Madrid (Fase 1) 2020

1

El paralelogramo ABCD tiene área 192. Llamamos M y N a los puntos medios de los lados AD y BC, respectivamente. La recta CM corta a la prolongación de AB en el punto P. La recta DN corta a la prolongación de AB en el punto Q. Si CP y DQ se cortan en O, calcula el área del triángulo OPQ.

2

Consideremos la sucesión $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y para $n \geq 1$,

$$a_{n+2} = a_n^2 + a_{n+1}^2$$

¿Cuál es la cifra de las unidades de a_{2019}?

3

Si

$$\frac{2}{35} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

con $x \neq y$ enteros positivos, encuentra el menor valor posible de la suma $x + y$.

4

Tenemos 20 tarjetas, numeradas desde 1 hasta 20. Jimena elige al azar una de ellas, con el número j. A continuación, Álvaro elige al azar otra carta, que tiene el número a. ¿Cuál es la probabilidad de que la diferencia $a - j$ sea al menos 2? (Expresa el resultado en forma de fracción irreducible).

5

Si a y b son números reales diferentes, con $a \geq 0$, $b \geq 0$ y verificando

$$a + \sqrt{b} = b + \sqrt{a},$$

¿cuál es el valor mayor que puede tomar la suma $a + b$?

6

¿Cuál es el menor entero $n > 1$ tal que el producto de todos sus divisores positivos es n^4?

7

Las medidas de los lados del triángulo escaleno ΔABC son números enteros, y su perímetro es 2019. La bisectriz de $\angle C$ corta a AB en D, con $AD = 229$. Si las medidas de AC y AD son enteros primos entre sí, calcula BC.

8

Gabriel ha olvidado el código de seguridad de su teléfono, aunque recuerda que sus cuatro cifras sumaban por lo menos 8, que la primera estaba entre 0 y 6, la segunda entre 0 y 3, la tercera entre 0 y 4 y la cuarta entre 0 y 2, siempre con los extremos incluidos ¿Cuántos son los posibles códigos del teléfono de Gabriel?

9

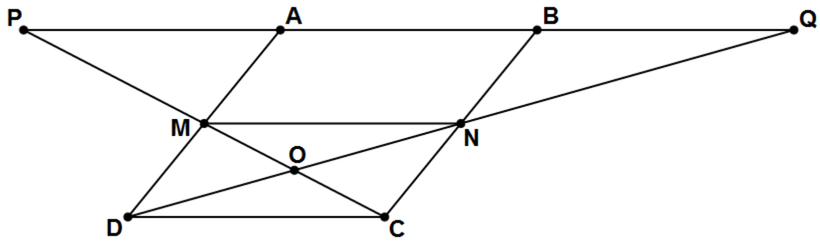
Diremos que un entero positivo n es *genial* si cumple simultáneamente las condiciones siguientes: ninguna de sus cifras es 0; n es múltiplo de 11; n es múltiplo de 12, y cualquiera de los números que obtenemos al permutar las cifras de n sigue siendo múltiplo de 12. ¿Cuántos números geniales de diez cifras hay?

10

El área del triángulo ΔABC es 300. Sea Q el punto medio de BC, P un punto de AC con $CP = 3PA$, y R un punto en AB tal que el área de ΔPQR es el doble del área de ΔRBQ. Determina el área de ΔPQR.

Soluciones.

1



En primer lugar vemos que los triángulos ΔAQD y ΔBQD son semejantes (por Tales), y puesto que $BN = AM = (1/2)AD$, se deduce que $BQ = (1/2)AB \Rightarrow BQ = AB$.
Con el mismo razonamiento llegamos a $PA = AB = BQ$.
Los triángulos ΔBQN, ΔPAM y ΔMND son congruentes.
Las diagonales de un paralelogramo se cortan en sus puntos medios, luego
$[MNCD] = \frac{1}{2}[ABCD] = 96$, $[\Delta MNO] = \frac{1}{4}[MNCD] = 24$, y finalmente
$[\Delta PQO] = [\Delta PAM] + [\Delta BQN] + [\Delta ABMN] + [\Delta MNO] = 48 + 48 + 96 + 24 = 216$

2
Estudiamos la última cifra de la sucesión a_n, para ello solo hay que calcular la última cifra de las operaciones:

$$(1,2,5,9,6,7,5,4,1,7,0,9,1,2,\ldots)$$

Y vemos que se van repitiendo cada 12 elementos.

$$2019 = 168 \cdot 12 + 3$$

Luego a_{2019} acaba igual que a_3, es decir, en 5.

