SUNEUNG

CSAT (Korean College Scholastic Ability Test)

2024 - 2025

Gerard Romo Garrido

Toomates Coolección vol. 90

TooMates Coolección

Toomates Coolección

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "licencias digitales", "licencias de uso" y en general cualquier forma de "pago por el acceso a los materiales didácticos", con las que algunas empresas pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo material, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.

Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de pago por acceso a los materiales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía**.

El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las empresas comerciales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de los materiales que ofrecen, (que son muy mediocres) y no mediante retorcidas técnicas comerciales.

 Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas. **¡Libérate de la tiranía y mediocridad de los productos comerciales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos.**

Problem Solving (en español):

Geometría Axiomática Problemas de Geometría Volumen 1 Volumen 2 Volumen 3
Introducción a la Geometría Álgebra Teoría de números Combinatoria Probabilidad
Trigonometría Desigualdades Números complejos Calculus & Precalculus

Libros de texto para ESO y bachillerato (en español y en catalán):

Cálculo infinitesimal ESP CAT Álgebra Lineal ESP CAT Geometría Lineal ESP CAT
Números Complejos ESP CAT Combinatoria y probabilidad ESP CAT Estadística ESP CAT
Programación Lineal ESP CAT Álgebra ESP CAT Trigonometria ESP CAT
Geometria analítica ESP CAT Funciones ESP CAT Números (Preálgebra) ESP CAT
Proporcionalidad ESP CAT Medidas geométricas ESP CAT Mates amb Excel

PAU españolas:

Cataluña TEC Cataluña CCSS Valencia Galicia País Vasco Baleares

Reválidas internacionales:

Portugal Italia Francia Rumanía Hungría Polonia Pearson Edexcel International A Level
China-Gaokao Corea-Suneung Pearson Edexcel IGCSE Cambridge International A Level
Cambridge IGCSE AQA GCSE International Baccalaureate (IB)

Evaluación diagnóstica y pruebas de acceso:

ACM6EP ACM4 CFGS PAP

Competiciones matemáticas:

Canguro: España Cataluña Francia USA Reino Unido Austria
USA: Mathcounts AMC 8 10 12 AIME USAJMO USAMO TSTST TST ELMO Putnam
España: OME OMEFL OMEEX OMC OMEA OMEM OMA CDP
Europa: OMI Arquimede HMMT BMO Balkan MO JBMO OPM
Internacional: IMO IGO SMT INMO CMO HMMT EGMO
AHSME: Book 1 Book 2 Book 3 Book 4 Book 5 Book 6 Book 7 Book 8 Book 9

Otros materiales:

Pizzazz! Book A Book B Book C Book D Book E Pre-Algebra Algebra , REOIM , Llibre3r

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales para facilitar su edición. Descarga en los siguientes enlaces la versión "**.doc**" de este documento:

http://www.toomates.net/biblioteca/Suneung.docx

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a **toomates@gmail.com**

¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.

Consulta el **catálogo de libros** completo en http://www.toomates.net

¿Problemas para descargar algún documento? Descarga toda la biblioteca Toomates Aquí MEGA

Visita mi **Canal de Youtube**: https://www.youtube.com/c/GerardRomo

Visita mi **blog:** https://toomatesbloc.blogspot.com/

Versión de este documento: **14/10/2025**

Introducción.

La selectividad de Corea del Sur, llamada CSAT (Korean College Scholastic Ability Test), o Suneung, está considerada como una de las pruebas de acceso a la universidad más duras del mundo, sobre todo si el estudiante pretende entrar en las prestigiosas universidades SKY: Seoul National University, Korea University, y Yonsei University.

Fue introducida en 1994 y se celebra en noviembre, normalmente el 19. Dura un total de 8 horas, incluyendo descansos.

Consta de tres pruebas comunes: Lengua coreana, matemáticas e inglés, y opcionalmente alguna asignatura optativa (Ciencias naturales, Ciencias sociales o un segundo idioma estranjero).

La prueba de matemáticas consta de 30 preguntas divididas en dos bloques. Un bloque obligatorio de 22 preguntas, y un bloque opcional de 8 preguntas a escoger de uno de los tres bloques siguientes: Probabilidad y Estadística, Cálculo diferencial o Geometría.

Las preguntas son multiopción (5 opciones posibles, solo una cierta) o de respuesta numérica (un entero). No se penalizan las respuestas erróneas.

Índice.

Enunciados 2024.

1

Determina el valor de $\sqrt[3]{24}\times 3^{\frac{2}{3}}$

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

2

Dada la función $f(x)=2x^3-5x^2+3$, determina $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(h)}{h}$.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

3

Dado un ángulo $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$, y sabiendo que $\sin(-\theta)=\frac{1}{3}$, determina $\tan\theta$.

(A) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ (C) $-\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

4

Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}3x-a & (x<2)\\ x^2+a & (x\geq 2)\end{cases}$$

Suponiendo que es continua en todo IR, determina el valor de a.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

5

Dada una función polinómica que cumple $f'(x)=3x(x-2)$ y $f(1)=6$, determina el valor de $f(2)$.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

6

Sea una sucesión geométrica $\{a_n\}$ y sea S_n la suma de sus primeros n términos.
Sabiendo que $S_4-S_2=3a_4$ y $a_5=\frac{3}{4}$, determina a_1+a_2.

(A) 27 (B) 24 (C) 21 (D) 18 (E) 15

7

La función $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-12x+4$ alcanza su máximo en $x=\alpha$ y su mínimo en $x=\beta$. Determina $\beta-\alpha$.

(A) -4 (B) -1 (C) 2 (D) 5 (E) 8

8

Sea $f(x)$ una función que satisface $x f(x) - f(x) = 3x^4 - 3x$.
Determina $\int_{-2}^{2} f(x)dx$.

(A) 12 (B) 16 (C) 20 (D) 24 (E) 28

9

Sean $P(\log_5 3)$ y $Q(\log_5 12)$ dos puntos en un eje vertical. Las coordenadas del punto que divide PQ en $m:1-m$ son 1, determina 4^m. (Ten en cuenta que m es una constante $0 < m < 1$)

(A) 7/6 (B) 4/3 (C) 3/2 (D) 5/3 (E) 11/6

10

Dos partículas P y Q parten de un mismo origen en el momento $t = 0$ y se mueven para valores de t (t≥0) con velocidades respectivas dadas por las funciones

$$v_1(t) = t^2 - 6t + 5 \quad , \quad v_2(t) = 2t - 7$$

Sea $f(t)$ la distancia entre P y Q. La función $f(t)$ augmenta en el intervalo $[0,a]$, disminuye en el intervalo $[a,b]$ y vuelve a aumentar en el intervalo $[b,+\infty)$. Determina la distancia recorrida por la partícula Q desde $t = a$ hasta $t = b$, donde $0 < a < b$.

(A) 15/2 (B) 17/2 (C) 19/2 (D) 21/2 (E) 23/2

11

Sea $\{a_n\}$ una sucesión aritmética con diferencia común distinta de cero y positiva*, de la que sabemos que

$$|a_6| = a_8 \quad , \quad \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{a_k\, a_{k+1}} = \frac{5}{96} .$$

Determina $\sum_{k=1}^{15} a_k$.

(A) 60 (B) 65 (C) 70 (D) 75 (E) 80

*no queda claro en el enunciado. Lo supongo por la solución encontrada.

12

Sea la función $f(x) = \frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$, y fijado un t cumpliendo $0 < t < 6$, se define la función $g(x)$ como

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < t) \\ -(x-t) + f(t) & (x \geq t) \end{cases}$$

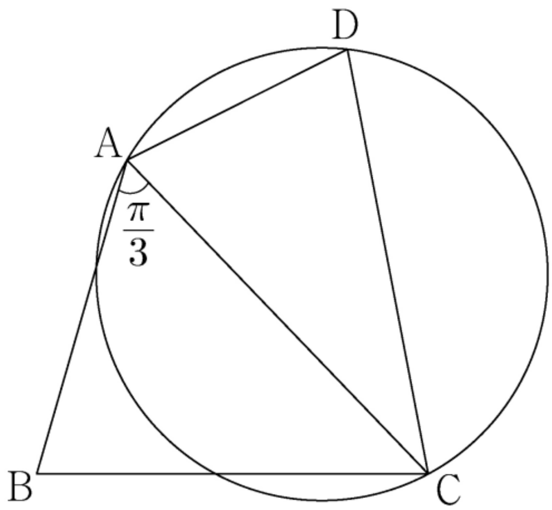
Determina el área máxima determinada por la gráfica de la función $y = g(x)$ y el eje X.

(A) 125/4 (B) 127/4 (C) 129/4 (D) 131/4 (E) 133/4

13

En la figura se muestra un cuadrilátero ABCD tal que

$$\overline{AB} = 3,\ \overline{BC} = \sqrt{13},\ \overline{AD} \times \overline{CD} = 9,\ \angle BAC = \frac{\pi}{3}.$$



Sea R el radio de la circunferencia circunscrita a ACD.

Si el área de ABC es S_1 sy el área de ACD es S_2 y se cumple $S_2 = \frac{5}{6}S_1$,

entonces la razón $\frac{R}{\sin(\angle ADC)}$ es igual a:

(A) 54/25 (B) 117/50 (C) 63/25 (D) 27/10 (E) 72/25

14

Dados dos números naturales a y b, sea la función

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3-6x+1 & (x\le 2) \\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2) \end{cases}$$

Sea $g(t)$ el número de puntos de corte entre la gráfica de la función $y=f(x)$ y la recta $y=t$, para cualquier t real.

Si sabemos que solo un número real k satisface

$$g(k)+\lim_{t\to k^-} g(t)+\lim_{t\to k^+} g(t)=9$$

¿Cuál es el valor máximo de a+b?

(A) 51 (B) 52 (C) 53 (D) 54 (E) 55

15

Sea $\{a_n\}$ la sucesión definida a partir de un número natural $a_1 \ge 1$ de la siguiente forma:

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2^{a_n} & si\ a_n\ es\ impar \\ \frac{1}{2}a_n & si\ a_n\ es\ par \end{cases}$$

Si suponemos que se cumple $a_6+a_7=3$, determina la suma de todos los valores posibles de a_1.

(A) 139 (B) 146 (C) 153 (D) 160 (E) 167

16

Resuelve la ecuación $3^{x-8}=\left(\frac{1}{27}\right)^x$.

17

Dada la función $f(x)=(x+1)(x^2+3)$, determina $f'(1)$.

18

Dadas dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ cumpliendo

$$\sum_{k=1}^{10} a_k=\sum_{k=1}^{10}(2b_k-1)\ \ ,\ \ \sum_{k=1}^{10}(3a_k+b_k)=33$$

Determina $\sum_{k=1}^{10} b_k$.

19

Dada la función $f(x)=\sin\frac{\pi}{4}x$, determina todos los números enteros $0<x<16$ tales que $f(2+x)f(2-x)<\frac{1}{4}$

20

Dado un número real $a>\sqrt{2}$, se define la función

$$f(x)=-x^3+a\,x^2+2x$$

Sea O el origen de coordenadas del plano y sea A un punto diferente de O de corte entre la recta tangente a $f(x)$ en el punto O y la propia curva $y=f(x)$. Sea B el punto de corte entre la recta tangente a $y=f(x)$ en el punto A y el eje X. Sabiendo que A es un punto de la circunferencia de diámetro OB, determina $OA\times AB$.

21

Dado un número entero positivo a fijo, definimos para todo $x\geq -1$ la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+6x & (-1\leq x<6)\\ a\log_4(x-5) & (x\geq 6)\end{cases}$$

Para todo $t\geq 0$ definimos la función $g(t)$ com el máximo de la función $f(x)$ en el intervalo $[t-1,t+1]$.
Determina el valor mínimo de a para el cual el mínimo de la función $g(t)$ es 5 en todo su dominio $[0,+\infty)$.

22

Sea $f(x)$ una función polinómica de tercer grado cuyo coeficiente principal (el coeficiente asociado al monomio de grado 3) es 1. Esta función cumple, además:

- No existe ningún entero k para el cual $f(k-1)f(k+1)<0$
- $f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$
- $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$

Determina $f(8)$.

Bloque opcional de probabilidad y estadística.

23 (P)

Determina la cantidad de posibilidades de ordenar las cinco letras x, x, y, y, z en fila.

(A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) 40 (E) 50

24 (P)

Dados dos sucesos A y B independientes, cumpliendo además $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ y $P(\overline{A}) = 2P(A)$, determina $P(B)$.

(A) 3/8 (B) 1/2 (C) 5/8 (D) 3/4 (E) 7/8

25 (P)

Disponemos de seis cartas numeradas 1, 2, 3, 4, 5, 6 y las colocamos en fila. Determina la probabilidad de que la suma de las dos cartas de los extremos sea menor o igual que 10.

(A) 8/15 (B) 19/30 (C) 11/15 (D) 5/6 (E) 14/15

26 (P)

Lanzamos 4 monedas al aire y sea X la variable aleatoria que indica el número de caras obtenidas. Sea Y la siguiente variable aleatoria discreta:

$$Y = \begin{cases} X & si\ X = 0\ o\ X = 1 \\ 2 & si\ X \geq 2 \end{cases}$$

Determina $E(Y)$

(A) 25/16 (B) 13/8 (C) 27/16 (D) 7/4 (E) 29/16

27 (P)

Tomamos una muestra de tamaño 49 de una población que sigue una distribución $N(m, 5^2)$. Se obtiene una media muestral $\overline{X}$, y se sabe que el intervalo de confianza es $a \leq m \leq \frac{6}{5}a$ con un nivel de confianza del 95%. Determina el valor de $\overline{X}$.

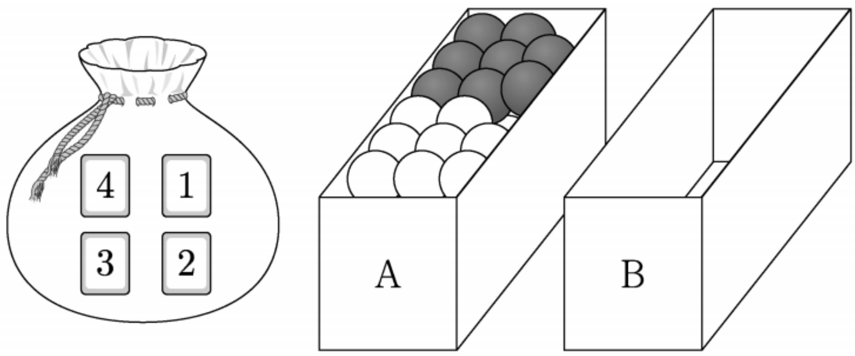
(Si Z es una normal estandard, se cumple $P(|Z| \leq 1.96) = 0.95$)

(A) 15.2 (B) 15.4 (C) 15.6 (D) 15.8 (E) 16.0

Nota de traducción: $N(m, 5^2) \rightarrow \sigma = 5$

28 (P)

Tenemos una bolsa y dos cajas, A y B. En la bolsa hay cuatro cartas, numeradas del 1 al 4. La caja A contiene al menos ocho bolas blancas y ocho negras, y la caja B está vacía.
Realizamos el siguiente experimento:
Sacamos una carta al azar de la bolsa, miramos el número y la volvemos a dejar en la bolsa.
Si el número sacado es el 1, tomamos una bola blanca de la caja A y la dejamos en la caja B.
Si el número sacado es el 2 o el 3, pasamos una bola blanca y una bola negra de la caja A a la caja B.
Si el número sacado es el 4, pasamos dos bolas blancas y una bola negra de la caja A a la caja B.
Repetimos este experimento cuatro veces y observamos que el número de bolas en la caja B es 8. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de bolas negras de la caja B sea 2?



(A) 3/70 (B) 2/35 (C) 1/14 (D) 3/35 (E) 1/10

29 (P)

Determina el número de conjuntos ordenados (a,b,c,d) de números naturales menores o iguales a 6 que satisfacen las siguientes condiciones:

$$a \leq c \leq d \quad y \quad b \leq c \leq d$$

Nota de traducción: Aquí el cero no se considera natural.

30 (P)

Dado un número real positivo t, sea X la variable aleatoria normal $N\left(1\,,t^2\right)$, sabiendo que se cumple $P(X \le 5t) \ge \frac{1}{2}$.

Sea k el valor máximo de $P\left(t^2 - t + 1 \le X \le t^2 + t + 1\right)$, obtenido mediante la siguiente tabla de valores de una normal estandard:

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

Presente el valor $1000 \times k$.

Nota de la traducción: Aquí $N\left(1\,,t^2\right) \Rightarrow \mu = 1, \sigma = t$.

Bloque opcional de cálculo diferencial.

23 (C)

Determina $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+5x)}$

(A) 1/5 (B) 2/5 (C) 3/5 (D) 4/5 (E) 1

24 (C)

Para cualquier valor de t, (t>0) se define

$$x = \ln\left(t^3 + 1\right), \quad y = \sin \pi t$$

Determina $\frac{dy}{dx}$ para $t = 1$.

(A) $-\frac{1}{3}\pi$ (B) $-\frac{2}{3}\pi$ (C) $-\pi$ (D) $-\frac{4}{3}\pi$ (E) $-\frac{5}{3}\pi$

25 (C)

Sean dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ definidas y derivables para todo $x > 0$.
Sabemos que $g(x)$ es la inversa de $f(x)$, que $g'(x)$ es continua en todo $x > 0$ y que se cumple

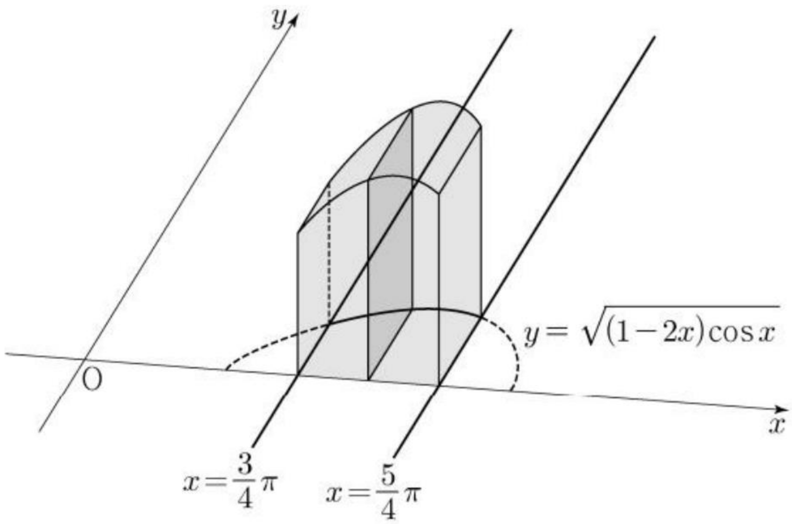
$$\int_1^a \frac{1}{g'\left(f(x)\right) f(x)}\, dx = 2\ln a + \ln(a+1) - \ln 2$$

Para todos los valores de a positivos. Si es cumple además $f(1) = 8$, determina $f(2)$.

(A) 36 (B) 40 (C) 44 (D) 48 (E) 52

26 (C)

La curva $y=\sqrt{(1-2x)\cos x}$ $\left(\frac{3}{4}\pi \le x \le \frac{5}{4}\pi\right)$, entre las dos rectas $x=\frac{3}{4}\pi$, $x=\frac{5}{4}\pi$ genera una figura sólida en la cual todas sus secciones transversales cortadas por un plano perpendicular al eje X son cuadrados. Determina el volumen de esta figura sólida.



(A) √2π-√2 (B) √2π-1 (C) 2√2π-√2 (D) 2√2π-1 (E) 2√2π

27 (C)

Para todo valor de t real, se define $f(t)$ como la pendiente de la recta tangente asociada a la curva $y=\frac{1}{e^x}+e^t$ que pasa por el origen de coordenadas.

Determina el valor de $f'(a)$ para el valor de a tal que $f(a)=-e\sqrt{e}$.

(A) $-\frac{1}{3}e\sqrt{e}$ (B) $-\frac{1}{2}e\sqrt{e}$ (C) $-\frac{2}{3}e\sqrt{e}$ (D) $-\frac{5}{6}e\sqrt{e}$ (E) $-e\sqrt{e}$

28 (C)

Sea $f(x)$ una función continua en todo IR y cumpliendo $f(x)\ge 0$ en todo IR.

Sabemos que $f(x)=-4xe^{4x^2}$ para todo $x<0$.

Para cualquier real positivo t, el número de raíces reales distintas de la ecuación $f(x)=t$ es 2, y si llamamos $g(t)$ a la menor solución y $h(t)$ a la mayor solución, se cumple:

$$2g(t)+h(t)=k \quad \text{para cierta constante k.}$$

Sabiendo que $\int_0^7 f(x)\,dx=e^4-1$, determina $\frac{f(9)}{f(8)}$.

(A) $\frac{3}{2}e^5$ (B) $\frac{4}{3}e^7$ (C) $\frac{5}{4}e^9$ (D) $\frac{6}{5}e^{11}$ (E) $\frac{7}{6}e^{13}$

30 (C)

La derivada $f'(x)$ de una función derivable $f(x)$ sobre todo el conjunto de números reales es $f'(x) = |\sin x| \cos x$.

