrarse en un punto G, vemos que
$\angle CBG=\angle BCG=180-120^{\circ}=60^{\circ}\Rightarrow \angle BGC=180^{\circ}–60^{\circ}–60^{\circ}=60^{\circ}$
Y por tanto el triángulo ΔBGC es un triángulo equilátero de lado 8.
Por otro lado, $\angle AGD=60^{\circ}$, y es igual al ángulo suplementario de $\angle EDG=120^{\circ}$, luego AB//DE. Y con razonamientos similares se demuestra que EF//BD y AF//CD.
Así pues, cualquier circunferencia en el interior de este hexágono tendrá diámetro máximo la distancia entre lados opuestos, y vemos que los lados más próximos son AF y CD. Así pues solo nos queda encontrar la distancia d entre AF y CD.



Por trigonometría:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin(\angle AGD)=\frac{d}{AG}=\frac{d}{14}\Rightarrow d=\frac{14\sqrt{3}}{2}=7\sqrt{3}\Rightarrow d^{2}=49\cdot 3=147$$

Segunda versión.
Un razonamiento alternativo podría ser el siguiente: Puesto que la figura es equiangular, se puede completar hasta formar un triángulo equilátero ΔGHI :



Los lados de este triángulo miden $10+8+6=24$, y por tanto

$$EF=24-12-10=2,\ AF=24-6-2=16.$$

El triángulo ΔGHI es semejante a ΔCHD, que tiene altura

$$h=\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}$$

Luego:

$$\frac{h}{10}=\frac{h+d}{24}\Leftrightarrow\frac{5\sqrt{3}}{10}=\frac{5\sqrt{3}+d}{24}\Leftrightarrow 24\cdot 5\sqrt{3}=10\left(5\sqrt{3}+d\right)\Leftrightarrow$$

$$12\sqrt{3}=5\sqrt{3}+d\Leftrightarrow d=12\sqrt{3}-5\sqrt{3}=7\sqrt{3}\Rightarrow d^2=147$$

9
Vamos a ordenarlos por subconjuntos que contengan una pareja que sume 16, y vamos a añadir dos números más para que también haya dos que sumen 24.

$\{1,15,a,b\}$	$\{1,15,20,4\}$, $\{1,15,9,*\}\times 21$
$\{2,14,a,b\}$	$\{2,14,20,4\}$, $\{2,14,10,*\}\times 21$
$\{3,13,a,b\}$	$\{3,13,20,4\}$, $\{3,13,11,*\}\times 21$
$\{4,12,a,b\}$	$\{4,12,20,*\}\times 21$
$\{5,11,a,b\}$	$\{5,11,20,4\}$, $\{5,11,19,*\}\times 21, \{5,11,13,*\}\times 21$
$\{6,10,a,b\}$	$\{6,10,20,4\}$, $\{6,10,18,*\}\times 21, \{6,10,14,*\}\times 21$
$\{7,9,a,b\}$	$\{7,9,20,4\}$, $\{7,9,17,*\}\times 21, \{7,9,15,*\}\times 21$

Todos ellos suman $10\cdot 21+6=216$.

Pero vemos que hay alguna repetición, hay seis elementos que los hemos contado dos veces:

Los grupos $\{3,13,11,*\}\times 21$ y $\{5,11,13,*\}\times 21$ comparten el elemento $\{5,11,13,3\}$.
Los grupos $\{2,14,10,*\}\times 21$ y $\{6,10,14,*\}\times 21$ comparten $\{6,10,14,2\}$
Los grupos $\{5,11,19,*\}\times 21$ y $\{5,11,13,*\}\times 21$ comparten $\{5,11,19,13\}$
Los grupos $\{6,10,18,*\}\times 21$ y $\{6,10,14,*\}\times 21$ comparten $\{6,10,14,18\}$
Los grupos $\{7,9,17,*\}\times 21$ y $\{7,9,15,*\}\times 21$ comparten $\{7,9,15,17\}$
Los grupos $\{1,15,9,*\}\times 21$ y $\{7,9,15,*\}\times 21$comparten $\{7,9,15,1\}$

Por lo tanto hay $216-6=210$ subconjuntos.

