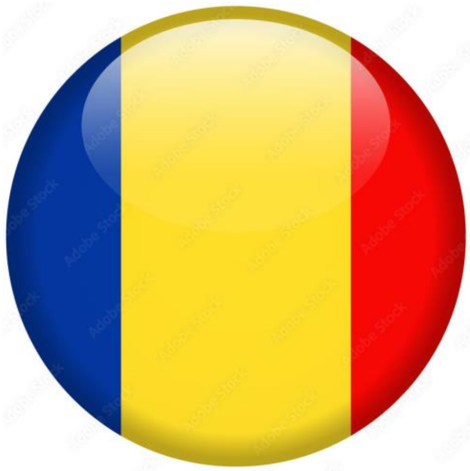
COMPENDIUM RUMANÍA

Examenul național de bacalaureat 2025



Gerard Romo Garrido

Toomates Coolección vol. 82.4

Toomates Coolección

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "**licencias digitales**" con las que las editoriales pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo libro, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.
Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de licencias digitales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía**.
El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las editoriales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de unos libros de texto que actualmente son muy mediocres, y no mediante retorcidas técnicas comerciales.
Estos libros se comparten bajo una licencia "**Creative Commons 4.0 (Atribution Non Commercial)**": Se permite, se promueve y se fomenta cualquier uso, reproducción y edición de todos estos materiales siempre que sea sin ánimo de lucro y se cite su procedencia. Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas. **¡Libérate de la tiranía y mediocridad de las editoriales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos**

Problem Solving (en español):
Geometría Axiomática Problemas de Geometría 1 Problemas de Geometría 2
Introducción a la Geometría Álgebra Teoría de números Combinatoria Probabilidad
Trigonometría Desigualdades Números complejos Calculus & Precalculus

Libros de texto (en catalán):
Nombres (Preàlgebra) Àlgebra Proporcionalitat Mesures geomètriques
Geometria analítica Combinatòria i Probabilitat Estadística Trigonometria Funcions
Nombres Complexos Àlgebra Lineal Geometria Lineal Càlcul Infinitesimal
Programació Lineal Mates amb Excel

PAU españolas:
Cataluña TEC Cataluña CCSS Valencia Galicia País Vasco Baleares

PAU internacionales:
Portugal Italia Francia Rumanía Hungría Pearson Edexcel International A Level
Pearson Edexcel IGCSE Cambridge International A Level Cambridge IGCSE
AQA GCSE International Baccalaureate (IB)

Evaluación diagnóstica y pruebas de acceso:
ACM6EP ACM4 CFGS PAP

Competiciones matemáticas:
Canguro: España Cataluña Francia USA Reino Unido Austria
USA: Mathcounts AMC 8 10 12 AIME USAJMO USAMO TSTST TST ELMO Putnam
España: OME OMEFL OMEC OMEA OMEM CDP
Europa: OMI Arquimede HMMT BMO Balkan MO JBMO
Internacional: IMO IGO SMT INMO CMO HMMT EGMO
AHSME: Book 1 Book 2 Book 3 Book 4 Book 5 Book 6 Book 7 Book 8 Book 9

Otros materiales:
Pizzazz!: Book A Book B Book C Book D Book E Pre-Algebra Algebra , REOIM

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales para facilitar su edición.

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a **toomates@gmail.com**
¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.
Consulta el **catálogo de libros** completo en **http://www.toomates.net**
Descarga toda la biblioteca Toomates en un solo archivo **Aquí** MEGA
Visita mi **Canal de Youtube**: **https://www.youtube.com/c/GerardRomo**
Visita mi **blog**: **https://toomatesbloc.blogspot.com/**

Versión de este documento: **03/03/2025**

Este documento forma parte del siguiente bloque:

Rumanía Bacalaureat (2014-2024):
http://www.toomates.net/biblioteca/Rumania.pdf

Rumanía Test de Evaluare Națională (2010-2024):
http://www.toomates.net/biblioteca/Rumania2.pdf

Rumanía Test de Evaluare Națională (2025):
http://www.toomates.net/biblioteca/Rumania3.pdf

Rumanía Bacalaureat (2025):
http://www.toomates.net/biblioteca/Rumania4.pdf

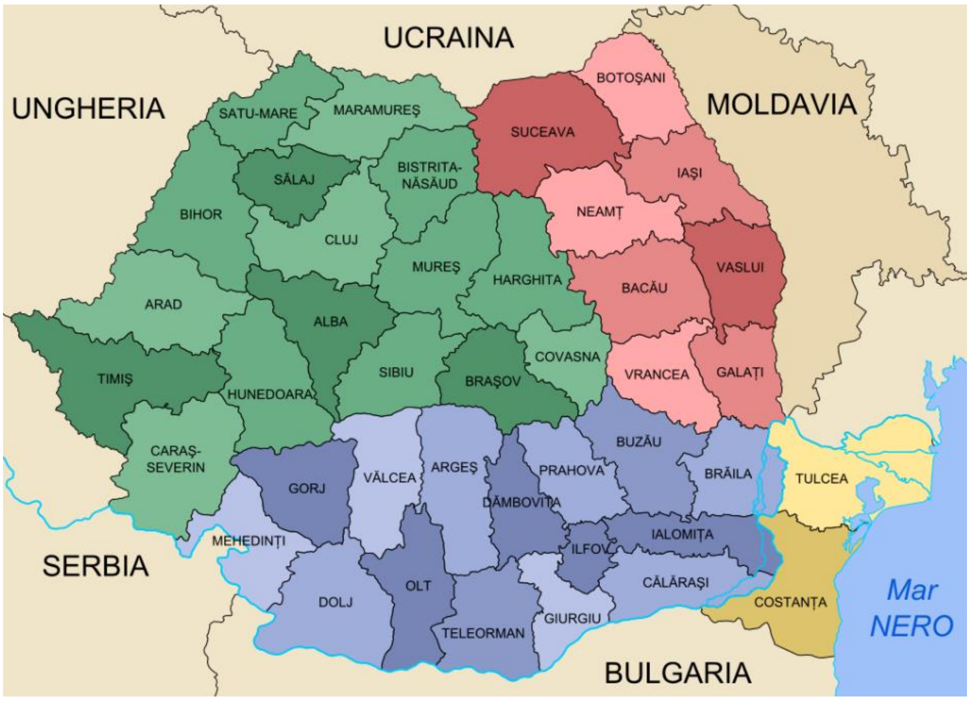
Otros compendiums de pruebas PAU internacionales:

Portugal: http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal.pdf
Italia: http://www.toomates.net/biblioteca/Italia.pdf
Francia: http://www.toomates.net/biblioteca/Francia.pdf
Rumanía: http://www.toomates.net/biblioteca/Rumania.pdf
Hungría: http://www.toomates.net/biblioteca/Hungria.pdf
International Baccalaureate (IB): http://www.toomates.net/biblioteca/IB.pdf
Pearson Edexcel International A Level:
http://www.toomates.net/biblioteca/Edexcel.pdf
Pearson Edexcel IGCSE: http://www.toomates.net/biblioteca/EdexcelIGCSE.pdf
Cambridge International A Level:
http://www.toomates.net/biblioteca/Cambridge.pdf
Cambridge IGCSE: http://www.toomates.net/biblioteca/CambridgeIGCSE.pdf
AQA GCSE: http://www.toomates.net/biblioteca/AQAGCSE.pdf

Compendiums de pruebas PAU españolas:

Cataluña (TEC): http://www.toomates.net/biblioteca/Pautec.pdf
Cataluña (CCSS): http://www.toomates.net/biblioteca/Pauccss.pdf
Valencia: http://www.toomates.net/biblioteca/Valencia.pdf
Galicia: http://www.toomates.net/biblioteca/Galiciapau.pdf
País Vasco: http://www.toomates.net/biblioteca/Paisvascopau.pdf
Baleares: http://www.toomates.net/biblioteca/Balears.pdf

Índice.



En documento **http://www.toomates.net/biblioteca/Rumania.pdf** se incluye una descripción general del sistema educativo de Rumanía.

Fuentes.

https://mate.info.ro/Materiale-11-bacalaureat.html

Simulare - Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică

Mate.info.ro
profu' de mate

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați partea întreagă a numărului real $a=\sqrt[3]{125}+\sqrt{5}$.

5p **2.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care $x^2-(2m+1)x+m(m-1)\geq 0$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați ecuația $\log_2 x+\log_4 2x+\log_{4x} 8x=1$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare unul dintre numerele naturale de două cifre, acesta să fie format doar din cifre impare.

5p **5.** Se consideră triunghiul MNP cu $MN=6$, $MP=8$ și $\sphericalangle M=90°$. Calculați lungimea vectorului $\vec{u}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}$.

5p **6.** Determinați numărul real *x*, știind că $tgx+ctgx+2=0$ și $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y+z=1 \\ 7x-y+a\cdot z=b \end{cases}$, $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care determinantul matricei sistemului este nul.

5p **b)** Determinați valorile parametrilor *a* și *b* pentru care sistemul este incompatibil.

5p **c)** Să se arate că există o infinitate de valori ale numerelor *a* și *b* pentru care sistemul admite o soluție *(x,y,z)* cu *x*, *y*, *z* în progresie aritmetică.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2}$.

5p **a)** Demonstrați că $x\circ y=\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)-1}$, pentru orice numere reale *x* și *y*.

5p **b)** Determinați perechile de numere naturale *a* și *b*, știind că $a\circ b=1$.

5p **c)** Demonstrați că pentru orice număr natural *n*, $n\geq 2$, numărul $\underbrace{1\circ 1\circ\cdots\circ 1}_{1\ de\ n\ ori}$ **nu** este natural.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele la graficul funcției f.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem ale funcției f.

5p **c)** Să se arate că $e^{\pi}>\pi^{e}$.

2. Se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n\cdot e^x$, $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Calculați $\int f_0(x)\,dx$ și $\int\left(f_0(x)+f_1(x)\right)dx$.

5p **b)** Arătați că orice primitivă a funcției f_3 este descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0)$.

5p **c)** Arătați că orice primitivă a funcției f_{2024} este concavă pe intervalul $(-2024,0)$.

Mate.info.ro
profu' de mate

Simulare-Examenul national de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a=5+\sqrt{5}$ Cum $2<\sqrt{5}<3$, obținem $[a]=5+[\sqrt{5}]=7$	**2p** **3p**
2.	$\Delta=(2m+1)^2-4m(m-1)=8m+1$ $\Delta\le 0$, deci $m\in\left(-\infty,-\frac{1}{8}\right]$	**2p** **3p**
3.	$x\in\left(0,\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$ Ecuația devine $\log_2 x+\frac{1+\log_2 x}{2}+\frac{3+\log_2 x}{2+\log_2 x}=1$ $\log_2 x=-1, \log_2 x=-\frac{4}{3}$ $x_1=\frac{1}{2}, x_2=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$	**1p** **1p** **1p** **2p**
4.	$p=\frac{nr.\,cazuri\ favorabile}{nr.\,cazuri\ posibile}$ $\overline{ab}$ cu $a,b\in\{1,3,5,7,9\}$ sunt 25 de numere prin urmare rezultă 25 de cazuri favorabile $\overline{ab}$ cu $a\in\{1,2,3,\dots,9\}$ și $b\in\{0,1,2,3,\dots,9\}$ sunt 90 de numere prin urmare rezultă 90 de cazuri posibile $p=\frac{5}{18}$	**1p** **2p** **1p** **1p**
5.	$\vec{u}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MQ}$, unde $MNQP$ este paralelogram $\sphericalangle M=90^\circ$, deci $MNQP$ este dreptunghi și $MQ=NP=10$	**2p** **3p**
6.	$tgx+\frac{1}{tgx}+2=0\Leftrightarrow\frac{(tgx+1)^2}{tgx}=0$ $tgx=-1$ și, cum $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, obținem $x=\frac{3\pi}{4}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & a \end{vmatrix} = -5a+20$	**3p**
	$-5a+20=0 \Leftrightarrow a=4$	**2p**
b)	Dacă $a \neq 4$ sistemul este compatibil determinat, deci $a=4$.	**1p**
	Matricea sistemului are rangul 2, un minor principal fiind $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$.	**2p**
	$\Delta_{car} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & b \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow -5b+20 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 4$	**2p**
c)	Dacă $a \neq 4$ cu formulele lui Cramer obținem $x=\dfrac{3(b-a)}{20-5a}$, $y=\dfrac{b-a}{20-5a}$, $z=\dfrac{20-5b}{20-5a}$	**3p**
	$2y = x+z \Leftrightarrow a = 20-4b$	**1p**
	Așadar pentru $a \neq 4$ și $b=\dfrac{20-a}{4}$ soluția (x,y,z) verifică cerința.	**1p**
2.a)	$x \circ y = \sqrt{x^2y^2+x^2+y^2+1}-1=$	**2p**
	$=\sqrt{x^2(y^2+1)+(y^2+1)}-1=\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}-1$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}-1=1 \Leftrightarrow (a^2+1)(b^2+1)=2$	**2p**
	Cum a și b sunt numere naturale, obținem a=1, b=0 sau a=0, b=1	**3p**
c)	$\underbrace{1 \circ 1 \circ \cdots \circ 1}_{1 \text{ de } n \text{ ori}} = \sqrt{2^n-1}$, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$	**2p**
	Dacă $\sqrt{2^n-1} \in \mathbb{N}$, există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $2^n-1=k^2 \Rightarrow k$ impar, deci există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $2^n-1=(2m+1)^2$, de unde obținem $2^{n-1}=2m^2+2m+1$, ceea ce este imposibil, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

Mate.info.ro
profu' de mate

1.a)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\underset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$	**2p**
	rezultă $y=0$ asimptotă orizontală spre $+\infty$	**1p**
	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\ln x}{x}=-\infty$	**1p**
	rezultă $x=0$ asimptotă verticală la dreapta	**1p**
b)	$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot(x)'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$	**1p**
	$f'(x)=0\Rightarrow 1-\ln x=0\Rightarrow \ln x=1\Rightarrow x=e$	**1p**
	$\begin{array}{c\|lcr} x & 0 & e & +\infty \\ \hline f'(x) & +++++++++++++++++++ & 0 & ---------------------- \\ \hline f(x) & \nearrow & \frac{1}{e} & \searrow \end{array}$	**2p**
	$x=e$ punct de maxim	**1p**
c)	$e<\pi$, cum f este descrescătoare pe $(e,+\infty)$ avem $f(e)>f(\pi)$	**2p**
	$\frac{\ln e}{e}>\frac{\ln\pi}{\pi}\Leftrightarrow \pi\ln e>e\ln\pi\Leftrightarrow \ln\left(e^{\pi}\right)>\ln\left(\pi^{e}\right)\Leftrightarrow e^{\pi}>\pi^{e}$.	**3p**
2.a)	$\int f_0(x)\,dx=\int e^x\,dx=e^x+C$	**2p**
	$\int\left(f_0(x)+f_1(x)\right)dx=\int\left(e^x+x\cdot e^x\right)dx=\int\left(x\cdot e^x\right)'dx=x\cdot e^x+C$	**3p**
b)	Fie F o primitivă a lui f_3; $F'(x)=f_3(x)=x^3\cdot e^x<0,\ \forall x\in(-\infty,0)$,	**3p**
	deci F este descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0)$	**2p**
c)	Fie G o primitivă a funcției $f_{2024}\Rightarrow G'(x)=f_{2024}(x)$, $\forall x\in(-2024,0)$	**2p**
	$G''(x)=f'_{2024}(x)=x^{2023}\cdot(2024+x)\cdot e^x<0,\ \forall x\in(-2024,0)$ prin urmare G este concavă pe intervalul $(-2024,0)$	**3p**

Simulare - Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică M_tehnologic

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

Mate.info.ro profu' de mate

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați al patrulea termen al unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ știind că $a_3 = 4$ și $a_5 = 10$.
5p **2.** Determinați valorile parametrului real m pentru care ecuația $x^2 - 3x + m + 1 = 0$ nu admite soluții reale.
5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(3x - 1) = 3$.
5p **4.** După o ieftinire cu 25% prețul unui obiect este de 300 lei. Aflați prețul inițial al obiectului.
5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(-1, 2), B(3, -4). Determinați ecuația dreptei OM, unde M este mijlocul segmentului [AB].
5p **6.** Arătați că expresia E(x) = $(\sin x + 7\cos x)^2 + (7\sin x - \cos x)^2$ nu depinde de x.

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele A(x) = $\begin{pmatrix} x+2 & -2 \\ 1 & x-1 \end{pmatrix}, x \in R$ și B = $\begin{pmatrix} 14 & -10 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați $det(A(1))$.
5p **b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care matricea $A(x)$ este inversabilă.
5p **c)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $A(x) \cdot A(x) = B$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - 4x - 4y + 20$.
5p **a)** Calculati $-2 \circ 3$.
5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție.
5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor întregi inecuația $x \circ x \leq 8$.

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1. Fie funcția $f: (2, \infty) \to R$, f(x) = $\frac{x^2 + 6x}{x - 2}$.
5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{x^2-4x-12}{(x-2)^2}, \forall\, x \in (2, \infty)$.
5p **b)** Aflați ecuația asimptotei oblice spre +∞ la graficul funcției f.
5p **c)** Demonstrați că $f(x) \geq 18, \forall x \in (2, \infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f, F: R \to R, f(x) = (3x - 2)e^x$, F(x)= $(ax + b)e^x$, a,b $\in R$
5p **a)** Calculați $\int f(x) \cdot e^{-x} dx, x \in R$.
5p **b)** Determinați numerele reale a și b știind că funcția F este o primitivă a funcției f.
5p **c)** Calculați $\int f(x)dx, x \in R$.

Mate.info.ro
profu' de mate

Simulare - Examenul naţional de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică M_tehnologic
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_4 = \frac{a_3+a_5}{2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a_4 = \frac{4+10}{2} \Leftrightarrow a_4 = 7$ Metoda 2 : $\begin{cases} a_1 + 2r = 4 \\ a_1 + 4r = 10 \end{cases}$ Se obține r =3 și $a_1 = -2$ $a_4 = a_1 + 3r = -2 + 9 = 7$	**2p** **3p** **1p** **2p** **2p**
2.	Ecuaţia nu are rădăcini reale $\Leftrightarrow \Delta < 0$ $\Leftrightarrow 9 - 4(m+1) < 0$; $\Leftrightarrow 5 - 4m < 0$ $\Leftrightarrow m > \frac{5}{4} \Leftrightarrow m \in \left(\frac{5}{4}, \infty\right)$	**1p** **1p** **1p** **2p**
3.	Condițiile de existență a logaritmului $3x - 1 > 0$ și obținerea domeniului $D = \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$ Ecuația devine: $\log_2(3x - 1) = 3 \Leftrightarrow 3x - 1 = 8$. Rezolvarea ecuației $x = 3 \in D$	**1p** **2p** **2p**
4.	Notam cu x prețul inițial al obiectului $x - \frac{25}{100}x = 300 \Leftrightarrow x - \frac{1}{4}x = 300$ $\Leftrightarrow \frac{3}{4}x = 300$ $\Leftrightarrow x = 400$, deci prețul inițial al obiectului este 400 lei	 **2p** **1p** **2p**
5.	M mijlocul segm [AB] $\Leftrightarrow$M(1, -1) $x_O \neq x_M, y_O \neq y_M \Rightarrow$OM: $\frac{x - x_O}{x_M - x_O} = \frac{y - y_O}{y_M - y_O}$ OM: $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1}$ OM: y = -x .	**2p** **1p** **1p**

		1p
6.	E(x) = $sin^2 x + 14 \sin x \cos x + 49 \cos^2 x + 49 \sin^2 x - 14 \sin x \cos x + \cos^2 x$= =50($sin^2 x$+$cos^2 x$) = =50, deci E(x) nu depinde de x.	2p 1p 2p

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1.a)	A(1) = $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, Det A(1)=$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - (-2) \cdot 1$= = 0 + 2 = 2	1p 2p 2p
b)	Matricea A(x) este inversabila ⟺ det A(x) ≠ 0 det A(x) = $\begin{vmatrix} x+2 & -2 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = (x+2)(x-1) + 2 = x^2 + x$ Ecuatia det A(x) = 0 are solutiile x_1 = -1 si x_2 = 0. Matricea A(x) este inversabila ⟺x∈ $R\|\{-1,0\}$	1p 2p 1p 1p
c)	A(x)·A(x)= $\begin{pmatrix} x+2 & -2 \\ 1 & x-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+2 & -2 \\ 1 & x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+2)^2-2 & -4x-2 \\ 2x+1 & (x-1)^2-2 \end{pmatrix}$ A(x)·A(x)=B⟺ $\begin{cases} (x+2)^2-2=14 \\ -4x-2=-10 \\ 2x+1=5 \\ (x-1)^2-2=-1 \end{cases}$ Se obtine x=2 care verifica toate ecuațiile.	2p 1p 2p
2.a)	$(-2) \circ 3 = (-2) \cdot 3 - 4 \cdot (-2) - 4 \cdot 3 + 20 =$ = -6 + 8 – 12 + 20 = =10	1p 2p 2p
b)	Legea ''∘'' admite element neutru ⟺ $[\exists e \in R\ a.î\ x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in R]$ $x \circ e$ =$xe - 4x - 4e + 20$, $e \circ x = ex - 4e - 4x + 20 \Rightarrow x \circ e = e \circ x, \forall x \in R$ $xe - 4x - 4e + 20$ = x, $\forall x \in R \Leftrightarrow (e-5)(x-4) = 0, \forall x \in R$ $e - 5 = 0 \Leftrightarrow e = 5 \in R$	1p 1p 2p 1p
c)	$x \circ x \leq 8 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 20 \leq 8 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 \leq 0$ Rezolvarea ecuației $x^2 - 8x + 12 = 0$ și obținerea soluțiilor $x_1 = 2$ și $x_2 = 6$. Soluția inecuației este $x \in [2,6]$ Din $x \in Z \Rightarrow x \in \{2,3,4,5,6\}$	1p 1p 1p 2p

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

Mate.info.ro
profu' de mate

1.a)

$$f'(x)=\frac{(x^2+6x)'(x-2)-(x^2+6x)(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{(2x+6)(x-2)-(x^2+6x)\cdot 1}{(x-2)^2}=$$ **2p**

$$=\frac{2x^2-4x+6x-12-x^2-6x}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-12}{(x-2)^2},\ \forall x\in(2,\infty)$$ **3p**

b)

Cautam asimptota oblica spre +∞ de forma y = mx + n, unde

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+6x}{x(x-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(1+\frac{6}{x})}{x^2(1-\frac{2}{x})}=1\in R^*$$ **2p**

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+6x}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{8x}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{8x}{x(1-\frac{2}{x})}=8\in R$$ **2p**

Dreapta de ecuatie y=x+8 este asimptota oblica spre +∞ la graficul functiei f **1p**

c)

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^2-4x-12}{(x-2)^2}\Leftrightarrow x=6\in D,x=-2\notin D,D=(2,\infty)$$ **1p**

Tabelul de monotonie: **2p**

x	2		6		∞
$f'(x)$	|	- - - - - - - - - - - - - - - - -	0	+ + + + + + + + + + + + + + + + + + +	
$f(x)$	|	↘	18 m	↗	

Punctul de coordonate (6,18) este punct de minim absolut pentru graficul funcției f. Valoarea minimă a funcției este 18 ⇒ $f(x)\ \geq 18,\forall x\in(2,\infty)$ **2p**

2.a)

$$\int f(x)\cdot e^{-x}dx=\int(3x-2)e^x\cdot e^{-x}dx=\int(3x-2)dx=$$ **2p**

$$=3\frac{x^2}{2}-2x+\mathcal{C}$$ **3p**

b)

Funcția F este o primitivă a funcției f⇔ $\begin{cases} F\ este\ derivabil\breve{a} \\ F'(x)=f(x),\forall x\in R\end{cases}$ **1p**

$F'(x)=(ax+b)'\cdot e^x+(ax+b)(e^x)'=a\cdot e^x+(ax+b)\cdot e^x=(ax+a+b)\cdot e^x,\forall x\in R$ **2p**

$F'(x)=f(x),\forall x\in R\Leftrightarrow(ax+a+b)\cdot e^x=(3x-2)e^x,\forall x\in R$ de unde se obtine a = 3 si b = -5 **2p**

c)

$\int f(x)dx=\int(3x-2)e^xdx=\int(3x-2)(e^x)'dx=(3x-2)e^x-\int(3x-2)'e^xdx=$ **2p**

$=(3x-2)e^x-3\int e^xdx=(3x-2)e^x-3\,e^x+\mathcal{C}=(3x-5)e^x+\mathcal{C}$ **3p**

Sau

Metoda 2: Din b) ⇒ functia $F:R\ \to\ R$, F(x)= $(3x-5)e^x$ este o primitivă a funcției f ⇒ **2p**

$\int f(x)dx=F(x)+\ \mathcal{C}=(3x-5)e^x+\mathcal{C}$ **3p**

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, decembrie 2024
Proba E.c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profil real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profil militar, specializarea matematică-informatică

SUBIECTUL I (30 puncte)

5p **1.** Fie $z=\frac{1}{1+3i}+\frac{1}{1-3i}$. Calculați modulul numărului complex $3z+2\bar{z}+i$.