3
$\frac{2}{35} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} \Rightarrow x + y = \frac{2xy}{35}$. Sea $k = \frac{xy}{35}$.

Tenemos

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 2k \Rightarrow y = 2k - x \\ xy = 35k \end{array}\right\} \Rightarrow x(2k - x) = 35k \Rightarrow -x^2 + 2kx - 35k = 0 \Rightarrow x^2 - 2kx + 35k = 0$$

Luego $x = \dfrac{2k \pm \sqrt{(-2k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 35k}}{2} = k \pm \sqrt{k^2 - 35k}$

Pero x es un entero, luego $k^2 - 35k$ debe ser un cuadrado perfecto. El primer k para el que esto sucede es $k = 36$, y entonces:

$$x = 36 \pm \sqrt{36^2 - 35 \cdot 36} = 36 \pm \sqrt{36(36 - 35)} = 36 \pm \sqrt{36} = 36 \pm 6$$

y por tanto

$$y = 72 - (36 \pm 6) = 36 \mp 6$$

El menor valor posible para la suma se encuentra en $x = 30$, $y = 42$, con suma 72.

Fuente de la solución: Soluciones oficiales.

Observación: Mediante la desigualdad AM-GM encontramos una cota menor, pero que se alcanza cuando $x = y$, incumpliendo una de las condiciones del enunciado:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Leftrightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy = 2 \cdot 2xy = 2 \cdot 35(x+y)$$

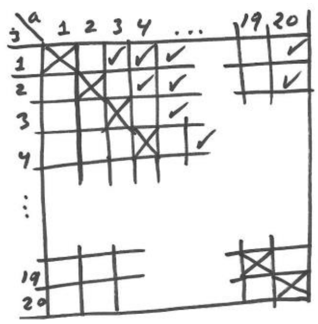
$$(x+y)^2 \geq 70(x+y) \Rightarrow x + y \geq 70$$

Y la igualdad acontence solo cuando $x = y$, que se puede resolver:

$35(2x) = 2x^2 \Rightarrow x = 35$, pero esta solución no es aceptable.

4

Este problema se resuelve fácilmente mediante una tabla de casos:



Los casos posibles son $T = 20 \cdot 19$, y los casos favorables son

$$F = 1 + 2 + 3 + \ldots + 18 = \frac{18 \cdot 19}{2} = 9 \cdot 19$$

Con lo que la probabilidad es $P = \dfrac{F}{T} = \dfrac{9 \cdot 19}{20 \cdot 19} = \dfrac{9}{20}$

5

$$a + \sqrt{b} = b + \sqrt{a} \Leftrightarrow a - b = \sqrt{a} - \sqrt{b} \Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

En donde para poder simplificar hemos tenido en cuenta que $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq 0$.

Luego $1 = \sqrt{a} + \sqrt{b} \Rightarrow 1 = 1^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2ab \Rightarrow a + b = 1 - 2ab \leq 1$

y la igualdad se puede alcanzar, por ejemplo con $a = 0$ y $b = 1$.

6

Observamos que si d es un divisor de n, también lo es n/d, y que el producto de ambos es n.

Luego del enunciado deducimos que con todos los divisores de n se pueden hacer cuatro parejas de producto n, es decir, que el número n tiene 8 divisores. Está claro que los valores más pequeños los encontraremos con factorizaciones con 1 o dos factores primos.

Con un factor primo: $n = p^a$, con 8 divisores es $n = p^7$, y el más pequeño es $n = 2^7 = 128$.
Con dos factores primos: $n = p^a q^b$, con 8 divisores tenemos $n = p^3 q^2$, y el valor más pequeño es $n = 2^3 \cdot 3 = 24$
Entre las dos opciones posibles el menor valor es el segundo, $n = 24$.

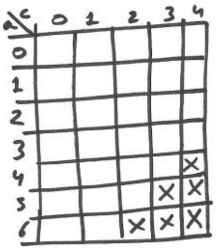
7
Aplicando el Teorema de la bisectriz, $\frac{a}{BD} = \frac{b}{229} \Rightarrow a = \frac{BD \cdot b}{229}$
Pero $BC = a$ es un entero, y $AC = b$ y $AD = 229$ son coprimos, luego 229 es un divisor de BD, es decir, $BD = 229k$ para cierto k.
Y por tanto $c = BD + DA = 229k + 229 = 229(k+1)$

$$a = \frac{BD \cdot b}{229} = \frac{229k \cdot b}{229} = kb$$

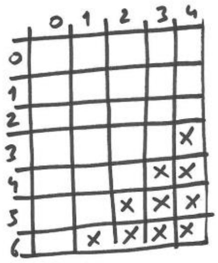
Por otro lado, $3 \cdot 673 = a + b + c = kb + b + 220(k+1) = (k+1)(b+229)$
La única combinación aceptable es $k = 2$ y $b + 229 = 673 \Rightarrow b = 444$
y en este caso $BC = a = 2 \cdot 444 = 888$

