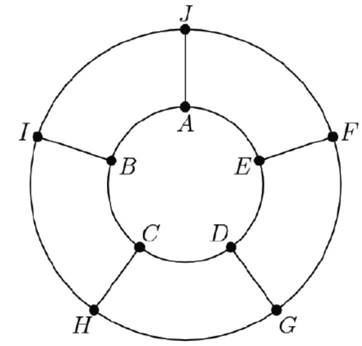
Los problemas 10 y 14 de la prueba AIME I 2018 son muy similares. Ambos son de combinatoria y ambos pueden resolverse mediante recursividad.

10

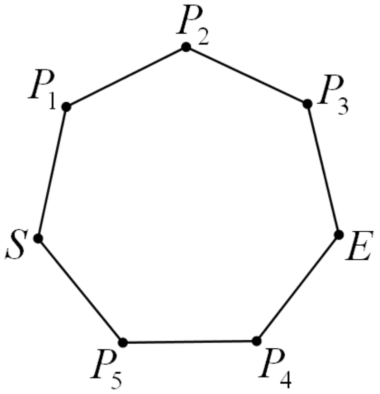
Disponemos de una rueda consistente en dos circunferencias y cinco radios, con una etiqueta en cada punto de contacto entre los radios, tal y como aparece en la figura. Un gusano avanza por la rueda, empezando en el punto A. Este gusano avanza en cada paso desde un punto etiquetado a uno adyacente. Por la circunferencia interna este gusano solo puede avanzar en el sentido contrario al de las agujas del reloj, mientras que por la circunferencia exterior este gusano solo puede avanzar en el sentido de las agujas del reloj. Por ejemplo, el gusano puede realizar el camino AJABCHCHIJA, que tiene 10 pasos. Sea n el número de caminos de 15 pasos que empiezan y acaban en A. Determina el residuo cuando n se divide entre 1000.



AIME I 2018 #10

14

Sea un heptágono $SP_1P_2P_3EP_4P_5$. Una rana empieza saltando desde el vértice S. Desde cualquiera de los vértices del heptágono excepto E, la rana puede saltar a cualquiera de sus dos vértices adyacentes. La rana se para cuando alcanza el vértice E. Determina el número de secuencias diferentes de no más de 12 saltos que acaban en E.



AIME I 2018 #14

Vamos a ofrecer dos versiones para la resolución de estos dos problemas: La primera es mediante recursión pura, mecánica, lo que los americanos llaman bashing.
De esta manera garantizamos que llegaremos, poco a poco, a la solución, pero a costa de dedicar tiempo a cálculos y más cálculos mecánicos.

En la segunda versión encontramos la fórmula recursiva que nos permite alcanzar el resultado buscado ahorrándonos un montón de cálculos farragosos, pero ¡ay! a costa de tener que dedicar tiempo y tiempo a encontrarla. Y la cuestión que se nos plantea es, en el contexto de una competición matemática, en el que el tiempo está limitado, si vale o no la pena arriesgarse a encontrar esta fórmula elegante.

Estos problemas, junto con sus soluciones, se encuentran en el dossier de Combinatoria:

www.toomates.net/biblioteca/Combinatoria.pdf

(página 21)

Solución al problema 10.

5.11

Primera versión: Mediante recursión pura.

Vamos a resolver este problema de forma recursiva, rellenando, paso a paso, una tabla en la que las columnas son los puntos finales, y las filas son el número de pasos. En cada casilla pondremos el número de caminos que hay para llegar al punto final (columna) mediante caminos de n pasos (fila), siempre saliendo del punto A.

Por ejemplo, en la primera fila hay un 1 en B y en J, porque con caminos de 1 paso, y saliendo de A, solo podemos llegar a B y a J, y de una sola manera.

En la segunda fila, hay un 1 en la columna A indicando que hay un camino posible de longitud 2 desde A, que es "AJA", un camino posible para llegar a C, que es "ABC", un camino posible para llegar a F, que es "AJF", y un camino posible para llegar a I, que es "ABI".