5p **2.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+m, m\in\mathbb{R}$. Determinați m știind că graficul funcției intersectează axa Ox în punctele distincte A și B, cu distanța AB = 3.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $log_2(2^{-x+1}-2)=x+2$.

5p **4.** Fie $A=\{x\in N/\sqrt{x}<5\}$. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din A, acesta să fie prim cu 25.

5p **5.** Fie $A(0,3)$ si punctele B,C astfel încât $\overrightarrow{AB}=-2\vec{\imath}-4\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{AC}=2\vec{\imath}-4\vec{\jmath}$. Arătați că ortocentrul triunghiului ABC este punctul $O(0,0)$.

5p **6.** Arătați că $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)<\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}x,\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\setminus\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. Se consideră sistemul: $\begin{cases} x-2y+z=-4 \\ x+y+z=2 \\ mx+y-2z=-m \end{cases}$ și $A(m)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că det [A(0) – A(2)] = det A(-2).

5p **b)** Arătați că sistemul este compatibil pentru orice număr real *m*.

5p **c)** Determinați soluțiile (x, y, z) ale sistemului, care verifică relația: $x^{2024}+z^{2024}=y^{2025}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție: $x\circ y=\ln(e^x+e^y)$.

5p **a)** Arătați că $1\circ 1<2$.

5p **b)** Verificați dacă legea "∘" este comutativă și asociativă.

5p **c)** Rezolvați în R ecuația $\underbrace{x\circ x\circ \ldots\circ x}_{\text{de } n \text{ ori}}=x^{\mathrm{n}}+\ln n$, $n\in\mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^{|x|}}{x+1}$

5p **a)** Arătați că *f* este o funcție continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

5p **b)** Arătați că *f* nu este derivabilă în $x_0=0$.

5p **c)** Determinați $m\in\mathbb{R}$ asttfel încât ecuația *f*(*x*) = *m* să aibă cel puțin o soluție reală.

2. Se consideră funcțiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$, unde F este o primitivă pentru funcția f.

5p **a)** Determinați funcția f si calculați $\int\sqrt{x^2+1}\cdot f(x)dx$

5p **b)** Calculați $\int\frac{F(x)}{x^2+1}dx$

5p **c)** Arătați că orice primitivă a lui F este o funcție strict crescătoare care are un singur punct de inflexiune.

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat 2024, decembrie 2024
Proba E.c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare și de notare

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profil militar, specializarea matematică-informatică

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

5p	**1.** $z=\frac{1}{1+3i}+\frac{1}{1-3i}=\frac{1-3i}{1^2+3^2}+\frac{1+3i}{1^2+3^2}=\frac{(1-3i)+(1+3i)}{10}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$ $\bar{z}=\overline{\left(\frac{1}{5}\right)}=\frac{1}{5}\Rightarrow 3z+2\bar{z}+i=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}+i=1+i\Rightarrow \lvert 3z+2\bar{z}+i\rvert=\lvert 1+i\rvert=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$	**2 p** **3p**
5p	**2.** $G_f\cap OX=\{A,B\}\Rightarrow\Delta>0\Rightarrow 1-4m>0\Rightarrow m\in\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$ $x_{1,2}=\frac{-\mathrm{b}\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4m}}{2}$ $\lvert AB\rvert=\lvert x_1-x_2\rvert=\sqrt{1-4m}$ $\lvert AB\rvert=3\Rightarrow\sqrt{1-4m}=3\Rightarrow 1-4m=9\Rightarrow m=-2$	**2p** **3p**
5p	**3.** C.E. $2^{-x+1}-2>0\Rightarrow 2^{-x+1}>2\Rightarrow -x+1>1\Rightarrow x\in(-\infty,0)$. $2^{-x+1}-2=2^{x+2}$. Notăm 2^x cu $t, t>0$. Ecuația devine $\frac{2}{t}-2=4t\Rightarrow 2t^2+t-1=0$ cu $t_1=-1$ (F) pentru că $t>0$ și $t_2=\frac{1}{2}\Rightarrow 2^x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=-1(A)$ pentru că $x\in(-\infty,0)$.	**2p** **3p**
5p	**4.** $\sqrt{x}<5\Rightarrow x<25\Rightarrow A=\{0,1,\dots,24\}\Rightarrow$ avem 25 de cazuri posibile. Numerele naturale mai mici decât 25, prime cu 25 sunt 1, 2, ..., 24; mai puțin 5, 10, 15, 20. Avem 24 – 4 = 20 cazuri favorabile. Probabilitatea $=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$	**2p** **3p**
5p	**5.** $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}=(x_B-0)\vec{i}+(y_B-3)\vec{j}=-2\vec{i}-4\vec{j}\Rightarrow \mathrm{B}(-2,-1)$ $\overrightarrow{AC}=(x_C-x_A)\vec{i}+(y_C-y_A)\vec{j}=(x_C-0)\vec{i}+(y_C-3)\vec{j}=2\vec{i}-4\vec{j}\Rightarrow \mathrm{C}(2,-1)$ $y_B=y_C=-1\Rightarrow$ BC || O_x; A (0, 3) $\Rightarrow$ A$\in O_y\Rightarrow$ AO $\perp BC$ BO $\perp AC\Rightarrow m_{BO}\cdot m_{AC}=-1\Leftrightarrow\frac{y_B-y_O}{x_B-x_O}\cdot\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=-1\Leftrightarrow\frac{-1}{-2}\cdot\frac{3+1}{0-2}=-1(A)$ Din AO $\perp BC$ și BO $\perp AC$ se deduce că O este ortocentrul triunghiului ABC.	**2p** **3p**
5p	**6.** $tg\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{tg\frac{\pi}{4}+tgx}{1-tg\frac{\pi}{4}tg\,x}=\frac{1+tgx}{1-tgx}$ $tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{tg\frac{\pi}{4}-tgx}{1+tg\frac{\pi}{4}tg\,x}=\frac{1-tgx}{1+tgx}\Rightarrow tg\left(\frac{\pi}{4}+x\right)tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1+tgx}{1-tgx}\cdot\frac{1-tgx}{1+tgx}=1.$ $1<tg\,\frac{\pi}{4}+tg\,x\Leftrightarrow 1<1+tg\,x\Leftrightarrow tg\,x>0$ (A), pentru $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\backslash\{\frac{\pi}{4}\}$.	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

5p	**1.a)** $A(0)=\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&1&1\\0&1&-2\end{pmatrix}, A(2)=\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&1&1\\2&1&-2\end{pmatrix}$ $\Rightarrow A(0)-A(2)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-2&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\det[A(0)-A(2)]=\begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-2&0&0\end{vmatrix}=0$	**3p**

	$A(-2)=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & 1 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow \det A(-2)=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & 1 & -2\end{vmatrix}=-2+1+4+2-1-4=0$	**2p**
5p	**b)** $\det A(m)=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ m & 1 & -2\end{vmatrix}=-2+1-2m-m-1-4=-3m-6=-3(m+2)$ Pentru $m+2\neq 0 \Rightarrow \det A(m)\neq 0 \Rightarrow$ sistemul este compatibil determinat Pentru $m+2=0$ se arată că rang $A(m)=2=\operatorname{rang}\overline{A(m)} \Rightarrow$ sistemul este compatibil simplu nedeterminat $\Rightarrow$ Sistemul este compatibil, $\forall m\in\mathbb{R}$.	**2p** **3p**
5p	**c)** Rezolvăm sistemul $\begin{cases}x-2y+z=-4\\ x+y+z=2\\ mx+y-2z=-m\end{cases} \Rightarrow y=2 \Rightarrow x+z=0 \Rightarrow z=-x.$ Avem relațiile: $mx+2x=-m-2$ $x(m+2)=-(m+2)$ Pentru $m+2\neq 0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow z=1 \Rightarrow (x,y,z)=(-1,2,1)$, care nu verifică relația. Pentru $m+2=0 \Rightarrow (x,y,z)=(-\alpha,2,\alpha)=2,\alpha\in\mathbb{R}$. Pentru $m=-2$ avem $x^{2024}+z^{2024}=y^{2025} \Rightarrow 2\cdot\alpha^{2024}=2^{2025} \Rightarrow \alpha^{2024}=2^{2024} \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha=\pm 2 \Rightarrow$ Soluțiile cerute sunt $(-2,2,2)$ si $(2,2,-2)$	**3p** **2p**
5p	**2. a)** $1\circ 1=\ln(e^1+e^1)=\ln(2e)=\ln 2+\ln e=\ln 2+1$ $2<e \Rightarrow \ln 2<\ln e \Rightarrow 1+\ln 2<1+\ln e=2 \Rightarrow 1\circ 1<2$	**3p** **2p**
5p	**b)** $x\circ y=\ln(e^x+e^y)=\ln(e^y+e^x)=y\circ x,\forall x,y\in\mathbb{R} \Rightarrow$ legea este comutativă $(x\circ y)\circ z=\ln(e^{x\circ y}+e^z)=\ln\left(e^{\ln(e^x+e^y)}+e^z\right)=\ln(e^x+e^y+e^z)$ $x\circ(y\circ z)=\ln(e^x+e^{y\circ z})=\ln\left(e^x+e^{\ln(e^y+e^z)}\right)=\ln(e^x+e^y+e^z),\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ legea este asociativă.	**2p** **3p**
5p	**c)** $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{n\ ori}=\ln(e^x+e^x+\cdots+e^x)=\ln(n\cdot e^x)=\ln e^x+\ln n=x+\ln n,,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Ecuația devine: $x+\ln n=x^n+\ln n \Leftrightarrow x=x^n; n\in\mathbb{N}^*$. Pt. $n=1 \Rightarrow x=x$ cu soluția orice $x\in R$ Pt. $n\geqslant 2$ și $n=$ par, $x=x^n \Rightarrow x(x^{n-1}-1)=0$ cu soluțiile reale reale $x_1=0,x_2=1$ Pt. $n\geqslant 2$; $n=$ impar, $x=x^n \Rightarrow x(x^{n-1}-1)=0$ cu soluțiile reale $x_1=0,x_2=1,x_3=-1$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

5p	**1. a)** $f(x)=\begin{cases}\frac{e^{-x}}{x+1}, & x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)\\ \frac{e^x}{x+1} & ,x\in[0,\infty)\end{cases}$ f e continuă pe $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,\infty)$ fiind compunere de funcții elementare $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{e^{-x}}{x+1}=1$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^{x}}{x+1}=1$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=f(0) \Rightarrow f$ este continuă și în $x_0=0$	**2p** **3p**

5p	**b)** $f'(x)=\begin{cases}-\frac{(x+2)\cdot e^{-x}}{(x+1)^2}, & x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)\\ \frac{x\cdot e^{x}}{(x+1)^2} & ,x\in(0,\infty)\end{cases}$ $$f_s'(0)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}f'(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{-(x+2)\cdot e^{-x}}{(x+1)^2}=-2$$ $$f_d'(0)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f'(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x\cdot e^{x}}{(x+1)^2}=0$$ $f_s'(0)\neq f_d'(0)\Rightarrow f$ nu are derivată în $x_0=0\Rightarrow f$ nu este derivabilă în $x_0=0$.	2p 3p
5p	**c)** $f(x)=m\Leftrightarrow f(x)-m=0\Leftrightarrow g(x)=0$, unde $g:R\backslash\{-1\}\to R, g(x)=f(x)-m$. $\lim_{x\to-\infty}g(x)=-\infty; g(-2)=-e^2-m; \lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}g(x)=-\infty; \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}g(x)=\infty;$ $g(0)=1-m;\ \lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$ Folosind șirul lui Rolle (sau metoda grafică), deducem că ecuația $g(x)=0$ are soluții reale pentru $m\in(-\infty,-e^2]\cup[1,\infty)$.	2p 3p
5p	**2. a)** F e primitivă pentru $f\Rightarrow f(x)=F'(x)=\left[(x^2+1)\sqrt{x^2+1}\right]'=2x\sqrt{x^2+1}+$ $(x^2+1)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=3x\sqrt{x^2+1}$ $\int\sqrt{x^2+1}\cdot f(x)dx=\int\sqrt{x^2+1}\cdot3x\sqrt{x^2+1}\,dx=3\int x(x^2+1)dx=3\int x^3dx+$ $3\int x\,dx=\frac{3}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+C.$	2p 3p
5p	**b)** $I=\int\frac{F(x)}{x^2+1}dx=\int\sqrt{x^2+1}dx=\int x'\sqrt{x^2+1}dx=x\sqrt{x^2+1}-\int x\left(\sqrt{x^2+1}\right)'dx$ $=x\sqrt{x^2+1}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx=x\sqrt{x^2+1}-\int\frac{(x^2+1)-1}{\sqrt{x^2+1}}dx=x\sqrt{x^2+1}-\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}dx+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ $=x\sqrt{x^2+1}-\int\sqrt{x^2+1}\,dx+\ln\left\|x+\sqrt{x^2+1}\right\|$ $\Rightarrow\int\sqrt{x^2+1}dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left\|x+\sqrt{x^2+1}\right\|+C.$	2p 3p
5p	**c)** Dacă G este o primitivă oarecare a funcției F $\Rightarrow G$ este derivabilă și $G'(x)=F(x)=$ $(x^2+1)\sqrt{x^2+1}>0,\forall x\in R\Rightarrow G$ e funcție strict crescătoare $G''(x)=F'(x)=f(x)=3x\sqrt{x^2+1}$ $G''(x)=0\Rightarrow3x\sqrt{x^2+1}=0\Leftrightarrow x=0$ (soluție unică) pt $x<0$ avem că $G''(x)<0\Rightarrow G$ concavă pe $(-\infty,0)$ pt $x>0$ avem că $G''(x)>0\Rightarrow G$ convexă pe $(0,+\infty)\Rightarrow$ G are un unic punct de inflexiune.	2p 3p

Coordonator grup de lucru - M_mate-info:
- Bălănescu Daniela, inspector școlar pentru matematică

Grup de lucru – M_mate-info:

- Amihălăchioae Aniela, Colegiul Național Militar *A.I.Cuza* Constanța
- Borcilă Reghina - Roxana, Colegiul Național *Mircea cel Bătrân* Constanța
- Dermengiu Alina, Colegiul Național *Mircea cel Bătrân* Constanța
- Homentcovschi Cristina – Liana, Liceul Teoretic *Ovidius* Constanța
- Gurgui Adriana-Daniela, Liceul Teoretic *Ovidius* Constanța
- Ioan Alina, Liceul Tehnologic de Electrotehnică și Telecomunicații Constanța
- Petrea Cristina-Maria, Colegiul Național *Mircea cel Bătrân* Constanța

Bibliografie:

1. M. Andronache, D. Șerbănescu, M. Perianu, C. Ciupală, F. Dumitrel – *Matematică pentru examenul de bacalaureat – matematică-informatică*, Ed. Art Educațional, București, 2017.
2. M. Ganga – *Elemente de analiză matematică pentru clasa a XII-a*, Ed. Mathpress, Ploiești, 2000.
3. T Cohal, Gh. Iurea - *Probleme de matematică pentru clasa a XI-a* , Ed. Paralela 45, 2012
4. A. Zanoschi, Gh. Iurea, G.Popa, P. Răducanu, I. Șerdean - *Bacalaureat 2022– matematică, M_mate-info,* Ed. Paralela 45, 2022
5. Perianu M., Serbanescu D., Andronache M., Ciupala C., Ciolan E., Mihai G.,Matematica pentru Bacalaureat, M2, Editura ART Educațional, Bucuresti 2019
6. Nachila A., Burdusel C., Tion C., Gruia N, Savu I., Martinescu D., Ismailescu I., Ungureanu O. Todea I., Luca D., Tudoran V., Watkins J., Ghid de pregătire pentru examenul de Bacalaureat la matematica Editura Sigma, 2007
7. Dragomir A., Dragomir L., Bădescu O., Bîrchi I, Editura Bîrchi.
8. Teste de antrenament matematică, 2009, elaborate de Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar - Ministerul Educației, Cercetării și Inovării;

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, decembrie 2024
Proba E.c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profil real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profil militar, specializarea matematică-informatică

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

5p **1.** Fie ecuația $z^2+az+1=0,\ a\in\mathbf{C}$. Știind că $z_1=1+i$ este soluție a ecuației, determinați modulul lui a.

5p **2.** Determinați $m\in\mathbf{R}$ știind că distanța de la vârful parabolei de ecuație $y=x^2-2x+m$ la axa Ox este egală cu 1.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3^2 x+\log_3 9x=4$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,...,10\}$. Determinați numărul de submulțimi cu 3 elemente ale mulțimii A, submulțimi care conțin exact două numere impare.

5p **5.** Se consideră dreptele de ecuații $d_1: 2x+3y+1=0$, $d_2: 3x+y-2=0$ și $d_3: x+y+a=0$. Să se determine $a\in\mathbf{R}$ pentru care cele trei drepte sunt concurente.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=12$, $AC=16$ și $BC=20$. Arătați că $\dfrac{r}{R}=\dfrac{2}{5}$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC și R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m,n)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&m^2&n^2\\1&m&n\end{pmatrix}$ unde m și n sunt numere reale.

5p **a)** Să se arate că suma elementelor matricei $\left(A(-1,0)\right)^2$ este un număr natural.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care matricea $A(m,-1)$ este inversabilă.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $B_k\left(k,k^2\right), k\in\mathbf{Z}$. Să se arate că aria triunghiului determinat de punctele B_1, B_n, B_m este un număr natural, unde $m,n\in\mathbf{Z}\setminus\{1\},\ m\neq n$.

2. Pe mulțimea $M=[0;\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=\dfrac{x^2\cdot y+x\cdot y^2}{1+x\cdot y}$

5p **a)** Arătați că $1\circ 5=5$.

5p **b)** Arătați că $e=1$ este element neutru al legii de compoziție "$\circ$".

5p **c)** Determinați perechile (a,b) de numere naturale nenule, cu $a\leq b$ pentru care $\dfrac{1}{a}\circ\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{81}\cdot(a\circ b)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty,-2)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right)^{3x+1}$.

5p **c)** Demonstrați că pentru orice număr real m, $m\in\left(-\sqrt{2};-1\right)$, ecuația $f(x)=m$ are exact două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^{-x^2}\left(x^2+mx+1\right)$, $m\in\mathbf{R}$ și $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, o primitivă a funcției f.

5p **a)** Pentru $m=2024$ calculați $\int f(x)\cdot e^{x^2}dx$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{F(0)-F(-2x)}$.

5p **c)** Determinați $m\in\mathbf{R}$ astfel încât orice primitivă a funcției f să fie crescătoare pe $\mathbf{R}$.

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, decembrie 2024
Proba E.c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evalure și de notare

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profil militar, specializarea matematică-informatică

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

5p	**1.** $z_1 = 1+i$ soluție a ecuației $\Rightarrow (1+i)^2 + a(1+i) + 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1-2i}{1+i}$	**3p**
	$\lvert a\rvert = \left\lvert\frac{-1-2i}{1+i}\right\rvert = \frac{\lvert -1-2i\rvert}{\lvert 1+i\rvert} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$	**2p**
5p	**2.** $V(x_V, y_V) \Rightarrow d(V, Ox) = \lvert y_V\rvert$	**2p**
	$\lvert y_V\rvert = \left\lvert -\frac{\Delta}{4a}\right\rvert \Rightarrow \left\lvert -\frac{4-4m}{4}\right\rvert = 1 \Rightarrow m \in \{0, 2\}$	**3p**
5p	**3.** $\log_3^2 x + \log_3 9 + \log_3 x = 4$. Notăm $\log_3 x = t \Rightarrow t^2 + t = 2$	**2p**
	$\Rightarrow t_1 = 1;\ t_2 = -2 \Rightarrow x_1 = 3;\ x_2 = \frac{1}{9}$, care convin.	**3p**
5p	**4.** Alegem 2 numere impare din cele 5 numere impare în $C_5^2 = 10$ moduri	**2p**
	Alegem un număr par din cele 5 numere pare în 5 moduri	**1p**
	Sunt 50 de submulțimi	**2p**
5p	**5.** $\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ 3x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1$ și $y = -1$. Avem $d_1 \cap d_2 = \{A(1;-1)\}$.	**3p**
	Atunci, dacă $A \in d_3 \Rightarrow 1 - 1 + a = 0 \Rightarrow a = 0$.	**2p**
5p	**6.** $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ este dreptunghic în $A \Rightarrow R = \frac{BC}{2} = 10$.	**2p**
	$P_{\Delta ABC} = 48$ și $A_{\Delta ABC} = \frac{12 \cdot 16}{2} = 96 \Rightarrow r = \frac{96}{24} = 4$.	**2p**
	$\frac{r}{R} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.	**1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

5p	**1. a)** $A(-1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A(-1,0))^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	**3p**
	Suma elementelor $3+1+1+2+2+1+0+0+1 = 11 \in \mathbf{N}$	**2p**
5p	**b)** Matricea $A(m,-1)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(m,-1)) \neq 0$	**1p**
	$A(m,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m^2 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(m,-1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m^2 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = 2(1-m^2)$	**2p**
	$\det(A(m,-1)) \neq 0 \Rightarrow 2(1-m^2) \neq 0 \Rightarrow m \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$	**2p**
5p	**c)** $B_1(1,1), B_n(n,n^2), B_m(m,m^2), A_{\Delta B_1 B_n B_m} = \frac{\lvert\Delta\rvert}{2}$	**1p**
	$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ n & n^2 & 1 \\ m & m^2 & 1 \end{vmatrix} = (m-1)(n-1)(m-n)$	

	$m,n\in\mathbf{Z}\setminus\{1\}, m\neq n\Rightarrow \Delta\in\mathbf{Z}^*$ Dacă m și n au aceeași paritate $\Rightarrow m-n$ este par $\Rightarrow \Delta$ este par Dacă m și n au parități diferite $\Rightarrow m-1$ și $n-1$ au parități diferite $\Rightarrow \Delta$ este par $\Rightarrow \lvert\Delta\rvert \vdots 2 \Rightarrow A_{\Delta B_1B_nB_m}=\dfrac{\lvert\Delta\rvert}{2}\in\mathbf{N}$	2p 2p
5p	**2. a)** $1\circ 5=\dfrac{1^2\cdot 5+1\cdot 5^2}{1+1\cdot 5}=$ $1\circ 5=\dfrac{30}{6}=5$	2p 3p
5p	**b)** $x\circ 1=\dfrac{x^2\cdot 1+x\cdot 1^2}{1+x\cdot 1}=\dfrac{x\cdot(x+1)}{1+x}=x,\ \forall x\in M$ $1\circ x=\dfrac{1^2\cdot x+1\cdot x^2}{1+1\cdot x}=\dfrac{x\cdot(1+x)}{1+x}=x,\ \forall x\in M$ Deci, $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziție "$\circ$".	2p 2p 1p
5p	**c)** $\dfrac{1}{a}\circ\dfrac{1}{b}=\dfrac{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b^2}}{1+\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}=\dfrac{a+b}{ab\cdot(ab+1)}$; $\dfrac{1}{81}\cdot(a\circ b)=\dfrac{1}{81}\cdot\dfrac{ab\cdot(a+b)}{1+ab}$, $\forall a,b\in\mathbf{N}^*$ $a^2\cdot b^2=81$ și, cum a și b sunt numere naturale nenule, cu $a\leq b$, obținem perechile $(1;9)$ și $(3;3)$.	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