8
Primera versión.
Sea (a,b,c,d) un código válido, con $0 \le a \le 6$, $0 \le b \le 3$, $0 \le c \le 4$, $0 \le d \le 2$. Vamos a organizar todos los casos en función de las parejas (b,d), y su suma $b+d$

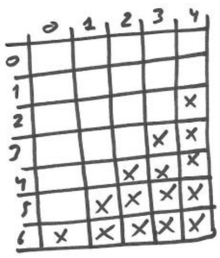
a) $b + d = 0 \Rightarrow a + b \ge 8 \Rightarrow 6$ casos.



b) $b + d = 1 \Rightarrow a + b \ge 7 \Rightarrow 10$ casos.



c) $b + d = 2 \Rightarrow a + b \ge 6 \Rightarrow 15$ casos.



d) $b + d = 3 \Rightarrow a + b \ge 5 \Rightarrow 20$ casos.

	0	1	2	3	4
0					
1					x
2				x	x
3			x	x	x
4		x	x	x	x
5	x	x	x	x	x
6	x	x	x	x	x

e) $b+d=4 \Rightarrow a+b \geq 4 \Rightarrow$ 25 casos.

	0	1	2	3	4
0					x
1				x	x
2			x	x	x
3		x	x	x	x
4	x	x	x	x	x
5	x	x	x	x	x
6	x	x	x	x	x

f) $b+d=5 \Rightarrow a+b \geq 3 \Rightarrow$ 29 casos.

	0	1	2	3	4
0				x	x
1			x	x	x
2		x	x	x	x
3	x	x	x	x	x
4	x	x	x	x	x
5	x	x	x	x	x
6	x	x	x	x	x

En total hay:

d \ b	0	1	2	3
0	6	10	15	20
1	10	15	20	25
2	15	20	25	29

$6+10+15+20+10+15+20+25+15+20+25+29=210$ casos.

Segunda versión.
En las soluciones oficiales encontramos una versión mucho más elegante.
Sea T el conjunto de todas las combinaciones posibles (a,b,c,d) con $0 \leq a \leq 6$, $0 \leq b \leq 3$, $0 \leq c \leq 4$, $0 \leq d \leq 2$. Está claro que el número de elementos de T es $7 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 = 420$.

Podemos establecer una biyección entre el subconjunto S de T cumpliendo, además, $a+b+c+d \geq 8$ con el subconjunto que no cumple esta última condición, es decir: $a+b+c+d \leq 7$, en efecto:

$$(a,b,c,d) \rightarrow (\,6-a\,,3-b\,,4-c\,,2-d\,)$$

Se comprueba facilmente que la función está bien definida, y que
$S=a+b+c+d \geq 8 \Rightarrow 6-a+3-b+4-c+2-d=15-(a+b+c+d) \leq 15-8=7$

Así pues, el conjunto S tendrá $420/2=210$ elementos.

9

Sean $a_9, a_8, a_7, \ldots, a_2, a_1$ las cifras de n, siendo a_1 las cifras de las unidades.

Puesto que n es múltiplo de 12, también lo será de 2, luego a_1 debe ser par. Pero puesto que, además, cualquier permutación de sus cifras también lo es, todas las cifras de n serán pares.

Puesto que es divisible entre 12, lo será también entre 4.

Tomamos todas las terminaciones a_2, a_1 de los múltiples de 4:

00, 04, 08, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92, 96

Y descartamos las que contienen dígitos impares o cero, nos quedan:

24, 28, 44, 48, 64, 68, 84, 88

Es decir, todas acaban en 4 0 8. Como, además, cualquier permutación de n también tiene que cumplir esta condición, deducimos que todos las cifras a_i son 4 o 8.

Supongamos que n se escribe con k cuatros y $10-k$ ochos, para cierto $0 \le k \le 10$. Sabemos que es divisible entre 3, luego la suma S de sus cifras también lo debe ser:

$S = 4k + 8(10-k) = 4k + 80 - 8k = 80 - 4k = 72 + 8 - 4k = 72 - 4(k-2)$ es divisible entre 3 si y solo si $k = 2,5,8$.

Por último, puesto que n es múltiplo de 11, la suma alternada de sus cifras será también múltiplo de 11 o 0.