10

Primera versión: Mediante recursión pura.

Vamos a resolver este problema de forma recursiva, rellenando, paso a paso, una tabla en la que las columnas son los puntos finales, y las filas son el número de pasos. En cada casilla pondremos el número de caminos que hay para llegar al punto final (columna) mediante caminos de n pasos (fila), siempre saliendo del punto A.

Por ejemplo, en la primera fila hay un 1 en B y en J, porque con caminos de 1 paso, y saliendo de A, solo podemos llegar a B y a J, y de una sola manera.

En la segunda fila, hay un 1 en la columna A indicando que hay un camino posible de longitud 2 desde A, que es "AJA", un camino posible para llegar a C, que es "ABC", un camino posible para llegar a F, que es "AJF", y un camino posible para llegar a I, que es "ABI".

Vemos claramente la pauta:

$$A_n = E_{n-1} + J_{n-1},\ B_n = A_{n-1} + I_{n-1},\ C_n = B_{n-1} + H_{n-1},\ D_n = C_{n-1} + G_{n-1},\ E_n = D_{n-1} + F_{n-1}$$

$$F_n = E_{n-1} + J_{n-1},\ G_n = D_{n-1} + F_{n-1},\ H_n = C_{n-1} + G_{n-1},\ I_n = B_{n-1} + H_{n-1},\ J_n = A_{n-1} + I_{n-1}$$

n	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
2	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
3	0	2	0	1	1	0	1	1	0	2
...										
14										
15										

Está claro que este problema, así planteado, requiere un trabajo más propio de una hoja de cálculo que de un humano:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	TOTAL
3	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	2
4	2	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	4
5	3	0	2	0	1	1	0	1	1	0	2	8
6	4	3	0	3	1	1	3	1	1	3	0	16
7	5	1	6	1	4	4	1	4	4	1	6	32
8	6	10	2	10	5	5	10	5	5	10	2	64
9	7	7	20	7	15	15	7	15	15	7	20	128
10	8	35	14	35	22	22	35	22	22	35	14	256
11	9	36	70	36	57	57	36	57	57	36	70	512
12	10	127	72	127	93	93	127	93	93	127	72	1024
13	11	165	254	165	220	220	165	220	220	165	254	2048
14	12	474	330	474	385	385	474	385	385	474	330	4096
15	13	715	948	715	859	859	715	859	859	715	948	8192
16	14	1807	1430	1807	1574	1574	1807	1574	1574	1807	1430	16384
17	15	**3004**	3614	3004	3381	3381	3004	3381	3381	3004	3614	32768
18												

En todo caso llegamos a $A_{15}=3004$ y por tanto la respuesta correcta es $3004 \bmod 1000 = 4$.

Segunda versión: Determinando una fórmula recursiva.

Observamos un dato interesante: En cada paso, el gusano tiene siempre dos caminos posibles para continuar, luego el número total de caminos es 2^n:

$$S_n = A_n + B_n + C_n + D_n + E_n + G_n + H_n + I_n = 2^n$$

Con este dato podemos optimizar el proceso para llegar a A_{15}. En efecto:

$$\begin{aligned}
A_n &= E_{n-1} + J_{n-1} = D_{n-2} + F_{n-2} + A_{n-2} + I_{n-2} = \\
&= C_{n-3} + G_{n-3} + E_{n-3} + J_{n-3} + A_{n-2} + B_{n-3} + H_{n-3} = \\
&= A_{n-2} + B_{n-3} + C_{n-3} + D_{n-3} + E_{n-3} + F_{n-3} + G_{n-3} + H_{n-3} + I_{n-3} + J_{n-3} - D_{n-3} - F_{n-3} - I_{n-3} = \\
&= S_{n-3} - (D_{n-3} + F_{n-3} + I_{n-3}) = \\
&= S_{n-3} - (E_{n-2} + I_{n-3}) = \\
&= S_{n-3} - (A_{n-1} - J_{n-2} + I_{n-3}) = \\
&= S_{n-3} - (A_{n-1} - (A_{n-3} + I_{n-3}) + I_{n-3}) = \\
&= S_{n-3} - (A_{n-1} - A_{n-3} - I_{n-3} + I_{n-3}) = \\
&= S_{n-3} - (A_{n-1} - A_{n-3}) = \\
&= 2^{n-3} - A_{n-1} + A_{n-3}
\end{aligned}$$

Calculando directamente los primeros valores:

$$A_0 = 0,\ A_1 = 0,\ A_2 = 1,\ A_3 = 0,\ A_4 = 3$$

Y utilizando la fórmula recursiva anterior se llega a $A_{15} = 3004$.