Dado un número real positivo a, sea $y = g(x)$ la ecuación de la recta tangente en el punto $(a, f(a))$ asociada a la curva $y = f(x)$.

Sea $h(x) = \int_0^x f(t) - g(t)\, dt$. Si enumeramos por a_n todos los números reales positivos a que son máximos o mínimos de $h(x)$ en $x = a$, ordenados de menor a mayor, determina el valor $\frac{100}{\pi} \times (a_6 - a_2)$.

Bloque opcional de geometría.

23 (G)

Sean los puntos $A=(a,-2,6)$ y $B=(9,2,b)$. Si el punto medio del segmento AB es el punto $(4,0,7)$, determina $a+b$.

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

24 (G)

Sabemos que el punto $\left(\sqrt{3},-2\right)$ pertenece a la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{6}=1$. Determina la pendiente de la recta tangente asociada a esta elipse en dicho punto.

(A) √3 (B) √3/2 (C) √3/3 (D) √3/4 (E) √3/5

25 (G)

Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ cumpliendo $|\vec{a}|=\sqrt{11}$, $|\vec{b}|=3$, $|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{17}$, determina $|\vec{a}-\vec{b}|$.

(A) √2/2 (B) √2 (C) 3√2/2 (D) 2√2 (E) 5√2/2

27 (G)

Sea A un punto perteneciente a la parábola $y^2=8x$ de foco F. Sea B el pie de la perpendicular a su directriz por el punto A, y sean C y D los puntos de corte entre la recta BF y esta parábola.

Determina el área del triángulo ΔABD sabiendo que $\overline{BC}=\overline{CD}$. Se supone además que $\overline{CF}<\overline{DF}$ y A no es el origen.

(A) 100√2 (B) 104√2 (C) 108√2 (D) 112√2 (E) 116√2

Respuestas correctas 2024.

1	A	2
2	D	2
3	B	3
4	A	3
5	D	3
6	D	3
7	E	3
8	B	3
9	D	4
10	B	4
11	A	4
12	C	4
13	A	4
14	A	4
15	C	4
16	2	3
17	8	3
18	9	3
19	32	3
20	25	4
21	10	4
22	483	4

Probabilidad y estadística

23	C	2
24	D	3
25	E	3
26	B	3
27	B	3
28	D	4
29	196	4
30	673	4

Cálculo diferencial

23	C	2
24	B	3
25	D	3
26	C	3
27	A	3
28	B	4
29	162	4
30	125	4

Geometría

23	D	2
24	C	3
25	B	3
26	E	3
27	C	3
28	E	4
29	11	4
30	147	4

El tercer número indica el peso del problema en la puntuación de la prueba.

Soluciones desarrolladas 2024.

1 Determina el valor de $\sqrt[3]{24}\times 3^{\frac{2}{3}}$ (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

$$\sqrt[3]{24}\times 3^{\frac{2}{3}} = 24^{1/3}\times\left(3^2\right)^{1/3} = \left(24\times 3^2\right)^{1/3} = \left(3\times 2^3\times 3^2\right)^{1/3} = \left(2^3\times 3^3\right)^{1/3} = \left(2\times 3\right)^{3/3} = 6 \quad \text{(A)}$$

2 Dada la función $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3$, determina $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(h)}{h}$. (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(h)}{h} = f'(2) = 6\cdot 2^2 - 10\cdot 2 = 4 \quad \text{(D)}$$

3 Dado un ángulo $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$, y sabiendo que $\sin(-\theta) = \frac{1}{3}$, determina $\tan\theta$. (A) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ (C) $-\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

Sabemos que sin es una función impar, luego

$$\sin(-\theta) = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin(\theta) = -\sin(-\theta) = \frac{-1}{3}$$

Aplicamos la identidad fundamental de la trigonometría:

$$1 = \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \cos^2(\theta) \Rightarrow \cos^2(\theta) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos(\theta) = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Puesto que sabemos que $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$, el coseno será positivo, es decir, $\cos(\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Finalmente,

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{-1}{3} \div \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{-1}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{4} \quad \text{(B)}$$

4 Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3x - a & (x < 2) \\ x^2 + a & (x \geq 2) \end{cases}$ Suponiendo que es continua en todo IR, determina el valor de a.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Aplicamos la definición de continuidad en el único punto problemático $x=2$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = [3x-a]_{x=2} = 3\cdot 2 - a = 6-a$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = [x^2+a]_{x=2} = 2^2 + a$

$f(2) = 2^2 + a$

$6-a = 4+a \Leftrightarrow a = 1$ (A)

5 Dada una función polinómica que cumple $f'(x) = 3x(x-2)$ y $f(1)=6$, determina el valor de $f(2)$.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

$f(x) = \int 3x(x-2)\,dx = \int 3x^2 - 6x\,dx = x^3 - 3x^2 + C$

$6 = f(1) = 1^3 - 3\cdot 1^2 + C = -2 + C \Rightarrow C = 8$

$f(2) = 2^3 - 3\cdot 2^2 + 8 = 4$ (D)

6 Sea una sucesión geométrica $\{a_n\}$ y sea S_n la suma de sus primeros n términos.

Sabiendo que $S_4 - S_2 = 3a_4$ y $a_5 = \frac{3}{4}$, determina $a_1 + a_2$.

(A) 27 (B) 24 (C) 21 (D) 18 (E) 15

$a_1 \to a_2 = k\,a_1 \to a_3 = k^2\,a_1 \to a_4 = k^3\,a_1 \to a_5 = k^4\,a_1$

$S_4 - S_2 = a_4 + a_3 = k^3 a_1 + k^2 a_1 = 3a_4 = 3k^3\,a_1 \Leftrightarrow k^3 a_1 + k^2 a_1 = 3k^3\,a_1$

$\Leftrightarrow k^3 + k^2 = 3k^3 \Leftrightarrow 0 = -2k^3 + k^2 = k^2(-2k+1) \Leftrightarrow -2k+1 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$

$\frac{3}{4} = a_5 = k^4 a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 a_1 = \frac{1}{16} a_1 \Leftrightarrow a_1 = 12$

$a_1 + a_2 = 12 + \left(\frac{1}{2}\right)\cdot 12 = 12 + 6 = 18$ (D)

7 La función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 12x + 4$ alcanza su máximo en $x = \alpha$ y su mínimo en $x = \beta$. Determina $\beta - \alpha$.

(A) -4 (B) -1 (C) 2 (D) 5 (E) 8

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-12x+4 \to f'(x)=x^2-4x-12=0 \Leftrightarrow x=-2,6$.

$f''(x)=2x-4 \Rightarrow \begin{cases} f''(-2)=-8<0 \\ f''(6)=8>0 \end{cases}$

Luego, por el Criterio de la Segunda Derivada, esta función tiene un máximo en x=-2 y un mínimo en x=6. Luego $6-(-2)=8$ (E).

8 Sea $f(x)$ una función que satisface $x\,f(x)-f(x)=3x^4-3x$.

Determina $\int_{-2}^{2} f(x)dx$.

(A) 12 (B) 16 (C) 20 (D) 24 (E) 28

$3x(x^3-1)=3x^4-3x=x\,f(x)-f(x)=f(x)(x-1)$

Aplicamos la identidad notable:

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

Luego

$f(x)(x-1)=3x(x^3-1)=3x(x-1)(x^2+x+1) \Rightarrow f(x)=3x(x^2+x+1)$ si x≠1

El valor puntual en x=1 no afecta para nada el resultado de la integral, y por tanto podemos suponer $f(x)=3x(x^2+x+1)=3x^3+3x^2+3x$

$\int_{-2}^{2} f(x)dx=F(2)-F(-2)=26-10=16$ (B)

$F(x)=\int f(x)dx=\frac{3x^4}{4}+\frac{3x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}=\frac{3x^4}{4}+x^3+\frac{3x^2}{2}$

$F(2)=\frac{3\cdot 2^4}{4}+2^3+\frac{3\cdot 2^2}{2}=26$

$F(-2)=\frac{3\cdot(-2)^4}{4}+(-2)^3+\frac{3\cdot(-2)^2}{2}=10$

9 Sean $P(\log_5 3)$ y $Q(\log_5 12)$ dos puntos en un eje vertical. Las coordenadas del punto que divide PQ en $m:1-m$ son 1, determina 4^m. (Ten en cuenta que m es una constante $0<m<1$)

(A) 7/6 (B) 4/3 (C) 3/2 (D) 5/3 (E) 11/6

Calculamos la longitud del segmento:

$$\log_5 12-\log_5 3=\log_5\left(\frac{12}{3}\right)=\log_5 4$$

Interpretamos la razón que se nos plantea en el enunciado en términos de coordenadas:

$$\frac{m}{1}=\frac{1-\log_5 3}{\log_5 4} \Leftrightarrow m=\frac{1-\log_5 3}{\log_5 4}=\frac{\log_5 5-\log_5 3}{\log_5 4}=\frac{\log_5 5/3}{\log_5 4}=$$

$$=\log_4\left(\frac{5}{3}\right) \Rightarrow 4^m=\frac{5}{3}$$

Luego la solución es (D).

10 Dos partículas P y Q parten de un mismo origen en el momento $t=0$ y se mueven para valores de t (t≥0) con velocidades respectivas dadas por las funciones

$$v_1(t)=t^2-6t+5 \quad , \quad v_2(t)=2t-7$$

Sea $f(t)$ la distancia entre P y Q. La función $f(t)$ augmenta en el intervalo $[0,a]$, disminuye en el intervalo $[a,b]$ y vuelve a aumentar en el intervalo $[b,+\infty)$. Determina la distancia recorrida por la partícula Q desde $t=a$ hasta $t=b$, donde $0<a<b$.

(A) 15/2 (B) 17/2 (C) 19/2 (D) 21/2 (E) 23/2

En principio tenemos que estudiar la función distancia recorrida por P es:

$$f_1(t)=\int_0^t v_1(t)\,dt$$

Y la función distancia recorrida por Q es

$$f_2(t)=\int_0^t v_2(t)\,dt$$

Nos piden estudiar la función distancia entre P y Q, que es

$$f(t)=\left|f_1(t)-f_2(t)\right|$$

Podemos determinar las integrales anteriores y la función f resultante, pero como queremos estudiar su monotonía, podemos aplicar el Teorema Fundamental del cálculo:

$$f'(t)=v_1(t)-v_2(t)=t^2-6t+5-(2t-7)=t^2-6t+5-2t+7=t^2-8t+12=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=6 \end{cases}$$

$$f''(t)=2t-8 \rightarrow f''(2)=2\cdot 2-8=-4<0$$

$$f''(6)=2\cdot 6-8=4>0$$

Aplicando el criterio de la segunda derivada, la función f presenta un máximo en t=2 y un mínimo en t=6. Así pues, a=2 y b=6.

Ahora calculamos la distancia recorrida por la partícula Q en el intervalo $2\le t\le 6$. Para ello debemos añadir valor absoluto a la función, pues queremos la distancia total, hacia delante y hacia atrás:

$$f_2(t)=\int_2^6 \left|v_2(t)\right|dt$$

Aquí tenemos que tener en cuenta que $v_2(t)=2t-7$ cambia de signo en el instante $t=7/2$, luego esta integral la tenemos que dividir en dos partes:

$$f_2(t)=\int_2^6 \left|v_2(t)\right|dt=\int_2^{7/2} 7-2t\,dt+\int_{7/2}^6 2t-7\,dt=\frac{9}{4}+\frac{25}{4}=\frac{17}{2} \quad \text{(B)}$$

$$\int_2^{7/2} 7-2t\,dt = \left[7t - t^2\right]_2^{7/2} = \frac{9}{4}$$

$$\int_{7/2}^{6} 2t-7\,dt = \left[t^2 - 7t\right]_{7/2}^{6} = \frac{25}{4}$$

Observación: Puesto que estamos integrando una función lineal, una forma más rápida de calcular esta integral hubiese sido interpretándola como dos triángulos.

11 Sea $\{a_n\}$ una sucesión aritmética con diferencia común distinta de cero y positiva*, de la que sabemos que

$$|a_6| = a_8 \quad , \quad \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{a_k\, a_{k+1}} = \frac{5}{96} \ .$$

Determina $\sum_{k=1}^{15} a_k$.

(A) 60 (B) 65 (C) 70 (D) 75 (E) 80

*no queda claro en el enunciado. Se supone por la solución encontrada.

$$a_1 \to a_2 = a_1 + k \to a_3 = a_2 + k = a_1 + 2k \to a_4 = a_1 + 3k \to \ldots \to a_n = a_1 + (n-1)k$$

$$|a_6| = a_8 \Leftrightarrow |a_1 + 5k| = a_1 + 7k \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 5k = a_1 + 7k & (a) \\ -(a_1 + 5k) = a_1 + 7k & (b) \end{cases}$$

Si $a_1 + 5k = a_1 + 7k \Rightarrow 5k = 7k \Rightarrow 0 = 2k \Rightarrow k = 0$ imposible. Luego forzosamente:

$$-(a_1 + 5k) = a_1 + 7k \Rightarrow -a_1 - 5k = a_1 + 7k \Rightarrow -12k = 2a_1 \Rightarrow -6k = a_1 \Rightarrow k = \frac{-a_1}{6}$$

Resolvemos este sumatorio mediante la técnica de resta telescópica:

$$\frac{x-y}{xy} = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-y}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$$

En nuestro caso

$$\frac{1}{a_{n+1}a_n} = \frac{1}{a_{n+1} - a_n}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

y por tanto

$$\frac{5}{96} = \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{a_k\, a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_5} - \frac{1}{a_6}\right) = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_6}\right)$$

$$\frac{5}{96} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_6}\right) = \frac{1}{k}\left(\frac{a_6 - a_1}{a_1 a_6}\right) = \frac{1}{k}\left(\frac{5k}{a_1 a_6}\right) = \frac{5}{a_1 a_6} \Rightarrow a_1 a_6 = 96$$

$$96 = a_1 a_6 = a_1(a_1 + 5k) = a_1\left(a_1 + 5\left(\frac{-a_1}{6}\right)\right) = a_1^2\left(1 - \frac{5}{6}\right) = \frac{a_1^2}{6} \Rightarrow a_1 = \pm 24$$

Si $a_1 = 24 \Rightarrow k = \frac{-a_1}{6} = \frac{-24}{6} = -4$, imposible, estamos suponiendo k>0.

Finalmente, aplicamos la fórmula de la suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética: $S_n = \dfrac{n\left(2a_1 + (n-1)k\right)}{2}$

En nuestro caso, $a_1 = -24 \Rightarrow k = \dfrac{-a_1}{6} = \dfrac{24}{6} = 4 \Rightarrow S_{15} = \dfrac{15\left(-48 + 14\cdot 4\right)}{2} = 60$ (A)

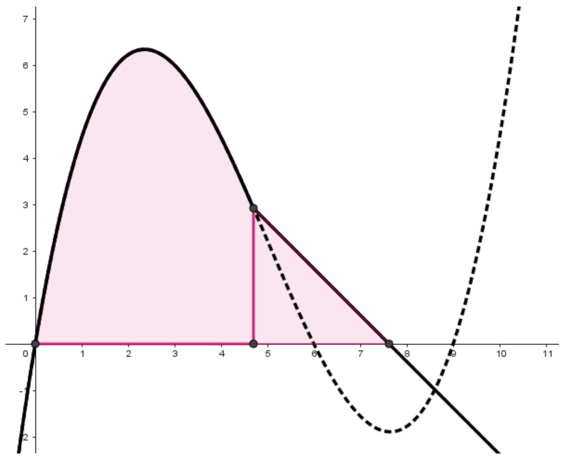
12 Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{9}x(x-6)(x-9)$, y fijado un t cumpliendo $0 < t < 6$, se define la función $g(x)$ como

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < t) \\ -(x-t) + f(t) & (x \geq t) \end{cases}$$

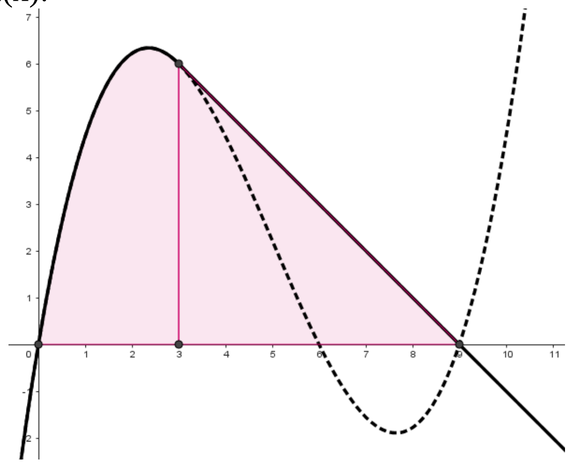
Determina el área máxima determinada por la gráfica de la función $y = g(x)$ y el eje X.

(A) 125/4 (B) 127/4 (C) 129/4 (D) 131/4 (E) 133/4

La parte de la izquierda de la función g(x) es la propia f(x), y la parte de la derecha de la función g(x) es una recta de pendiente -1 y que pasa por el punto $(t, f(t))$:



Podemos especular que el área máxima se encontrará cuando la recta es tangente a la gráfica de la función f(x):



$$f(x)=\frac{1}{9}x(x-6)(x-9)=\frac{x^3}{9}-\frac{5x^2}{3}+6x \rightarrow f'(x)=\frac{x^2}{3}-\frac{10x^2}{3}+6=-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=7 \end{cases}$$

Descartando la solución x=7 por estar fuera del dominio de definición del problema, tomamos $t=3$, calculamos $f(3)=6$ y la función de la izquierda es la recta $h(x)=-(x-t)+f(t)=-(x-3)+f(3)=-(x-3)+6=-x+9$ que cortará el eje X en el punto 9.

El área de la izquierda la calculamos mediante una integral:

$$A_1=\int_0^3 f(x)dx=\left[\frac{x^4}{36}-5x^3+3x^2\right]_0^3=\frac{57}{4}$$

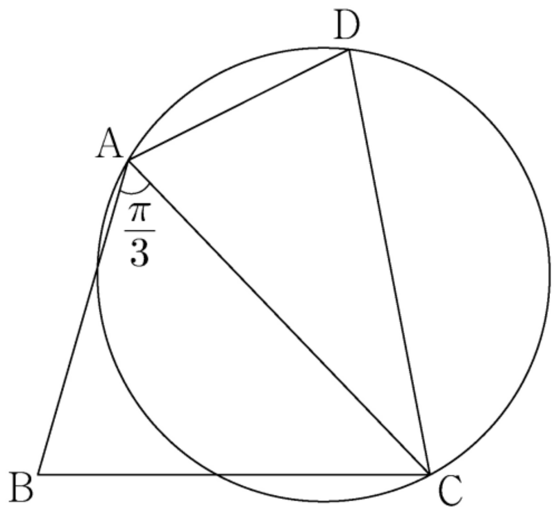
Y el área de la derecha la calculamos interpretando la figura como un triángulo de base 9-3=6 y altura $f(3)=6$:

$$A_2=\frac{6\cdot 6}{2}=18$$

Y finalmente, el área pedida es $A=A_1+A_2=\frac{57}{4}+18=\frac{129}{4}$ (C)

13 En la figura se muestra un cuadrilátero ABCD tal que

$$\overline{AB}=3,\ \overline{BC}=\sqrt{13},\ \overline{AD}\times\overline{CD}=9,\ \angle BAC=\frac{\pi}{3}.$$



Sea R el radio de la circunferencia circunscrita a ACD.

Si el área de ABC es S_1 sy el área de ACD es S_2 y se cumple $S_2=\frac{5}{6}S_1$, entonces la razón $\frac{R}{\sin(\angle ADC)}$ es igual a:

(A) 54/25 (B) 117/50 (C) 63/25 (D) 27/10 (E) 72/25

Aplicamos el Teorema del Coseno en el triángulo ABC:

$$\left(\sqrt{13}\right)^2 = 3^2 + AC^2 - 2\cdot 3\cdot AC\cdot\cos(\pi/2) \Leftrightarrow$$

$$13 = 9 + AC^2 - 6\cdot AC\cdot(1/2) \Leftrightarrow 13 = 9 + AC^2 - 3AC \Leftrightarrow AC = \begin{cases} -1 \\ 4 \end{cases}$$

Descartamos la solución negativa, y por tanto deducimos que $AC = 4$

El área de S_1 se puede determinar mediante la fórmula del Seno:

$$S_1 = \frac{AB\cdot AC\cdot\sin(\pi/3)}{2} = \frac{3\cdot 4\cdot(\sqrt{3}/2)}{2} = 3\sqrt{3}$$

Luego $S_2 = \dfrac{5}{6}S_1 = \dfrac{5}{6}\cdot 3\sqrt{3} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

Aplicamos de nuevo la fórmula del Seno:

$$\frac{5\sqrt{3}}{2} = S_2 = \frac{AD\cdot DC\cdot\sin(\angle ADC)}{2} = \frac{9\cdot\sin(\angle ADC)}{2} \Rightarrow \sin(\angle ADC) = \frac{5\sqrt{3}}{9}$$

Aplicamos el Teorema del Seno:

$$2R = \frac{AC}{\sin(\angle ADC)} = \frac{4}{5\sqrt{3}/9} \Rightarrow R = \frac{18}{5\sqrt{3}}$$

Finalmente:

$$\frac{R}{\sin\left(\angle ADC\right)} = \frac{18}{5\sqrt{3}} \div \frac{5\sqrt{3}}{9} = \frac{18}{5\sqrt{3}}\cdot\frac{9}{5\sqrt{3}} = \frac{54}{25} \quad \text{(A)}$$

14 Dados dos números naturales a y b, sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 6x + 1 & (x \le 2) \\ a(x-2)(x-b) + 9 & (x > 2) \end{cases}$$

Sea $g(t)$ el número de puntos de corte entre la gráfica de la función $y = f(x)$ y la recta $y = t$, para cualquier t real.