5p	**1. a)** $f'(x)=\dfrac{x'\cdot\sqrt{x^2+2x+2}-x\cdot\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)^2}=\dfrac{x+2}{\left(x^2+2x+2\right)\cdot\sqrt{x^2+2x+2}}, x\in\mathbf{R}$ $f'(x)<0,\forall x\in(-\infty,-2)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $\left(-\infty,-2\right)$	3p 2p
5p	**b)** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right)^{3x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2+2x+2}\right)^{\frac{3x+1}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{-2x-2}{x^2+2x+2}\right)^{\frac{x^2+2x+2}{-2x-2}}\right)^{\frac{-2x-2}{x^2+2x+2}\cdot\frac{3x+1}{2}}=$ $=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(-2x-2)\cdot(3x+1)}{2\cdot(x^2+2x+2)}}=e^{-3}$.	1p 2p 2p
5p	**c)** $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=f(x)-m$ este continuă și derivabilă pe $\mathbf{R}$ și $g'(x)=f'(x),\forall x\in\mathbf{R}$, deci g este strict descrescătoare pe $(-\infty,-2)$ și strict crescătoare pe $\left(-2,\infty\right)$. Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-1-m>0$; $g(-2)=-\sqrt{2}-m<0$ și $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=1-m>0$, pentru orice $m\in\left(-\sqrt{2},-1\right)$, ecuația $f(x)=m$ are exact două soluții reale distincte.	2p 3p
5p	**2.a)** $\int f(x)\cdot e^{x^2}dx=\int e^{-x^2}\cdot\left(x^2+2024x+1\right)\cdot e^{x^2}dx=\int\left(x^2+2024x+1\right)dx=$ $\int x^2dx+\int 2024xdx+\int dx=\dfrac{x^3}{3}+2024\dfrac{x^2}{2}+x+C=\dfrac{x^3}{3}+1012x^2+x+C$	2p 3p
5p	**b)** F derivabilă pe $\mathbf{R}$ și $F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbf{R}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{F(0)-F(-2x)}\overset{\binom{0}{0}}{\underset{l'H}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F'(x)}{2F'(-2x)}=$	1p 2p

	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{2f(-2x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}\cdot\left(x^2+mx+1\right)}{2e^{-4x^2}\cdot\left(4x^2-2mx+1\right)}=\frac{1}{2}$	**2p**
5p	**c)** Fie $G:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, o primitivă a funcției f $\Rightarrow G$ derivabilă pe $\mathbf{R}$ și $G^{'}(x)=f(x),\forall x\in\mathbf{R}$ Dacă $f(x)\geq 0,\forall x\in\mathbf{R}\Rightarrow G^{'}(x)\geq 0,\forall x\in\mathbf{R}\Rightarrow G$ crescătoare pe $\mathbf{R}$ Cum $e^{-x^2}>0,\forall x\in\mathbf{R}\Rightarrow e^{-x^2}\cdot\left(x^2+mx+1\right)\geq 0,\forall x\in\mathbf{R}\Leftrightarrow x^2+mx+1\geq 0,\forall x\in\mathbf{R}\Leftrightarrow$ $a>0$ și $\Delta\leq 0\Rightarrow m^2-4\leq 0\Rightarrow m\in\left[-2,2\right]$	**1p** **1p** **3p**

Coordonator grup de lucru - M_mate-info:
- Bălănescu Daniela, inspector școlar pentru matematică

Grup de lucru – M_mate-info:

- Amihălăchioae Aniela, Colegiul Național Militar *A.I.Cuza* Constanța
- Borcilă Reghina - Roxana, Colegiul Național *Mircea cel Bătrân* Constanța
- Dermengiu Alina, Colegiul Național *Mircea cel Bătrân* Constanța
- Homentcovschi Cristina – Liana, Liceul Teoretic *Ovidius* Constanța
- Gurgui Adriana-Daniela, Liceul Teoretic *Ovidius* Constanța
- Ioan Alina, Liceul Tehnologic de Electrotehnică și Telecomunicații Constanța
- Petrea Cristina-Maria, Colegiul Național *Mircea cel Bătrân* Constanța

Bibliografie:

1. M. Andronache, D. Șerbănescu, M. Perianu, C. Ciupală, F. Dumitrel – *Matematică pentru examenul de bacalaureat – matematică-informatică*, Ed. Art Educațional, București, 2017.
2. M. Ganga – *Elemente de analiză matematică pentru clasa a XII-a*, Ed. Mathpress, Ploiești, 2000.
3. T Cohal, Gh. Iurea - *Probleme de matematică pentru clasa a XI-a* , Ed. Paralela 45, 2012
4. A. Zanoschi, Gh. Iurea, G.Popa, P. Răducanu, I. Șerdean - *Bacalaureat 2022– matematică, M_mate-info,* Ed. Paralela 45, 2022
5. Perianu M., Serbanescu D., Andronache M., Ciupala C., Ciolan E., Mihai G.,Matematica pentru Bacalaureat, M2, Editura ART Educațional, Bucuresti 2019
6. Nachila A., Burdusel C., Tion C., Gruia N, Savu I., Martinescu D., Ismailescu I., Ungureanu O. Todea I., Luca D., Tudoran V., Watkins J., Ghid de pregătire pentru examenul de Bacalaureat la matematica Editura Sigma, 2007
7. Dragomir A., Dragomir L., Bădescu O., Bîrchi I, Editura Bîrchi.
8. Teste de antrenament matematică, 2009, elaborate de Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar - Ministerul Educației, Cercetării și Inovării;

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, decembrie 2024
Proba E.c)
Matematică *M_ mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică- informatică
Filiera vocațională, profil militar, specializarea matematică-informatică

SUBIECTUL I (30 puncte)

5p **1.** Arătaţi că numărul $(1-i)^{2024}$ este real .

5p **2.** Aflaţi $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $2x^2-5x-3<0$.

5p **3.** Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $5^x \cdot 2^{1-x} = 3^{x+1}$.

5p **4.** Câte funcţii $f:\{0,1,2,3,4\} \to \{0,1,2\}$ au proprietatea $f(1)\cdot f(2)=0$?

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate considerăm punctele $A(3,2), B(0,1), C(4,-3)$. Determinaţi ecuaţia înălţimii din A a triunghiului ABC.

5p **6.** Fie a şi b numere reale astfel încât $sin\ a - sin\ b = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ şi $cos\ a - cos\ b = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Demonstraţi că $cos(a-b)=0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. Se consideră mulțimea matricelor de forma $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}, x \in \mathbf{C}$.

5p **a)** Calculați $(A(2))^2 - 2^2 \cdot A(2)$;

5p **b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y) = A(2xy), \forall x, y \in \mathbf{C}$;

5p **c)** Determinați $a \in \mathbf{C}$ astfel încât $A(a)\cdot A(1)\cdot A(x) = A(x), \forall x \in \mathbf{C}$.

2. Pe mulțimea $\mathbf{R}$, se consideră legea de compoziție $x \circ y = 2xy + 2x + 2y + 1$.

5p **a)** Aflați $k \in \mathbf{Z}$ astfel încât $x \circ y = 2(x+1)(y+1) + k, \forall x.y \in \mathbf{R}$;

5p **b)** Arătați că există $a \in \mathbf{Z}$ pentru care $x \circ a = a = a \circ x, \forall x \in \mathbf{R}$.

5p **c)** Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația $x \circ x \circ x \circ x = 1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln\frac{1+x}{x}$

5p **a)** Să se arate că $f'(x) = -\frac{1}{x(x+1)}$

5p **b)** Determinați asimpotele graficului funcției f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-f'(1) - f'(2) - \ldots - f'(n)\right)^n$

2. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = \left(ax^2 + x + a\right)e^x, a \in \mathbf{R}$, iar $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o primitivă a funcției f.

5p **a)** Pentru $a=0$ determinați numerele reale m și n știind că $F_0:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, F_0(x) = (mx+n)e^x$ este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Aflați valoarea lui a pentru care $\lim\limits_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x^2-4} = -\frac{3}{4}e^2$.

5p **c)** Determinați valorile lui a știind că funcția F este crescătoare.

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat 2024, decembrie 2024
Proba E.c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare și de notare

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profil militar, specializarea matematică-informatică

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

5p	1. $(1-i)^2=-2i$, $(1-i)^{2024}=[\,(1-i)^2]^{\,1012}=2^{1012}\cdot i^{1012}$ $i^{1012}=[(i^4)]^{253}=1\Rightarrow(1-i)^{2024}=2^{1012}$ care este real	**3p** **2p**
5p	2. $2x^2-5x-3=0\Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{1}{2},3\right\}$ Din tabelul de semn al funcţiei $f(x)=2x^2-5x-3, f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, deducem că $2x^2-5x-3<0\ \Leftrightarrow x\in\left(-\frac{1}{2},3\right)$, dar $x\in\mathbb{Z}$, deci $x\in\{0,1,2\}$	**2p** **3p**
5p	3. Din proprietăţile puterilor $5^x\cdot\frac{2}{2^x}=3^x\cdot3\Leftrightarrow\ 5^x\cdot2=6^x\cdot3$ Atunci $\left(\frac{5}{6}\right)^x=\frac{3}{2}\ \Leftrightarrow x=log_{\frac{5}{6}}\frac{3}{2}$	**2p** **3p**
5p	4. Cazul 1: Dacă $f(1)=0$, iar $f(0),f(2),f(3),f(4)\in\{0,1,2\}$ avem $3^4=81$ de funcţii. Cazul 2: Dacă $f(1)\in\{1,2\}$, $f(2)=0$, iar $f(0),f(3),f(4)\in\{0,1,2\}$ avem $2\cdot3^3=54$ de funcţii. Astfel că în total avem 135 de funcţii.	**2p** **3p**
5p	5. Fie înălţimea $AD, D\in BC$. Atunci $m_{BC}\cdot m_{AD}=-1,\ m_{BC}=-1\Longrightarrow m_{AD}=1$ Ecuaţia înălţimii AD, care trece prin punctul A şi are panta 1, este $y=x-1$	**3p** **2p**
5p	6. Prin ridicarea la pătrat a celor două egalităţi $sin^2a-2sin\,a\cdot sin\,b+sin^2b=\frac{4-2\sqrt{3}}{4}$ şi $cos^2a-2cos\,a\cdot cos\,b+cos^2b=\frac{4+2\sqrt{3}}{4}$ Prin adunarea acestor două egalităţi $\Longrightarrow 2-2cos\,(a-b)=2\Leftrightarrow cos(a-b)=0$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

5p	**1.a)** $\left(A(2)\right)^2=A(8)$ $A(8)-4A(2)=O_3$.	**3p** **2p**
5p	**b)** $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}x&0&x\\0&0&0\\x&0&x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y&0&y\\0&0&0\\y&0&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2xy&0&2xy\\0&0&0\\2xy&0&2xy\end{pmatrix}$ $x,y\in\mathbf{C}\Rightarrow 2xy\in\mathbf{C}$ și deci $\begin{pmatrix}2xy&0&2xy\\0&0&0\\2xy&0&2xy\end{pmatrix}=A(2xy)$	**3p** **2p**
5p	**c)** Din b) și din asociativitatea înmulțirii matricelor: $A(a)\cdot A(1)=A(2a)$ și $A(2a)\cdot A(x)=A(4ax),\forall x\in\mathbf{C}$ $A(4ax)=A(x)\Leftrightarrow x(4a-1)=0,\forall x\in\mathbf{C}$ deci $a=\dfrac{1}{4}\in\mathbf{C}$	**2p** **3p**
5p	**2. a)** $2(x+1)(y+1)+k=2xy+2x+2y+2+k$ $2xy+2x+2y+2+k=2xy+2x+2y+1\Rightarrow k=-1\in\mathbf{Z}$	**2p** **3p**
5p	**b)** Legea ”$\circ$” este comutativă: $a\circ x=x\circ a,\forall a,x\in\mathbf{C}$ $x\circ a=a\Leftrightarrow x\circ y=2(x+1)(a+1)-1=a\Leftrightarrow(a+1)(2x+2-1)=0,\forall x\in\mathbf{R}\Leftrightarrow a=-1\in\mathbf{Z}$	**2p** **3p**
5p	**c)** Asociativitatea legii ”$\circ$” $x\circ x=2(x+1)^2-1,\ (x\circ x)\circ x=2^2(x+1)^3-1,\ (x\circ x\circ x)\circ x=2^3(x+1)^4-1$ $2^3(x+1)^4-1=1\Rightarrow x\in\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}-1,-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-1\right\}$	**3p** **2p**

5p	**1. a)** $f'(x)=\frac{1}{\frac{x+1}{x}}\cdot\left(\frac{x+1}{x}\right)'=$ $=\frac{x}{x+1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$ $=-\frac{1}{x(x+1)}$	**2p** **3p**
5p	**b)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln\frac{x+1}{x}=\ln\frac{1}{0_+}=\infty$ Dreapta $x=0$ este asimptotă verticală. Asimptota orizontală : $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\frac{x+1}{x}=\ln 1=0$ deci $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$. Nu admite asimptote oblice.	**2p** **3p**
5p	**c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left[-f'(1)-f'(2)-\ldots-f'(n)\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right]^n=$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=$ $=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n}{n+1}}=e^{-1}$	**3p** **2p**
5p	**2. a)** Pentru $a=0$,$f(x)=xe^x$. Dacă F_0 este primitivă a lui f , atunci F_0 este derivabilă și $F_0'=f$ $F_0'(x)=(mx+n)'e^x+(mx+n)(e^x)'=(mx+m+n)e^x$ $(mx+m+n)e^x=xe^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $m=1, m+n=0$, $n=-1$	**3p** **2p**
5p	**b)** $\lim\limits_{x\to z}\frac{F(x)-F(2)}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}=$ $=F'(2)\cdot\frac{1}{4}=f(2)\cdot\frac{1}{4}=(5a+2)e^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{5a+2}{4}e^2$ $\frac{5a+2}{4}e^2=-\frac{3}{4}e^2, a=-1$.	**2p** **3p**
5p	**c))** F crescătoare pe $\mathbb{R}$, $F'(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ și cum $F'=f$,avem $f(x)\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$, $\left(ax^2+x+a\right)e^x\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$ și cum $e^x>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$, avem că $ax^2+x+a\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}1-4a^2\leq 0\\ a>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\\ a\in(0;\infty)\end{cases}$ $a\in(0;\frac{1}{2}]$	**3p** **2p**

Coordonator grup de lucru - M_mate-info:
- Bălănescu Daniela, inspector școlar pentru matematică

Grup de lucru – M_mate-info:

- Amihălăchioae Aniela, Colegiul Național Militar *A.I.Cuza* Constanța
- Borcilă Reghina - Roxana, Colegiul Național *Mircea cel Bătrân* Constanța
- Dermengiu Alina, Colegiul Național *Mircea cel Bătrân* Constanța
- Homentcovschi Cristina – Liana, Liceul Teoretic *Ovidius* Constanța
- Gurgui Adriana-Daniela, Liceul Teoretic *Ovidius* Constanța
- Ioan Alina, Liceul Tehnologic de Electrotehnică și Telecomunicații Constanța
- Petrea Cristina-Maria, Colegiul Național *Mircea cel Bătrân* Constanța

Bibliografie:

1. M. Andronache, D. Șerbănescu, M. Perianu, C. Ciupală, F. Dumitrel – *Matematică pentru examenul de bacalaureat – matematică-informatică*, Ed. Art Educațional, București, 2017.
2. M. Ganga – *Elemente de analiză matematică pentru clasa a XII-a*, Ed. Mathpress, Ploiești, 2000.
3. T Cohal, Gh. Iurea - *Probleme de matematică pentru clasa a XI-a* , Ed. Paralela 45, 2012
4. A. Zanoschi, Gh. Iurea, G.Popa, P. Răducanu, I. Șerdean - *Bacalaureat 2022– matematică, M_mate-info,* Ed. Paralela 45, 2022
5. Perianu M., Serbanescu D., Andronache M., Ciupala C., Ciolan E., Mihai G.,Matematica pentru Bacalaureat, M2, Editura ART Educațional, Bucuresti 2019
6. Nachila A., Burdusel C., Tion C., Gruia N, Savu I., Martinescu D., Ismailescu I., Ungureanu O. Todea I., Luca D., Tudoran V., Watkins J., Ghid de pregătire pentru examenul de Bacalaureat la matematica Editura Sigma, 2007
7. Dragomir A., Dragomir L., Bădescu O., Bîrchi I, Editura Bîrchi.
8. Teste de antrenament matematică, 2009, elaborate de Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar - Ministerul Educației, Cercetării și Inovării;

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, decembrie 2024
Proba E.c)
Matematică M_pedagogic

Varianta 1

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

SUBIECTUL I (30 puncte)

5p **1.** Arătați că numărul $a=\left(5+\sqrt{3}+\frac{22}{5+\sqrt{3}}\right)^2$ este pătrat perfect.

5p **2.** Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(x+\sqrt{2}\right)^2$. Arătați că $f(a)\ge 4$, $\forall a\in\mathbf{R}$.

5p **3.** Aflați valorile lui $a\in\mathbf{R}$ pentru care ecuația $\sqrt{x^2-ax+3a^2}=1$ are o soluție egală cu 1.

5p **4.** Care este probabilitatea, ca alegând o bilă dintr-o urnă cu bile numerotate de la 10 la 99, să extragem o bilă inscripționată cu un număr cub perfect ?

5p **5.** Fie pătratul $ABCD$, cu latura $AB=10$, punctul M mijlocul laturii AD. Aflați lungimea distanței de la vârful C la MB.

5p **6.** Arătați că $\left(\sin 30^0+\cos 30^0\right)^2-\sin 60^0=1$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție asociativă $x*y=x+y+\frac{xy}{2},\forall x,y\in\mathbf{R}$

5p 1) Arătați că $\left(\frac{1}{2}\right)*\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{12}$.

5p 2) Arătați că $x*y=\frac{(x+2)(y+2)}{2}-2,\forall x,y\in\mathbf{R}$.

5p 3) Arătați că $e=0$ este element neutru pentru legea de compoziție dată.

5p 4) Fie mulțimea $P=\{2n \mid n\in\mathbf{Z}\}$. Arătați că pentru orice $x,y\in P$ avem $x*y\in P$.

5p 5) Aflați numărul rațional x, știind că $x*x*x=52$.

5p 6) Aflați câte perechi de numere naturale $(m;n)$ verifică relația $m*n=12$.

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

Fie matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

5p 1) Arătați că $\det\left(A-I_2\right)=-1$.

5p 2) Arătați că $A^2-A={}^tA$, unde am notat cu ${}^tA$ transpusa matricei A.

5p 3) Arătați că $A+A^2+A^3+A^4=15\cdot A$.

5p 4) Determinați numărul real x știind că acesta verifică relația $\det\left(A+xI_2\right)=10$.

5p 5) Arătați că suma elementelor matricei $C=\begin{pmatrix}a&b\\0&0\end{pmatrix}\cdot A\cdot\begin{pmatrix}a&0\\b&0\end{pmatrix}$ este un pătrat perfect pentru orice numere a,b întregi .

5p 6) Determinați numerele raționale m,n, știind că $\begin{pmatrix}2&3\\m&n\end{pmatrix}\cdot A=A\cdot\begin{pmatrix}2&3\\m&n\end{pmatrix}$.

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, decembrie 2024
Proba E.c)
Matematică M_pedagogic
Barem de evaluare și de notare

Varianta 1

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

5p	**1.**Calculul $\frac{22}{5+\sqrt{3}}=5-\sqrt{3}$ $a=100=10^2$ este pătrat perfect	**2p** **3p**
5p	**2.** Calculul $f(a)=2a^2+4, a^2\geq 0$ $f(a)\geq 4, \forall a\in \mathbf{R}$	**3p** **2p**
5p	**3.** Ecuația $\sqrt{1^2-a+3a^2}=1, 3a^2-a=0$ cu soluția $a\in\left\{0;\frac{1}{3}\right\}$ *care verifică ecuația*	**3p** **2p**
5p	**4.** Numărul de cazuri posibile este 90 Numărul de cazuri favorabile 2, $P=\frac{1}{45}$	**2p** **3p**
5p	**5.** $A_{CMB}=A_{ABCD}-A_{MDC}-A_{MAB}=50$ $BM=\sqrt{125}, A_{CMB}=\frac{CE\cdot MB}{2}$, $CE=4\sqrt{5}$, *CE este înalțimea triunghiului BMC.*	**2p** **3p**
5p	**6.** $\left(\sin 30^0+\cos 30^0\right)^2=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1+\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=1$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

5p	**1.** Calculul $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=\frac{5}{6}+\frac{1}{12}$ calculul $\frac{5}{6}+\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$	**3p** **2p**
5p	**2.** Calculul $x*y=\frac{(x+2)(y+2)}{2}-2=\frac{xy+2x+2y+4-4}{2}$ Finalizare	**3p** **2p**
5p	**3.** Verificarea $x*0=x, 0*\mathrm{x}=\mathrm{x}, \forall x\in \mathbf{R}$ Finalizare	**3p** **2p**
5p	**4.** Dacă $x,y\in P\Rightarrow x=2m, y=2n, x*y=2m+2n+2mn, m,n\in \mathbf{Z}$ $x*y=2(m+n+mn)\in P$	**3p** **2p**
5p	**5.** Avem $x*x=\frac{(x+2)^2}{2}-2\Rightarrow x*x*x=\frac{(x+2)^3}{4}-2$, $\frac{(x+2)^3}{4}-2=52\Rightarrow (x+2)^3=6^3, x=4$	**2p** **3p**
5p	**6.** Ecuația $m*n=12\Leftrightarrow (m+2)(n+2)=28, m,n\in \mathbf{N}$ $D_{28}=\{1,2,7,14,28\}\Rightarrow (m,n)\in\{(0,12),(2,5),(5,2)(12,0)\}$, *deci 4 perechi*	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

5p	**1.** Avem $\det\left(A-I_2\right)=\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}$,	**3p**
	calculul $\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=0-(-1)(-1)=-1$	**2p**
5p	**2.** Calculul $A^2-A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$	**3p**
	${}^tA=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, finalizare	**2p**
5p	**3.** Avem că $A+A^2+A^3+A^4=(1+2+4+8)\cdot A$	**3p**
	finalizare	**2p**
5p	**4.** Calculul $\det\left(A+xI_2\right)=\begin{vmatrix}1+x & -1\\ -1 & 1+x\end{vmatrix}=\left(1+x\right)^2-1$	**3p**
	Ecuația $\left(1+x\right)^2-1=10\Rightarrow\left(1+x\right)^2=11$ cu soluțiile $x\in\left\{-\sqrt{11}-1,\sqrt{11}-1\right\}$	**2p**
5p	**5.** Calculul $\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot A\cdot\begin{pmatrix}a & 0\\ b & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(a-b\right)^2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	**3p**
	suma elementelor este $\left(a-b\right)^2$, $\forall a,b\in\mathbf{Z}$, *pătrat perfect*	**2p**
5p	**6.** Calculul $\begin{pmatrix}2 & 3\\ m & n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ m & n\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 1\\ m-n & -m+n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-m & 3-n\\ -2+m & -3+n\end{pmatrix}$	**3p**
	de unde obținem $m=3,\mathrm{n}=2$ care verifică	**2p**

Coordonator grup de lucru – M_ pedagogic:
- Bălănescu Daniela, inspector școlar pentru matematică

Grup de lucru – M_ pedagogic
- Brînză Arabela-Adriana, Școala Gimnazială nr. 2 Cernavodă
- Cărnaru Alexandru, Colegiul Național Pedagogic *Constantin Brătescu* Constanța
- Jitaru Cristina - Fănița, Liceul cu Program Sportiv *Nicolae Rotaru* Constanța
- Zamfirescu Lavinia-Mihaela, Liceul Teoretic *Traian* Constanța

Bibliografie:

1. Matematică – Bacalaureat 2019,Mihai Monea, Steluţa Monea, Editura Paralela 45;
2. Matematică – Bacalaureat 2009, Coordonatori: Gabriela Constantinescu, Cătălin Zîrnă, Editura Crizon;
3. Bacalaureat Matematică – Ghid de pregătire 2019, Rodica Reşiga, Camelia Maria Magdaş,Editura Delfin;
4. Matematică – Bacalaureat 2020. Ghid de pregătire pentru examene, Coordonatori: Gabriela Constantinescu, Cătălin Zîrnă, Editura Crizon;
5. Teste de antrenament 2020 – 2021 - 2022, https://rocnee.eu
6. Manual pentru clasa a X-a M3, Coordonatori Dan Brânzei, Gina Caba, Editura Teora, 2003
7. Manual pentru clasa a IX-a, Coordonatori Marius Burtea, Georgeta Burtea, Editura Carmis , 2018
8. Bacalaureat 2002-Teste de matematică, Coordonatori Ion Savu, Mircea Becheanu, Editura Humanitas Educațional, 2001

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, decembrie 2024
Proba E.c)
Matematică *M_pedagogic*

Varianta 2

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

SUBIECTUL I (30 puncte)

5p **1.** Arătați că $\left(\sqrt{8}+1\right)\left(2\sqrt{2}-1\right)-\sqrt{36}=1$.
5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție al graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=5x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=5+2x$.
5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\sqrt{x^2+6x}=x$.
5p **4.** După o ieftinire cu 10% prețul unui obiect este 540 de lei. Determinați prețul inițial al obiectului.
5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(2;1), B(3;4) și C, astfel încât punctul A este mijlocul segmentului BC. Arătați că triunghiului A0C este dreptunghic isoscel.
5p **6.** Determinați perimetrul pătratului ABCD, știind că diagonala AC=$2\sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție
$x*\mathrm{y}=2xy-4x-4y+7,\ \forall \mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathbb{R}$.