Para $k = 2$

Si los dos cuatros ocupan posiciones con la misma paridad:

$4+4+8+8+8-(8+8+4+4+4)=4$ no es aceptable

Si los dos cuatros ocupan posiciones con paridad distinta:

$4+8+8+8+8-(4+8+8+8+8)=0$ es aceptable

Se cumple la condición. Tengo $5 \cdot 5 = 25$ combinaciones posibles (uno en una de las cinco posiciones impares y el otro en una de las cinco posiciones pares)

Para $k = 8$

Si los dos ochos ocupan posiciones con la misma paridad:

$8+8+4+4+4-(4+4+4+4+4)=8$ no es múltiplo de 11

Si los dos ochos ocupan posiciones con diferente paridad:

$8+4+4+4+4-(8+4+4+4+4)=0$ es aceptable.

De nuevo tengo $5 \cdot 5 = 25$combinaciones posibles.

Para $k = 5$

$4+4+4+4+4-(8+8+8+8+8)=-20$

$4+4+4+4+8-(4+8+8+8+8)=-12$

$4+4+4+8+8-(4+4+8+8+8)=-4$

$4+4+8+8+8-(4+4+4+8+8)=4$

$4+8+8+8+8-(4+4+4+4+8)=12$

$8+8+8+8+8-(4+4+4+4+4)=20$

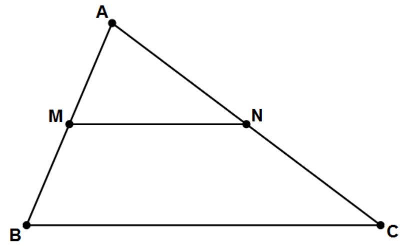
Ninguna combinación es aceptable

Así pues, hay $25+25=50$ números geniales.

Fuente de esta solución: Soluciones oficiales.

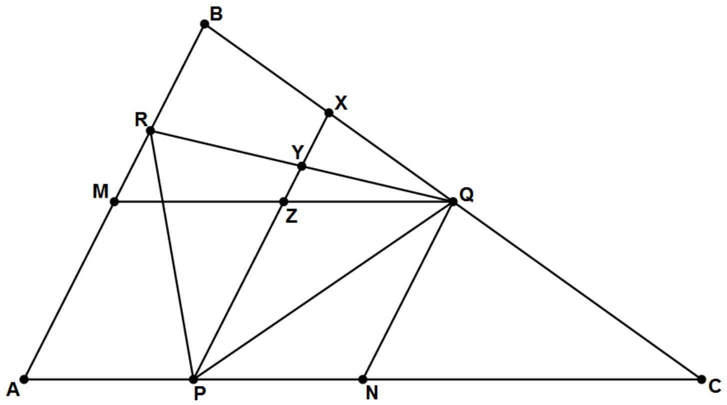
10

Para la resolución de este problema nos basaremos en el siguiente resultado:
Sea un triángulo ΔABC y sean M y N los respectivos puntos medios de los lados AB y AC.



Entonces $[\Delta AMN] = \frac{1}{4}[\Delta ABC]$

Volviendo al problema, sean N, M, X, Y, Z los respectivos puntos medios de AC, AB, BQ, RQ y MQ. Puesto que en todo momento estamos trabajando con puntos medios, está claro que los puntos X, Y, Z y P están alineados.



$$[MQNA] = \frac{300}{2} = 150 \Rightarrow [ZQNP] = \frac{[MQNA]}{2} = 75 \Rightarrow [\Delta ZQP] = \frac{[ZQNP]}{2} = \frac{75}{2}$$

$$[\Delta MBQ] = \frac{[\Delta ABC]}{4} \Rightarrow [\Delta XQZ] = \frac{[\Delta ABC]}{16} = \frac{75}{4}$$

$$[\Delta XQP] = [\Delta XQZ] + [\Delta ZQP] = \frac{75}{4} + \frac{75}{2} = \frac{225}{4}$$

Puesto que la mediana divide todo triángulo en dos triángulos con igual área:

$$[\Delta YQP] = \frac{[\Delta PQR]}{2}$$

Luego:

$$\frac{225}{4} = [\Delta XQP] = [\Delta XQY] + [\Delta YQP] = [\Delta XQY] + \frac{[\Delta RPQ]}{2} =$$

$$= [\Delta XQY] + [\Delta RBQ] = \frac{[\Delta RBQ]}{4} + [\Delta RBQ] = \frac{5[\Delta RBQ]}{4} \Rightarrow [\Delta RBQ] = 45$$

Y finalmente:

$$[\Delta PQR] = 2[\Delta RBQ] = 90$$

Nota: En las soluciones oficiales se presenta una versión alternativa.