Si sabemos que solo un número real k satisface

$$g(k) + \lim_{t\to k^-} g(t) + \lim_{t\to k^+} g(t) = 9$$

¿Cuál es el valor máximo de a+b?

(A) 51 (B) 52 (C) 53 (D) 54 (E) 55

Estudiamos en primer lugar la parte izquierda de la función:

$h(x) = 2x^3 - 6x + 1 \to h'(x) = 6x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1, -1$

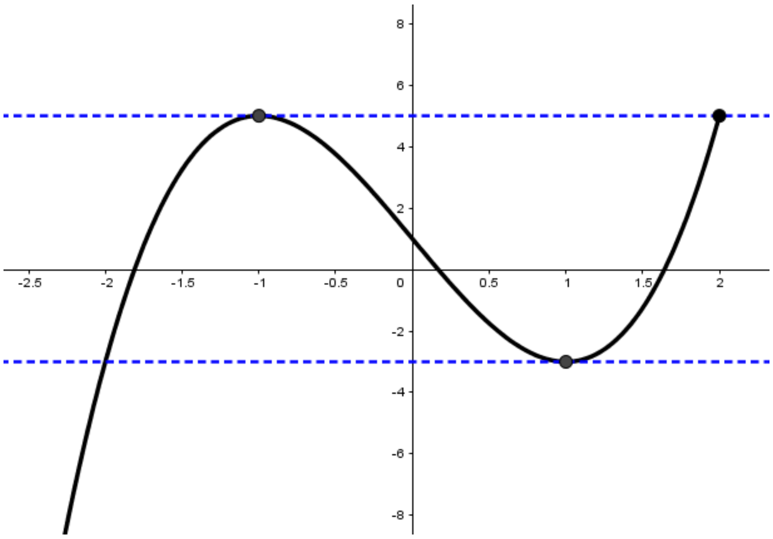
Mediante el procedimiento habitual de estudio por intérvalos deducimos que esta función tiene un máximo en

$$x = -1 \Rightarrow h(-1) = 2(-1)^3 - 6(-1) + 1 = 5$$

y un mínimo en

$$x = 1 \Rightarrow h(1) = 2\cdot 1^3 - 6\cdot 1 + 1 = -3$$

En su extremo de definición: $x = 2 \Rightarrow h(2) = 2 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2 + 1 = 5$, es decir, tiene esta forma:



Si solo tenemos en cuenta esta parte de la gráfica de la función $f(x)$, entonces está claro que $\operatorname{Im} g(t) = \{1,2,3\}$

La parte de la derecha de la función: $d(x) = a(x-2)(x-b)+9$ es una parábola con las ramas hacia arriba, y que pasa por el punto (2,9) independientemente de los valores de a y b.

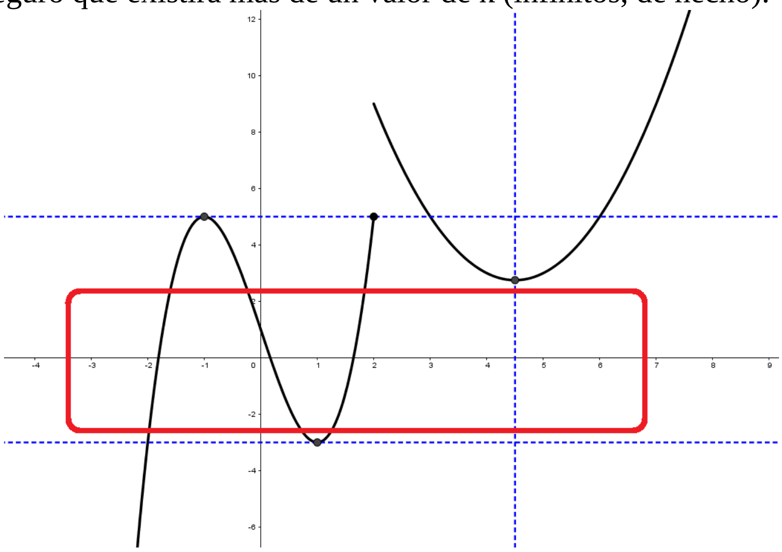
Su eje de simestría pasa por el punto medio entre 2 y b , es decir, $y = \dfrac{2+b}{2} = 1 + \dfrac{b}{2}$.

$$d\left(1+\frac{b}{2}\right) = a\left(1+\frac{b}{2}-2\right)\left(1+\frac{b}{2}-b\right)+9 = a\left(\frac{b}{2}-1\right)\left(1-\frac{b}{2}\right)+9$$

observamos que si la parábola no está suficientemente baja, parte del intervalo $-3 < k < 5$ d generará valores que cumplirán la igualdad del enunciado:

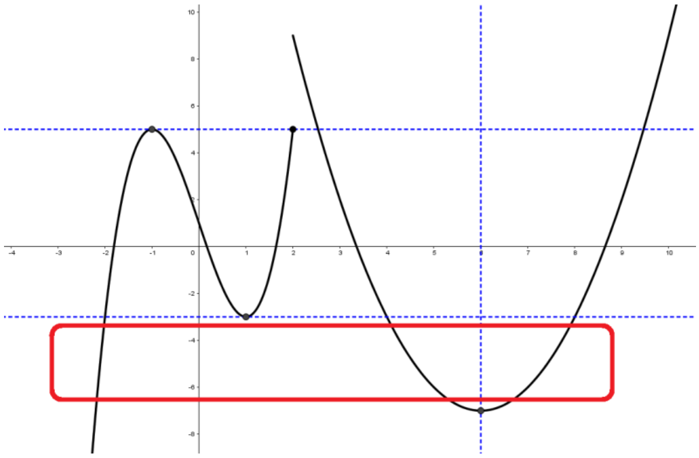
$$g(k) + \lim_{t \to k^-} g(t) + \lim_{t \to k^+} g(t) = 3 + 3 + 3 = 9$$

y por tanto seguro que existirá más de un valor de k (infinitos, de hecho).



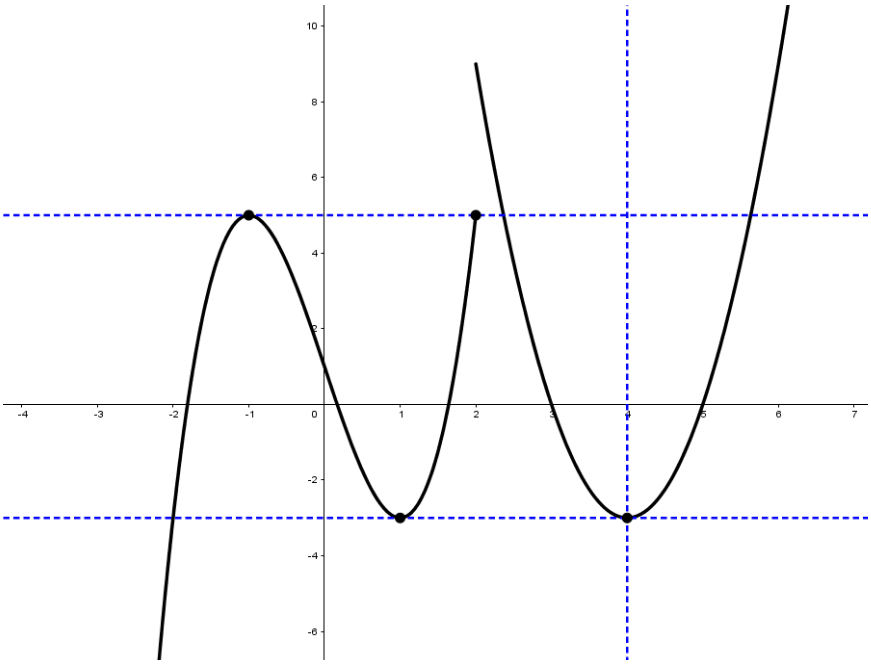
Por lo tanto el vértice de la parábola no puede estar por encima de y=-3.
Sin embargo, si el vértice de la parábola está por debajo de y=-3, generará una zona de valores para los cuales

$$g(k)+\lim_{t\to k^-} g(t)+\lim_{t\to k^+} g(t)=3+3+3=9$$



Así pues, el único caso aceptable es cuando el vértice de la parábola pasa justo por y=-3.

Y en este caso es fácil comprobar visualmente que se cumplen las condiciones del enunciado:



Luego nuestro objetivo es resolver la ecuación con incógnitas a y b números enteros positivos:

$$a\left(\frac{b}{2}-1\right)\left(1-\frac{b}{2}\right)+9=-3 \Leftrightarrow -12=a\left(\frac{b}{2}-1\right)\left(1-\frac{b}{2}\right)=-a\left(\frac{b}{2}-1\right)\left(\frac{b}{2}-1\right)=-a\left(\frac{b}{2}-1\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$a\left(\frac{b}{2}-1\right)^2=12 \Leftrightarrow 4a\left(\frac{b}{2}-1\right)^2=48 \Leftrightarrow a\,(b-2)^2=48=2^4\cdot 3=4^2\cdot 3$$

Puesto que hay un cuadrado, las úncias posibilidades son:

$a=3\,,\,(b-2)^2=4^2 \Rightarrow b=4$ (Tomamos solo las soluciones positivas)

$a=48$, $(b-2)^2=1 \Rightarrow b=3$

Las posibles soluciones (a,b) son (3,4), (48,3) y la mayor suma a+b se consigue para 48+3=51 (A)

15 Sea $\{a_n\}$ la sucesión definida a partir de un número natural $a_1 \geq 1$ de la siguiente forma:

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{a_n} & si\ a_n\ es\ impar \\ \frac{1}{2}a_n & si\ a_n\ es\ par \end{cases}$$

Si suponemos que se cumple $a_6 + a_7 = 3$, determina la suma de todos los valores posibles de a_1.

(A) 139 (B) 146 (C) 153 (D) 160 (E) 167

Observamos que todos los números a_n son enteros y cumplen $a_n \geq 1$.
Luego si $a_6 + a_7 = 3$ solo se pueden dar dos casos: $a_6 = 2$, $a_7 = 1$ y $a_6 = 1$, $a_7 = 2$.

Ahora se trata de ir escribiendo sistemáticamente todas las sucesiones. En primer lugar vamos a poner la única en la que no aparecen números impares, es decir, cuando no aparece ningún 2^{a_n} con a_n impar, luego vamos a añadir las posiciones candidatas a números impares, es decir, cuando aparece algún a_n impar.
Para ello hay que observar que un número 2^{a_n} con a_n impar puede venir de a_n o también de 2^{a_n+1}

1	2	3	4	5	6	7
64	32	16	8	4	2	1
5						
12	6	3				
1	2	1	2	1		
4		4				
3	8					
16						
32	16	8	4	2	1	2
6	3					
2	1	2	1			
8	4					

Luego la suma pedida es 64+5+12+1+4+3+16+32+6+2+8=153 (C)

16 Resuelve la ecuación $3^{x-8} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$.

$$3^{x-8}=\left(\frac{1}{27}\right)^x=\left(\frac{1}{3^3}\right)^x=\left(3^{-3}\right)^x=3^{-3x}\Rightarrow x-8=-3x\Rightarrow 4x=8\Rightarrow x=2$$

17 Dada la función $f(x)=(x+1)(x^2+3)$, determina $f'(1)$.

$$\left.\begin{array}{l} x+1\to 1 \\ x^2+3\to 2x \end{array}\right\}\to f'(x)=x^2+3+2x(x+1)\to f'(1)=1+3+2\cdot 2=8$$

18 Dadas dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ cumpliendo

$$\sum_{k=1}^{10} a_k=\sum_{k=1}^{10}(2b_k-1)\quad,\quad \sum_{k=1}^{10}(3a_k+b_k)=33$$

Determina $\sum_{k=1}^{10} b_k$.

$$\sum_{k=1}^{10} a_k=\sum_{k=1}^{10}(2b_k-1)=2\left(\sum_{k=1}^{10} b_k\right)-10$$

$$33=\sum_{k=1}^{10}(3a_k+b_k)=3\sum_{k=1}^{10} a_k+\sum_{k=1}^{10} b_k$$

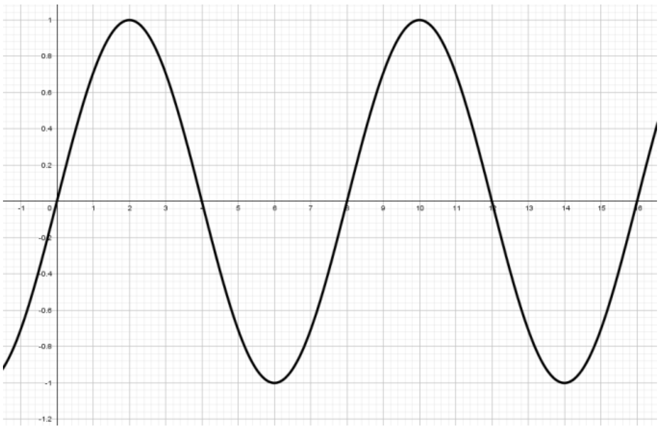
Denotando $x=\sum_{k=1}^{10} a_k$ e $y=\sum_{k=1}^{10} b_k$ obtenemos un sistema lineal 2×2, que resolvemos con los métodos habituales:

$$\left.\begin{array}{l} x=2y-10 \\ 33=3x+y \end{array}\right\}\Rightarrow x=8, y=9$$

Luego la solución es $\sum_{k=1}^{10} b_k=y=9$.

19 Dada la función $f(x)=\sin\frac{\pi}{4}x$, determina todos los números enteros $0<x<16$ tales que $f(2+x)f(2-x)<\frac{1}{4}$

La clave para resolver este problema es tener muy clara la gráfica de la función $f(x)$:



Observando esta gráfica vemos claramente que la condición se cumplirá para x=2, 6, 10 y 14, pues en estos puntos $f(2+x)f(2-x)=0\cdot 0=0$, y no se cumplirá seguro para x=4, 8, 12 y 16, pues en estos puntos $f(2+x)f(2-x)=1$. En esto último hemos tenido en cuenta que la función seno es impar, y por tanto
$f(2+x)f(2-x)=-f(x+2)f(x-2)$

Veamos que en los puntos x=1, 3, 5, 7... tampoco se cumple. Por ejemplo, para x=1,
$f(2+1)f(2-1)=\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}>\frac{1}{4}$

Para x=3, 5, 7... se obtienen los mismos valores.

Así pues, la solución es 2+6+10+14=32.

20 Dado un número real $a>\sqrt{2}$, se define la función

$$f(x)=-x^3+a\,x^2+2x$$

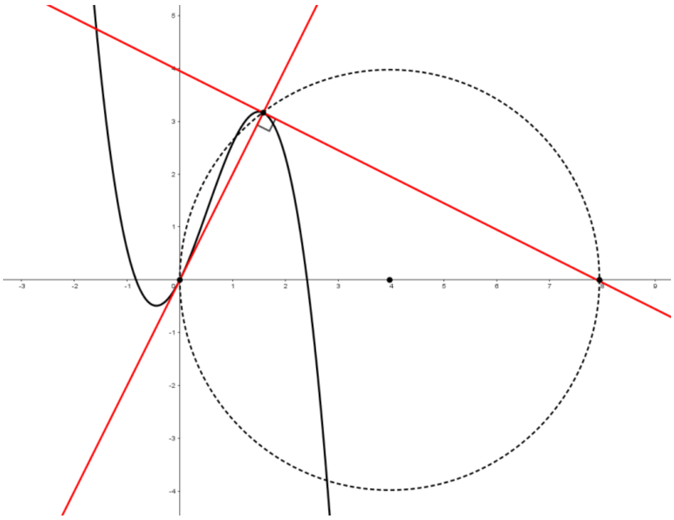
Sea O el origen de coordenadas del plano y sea A un punto diferente de O de corte entre la recta tangente a $f(x)$ en el punto O y la propia curva $y=f(x)$.
Sea B el punto de corte entre la recta tangente a $y=f(x)$ en el punto A y el eje X.
Sabiendo que A es un punto de la circunferencia de diámetro OB, determina $OA\times AB$.

$f'(x)=-3x^2+2a\,x+2\rightarrow f'(0)=2$
Luego la recta tangente a la función en el punto O es $g(x)=2x$.

El punto de corte entre esta recta tangente y la gráfica de la función será
$f(x)=g(x)\Leftrightarrow -x^3+a\,x^2+2x=2x\Leftrightarrow 0=-x^3+a\,x^2=x^2(-x+a)\Leftrightarrow\begin{cases}x=a\\x=0\end{cases}$
$f(a)=-a^3+a\cdot a^2+2a=2a$
Luego $A=(a,2a)$.
Ahora determinamos la recta tangente a $y=f(x)$ en el punto A.
La pendiente de esta segunda recta será $f'(a)=-3a^2+2a\cdot a+2=-a^2+2$

Aquí observamos que $a > \sqrt{2} \Rightarrow -a^2 + 2 < 0$, es decir, esta recta es decreciente.

Si el punto A pertenece a la circunferencia de diámetro OB, entonces, por Teorema de Tales, $\angle OAB = 90^{\circ}$, es decir, las dos rectas serán perpendiculares:



y por tanto el producto de sus pendientes será -1:

$-1 = 2 \cdot \left(-a^2 + 2\right) \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{5/2}$. Puesto que $a > \sqrt{2}$ descartamos la primera opción y nos quedamos con $a = \sqrt{5/2}$.

$$f'(a) = -a^2 + 2 = -\frac{5}{2} + 2 = -\frac{1}{2}$$

$$A = (\sqrt{5/2}, 2\sqrt{5/2})$$

La segunda recta tangente será de la forma $h(x) = \frac{-1}{2}x + b$, y sabemos que pasa por el punto A:

$$2\sqrt{5/2} = \frac{-1}{2}\sqrt{5/2} + b \Rightarrow b = 2\sqrt{5/2} + \frac{\sqrt{5/2}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{5/2}$$

$$h(x) = \frac{-1}{2}x + \frac{5}{2}\sqrt{5/2}$$

Su punto de corte con el eje X será

$$h(x) = \frac{-1}{2}x + \frac{5}{2}\sqrt{5/2} = 0 \Leftrightarrow x = 5\sqrt{5/2}$$

Es decir: $B = \left(5\sqrt{5/2}, 0\right)$

Por ser ΔOAB un triángulo rectángulo en A, podemos calcular $OA \times AB$ como el doble del área del triángulo ΔOAB, que tiene como base $OB = 5\sqrt{5/2}$ y altura $2\sqrt{5/2}$, y por tanto

$$OA \times AB = 2[\Delta OAB] = 5\sqrt{5/2} \cdot 2\sqrt{5/2} = 10 \cdot \frac{5}{2} = 25$$

Observación: También podemos calcular directamente $OA \times AB$:

$A = (\sqrt{5/2}, 2\sqrt{5/2}) \Rightarrow OA = \sqrt{5/2 + 4 \cdot 5/2} = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$

$\overrightarrow{AB} = \left(5\sqrt{5/2} - \sqrt{5/2}, 0 - 2\sqrt{5/2}\right) = \left(4\sqrt{5/2}, -2\sqrt{5/2}\right)$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{16 \cdot 5/2 + 4 \cdot 5/2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

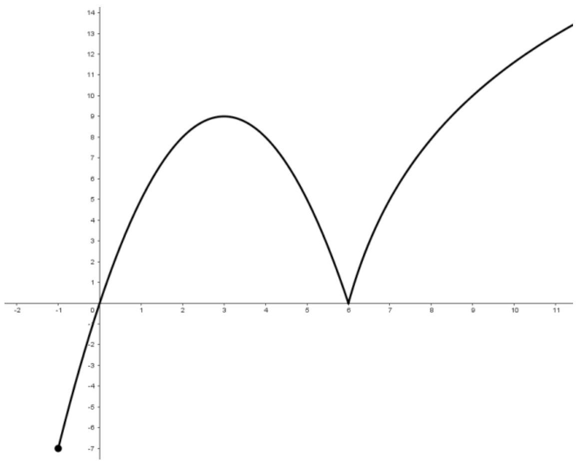
Por lo tanto $OA \times AB = \dfrac{5}{\sqrt{2}} \cdot 5\sqrt{2} = 25$.

21 Dado un número entero positivo a fijo, definimos para todo $x \geq -1$ la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x & (-1 \leq x < 6) \\ a \log_4(x-5) & (x \geq 6) \end{cases}$$

Para todo $t \geq 0$ definimos la función $g(t)$ com el máximo de la función $f(x)$ en el intervalo $[t-1, t+1]$.
Determina el valor mínimo de a para el cual el mínimo de la función $g(t)$ es 5 en todo su dominio $[0, +\infty)$.