Vemos claramente la pauta:

$$A_n = E_{n-1} + J_{n-1},\ B_n = A_{n-1} + I_{n-1},\ C_n = B_{n-1} + H_{n-1},\ D_n = C_{n-1} + G_{n-1},\ E_n = D_{n-1} + F_{n-1}$$

$$F_n = E_{n-1} + J_{n-1},\ G_n = D_{n-1} + F_{n-1},\ H_n = C_{n-1} + G_{n-1},\ I_n = B_{n-1} + H_{n-1},\ J_n = A_{n-1} + I_{n-1}$$

n	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
2	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
3	0	2	0	1	1	0	1	1	0	2

...

14										
15										

Está claro que este problema, así planteado, requiere un trabajo más propio de una hoja de cálculo que de un humano:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	TOTAL
3	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	2
4	2	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	4
5	3	0	2	0	1	1	0	1	1	0	2	8
6	4	3	0	3	1	1	3	1	1	3	0	16
7	5	1	6	1	4	4	1	4	4	1	6	32
8	6	10	2	10	5	5	10	5	5	10	2	64
9	7	7	20	7	15	15	7	15	15	7	20	128
10	8	35	14	35	22	22	35	22	22	35	14	256
11	9	36	70	36	57	57	36	57	57	36	70	512
12	10	127	72	127	93	93	127	93	93	127	72	1024
13	11	165	254	165	220	220	165	220	220	165	254	2048
14	12	474	330	474	385	385	474	385	385	474	330	4096
15	13	715	948	715	859	859	715	859	859	715	948	8192
16	14	1807	1430	1807	1574	1574	1807	1574	1574	1807	1430	16384
17	15	**3004**	3614	3004	3381	3381	3004	3381	3381	3004	3614	32768
18												

En todo caso llegamos a $A_{15} = 3004$ y por tanto la respuesta correcta es $3004 \bmod 1000 = 4$.

Segunda versión: Determinando una fórmula recursiva.

Observamos un dato interesante: En cada paso, el gusano tiene siempre dos caminos posibles para continuar, luego el número total de caminos es 2^n:

$$S_n = A_n + B_n + C_n + D_n + E_n + G_n + H_n + I_n = 2^n$$

Con este dato podemos optimizar el proceso para llegar a A_{15}. En efecto:

$$\begin{aligned}
&A_n = E_{n-1} + J_{n-1} = D_{n-2} + F_{n-2} + A_{n-2} + I_{n-2} = \\
&= C_{n-3} + G_{n-3} + E_{n-3} + J_{n-3} + A_{n-2} + B_{n-3} + H_{n-3} = \\
&= A_{n-2} + B_{n-3} + C_{n-3} + D_{n-3} + E_{n-3} + F_{n-3} + G_{n-3} + H_{n-3} + I_{n-3} + J_{n-3} - D_{n-3} - F_{n-3} - I_{n-3} = \\
&= S_{n-3} - \left(D_{n-3} + F_{n-3} + I_{n-3}\right) = \\
&= S_{n-3} - \left(E_{n-2} + I_{n-3}\right) = \\
&= S_{n-3} - \left(A_{n-1} - J_{n-2} + I_{n-3}\right) = \\
&= S_{n-3} - \left(A_{n-1} - \left(A_{n-3} + I_{n-3}\right) + I_{n-3}\right) = \\
&= S_{n-3} - \left(A_{n-1} - A_{n-3} - I_{n-3} + I_{n-3}\right) = \\
&= S_{n-3} - \left(A_{n-1} - A_{n-3}\right) = \\
&= 2^{n-3} - A_{n-1} + A_{n-3}
\end{aligned}$$

Calculando directamente los primeros valores:

$$A_0 = 0,\ A_1 = 0,\ A_2 = 1,\ A_3 = 0,\ A_4 = 3$$

Y utilizando la fórmula recursiva anterior se llega a $A_{15} = 3004$.

Solución al problema 14.

Primera versión: Mediante recursión pura.
Como en el problema anterior, sea P_k^n el número de secuencias de n saltos que empiezan en S y acaban en el vértice P_k, y sean E^n y S^n el número de secuencias de n saltos que empiezan en S y acaban en el vértice E y en el vértice S, respectivamente.