5p **1.** Arătați că $(-2)*2=-1$.
5p **2.** Demonstrați că legea de compoziție " $*$ " este comutativă.
5p **3.** Demonstrați că $x*y=2(x-2)(y-2)-1,\ \forall \mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathbb{R}$.
5p **4.** Determinați numerele reale *x* pentru care $(x+1)*x=3$.
5p **5.** Aflați numerele reale *x* pentru care $4^x*2^x=-1$.
5p **6.** Determinați valorile reale pozitive ale lui *x* pentru care $\frac{1}{x}*x\le -1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

5p **1.** Arătați că $detA=9$.
5p **2.** Demonstrați că $(A-I_2)(A-9I_2)=O_2$.
5p **3.** Considerăm matricea $B=A-5I_2$. Demonstrați că suma elementelor matricei $B\cdot B$ este divizibilă cu 2^5.
5p **4.** Determinați numerele reale *a*, pentru care $det(aA+I_2)=0$.
5p **5.** Determinați numerele reale *x* și *y*, pentru care $AM=MA$, unde $M=\begin{pmatrix}x&1\\y&2\end{pmatrix}$.
5p **6.** Demonstrați că $\det(A+xI_2)+\det(A-xI_2)\ge 18$, pentru orice *x* real.

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, Decembrie 2024
Proba E.c)
Matematică *M_pedagogic*
Barem de evaluare și de notare

Varianta 2

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

5p	1. $(\sqrt{8}+1)(2\sqrt{2}-1)-\sqrt{36}=(2\sqrt{2})^2-1^2-6$ a. $=8-1-6=1$.	**3p** **2p**
5p	2. $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases} \Rightarrow f(x)=g(x) \Leftrightarrow 5x-1=5+2x$ $3x=6y \Rightarrow x=2 \Rightarrow f(2)=9 \Rightarrow P(2{,}9)$.	**2p** **3p**
5p	3. $\left.\begin{array}{r} x^2+6x\geq 0 \Rightarrow x\in(-\infty;-6]\cup[0;+\infty) \\ x\geq 0 \Rightarrow x\in[0;+\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow x\in[0;+\infty)$ $\left(\sqrt{x^2+6x}\right)^2=x^2 \Leftrightarrow x^2+6x=x^2 \Rightarrow x=0\in[0;+\infty)$.	**2p** **3p**
5p	4. $x-$ prețul inițial: $x-\frac{10}{100}x=540 \Rightarrow x-\frac{x}{10}=540$ $10x-x=5400 \Rightarrow 9x=5400 \Rightarrow x=600$ lei.	**3p** **2p**
5p	1. $x_A=\frac{x_B+x_C}{2} \Rightarrow x_C=1;\ y_A=\frac{y_B+y_C}{2} \Rightarrow y_C=-2 \Rightarrow C(1,-2)$ $AO=CO=\sqrt{5} \Rightarrow \Delta AOC\ isoscel$ $AC=\sqrt{10};\ AC^2=AO^2+CO^2 \Rightarrow \Delta AOC\ dreptunghic$.	**2p** **3p**
5p	2. $AC=l\sqrt{2} \Rightarrow l=2$ $P=4l \Rightarrow P=8$.	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

5p	**1.** $(-2)*2=2\cdot(-2)\cdot 2-4\cdot(-2)-4\cdot 2+7=$ $=-8+8-8+7=-1$.	**3p** **2p**
5p	**2.** $y*x=2yx-4y-4x+7=$ $=2xy-4x-4y+7=x*y \Rightarrow$ legea de compoziție " $*$ " este comutativă.	**2p** **3p**
5p	**3.** $x*y=2xy-4x-4y+8-1=2x(y-2)-4(y-2)-1=$ $=(y-2)(2x-4)-1=2(x-2)(y-2)-1$	**3p** **2p**
5p	**4.** $(x+1)*x=2(x+1-2)(x-2)-1=3 \Leftrightarrow 2x^2-4x-2x+4-1=3$ $2x^2-6x=0 \Rightarrow x_1=0, x_2=3$.	**3p** **2p**
5p	**5.** $4^x*2^x=-1 \Rightarrow 2(2^{2x}-2)(2^x-2)=0$ $2^{2x}-2=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ $2^x-2=0 \Rightarrow x=1$.	**2p** **3p**
5p	**6.** $2\cdot\frac{1}{x}\cdot x-4\cdot\frac{1}{x}-4x-7\leq -1 \Rightarrow -2x^2+5x-2\leq 0$ $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]\cup[2,+\infty)$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

5p	**1.** $detA=\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=5\cdot 5-4\cdot 4=$ $=25-16=9$.	**3p** **2p**
5p	**2.** $\left[\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix} -16+16 & 16-16 \\ -16+16 & 16-16 \end{pmatrix}=O_2$.	**3p** **2p**
5p	**3.** $B=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ $B\cdot B=\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow S=32 \vdots 2^5$.	**2p** **3p**
5p	**4.** $aA-I_2=\begin{pmatrix} 5a-1 & 4a \\ 4a & 5a-1 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 5a-1 & 4a \\ 4a & 5a-1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 9a^2-10a+1=0 \Rightarrow x_1=1, x_2=\frac{1}{9}$.	**2p** **3p**

5p	**5.** $\begin{pmatrix}5 & 4\\4 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & 1\\y & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & 1\\y & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 4\\4 & 5\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}5x+4y & 5+8\\4x+5y & 4+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5x+4 & 4x+5\\5y+8 & 4y+10\end{pmatrix}$ $x=2; y=1.$	**3p** **2p**
5p	**6.** $A+xI_2=\begin{pmatrix}5+x & 4\\4 & 5+x\end{pmatrix}; A-xI_2=\begin{pmatrix}5-x & 4\\4 & 5-x\end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix}5+x & 4\\4 & 5+x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5-x & 4\\4 & 5-x\end{vmatrix}\geq 18\Rightarrow 2x^2+18\geq 18\Rightarrow 2x^2\geq 0$ adevărat $\forall x\in\mathbb{R}$.	**2p** **3p**

Coordonator grup de lucru – M_ pedagogic:
- Bălănescu Daniela, inspector școlar pentru matematică

Grup de lucru – M_ pedagogic
- Brînză Arabela-Adriana, Școala Gimnazială nr. 2 Cernavodă
- Cărnaru Alexandru, Colegiul Național Pedagogic *Constantin Brătescu* Constanța
- Jitaru Cristina - Fănița, Liceul cu Program Sportiv *Nicolae Rotaru* Constanța
- Zamfirescu Lavinia-Mihaela, Liceul Teoretic *Traian* Constanța

Bibliografie:

1. Matematică – Bacalaureat 2019,Mihai Monea, Steluţa Monea, Editura Paralela 45;
2. Matematică – Bacalaureat 2009, Coordonatori: Gabriela Constantinescu, Cătălin Zîrnă, Editura Crizon;
3. Bacalaureat Matematică – Ghid de pregătire 2019, Rodica Reşiga, Camelia Maria Magdaş,Editura Delfin;
4. Matematică – Bacalaureat 2020. Ghid de pregătire pentru examene, Coordonatori: Gabriela Constantinescu, Cătălin Zîrnă, Editura Crizon;
5. Teste de antrenament 2020 – 2021 - 2022, https://rocnee.eu
6. Manual pentru clasa a X-a M3, Coordonatori Dan Brânzei, Gina Caba, Editura Teora, 2003
7. Manual pentru clasa a IX-a, Coordonatori Marius Burtea, Georgeta Burtea, Editura Carmis , 2018
8. Bacalaureat 2002-Teste de matematică, Coordonatori Ion Savu, Mircea Becheanu, Editura Humanitas Educațional, 2001

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, Decembrie 2024
Proba E.c)
Matematică M_pedagogic

Varianta 3

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

5p **1.** Arătați că $2,5+2\cdot(1-0,5)=3,5$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-3ax+1$,unde a este un număr real. Determinați numărul real a, știind că $f(-1)+f(2)=13$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^3+2x-2}=x$.

5p **4.** Determinați câte numere natural pare, de trei cifre, se pot forma cu elementele mulțimii $A=\{0,1,2,3,4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,0)$; $B(5,4)$ și $C(1,2)$. Calculați lungimea CM a medianei triunghiului ABC.

5p **6.** Se consideră triunghiul isoscel ABC, dreptunghic în A, aria egală cu 6. Arătați ca $BC=2\sqrt{6}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție asociativă $x*y=x+y-6, \forall x,y\in\mathbf{R}$

5p 1) Arătați că $2024*(-2024)=-6$.

5p 2) Arătați că $e=6$ este element neutru pentru legea de compoziție dată.

5p 3) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x*4^x=0$.

5p 4) Calculați $a*a*a*a*a*a*a$, unde a este un număr real.

5p 5) Determinați numerele naturale x, pentru care $(1-x)*(2x+3)\le 2$.

5p 6) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi, ecuația $\log_3(x+2)*(-\log_3(4-x))=-6$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

Se consider matricele $A=\begin{pmatrix}2x & 1\\ 2 & 3y\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3x\\ -y & -3\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & -12\end{pmatrix}$; $A,B,C\in M_2(\boldsymbol{R})$

5p 1) Determinați $x,y\in R$ astfel încât $3A-2B=C$.

5p 2) Pentru $x=1$ și $y=-2$ calculați $AB-BA$.

5p 3) Arătați că $(\det A)\cdot(\det B)=\det(AB)$, unde $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & -6\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -3\end{pmatrix}$.

5p 4) Aflați numerele naturale n, nenule, pentru care $(\det C)+n\cdot(\det A^2)\le 154$, unde $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & -6\end{pmatrix}$.

5p 5) Arătați că $\det(A-B)^2$ este pătrat perfect, unde $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & -6\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -3\end{pmatrix}$.

5p 6) Rezolvați ecuația $A\cdot X=B$, pentru $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & -6\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -3\end{pmatrix}$.

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, Decembrie 2024
Proba E.c)
Matematică M_pedagogic
Barem de evaluare și de notare

Varianta 3

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

5p	**1.** Calculul $2\cdot(1-0{,}5)$ Finalizare $2{,}5+1=3{,}5$	**3p** **2p**
5p	**2.** $f(-1)=(-1)^2-3\cdot a\cdot(-1)+1=2+3a$, $\forall a\in\mathbf{R}$ $f(2)=2^2-3\cdot a\cdot 2+1=5-6a$, $\forall a\in\mathbf{R}$ $f(-1)+f(2)=13, \Rightarrow 7-3\cdot a=13\Rightarrow a=-2$.	**3p** **2p**
5p	**3.** Ecuația $\sqrt[3]{x^3+2x-2}=x\Rightarrow x^3+2x-2=x^3$ $x=1$ soluția căutată.	**3p** **2p**
5p	**4.** Cifra unităților se poate alege în trei moduri $\{0,2,4\}$. Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege in 5 moduri,iar cifra sutelor în se poate alege în 4 moduri,deci pot avea $3\cdot4\cdot5=60$ numere.	**2p** **3p**
5p	**5.** Dacă CM mediană $\Rightarrow M$ mijlocul lui AB și $M\left(\frac{9}{2},2\right)$ $CM=\sqrt{(x_M-x_C)^2+(y_M-y_C)^2}$; $CM=\sqrt{\left(1-\frac{9}{2}\right)^2+(2-2)^2}=\frac{7}{2}$.	**2p** **3p**
5p	**6.** Aria triunghiului $A_{ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}\Rightarrow 6=\frac{AB^2}{2}\Rightarrow AB=AC=2\sqrt{3}$ Aplicând teoremei lui Pitagora $BC^2=2\cdot AB^2\Rightarrow BC=2\sqrt{6}$.	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

5p	**1.** $2024*(-2024)=2024+(-2024)-6$ Finalizare.	**3p** **2p**
5p	**2.** $e=6$ elementul neutru al legii de compoziție data $\Leftrightarrow x*6=6*x=x$, x număr real $x*6=x+6-6=x$, x număr real $6*x=6+x-6=x$, x număr real, $e=6$ element neutru.	**3p** **2p**
5p	**3.** $2^x*4^x=0\Rightarrow 2^x+4^x-6=0$,Notăm $2^x=t>0$. Ecuația devine $t^2+t-6=0$ $t=2>0$, $t=-3<0$; $x=1$, $\forall x\in\mathbf{R}$	**3p** **2p**
5p	**4.** $a*a=a+a-6=2a-6$, $\forall a\in\mathbf{R}$; $a*a*a=2a-6+a-6=3a-6\cdot2$, $\forall a\in\mathbf{R}$ $a*a*a*a*a*a*a=7a-6\cdot6=7a-36$, $\forall a\in\mathbf{R}$	**3p** **2p**
5p	**5.** $(1-x)*(2x+3)\le2\Rightarrow 1-x+2x+3-6\le2$, $x\in\mathrm{N}$ $x-2\le2\Rightarrow x\le4\Rightarrow x\in\{0,1,2,3,4\}$	**2p** **3p**
5p	**6.** Ecuația $\log_3(x+2)*(-\log_3(4-x))=-6\Rightarrow\log_3(x+2)-\log_3(4-x)-6=-6$ $\Rightarrow\log_3(x+2)=\log_3(4-x)$, condiția de existență $x\in(-2,4)$ $x+2=4-x\Rightarrow x=1\Rightarrow x\in(-2,4)$, x număr întreg.	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

5p	**1.** $3A-2B=C\Rightarrow\begin{pmatrix}6x & 3\\ 6 & 9y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 6x\\ -2y & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & -12\end{pmatrix}$ Din egalitatea avem $6x-2=4\Rightarrow x=1$ și $6+2y=2\Rightarrow y=-2$, $\forall x,y\in\mathbf{R}$	**3p** **2p**

5p	**2.** Calculul $A\cdot B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -10 & 24\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}8 & -17\\ -2 & 20\end{pmatrix}$ $AB-BA=\begin{pmatrix}-4 & 20\\ -8 & 4\end{pmatrix}$.	**3p** **2p**
5p	**3.** $\det A=-14$, $\det B=-9$, $\det(AB)=126$ Finalizare	**3p** **2p**
5p	**4.** $\det C=-42$, calculăm $A^2=\begin{pmatrix}6 & -4\\ -8 & 38\end{pmatrix}$, $\det A^2=196$ $(\det C)+n\cdot(\det A^2)\leq 154 \Rightarrow -42+196n\leq 154 \Rightarrow n\leq 1, n\in \mathrm{N}^* \Rightarrow n=1$	**3p** **2p**
5p	**5**. $A-B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & -3\end{pmatrix}$, $(A-B)^2=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 9\end{pmatrix}$ $\det(A-B)^2=9=3^2$, pătrat perfect.	**3p** **2p**
5p	**6.** Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $\forall a,b,c,d\in\mathbf{R}$; atunci relația se scrie $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ de unde obținem $a=\frac{4}{7}, b=\frac{15}{14}, c=-\frac{1}{7}, d=\frac{6}{7}$,care verifică ecuația.	**2p** **3p**

Coordonator grup de lucru – M_ pedagogic:
- Bălănescu Daniela, inspector școlar pentru matematică

Grup de lucru – M_ pedagogic
- Brînză Arabela-Adriana, Școala Gimnazială nr. 2 Cernavodă
- Cărnaru Alexandru, Colegiul Național Pedagogic *Constantin Brătescu* Constanța
- Jitaru Cristina - Fănița, Liceul cu Program Sportiv *Nicolae Rotaru* Constanța
- Zamfirescu Lavinia-Mihaela, Liceul Teoretic *Traian* Constanța

Bibliografie:

1. Matematică – Bacalaureat 2019,Mihai Monea, Steluţa Monea, Editura Paralela 45;
2. Matematică – Bacalaureat 2009, Coordonatori: Gabriela Constantinescu, Cătălin Zîrnă, Editura Crizon;
3. Bacalaureat Matematică – Ghid de pregătire 2019, Rodica Reşiga, Camelia Maria Magdaş,Editura Delfin;
4. Matematică – Bacalaureat 2020. Ghid de pregătire pentru examene, Coordonatori: Gabriela Constantinescu, Cătălin Zîrnă, Editura Crizon;
5. Teste de antrenament 2020 – 2021 - 2022, https://rocnee.eu
6. Manual pentru clasa a X-a M3, Coordonatori Dan Brânzei, Gina Caba, Editura Teora, 2003
7. Manual pentru clasa a IX-a, Coordonatori Marius Burtea, Georgeta Burtea, Editura Carmis , 2018
8. Bacalaureat 2002-Teste de matematică, Coordonatori Ion Savu, Mircea Becheanu, Editura Humanitas Educațional, 2001

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, decembrie 2024
Proba E.c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

SUBIECTUL I (30 puncte)

5p **1.** Determinați ecuația de gradul al II-lea ale cărei rădăcini sunt $x_1 = 2+\sqrt{3}$ și $x_2 = 2-\sqrt{3}$

5p **2.** Să se arate că numărul $\sqrt{7+2\sqrt{6}} -\sqrt{6}$ este natural.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $9^x - 2\cdot 3^x - 3 = 0$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $M =\{ x \in \mathbb{N} \mid |x-6| < 6\}$. Care este probabilitatea de a extrage un pătrat perfect dintre elementele mulțimii *M*?

5p **5.** În reperul cartezian *xOy*, se consideră $A(2,0)$ și dreapta d de ecuație $d: y = 4x+1$. Determinați ecuația paralelei duse prin A la dreapta d.

5p **6.** Se consideră $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\sin x = \frac{3}{5}$. Calculați $\sin 2x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ și mulțimea $M = \{X(a) = I_2 + aA, a \in \mathbb{R}\}$.

5p **a)** Arătați că $A^2 + A = O_2$

5p **b)** Arătați că $X(a)\cdot X(b) \in M, (\forall)\, a, b \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Aflați numerele reale m și n, astfel încât $X(1) + X(2) + \cdots + X(2024) = 1012(m\cdot I_2 + n\cdot A)$.

2. Definim pe $\mathbb{R}$ legea de compoziție asociativă „$*$” prin $x * y = xy - 3x - 3y + 12$

5p **a)** Arătați că $x * y = (x-3)(y-3) + 3, (\forall)\, x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați două numere $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ astfel încât $a * b \in \mathbb{Z}$.

5p **c)** Calculați $\sqrt{1} * \sqrt{2} * \sqrt{3} * \ldots * \sqrt{2024}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

5p **b)** Să se determine intervalele de monotonie a funcției *f*.

5p **c)** Să se arate că $2023\cdot e^{\sqrt{2024}} > 2024\cdot e^{\sqrt{2023}}$.

2. Se consideră funcția $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{x} + 3x + e^x$.

5p **a)** Arătați că orice primitivă a funcției *f* este crescătoare pe $(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați primitiva $F: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ a funcției f, care îndeplinește condiția $F(1) = 5$.

5p **c)** Calculați $\int \frac{f(x)-e^x}{x}\, dx$

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, decembrie 2024
Proba E.c)
Matematică *M_șt-nat*
Barem de evaluare și de notare

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

5p	$S = x_1 + x_2 = 4, P = x_1 \cdot x_2 = 1$ $x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0.$	**2p** **3p**
5p	$7 + 2\sqrt{6} = \left(\sqrt{6} + 1\right)^2$ Numărul va fi: $\left\lvert\sqrt{6} + 1\right\rvert - \sqrt{6} = 1 \in \mathbb{N}$	**2p** **3p**
5p	$(3^x)^2 - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$ Cu soluțiile: $3^x = 3$ *și* $3^x = -1$, care nu convine Finalizare: $x = 1$	**2p** **3p**
5p	**4.** Mulțimea este $M = \{1, 2, 3, \ldots, 11\}$, deci 11 cazuri posibile $x =$ pătrat perfect și $x \in M \Rightarrow x \in \{1,4,9\} \Rightarrow P = \frac{3}{11}$	**2p** **3p**
5p	**5.** $m_d = 4$ *și* $d' \parallel d \Rightarrow m_{d'} = m_d = 4$ Finalizare, $d'\colon y = 4x - 8$	**2p** **3p**
5p	**6.** $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \cos x < 0$ $\cos x = -\frac{4}{5}$ și $\sin 2x = -\frac{24}{25}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

5p	**1. a)** $A^2 = -A$ $A^2 + A = -A + A = O_2$	**3p** **2p**
5p	**b)** $X(a) \cdot X(b) = (I_2 + aA)(I_2 + bA) = I_2 + aA + bA - abA$ $X(a) \cdot X(b) = I_2 + (a + b - ab)A = X(a + b - ab) \in M$	**3p** **2p**
5p	**c)** $X(1) + X(2) + \cdots + X(2024) = I_2 + 1 \cdot A + I_2 + 2 \cdot A + \cdots + I_2 + 2024 \cdot A$ $= \underbrace{(I_2 + \cdots + I_2)}_{de\ 2024\ ori} + (1 + 2 + \cdots + 2024) \cdot A = 2024I_2 + 1012 \cdot 2025 \cdot A$ $= 1012(2 \cdot I_2 + 2025 \cdot A)$ și finalizare: $m = 2$ *și* $n = 2025$	**2p** **3p**
5p	**2. a)** $x * y = x(y - 3) - 3(y - 3) + 3$ Finalizare	**3p** **2p**
5p	**b)** Un exemplu: $a = \frac{11}{3} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ *și* $b = \frac{9}{2} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ $\Rightarrow a * b = 4 \in \mathbb{Z}$	**3p** **2p**
5p	**c)** $x * 3 = 3 * y = 3, \forall x, y \in \mathbb{R}$ $\sqrt{1} * \sqrt{2} * \ldots * \sqrt{9} * \ldots * \sqrt{2024} = 3$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

5p	**1. a)** $f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$ $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = -e$	**2p** **3p**
5p	**b)** $f'(x) \geq 0, \forall x \in (-\infty, 0) \cup [2, \infty)$ *și* $f'(x) < 0, \forall x \in (0,2)$ f este strict crescătoare pe $(-\infty, 0) \cup [2, \infty)$ și este strict descrescătoare pe $(0,2)$, iar $x = 2$ este punct de minim local al lui f	**3p** **2p**
5p	**c)** f este strict crescătoare pe $(2, \infty) \Rightarrow f(2023) < f(2024)$, $\frac{e^{\sqrt{2023}}}{2023} < \frac{e^{\sqrt{2024}}}{2024} \Leftrightarrow 2023 \cdot e^{\sqrt{2024}} > 2024 \cdot e^{\sqrt{2023}}$	**2p** **3p**

5p	**3. a)** $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ este primitivă a lui f dacă F este derivabilă pe $(0,\infty)$ și $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in(0,\infty)$ $F'(x)=f(x)=\frac{2}{x}+3x+e^x>0,\ \forall x\in(0,\infty)$, deci F este strict crescătoare pe $(0,\infty)$	**2p** **3p**
5p	**b)** Fie $F(x)=2\ln x+\frac{3x^2}{2}+e^x+\mathrm{c},\ c\in\mathbb{R}$, o primitivă a lui f $F(1)=5\Rightarrow c=\frac{7-2e}{2}$, iar $F(x)=2\ln x+\frac{3x^2}{2}+e^x+\frac{7-2e}{2}$.	**2p** **3p**
5p	**c)** $\int\frac{f(x)-e^x}{x}dx=\int\frac{2+3x^2}{x^2}dx$ $=3x-\frac{2}{x}+\mathcal{C}$	**2p** **3p**

Coordonator grup de lucru - M_șt-nat:
- Bălănescu Daniela, inspector școlar pentru matematică

Grup de lucru –M_șt-nat:
- Comănescu Cristina-Maria, Colegiul Național de Arte *Regina Maria* Constanța
- Goga Georgiana, Colegiul Național *Mihai Eminescu* Constanța
- Goran Nela, Liceul Teoretic *Traian* Constanța
- Șargu Rodica, Liceul Tehnologic *I. Bănescu* Mangalia
- Teodorov Corina - Loredana, Școala Gimnazială nr. 24 *Ion Jalea* Constanța
- Zîrnă Luiza, Colegiul Național *Mihai Eminescu* Constanța

Bibliografie:

1. Zanoschi A., Iurea Ghe., *Bacalaureat 2022: matematica - M_mate-info*, Editura Paralela 45, Pitesti 2022
2. Andronache M., Serbanescu D., *Matematica pentru examenul de bacalaureat, M1*, Editura Art, Clubul matematicienilor, 2015
3. Teste de antrenament M_St_nat 2020 si 2021,
4. Dragomir L. - *Probleme de matematică pentru clasa a XI-a* , Ed. Paralela 45, 2012
5. Ghe. Adalbert Schneider, *Culegere de probleme de analiză matematică pentru clasele XI-XII*, , Ed. Hyperion

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, decembrie 2024
Proba E.c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

SUBIECTUL I (30 puncte)

5p **1.** Să se determine primul termen al progresiei geometrice cu termeni pozitivi $b_1, 6, b_3, 24, \ldots$.