Estudiamos detenidamente la función $f(x)$, que tiene una gráfica asociada de la forma



Con esto podemos ir deduciendo la forma de la gráfica de la función $g(t)$:
$g(0) = 5$, luego es creciente, en $[2,4]$ es constante igual a 9, luego es decreciente hasta $g(6) = 5$. Estudiando detenidamente el comportamiento de la función entre $x = 6$ y $x = 8$ vemos que la condición para que no descienda más aún es que $f(7) \geq 5$.
Resolvemos esta inecuación tomando su punto frontera:

$$f(7) = 5 \Leftrightarrow a \log_4(7-5) = 5 \Leftrightarrow a \log_4(2) = 5 \Leftrightarrow a\frac{1}{2} = 5 \Leftrightarrow a = 10$$

22 Sea $f(x)$ una función polinómica de tercer grado cuyo coeficiente principal (el coeficiente asociado al monomio de grado 3) es 1. Esta función cumple, además:

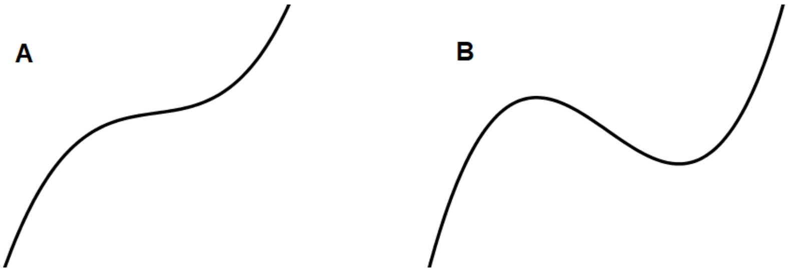
- No existe ningún entero k para el cual $f(k-1)f(k+1)<0$

- $f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$

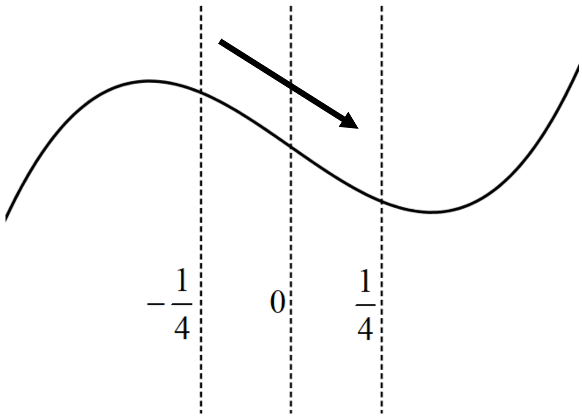
- $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$

Determina $f(8)$.

La forma de la gráfica de una función polinómica de tercer grado con coeficiente principal 1 solo puede ser de dos tipos: (A) Estrictamente creciente o (B) creciente-decreciente-creciente:



Puesto que $f'\left(-\frac{1}{4}\right)<0$ y $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$, está claro que solo puede ser del tipo B, y además sabemos que el intervalo de decrecimiento de esta función abarca, como mínimo, el intervalo $\left(-1/4,1/4\right)$.



Primera parte: Vamos a demostrar que $f(0)=0$.

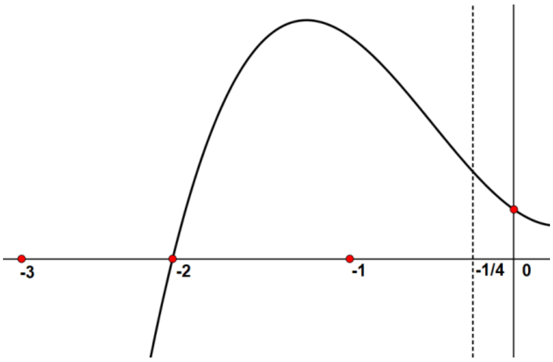
Supongamos por el contrario, que no.

a) Supogamos que $f(0)>0$ y vamos a estudiar los posibles valores de $f(-2)$.

a1) Está claro que no puede ser $f(-2)<0$, pues entonces se contradeciría la hipótesis principal del enunciado.

a2) Supongamos que $f(-2)=0$.

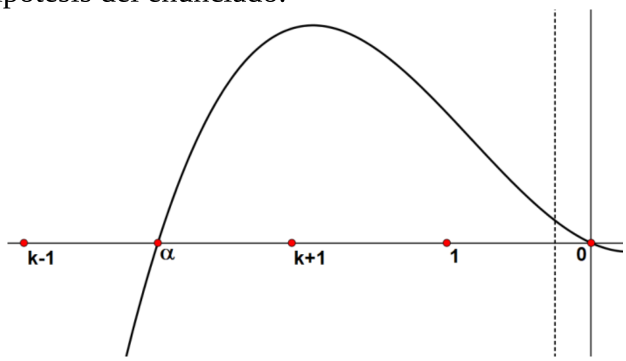
Entonces podemos asegurar que $f(-1)>0$ y $f(-3)<0$ contradiciendo la hipótesis del enunciado



a3) Por lo tanto solo puede ser $f(-2) > 0$.
Entonces podemos volver a hacer el mismo razonamiento con $f(-4)$, llegando a la conclusión de que $f(-4) > 0$.
De esta manera iríamos deduciendo que $f(-6) > 0$, $f(-8) > 0$, $f(-10) > 0$ ... lo cual es contradictorio, pues sabemos que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

b) Supongamos que $f(0) < 0$. Con un razonamiento similar, pero ahora estudiando los posibles valores de $f(2)$ vemos que llegamos a contradicción:
b1) No puede ser $f(2) > 0$ pues contradeciría directamente la hipótesis del enunciado.
b2) No puede ser $f(2) = 0$ pues entonces podríamos garantizar que $f(1) < 0$ y $f(3) > 0$, contradiciendo de nuevo la hipótesis del enunciado.
b3) Luego solo puede ser $f(2) < 0$. Pero entonces, con los mismos argumentos, $f(4) < 0$, $f(6) < 0$, $f(8) < 0$ ... contradiciendo el hecho de que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
Así pues, $f(0) = 0$.

Segunda parte: Vamos a demostrar que $f(1) = 0$ o $f(-1) = 0$.
De nuevo, supongamos, por el contrario, que ambos valores no son cero.
No es posible la opción $f(1) > 0$ y $f(-1) < 0$ ni la opción $f(1) < 0$ y $f(-1) > 0$, pues esto contradeciría directamente la hipótesis del enunciado.
Supongamos que $f(1) > 0$ y $f(-1) > 0$.
Puesto que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $f(-1) > 0$, entonces existirá forzosamente una raíz $\alpha < -1$ de $f(x)$. Luego siempre podremos encontrar un entero k tal que $k-1 < \alpha < k+1 \le -1$, cumpliéndose $f(k-1) < 0$ y $f(k+1) > 0$, y por tanto contradiciendo la hipótesis del enunciado.



Supongamos que $f(1) < 0$ y $f(-1) < 0$.

Con el mismo razonamiento anterior, puesto que $f(1) < 0$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, ahora podemos asegurar que existirá una raíz $\alpha > 1$ de $f(x)$. Luego siempre podremos encontrar un entero k tal que $1 \leq k-1 < \alpha < k+1$, cumpliéndose $f(k-1) < 0$ y $f(k+1) > 0$, y por tanto contradiciendo la hipótesis del enunciado.
Así pues, forzosamente se debe cumplir $f(1) = 0$ o $f(-1) = 0$.

Tercera parte.
Vamos a estudiar los dos casos anteriores por separado.
Primer caso: $f(-1) = 0$. Nuestro polinomio será de la forma
$f(x) = x(x+1)(x-\alpha)$ para cierto real $\alpha > 0$, pues la tercera raíz de la función debe ser positiva.

$$f(x) = x(x+1)(x-\alpha) = x^3 + (1-\alpha)x^2 - \alpha x \to f'(x) = 3x^2 + 2(1-\alpha)x - \alpha$$

$$f'\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4} = 3\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 2(1-\alpha)\left(-\frac{1}{4}\right) - \alpha = \frac{3}{16} - \frac{1-\alpha}{2} - \alpha \Rightarrow$$

$$-1 = \frac{3}{4} - 2(1-\alpha) - 4\alpha \Rightarrow -1 = \frac{3}{4} - 2 + 2\alpha - 4\alpha = \frac{3}{4} - 2 - 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{-1}{8}$$

Llegando a contradicción con $\alpha > 0$.

Segundo caso: $f(1) = 0$. Nuestro polinomio será de la forma
$f(x) = x(x-1)(x-\alpha)$ para cierto real $\alpha < 0$.

$$f(x) = x(x-1)(x-\alpha) = x^3 - (\alpha+1)x^2 + \alpha x \to f'(x) = 3x^2 - 2(\alpha+1)x + \alpha$$

$$f'\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4} = 3\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 2(\alpha+1)\left(-\frac{1}{4}\right) + \alpha = \frac{3}{16} + \frac{\alpha+1}{2} + \alpha \Rightarrow$$

$$-1 = \frac{3}{4} + 2(\alpha+1) + 4\alpha = 6\alpha + \frac{11}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{-5}{8}$$

Así pues,

$$f(x) = x(x-1)\left(x + \frac{5}{8}\right)$$, y por tanto

$$f(8) = 8(8-1)\left(8 + \frac{5}{8}\right) = 8 \cdot 7 \cdot \frac{69}{8} = 7 \cdot 69 = 483$$

Bloque opcional de Probabilidad y estadística.

23 (P) Determina la cantidad de posibilidades de ordenar las cinco letras x, x, y, y, z en fila.

(A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) 40 (E) 50

$$PR_5^{2,2} = \frac{5!}{2!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 30 \quad \text{(C)}$$

24 (P) Dados dos sucesos A y B independientes, cumpliendo además $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ y $P(\overline{A}) = 2P(A)$, determina $P(B)$.

(A) 3/8 (B) 1/2 (C) 5/8 (D) 3/4 (E) 7/8

$2P(A) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) \Rightarrow P(A) = 1/3$

Por ser independientes,

$\frac{1}{4} = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{3}{4}$ (D)

25 (P) Disponemos de seis cartas numeradas 1, 2, 3, 4, 5, 6 y las colocamos en fila. Determina la probabilidad de que la suma de las dos cartas de los extremos sea menor o igual que 10.

(A) 8/15 (B) 19/30 (C) 11/15 (D) 5/6 (E) 14/15

En realidad da igual donde estén colocadas. Las combinaciones son todos los números 12, 13, 14, 15,16, 21, 23, 24, 25, 26, ... 51, 52, 53, 54, 56, 61, 62, 63, 64, 65

hay 5·6=30 casos posibles.

Los casos que suman mayor que 10 son dos: 5+6, 6+5, luego los casos favorables son 30-2=28.

Por lo tanto, $P = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$ (E)

26 (P) Lanzamos 4 monedas al aire y sea X la variable aleatoria que indica el número de caras obtenidas. Sea Y la siguiente variable aleatoria discreta:

$$Y = \begin{cases} X & si\ X = 0\ o\ X = 1 \\ 2 & si\ X \geq 2 \end{cases}$$

Determina $E(Y)$

(A) 25/16 (B) 13/8 (C) 27/16 (D) 7/4 (E) 29/16

$X = Binom(4, 1/2)$

$P(X = 0) = (1/2)^4 = \frac{1}{16}$

$$P(X=1)=4(1/2)(1/2)^3=4(1/2)^4=\frac{1}{4}$$

$$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-\frac{1}{16}-\frac{1}{4}=\frac{11}{16}$$

$$Y=\begin{cases}0 & si\ X=0\\ 1 & si\ X=1\\ 2 & si\ X\geq 2\end{cases}$$

$$E(Y)=0\cdot P(Y=0)+1\cdot P(Y=1)+2\cdot P(Y=2)=P(Y=1)+2\cdot P(Y=2)=$$

$$=P(X=1)+2\cdot P(X\geq 2)=\frac{1}{4}+2\frac{11}{16}=\frac{1}{4}+\frac{11}{8}=\frac{13}{8}\quad \text{(B)}$$

27 (P) Tomamos una muestra de tamaño 49 de una población que sigue una distribución $N\left(m,5^2\right)$. Se obtiene una media muestral $\overline{X}$, y se sabe que el intervalo de confianza es $a\leq m\leq \frac{6}{5}a$ con un nivel de confianza del 95%. Determina el valor de $\overline{X}$.
(Si Z es una normal estandard, se cumple $P(|Z|\leq 1.96)=0.95$)

(A) 15.2 (B) 15.4 (C) 15.6 (D) 15.8 (E) 16.0

Nota de traducción: $N\left(m,5^2\right)\to \sigma=5$

Aplicamos la fórmula del IC para una distribución normal:

$$IC=\left(\overline{X}-a\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),\overline{X}+a\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

Con la notación de nuestro problema:

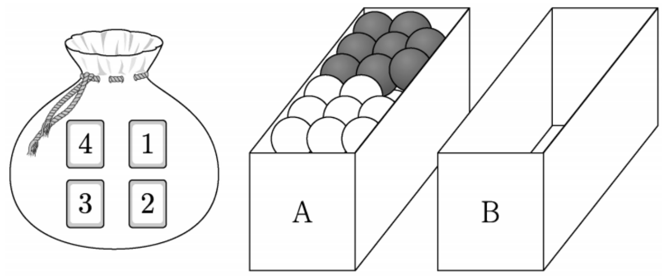
$$IC=\left(\overline{X}-1.96\left(\frac{5}{\sqrt{49}}\right),\overline{X}+1.96\left(\frac{5}{\sqrt{49}}\right)\right)=\left(\overline{X}-1.4\,,\,\overline{X}+1.4\right)=\left(a\,,\frac{6}{5}a\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\overline{X}-1.4=a\\ \overline{X}+1.4=\frac{6}{5}a\end{cases}\Leftrightarrow a=14\,,\ \overline{X}=15.4$$

Luego la solución es (B).

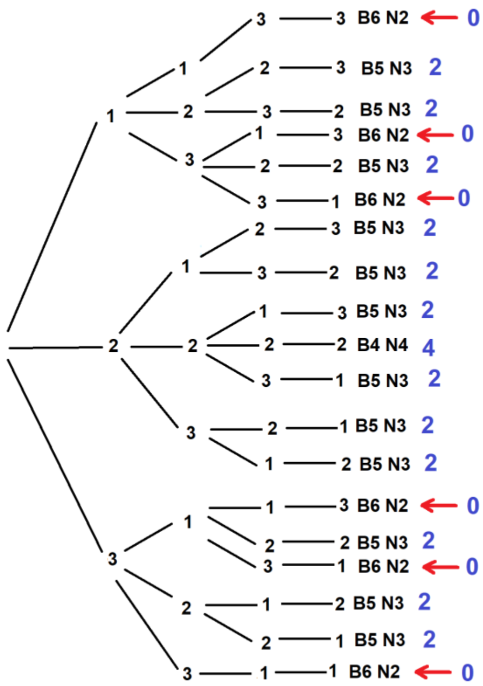
28 (P) Tenemos una bolsa y dos cajas, A y B. En la bolsa hay cuatro cartas, numeradas del 1 al 4. La caja A contiene al menos ocho bolas blancas y ocho negras, y la caja B está vacía.
Realizamos el siguiente experimento:
Sacamos una carta al azar de la bolsa, miramos el número y la volvemos a dejar en la bolsa.
Si el número sacado es el 1, tomamos una bola blanca de la caja A y la dejamos en la caja B.

Si el número sacado es el 2 o el 3, pasamos una bola blanca y una bola negra de la caja A a la caja B.
Si el número sacado es el 4, pasamos dos bolas blancas y una bola negra de la caja A a la caja B.
Repetimos este experimento cuatro veces y observamos que el número de bolas en la caja B es 8. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de bolas negras de la caja B sea 2?



(A) 3/70 (B) 2/35 (C) 1/14 (D) 3/35 (E) 1/10

Puesto que sabemos que el número de bolas final es ocho, esto simplifica un poco el árbol de probabilidades asociado:



En cada rama hemos anotado (en azul) el número de “2” que hay para facilitar el recuento. Con flechas rojas marcamos las ramas asociadas al evento $\text{Bolas negras} = 2 \cap \text{Total Bolas} = 8$.

$$P(\text{Bolas negras} = 2 \cap \text{Total Bolas} = 8) = 6\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = 6\cdot\frac{1}{4^4}$$

$$P(\text{Total Bolas}=8)=6\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+12\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=6\cdot\frac{1}{4^4}+12\cdot\frac{1}{4^3}+1\cdot\frac{1}{2^4}=\frac{7}{4^4}+\frac{11}{4^3}+\frac{1}{4^2}=\frac{1}{4^2}\left(\frac{6}{4^2}+\frac{12}{4}+1\right)=\frac{1}{4^2}\left(\frac{6}{4^2}+\frac{48}{4^2}+\frac{4^2}{4^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{4^2}\left(\frac{70}{4^2}\right)=\frac{70}{4^4}$$

Luego:

$$P(\text{Bolas negras}=2\,|\,\text{Total Bolas}=8)=\frac{P(\text{Bolas negras}=2\cap\text{Total Bolas}=8)}{P(\text{Total Bolas}=8)}=$$

$$=\frac{1/4^4\cdot 6}{1/4^4\cdot 70}=\frac{6}{70}=\frac{3}{35}$$

Y por tanto la respuesta correcta es (D).

29 (P) Determina el número de conjuntos ordenados (a,b,c,d) de números naturales menores o iguales a 6 que satisfacen las siguientes condiciones:

$$a\le c\le d \quad \text{y} \quad b\le c\le d$$

Nota de traducción: No se incluye el cero.

Ordenamos las posibilidades en función del valor de c:

$c=1\to VR_1^2\times 6=1\cdot 6=6$

$c=2\to VR_2^2\times 5=2^2\cdot 5=20$

$c=3\to VR_3^2\times 4=3^2\cdot 4=36$

$c=4\to VR_4^2\times 3=4^2\cdot 3=48$

$c=5\to VR_5^2\times 2=5^2\cdot 2=50$

$c=6\to VR_6^2\times 1=6^2\cdot 1=36$

Total: 6+20+36+48+50+36 = 196

30 (P) Dado un número real positivo t, sea X la variable aleatoria normal $N(1,t^2)$, sabiendo que se cumple $P(X\le 5t)\ge\frac{1}{2}$.

Sea k el valor máximo de $P(t^2-t+1\le X\le t^2+t+1)$, obtenido mediante la siguiente tabla de valores de una normal estandard:

z	$P(0\le Z\le z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

Presente el valor $1000 \times k$.

Nota de la traducción: Aquí $N\left(1\,,t^2\right) \Rightarrow \mu = 1, \sigma = t$.

Teniendo en cuenta que X está centrada en el 1, el valor frontera $P(X \le 5t) = \frac{1}{2}$ se obtiene cuando $5t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{5}$, luego $P(X \le 5t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t \ge \frac{1}{5}$

Estandarizamos la variable X:

$$P\left(t^2 - t + 1 \le X \le t^2 + t + 1\right) = P\left(\frac{t^2 - t + 1 - 1}{t} \le Z \le \frac{t^2 + t + 1 - 1}{t}\right) =$$

$$= P\left(t - 1 \le Z \le t + 1\right)$$

Por la forma de la Campana de Gauss de una distribución normal, este valor será máximo cuando t sea mínimo. Puesto que tenemos la restricción $t \ge 1/5$, tomaremos este valor como máximo:

$$= P\left(0.2 - 1 \le Z \le 0.2 + 1\right) = P\left(-0.8 \le Z \le 1.2\right) =$$

$$= P\left(Z \le 1.2\right) - P\left(-0.8 \le Z\right) = P\left(Z \le 1.2\right) - P\left(0.8 \ge Z\right) =$$

$$= P\left(Z \le 1.2\right) - \left(1 - P\left(0.8 \le Z\right)\right) = 0.5 + 0.385 - \left(1 - (0.5 + 0.288)\right) = 0.673$$

El valor pedido es 673.

Bloque opcional de Cálculo diferencial.

23 (C) Determina $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+5x)}$

(A) 1/5 (B) 2/5 (C) 3/5 (D) 4/5 (E) 1

Estamos ante una indeterminación 0/0 que resolvemos por L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+5x)} = \lim_{x \to 0} \frac{3/(1+3x)}{5/(1+5x)} = \frac{3}{5} \lim_{x \to 0} \frac{1+5x}{1+3x} = \frac{3}{5} \quad \text{(C)}$$

24 (C) Para cualquier valor de t, (t>0) se define

$$x = \ln\left(t^3 + 1\right)\,,\ y = \sin \pi t$$

Determina $\frac{dy}{dx}$ para $t = 1$.