Fuentes:

https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AIME_I_Problems/Problem_10
https://youtu.be/JD51G1wUKEs

11

Sabemos que decir que la expresión de 3^n en base 143 es $\overline{...d_3 d_2 d_1 01}_{143}$ es equivalente a
$3^n = 1 + 0\cdot 143 + d_1 \cdot 143^2 + d_2 \cdot 143^3 + ... = 1 + 143^2(d_1 + d_2 \cdot 143 + ...) \Leftrightarrow 3^n \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\ 143^2\right)$

Así pues, en este problema nos piden resolver la congruencia $3^n \equiv 1 \bmod \left(143^2\right)$ con solución n mínima, es decir, determinar el orden de 3 módulo 143^2.

Es importante remarcar que nos piden n mínimo, pues el Teorema de Euler (13.4) nos garantiza que $3^{\phi(143^2)} \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\ 143^2\right)$ puesto que $\left(3, 143^2\right) = 1$, pero en este caso $\phi\left(143^2\right) = 17160$ y veremos que no es el valor mínimo posible.

$143 = 11\cdot 13 \Rightarrow 143^2 = 11^2 \cdot 13^2$, y puesto que $\left(11^2, 13^2\right) = 1$, para resolver la congruencia $3^n \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\ 11^2 \cdot 13^2\right)$ será suficiente resolver las congruencias $3^a \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\ 11^2\right)$ y $3^b \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\ 13^2\right)$ por separado.

Paso 1. Resolvemos la congruencia: $3^a \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\ 11^2\right)$
Esta es sencilla. Se puede encontrar por tanteo:

$3^1 = 3 \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 121)$	$3^2 = 9 \equiv 9 \ (\mathrm{mod}\ 121)$
$3^3 = 27 \equiv 27 \ (\mathrm{mod}\ 121)$	$3^4 = 81 \equiv 81 \ (\mathrm{mod}\ 121)$

$3^5 = 243 = 2 \cdot 121 + 1 \equiv 1 \pmod{121}$

El valor mínimo es $a = 5$.

Paso 2. Resolvemos la congruencia: $3^b \equiv 1 \pmod{13^2}$. Esta es mucho más complicada.

Paso 2.1. Por tanteo ("*bash*"). Si lo hacemos por tanteo nos vamos a pasar un buen rato calculando potencias hasta llegar al exponente 39 para encontrar $3^{39} \equiv 1 \pmod{13^2}$:

1→3	2→9	3→27	4→81	5→74
6→53	7→159	8→139	9→79	10→68
11→35	12→105	13→146	14→100	15→131
16→55	17→165	18→157	19→133	20→61
21→14	22→42	23→126	24→40	25→120
26→22	27→66	28→29	29→87	30→92
31→107	32→152	33→118	34→16	35→48
36→144	37→94	38→113	39→1	

Paso 2.2. Aplicando el Teorema de Euler. Una indicación nos la puede dar la función Phi de Euler: $\phi(13^2) = 2 \cdot 3 \cdot 13$, luego el orden de 3 módulo 156 será un divisor de $156 = 2 \cdot 3 \cdot 13$. Probando divisores encontramos la solución $39 = 3 \cdot 13$.

Paso 2.3. Aplicando el Teorema del binomio.

Observamos que $3^b \equiv 1 \pmod{13^2} \Rightarrow 3^b \equiv 1 \pmod{13}$.