5p **2.** Știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 2025x + 1 = 0$, să se calculeze $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x = 6\left(\sqrt{x-2} - 1\right)$.

5p **4.** Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care mulțimea $\{1,2,\ldots,n\}$ are exact 120 de submulțimi cu două elemente.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $B(-1,2)$ și $C(2,-2)$. Să se determine distanța de la punctul O la dreapta BC .

5p **6.** Fie $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sin x = \frac{1}{2} + \cos x$. Să se calculeze $\sin 2x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ și $B(a) = \begin{pmatrix} 16^a & 0 \\ 0 & 9^a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $det(B(a)) = 12^{2a}$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $A \cdot B(a) = B(a) \cdot A$.

5p **c)** Demonstrați că pentru orice matrice $X \in M_2(R)$ cu proprietatea că $X \cdot X = B(1)$, suma pătratelor elementelor matricei X este egală cu 25.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 2^{x+y+2}, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că $(-2025) * 2023 = 1$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $(3-4x) * (x^2 - 6) = 16$.

5p **c)** Arătați că, dacă $(x * y) * z = 2^{z+6}$, atunci $x = -y$.

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. Considerăm funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - e \ln x$.

5p **a)** Determinați intervalele de monotonie ale funcției f **.**

5p b) Arătați că $\boldsymbol{f}(x) \geq 0$ oricare ar fi $x > 0$.

5p **c)** Deduceți inegalitatea $e^x \geq x^e$, oricare ar fi $x > 0$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 4x + 3)e^x$.

5p **a)** Calculați $\int (f(x)e^{-x} + e^x) dx$.

5p **b)** Dacă $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f, determinați punctele de extrem ale funcției F.

5p **c)** Demonstrați că funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = (x^2 - 6x + 9)e^x$ este o primitivă a funcției f.

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, decembrie 2024
Proba E.c)
Matematică *M_șt-nat*
Barem de evaluare și de notare

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

5p	1. Avem ${b_3}^2 = 6 \cdot 24$, adică $b_3 = 12$ $q = \frac{b_3}{b_2} = 2$ rezultă $b_1 = \frac{b_2}{q} = 3$	2p 3p
5p	2. Conform relațiilor lui Viète, avem $x_1 + x_2 = 2025$ și $x_1 x_2 = 1$ Atunci $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1 x_2} = \frac{2025}{1} = 2025$.	2p 3p
5p	3. Condiție: $x \geq 2$. Ecuația se mai scrie $6\sqrt{x-2} = x + 6$, care prin ridicare la pătrat devine $x^2 - 24x + 108 = 0$, de unde $x \in \{6,18\}$	2p 3p
5p	4. Avem $C_n^2 = 120$. Rezultă $\frac{n(n-1)}{2} = 120$; $n^2 - n - 240 = 0$, având soluțiile -15 și 16 Cum $n \geq 2$, rămâne $n = 16$	3p 2p
5p	5. $BC: 4x + 3y - 2 = 0$ $d(O, BC) = \frac{\lvert 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 2 \rvert}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{2}{5}$	3p 2p
5p	6. Avem $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$, atunci $(\sin x - \cos x)^2 = \frac{1}{4}$; $\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{4}$; $-\sin 2x = -\frac{3}{4}$. Deci $\sin 2x = \frac{3}{4}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

5p	1.a) $det(B(a)) = \begin{vmatrix} 16^a & 0 \\ 0 & 9^a \end{vmatrix} = 16^a \cdot 9^a - 0 \cdot 0 =$ $= 4^{2a} \cdot 3^{2a} = 12^{2a}$, pentru orice număr real a	3p 2p
5p	b) $A \cdot B(a) = \begin{pmatrix} -16^a & 9^a \\ 0 & 9^a \end{pmatrix}$, $B(a) \cdot A = \begin{pmatrix} -16^a & 16^a \\ 0 & 9^a \end{pmatrix}$, pentru orice număr real a $\begin{pmatrix} -16^a & 9^a \\ 0 & 9^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16^a & 16^a \\ 0 & 9^a \end{pmatrix} \Leftrightarrow 9^a = 16^a$, de unde obținem $a = 0$	2p 3p
5p	c) Pentru $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(R) \Rightarrow X \cdot X = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$ și $B(1) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, de unde obținem$a \in \{-4,4\}$, $b = 0$, $c = 0$, $d \in \{-3,3\}$ deci $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 25$.	2p 3p
5p	2. a) $(-2025) * 2023 = 2^{-2025+2023+2}$ $= 2^0 = 1$.	3p 2p
5p	b) $2^{3-4x+x^2-6+2} = 2^4 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$ de unde obținem $x = -1$ sau $x = 5$.	3p 2p
5p	c) $(x * y) * z = 2^{x+y+2} * z = 2^{2^{x+y+2}+z+2}$ $\Rightarrow 2^{2^{x+y+2}+z+2} = 2^{z+6} \Rightarrow 2^{x+y+2} + z + 2 = z + 6 \Rightarrow 2^{x+y+2} = 2^2 \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow x = -y$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

5p	1. a) $f'(x) = 1 - \frac{e}{x}$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = e$ și $f'(x) < 0$, $\forall x \in (0, e)$, $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (e, +\infty)$, deci: f este descrescătoare pe intervalul $(0, e)$ și crescătoare pe $[e, +\infty)$	2p 3p
5p	b) Conform punctului a), deducem că $x = e$ este punct de minim, deci $f(x) \geq f(e)$, $\forall x \in (0, +\infty)$ $\Rightarrow f(x) \geq 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$	3p 2p
5p	c) Inegalitatea din enunț este echivalentă, în urma logaritmării, cu $\ln(e^x) \geq \ln(x^e) \Leftrightarrow x \geq e \ln x$ $\Leftrightarrow x - e \ln x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$ ceea ce s-a demonstrat la punctul b).	3p 2p
5p	2. a) $\int (f(x) e^{-x} + e^x) dx = \int (x^2 - 4x + 3 + e^x)\, dx =$	2p

	$=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x+e^x+C$	3p
5p	b) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f, deci $F'(x)=f(x)=(x^2-4x+3)e^x$, $x\in\mathbb{R}$. $F'(x)=0$ pentru $x=1$, respectiv $x=3$. $F'(x)>0$ pentru $x\in(-\infty;1)$, $F'(x)<0$ pentru $x\in(1;3)$, $F'(x)>0$ pentru $x\in(3;+\infty)$. Cum F este strict crescătoare pe $(-\infty;1)$, F este strict descrescătoare pe $(1;3)$ și F este crescătoare pe $(3;+\infty)$, obținem că $x=1$ și $x=3$ sunt punctele de extrem ale funcției F.	2p 3p
5p	c) Funcția g este derivabilă pe mulțimea numerelor reale și $g'(x)=(x^2-6x+9)'\cdot e^x+(x^2-6x+9)(e^x)'=(2x-6)e^x+(x^2-6x+9)e^x=$ $=(x^2-4x+3)e^x=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$ deci funcția g este o primitivă a funcției f.	3p 2p

Coordonator grup de lucru - M_șt-nat:
- Bălănescu Daniela, inspector școlar pentru matematică

Grup de lucru –M_șt-nat:
- Comănescu Cristina-Maria, Colegiul Național de Arte *Regina Maria* Constanța
- Goga Georgiana, Colegiul Național *Mihai Eminescu* Constanța
- Goran Nela, Liceul Teoretic *Traian* Constanța
- Șargu Rodica, Liceul Tehnologic *I. Bănescu* Mangalia
- Teodorov Corina - Loredana, Școala Gimnazială nr. 24 *Ion Jalea* Constanța
- Zîrnă Luiza, Colegiul Național *Mihai Eminescu* Constanța

Bibliografie:

1. Zanoschi A., Iurea Ghe., *Bacalaureat 2022: matematica - M_mate-info*, Editura Paralela 45, Pitesti 2022
2. Andronache M., Serbanescu D., *Matematica pentru examenul de bacalaureat, M1*, Editura Art, Clubul matematicienilor, 2015
3. Teste de antrenament M_St_nat 2020 si 2021,
4. Dragomir L. - *Probleme de matematică pentru clasa a XI-a* , Ed. Paralela 45, 2012
5. Ghe. Adalbert Schneider, *Culegere de probleme de analiză matematică pentru clasele XI-XII*, , Ed. Hyperion

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, decembrie 2024
Proba E.c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 puncte)

5p **1.** Determinați partea întreagă a numărului $2020+2\sqrt{5}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:R\to R, f(x)=x^2-(2m+1)x+m^2-m$, $m\in R$. Aflați valorile reale ale lui m pentru care parabola asociată graficului funcției se află deasupra axei Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2x-1)-2\log_4(2-x)=1$.

5p **4.** Aflați $n\in N, n\geq 2$ pentru care numerele P_4, A_6^2 și C_n^2 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,3), B(3,5)$ și $C(0,-3)$. Determinați ecuația înălțimii din vârful B al triunghiului ABC.

5p **6.** Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC, știind că $B=\frac{\pi}{6}, C=\frac{\pi}{4}$ și $AC=20$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}3^x & 1\\ x^2 & 0\end{pmatrix}$, unde x este un număr natural nenul.

5p a) Arătați că $\det(A(x))<0$, pentru orice $x\in N^*$.

5p b) Aflați urma matricei B, unde $B=A(1)+A(2)+A(3)+...+A(2024)$.

5p c) Determinați matricea $C\in M_2(R)$ pentru care $A(x)\cdot C=C\cdot A(x)=I_2$, pentru orice $x\in N^*$.

2. Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție $x\circ y=xy+ax+by+42$, oricare ar fi $x,y\in R$ și $a,b\in R$.

5p a) Pentru $a=b=7$, calculați $\sqrt{2}\circ(-\sqrt{2})$.

5p b) Aflați a și b numere reale pentru care legea de compoziție este asociativă.

5p c) Pentru $a=b=-6$, calculați $C_2^2\circ C_3^2\circ C_4^2\circ...\circ C_{2024}^2$.

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. Fie funcția $f:R\to R, f(x)=\frac{x+3}{e^x}$.

5p a) Arătați că $(x+2)f(x)+(x+3)f'(x)=0$, pentru orice $x\in R$.

5p b) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.

5p c) Arătați că $f(1)+2\cdot f(2)+3\cdot f(3)+...+36\cdot f(36)<2024$.

2. Se consideră funcția $f:R\to R, f(x)=\begin{cases}3(x+1)^2, x<-1\\ (x+2)\ln(x+2), x\geq -1\end{cases}$.

5p a) Demonstrați că f admite primitive pe R.

5p b) Arătați că orice primitivă a lui f este crescătoare pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.

5p c) Pentru $x\in(-\infty,-1)$, determinați o primitivă F a lui f pentru care $F(-2)=0$.

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, decembrie 2024
Proba E.c)
Matematică *M_șt-nat*
Barem de evaluare și de notare

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

5p	**1.** $2\sqrt{5}=\sqrt{20}$, $[2\sqrt{5}]=4$	**2p**
	$[2020+2\sqrt{5}]=2020+[2\sqrt{5}]=2020+4=2024$	**3p**
5p	**2.** $\Delta=8m+1$	**2p**
	$\Delta<0, m\in\left(-\infty,-\frac{1}{8}\right)$	**3p**
5p	**3.** $\log_2(2x-1)-\log_2(2-x)=1 \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{2x-1}{2-x}\right)=1$	**2p**
	$\frac{2x-1}{2-x}=2$, $x=\frac{5}{4}$, care convine	**3p**
5p	**4.** $P_4=24, A_6^2=30, C_n^2=\frac{(n-1)\cdot n}{2}$	**3p**
	$P_4+C_n^2=2\cdot A_6^2 \Leftrightarrow (n-1)\cdot n=72$, deci $n=9$, care convine	**2p**
5p	**5.** $m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=-\frac{3}{2}, m_{AC}\cdot m_h=-1 \Rightarrow m_h=\frac{2}{3}$	**3p**
	$y-5=\frac{2}{3}(x-3) \Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x+3$ (ecuația înălțimii din B)	**2p**
5p	**6.** $A=\frac{7\pi}{12}, \sin A=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	**2p**
	$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A} \Rightarrow BC=10\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

5p	**1. a)** $\det(A(x))=\begin{vmatrix}3^x & 1\\ x^2 & 0\end{vmatrix}=3^x\cdot 0-1\cdot x^2=$	**3p**
	$=-x^2<0$, pentru orice x număr natural nenul.	**2p**
5p	**b)** $B=A(1)+A(2)+...+A(2024)=\begin{pmatrix}3^1+3^2+...+3^{2024} & 2024\\ 1^2+2^2+...+2024^2 & 0\end{pmatrix}$	**2p**
	$Tr(B)=3^1+3^2+...+3^{2024}+0=\frac{3(3^{2024}-1)}{2}$	**3p**
5p	**c)** $\det(A(x))=-x^2\neq 0$, pentru orice $x\in N^*$, deci $A(x)$ inversabilă, $\forall x\in N^*$	**2p**
	$C=A^{-1}(x)=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{x^2}\\ 1 & -\frac{3^x}{x^2}\end{pmatrix}\in M_2(R)$	**3p**
5p	2. **a)** $x\circ y=xy+7x+7y+42$, $\sqrt{2}\circ\left(-\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2})+7\sqrt{2}-7\sqrt{2}+42=$	**3p**
	$-2+42=40$	**2p**
5p	**b)** $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$, pentru orice x,y,z numere reale	
	$axz+a^2x+(42+b)z+42a=bxz+(42+a)x+b^2z+42b$, $\forall x,y,z\in R$	**3p**
	$a=b, a^2-a-42=0, b^2-b-42=0$, de unde $a=b=7$ și $a=b=-6$	**2p**

5p	**c)** $x \circ y = xy - 6x - 6y + 42 = (x-6)(y-6) + 6$, pentru orice x, y, z numere reale $x \circ 6 = 6,\ 6 \circ y = 6$, oricare ar fi $x, y \in R$, $C_4^2 = 6$ Legea este asociativă, deci $(C_2^2 \circ C_3^2) \circ 6 \circ (C_5^2 \circ ... \circ C_{2024}^2) = x \circ 6 \circ y = 6$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

5p	**1. a)** $f'(x) = \dfrac{1 \cdot e^x - (x+3) \cdot e^x}{\left(e^x\right)^2} = \dfrac{(-x-2) \cdot e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{-x-2}{e^x}, \forall x \in R$ $(x+2) f(x) + (x+3) f'(x) = \dfrac{(x+2)(x+3) - (x+2)(x+3)}{e^x} = 0$, pentru orice $x \in R$	3p 2p
5p	**b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+3}{e^x} = 0$, dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+3}{e^x} = \lim\limits_{x \to -\infty} (x+3) \cdot e^{-x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+3}{x \cdot e^x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+3}{x} \cdot e^{-x} = +\infty$ Așadar, funcția f nu admite asimptote spre $-\infty$ la graficul funcției.	3p 2p
5p	**c)** $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -2$, care convine Pentru $x \in (-2, +\infty)$, f este strict descrescătoare și cum $f(0) = 3$, rezultă $f(x) < 3$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$ $f(1) + 2f(2) + 3f(3) + ... + 36f(36) < 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + ... + 3 \cdot 36 =$ $= 3(1 + 2 + 3 + ... + 36) = 1998 < 2024$.	3p 2p
5p	**2. a)** $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = 0$, $f(-1) = 0$, deci f este continuă în $x = 0$. Cum f este continuă pe $(-\infty, -1)$, și pe $(-1, +\infty)$ rezultă că f este continuă pe R. Așadar, f admite primitive pe R.	2p 3p
5p	**b)** Fie F o primitivă a lui f, pentru orice $x \geq -1$. Rezultă $F'(x) = f(x) = (x+2)\ln(x+2)$, pentru orice $x \geq -1$. Cum $(x+2)\ln(x+2) \geq 0, \forall x \geq -1$, se obține $F'(x) \geq 0, \forall x \geq -1$, deci F este crescătoare, pentru orice $x \in [-1, +\infty)$.	2p 3p
5p	**c)** Pentru $x \in (-\infty, -1)$ avem $\int f(x)dx = \int 3(x+1)^2 dx = x^3 + 3x^2 + 3x + c$ Am obținut $F(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + c$. $F(-2) = 0 \Rightarrow c = 2$. Deci $F(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$.	3p 2p

Coordonator grup de lucru - M_șt-nat:
- Bălănescu Daniela, inspector școlar pentru matematică

Grup de lucru –M_șt-nat:
- Comănescu Cristina-Maria, Colegiul Național de Arte *Regina Maria* Constanța
- Goga Georgiana, Colegiul Național *Mihai Eminescu* Constanța
- Goran Nela, Liceul Teoretic *Traian* Constanța
- Șargu Rodica, Liceul Tehnologic *I. Bănescu* Mangalia
- Teodorov Corina - Loredana, Școala Gimnazială nr. 24 *Ion Jalea* Constanța
- Zîrnă Luiza, Colegiul Național *Mihai Eminescu* Constanța

Bibliografie:

1. Zanoschi A., Iurea Ghe., *Bacalaureat 2022: matematica - M_mate-info*, Editura Paralela 45, Pitesti 2022
2. Andronache M., Serbanescu D., *Matematica pentru examenul de bacalaureat, M1*, Editura Art, Clubul matematicienilor, 2015
3. Teste de antrenament M_St_nat 2020 si 2021,
4. Dragomir L. - *Probleme de matematică pentru clasa a XI-a* , Ed. Paralela 45, 2012
5. Ghe. Adalbert Schneider, *Culegere de probleme de analiză matematică pentru clasele XI-XII*, , Ed. Hyperion

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, decembrie 2024
Proba E.c)
Matematică_*M_tehnologic*

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale, profilul tehnic, toate calificările profesionale

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right):\frac{3}{4}=1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-1$. Arătați că $f(-1)+f(2)=0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x-3}=3^x$.

5p **4.** Un produs costă 120 lei. Determinați prețul acestuia după o ieftinire cu 20% .

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,2)$, $B(a,3)$ și $C(-2,4)$, unde a este un număr real. Determinați valoarea numărului real a, știind că punctul B este mijlocul segmentului AC.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $BC=16$ și măsura unghiului B egală cu $30°$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $32\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x-1 & 2\\ 1 & x\end{pmatrix}$, unde x este un număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(B(-1))=0$.
5p **b)** Arătați că $B(1)=B(-1)+2\cdot I_2$.
5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(B(x)+xI_2)=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=4xy-3x+2y-1$.
5p **a)** Arătați că $(-1)*1=0$.
5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $x*(-1)=4$.
5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $x*a=-x$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2}, x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

2. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}$ și $g(x)=\frac{x^2}{e^x}$.

5p **a)** Demonstrați că funcția g este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Calculați $\int e^x\cdot g(x)dx$.

5p **c)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe intervalul $[0,2]$.

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, decembrie 2024
Proba E.c)
Matematică_*M_tehnologic*
Barem de evaluare și de notare

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale, profilul tehnic, toate calificările profesionale

SUBIECTUL I (30 puncte)

5p	**1.** $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right):\frac{3}{4}=\left(\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\right):\frac{3}{4}=$ $=\ \frac{3}{4}:\frac{3}{4}=1$	2p 3p
5p	**2.** $f(-1)=-3$ $f(2)=3$, de unde obținem $f(-1)+f(2)=0$.	2p 3p
5p	**3.** $2x-3=x$ $x=3$, care convine	3p 2p
5p	**4.** $\frac{20}{100}\cdot 120=24$ lei Prețul după ieftinire este $120-24=96$ lei.	2p 3p
5p	**5.** $a=\frac{4+(-2)}{2}=$ $=1$	3p 2p
5p	**6.** $sinB=\frac{AC}{BC}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{AC}{16}$, deci $AC=8$ $AB=\sqrt{BC^2-AC^2}=8\sqrt{3}$ și, cum $A_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}$, obținem $A_{\Delta ABC}=\frac{8\cdot 8\sqrt{3}}{2}=32\sqrt{3}$.	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

5p	**1.a)** $B(-1)=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(B(-1)\right)=\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=(-2)\cdot(-1)-1\cdot 2=$ $=2-2=0$	3p 2p
5p	**b)** $B(-1)+2\,I_2=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=B(1)$	3p 2p
5p	**c)** $B(x)+xI_2=\begin{pmatrix}x-1 & 2\\ 1 & x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-1 & 2\\ 1 & 2x\end{pmatrix}$ și $\det(B(x)+xI_2)=4x^2-2x-2$, pentru orice număr real x $4x^2-2x-2=0$, de unde obținem $x=1$ sau $x=-\frac{1}{2}$	3p 2p
5p	**2. a)** $(-1)*1=4\cdot(-1)\cdot 1-3\cdot(-1)+2\cdot 1-1=$ $=-4+3+2-1=0$	3p 2p
5p	**b)** $x*(-1)=-7x-3$, pentru orice număr real x $-7x-3=4\Rightarrow -7x=7$, de unde obținem $x=-1$	2p 3p
5p	**c)** $4ax-3x+2a-1=-x\Rightarrow 4ax-2x+2a-1=0\Rightarrow 2x(2a-1)+2a-1=0$, pentru orice număr real x Obținem $a=\frac{1}{2}$.	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

5p	**1. a)** $f'(x)=\frac{\left(x^2\right)'\cdot\left(x^2+1\right)-x^2\cdot\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=$ $=\frac{2x\cdot\left(x^2+1\right)-x^2\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}, x\in\mathbb{R}$	2p 3p
5p	**b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=1$ Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	3p 2p

5p	**c)** $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$, $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,0]$ $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0,+\infty)$	**3p** **2p**
5p	**2**. a) $g'(x)=\frac{(x^2)'\cdot e^x-x^2\cdot(e^x)'}{(e^x)^2}=\frac{(2x-x^2)\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{2x-x^2}{e^x}=$ $=f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ și g derivabilă, deci funcția g este o primitivă a funcției f	**3p** **2p**
5p	**b)** $\int e^x\cdot g(x)dx=\int e^x\cdot\frac{x^2}{e^x}dx=\int x^2dx=$ $=\frac{x^3}{3}+C, C\in\mathbb{R}$	**2p** **3p**
5p	**c)** Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}=0 \Rightarrow x=0$ sau $x=2$ $F'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[0,2]$, deci orice primitivă a funcției f este crescătoare pe intervalul $[0,2]$	**3p** **2p**

Coordonator grup de lucru – M_tehnologic:
- Bălănescu Daniela, inspector școlar pentru matematică

Grup de lucru – M_tehnologic
- Bacula Mariana, Liceul Tehnologic de Electrotehnică și Telecomunicații Constanța
- Costea Cristina, Liceul Tehnologic *Nicolae Dumitrescu* Cumpăna
- Crangă Cleopatra, Liceul Teoretic Murfatlar
- Grassu Mariana, Liceul Cobadin
- Filip Adela – Cristina, Liceul Economic *Virgil Madgearu* Constanța
- Teodorescu Nicoleta, Colegiul Economic Mangalia

Bibliografie:
1) *Teste de antrenament 2020 și 2021*: Centrul Naţional de Politici și Evaluare în Educație
2) *Variante de subiecte 2022*, Centrul Național de Politici și Evaluare în Educație
3) Marius Burtea, Georgeta Burtea ș.a. *Exerciții recapitulative*. *Teste Matematică tehnologic*

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, decembrie 2024
Proba E.c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale;
profilul resurse, toate calificările profesionale, profilul tehnic, toate calificările profesionale

SUBIECTUL I (30 puncte)

5p **1.** Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_2 = 4$ și $a_4 = 10$.