(A) $-\frac{1}{3}\pi$ (B) $-\frac{2}{3}\pi$ (C) $-\pi$ (D) $-\frac{4}{3}\pi$ (E) $-\frac{5}{3}\pi$

$$t=1\to x=\ln\left(t^3+1\right)=\ln\left(1^3+1\right)=\ln(2)$$
$$x=\ln\left(t^3+1\right)\Rightarrow t^3+1=e^x\Rightarrow t=\sqrt[3]{e^x-1}$$
$$y(x)=\sin\pi t=\sin\left(\pi\sqrt[3]{e^x-1}\right)=\sin\left(\pi\left(e^x-1\right)^{1/3}\right)$$

Aplicamos la regla de la cadena:

$$y'(x)=\cos\left(\pi\left(e^x-1\right)^{1/3}\right)\cdot\pi\frac{1}{3}\left(e^x-1\right)^{1/3-1}e^x$$
$$y'(\ln(2))=\cos\left(\pi\left(e^{\ln(2)}-1\right)^{1/3}\right)\cdot\pi\frac{1}{3}\left(e^{\ln(2)}-1\right)^{1/3-1}e^{\ln(2)}=$$
$$=\frac{\pi}{3}\cos\left(\pi(2-1)^{1/3}\right)\cdot(2-1)^{-2/3}2=$$
$$=\frac{2\pi}{3}\cos(\pi)\cdot 1^{-2/3}=\frac{-2\pi}{3}$$

La solución es (B)

25 (C) Sean dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ definidas y derivables para todo $x>0$. Sabemos que $g(x)$ es la inversa de $f(x)$, que $g'(x)$ es continua en todo $x>0$ y que se cumple

$$\int_1^a\frac{1}{g'(f(x))f(x)}\,dx=2\ln a+\ln(a+1)-\ln 2$$

Para todos los valores de a positivos. Si es cumple además $f(1)=8$, determina $f(2)$.

(A) 36 (B) 40 (C) 44 (D) 48 (E) 52

Nos dicen que $g(x)$ es la inversa de $f(x)$, luego, aplicando la definición de función inversa y la Regla de la Cadena:

$$g(f(x))=x\Rightarrow g'(f(x))f'(x)=1\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{g'(f(x))}$$

Por lo tanto, aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\int_1^a\frac{1}{g'(f(x))f(x)}\,dx=\int_1^a\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\int_1^a(\ln(f(x)))'\,dx=\ln(f(a))-\ln(f(1))=\ln\left(\frac{f(a)}{f(1)}\right)$$

Por otro lado,

$$2\ln a+\ln(a+1)-\ln 2=\ln\left(\frac{a^2(a+1)}{2}\right)$$

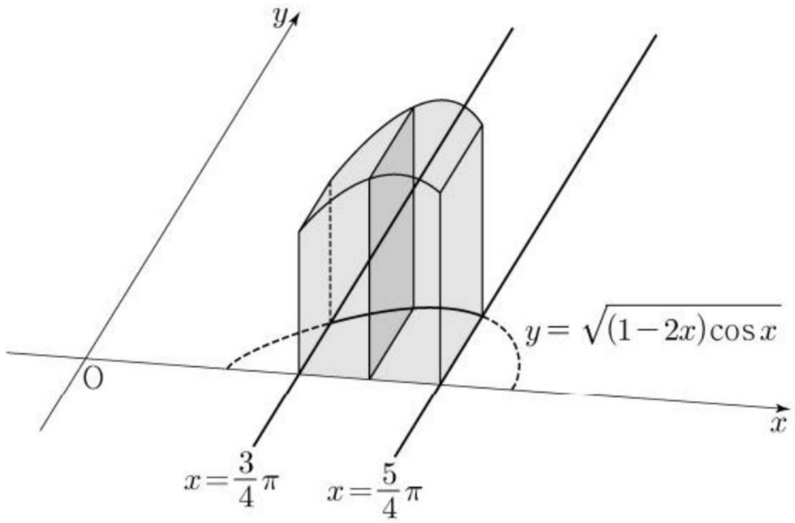
con lo cual llegamos a la ecuación

$$\ln\left(\frac{f(a)}{f(1)}\right)=\ln\left(\frac{a^2(a+1)}{2}\right)\Rightarrow\frac{f(a)}{f(1)}=\frac{a^2(a+1)}{2}\Rightarrow f(a)=\frac{a^2(a+1)}{2}f(1)=\frac{a^2(a+1)}{2}\cdot 8=$$
$$=4a^2(a+1)$$

Finalmente:

$$f(2) = 4 \cdot 2^2 (2+1) = 16 \cdot 3 = 48 \quad \text{(D)}$$

26 (C) La curva $y = \sqrt{(1-2x)\cos x}$ $\left(\frac{3}{4}\pi \le x \le \frac{5}{4}\pi\right)$, entre las dos rectas $x = \frac{3}{4}\pi$, $x = \frac{5}{4}\pi$ genera una figura sólida en la cual todas sus secciones transversales cortadas por un plano perpendicular al eje X son cuadrados. Determina el volumen de esta figura sólida.



(A) √2π-√2 (B) √2π-1 (C) 2√2π-√2 (D) 2√2π-1 (E) 2√2π

Cada cuadrado tiene área $y^2 = \left(\sqrt{(1-2x)\cos x}\right)^2 = (1-2x)\cos x$, luego

$$V = \int_{3/4\pi}^{5/4\pi} (1-2x)\cos x \, dx = F(5/4\pi) - F(3/4\pi) = (*)$$

Aplicamos el método de integración por partes:

$u = 1-2x \rightarrow u' = -2$

$v' = \cos x \rightarrow v = \sin x$

$$F(x) = \int (1-2x)\cos x \, dx = (1-2x)\sin x - \int (-2)\sin x \, dx =$$

$$= (1-2x)\sin x - (-2)(-\cos x) = (1-2x)\sin x - 2\cos x$$

$$F\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \left(1 - 2\frac{5}{4}\pi\right)\sin\frac{5}{4}\pi - 2\cos\frac{5}{4}\pi = \left(1 - \frac{5}{2}\pi\right)\sin\frac{5}{4}\pi - 2\cos\frac{5}{4}\pi =$$

$$= \left(1 - \frac{5}{2}\pi\right)\left(-\sin\frac{1}{4}\pi\right) - 2\left(-\cos\frac{1}{4}\pi\right) = \left(\frac{5}{2}\pi - 1\right)\left(\sin\frac{1}{4}\pi\right) + 2\cos\frac{1}{4}\pi =$$

$$= \left(\frac{5}{2}\pi - 1\right)\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2}\pi\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{5\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5\pi + 2}{2\sqrt{2}}$$

$$F\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\left(1-2\frac{3}{4}\pi\right)\sin\frac{3}{4}\pi-2\cos\frac{3}{4}\pi=\left(1-\frac{3}{2}\pi\right)\sin\frac{3}{4}\pi-2\cos\frac{3}{4}\pi=$$

$$=\left(1-\frac{3}{2}\pi\right)\sin\frac{\pi}{4}-2\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right)=\left(1-\frac{3}{2}\pi\right)\sin\frac{\pi}{4}+2\cos\frac{\pi}{4}=$$

$$=\left(1-\frac{3}{2}\pi\right)\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3\pi}{2\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2-3\pi+4}{2\sqrt{2}}=\frac{6-3\pi}{2\sqrt{2}}$$

Finalmente,

$$(*)=\frac{5\pi+2}{2\sqrt{2}}-\frac{6-3\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{5\pi+2-6+3\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{8\pi-4}{2\sqrt{2}}=\frac{4\pi-2}{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{(4\pi-2)\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}(2\pi-1)\quad (C)$$

27 (C) Para todo valor de t real, se define $f(t)$ como la pendiente de la recta tangente asociada a la curva $y=\frac{1}{e^x}+e^t$ que pasa por el origen de coordenadas.

Determina el valor de $f'(a)$ para el valor de a tal que $f(a)=-e\sqrt{e}$.

(A) $-\frac{1}{3}e\sqrt{e}$ (B) $-\frac{1}{2}e\sqrt{e}$ (C) $-\frac{2}{3}e\sqrt{e}$ (D) $-\frac{5}{6}e\sqrt{e}$ (E) $-e\sqrt{e}$

Definimos lafunción $g(x)=\frac{1}{e^x}+e^t=e^{-x}+e^t$.

Determinamos la ecuación de la recta tangente a esta función asociada a un punto x=p:

$$y=ax+b$$
$$a=g'(p)=-e^{-p}$$
$$b=f(p)-a\,p=e^{-p}+e^t-\left(-e^{-p}\right)p=e^{-p}+e^t+e^{-p}p=e^{-p}(1+p)+e^t$$

Puesto que se exige que la recta tangente pase por el origen de coordenadas, $b=0$, y por tanto llegamos a la ecuación

$$e^{-p}(1+p)+e^t=0\quad (*)$$

Por otro lado, sabemos que la pendiente de la recta tangente es la derivada de la función en dicho punto, luego

$$f(p)=g'(p)=-e^{-p}\Rightarrow f'(p)=e^{-p}$$

Sabemos que $f(a)=-e\sqrt{e}$, luego

$$-e\sqrt{e}=-e^{-p}\Rightarrow ee^{1/2}=e^{-p}\Rightarrow e^{3/2}=e^{-p}\Rightarrow -p=3/2\Rightarrow p=-3/2.$$

Sustituyendo en la ecuación (*):

$$e^{-(-3/2)}\left(1+\frac{-3}{2}\right)+e^t=0\Leftrightarrow e^{3/2}\left(\frac{-1}{2}\right)+e^t=0\Leftrightarrow e^t=\frac{e^{3/2}}{2}\Leftrightarrow t=\ln\left(\frac{e^{3/2}}{2}\right)$$

El valor de p depende del valor de t, es decir, en realidad tenemos una función $p(t)$ que desconocemos. Nos piden calcular la derivada de f, por lo que aplicamos la Regla de la Cadena:

$$f'(a) = \left(f\left(p(t)\right)\right)' = f'\left(p(t)\right)\cdot p'(t)$$

Para calcular $p'(t)$ hacemos derivación implícita en (*):

$$\left.\begin{array}{l} e^{-p(t)} \to e^{-p(t)}\left(-p'(t)\right) \\ 1+p(t) \Rightarrow p'(t) \end{array}\right\} \to e^{-p(t)}\left(-p'(t)\right)\left(1+p(t)\right)+e^{-p(t)}p'(t) =$$

$$= e^{-p(t)}p'(t)\left(-\left(1+p(t)\right)+1\right) = e^{-p(t)}p'(t)\left(-p(t)\right) = -e^{-p(t)}p'(t)\,p(t)$$

$$e^{-p(t)}\left(1+p(t)\right)+e^t = 0 \Rightarrow -e^{-p(t)}p'(t)\,p(t)+e^t = 0 \Rightarrow p'(t) = \frac{e^t}{e^{-p(t)}p(t)}$$

En nuestro caso, para $t = \ln\left(\frac{e^{3/2}}{2}\right)$ y $p = \frac{-3}{2}$, luego $e^t = \frac{e^{3/2}}{2}$

$$p'(t) = \frac{-e^t}{e^{-p(t)}p(t)} = \frac{e^{3/2}/2}{e^{3/2}\left(-3/2\right)} = \frac{e^{3/2}}{-3e^{3/2}} = \frac{}{-3} = \frac{1}{-3}$$

$$f'(p) = e^{-(-3/2)} = e^{3/2}$$

Y por tanto

$$f'(a) = \left(f\left(p(t)\right)\right)' = f'\left(p(t)\right)\cdot p'(t) = e^{3/2}\,\frac{1}{-3} = \frac{e^{3/2}}{-3} = \frac{e\,e^{1/2}}{-3} = \frac{e\sqrt{e}}{-3} \quad \text{(A)}$$

28 (C) Sea $f(x)$ una función continua en todo IR y cumpliendo $f(x) \geq 0$ en todo IR.
Sabemos que $f(x) = -4xe^{4x^2}$ para todo $x < 0$.
Para cualquier real positivo t, el número de raíces reales distintas de la ecuación $f(x) = t$ es 2, y si llamamos $g(t)$ a la menor solución y $h(t)$ a la mayor solución, se cumple:

$$2g(t)+h(t) = k \quad \text{para cierta constante k.}$$

Sabiendo que $\int_0^7 f(x)\,dx = e^4 - 1$, determina $\frac{f(9)}{f(8)}$.

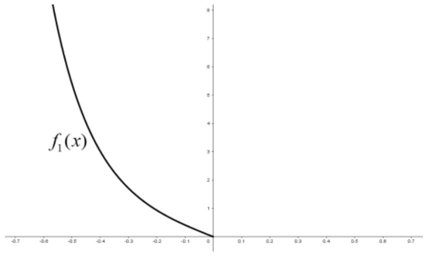
(A) $\frac{3}{2}e^5$ (B) $\frac{4}{3}e^7$ (C) $\frac{5}{4}e^9$ (D) $\frac{6}{5}e^{11}$ (E) $\frac{7}{6}e^{13}$

Está claro que nuestra función está dividida en dos partes:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = -4xe^{4x^2} & x < 0 \\ f_2(x) & x \geq 0 \end{cases}$$

De la función $f_2(x)$ en principio no sabemos nada, aunque se deduce claramente que $f_2(0) = 0$ por continuidad de $f(x)$.

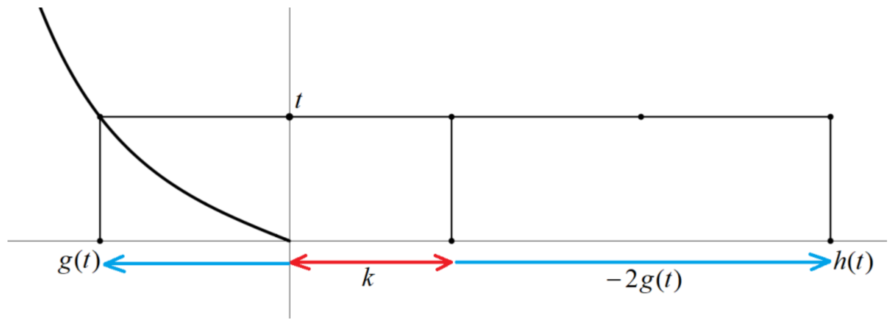
En primer lugar, hacemos un estudio básico del comportamiento de la función $f_1(x) = -4xe^{4x^2}$ para ver que la función en $x < 0$ es una función estrictamente decreciente, y es una biyección $(-\infty, 0) \to (0, +\infty)$



Luego si nos dicen que la ecuación $f(x) = t$ tiene exactamente dos raíces distintas para todo $t > 0$, que son $g(t) < h(t)$, entonces forzosamente $g(t)$ coincide con la inversa de $f_1(x)$:

$$g(t) < 0 < h(t) \text{ y } g(t) = f_1^{-1}(x) \text{, y } h(t) : (0, +\infty) \to (0, +\infty).$$

De la expresión $2g(t) + h(t) = k$ podemos deducir $f_2(x)$.
Nos dicen que $2g(t) + h(t) = k \Rightarrow h(t) = k - 2g(t)$



Definiendo $u = h(t) \Rightarrow f(u) = f(h(t)) = t$, y suponiendo $x > k$,

$$u = k - 2g(t) \Rightarrow 2g(t) = k - u \Rightarrow g(t) = \frac{k-u}{2}$$

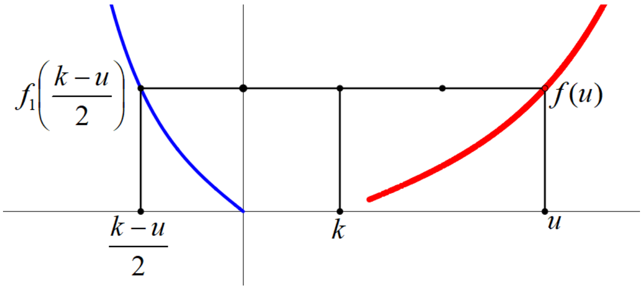
$$f(u) = f(h(t)) = f(g(t)) = f\left(\frac{k-u}{2}\right)$$

Por otro lado,

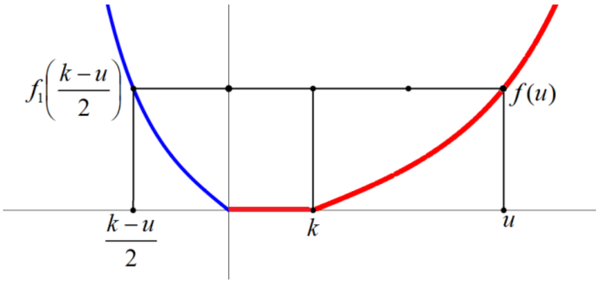
$$u > k \Rightarrow \frac{k-u}{2} < 0 \Rightarrow f\left(\frac{k-u}{2}\right) = f_1\left(\frac{k-u}{2}\right)$$

Así pues,

$$u > k \Rightarrow f(u) = f_1\left(\frac{k-u}{2}\right)$$



Si $0 < x < k$, si $t = f(x) > 0$ entonces
$h(t) = k - 2g(t) \Rightarrow x = k - 2g(t) > k$ nos llevaría a contradicción.
Luego la única posibilidad es $f_2(x) = 0$ para todo $0 \le x \le k$



Con la integral del enunciado deducimos el valor de k. Esta integral la resolveremos mediante sustitución dos veces:

$$e^4 - 1 = \int_0^7 f(x)\,dx = \int_k^7 f(x)\,dx = \int_k^7 f\left(\frac{k-x}{2}\right)dx = F(7) - F(k) \quad (*)$$

$$F(x) = \int f\left(\frac{k-x}{2}\right)dx = (-2)\int f\left(\frac{k-x}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)dx = (-2)\int f(u)du = (**) \quad \left(u = \frac{k-x}{2}\right)$$

$$\int f(u)du = \int -4ue^{4u^2}du = \frac{-1}{2}\int -4ue^v(-2)du = \frac{-1}{2}\int e^v dv = \frac{-1}{2}e^v = \frac{-1}{2}e^{4u^2}$$

$$v = 4u^2 \to v' = 8u$$

$$(**) = (-2)\frac{-1}{2}e^{4u^2} = e^{4((k-x)/2)^2}$$

$$F(7) = e^{4((k-7)/2)^2} = e^{(k-7)^2}$$

$$F(k) = e^{4((k-k)/2)^2} = e^0 = 1$$

Volviendo a (*) nos queda la ecuación

$$e^4 - 1 = F(7) - F(k) = e^{(k-7)^2} - 1 \Leftrightarrow e^4 = e^{(k-7)^2} \Leftrightarrow 4 = (k-7)^2 \Rightarrow k = 5$$

Pues la otra solución k=9 la descartamos pues en dicho caso

$$e^4 - 1 = \int_9^7 f(x)\,dx = -\int_7^9 f(x)\,dx \le 0$$

sería absurdo.

Finalmente,

$$f(9) = f\left(\frac{5-9}{2}\right) = f(-2) = -4(-2)e^{4(-2)^2}$$

$$f(8)=f\left(\frac{5-8}{2}\right)=f\left(-3/2\right)=-4(-3/2)e^{4(-3/2)^2}$$

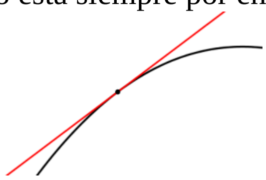
$$\frac{f(9)}{f(8)}=\frac{-4(-2)e^{4(-2)^2}}{-4(-3/2)e^{4(-3/2)^2}}=\frac{4e^{4(-2)^2-4(-3/2)^2}}{3}=\frac{4e^7}{3}\quad \text{(B)}$$

30 (C) La derivada $f'(x)$ de una función derivable $f(x)$ sobre todo el conjunto de números reales es $f'(x)=|\sin x|\cos x$.

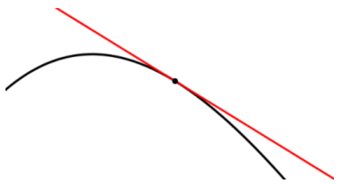
Dado un número real positivo a, sea $y=g(x)$ la ecuación de la recta tangente en el punto $(a, f(a))$ asociada a la curva $y=f(x)$.

Sea $h(x)=\int_0^x f(t)-g(t)\,dt$. Si enumeramos por a_n todos los números reales positivos a que son máximos o mínimos de $h(x)$ en $x=a$, ordenados de menor a mayor, determina el valor $\frac{100}{\pi}\times(a_6-a_2)$.

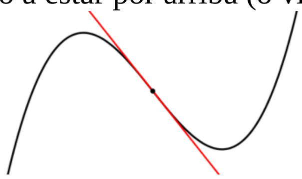
Queremos estudiar la existencia de máximos o mínimos de $h(x)$ en $x=a$, por lo tanto debemos estudiar su monotonía.
Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo, $h'(x)=f(x)-g(x)$.
Para que $h(x)$ tenga máximo o mínimo en $x=a$ es condición necesaria que $h'(a)=0$, pero esto siempre ocurre, pues por construcción de la recta tangente,
$h'(a)=f(a)-g(a)=f(a)-f(a)=0$
Pero además debe haber un cambio de signo en la derivada alrededor de $x=a$. Si analizamos visualmente la función $f(x)$ y su recta tangente en el punto $(a, f(a))$, esto quiere decir que la recta tangente no está siempre por encima:



o siempre por debajo de la gráfica de la función en un entorno de $(a, f(a))$_



sino que pasa de estar por debajo a estar por arriba (o viceversa):



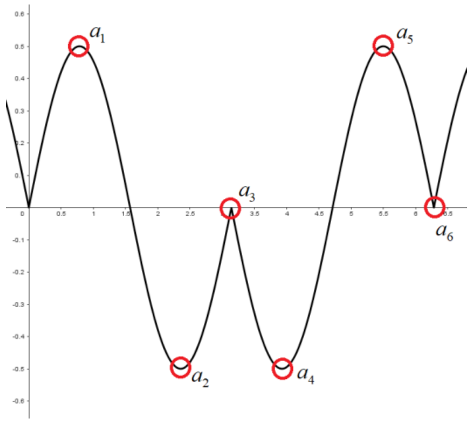
Y esto sucede cuando hay un punto de inflexión para $f(x)$.