En efecto: $3^b \equiv 1 \pmod{13^2} \Rightarrow 3^b = 13^2 k + 1 = 13(13k) + 1 \Rightarrow 3^b \equiv 1 \pmod{13}$

Y la congruencia $3^b \equiv 1 \pmod{13}$ tiene fácil solución: $3^3 = 27 = 2 \cdot 13 + 1 \equiv 1 \pmod{13}$. Así pues, cualquier solución de $3^b \equiv 1 \pmod{13}$ será múltiple de 3.

Llegados a este punto podríamos aplicar la estrategia 2.2 anterior para llegar a la solución, pero en su lugar vamos a aplicar el desarrollo binomial.

El número b buscado será múltiplo de 3: $b = 3c$ para cierto entero c, con lo que la congruencia se transforma en:

$$3^{3c} \equiv 1 \pmod{13^2} \Leftrightarrow (3^3)^c \equiv 1 \pmod{13^2} \Leftrightarrow 27^c \equiv 1 \pmod{13^2}$$

Ahora aplicamos el desarrollo binomial:

$$27 = 2 \cdot 13 + 1 \Rightarrow 27^c = (2 \cdot 13 + 1)^c =$$

$$= \binom{c}{0}(2 \cdot 13)^c 1^0 + \binom{c}{1}(2 \cdot 13)^{c-1} 1^1 + \ldots + \binom{c}{c-1}(2 \cdot 13)^1 1^{c-1} + \binom{c}{c}(2 \cdot 13)^0 1^c$$

Y observamos que, trabajando módulo 13^2, cualquier potencia 13^c con $c \geq 2$ será (congruente con) cero.

Así pues, a todos los efectos prácticos:

$$27^c = \binom{c}{c-1}(2\cdot 13)^1 1^{c-1} + \binom{c}{c}(2\cdot 13)^0 1^c = c\cdot 26+1$$

Y por tanto, la congruencia exponencial $27^c \equiv 1 \pmod{13^2}$ se convierte en la congruencia lineal

$$26c+1\equiv 1 \pmod{13^2}$$

Que se resuelve fácilmente:

$$26c+1\equiv 1 \pmod{13^2} \Leftrightarrow 26c\equiv 0 \pmod{13^2} \Leftrightarrow 2\cdot 13c\equiv 0 \pmod{13^2}$$

Para que esta última congruencia se cumpla, es necesario y suficiente que c sea múltiplo de 13.

Así pues, finalmente llegamos a un resultado múltiplo de 3 y múltiplo de 13, y el valor mínimo posible es $c=3\cdot 13=39$.

Paso 3. Juntamos las dos congruencias:

Hemos obtenido $3^5\equiv 1 \bmod (11^2)$ y $3^{39}\equiv 1 \bmod (13^2)$, luego tomando el mínimo común múltiplo de ambos exponentes: $[5,39]=5\cdot 39=195$, tendremos, aplicando 7.5d:

$$\left.\begin{array}{l} 3^{195}=3^{5\cdot 39}=\left(3^5\right)^{39}\equiv 1^{39}=1 \bmod (11^2) \\ 3^{195}=3^{39\cdot 5}=\left(3^{39}\right)^5\equiv 1^5=1 \bmod (13^2) \\ (11^2,13^2)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3^{195}\equiv 1 \bmod (11^2\cdot 13^2)$$

Que será el valor mínimo posible pues en todos los pasos hemos obtenido los valores mínimos posibles.

La solución del problema es 159.

Fuentes:

https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AIME_I_Problems/Problem_11
https://youtu.be/e7JGgykuK3w Analyzing the Expression in Mod 143² (2018 AIME I Prob 11) "LetsSolveMathProblems"
https://youtu.be/b_Z_OGfyJyw 2018 AIME I Problem #11 "Osman Nal"

12

Una observación clave para solucionar este problema es que podemos pasar los números de U a módulo 3:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0

Otra observación clave es que podemos dejar aparcados todos los números que sean congruentes con 0 módulo 3: $R=\{3,6,9,12,15,18\}$, porque cualquier combinación de números será múltiple de 3 si y solo si lo es añadiendo cualquier subconjunto de R. Luego nos olvidamos de los elementos de R y deberemos multiplicar el resultado final por $|R|=2^6$.