5p **2.** Determinați numărul real a, știind că $f(a) = 1$, unde $f: R \to R, f(x) = 2x + 3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\sqrt[3]{5x-1} = 4$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca alegând un număr natural din mulțimea $\{10,11,12,13,\dots,25\}$, acesta să fie multiplu de doi.

5p **5.** În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,3)$ și B$(2,-1)$. Determinați distanța dintre punctele A și B.

5p **6.** Arătați că $(\sin 30^0 - \cos 30^0)^2 + \sin 60^0 = 1$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. Se consideră matricele $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & x-1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $x \in R$.

5p **a)** Arătați că $\det\big(A(1)\big) = 0$.

5p **b)** Verificați egalitatea $A(4) \cdot A(2) = 2 \cdot A(3) - I_2$.

5p **c)** Determinați matricea $A(x)$, unde x este un număr real, pentru care $A(x) \cdot A(0) = A(0) \cdot A(x) = I_2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy + x + y$.

5p **a)** Arătați că $1 * (-1) = -1$.

5p **b)** Arătați că $x * y = (x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați mulțimea numerelor reale x pentru care $x * x \leq 24$.

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. Se consideră funcția $f: (1, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}, x \in (1,\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuația tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x = 2$, situat pe graficul funcției.

5p **c)** Arătaţi că $f(x) \geq 6$, pentru orice $x \in (1,\infty)$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

5p **a)** Calculați $\int \frac{f(x)}{x}\, dx, x \in (0,\infty)$.

5p **b)** Arătați că orice primitivă F a funcției f este strict crescătoare.

5p **c)** Determinaţi primitiva $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a funcţiei f pentru care $F(1) = 5$.

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, decembrie 2024
Proba E.c)
Matematică *M_tehnologic*
Barem de evaluare și de notare

Varianta 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale, profilul tehnic, toate calificările profesiona

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

5p	**1.** $a_3=\frac{a_2+a_4}{2}=\frac{4+10}{2}$ $a_3=\frac{14}{2}=7$	**3p** **2p**
5p	**2.** $f(a)=2a+3\Rightarrow 2a+3=1$ $2a=-2$, de unde se obține $a=-1$	**3p** **2p**
5p	**3.** $5x-1=4^3\Rightarrow 5x-1=64$ $5x=65$, de unde se obține $x=13$	**3p** **2p**
5p	**4.** Mulțimea $\{10,11,12,13,\dots,25\}$ conține 16 elemente, deci sunt 16 cazuri posibile Multiplii lui 2 din mulțime sunt $\{10,12,14,\dots,24\}$, deci sunt 8 cazuri favorabile $\mathrm{P}=\frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$	**2p** **3p**
5p	**5.** $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(2+1)^2+(-1-3)^2}=$ $=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$	**3p** **2p**
5p	**6.** $\sin 30^0=\frac{1}{2}, \cos 30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4}{4}=1$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

5p	**1. a)** $A(1)=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{vmatrix}=1\cdot 0-(-2)\cdot 0=$ $=0-0=0$	**3p** **2p**
5p	**b)** $A(4)\cdot A(2)=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ $2A(3)-I_2=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 0 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, deci $A(4)\cdot A(2)=2\cdot A(3)-I_2$	**3p** **2p**
5p	**c)** $A(0)\cdot A(0)=I_2$ Deci $A(x)=A(0)$	**3p** **2p**
5p	**2. a)** $1*(-1)=1\cdot(-1)+1+(-1)=$ $=-1+1-1=-1$	**3p** **2p**
5p	**b)** $x*y=xy+x+y+1-1=x(y+1)+(y+1)-1=$ $=(x+1)(y+1)-1$	**3p** **2p**
5p	**c)** $x*x=(x+1)^2-1\Rightarrow(x+1)^2-1\leq 24\Rightarrow(x+1)^2\leq 25\Rightarrow\lvert x+1\rvert\leq\sqrt{25}$ $-5\leq x+1\leq 5\Rightarrow -6\leq x\leq 4\Rightarrow x\in[-6;4]$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

5p	**1. a)** $f'(x)=\left(\frac{x^2+3}{x-1}\right)'=\frac{(x^2+3)'\cdot(x-1)-(x^2+3)\cdot(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{2x\cdot(x-1)-(x^2+3)\cdot 1}{(x-1)^2}=$ $=\frac{2x^2-2x-x^2-3}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}, x\in(1,\infty)$	**3p** **2p**
5p	**b)** $f(2)=7, f'(2)=-3$ Ecuația tangentei este $y-f(2)=f'(2)(x-2)$, adică $y=-3x+13$	**2p** **3p**

5p	**c)** $f'(x)=0 \Rightarrow x=3\in(1,\infty)$; $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(1,3] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(1,3]$; $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[3,+\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[3,+\infty)$ Deci $f(x)\geq f(3)$, adică $f(x)\geq 6$, pentru orice $x\in(1,\infty)$.	**3p** **2p**
5p	**2. a)** $\int \frac{f(x)}{x}\,dx=\int \frac{3x^2-2x+1}{x}dx=\int\left(3x-2+\frac{1}{x}\right)dx=$ $=\frac{3x^2}{2}-2x+\ln x+\mathcal{C},\ x\in(0,\infty)$	**2p** **3p**
5p	**b)** $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ primitivă a funcției $f \Rightarrow F$ derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ $F'(x)=3x^2-2x+1=2x^2+(x-1)^2>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci F este strict crescătoare	**2p** **3p**
5p	**c)** $\int f(x)dx=\int(3x^2-2x+1)dx=x^3-x^2+x+\mathcal{C} \Rightarrow F(x)=x^3-x^2+x+c$, $c\in\mathbb{R}$ $F(1)=5\Rightarrow 1-1+1+c=5\Rightarrow c=4 \Rightarrow F(x)=x^3-x^2+x+4$	**3p** **2p**

Coordonator grup de lucru – M_tehnologic:
- Bălănescu Daniela, inspector școlar pentru matematică

Grup de lucru – M_tehnologic
- Bacula Mariana, Liceul Tehnologic de Electrotehnică și Telecomunicații Constanța
- Costea Cristina, Liceul Tehnologic *Nicolae Dumitrescu* Cumpăna
- Crangă Cleopatra, Liceul Teoretic Murfatlar
- Grassu Mariana, Liceul Cobadin
- Filip Adela – Cristina, Liceul Economic *Virgil Madgearu* Constanța
- Teodorescu Nicoleta, Colegiul Economic Mangalia

Bibliografie:
1) *Teste de antrenament 2020 și 2021*: Centrul Naţional de Politici și Evaluare în Educație
2) *Variante de subiecte 2022*, Centrul Național de Politici și Evaluare în Educație
3) Marius Burtea, Georgeta Burtea ș.a. *Exerciții recapitulative*. *Teste Matematică tehnologic*

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, decembrie 2024
Proba E.c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale;
profilul resurse, toate calificările profesionale, profilul tehnic, toate calificările profesionale

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

5p **1.** Arătați că $2{,}5 : 0{,}5 - 5 \cdot \left(6{,}5 - \frac{11}{2}\right) = 0$.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 + mx + 1 = 0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+4} = 5$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A = \{1,2,3,\dots,9\}$, acesta să verifice inegalitatea $(n-2)(n-6) \geq 0$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,4)$ și $B(8,4)$. Determinați lungimea medianei din vârful O al triunghiului AOB.

5p **6.** Se consideră pătratul $ABCD$ astfel încât aria triunghiului ABC este egală cu 2. Calculați perimetrul pătratului $ABCD$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ și $M(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A = -5$.

5p **b)** Arătați că $\det\left(A + M(-1)\right) = \det B$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $M(x) \cdot A - A \cdot M(x) = B$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{xy+x+y-1}{2}$.

5p **a)** Arătați că $1 * 2 = 2$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $x * x \leq 1$.

5p **c)** Calculați $(-1) * 0 * 1 * \dots * 2020$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{3}{5}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - 2x^3 - 1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = 3x^2(x-1)(x+2)$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $[-2,1]$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 2$.

5p **a)** Calculați $\int (f(x) - 2)dx$.

5p **b)** Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(2) = 7$.

5p **c)** Arătați că orice primitivă F a funcției f este convexă pe $\mathbb{R}$.

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, decembrie 2024
Proba E.c)
Matematică *M_tehnologic*
Barem de evaluare și de notare

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale;
profilul resurse, toate calificările profesionale, profilul tehnic, toate calificările profesionale

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

5p	**1**. $2,5:0,5-5\cdot\left(6,5-\frac{11}{2}\right)=25:5-5\cdot(6,5-5,5)=$ $=5-5\cdot 1=0$	**3p** **2p**
5p	**2.** $x_1+x_2=-m, x_1x_2=1$ $-m+2\cdot 1=1$, deci $m=1$	**2p** **3p**
5p	**3.** $x+4=25$ $x=21$, care convine	**3p** **2p**
5p	**4.** Mulțimea A are 9 elemenete, deci sunt 9 cazuri posibile Numerele n din mulțimea A pentru care $(n-2)(n-6)\geq 0$ sunt $1,2,6,7,8$ și 9, deci sunt 6 cazuri favorabile $P=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$	**2p** **3p**
5p	**5**. $M(3,4)$, unde M este mijlocul segmentului AB $OM=\sqrt{3^2+4^2}=5$	**2p** **3p**
5p	**6.** Triunghiul ABC este dreptunghic în B, deci $\frac{AB\cdot BC}{2}=2$, și cum $AB=BC$, obținem $AB=2$ $P_{ABCD}=4AB=8$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

5p	**1.a)** $\det A=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-2\cdot 3=$ $=1-6=-5$	**3p** **2p**
5p	**b)** $M(-1)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}, A+M(-1)=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 4 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow det(A+M(-1))=-16$ $\det B=\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 0 & 4\end{vmatrix}=-16$, deci $\det\big(A+M(-1)\big)=\det B$	**3p** **2p**
5p	**c)** $M(x)\cdot A=\begin{pmatrix}x+2 & 3x+1\\ 8 & 9\end{pmatrix},\ A\cdot M(x)=\begin{pmatrix}x+6 & 10\\ 2x+2 & 5\end{pmatrix}, M(x)=\begin{pmatrix}-4 & 3x-9\\ 6-2x & 4\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-4 & 3x-9\\ 6-2x & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=3$	**3p** **2p**
5p	**2. a)** $1*2=\frac{1\cdot 2+1+2-1}{2}=$ $=\frac{4}{2}=2$	**3p** **2p**
5p	**b)** $\frac{x^2+2x-1}{2}\leq 1\Leftrightarrow x^2+2x-3\leq 0\Leftrightarrow(x+3)(x-1)\leq 0$ $x\in[-3,1]$	**3p** **2p**
5p	**c)** $(-1)*x=-1$, pentru orice număr real x $(-1)*0*1*\ldots*2020=(-1)*(0*1*\ldots*2020)=-1$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

5p	**1. a)** $f'(x)=3x^4+3x^3-6x^2=$ $=3x^2(x^2+x-2)=3x^2(x-1)(x+2), x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
5p	**b)** $f(0)=-1, f'(0)=0$ Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=-1$	**2p** **3p**
5p	**c)** $x\in[-2,1]\Rightarrow x-1\leq 0$ și $x+2\geq 0$ $f'(x)=3x^2(x-1)(x+2)\leq 0$, pentru orice $x\in[-2,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[-2,1]$	**2p** **3p**
5p	2. a) $\int(f(x)-2)dx=\int(x^3+2-2)dx=\int x^3dx=$ $=\frac{x^4}{4}+C$	**3p** **2p**

5p	**b)** $\int f(x)dx = \frac{x^4}{4} + 2x + \mathcal{C} \Rightarrow F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x + c$, $c \in \mathbb{R}$ $F(2) = 7 \Rightarrow c = -1$, deci $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x - 1$	**2p** **3p**
5p	**c)** $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ primitivă a funcției $f \Rightarrow F$ derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ $F''(x) = f'(x) = 3x^2 \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci F este convexă pe $\mathbb{R}$	**2p** **3p**

Coordonator grup de lucru – M_tehnologic:
- Bălănescu Daniela, inspector școlar pentru matematică

Grup de lucru – M_tehnologic
- Bacula Mariana, Liceul Tehnologic de Electrotehnică și Telecomunicații Constanța
- Costea Cristina, Liceul Tehnologic *Nicolae Dumitrescu* Cumpăna
- Crangă Cleopatra, Liceul Teoretic Murfatlar
- Grassu Mariana, Liceul Cobadin
- Filip Adela – Cristina, Liceul Economic *Virgil Madgearu* Constanța
- Teodorescu Nicoleta, Colegiul Economic Mangalia

Bibliografie:
1) *Teste de antrenament 2020 și 2021*: Centrul Naţional de Politici și Evaluare în Educație
2) *Variante de subiecte 2022*, Centrul Național de Politici și Evaluare în Educație
3) Marius Burtea, Georgeta Burtea ș.a. *Exerciții recapitulative*. *Teste Matematică tehnologic*

Examenul național de bacalaureat 2025
Simulare județeană

Proba E.c) Matematică *M_mate_info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

Mate.info.ro
profu' de mate

SUBIECTUL I (30 puncte)

5p **1.** Determinați numărul complex $z \in \mathbb{C}$ știind că $(2-i)z = 4i + \bar{z}$, unde $i^2 =-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx + m - 2$, unde m este număr real. Determinați valorile parametrului real m pentru care $f(m) = f(f(-1))$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(4x) = \log_x 8$.

5p **4.** Fie mulțimea $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. Care este probabilitatea ca alegând o submulțime dintre submulțimile cu trei elemente ale mulțimii A, aceasta să aibă produsul elementelor număr impar?

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC. Fie M mijlocul laturii (BC) și N mijlocul lui (AM). Să se arate că $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{NM}$.

5p **6.** Determinați $x \in (0,\pi)$ pentru care $\sqrt{3} \cdot \sin 2x = 2\cos^2 x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & a & 4 \end{pmatrix}$ și sistemul $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+az=2 \\ 2x+ay+4z=3 \end{cases}$ unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a)) = a(3-a)$.

5p **b)** Pentru $a = 0$, arătați că sistemul este incompatibil.

5p **c)** Pentru $a = 3$, determinați soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului care au proprietatea că $x_0^2 = y_0 \cdot z_0$.

2. Pe mulțimea $G = (-1,1)$ se consideră legea de compoziție asociativă: $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$.

5p **a)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție ”$*$”.

5p **b)** Fie funcția $f: G \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$. Arătați că $f(x*y) = f(x)f(y)$ pentru orice $x, y \in G$.

5p **c)** Determinați numerele reale $x \in G$, pentru care $\underbrace{x * x * \cdots * x}_{de\ 2025\ ori} = x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(e^{2x}+1\right)-x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că pentru orice număr natural nenul n, ecuația $f(x)=n$ are două rădăcini reale.

2. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^3+4}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{1}{3}\ln\frac{5}{4}$.

5p **b)** Arătați că orice primitivă a funcției f are exact un punct de inflexiune.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(x^n)dx=0$.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr. 6, 200760 Craiova,
Telefon 0251/420961; 0351/407395 (407397) Fax: 0251/421824, 0351/407396
E-mail: isjdolj@isjdolj.ro Web: www.isjdolj.ro
MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII

Mate.info.ro profu' de mate

Examenul național de bacalaureat 2025
Simulare județeană
Proba E.c) Matematică *M_mate_info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

1.	$z=a+bi \Longrightarrow (2-i)(a+bi)=4i+a-bi \Longrightarrow 2a+b+i(2b-a)=a+i(4-b)$	**2p**
	$2a+b=a, 2b-a=4-b \Longrightarrow a=-1, b=1 \Longrightarrow z=-1+i$	**3p**
2.	$f(m)=2m^2+m-2, f\big(f(-1)\big)=-1 \Longrightarrow 2m^2+m-2=-1$	**2p**
	Obținem $2m^2+m-1=0 \Longrightarrow m\in\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$.	**3p**
3.	$x\in(0,\infty)\setminus\{1\}$. $\log_2(4x)=\log_x 8 \Leftrightarrow 2+\log_2 x=\frac{3}{\log_2 x} \Leftrightarrow (\log_2 x)^2+2\log_2 x-3=0$	**3p**
	$(\log_2 x-1)(\log_2 x+3)=0 \Longrightarrow \log_2 x=1, \log_2 x=-3 \Longrightarrow x=2, x=\frac{1}{8}$, care verifică ecuația dată.	**2p**
4.	Avem $C_6^3=20$ cazuri posibile și $C_3^3=1$ cazuri favorabile $\Longrightarrow$	**3p**
	$P=\frac{1}{20}$.	**2p**
5.	$\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=2\overrightarrow{NM}$	**3p**
	$\overrightarrow{NA}=-\overrightarrow{NM} \Longrightarrow \overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{NM}$	**2p**
6.	$\sqrt{3}\sin 2x=2\cos^2 x \Rightarrow 2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\cos^2 x=0 \Rightarrow 2\cos x\,(\sqrt{3}\sin x-\cos x)=0$	**2p**
	$\cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}\in(0,\pi)$ $\sqrt{3}\sin x-\cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}\in(0,\pi)$.	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

1.a)	$\det\big(A(a)\big)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&a\\2&a&4\end{vmatrix}=8+a+2a-4-a^2-4=$	**3p**
	$=3a-a^2=a(3-a)$.	**2p**
b)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&0\\2&0&4\end{pmatrix} \Rightarrow rang\,\big(A(0)\big)=2$	**2p**
	$\overline{A(0)}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&0&2\\2&0&4&3\end{pmatrix} \Rightarrow rang\,\big(\overline{A(0)}\big)=3$	**2p**
	$rang\,\big(A(0)\big)\neq\ rang\,\big(\overline{A(0)}\big) \Rightarrow$ sistem incompatibil.	**1p**
c)	Pentru $a=3$, soluțiile sistemului sunt de forma $\left(\frac{1-\alpha}{2},\alpha,\frac{1-\alpha}{2}\right)$ unde $\alpha\in\mathbb{R}$.	**3p**
	$x_0^2=y_0z_0 \Rightarrow \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2=\alpha\cdot\frac{1-\alpha}{2} \Rightarrow \alpha=1, \alpha=\frac{1}{3}$	**1p**

	$\alpha = 1 \Rightarrow S_1 = (0,1,0)$ și $\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow S_2 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.	1p
2.a)	$x * e = e * x = \dfrac{x+e}{1+xe}$ $x * e = x \Longrightarrow \dfrac{x+e}{1+xe} = x$ $x + e = x + x^2 e \Longrightarrow e = 0.$	1p 1p 3p
b)	$f(x * y) = f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right) = \dfrac{1 - \frac{x+y}{1+xy}}{1 + \frac{x+y}{1+xy}} = \dfrac{xy - x - y + 1}{xy + x + y + 1}$ $f(x)f(y) = \dfrac{1-x}{1+x} \cdot \dfrac{1-y}{1+y} = \dfrac{xy - x - y + 1}{xy + x + y + 1} \Longrightarrow f(x * y) = f(x)f(y)$	3p 2p
c)	$\underbrace{x * x * \cdots * x}_{de\ 2025\ ori} = x \Longrightarrow f\left(\underbrace{x * x * \cdots * x}_{de\ 2025\ ori}\right) = f(x) \Longrightarrow \underbrace{f(x) \cdot f(x) \cdot \cdots \cdot f(x)}_{de\ 2025\ ori} = f(x) \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \left(f(x)\right)^{2025} = f(x) \Longrightarrow f(x) = 0, f(x) = 1, f(x) = -1$ $f(x) = -1$ nu convine, $f(x) = 0 \Longrightarrow x = 1$ care nu convine, $f(x) = 1 \Longrightarrow x = 0 \in G$	 3p 2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

1.a)	$f'(x) = (\ln(e^{2x} + 1)' - (x)' = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} - 1 =$ $= \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.	3p 2p
b)	$m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ $n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - x) = 0$ $\Longrightarrow$ dreapta $y = x$ este asimptotă oblică spre ∞ la graficul funcției	2p 2p 1p
c)	f derivabilă pe $\mathbb{R}$, strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ și strict crescătoare pe $(0, \infty)$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty,\ f(0) = \ln 2$ $n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \Longrightarrow n > \ln 2$ și deci, ecuația $f(x) = n$ are două rădăcini reale.	2p 2p 1p
2.a)	$\int_0^1 f^2(x)dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x^3+4} dx = \frac{1}{3} \ln(x^3 + 4)\Big\vert_0^1 =$ $= \frac{1}{3}(\ln 5 - \ln 4) = \frac{1}{3} \ln \frac{5}{4}$.	3p 2p
b)	Fie F o primitivă a lui $f \Longrightarrow F$ derivabilă și $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in [0, \infty) \Longrightarrow$ $\Longrightarrow F''(x) = f'(x) = \frac{8-x^3}{(x^3+4)\sqrt{x^3+4}}$. F convexă pe $[0,2]$, F concavă pe $[2, \infty) \Longrightarrow x = 2$ punct de inflexiune pentru $F(x)$.	 3p 2p
c)	$x \in [0,1] \Longrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq x^{3n} \leq 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{5}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x^{3n}+4}} \leq \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \dfrac{x^n}{\sqrt{5}} \leq f(x^n) \leq \dfrac{x^n}{2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{5}} dx \leq \int_0^1 f(x^n)dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{2} dx \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}(n+1)} \leq \int_0^1 f(x^n)dx \leq \frac{1}{2(n+1)}$ de unde $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 f(x^n)dx = 0.$	2p 3p

Examenul național de bacalaureat 2025
Simulare județeană
Proba E.c) Matematică *M_șt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Mate.info.ro
profu' de mate

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1**. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$, cu $b_5=8$ și $b_6=4$. Arătați că numărul $\sqrt{\frac{b_1}{2}}$ este natural.
5p	**2**. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x-3$. Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $P\left(a+1,a^2+11\right)$ este situat pe graficul funcției f.
5p	**3**. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(2x+1)=\log_2 8$.
5p	**4**. Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr x din mulţimea numerelor naturale de două cifre, numărul $\frac{x}{2}$ să facă parte din intervalul $(20;23)$.
5p	**5**. În reperul xOy se consideră punctele $A(3,-4)$ și $B(-2,0)$. Determinați numărul real m pentru care vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\vec{u}=2m\vec{i}-(m+3)\vec{j}$ sunt coliniari.
5p	**6**. Se consideră $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\sin x=\frac{2}{3}$. Arătați că $\operatorname{tg} x=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}1&0&x\\x&1&0\\0&x&1\end{pmatrix}$, unde x este un număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det A=1$.
5p	**b)** Arătați că $B(x)\cdot B(y)-xyA=B(x+y)$, oricare ar fi numerele reale x și y.
5p	**c)** Pentru fiecare număr întreg nenul k se consideră matricea $C(k)=B\left(\frac{2}{k}\right)-\frac{2}{k}A$. Determinați numerele k pentru care $\det C(k)$ este număr întreg.
	2. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x*y=x^2y^2-x^2-y^2+2$.
5p	**a)** Arătați că $0*(-1)=1$.
5p	**b)** Determinați numerele reale x pentru care $(x+1)*x=x*(x-1)$.
5p	**c)** Arătați că dacă x și y sunt numere reale astfel încât $\lvert x\rvert\geq 2$ și $\lvert y\rvert\geq 3$, atunci $\sqrt{x*y}\geq 5$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(2x^2-4x\right)\cdot\ln x-3x^2+8x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=4(x-1)(\ln x-1)$, $x\in(0,\infty)$.
5p	**b)** Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)+3x^2-8x}{x\cdot f'(x)}$.
5p	**c)** Arătați că $\frac{12e-5}{e^2}\leq f\left(\frac{1}{x}\right)\leq 5$, pentru orice $x\in[1,e]$.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x}\cdot\sqrt{x+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^{\ln 2}\frac{f(x)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=1$.