Así pues, en este problema tenemos que determinar y ordenar de menor a mayor todos los puntos de inflexión de la función $f(x)$ para valores positivos de x.

$$f'(x)=|\sin x|\cos x=\begin{cases}\sin x\cos x & \sin x\geq 0\\ -\sin x\cos x & \sin x<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\begin{cases}\sin x\cos x & 0\leq x\leq \pi\\ -\sin x\cos x & \pi\leq x\leq 2\pi\end{cases}\Leftrightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin 2x & 0\leq x\leq \pi\\ -\frac{1}{2}\sin 2x & \pi\leq x\leq 2\pi\end{cases}$$

En donde hemos aplicado la identidad notable trigonométrica “seno del ángulo doble”. La gráfica de $f'(x)$ es muy fácil de representar, y en ella podemos determinar los máximos y mínimos, que corresponderán a los puntos de inflexión:



Si $0\leq x\leq \pi$, $f'(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ y si la función $\sin x$ tiene un máximo en $x=\frac{\pi}{2}$ y un mínimo en $x=\frac{3\pi}{2}$, entonces $f'(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ tendrá un máximo en $x=\frac{\pi}{4}$ y un mínimo en $x=\frac{3\pi}{4}$.

Si $\pi\leq x\leq 2\pi$, por simetría $f'(x)$ tendrá un máximo en $x=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$ y un mínimo en $x=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$.

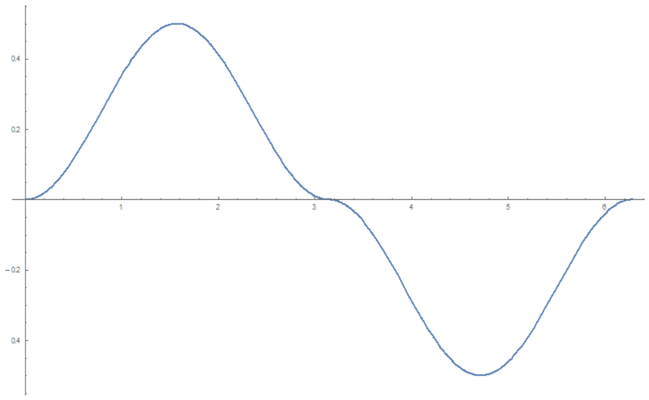
Luego en $x=2\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{9\pi}{4}$ y $x=2\pi+\frac{3\pi}{4}=\frac{11\pi}{4}$

Así pues, $a_1=\frac{\pi}{4}$, $a_2=\frac{3\pi}{4}$, $a_3=\pi$, $a_4=\frac{5\pi}{4}$, $a_5=\frac{7\pi}{4}$, $a_6=2\pi$

Y finalmente,

$$\frac{100}{\pi}\times(a_6-a_2)=\frac{100}{\pi}\times\left(2\pi-\frac{3\pi}{4}\right)=100\times\frac{5}{4}=125$$

Observación. Aunque en el contexto de esta prueba no es necesario (tal vez ni siquiera recomendable) representar gráficamente la función $f(x)$, aquí presento su gráfica:



Observamos que la función $f(x)$ presenta un punto de inflexión en $x=\pi$, aunque en dicho punto su derivada $f'(x)$ presenta un punto anguloso, es decir, no es dos veces derivable en dicho punto.

Bloque opcional de Geometría.

23 (G) Sean los puntos $A=(a,-2,6)$ y $B=(9,2,b)$. Si el punto medio del segmento AB es el punto $(4,0,7)$, determina $a+b$.

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

$$(4,0,7)=\frac{A+B}{2}=\left(\frac{a+9}{2},\frac{-2+2}{2},\frac{6+b}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}\frac{a+9}{2}=4\Rightarrow a=-1\\ \frac{6+b}{2}=7\Rightarrow b=8\end{cases}$$

Luego $a+b=-1+8=7$ (D).

24 (G) Sabemos que el punto $\left(\sqrt{3},-2\right)$ pertenece a la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{6}=1$. Determina la pendiente de la recta tangente asociada a esta elipse en dicho punto.

(A) √3 (B) √3/2 (C) √3/3 (D) √3/4 (E) √3/5

$$1=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{a^2}+\frac{(-2)^2}{6}=\frac{3}{a^2}+\frac{4}{6}\Leftrightarrow a^2=9$$

Primera versión. Directamente.

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1\Rightarrow\frac{\sqrt{3}x}{9}+\frac{-2y}{6}=1\Rightarrow\frac{\sqrt{3}x}{9}+\frac{-y}{3}=1\Rightarrow\frac{\sqrt{3}x}{9}-1=\frac{y}{3}$$

$$\Rightarrow 3\left(\frac{\sqrt{3}x}{9}-1\right)=y\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}x}{3}-3$$

Y la pendiente es $\frac{\sqrt{3}}{3}$

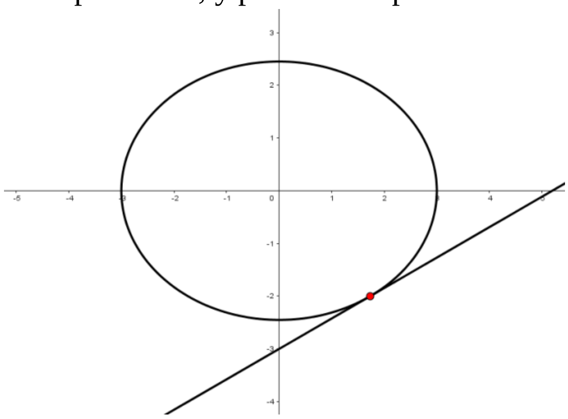
Segunda versión. Mediante cálculo diferencial.
Aislamos y, por comodidad, tomaremos la rama positiva de los valores de y (aunque sabemos que nuestro punto está por debajo del eje Y).

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1 \Leftrightarrow y^2=6\left(1-\frac{x^2}{9}\right) \Rightarrow y=\sqrt{6-\frac{2x^2}{3}}$$

$$y'(x)=\frac{1}{2\sqrt{6-\frac{2x^2}{3}}}\left(-\frac{4}{3}x\right)$$

$$y'\left(\sqrt{3}\right)=\frac{1}{2\sqrt{6-\frac{2\cdot 3}{3}}}\left(-\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)=\frac{1}{2\cdot 2}\left(-\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Por simetría de la gráfica, puesto que nuestro punto está por debajo del eje Y, cambiaremos el signo de la pendiente, y por tanto la pendiente buscada es $\sqrt{3}/3$ (C).



25 (G) Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ cumpliendo $|\vec{a}|=\sqrt{11}$, $|\vec{b}|=3$, $|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{17}$, determina $|\vec{a}-\vec{b}|$.

(A) √2/2 (B) √2 (C) 3√2/2 (D) 2√2 (E) 5√2/2

$$11=\left(\sqrt{11}\right)^2=|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$$

$$9=3^2=|\vec{b}|^2=\vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$17=\left(\sqrt{17}\right)^2=|2\vec{a}-\vec{b}|^2=\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)=4\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}=$$

$$=4\cdot 11-4\vec{a}\cdot\vec{b}+9 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=9$$

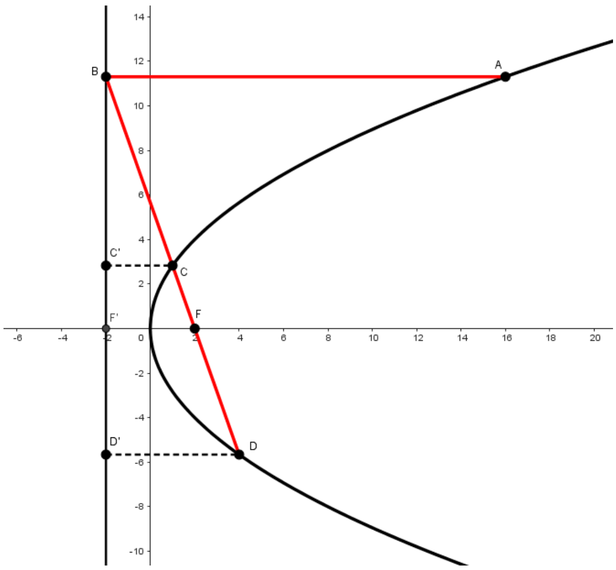
$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}=11-2\cdot 9+9=2 \Rightarrow$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{2} \quad \text{(B)}$$

27 (G) Sea A un punto perteneciente a la parábola $y^2 = 8x$ de foco F. Sea B el pie de la perpendicular a su directriz por el punto A, y sean C y D los puntos de corte entre la recta BF y esta parábola.
Determina el área del triángulo ΔABD sabiendo que $\overline{BC} = \overline{CD}$. Se supone además que $\overline{CF} < \overline{DF}$ y A no es el origen.

(A) 100√2 (B) 104√2 (C) 108√2 (D) 112√2 (E) 116√2

La ecuación de la parábola es $y^2 = 8x = 4 \cdot 2x \Rightarrow a = 2 \Rightarrow F = (2,0),\ d : x = -2$.
Llamaremos C' y D' las respectivas proyecciones de C y D sobre la directriz.



En el triángulo $\Delta BDD'$ se cumple

$$BC = CD \Rightarrow BC' = C'D' \Rightarrow BD' = 2BC' \Rightarrow DD' = 2CC'$$

Luego

$$BC = CD = CF + FD = CC' + DD' = CC' + 2CC' = 3CC'$$

Luego en el triángulo $\Delta BDD'$ se mantiene una relación $BD = 3DD'$
y por tanto

$$BF = 3F'F = 3 \cdot 4 = 12$$

Por Pitágoras,

$$F'B^2 = FB^2 - FF'^2 = 12^2 - 4^2 = (3 \cdot 4)^2 - 4^2 = 4^2 \cdot 8 \Rightarrow F'B = \sqrt{4^2 \cdot 8} = 8\sqrt{2}$$

Sea $A = \left(p, \sqrt{8p}\right)$

$$\sqrt{8p} = \sqrt{4^2 \cdot 8} \Rightarrow 8p = 4^2 \cdot 8 \Rightarrow AB = p = 4^2 = 16$$

Luego $A = \left(16, 8\sqrt{2}\right),\ B = \left(-2, 8\sqrt{2}\right)$

Determinamos la recta BF:

$$\left.\begin{array}{l} B = \left(-2, 8\sqrt{2}\right) \\ F = (2,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta = \frac{0 - 8\sqrt{2}}{2 - (-2)} = \frac{-8\sqrt{2}}{4} = -2\sqrt{2}$$

$BF: y = -2\sqrt{2}x + b \Rightarrow 0 = -2\sqrt{2} \cdot 2 + b \Rightarrow b = 4\sqrt{2} \Rightarrow$

$BF: y = -2\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}$

Encontramos sus puntos de corte con la parábola:

$$y^2 = \left(-2\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}\right)^2 = 2\left(-2x + 4\right)^2 = 8x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Nos quedamos con la segunda solución, pues $\overline{CF} < \overline{DF}$, y por tanto

$y = -2\sqrt{2} \cdot 4 + 4\sqrt{2} = -4\sqrt{2} \Rightarrow D = (4, -4\sqrt{2})$

Finalmente, en el triángulo ΔABD, la altura h por el vértice D es igual a

$$h = 4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

y por tanto

$$\left[\Delta ABD\right] = \frac{1}{2} h \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{2} \cdot (2 + 16) = 108\sqrt{2} \quad \text{(C)}$$

Enunciados 2025.

1

Determina el valor de $\sqrt[3]{5} \times 25^{\frac{1}{3}}$.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

2

Dada la función $f(x) = x^3 - 8x + 7$, determina $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

3

Sea $\{a_n\}$ una sucesión geométrica en la cual tanto el primer término como la razón común k son positivos. Si satisface

$$\frac{a_4}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} = 30$$

determina el valor de k.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

4

Determina el valor de a para el cual la función

$$f(x) = \begin{cases} 5x + a & (x < -2) \\ x^2 - a & (x \geq -2) \end{cases}$$

es continua en todo IR.

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

5

Dada la función $f(x) = (x^2 + 1)(3x^2 - x)$, determina $f'(1)$.

(A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 14 (E) 16

6

Si sabemos que $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) = -\frac{1}{5}$, determina el valor de $\frac{\sin\phi}{1 - \cos^2\phi}$

(A) -5 (B) -√5 (C) 0 (D) √5 (E) 5

7

Dada una función polinómica $f(x)$ que cumple

$$\int_0^x f(t)dt = 3x^3 + 2x$$

determina el valor de $f(1)$.

(A) 7 (B) 9 (C) 11 (D) 13 (E) 15

8

Dados los dos números reales $a = 2\log\dfrac{1}{\sqrt{10}} + \log_2 20$ y $b = \log 2$, determina $a \times b$.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

9

Dada la función $f(x) = 3x^2 - 16x - 20$, determina el valor de a positivo tal que

$$\int_{-2}^{a} f(x)dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx$$

(A) 16 (B) 14 (C) 12 (D) 10 (E) 8

10

Sea la función $f(x) = a\cos bx + 3$ definida en el invervalo $[0,2\pi]$.
Sean a y b dos números naturales para los cuales la función anterior presenta un máximo igual a 13 en el punto $x = \pi/3$. Para el par ordenado (a,b), determina el valor mínimo de $a+b$.

(A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 18 (E) 20

11

A partir de un momento t=0, una partícula P se mueve en el eje vertical. Su posición en el instante t (t≥0) es

$$x = t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 6t$$

Determina la aceleración de la partícula P en el momento en el que cambia su dirección.

(A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 15 (E) 18

12

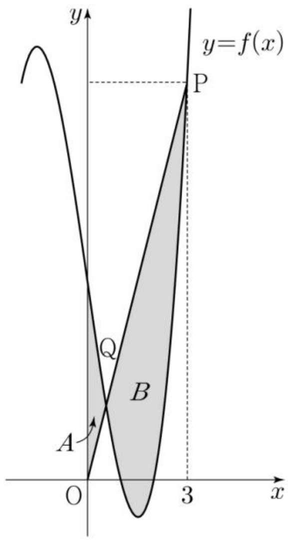
Sea una sucesión $\{a_n\}$ tal que $a_1 = 2$, y sea una sucesión aritmética $\{b_n\}$ tal que $b_1 = 2$, de forma que se cumple $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{b_{k+1}} = \dfrac{1}{2}n^2$. Determina el valor de $\sum_{k=1}^{5} a_k$.

(A) 120 (B) 125 (C) 130 (D) 135 (E) 140

13

Sea $f(x)$ una función polinómica cúbica con coeficiente del monomio mayor igual a 1. Sabemos, además, que $f(1) = f(2) = 0$ y $f'(0) = -7$.
Dados el origen O y el punto $P = (3, f(3))$, sea Q el punto distinto de P donde el segmento de recta OP corta la curva $y = f(x)$.

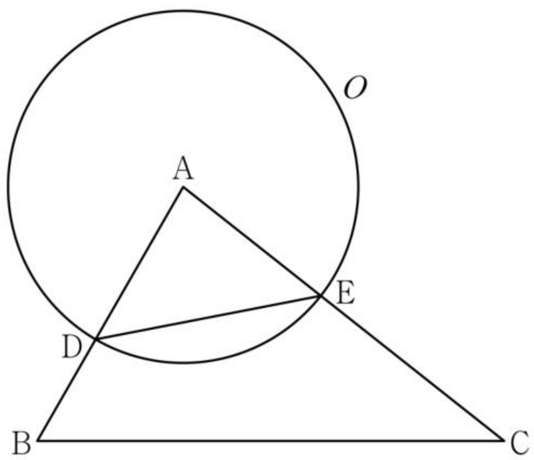
Sea A el área de la región determinada por la gráfica de la curva $y = f(x)$, el eje Y y el segmento OQ. Sea B el área de la región determinada por la gráfica de la curva $y = f(x)$ y el segmento PQ. Determina B-A.



(A) 37/4 (B) 39/4 (C) 41/4 (D) 43/4 (E) 45/4

14

Tal y como se muestra en la imagen, sea ABC un triángulo en el que trazamos un punto D en el lado AB, cumpliendo AD:DB=3:2, sea un punto E en el lado AC, de forma que ambos puntos pertenecen a la circunferencia O de centro A. Sabemos además que sin A:sin C = 8:5, que la razón entre el área del triángulo ADE y el área del triángulo ABC es 9:35 y que el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC es 7. Determina el área máxima que puede tener un triángulo PBC donde P pertenece a la circunferencia O. Se supone, además, AB<AC.



(A) 18+15√3 (B) 24+20√3 (C) 30+25√3 (D) 36+30√3 (E) 42+35√3

15

Sea $f(x)$ una función cuadrática con coeficiente principal negativo y sea a una constante (a≠3√5). Se define la función

$$g(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+15x+7 & (x\le 0) \\ f(x) & (x>0) \end{cases}$$

Sabemos que:

a) La función $g(x)$ es diferenciable en todo el conjunto de números reales.

b) La ecuación $g'(x)\times g'(x-4)=0$ tiene exactamente cuatro soluciones reales.

Determina $g(-2)+g(2)$.

(A) 30 (B) 32 (C) 34 (D) 36 (E) 38

16

Resuelve la siguiente ecuación:

$$\log_2(x-3)=\log_4(3x-5)$$

17

Dada una función polinómica $f(x)$ tal que $f'(x)=9x^2+4x$ y $f(1)=6$, determina $f(2)$.

18

Dada una sucesión $\{a_n\}$ tal que $a_n+a_{n+4}=12$, determina $\sum_{n=1}^{16} a_n$.

19

Fijado un valor de a real positivo, sabemos que la función

$$f(x)=2x^3-3ax^2-12a^2x$$

tiene un máximo local igual a 7/27. Determina el valor de $f(3)$.

20

Dada la curva $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$ y sea k la abscisa del punto en el que se corta la recta $y=x$ y esta curva.

Sea $f(x)$ la función definida en todos los números reales satisfaciendo la siguente condición:

Para todos los números reales $x>k$, $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$ y $f(f(x))=3x$.

Determina el valor de $f\left(\frac{1}{k^3\times 5^{3k}}\right)$.

21

Dada la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$, donde a y b son números enteros, determina el valor máximo que puede tomar $f(1)$ si la función cumple la siguiente condición:

Para todo número real α existe $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(2x+1)}{f(x)}$.

22

Determina la suma de todos los posibles valores de $|a_1|$ de las sucesiones de enteros $\{a_n\}$ que satisfacen las siguientes dos condiciones:

a) para todo n≥1, $a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 3 & \text{si } |a_n| \text{ es impar} \\ \frac{1}{2} a_n & \text{si } a_n = 0 \text{ o } |a_n| \text{ es par} \end{cases}$

b) El valor mínimo de m para el cual $|a_m| = |a_{m+2}|$ es 3.

Bloque optativo de probabilidad.

23 (P)

Determina el coeficiente de x^6 en la expansión de $(x^3 + 2)^5$.

(A) 40 (B) 50 (C) 60 (D) 70 (E) 80

24 (P)

Dados dos sucesos A y B de los que sabemos que $P(A|B) = P(A) = \frac{1}{2}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$, determina $P(A \cup B)$.

(A) 1/2 (B) 3/5 (C) 7/10 (D) 4/5 (E) 9/10

25 (P)

En una población que sigue una distribución normal $N(m, 2^2)$ se toma una muestra de 256 individuos. El intervalo de confianza para un nivel de confianza del 95% obtenido para la media muestral es a ≤ m ≤ b. Determina b-a.
En una variable aleatoria Z que sigue una distribución normal estándar se cumple $P(|Z| \leq 1.96) = 0.95$.

(A) 0.49 (B) 0.52 (C) 0.55 (D) 0.58 (E) 0.61

28 (P)

Dado el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, determina el número de funciones $f : X \to X$ que cumplen las siguientes condiciones:

a) $f(1) \times f(6)$ es un divisor de 6.

b) $2f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5) \leq 2f(6)$

(A) 166 (B) 171 (C) 176 (D) 181 (E) 186

Bloque optativo de Cálculo diferencial.

23 (C)

Determina $\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\sin^2 x}$.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

24 (C)

Calcula $\int_0^{10}\frac{x+2}{x+1}dx$.

(A) 10+ln5 (B) 10+ln7 (C) 10+2ln3 (D) 10+ln11 (E) 10+ln13

Bloque optativo de Geometría.