Está claro que:

$$S^n = P_1^{n-1} + P_5^{n-1},\ P_1^n = S^{n-1} + P_2^{n-1},\ P_2^n = P_1^{n-1} + P_3^{n-1},\ P_3^n = P_2^{n-1},$$

$$E^n = P_3^{n-1} + P_4^{n-1},\ P_4^n = P_5^{n-1},\ P_5^n = P_4^{n-1} + S^{n-1},$$

Y se nos pide calcular $E^1 + E^2 + ... + E^{12}$.

n	S^n	P_1^n	P_2^n	P_3^n	E^n	P_4^n	P_5^n
1	0	1	0	0	0	0	1
2	2	0	1	0	0	1	0
3							
...							
12							

Igual que con el problema anterior, el problema, así planteado, es tarea propia de una hoja de cálculo:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		S	P1	P2	P3	E	P4	P5
3	1	0	1	0	0	0	0	1
4	2	2	0	1	0	0	1	0
5	3	0	3	0	1	1	0	3
6	4	6	0	4	0	1	3	0
7	5	0	10	0	4	3	0	9
8	6	19	0	14	0	4	9	0
9	7	0	33	0	14	9	0	28
10	8	61	0	47	0	14	28	0
11	9	0	108	0	47	28	0	89
12	10	197	0	155	0	47	89	0
13	11	0	352	0	155	89	0	286
14	12	638	0	507	0	155	286	0
15								

Y la respuesta al problema es: $0+0+1+1+3+4+9+14+28+47+89+155=351$

Segunda versión: Determinando una fórmula recursiva.

Para determinar la fórmula recursiva de E^n vamos a utilizar la siguiente propiedad:

$$E^{n-1} - E^{n-3} = P_3^{n-2} + P_4^{n-2} - \left(P_3^{n-4} + P_4^{n-4}\right) = P_2^{n-3} + P_5^{n-3} - P_3^{n-4} + P_4^{n-4} =$$

$$= P_1^{n-4} + P_3^{n-4} + P_4^{n-4} + S^{n-4} - P_3^{n-4} + P_4^{n-4} = P_1^{n-4} + S^{n-4}$$

Y ahora vamos a buscar la fórmula recursiva:

$$E^n = P_3^{n-1} + P_4^{n-1} =$$
$$= P_2^{n-2} + P_5^{n-2} =$$
$$= P_1^{n-3} + P_3^{n-3} + P_4^{n-3} + S^{n-3} =$$
$$= E^{n-2} + P_1^{n-3} + S^{n-3} \Rightarrow E^n - E^{n-2} = S^{n-3} + P_1^{n-3}$$

Por otro lado:

$$S^{n-3} + P_1^{n-3} =$$
$$= P_1^{n-4} + P_5^{n-4} + S^{n-4} + P_2^{n-4} =$$
$$= S^{n-4} + P_1^{n-4} + P_5^{n-4} + P_2^{n-4} =$$
$$= E^{n-1} - E^{n-3} + P_5^{n-4} + P_2^{n-4} =$$
$$= E^{n-1} - E^{n-3} + P_4^{n-3} + P_3^{n-3} =$$
$$= E^{n-1} - E^{n-3} + E^{n-2}$$

En donde hemos aplicado la propiedad demostrada anteriormente. Así pues:

$$E^n - E^{n-2} = E^{n-1} - E^{n-3} + E^{n-2} \Rightarrow$$
$$E^n = E^{n-1} - E^{n-3} + 2E^{n-2}$$

Ahora calculamos directamente los primeros términos de la sucesión:

$$E^0 = 0,\ E^1 = 0,\ E^2 = 0,\ E^3 = 1,\ E^4 = 1$$

Y mediante la fórmula recursiva vamos determinando los siguientes términos:

$$E^5 = 3,\ E^6 = 4,\ E^7 = 9,\ E^8 = 14,\ E^9 = 28,\ E^{10} = 47,\ E^{11} = 89,\ E^{12} = 155$$

Y, finalmente: $0+0+1+1+3+4+9+14+28+47+89+155 = 351$.

Fuentes:

https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AIME_I_Problems/Problem_10

https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AIME_I_Problems/Problem_14

https://youtu.be/JD51G1wUKEs

https://youtu.be/11utulhU590