5p **b)** Calculaţi $\int_0^1 f\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x$.

5p **c)** Determinaţi numărul real m pentru care $2\int_0^1 (x+1)f(x)\mathrm{d}x=m-3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Mate.info.ro
profu' de mate

Examenul național de bacalaureat 2025
Simulare județeană
Proba E.c) Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	Rația progresiei este $q=\frac{b_6}{b_5}=\frac{1}{2}$. $b_5=b_1q^4$, de unde $b_1=128$, deci $\sqrt{\frac{b_1}{2}}=\sqrt{64}=8$, care este număr natural.	**2p** **3p**
2.	$f(a+1)=a^2+11$, deci $(a+1)^2+a+1-3=a^2+11$ $a^2+3a-1=a^2+11$, de unde obținem $a=4$.	**3p** **2p**
3.	$\log_3(2x+1)=3$, de unde $2x+1=27$ $x=13$, care convine.	**3p** **2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Din $20<\frac{x}{2}<23$, cum x este număr natural, se obține $x\in\{41,42,43,44,45\}$, deci sunt 5 cazuri favorabile. $p=\frac{5}{90}=\frac{1}{18}$.	**2p** **3p**
5.	$\overrightarrow{AB}=(-2-3)\vec{i}+(0+4)\vec{j}=-5\vec{i}+4\vec{j}$ $\overrightarrow{AB}$ şi $\vec{u}$ coliniari implică $\frac{-5}{2m}=\frac{4}{-m-3}$, deci $5m+15=8m$, de unde $m=5$.	**2p** **3p**
6.	Cum $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $\sin x=\frac{2}{3}$ şi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, se obține $\cos x=\frac{\sqrt{5}}{3}$ $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{2}{\sqrt{5}}$.	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{vmatrix}=0\cdot0\cdot0+0\cdot0\cdot0+1\cdot1\cdot1-0\cdot0\cdot1-0\cdot0\cdot1-0\cdot0\cdot1=$ $=0+0+1-0-0-0=1$.	**3p** **2p**
b)	$B(x)\cdot B(y)=\begin{pmatrix}1&0&x\\x&1&0\\0&x&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&y\\y&1&0\\0&y&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&xy&x+y\\x+y&1&xy\\xy&x+y&1\end{pmatrix}$	**3p**

	$B(x)\cdot B(y)-xyA=\begin{pmatrix}1&xy&x+y\\x+y&1&xy\\xy&x+y&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&xy&0\\0&0&xy\\xy&0&0\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}1&0&x+y\\x+y&1&0\\0&x+y&1\end{pmatrix}=B(x+y)$	2p
c)	$C(k)=B\left(\frac{2}{k}\right)-\frac{2}{k}A=\begin{pmatrix}1&0&\frac{2}{k}\\\frac{2}{k}&1&0\\0&\frac{2}{k}&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&\frac{2}{k}&0\\0&0&\frac{2}{k}\\\frac{2}{k}&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{2}{k}&\frac{2}{k}\\\frac{2}{k}&1&-\frac{2}{k}\\-\frac{2}{k}&\frac{2}{k}&1\end{pmatrix}$ $\det C(k)=1+\frac{12}{k^2}$, care este număr întreg dacă şi numai dacă $k\in\{1,\ -1,2,\ -2\}$.	2p 3p
2.a)	$0*(-1)=0^2\cdot(-1)^2-0^2-(-1)^2+2=$ $=0-0-1+2=1$	3p 2p
b)	$(x+1)*x=x^4+2x^3-x^2-2x+1$ și $x*(x-1)=\ x^4-2x^3-x^2+2x+1$ $(x+1)*x=x*(x-1)$ are loc dacă și numai dacă $4x\left(x^2-1\right)=0$, de unde se obțin soluțiile $x=-1$, $x=0$ și $x=1$.	3p 2p
c)	Din $\lvert x\rvert\geq 2$ și $\lvert y\rvert\geq 3$ se obține $x^2\geq 4$ și $y^2\geq 9$ $\sqrt{x*y}=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}=\sqrt{x^2(y^2-1)-(y^2-1)+1}=\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)+1}$ $\geq\sqrt{(4-1)(9-1)+1}=\sqrt{25}=5$.	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(4x-4)\cdot\ln x+\left(2x^2-4x\right)\cdot\frac{1}{x}-6x+8=$ $=4(x-1)\cdot\ln x-4x+4=4(x-1)(\ln x-1)$, $x\in(0,\infty)$.	3p 2p
b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)+3x^2-8x}{x\cdot f'(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x^2-4x)\cdot\ln x}{4x(x-1)(\ln x-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-4x}{4x(x-1)}\cdot\frac{\ln x}{\ln x-1}\right)=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}{4x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\ln x\cdot\left(1-\frac{1}{\ln x}\right)}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$.	2p 3p
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru $x\in(0,1]$, deci f este crescătoare pe intervalul $(0,1]$, $x\in[1,e]$ implică $\frac{1}{x}\in\left[\frac{1}{e},1\right]$ Se obține $f\left(\frac{1}{e}\right)\leq f\left(\frac{1}{x}\right)\leq f(1)$, $x\in[1,e]$, echivalent $\frac{12e-5}{e^2}\leq f\left(\frac{1}{x}\right)\leq 5$, $x\in[1,e]$.	2p 3p
2.a)	$\int_0^{\ln 2}\frac{f(x)}{\sqrt{x+1}}dx=\int_0^{\ln 2}e^x dx=e^x\Big\vert_0^{\ln 2}=$ $=e^{\ln 2}-e^0=2-1=1$.	3p 2p
b)	$\int_0^1 f\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 xe^{x^2-1}\mathrm{d}x=\frac{e^{x^2-1}}{2}\Big\vert_0^1=$ $=\frac{1}{2}-\frac{e^{-1}}{2}=\frac{e-1}{2e}$.	3p 2p
c)	$\int_0^1(x+1)f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(x+1)^{\frac{3}{2}}e^x\mathrm{d}x=\int_0^1(x+1)^{\frac{3}{2}}(e^x)'\mathrm{d}x=$ $=(x+1)^{\frac{3}{2}}e^x\Big\vert_0^1-\frac{3}{2}\int_0^1\sqrt{x+1}e^x\mathrm{d}x=2\sqrt{2}e-1-\frac{3}{2}\int_0^1\sqrt{x+1}e^x\mathrm{d}x$ Se obţine $2\int_0^1(x+1)f(x)\mathrm{d}x=2\cdot\left(2\sqrt{2}e-1\right)-3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, deci $m=2\cdot\left(2\sqrt{2}e-1\right)$.	3p 2p

Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 4 + i$ și $z_2 = 2 - 4i$. Arătați că $i \cdot z_1 + z_2 = 1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 5$. Determinați numerele reale a pentru care punctul $A(a,5)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_6(7x-5) = \log_6(x+1) + \dfrac{1}{\log_x 6}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu impar al lui 9.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,0)$, $B(2,4)$ și $C(5,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că dreptele OB și AC sunt paralele.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, cu $AB = 6$, $BC = 10$ și $\cos B = \dfrac{4}{5}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 18.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \\ -x & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A = 1$.

5p **b)** Arătați că $A - B(x) \cdot A = xI_3$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $C(x)$ astfel încât $A \cdot C(x) = B(x)$. Arătați că $C(x) - C(y) = (y - x)A$, pentru orice numere reale x și y.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x^2 y + xy^2 + x + y$.

5p **a)** Arătați că $1 * 3 = 16$.

5p **b)** Determinați numerele reale nenule x pentru care $x * \dfrac{2}{x} = 9x$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere întregi, cu $m \le n$, pentru care $m * n = 1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \dfrac{1 - 3\ln x}{x^4}$, $x \in (0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați mulțimea numerelor reale m pentru care ecuația $f(x) = m$ are cel puțin o soluție.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x^2-1$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^4 \left(f(x)-e^x\right)dx=18$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^2 \frac{e^x}{f(x)-x^2}dx=\ln(e+1)$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_0^1 \frac{x}{f(x)+1}dx\le 1-\frac{2}{e}$.

Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$i \cdot z_1 + z_2 = 4i + i^2 + 2 - 4i =$	**3p**
	$= -1 + 2 = 1$	**2p**
2.	$f(a) = 5$, de unde obținem $a^2 - 3a = 0$	**3p**
	$a = 0$ sau $a = 3$	**2p**
3.	$\log_6(7x-5) = \log_6(x^2 + x)$, deci $7x - 5 = x^2 + x$, de unde obținem $x^2 - 6x + 5 = 0$	**3p**
	$x = 1$, care nu convine, sau $x = 5$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre, numerele 27, 45, 63, 81 și 99 sunt multiplii impari de 9, deci sunt 5 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$	**3p**
5.	$m_{OB} = 2$	**2p**
	$m_{AC} = \frac{a}{3}$ și, cum $m_{OB} = m_{AC}$, obținem $a = 6$	**3p**
6.	$\sin B = \frac{3}{5}$	**3p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin B}{2} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \frac{3}{5} = 18$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot (-1) \cdot 0 - 0 \cdot (-1) \cdot 0 =$	**3p**
	$= 0 + 1 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$	**2p**
b)	$B(x) \cdot A = \begin{pmatrix} -x & 0 & 1 \\ -1 & -x & 0 \\ 0 & -1 & -x \end{pmatrix}$, $A - B(x) \cdot A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} =$	**3p**
	$= x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = xI_3$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C(x) = A^{-1} \cdot B(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -x \\ x & 0 & -1 \\ 1 & x & 0 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$C(x) - C(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -x+y \\ x-y & 0 & 0 \\ 0 & x-y & 0 \end{pmatrix} = (y-x)A$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

2.a)	$1*3=1^2\cdot 3+1\cdot 3^2+1+3=$	**3p**
	$=3+9+4=16$	**2p**
b)	$x*\frac{2}{x}=\frac{3x^2+6}{x}$, pentru orice număr real nenul x	**3p**
	$\frac{3x^2+6}{x}=9x$, de unde obținem $x=-1$ sau $x=1$, care convin	**2p**
c)	$m*n=(m+n)(mn+1)$, pentru orice numere întregi m și n	**2p**
	$(m+n)(mn+1)=1$ și, cum m și n sunt numere întregi, cu $m\le n$, obținem perechile $(0,1)$ și $(-2,1)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^3-3x^2\ln x}{x^6}=$	**3p**
	$=\frac{x^2-3x^2\ln x}{x^6}=\frac{1-3\ln x}{x^4}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{3x^2}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=\sqrt[3]{e}$; pentru orice $x\in\left(0,\sqrt[3]{e}\right]$, $f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $\left(0,\sqrt[3]{e}\right]$ și, pentru orice $x\in\left[\sqrt[3]{e},+\infty\right)$, $f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $\left[\sqrt[3]{e},+\infty\right)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$, $f\left(\sqrt[3]{e}\right)=\frac{1}{3e}$ și f este continuă, deci mulțimea numerelor reale m pentru care ecuația $f(x)=m$ are cel puțin o soluție este $\left(-\infty,\frac{1}{3e}\right]$	**3p**
2.a)	$\int_1^4\left(f(x)-e^x\right)dx=\int_1^4\left(x^2-1\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\right\|_1^4=$	**3p**
	$=\frac{64}{3}-4-\left(\frac{1}{3}-1\right)=18$	**2p**
b)	$\int_1^2\frac{e^x}{f(x)-x^2}dx=\int_1^2\frac{e^x}{e^x-1}dx=\int_1^2\frac{\left(e^x-1\right)'}{e^x-1}dx=\left.\ln\left(e^x-1\right)\right\|_1^2=$	**3p**
	$=\ln\left(e^2-1\right)-\ln(e-1)=\ln(e+1)$	**2p**
c)	$\int_0^1\frac{x}{f(x)+1}dx=\int_0^1\frac{x}{e^x+x^2}dx$ și, cum $e^x+x^2\ge e^x$, pentru orice $x\in[0,1]$, obținem relația $\int_0^1\frac{x}{f(x)+1}dx\le\int_0^1 xe^{-x}dx$	**3p**
	$\int_0^1 xe^{-x}dx=\int_0^1 x\left(-e^{-x}\right)'dx=\left.-e^{-x}(x+1)\right\|_0^1=1-\frac{2}{e}$, deci $\int_0^1\frac{x}{f(x)+1}dx\le 1-\frac{2}{e}$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$, știind că $a_3=19$ și $a_4=25$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că $f(2)=8$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{2-x}-\frac{1}{625}\cdot25^x=0$.

5p **4.** Determinați câte submulțimi cu două elemente are mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,2)$, $B(2,0)$ și $C(8,2)$. Determinați lungimea segmentului DE, unde punctele D și E sunt mijloacele segmentelor OA, respectiv BC.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AB=6$ și $B=\frac{\pi}{6}$. Arătați că raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu $2\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0&-1\\2&4\end{pmatrix}$ și $M(a)=\begin{pmatrix}a&1\\2-2a&2-a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=2$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $M(2)\cdot A=xM(1)$.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care $(M(a)-2I_2)\cdot M(a)=(a+2)I_2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=(x-6)(y-6)+6$.

5p **a)** Arătați că $9\circ8=12$.

5p **b)** Arătați că $e=7$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Determinați numerele reale nenule x pentru care $x\circ\frac{6}{x}=6x$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-5)\sqrt{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{5(x-1)(x+1)}{2\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{x\sqrt{x}}=\frac{5}{2}$.

5p **c)** Arătați că $f(x+2)-f(x)\le26$, pentru orice $x\in(0,2]$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2(f(x)-4\ln x)dx=\frac{7}{3}$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e\frac{f(x)-x^2}{x}dx=2$.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care $\int_1^2\left(f(x)f''(x)+(f'(x))^2\right)dx=m(f(2)-f(1))$.

Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	Rația progresiei este $r = a_4 - a_3 = 6$	**3p**
	$a_1 = a_3 - 2r = 7$	**2p**
2.	$f(2) = 4 + a$	**2p**
	$4 + a = 8$, de unde obținem $a = 4$	**3p**
3.	$5^{2-x} - 5^{-4} \cdot 5^{2x} = 0$, deci $5^{2-x} = 5^{2x-4}$, de unde obținem $2 - x = 2x - 4$	**3p**
	$x = 2$	**2p**
4.	$C_6^2 = \dfrac{6!}{2! \cdot 4!} =$	**3p**
	$= 15$	**2p**
5.	$D(1,1)$ și $E(5,1)$	**2p**
	$DE = 4$	**3p**
6.	$\cos B = \dfrac{AB}{BC}$, deci $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{6}{BC}$, de unde obținem $BC = 4\sqrt{3}$	**3p**
	$R = \dfrac{BC}{2}$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC, deci $R = 2\sqrt{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot 4 - (-1) \cdot 2 =$	**3p**
	$= 0 + 2 = 2$	**2p**
b)	$M(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $M(2) \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2M(1)$	**3p**
	$2M(1) = xM(1)$, de unde obținem $x = 2$	**2p**
c)	$M(a) - 2I_2 = \begin{pmatrix} a-2 & 1 \\ 2-2a & -a \end{pmatrix}$, $(M(a) - 2I_2) \cdot M(a) = \begin{pmatrix} a^2 - 4a + 2 & 0 \\ 0 & a^2 - 4a + 2 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**3p**
	$\begin{pmatrix} a^2 - 4a + 2 & 0 \\ 0 & a^2 - 4a + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2 & 0 \\ 0 & a+2 \end{pmatrix}$, de unde obținem $a = 0$ sau $a = 5$	**2p**
2.a)	$9 \circ 8 = (9-6)(8-6) + 6 =$	**3p**
	$= 6 + 6 = 12$	**2p**
b)	$x \circ 7 = (x-6)(7-6) + 6 = x - 6 + 6 = x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$7 \circ x = (7-6)(x-6) + 6 = x - 6 + 6 = x$, pentru orice număr real x, deci $e = 7$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**3p**

c)	$x\circ\frac{6}{x}=\frac{6(x-6)(1-x)}{x}+6$, pentru orice număr real nenul x	**2p**
	$\frac{6(x-6)(1-x)}{x}+6=6x\Leftrightarrow x^2-4x+3=0$, de unde obținem $x=1$ sau $x=3$, care convin	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x\sqrt{x}+\left(x^2-5\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=$	**3p**
	$=\frac{5x^2-5}{2\sqrt{x}}=\frac{5(x-1)(x+1)}{2\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{x\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5(x-1)(x+1)}{2x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)}{2x^2}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)}{2}=\frac{5}{2}$	**2p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=1$; pentru orice $x\in(0,1]$, $f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$ și, pentru orice $x\in[1,+\infty)$, $f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**2p**
	$x\in(0,2]\Rightarrow x+2\in(2,4]$, deci $f(x)\ge f(1)$ și $f(x+2)\le f(4)$ și, cum $f(1)=-4$ și $f(4)=22$, obținem $f(x+2)-f(x)\le 26$, pentru orice $x\in(0,2]$	**3p**
2.a)	$\int\limits_1^2\left(f(x)-4\ln x\right)dx=\int\limits_1^2 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right\|_1^2=$	**3p**
	$=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$	**2p**
b)	$\int\limits_1^e\frac{f(x)-x^2}{x}dx=\int\limits_1^e\frac{4\ln x}{x}dx=4\int\limits_1^e\ln x(\ln x)'dx=\left.2\ln^2 x\right\|_1^e=$	**3p**
	$=2\ln^2 e-2\ln^2 1=2$	**2p**
c)	$\int\limits_1^2\left(f(x)f''(x)+\left(f'(x)\right)^2\right)dx=\int\limits_1^2\left(f(x)f'(x)\right)'dx=\left.\left(f(x)f'(x)\right)\right\|_1^2=f(2)f'(2)-f(1)f'(1)$	**3p**
	$f'(x)=2x+\frac{4}{x}$, $x\in(0,+\infty)$; $f'(1)=f'(2)=6$, deci $6\left(f(2)-f(1)\right)=m\left(f(2)-f(1)\right)$ și, cum $f(1)\ne f(2)$, obținem $m=6$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*

Model

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_2 = 4$ și $a_3 = 6$. Calculați a_1.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 4$. Arătați că $f(0) = f(1)$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $7^{3x-2} - 49\cdot 7^x = 0$.
5p	**4.** După ce parcurge 75% din lungimea unui traseu montan, un alpinist constată că mai are de parcurs 2 km până la finalul traseului. Calculați lungimea întregului traseu montan.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$ și $B(5,7)$. Determinați lungimea segmentului AC, știind că punctul B este mijlocul segmentului AC.
5p	**6.** Arătați că $4(\sin 60°\cdot\cos 30° - \sin 45°\cdot\cos 45°) = 1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y = \dfrac{x+y}{2} - 1$.
5p	**1.** Arătați că $(-2)\circ 4 = 0$.
5p	**2.** Arătați că legea de compoziție „$\circ$” este comutativă.
5p	**3.** Demonstrați că $(2x+1)\circ 1 = x$, pentru orice număr real x.
5p	**4.** Determinați numerele reale x pentru care $x^2\circ x = 2$.
5p	**5.** Arătați că $(x^2+3)\circ(4x+5)\geq 1$, pentru orice număr real x.
5p	**6.** Determinați perechile (m,n) de numere naturale, cu $m<n$, pentru care $m\circ n\leq 0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} a-1 & a \\ a & a+1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**1.** Arătați că $\det(A(2)) = -1$.
5p	**2.** Arătați că $A(2) + A(0) = 2A(1)$.
5p	**3.** Arătați că $A(0)\cdot A(0) = I_2$.
5p	**4.** Demonstrați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a.
5p	**5.** Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a) + aI_2) = 11$.
5p	**6.** Se consideră matricea $C(a,b) = aA(b) + bA(a)$, unde a și b sunt numere reale. Determinați perechile (a,b) de numere naturale pentru care suma elementelor matricei $C(a,b)$ este egală cu 24.

Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_2=\dfrac{a_1+a_3}{2}$	**3p**
	$a_1=2$	**2p**
2.	$f(0)=4$	**2p**
	$f(1)=4$, deci $f(0)=f(1)$	**3p**
3.	$7^{3x-2}=7^{x+2}$, deci $3x-2=x+2$, de unde obținem $2x=4$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	$x-\dfrac{75}{100}\cdot x=2$, unde x reprezintă lungimea traseului	**3p**
	$x=8\text{ km}$	**2p**
5.	$AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$	**3p**
	$AC=2AB=10$	**2p**
6.	$\sin 60^\circ=\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**
	$4\left(\sin 60^\circ\cdot\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\cdot\cos 45^\circ\right)=4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=4\cdot\dfrac{1}{4}=1$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	$(-2)\circ 4=\dfrac{-2+4}{2}-1=$	**3p**
	$=1-1=0$	**2p**
2.	$y\circ x=\dfrac{y+x}{2}-1=$	**3p**
	$=\dfrac{x+y}{2}-1=x\circ y$, pentru orice numere reale x și y, deci legea de compoziție „$\circ$” este comutativă	**2p**
3.	$(2x+1)\circ 1=\dfrac{2x+1+1}{2}-1=$	**2p**
	$=x+1-1=x$, pentru orice număr real x	**3p**
4.	$x^2\circ x=\dfrac{x^2+x}{2}-1$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\dfrac{x^2+x}{2}-1=2$, deci $x^2+x-6=0$, de unde obținem $x=-3$ sau $x=2$	**3p**

5.	$\left(x^2+3\right)\circ(4x+5)=\frac{x^2+3+4x+5}{2}-1=\frac{x^2+4x+6}{2}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\frac{x^2+4x+6}{2}=\frac{x^2+4x+4}{2}+1=\frac{(x+2)^2}{2}+1\geq 1$, pentru orice număr real x	**3p**
6.	$m\circ n=\frac{m+n-2}{2}$, pentru orice numere naturale m și n	**2p**
	$\frac{m+n-2}{2}\leq 0\Leftrightarrow m+n\leq 2$ și, cum m și n sunt numere naturale, cu $m<n$, obținem perechile $(0,1)$ și $(0,2)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$A(2)=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(2)\right)=\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}=1\cdot 3-2\cdot 2=$	**3p**
	$=3-4=-1$	**2p**
2.	$A(2)+A(0)=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\2&4\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}=2A(1)$	**2p**
3.	$A(0)\cdot A(0)=\begin{pmatrix}(-1)\cdot(-1)+0\cdot 0 & (-1)\cdot 0+0\cdot 1\\ 0\cdot(-1)+1\cdot 0 & 0\cdot 0+1\cdot 1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$	**2p**
4.	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}a-1&a\\a&a+1\end{vmatrix}=(a-1)(a+1)-a^2=$	**3p**
	$=a^2-1-a^2=-1$, deci $\det\left(A(a)\right)\neq 0$, de unde obținem că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a	**2p**
5.	$A(a)+aI_2=\begin{pmatrix}2a-1&a\\a&2a+1\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(a)+aI_2\right)=3a^2-1$, pentru orice număr real a	**3p**
	$3a^2-1=11$, de unde obținem $a=-2$ sau $a=2$	**2p**
6.	$C(a,b)=aA(b)+bA(a)=\begin{pmatrix}2ab-a-b&2ab\\2ab&2ab+a+b\end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale	**2p**
	$8ab=24$, deci $ab=3$ și, cum a și b sunt numere naturale, obținem perechile $(1,3)$ și $(3,1)$	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(3+3\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2}-3\sqrt{2}+4=10$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+6$. Arătați că $f(0)+f(2)=f(4)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x-1}-3=0$.

5p **4.** Prețul unui obiect este de 400 de lei. Determinați prețul obiectului după o ieftinire cu 25%.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(5,6)$ și $C(6,2)$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AC=4$ și măsura unghiului C egală cu $60°$. Arătați că $BC=8$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(3)\right)=1$.

5p **b)** Arătați că $A(2)+A(6)=2A(4)$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(x)=3I_2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x+y+6$.