23 (G)

Dados los vectores $\vec{a}=(k,3)$ y $\vec{b}=(1,2)$ determina el valor de k si sabemos que $\vec{a}+3\vec{b}=(6,9)$.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

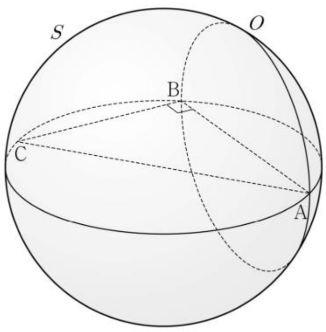
24 (G)

Dada la parábola con vértice (1,0) y directriz $x=-1$, sabemos que pasa por el punto $(3,a)$. Determina el valor de a positivo.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

28 (G)

Dado un triángulo rectángulo ΔABC, con $\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=6$, $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$, determinamos la esfera S de diámetro AC.
Sea el plano que contiene la recta AB y es perpendicular al plano ABC y sea O la circunferencia intersección entre dicho plano y la esfera S.
Entre todos los puntos que pertenecen a O, sean P y Q los dos puntos diferentes que están a una distancia 4 de la recta AC. Determina la longitud del segmento PQ.



(A) $\sqrt{43}$ (B) $\sqrt{47}$ (C) $\sqrt{51}$ (D) $\sqrt{55}$ (E) $\sqrt{59}$

Respuestas correctas y porcentaje de aciertos 2025.

1	E	2	94	
2	D	2	92	
3	E	3	88	
4	B	3	92	
5	D	3	89	
6	E	3	73	
7	C	3	89	
8	A	3	76	
9	D	4	83	
10	C	4	71	
11	B	4	79	
12	A	4	64	
13	E	4	52	
14	D	4	31	
15	B	4	33	
16	7	3	85	
17	33	3	86	
18	96	3	70	
19	41	3	72	
20	36	4	6	Tasa de respuestas correctas más baja para la pregunta 20 desde el CSAT integrado
21	16	4	8	Tasa de respuestas correctas más baja para la pregunta 21 desde el CSAT integrado
22	64	4	4	Tasa de respuestas correctas más baja para preguntas de Matemáticas 1 desde el CSAT integrado

Probabilidad y estadística

23	E	2	85
24	C	3	76
25	A	3	68
26	C	3	83
27	C	3	29
28	B	4	60
29	25	4	42
30	19	4	34

Cálculo diferencial

23	C	2	
24	D	3	92
25	B	3	90
26	A	3	83
27	A	3	
28	B	4	31
29	25	4	21
30	17	4	18

Geometría

23	C	2	94
24	D	3	89
25	C	3	83
26	A	3	62
27	A	3	49
28	D	4	33
29	107	4	49
30	316	4	7

El tercer número indica el peso del problema en la puntuación de la prueba.
El cuarto número indica el porcentaje de estudiantes que resolvieron el problema.

Soluciones desarrolladas 2025.

1 Determina el valor de $\sqrt[3]{5}\times 25^{\frac{1}{3}}$.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

$$\sqrt[3]{5}\times 25^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{1}{3}}\times 25^{\frac{1}{3}}=\left(5\times 25\right)^{\frac{1}{3}}=\left(5^3\right)^{\frac{1}{3}}=5^{3\cdot 1/3}=5 \quad \text{(E)}$$

2 Dada la función $f(x)=x^3-8x+7$, determina $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$$

$$f(x)=x^3-8x+7\to f'(x)=3x^2-8\to f'(2)=3\cdot 2^2-8=4 \quad \text{(D)}$$

3 Sea $\{a_n\}$ una sucesión geométrica en la cual tanto el primer término como la razón común k son positivos. Si satisface

$$\frac{a_4}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}=30$$

determina el valor de k.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

$$a_1\to a_2=ka_1\to a_3=ka_2=k^2a_1\to a_4=k^3a_1$$

$$30=\frac{a_4}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}=\frac{k^3a_1}{ka_1}+\frac{ka_1}{a_1}=k^2+k=k(k+1)\underset{k>0}{\Rightarrow}k=5$$

4 Determina el valor de a para el cual la función

$$f(x)=\begin{cases}5x+a & (x<-2)\\ x^2-a & (x\geq -2)\end{cases}$$

es continua en todo IR.

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

$$\lim_{x\to -2^+}f(x)=\left[x^2-a\right]_{x=-2}=(-2)^2-a=4-a$$

$$\lim_{x\to -2^-}f(x)=\left[5x+a\right]_{x=-2}=5(-2)+a=-10+a$$

$$f(-2)=(-2)^2-a=4-a$$

$4-a=-10+a \Leftrightarrow 16=2a \Leftrightarrow 8=a$ (C)

5 Dada la función $f(x)=\left(x^2+1\right)\left(3x^2-x\right)$, determina $f'(1)$.

(A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 14 (E) 16

$$x^2+1 \to 2x$$
$$3x^2-x \to 6x-1$$
$$f'(x)=2x\left(3x^2-x\right)+\left(x^2+1\right)(6x-1)$$
$$f'(1)=2(3-1)+(1+1)(6-1)=4+10=14 \quad \text{(D)}$$

6 Si sabemos que $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right)=-\frac{1}{5}$, determina el valor de $\frac{\sin\phi}{1-\cos^2\phi}$

(A) -5 (B) -√5 (C) 0 (D) √5 (E) 5

Aplicando la Identidad Fundamental de la Trigonometría:

$$\frac{\sin\phi}{1-\cos^2\phi}=\frac{\sin\phi}{\sin^2\phi}=\frac{1}{\sin\phi}$$

Aplicando la identidad "Coseno de la suma":

$$-\frac{1}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(\phi)-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(\phi)=$$
$$=0\cos(\phi)-1\sin(\phi)=-\sin(\phi)\Rightarrow \sin(\phi)=\frac{1}{5}$$

Luego

$$\frac{1}{\sin(\phi)}=5 \quad \text{(E)}$$

7 Dada una función polinómica $f(x)$ que cumple

$$\int_0^x f(t)dt=3x^3+2x$$

determina el valor de $f(1)$.

(A) 7 (B) 9 (C) 11 (D) 13 (E) 15

Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo Diferencial,

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt=3x^3+2x \Rightarrow f(x)=F'(x)=9x^2+2$$
$$f(1)=9\cdot 1^2+2=11 \quad \text{(C)}$$

8 Dados los dos números reales $a=2\log\frac{1}{\sqrt{10}}+\log_2 20$ y $b=\log 2$, determina $a\times b$.

(A) 1   (B) 2   (C) 3   (D) 4   (E) 5

$$a = 2\log\frac{1}{\sqrt{10}} + \log_2 20 = 2\log 10^{-1/2} + \log_2 20 = \log\left(10^{-1/2}\right)^2 + \log_2 20 =$$
$$= \log 10^{-1} + \log_2 20 = -1 + \log_2 20 = -1 + \log_2(2\cdot 10) = -1 + \log_2 2 + \log_2 10 =$$
$$= -1 + 1 + \log_2 10 = \log_2 10$$
$$a \times b = \log_2 10 \log 2 = \log_2 2 = 1 \quad \text{(A)}$$

9 Dada la función $f(x) = 3x^2 - 16x - 20$, determina el valor de a positivo tal que

$$\int_{-2}^{a} f(x)dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx$$

(A) 16   (B) 14   (C) 12   (D) 10   (E) 8

$$\int_{-2}^{0} f(x)dx = \int_{-2}^{a} f(x)dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \Leftrightarrow \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$$

$$0 = \int_{0}^{a} f(x)dx = \left[x^3 - 8x^2 - 20x\right]_0^a = a^3 - 8a^2 - 20a = a\left(a^2 - 8a - 20\right) =$$
$$= a(a+2)(a-10) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -2 \\ a = 10 \end{cases}$$

La única solución positiva es a=10 (D).

10 Sea la función $f(x) = a\cos bx + 3$ definida en el invervalo $[0, 2\pi]$.
Sean a y b dos números naturales para los cuales la función anterior presenta un máximo igual a 13 en el punto $x = \pi/3$. Para el par ordenado (a, b), determina el valor mínimo de $a + b$.

(A) 12   (B) 14   (C) 16   (D) 18   (E) 20

$$f(x) = a\cos bx + 3 \rightarrow f'(x) = -ab\sin bx$$
$$0 = f'(\pi/3) = -ab\sin(\pi/3b) \Rightarrow \sin(\pi/3b) = 0 \Rightarrow \frac{\pi b}{3} = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi\ldots \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b = 0, 3, 6, 9, 12\ldots$$

Pero para los valores $b = 3, 9\ldots$ la función presenta un mínimo, no un máximo, luego nos tenemos que quedar con los valores $b = 0, 6, 12\ldots$

Por otro lado, el máximo de la función coseno es 1, luego para que $f(x) = a\cos bx + 3$ alcance un máximo de 13 se debe cumplir $a + 3 = 13 \Rightarrow a = 10$

Los valores mínimos serán a=10, b=6, a+b=16 (C).

11 A partir de un momento t=0, una partícula P se mueve en el eje vertical. Su posición en el instante t (t≥0) es

$$x = t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 6t$$

Determina la aceleración de la partícula P en el momento en el que cambia su dirección.

(A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 15 (E) 18

En el momento en el que cambia de dirección su velocidad (primera derivada) es cero.

$x' = 3t^2 - 3t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = -1, t = 2$

El único candidato aceptable es t=2. En ese instante la aceleración viene dada por su segunda derivada:

$x'' = 6t - 3 \to 6 \cdot 2 - 3 = 9$ (B)

12 Sea una sucesión $\{a_n\}$ tal que $a_1 = 2$, y sea una sucesión aritmética $\{b_n\}$ tal que $b_1 = 2$, de forma que se cumple $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_{k+1}} = \frac{1}{2}n^2$.

Determina el valor de $\sum_{k=1}^{5} a_k$.

(A) 120 (B) 125 (C) 130 (D) 135 (E) 140

Aplicamos el sumatorio del enunciado para $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{a_k}{b_{k+1}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow b_2 = 2a_1 = 2 \cdot 2 = 4$$

Puesto que $b_1 = 2$ y $b_2 = 4$, tenemos una sucesión aritmética de razón 2, es decir, $b_k = 2k$.

Ahora reescribimos el sumatorio:

$$\frac{1}{2}n^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2(k+1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k+1} \Leftrightarrow n^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k+1}$$

Luego

$$\frac{a_n}{b_{n+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_{k+1}} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{b_{k+1}} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}(n-1)^2 = n - \frac{1}{2} \Rightarrow$$

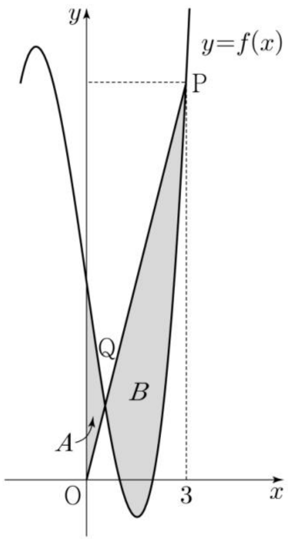
$$\Rightarrow \frac{a_n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}(n-1)^2 \Rightarrow \frac{a_n}{n+1} = n^2 - (n-1)^2$$

$$a_n = 2n^2 + n - 1$$

Por lo que

$$\sum_{k=1}^{5} a_k = \sum_{k=1}^{5}\left(2n^2 + n - 1\right) = 2\sum_{k=1}^{5} n^2 + \sum_{k=1}^{5} n - \sum_{k=1}^{5} 1 =$$
$$= 2\frac{5\cdot 6\cdot 11}{6} + \frac{5\cdot 6}{2} - 5 = 2\cdot 5\cdot 11 + 5\cdot 3 - 5 = 120 \quad \text{(A)}$$

13 Sea $f(x)$ una función polinómica cúbica con coeficiente del monomio mayor igual a 1. Sabemos, además, que $f(1) = f(2) = 0$ y $f'(0) = -7$.
Dados el origen O y el punto $P = (3, f(3))$, sea Q el punto distinto de P donde el segmento de recta OP corta la curva $y = f(x)$.
Sea A el área de la región determinada por la gráfica de la curva $y = f(x)$, el eje Y y el segmento OQ. Sea B el área de la región determinada por la gráfica de la curva $y = f(x)$ y el segmento PQ. Determina B-A.



(A) 37/4 (B) 39/4 (C) 41/4 (D) 43/4 (E) 45/4

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \to f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$
$-7 = f'(0) = 3\cdot 0^2 + 2a\cdot 0 + b \Rightarrow b = -7$
$0 = f(1) = 1^3 + a\cdot 1^2 - 7\cdot 1 + c = a + c - 6$
$0 = f(2) = 2^3 + a\cdot 2^2 - 7\cdot 2 + c = 8 + 4a - 14 + c = 4a + c - 6$
$$\left.\begin{array}{l} 0 = a + c - 6 \\ 0 = 4a + c - 6 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 0, c = 6$$
Luego la función es $f(x) = x^3 - 7x + 6$
$f(3) = 3^3 - 7\cdot 3 + 6 = 12$
La recta que pasa por O y P tiene por ecuación $y = g(x) = 4x$
Determinamos los puntos de corte con la función:

$$f(x) = x^3 - 7x + 6 = 4x \Leftrightarrow 0 = x^3 - 11x + 6 = (x-3)(x^2 + 3x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Así, el punto Q buscado cumple $Q = (v, f(v))$ con $v = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$.

$$A = \int_0^v f(x) - g(x)dx = \int_0^v x^3 - 11x + 6\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{11}{2}x^2 + 6x\right]_0^v =$$

$$= \frac{v^4}{4} - \frac{11}{2}v^2 + 6v$$

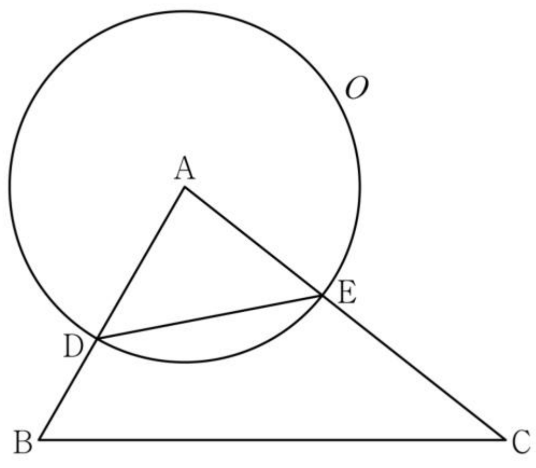
$$B = -\int_v^3 f(x) - g(x)dx = -\int_v^3 x^3 - 11x + 6\, dx = -\left[\frac{x^4}{4} - \frac{11}{2}x^2 + 6x\right]_v^3 =$$

$$= \left(\frac{v^4}{4} - \frac{11}{2}v^2 + 6v\right) - \left(\frac{3^4}{4} - \frac{11}{2}3^2 + 6\cdot 3\right)$$

$$B - A = \left(\frac{v^4}{4} - \frac{11}{2}v^2 + 6v\right) - \left(\frac{3^4}{4} - \frac{11}{2}3^2 + 6\cdot 3\right) - \left(\frac{v^4}{4} - \frac{11}{2}v^2 + 6v\right) =$$

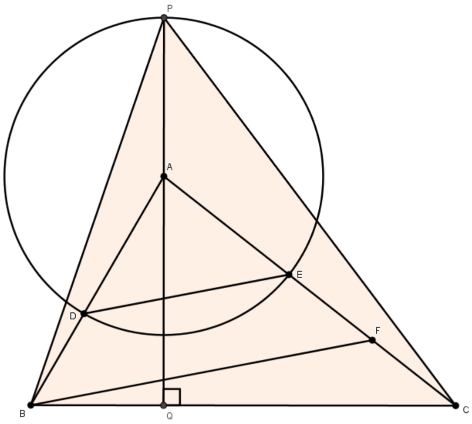
$$= -\left(\frac{3^4}{4} - \frac{11}{2}3^2 + 6\cdot 3\right) = \frac{45}{4} \quad \text{(E)}$$

14 Tal y como se muestra en la imagen, sea ABC un triángulo en el que trazamos un punto D en el lado AB, cumpliendo AD:DB=3:2, sea un punto E en el lado AC, de forma que ambos puntos pertenecen a la circunferencia O de centro A.
Sabemos además que sin A:sin C = 8:5, que la razón entre el área del triángulo ADE y el área del triángulo ABC es 9:35 y que el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC es 7. Determina el área máxima que puede tener un triángulo PBC donde P pertenece a la circunferencia O. Se supone, además, AB<AC.



(A) 18+15√3 (B) 24+20√3 (C) 30+25√3 (D) 36+30√3 (E) 42+35√3

El triángulo más grande que podemos construir con un punto P en la circunferencia corresponde al punto P que se determina con la altura h del triángulo ΔABC por A, donde AP=AD=AE:



$$\frac{AD}{DB}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{AB}{AD}=\frac{AD+DB}{AD}=\frac{AD}{AD}+\frac{DB}{AD}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}\Rightarrow\frac{AB}{AD}=\frac{5}{3}\Rightarrow AD=\frac{3AB}{5}$$

Aplicando el Teorema del Seno en ΔABC,

$$\frac{\sin A}{BC}=\frac{\sin C}{AB}\Rightarrow\frac{BC}{AB}=\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{8}{5}\Rightarrow BC=\frac{8}{5}AB$$

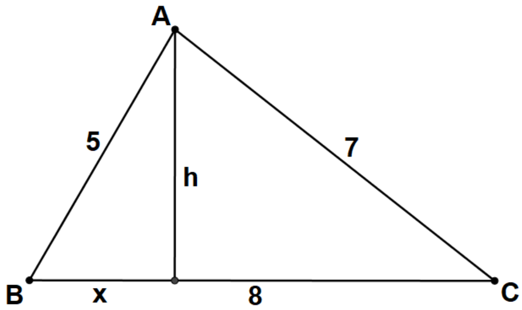
$$[\Delta ADE]=\frac{1}{2}AD\cdot AE\sin A$$

$$[\Delta ABC]=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A$$

$$\frac{9}{35}=\frac{[\Delta ADE]}{[\Delta ABC]}=\frac{1/2AD\cdot AE\sin A}{1/2AB\cdot AC\sin A}\Rightarrow\frac{9}{35}=\frac{AD}{AB}\frac{AE}{AC}=\frac{3}{5}\frac{AE}{AC}\Rightarrow\frac{3}{7}=\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AC}\Rightarrow$$

$$AC=\frac{7AD}{3}=\frac{7}{3}\frac{3}{5}AB=\frac{7}{5}AB$$

De todo esto deducimos que el triángulo ΔABC tiene lados AB, $AC=\frac{7}{5}AB$ y $BC=\frac{8}{5}AB$, es decir, sus lados están en una proporción 5:7:8. Con esto ya podemos deducir el ángulo B.



$$\left.\begin{array}{l}5^2=x^2+h^2\\7^2=(8-x)^2+h^2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}25=x^2+h^2\\49=64-16x+x^2+h^2\end{array}\right\}\Rightarrow 49=64-16x+25\Rightarrow x=\frac{5}{2}$$

$$\cos B = \frac{5/2}{5} = \frac{1}{2} \Rightarrow B = 60^{o} \Rightarrow \sin B = \sin 60^{o} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Una manera alternativa es aplicando el Teorema del Coseno:

$$7^2 = 5^2 + 8^2 - 2\cdot 5\cdot 8\cdot \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{7^2 - 5^2 - 8^2}{-2\cdot 5\cdot 8} = \frac{1}{2}$$

Ahora ya podemos determinar el triángulo mediante Teorema del Seno:

$$2R = \frac{AC}{\sin B} \Leftrightarrow 14 = \frac{AC}{\sqrt{3}/2} \Leftrightarrow AC = 14\frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$$

$$7\sqrt{3} = AC = \frac{7}{5}AB \Rightarrow AB = 5\sqrt{3}$$

$$BC = \frac{8}{5}AB = \frac{8}{5}5\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

$$\sin B = \frac{h}{AB} \Rightarrow h = AB\sin B = 5\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{5}{3} \Rightarrow AD = \frac{3}{5}AB = \frac{3}{5}5\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

La altura del triángulo ΔPBC será $a = h + AP = h + AD = \frac{15}{2} + 3\sqrt{3}$

y el área máxima será $\frac{BC\cdot a}{2} = \frac{1}{2}8\sqrt{3}\left(\frac{15}{2} + 3\sqrt{3}\right) = 36 + 30\sqrt{3}$ (D)

15 Sea $f(x)$ una función cuadrática con coeficiente principal negativo y sea a una constante (a≠3√5). Se define la función

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 15x + 7 & (x \le 0) \\ f(x) & (x > 0) \end{cases}$$

Sabemos que:

a) La función $g(x)$ es diferenciable en todo el conjunto de números reales.

b) La ecuación $g'(x) \times g'(x-4) = 0$ tiene exactamente cuatro soluciones reales.

Determina $g(-2) + g(2)$.

(A) 30 (B) 32 (C) 34 (D) 36 (E) 38

(oculto temporalmente)

16 Resuelve la siguiente ecuación:

$$\log_2(x-3) = \log_4(3x-5)$$

$$\log_2(x-3)=\log_4(3x-5)=\frac{\log_2(3x-5)}{\log_2 4}=\frac{\log_2(3x-5)}{2}\Leftrightarrow$$
$$2\log_2(x-3)=\log_2(3x-5)\Leftrightarrow$$
$$\log_2(x-3)^2=\log_2(3x-5)\Rightarrow(x-3)^2=3x-5\Rightarrow$$
$$x^2-6x+9=3x-5\Rightarrow x^2-9x+14=0\Rightarrow x=2,x=7$$

El candidato $x=2$ no es aceptable pues tendríamos un logaritmo de un número negativo, luego la única solución aceptable es $x=7$.