Así pues, disponemos del conjunto

1	2	4	5	7	8	10	11	13	14	16	17
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2

Y debemos contar todos los subconjuntos cuya suma sea múltiple de 3. Organizaremos el recuento por número de elementos de dicho subconjunto:

0 elementos:

$\varnothing$ $\rightarrow$ 1

1 elemento:

(no hay ningún caso)

2 elementos:

"12" $\rightarrow$ $6\cdot 6=36$

3 elementos:

"111" $\rightarrow$ $\binom{6}{3}=20$

"222" $\rightarrow$ $\binom{6}{3}=20$

4 elementos:

"2211" $\rightarrow$ $\binom{6}{2}\cdot\binom{6}{2}=15\cdot 15=225$

5 elementos:

"21111" $\rightarrow$ $\binom{6}{1}\cdot\binom{6}{4}=6\cdot 15=90$

"22221" $\rightarrow$ $\binom{6}{4}\cdot\binom{6}{1}=15\cdot 6=90$

6 elementos:

"222222" $\rightarrow$ $\binom{6}{6}=1$

"111222" $\rightarrow$ $\binom{6}{3}\cdot\binom{6}{3}=20\cdot 20=400$

"111111" $\rightarrow$ $\binom{6}{6}=1$

7 elementos:

"1122222" $\rightarrow$ $\binom{6}{2}\cdot\binom{6}{5}=15\cdot 6=90$

"1111122" $\rightarrow$ $\binom{6}{5}\cdot\binom{6}{2}=6\cdot 15=90$

8 elementos:

"11112222" $\rightarrow$ $\binom{6}{4}\cdot\binom{6}{4}=15\cdot 15=225$

9 elementos:

"111222222" $\rightarrow$ $\binom{6}{3}\cdot\binom{6}{6}=20\cdot 1=20$

"111111222" $\rightarrow$ $\binom{6}{6}\cdot\binom{6}{3}=1\cdot 20=20$

10 elementos:

"1111122222" $\rightarrow$ $\binom{6}{5}\cdot\binom{6}{5}=6\cdot 6=36$

11 elementos:

(no hay ningún caso)

12 elementos:

"111111222222" $\rightarrow$ $\binom{6}{6}\cdot\binom{6}{6}=1\cdot 1=1$

Total: 1+36+20+20+225+90+90+1+400+1+90+90+225+20+20+36+1=1366

Así pues, la probabilidad es $P=\frac{1366\cdot 2^6}{2^{18}}=\frac{683}{2^{11}}$, y la respuesta correcta es 683.

Fuente de esta solución: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AIME_I_Problems/Problem_12

13

(Solución oficial MAA).

Sea $\alpha=\angle AXB$.

Sabemos por (11.4.11f) que $\angle AI_1B=90^{\circ}+\frac{\alpha}{2}$, luego $\sin\angle AI_1B=\cos(\alpha/2)$.

Por otro lado, vemos que

$$\angle I_2AI_1=\angle I_2AX+\angle XAI_1=\frac{\angle CAX}{2}+\frac{\angle XAB}{2}=\frac{\angle CAX+\angle XAB}{2}=\frac{\angle CAB}{2}=\frac{\angle A}{2}$$

Aplicando el Teorema del Seno al triángulo ΔABI_1 tenemos:

$$\frac{AI_1}{\sin\angle ABI_1}=\frac{AB}{\sin\angle AI_1B}\Rightarrow AI_1=AB\frac{\sin\angle ABI_1}{\sin\angle AI_1B}=c\frac{\sin(\angle B/2)}{\cos(\alpha/2)}$$

Y de la misma manera tenemos:

$$AI_2=b\frac{\sin(\angle C/2)}{\sin(\alpha/2)}$$

Luego:

$$[\Delta AI_1I_2]=\frac{1}{2}AI_1\cdot AI_2\cdot\sin(\angle I_2AI_1)=$$

$$=\frac{1}{2}AI_1\cdot AI_2\cdot\sin(\angle A/2)=$$

$$=bc\frac{\sin(\angle A/2)\sin(\angle B/2)\sin(\angle C/2)}{2\cos(\alpha/2)\sin(\alpha/2)}=$$

$$=bc\frac{\sin(\angle A/2)\sin(\angle B/2)\sin(\angle C/2)}{\sin(\alpha)}\geq bc\sin(\angle A/2)\sin(\angle B/2)\sin(\angle C/2)$$

Y la igualdad acontece cuando $\sin(\alpha)=1 \Leftrightarrow \alpha=90^{\circ}$, es decir, cuando la ceviana AX es la altura, y en este caso el área buscada es

$$bc\sin\left(\angle A/2\right)\sin(\angle B/2)\sin(\angle C/2)$$

Y calculamos los factores de este producto:

$$\sin\left(\frac{\angle A}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}=\sqrt{\frac{1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc-\left(b^2+c^2-a^2\right)}{4bc}}=$$
$$=\sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}}$$

Para llegar finalmente a:

$$bc\sin\left(\angle A/2\right)\sin(\angle B/2)\sin(\angle C/2)=$$
$$=bc\frac{(a-b+c)(b-c+a)(c-a+b)}{8abc}=\frac{(a-b+c)(b-c+a)(c-a+b)}{8a}$$

En nuestro caso particular:

$$\left[\Delta AI_1I_2\right]=\frac{(30-32+34)(32-34+30)(34-30+32)}{8\cdot 32}=126$$

Fuente de esta solución: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AIME_I_Problems/Problem_13

14

Primera versión: Mediante recursión pura.

Como en el problema anterior, sea P_k^n el número de secuencias de n saltos que empiezan en S y acaban en el vértice P_k, y sean E^n y S^n el número de secuencias de n saltos que empiezan en S y acaban en el vértice E y en el vértice S, respectivamente.

Está claro que:

$$S^n=P_1^{n-1}+P_5^{n-1},\ P_1^n=S^{n-1}+P_2^{n-1},\ P_2^n=P_1^{n-1}+P_3^{n-1},\ P_3^n=P_2^{n-1},\ E^n=P_3^{n-1}+P_4^{n-1},$$
$$P_4^n=P_5^{n-1},\ P_5^n=P_4^{n-1}+S^{n-1},$$

Y se nos pide calcular $E^1+E^2+...+E^{12}$.

n	S^n	P_1^n	P_2^n	P_3^n	E^n	P_4^n	P_5^n
1	0	1	0	0	0	0	1
2	2	0	1	0	0	1	0
3							
...							
12							

Igual que con el problema anterior, el problema, así planteado, es tarea propia de una hoja de cálculo:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		S	P1	P2	P3	E	P4	P5
3	1	0	1	0	0	0	0	1
4	2	2	0	1	0	0	1	0
5	3	0	3	0	1	1	0	3
6	4	6	0	4	0	1	3	0
7	5	0	10	0	4	3	0	9
8	6	19	0	14	0	4	9	0
9	7	0	33	0	14	9	0	28
10	8	61	0	47	0	14	28	0
11	9	0	108	0	47	28	0	89
12	10	197	0	155	0	47	89	0
13	11	0	352	0	155	89	0	286
14	12	638	0	507	0	155	286	0
15								

Y la respuesta al problema es: $0+0+1+1+3+4+9+14+28+47+89+155=351$

Segunda versión: Determinando una fórmula recursiva.

Para determinar la fórmula recursiva de E^n vamos a utilizar la siguiente propiedad:

$$E^{n-1}-E^{n-3}=P_3^{n-2}+P_4^{n-2}-\left(P_3^{n-4}+P_4^{n-4}\right)=P_2^{n-3}+P_5^{n-3}-P_3^{n-4}+P_4^{n-4}=$$

$$=P_1^{n-4}+P_3^{n-4}+P_4^{n-4}+S^{n-4}-P_3^{n-4}+P_4^{n-4}=P_1^{n-4}+S^{n-4}$$

Y ahora vamos a buscar la fórmula recursiva:

$$E^n=P_3^{n-1}+P_4^{n-1}=$$

$$=P_2^{n-2}+P_5^{n-2}=$$

$$=P_1^{n-3}+P_3^{n-3}+P_4^{n-3}+S^{n-3}=$$

$$=E^{n-2}+P_1^{n-3}+S^{n-3}\Rightarrow E^n-E^{n-2}=S^{n-3}+P_1^{n-3}$$

Por otro lado:

$$S^{n-3}+P_1^{n-3}=$$

$$=P_1^{n-4}+P_5^{n-4}+S^{n-4}+P_2^{n-4}=$$

$$=S^{n-4}+P_1^{n-4}+P_5^{n-4}+P_2^{n-4}=$$

$$=E^{n-1}-E^{n-3}+P_5^{n-4}+P_2^{n-4}=$$

$$=E^{n-1}-E^{n-3}+P_4^{n-3}+P_3^{n-3}=$$

$$=E^{n-1}-E^{n-3}+E^{n-2}$$

En donde hemos aplicado la propiedad demostrada anteriormente. Así pues:

$$E^n-E^{n-2}=E^{n-1}-E^{n-3}+E^{n-2}\Rightarrow$$

$$E^n=E^{n-1}-E^{n-3}+2E^{n-2}$$

Ahora calculamos directamente los primeros términos de la sucesión:

$$E^0=0,\ E^1=0,\ E^2=0,\ E^3=1,\ E^4=1$$

Y mediante la fórmula recursiva vamos determinando los siguientes términos:

$$E^5=3,\ E^6=4,\ E^7=9,\ E^8=14,\ E^9=28,\ E^{10}=47,\ E^{11}=89,\ E^{12}=155$$

Y, finalmente: $0+0+1+1+3+4+9+14+28+47+89+155=351$.

Fuentes:

https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AIME_I_Problems/Problem_14
https://youtu.be/11utulhU590

15

Para resolver este problema nos vamos a basar en los siguientes resultados geométricos:

1) El área de un cuadrilátero (no necesariamente cíclico) ABCD se puede calcular sabiendo las longitudes de las diagonales y el ángulo que estas determinan (ver GA/9.2.4):

$$[ABCD] = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$$

2) El Teorema de Ptolomeo: En todo cuadrilátero cíclico ABCD, el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos (ver GA/10.5.7):

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

3) La fórmula de Parameshavara: El radio de la circunferencia circunscrita se puede determinar mediante los lados del cuadrilátero inscrito:

$$R = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4[ABCD]}$$

Donde a, b, c, d son los lados consecutivos del cuadrilátero cíclico (ver GA/10.5.15).

Con estos tres resultados procedemos a la resolución del problema.
Sean a, b, c, d las longitudes de los cuatro lados que forman el cuadrilátero.
Tenemos tres configuraciones posibles:

A) a, b, c, d, con a y c lados opuestos.
B) a, b, d, c, con a y d lados opuestos.
C) a, c, b, d, con a y b lados opuestos.

Mediante los resultados 1 y 2 llegamos a la siguiente conclusión:

$$K = [ABCD] = \frac{1}{2}(ac+bd) \cdot \sin\alpha_A$$

$$K = [ABCD] = \frac{1}{2}(ad+bc) \cdot \sin\alpha_B$$

$$K = [ABCD] = \frac{1}{2}(ab+cd) \cdot \sin\alpha_C$$

Y multiplicando estas tres igualdades llegamos a:

$$K^3=\frac{1}{8}(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)\cdot\sin\alpha_A\cdot\sin\alpha_B\cdot\sin\alpha_C\Leftrightarrow$$
$$K^3=\frac{1}{8}(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{6}{7}\Leftrightarrow$$
$$K^3=\frac{3}{70}(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)$$

Ahora aplicamos la fórmula de Parameshavara, teniendo en cuenta que en nuestro caso $R=1$:

$$R=\frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4K}\Leftrightarrow 4K=\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}\Leftrightarrow$$
$$16K^2=(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)$$

Así pues,

$$K^3=\frac{3}{70}16K^2\Leftrightarrow K=\frac{3}{70}16=\frac{24}{35}$$

Y la respuesta correcta es $24+35=59$.

Fuente de esta solución: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2009_AIME_I_Problems/Problem_15