En efecto, $\log_2(7-3)=\log_2 4=\log_2 2^2=2$

y $\log_4(3\cdot 7-5)=\log_4 16=\log_4 4^2=2$

17 Dada una función polinómica $f(x)$ tal que $f'(x)=9x^2+4x$ y $f(1)=6$, determina $f(2)$.

$$f(x)=\int 9x^2+4x\,dx=3x^3+2x^2+C$$
$$6=f(1)=3\cdot 1^3+2\cdot 1^2+C=5+C\Rightarrow C=1$$
$$f(x)=3x^3+2x^2+1\Rightarrow f(2)=3\cdot 2^3+2\cdot 2^2+1=33$$

18 Dada una sucesión $\{a_n\}$ tal que $a_n+a_{n+4}=12$, determina $\sum_{n=1}^{16}a_n$.

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8=$$
$$a_1+a_5+a_2+a_6+a_3+a_7+a_4+a_8=12+12+12+12=48$$

y de la misma manera

$$a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}+a_{16}=48$$

Luego

$$\sum_{n=1}^{16}a_n=48+48=96$$

19 Fijado un valor de a real positivo, sabemos que la función

$$f(x) = 2x^3 - 3ax^2 - 12a^2x$$

tiene un máximo local igual a 7/27. Determina el valor de $f(3)$.

$$f'(x) = 6x^2 - 6ax - 12a^2 = 0 = 6\left(x^2 - ax - 2a^2\right) \Leftrightarrow x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4(-2a^2)}}{2} =$$

$$= \frac{a \pm \sqrt{9a^2}}{2} \overset{a>0}{=} \frac{a \pm 3a}{2} = \begin{cases} x = 2a \\ x = -a \end{cases}$$

$$f''(x) = 12x - 6a$$

$$f''(2a) = 12(2a) - 6a = 18a > 0$$

$$f''(-a) = 12(-a) - 6a = -18a < 0$$

Luego, por el Criterio de la segunda derivada, el único candidato a máximo local es $x = -a$.

$$\frac{7}{27} = f(-a) = 2(-a)^3 - 3a(-a)^2 - 12a^2(-a) = -2a^3 - 3a^3 + 12a^3 = 7a^3 \Leftrightarrow$$

$$a^3 = \frac{1}{27} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$$

$$f(3) = 2 \cdot 3^3 - 3\frac{1}{3}3^2 - 12\left(\frac{1}{3}\right)^2 3 = 54 - 9 - 4 = 41$$

20 Dada la curva $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$ y sea k la abscisa del punto en el que se corta la recta $y = x$ y esta curva.

Sea $f(x)$ la función definida en todos los números reales satisfaciendo la siguente condición:

Para todos los números reales $x > k$, $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$ y $f\left(f(x)\right) = 3x$.

Determina el valor de $f\left(\frac{1}{k^3 \times 5^{3k}}\right)$.

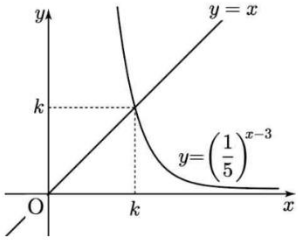
Estudiando la función $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{k-3} - k$,

$$g(1) = \left(\frac{1}{5}\right)^{1-3} - 1 = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} - 1 = \frac{1}{5^{-2}} - 1 = 5^2 - 1 = 25 - 1 = 24 > 0$$

$$g(3) = \left(\frac{1}{5}\right)^{3-3} - 3 = \left(\frac{1}{5}\right)^{0} - 3 = 1 - 3 = -2 < 0$$

Luego podemos garantizar, aplicando el Teorema de Bolzano, que $1 < k < 2$.

La función $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$ es estrictamente creciente, y la función $y=x$ es estrictamente decreciente. Por lo tanto este punto de corte es único. Esto también lo podemos garantizar observando las respectivas gráficas:



Sabemos que se cumple

$$k=\left(\frac{1}{5}\right)^{k-3}=\frac{1}{5^{k-3}}=\frac{1}{5^k/5^3}=\frac{5^3}{5^k}\Rightarrow k\cdot 5^k=5^3\Rightarrow\left(k\cdot 5^k\right)^3=\left(5^3\right)^3$$

$$\Rightarrow k^3\cdot 5^{3k}=5^9\Rightarrow\frac{1}{k^3\cdot 5^{3k}}=\frac{1}{5^9}$$

Luego

$$f\left(\frac{1}{k^3\times 5^{3k}}\right)=f\left(\frac{1}{5^9}\right)=f\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{12-3}\right)=f\left(f(12)\right)=3\cdot 12=36$$

En donde hemos tenido en cuenta que hemos visto al principio que

$12>k\Rightarrow f(12)=\left(\frac{1}{5}\right)^{12-3}=\left(\frac{1}{5}\right)^{9}$.

21 Dada la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$, donde a y b son números enteros, determina el valor máximo que puede tomar $f(1)$ si la función cumple la siguiente condición:

Para todo número real α existe $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(2x+1)}{f(x)}$.

(oculto temporalmente)

22 Determina la suma de todos los posibles valores de $|a_1|$ de las sucesiones de enteros $\{a_n\}$ que satisfacen las siguientes dos condiciones:

a) para todo n≥1, $a_{n+1}=\begin{cases}a_n-3 & \text{si } |a_n| \text{ es impar}\\ \frac{1}{2}a_n & \text{si } a_n=0 \text{ o } |a_n| \text{ es par}\end{cases}$

b) El valor mínimo de m para el cual $|a_m|=|a_{m+2}|$ es 3.

La condición b equivale a decir que $|a_3|=|a_5|$, $|a_2|\neq|a_4|$ y $|a_1|\neq|a_3|$.

Estudiemos los posibles valores de a_3.

a) Si a_3 es múltiplo de 4, entonces

$$a_4 = \frac{a_3}{2} \to a_5 = \frac{a_4}{2} = \frac{a_3}{4}$$

En la condición $|a_3| = |a_5|$ podemos prescindir de los valores absolutos pues ambos números tienen el mismo signo.

$$a_5 = \frac{a_3}{4} = a_3 \Leftrightarrow a_3 = 0$$

$$a_3 = 0 \Rightarrow a_2 = \begin{cases} 3 \Rightarrow a_1 = 6 \\ 0 \Rightarrow a_1 = \begin{cases} 3 \\ 0 \end{cases} \end{cases}$$

$6 \to 3 \to 0 \to 0 \to 0$

$3 \to 0 \to 0 \to 0 \to 0$ no cumple la condición b

b) Si a_3 es par pero no múltiplo de 4, entonces

$$a_4 = \frac{a_3}{2} \to a_5 = a_4 - 3 = \frac{a_3}{2} - 3$$

b1) Si $a_3 / 2 \geq 3 \Leftrightarrow a_3 \geq 6$ o $a_3 / 2 < 0 \Leftrightarrow a_3 < 0$ entonces no hay cambio de signo entre a_3 y a_5, y por tanto

$$a_5 = \frac{a_3}{2} - 3 = a_3 \Leftrightarrow a_3 = -6$$

$$a_3 = -6 \Rightarrow a_2 = \begin{cases} -3 \Rightarrow a_1 = -6 \\ -12 \Rightarrow a_1 = \begin{cases} -9 \\ -24 \end{cases} \end{cases}$$

$-9 \to -12 \to -6 \to -3 \to -6$ Sí cumple todas las condiciones

$-24 \to -12 \to -6 \to -3 \to -6$ Sí cumple todas las condiciones

b2) Si $1 \leq a_3 \leq 5$ entonces hay cambio de signo.

$$|a_3| = |a_5| \Leftrightarrow -a_3 = a_5 = \frac{a_3}{2} - 3 \Leftrightarrow a_3 = 2$$

$$a_3 = 2 \Rightarrow a_2 = \begin{cases} 5 \Rightarrow a_1 = 10 \\ 4 \Rightarrow a_1 = \begin{cases} 7 \\ 8 \end{cases} \end{cases}$$

$10 \to 5 \to 2 \to 1 \to -2$

$7 \to 4 \to 2 \to 1 \to -2$

$8 \to 4 \to 2 \to 1 \to -2$

c) Si a_3 es impar, entonces

$$a_4 = a_3 - 3 \to a_5 = \frac{a_4}{2} = \frac{a_3 - 3}{2}$$

c1) $a_3 \geq 3$ o $a_3 < 0$ no hay cambio de signo, y por tanto

$$|a_3| = |a_5| \Leftrightarrow a_3 = a_5 = \frac{a_3 - 3}{3} \Leftrightarrow a_3 = -3$$

$a_3 = -3 \Rightarrow a_2 = -6 \Rightarrow a_1 = \begin{cases} -3 \\ -12 \end{cases}$

Las sucesiones son

$-3 \to -6 \to -3 \to -6 \to -3$ no cumple la condición b.

$-12 \to -6 \to -3 \to -6 \to -3$ no cumple la condición b.

c2) $1 \le a_3 \le 2$ hay cambio de signo, y por tanto

$|a_3| = |a_5| \Leftrightarrow -a_3 = a_5 = \dfrac{a_3 - 3}{3} \Leftrightarrow a_3 = 1$

$a_3 = 1 \Rightarrow a_2 = 2 \Rightarrow a_1 = \begin{cases} 5 \\ 4 \end{cases}$

Las sucesiones son

$5 \to 2 \to 1 \to -2 \to -1$ no cumple la condición b.

$4 \to 2 \to 1 \to -2 \to -1$ no cumple la condición b.

Luego la suma de los posibles valores de $|a_1|$ son: 6+9+24+10+7+8=64

Bloque optativo de probabilidad y estadística.

23 (P) Determina el coeficiente de x^6 en la expansión de $(x^3+2)^5$.

(A) 40 (B) 50 (C) 60 (D) 70 (E) 80

$$(x^3+2)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} (x^3)^k\, 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} 2^{5-k}\ x^{3k}$$

En nuestro caso $3k = 6 \Rightarrow k = 2$

Y el coeficiente que buscamos es $\binom{5}{2} 2^{5-2} = \dfrac{5!}{2!3!} 2^3 = 5 \cdot 2 \cdot 8 = 80$ (E)

24 (P) Dados dos sucesos A y B de los que sabemos que $P(A|B) = P(A) = \dfrac{1}{2}$ y $P(A \cap B) = \dfrac{1}{5}$, determina $P(A \cup B)$.

(A) 1/2 (B) 3/5 (C) 7/10 (D) 4/5 (E) 9/10

$$\frac{1}{2} = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/5}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{1/5}{1/2} = \frac{2}{5}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{7}{10} \quad \text{(C)}$$

25 (P) En una población que sigue una distribución normal $N\left(m, 2^2\right)$ se toma una muestra de 256 individuos. El intervalo de confianza para un nivel de confianza del 95% obtenido para la media muestral es a ≤ m ≤ b. Determina b-a.
En una variable aleatoria Z que sigue una distribución normal estándar se cumple $P\left(|Z| \leq 1.96\right) = 0.95$.

(A) 0.49 (B) 0.52 (C) 0.55 (D) 0.58 (E) 0.61

$$b - a = Error = 2 \cdot z_{\alpha/2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2 \cdot 1.96\left(\frac{2}{\sqrt{256}}\right) = 1.96\frac{4}{16} = \frac{1.96}{4} = 0.49 \quad \text{(A).}$$

28 (P) Dado el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, determina el número de funciones $f : X \to X$ que cumplen las siguientes condiciones:

a) $f(1) \times f(6)$ es un divisor de 6.
b) $2f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5) \leq 2f(6)$

(A) 166 (B) 171 (C) 176 (D) 181 (E) 186

$f(1) \times f(6)$ es un divisor de 6 $\Leftrightarrow$ $f(1) \times f(6) \in \{1, 2, 3, 6\}$
$\Leftrightarrow$ $\{f(1), f(6)\} = \{1,1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,6\}, \{2,3\}$
Por la condición b sabemos que $2f(1) \leq 2f(6) \Rightarrow f(1) \leq f(6)$, luego las opciones posibles son: $f(1) = 1, f(6) = 1$, $f(1) = 1, f(6) = 2$, $f(1) = 1, f(6) = 3$, $f(1) = 1, f(6) = 6$ y $f(1) = 2, f(6) = 3$.

Aquí utilizaremos la siguiente fórmula. Tenemos k números que queremos escribir de forma ordenada entre un valor mínimo a y un valor máximo b:

$$a \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \ldots \leq n_k \leq b$$

Sea $d = b - a + 1$. las opciones posibles son $H_k^d = C_{k+d-1}^k$

a) $f(1) = 1, f(6) = 1$.

$$2 \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5) \leq 2$$

Solo hay una: $f(n) = 2$

b) $f(1) = 1, f(6) = 2$.

$$2 \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5) \leq 4$$

$$H_4^{4-2+1} = H_4^3 = C_{4+3-1}^4 = C_6^4 = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

c) $f(1) = 1, f(6) = 3$.
$2 \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5) \leq 6$

$$H_4^{6-2+1} = H_4^5 = C_{4+5-1}^4 = C_8^4 = \frac{8!}{4!\,4!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2} = 2\cdot 7\cdot 2\cdot 5 = 70$$

d) $f(1)=1,\ f(6)=6$.

Es el mismo caso que el anterior.

e) $f(1)=2,\ f(6)=3$.

$4 \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5) \le 6$

$$H_4^{6-4+1} = H_4^3 = C_{4+3-1}^4 = C_6^4 = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$$

Así pues, el total de posibilidades es $1+15+70+70+15=171$ (B)

Bloque optativo de Cálculo diferencial.

23 (C) Determina $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2}{\sin^2 x}$.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$$

Luego $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{\sin^2 x} = 3\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2 = 3\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\right)^2 = 3\cdot 1^2 = 3$ (C)

24 (C)

Calcula $\int_0^{10}\dfrac{x+2}{x+1}dx$.

(A) 10+ln5 (B) 10+ln7 (C) 10+2ln3 (D) 10+ln11 (E) 10+ln13

$$\int_0^{10}\frac{x+2}{x+1}dx = F(10) - F(0) = (*)$$

$$F(x) = \int \frac{x+2}{x+1}\,dx = \int 1 + \frac{1}{x+1}\,dx = x + \ln|x+1|$$

$F(10) = 10 + \ln 11$

$F(0) = 0 + \ln 1 = 0$

$(*) = 10 + \ln 11$ (D).

Bloque optativo de Geometría.

23 (G) Dados los vectores $\vec{a} = (k,3)$ y $\vec{b} = (1,2)$ determina el valor de k si sabemos que $\vec{a} + 3\vec{b} = (6,9)$.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

$(6,9) = \vec{a} + 3\vec{b} = (k,3) + 3(1,2) = (k+3,9) \Leftrightarrow 6 = k+3 \Leftrightarrow k = 3$ (C)

24 (G) Dada la parábola con vértice (1,0) y directriz $x = -1$, sabemos que pasa por el punto $(3, a)$. Determina el valor de a positivo.
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Determinamos la ecuación de la parábola:

$V = (1,0)$

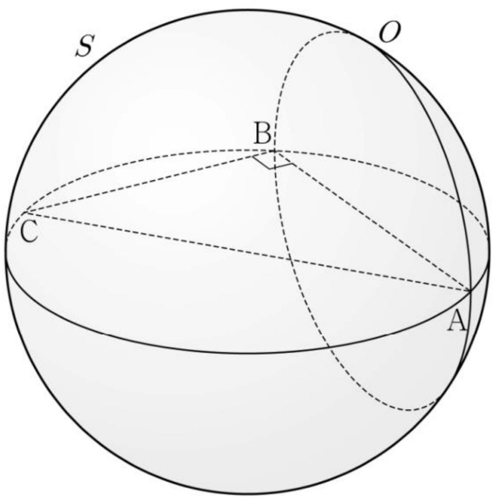
$D = -1 = 1 - 2 \Rightarrow a = 2$

$(y-0)^2 = 4 \cdot 2(x-1) \Leftrightarrow y^2 = 8(x-1)$

Pasa por el punto $(3, a)$, por lo tanto:

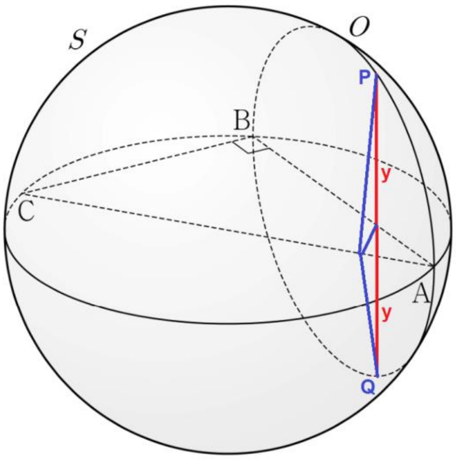
$a^2 = 8(3-1) = 16 \Rightarrow a \underset{a>0}{=} 4$ (D)

28 (G) Dado un triángulo rectángulo ΔABC, con $\overline{AB} = 8$, $\overline{BC} = 6$, $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, determinamos la esfera S de diámetro AC.
Sea el plano que contiene la recta AB y es perpendicular al plano ABC y sea O la circunferencia intersección entre dicho plano y la esfera S.
Entre todos los puntos que pertenecen a O, sean P y Q los dos puntos diferentes que están a una distancia 4 de la recta AC. Determina la longitud del segmento PQ.

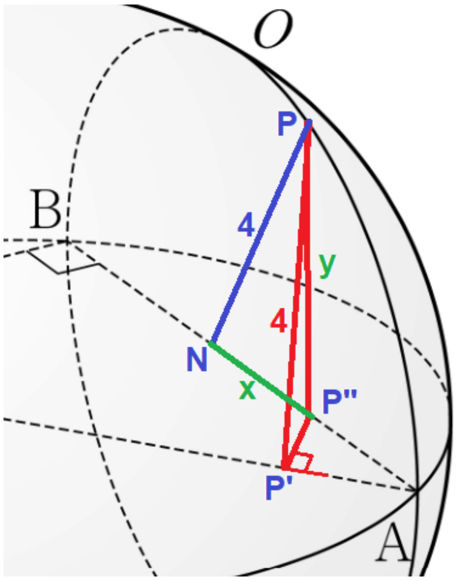


(A) √43 (B) √47 (C) √51 (D) √55 (E) √59

Lo primero que debemos observar es que los puntos P y Q buscados son simétricos respecto del plano ABC, por lo que solo debemos determinar uno de ellos:

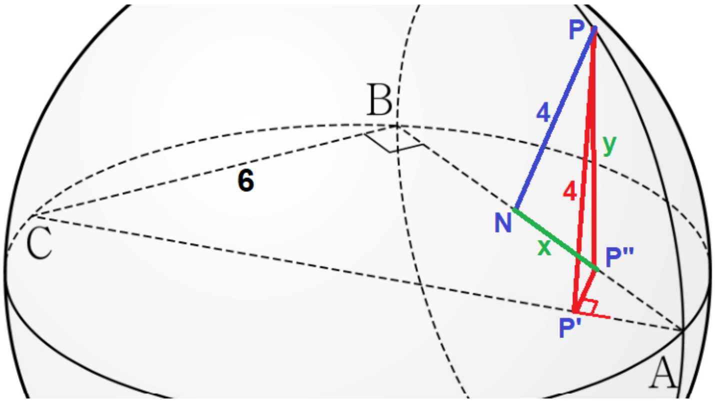


Sea P uno de estos puntos, Sea P' su proyección ortogonal sobre la recta AC y sea P'' su proyección ortogonal sobre la recta AB.
Sabemos que la circunferencia O tiene como centro el punto N que es el punto medio del segmento AB. Luego NP=AB/2=8/2=4.



Sean x=NP'' e y=PP''.
Por Pitágoras,
$16 = 4^2 = NP^2 = x^2 + y^2$
Luego $AP'' = 4 - x$

Ahora observamos que los triángulos rectángulos ΔACB y $\Delta AP''P'$ son semejantes, pues comparten el ángulo agudo en el vértice A:



Luego

$AC=\sqrt{BC^2+AB^2}=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10$

$\frac{P'P''}{BC}=\frac{P''A}{AC}\Rightarrow\frac{P'P''}{6}=\frac{P''A}{10}\Rightarrow P'P''=\frac{6}{10}P''A=\frac{3}{5}P''A=\frac{3}{5}(4-x)$

Ahora aplicamos Pitágoras en el triángulo rectángulo $\Delta PP'P''$:

$$16=4^2=PP'^2=PP''^2+P'P''^2=y^2+\left(\frac{3}{5}(4-x)\right)^2=16-x^2+\left(\frac{3}{5}(4-x)\right)^2\Leftrightarrow$$

$$x^2=\left(\frac{3}{5}(4-x)\right)^2\Rightarrow x=\frac{3}{5}(4-x)\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

$$y=\sqrt{16-x^2}=\sqrt{16-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{16-\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{55}{4}}=\frac{\sqrt{55}}{2}$$

Luego, por simetría, $PQ=2\frac{\sqrt{55}}{2}=\sqrt{55}$ (D)