5p **a)** Arătați că $1\circ(-3)=4$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $x\circ 2=3x$.

5p **c)** Arătați că $\left(x^2+2\right)\circ(1-6x)\geq 0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{5x-2}{x-1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=-\dfrac{3}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este convexă.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-3\right)dx=1$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 e^x f(x)\,dx=3e-1$.

5p **c)** Determinați $a\in(0,+\infty)$ pentru care $\int_1^2\dfrac{f(x)}{x(x+3)}dx=\ln\dfrac{a}{2}$.

Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(3+3\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2}-3\sqrt{2}+4=3\sqrt{2}+3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-3\sqrt{2}+4=$	**2p**
	$=6+4=10$	**3p**
2.	$f(0)=6$, $f(2)=12$	**2p**
	$f(4)=18$, deci $f(0)+f(2)=f(4)$	**3p**
3.	$\sqrt{2x-1}=3$, deci $2x-1=9$	**3p**
	$x=5$, care convine	**2p**
4.	$\frac{25}{100}\cdot 400=100$ de lei	**2p**
	Prețul obiectului după ieftinire este $400-100=300$ de lei	**3p**
5.	$AC=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$	**2p**
	$BC=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$, deci $AC=BC$, de unde obținem că triunghiul ABC este isoscel	**3p**
6.	$\cos C=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{AC}{BC}=\frac{1}{2}$	**3p**
	$\frac{4}{BC}=\frac{1}{2}$, de unde obținem $BC=8$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(3)=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(3)\right)=\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix}=1\cdot 3-1\cdot 2=$	**3p**
	$=3-2=1$	**2p**
b)	$A(2)+A(6)=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\2&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\4&8\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}1&1\\2&4\end{pmatrix}=2A(4)$	**2p**
c)	$A(x)\cdot A(x)=\begin{pmatrix}3&1+x\\2+2x&2+x^2\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\begin{pmatrix}3&1+x\\2+2x&2+x^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=-1$	**2p**
2.a)	$1\circ(-3)=1-3+6=$	**3p**
	$=4$	**2p**
b)	$x\circ 2=x+2+6=x+8$, pentru orice număr real x	**3p**
	$x+8=3x$, de unde obținem $x=4$	**2p**

c)	$\left(x^2+2\right)\circ(1-6x)=x^2-6x+9$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x^2-6x+9=(x-3)^2\geq 0$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(5x-2)'(x-1)-(5x-2)(x-1)'}{(x-1)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{5(x-1)-(5x-2)}{(x-1)^2}=-\dfrac{3}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$f(2)=8$, $f'(2)=-3$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(2)=f'(2)(x-2)$, adică $y=-3x+14$	**3p**
c)	$f''(x)=\dfrac{6}{(x-1)^3}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**3p**
	$f''(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, deci funcția f este convexă	**2p**
2.a)	$\int_0^1 (f(x)-3)dx=\int_0^1 2x\,dx=x^2\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1-0=1$	**2p**
b)	$\int_0^1 e^x f(x)dx=\int_0^1 e^x(2x+3)dx=e^x(2x+3)\Big\vert_0^1-\int_0^1 2e^x dx=5e-3-2e^x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=5e-3-2e+2=3e-1$	**2p**
c)	$\int_1^2 \dfrac{f(x)}{x(x+3)}dx=\int_1^2 \dfrac{2x+3}{x^2+3x}dx=\int_1^2 \dfrac{\left(x^2+3x\right)'}{x^2+3x}dx=\ln\left(x^2+3x\right)\Big\vert_1^2=\ln\dfrac{5}{2}$	**3p**
	$\ln\dfrac{5}{2}=\ln\dfrac{a}{2}$, de unde obținem $a=5$, care convine	**2p**

Simularea Examenului Național de Bacalaureat 2025

varianta 1

Proba E. c)

Matematică M_mate-info

Mate.info.ro
profu' de mate

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

- *Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.*
- *Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați suma primilor treisprezece termeni ai unei progresii aritmetice, știind că al șaptelea termen al progresiei este egal cu 12.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-x$. Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor *f* și *g*.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(x^2+6x+9\right)-\log_3^2\left(3x+9\right)+5=0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un termen al dezvoltării $\left(\sqrt[4]{5}+1\right)^{2025}$, acesta să fie număr irațional.

5p **5.** Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(0,1)$ și este paralelă cu dreapta *d*, de ecuație $x-y-1=0$.

5p **6.** Fie $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ astfel încât $\sin x=\frac{4}{5}$. Calculați $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare $\begin{cases}x+y-z=1\\ x+my+z=3m\\ x+y+z=3\end{cases}$, unde *m* este un număr real.

5p **a)** Arătați că determinantul matricei sistemului este egal cu $2m-2$.

5p **b)** Arătați că, pentru orice număr real *m*, sistemul este compatibil.

5p **c)** Notăm cu $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ soluția sistemului pentru $m=1$. Determinați valoarea minimă a expresiei $E=x_0^2+y_0^2+z_0^2$.

2. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}-2 & -8\\ 3 & 12\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și mulțimea $G=\left\{X(a)=I_2+aA \,\middle|\, a\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{10}\right\}\right\}$.

5p **a)** Arătați că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+10ab)$, pentru orice $X(a),X(b)\in G$.

5p **b)** Admitem că $(G,\cdot)$ este grup comutativ cu elementul neutru $X(0)$. Determinați inversul elementului $X(a)$ în acest grup.

5p **c)** Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care ecuația $\left(X(a)\right)^3=I_2+\frac{7}{10}A$ are soluție în grupul $(G,\cdot)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{3-x^2}{(x^2+3)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor funcției *f*.

5p **c)** Arătați că punctele de inflexiune ale graficului funcției *f* sunt coliniare.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^4 x\,f(x)dx=2$.

5p **b)** Determinați primitiva *G* a funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f^2(x)$, pentru care $G(3)=\frac{\pi}{3}$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left(\int_0^{2x+1}f(t)\,dt-\int_0^{x+1}f(t)\,dt\right)$.

Simularea Examenului național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică M_mate-info

Mate.info.ro profu' de mate

varianta 1

Barem de evaluare şi de notare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_7=12\Rightarrow a_1+6r=12$	**2p**
	$\Rightarrow S_{13}=\dfrac{13\cdot(a_1+a_{13})}{2}=\dfrac{13\cdot(a_1+a_1+12r)}{2}=13\cdot(a_1+6r)=13\cdot12=156$	**3p**
2.	$M(x,y)\in G_f\cap G_g\Rightarrow f(x)=g(x)$, de unde $x^2-x=0$	**2p**
	Rezultă $x=0$, pentru care $y=0$, sau $x=1$, pentru care $y=-1$, deci $G_f\cap G_g=\{M_1(0,0);M_2(1,-1)\}$	**3p**
3.	Condiții de existență: $x^2+6x+9>0$ și $3x+9>0$, de unde $x\in(-3,\infty)$	**1p**
	$\log_3\left(x^2+6x+9\right)=\log_3(x+3)^2=2\log_3(x+3)$, $\log_3\left(3x+9\right)=\log_3 3+\log_3(x+3)$	**2p**
	Notând $\log_3(x+3)=t$, $t\in\mathbb{R}$, rezultă $2t-(t+1)^2+5=0$, de unde $t^2=4$, deci $t\in\{-2,2\}$; obținem soluțiile $x_1=-\dfrac{26}{9}$ și $x_2=6$, care aparţin intervalului $(-3,\infty)$	**2p**
4.	Numărul de termeni ai dezvoltării este $2025+1=2026$, deci sunt 2026 cazuri posibile	**1p**
	$T_{k+1}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow C_{2025}^{k}\cdot5^{\frac{2025-k}{4}}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow\dfrac{2025-k}{4}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow k\in\{1,5,9,...,2025\}$, deci sunt $\dfrac{2025-1}{4}+1=507$ termeni raționali și $2026-507=1519$ termeni iraționali	**2p**
	$p=\dfrac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}=\dfrac{1519}{2026}$	**2p**
5.	Dacă h este dreapta căutată, din $m_d=1$ și $h\parallel d$ rezultă $m_h=m_d$, deci $m_h=1$	**3p**
	Ecuația dreptei h este $y-y_A=m_h\left(x-x_A\right)$, de unde se obține $x-y+1=0$	**2p**
6.	Notând $t=\text{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$, avem $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, deci $\dfrac{2t}{1+t^2}=\dfrac{4}{5}$, de unde $t=2$ sau $t=\dfrac{1}{2}$	**3p**
	Cum $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ obținem $\dfrac{x}{2}\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\text{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)>1$, deci $\text{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)=2$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&m&1\\1&1&1\end{vmatrix}\overset{L_3-L_1}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&m&1\\0&0&2\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\1&m\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=2\left(1\cdot m-1\cdot1\right)=2m-2$	**2p**
b)	Pentru $m\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ avem $\det A\neq0$, deci sistemul este compatibil (determinat)	**2p**
	Pentru $m=1$, obținem $\text{rang}\,A=2$, un minor principal este $\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=2\neq0$, și există un singur minor caracteristic, și anume $\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&1&3\\1&1&3\end{vmatrix}=0$, deci sistemul este compatibil (nedeterminat)	**3p**
c)	Pentru $m=1$ soluția sistemului este $x_0=\alpha$, $y_0=2-\alpha$, $z_0=1$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$	**3p**
	$E=\alpha^2+(2-\alpha)^2+1=2(\alpha-1)^2+3$; $E(\alpha)\geq3$ și $E(1)=3$, deci $\min(E)=3$	**2p**

2.a)	$X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2+aA+bA+abA^2$	**2p**
	$A^2=10A$, deci $X(a)\cdot X(b)=I_2+aA+bA+10abA=I_2+(a+b+10ab)A=X(a+b+10ab)$	**3p**
b)	$X(a)\cdot X(a')=X(a')\cdot X(a)=X(0)\Rightarrow a+a'+10aa'=0$, de unde $a'=-\frac{a}{1+10a}$	**3p**
	$-\frac{a}{1+10a}\neq-\frac{1}{10}$, pentru $a\neq-\frac{1}{10}$; așadar $X\left(-\frac{a}{1+10a}\right)\in G$, deci inversul lui $X(a)$ este $X\left(\frac{-a}{1+10a}\right)$	**2p**
c)	$X(a)\cdot X(b)=X\left(\frac{(10a+1)(10b+1)-1}{10}\right)$, $(X(a))^2=X\left(\frac{(10a+1)^2-1}{10}\right)$, $(X(a))^3=X\left(\frac{(10a+1)^3-1}{10}\right)$	**3p**
	Cum $I_2+\frac{7}{10}A=X\left(\frac{7}{10}\right)$, obținem $\frac{(10a+1)^3-1}{10}=\frac{7}{10}$, deci $(10a+1)^3=8$, de unde $a=\frac{1}{10}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{x'\cdot(x^2+3)-x\cdot(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}=$	**2p**
	$=\frac{(x^2+3)-x\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{3-x^2}{(x^2+3)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$; *f* este descrescătoare pe $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right]$, crescătoare pe $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$ și descrescătoare pe $\left[\sqrt{3},\infty\right)$, deci $x=-\sqrt{3}$ este punct de minim și $x=\sqrt{3}$ este punct de maxim	**3p**
	f este continuă, deci $\operatorname{Im} f$ este un interval; $f\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{6}$, $f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}$ și $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$, de unde rezultă că $\operatorname{Im} f=\left[-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{3}}{6}\right]$	**2p**
c)	$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{2x(x^2-9)}{(x^2+3)^3}=0\Leftrightarrow x\in\{-3,0,3\}$; *f* concavă pe $(-\infty,-3]$ și pe $[0,3]$; *f* convexă pe $[-3,0]$ și pe $[3,\infty)$, deci graficul funcției *f* are punctele de inflexiune $A(-3,f(-3))$, $B(0,f(0))$, $C(3,f(3))$	**3p**
	$\begin{vmatrix}-3 & f(-3) & 1\\ 0 & f(0) & 1\\ 3 & f(3) & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & -\frac{1}{4} & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 3 & \frac{1}{4} & 1\end{vmatrix}=0$, deci A, B, C sunt coliniare	**2p**
2.a)	$\int_0^4 x f(x)dx=\int_0^4\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx=\int_0^4\left(\sqrt{x^2+9}\right)'dx=$	**2p**
	$=\sqrt{x^2+9}\Big\vert_0^4=\sqrt{25}-\sqrt{9}=5-3=2$	**3p**
b)	$g(x)=f^2(x)=\frac{1}{x^2+9}\Rightarrow\int g(x)dx=\int\frac{1}{x^2+9}dx=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+\mathcal{C}$, deci $G(x)=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+c$, $c\in\mathbb{R}$	**3p**
	$G(3)=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\frac{1}{3}\operatorname{arctg}1+c=\frac{\pi}{3}\Rightarrow c=\frac{\pi}{4}$, deci $G(x)=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}$	**2p**
c)	Dacă *F* este o primitivă a funcției *f*, atunci $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\left(\int_0^{2x+1}f(t)dt-\int_0^{x+1}f(t)dt\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_{x+1}^{2x+1}f(t)dt}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{F(2x+1)-F(x+1)}{x}=$	**2p**
	$\overset{L'H\ \left[\frac{0}{0}\right]}{=\!=}\lim\limits_{x\to0}\frac{F'(2x+1)\cdot(2x+1)'-F'(x+1)\cdot(x+1)'}{1}=\lim\limits_{x\to0}\left(2f(2x+1)-f(x+1)\right)=f(1)=\frac{1}{\sqrt{10}}$	**3p**

Mate.info.ro
profu' de mate

Simularea Examenului Național de Bacalaureat 2025

varianta 1

Proba E. c)
Matematică M_şt-nat.

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- *Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.*
- *Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.*

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numerele $\log_3 2$, $\log_3 4$ și $\log_3 8$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-3x+4$. Determinați numărul real x pentru care $f(x)=x$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{6-x}=x$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr natural de două cifre, acesta sa aibă cifra unităților egală cu dublul cifrei zecilor.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(-1,2)$. Determinați coordonatele punctului B, știind că O este mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Se consideră expresia $E(x)=\sin^2 x-\cos^2 x+\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-2$, unde $x\in\mathbb{R}$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & -3 & 0\\ 2 & 4 & a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A(0)=2$.

5p **b)** Aflați $a\in\mathbb{R}$ pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Pentru $a\neq -2$, rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases}x+2y-z=-1\\ -2x-3y\ \ =1\\ 2x+4y+az=-2\end{cases}$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=(x+2)(y+2)-2$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$

5p **a)** Arătați că $x*(-2)=-2$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-2$. Arătați că $f(x+y)=f(x)*f(y)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $x*x*x=25$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{(x+2)^2}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-x(x+2)}{e^x}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $0\le\frac{(x+2)(y+2)}{\sqrt{e^{x+y}}}\le 4$, pentru orice $x,y\in[-2,\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(x^2-4x+5)$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}dx=\frac{10}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă.

5p **c)** Determinați numerele reale a, b, c pentru care $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=e^x(ax^2+bx+c)$ este o primitivă a lui f.

Simularea Examenului național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică M_șt-nat

varianta 1

Barem de evaluare şi de notare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_3 2+\log_3 8=\log_3(2\cdot 8)=\log_3 4^2=$	**2p**
	$=2\log_3 4 \Rightarrow \log_3 2, \log_3 4, \log_3 8$ termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice	**3p**
2.	$f(x)=x \Rightarrow x^2-3x+4=x \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow$	**2p**
	$(x-2)^2=0 \Rightarrow x=2$	**3p**
3.	$\sqrt{6-x}=x \Rightarrow 6-x=x^2 \Rightarrow x^2+x-6=0$, de unde $x=-3,\ x=2$	**3p**
	$x=-3$ nu verifică ecuația, $x=2$ verifică, deci $x=2$ este singura soluție a ecuației	**2p**
4.	Numărul de cazuri favorabile este cardinalul mulțimii $\left\{\overline{ab}\,\middle|\, b=2a,\ a\neq 0\right\}=\{12,24,36,48\}$, deci sunt 4 cazuri favorabile.	**2p**
	Numărul de cazuri posibile este cardinalul mulțimii $\{10,11,12,\ldots 99\}$, deci există 90 de cazuri posibile, de unde rezultă că $p=\dfrac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}=\dfrac{4}{90}=\dfrac{2}{45}$	**3p**
5.	O este mijlocul segmentului $AB \Rightarrow x_O=\dfrac{x_A+x_B}{2} \Rightarrow x_B=2x_O-x_A=1$	**2p**
	$y_0=\dfrac{y_A+y_B}{2} \Rightarrow y_B=-2$, deci $B(1,-2)$	**3p**
6.	$E\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)-2=$	**3p**
	$=\sqrt{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{2}-2=2-2=0$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A(0)=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & -3 & 0\\ 2 & 4 & 0\end{vmatrix}=(0+8+0)-(6+0+0)$	**3p**
	$=8-6=2$	**2p**
b)	$\det A(a)=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & -3 & 0\\ 2 & 4 & a\end{vmatrix}=(-3a+8+0)-(6+0-4a)=a+2$	**2p**
	$A(a)$ este inversabilă dacă și numai dacă $\det A(a)\neq 0$, deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$	**3p**

c)	Pentru $a \neq -2 \Rightarrow \det A(a) \neq 0$, deci sistemul este compatibil determinat (are soluție unică) Cu formulele lui Cramer $x = \frac{d_x}{d}, y = \frac{d_y}{d}, z = \frac{d_z}{d}$, obținem că soluția sistemului este $(1,-1,0)$	**2p** **3p**
2.a)	$x*(-2) = (x+2)(-2+2) - 2 =$ $= 0 - 2 = -2$	**2p** **3p**
b)	$f(x)*f(y) = (e^x - 2 + 2)(e^y - 2 + 2) - 2 = e^x \cdot e^y - 2$ $f(x+y) = e^{x+y} - 2 = e^x \cdot e^y - 2$, deci $f(x+y) = f(x)*f(y)$	**3p** **2p**
c)	$x*x = (x+2)^2 - 2$, $x*x*x = (x+2)^3 - 2$ $x*x*x = 25 \Leftrightarrow (x+2)^3 = 27 \Leftrightarrow (x+2)^3 = 3^3 \Leftrightarrow x+2 = 3 \Leftrightarrow x = 1$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{\left((x+2)^2\right)' \cdot e^x - (x+2)^2 \cdot (e^x)'}{e^{2x}} =$ $= \frac{e^x(2x+4-x^2-4x-4)}{e^{2x}} = \frac{-x^2-2x}{e^x} = \frac{-x(x+2)}{e^x}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	**2p** **3p**
b)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+2)^2}{e^x} \overset{L'H}{=\!=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+4}{e^x} \overset{L'H}{=\!=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$, deci asimptota orizontală la graficul funcției spre $+\infty$ este dreapta de ecuație $y = 0$	**3p** **2p**
c)	f este crescătoare pe $[-2,0]$, f este descrescătoare pe $[0,\infty)$, $f(-2) = 0$, $f(0) = 4$, deci $0 \leq f(x) \leq 4$, pentru orice $x \in [-2,\infty)$ $x, y \in [-2,\infty) \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 4, 0 \leq f(y) \leq 4 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{f(x)f(y)} \leq 4 \Rightarrow 0 \leq \frac{(x+2)(y+2)}{\sqrt{e^{x+y}}} \leq 4$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x} dx = \int_0^1 \frac{e^x(x^2-4x+5)}{e^x} dx =$ $= \int_0^1 (x^2-4x+5)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x\right)\Big\|_0^1 = \frac{10}{3}$	**2p** **3p**
b)	$F'(x) = f(x) \Rightarrow F''(x) = f'(x) = e^x(x^2-2x+1)$ $= e^x(x-1)^2 \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \Rightarrow F$ convexă	**3p** **2p**
c)	$F'(x) = e^x(ax^2+bx+c) + e^x(2ax+b) = e^x \cdot \left(ax^2 + (b+2a)x + (b+c)\right)$ $ax^2 + (b+2a)x + (b+c) = x^2 - 4x + 5$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, de unde $a = 1$, $b = -6$, $c = 11$	**2p** **3p**

Simulare județeană _Examenul național de bacalaureat , ianuarie 2025
Proba E.c)
Matematică *M_tehnologic* **Varianta 1**

Mate.info.ro
profu' de mate

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I – Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete (30 puncte)

5p **1.** Calculați media aritmetică a numerelor $a=3(6-\sqrt{5})$ și $b=3\sqrt{5}$.
5p **2.** Se consideră intervalele deschise I=(2;7) și J=(4;9). Determinați toate elementele întregi ale mulțimii $I\cap J$.
5p **3.** Arătați că $\log_3 27+\log_5 25<\sqrt{36}$.
5p **4.** Câte numere naturale de două cifre diferite se pot forma cu elemente ale mulțimii A={3;4;5}?
5p **5.** Determinați lungimea catetelor unui triunghi dreptunghic, știind că suma lor este 10, iar triunghiul are aria 8.
5p **6.** Se consideră expresia $E(x)=\cos x+\sin\frac{x}{2}$, unde x este număr real. Calculați $E(60^{\circ})$

SUBIECTUL al II-lea – Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete (30 puncte)

1. Se consideră matricele $A(m)=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & m\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
5p a) Demonstrați că $\det(A(6))=3$.
5p **b)** Arătați că matricea $A(m)+I_2$ este inversabilă pentru orice număr întreg *m*.
5p **c)** Dacă B=A(1)·A(2)·A(3)·A(4), demonstrați că det(B)=0.

2. Pe mulțimea A=(0;∞) definim legea de compoziție $x\circ y=\sqrt{xy}$.
5p a) Demonstrați că $16\circ 81\in \boldsymbol{N}$.
5p b) Demonstrați că $1\circ(16\circ 81)<(1\circ 16)\circ 81$.
5p **c)** Rezolvați pe mulțimea A ecuația $(2x+1)\circ 1=3$.

SUBIECTUL al III-lea – Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=2x-\sin x$.
5p a) Să se calculeze $f'(x)$.
5p b) Demonstrați că $f'(0)-f(0)>0$.
5p **c)** Să se arate că f este crescătoare $\forall x\in\boldsymbol{R}$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2e^x,\ \ g(x)=x(x+2)e^x$
a) Demonstrați că funcția f este o primitivă a funcției g.
5p b) Calculați $\int\frac{g(x)}{f(x)}dx,\ \ x\in(0;+\infty)$.
5p **c)** Demonstrați că orice primitivă a funcției $h:[-1;\infty)\to\mathbf{R}$, h(x)=f(x) - g(x) este concavă.

Simulare județeană _Examenul național de bacalaureat , ianuarie 2025
Proba E.c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Mate.info.ro profu' de mate

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 puncte)		
1.	$a = 3(6-\sqrt{5}) =$ $= 3\cdot 6 - 3\sqrt{5} = 18 - 3\sqrt{5}$ $\frac{a+b}{2} = \frac{18-3\sqrt{5}+3\sqrt{5}}{2} = \frac{18}{2} = 9$	2p 3p
2.	$I \cap J \cap Z =$ $= (2;7) \cap (4;9) \cap Z =$ $= \{5;6\}$	2p 1p 2p
3.	$\log_3 27 = 3$ $\log_5 25 = 2$ $\sqrt{36} = 6$ $\log_3 27 + \log_5 25 = 3 + 2 = 5 < 6$	1p 1p 1p 2p
4.	$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} =$ $= \frac{6}{1} = 6$	2p 3p
5.	Fie c_1 și c_2 lungimile celor două catete ale triunghiului dreptunghic $c_1 + c_2 = 10$ $A_\Delta = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} = 8$ $\left.\begin{matrix} c_1 \cdot c_2 = 16 \\ c_1 + c_2 = 10 \end{matrix}\right\}$ rezultă că $c_1 = 2$ și $c_2 = 8$	1p 1p 1p 2p
6.	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ $\sin\frac{60^\circ}{2} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ $E(60^\circ) = \cos 60^\circ + \sin 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$	1p 1p 3p

SUBIECTUL II (30 puncte)		
1.a)	$\det A(6) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} =$ $= 6 - 3 =$ $= 3$	2p 2p 1p
1.b)	$A(m) + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m+1 \end{pmatrix}$ $\det(A(m) + I_2) = 2m - 1$ $\det(A(m) + I_2) \neq 0$ pentru orice întreg m	2p 2p 1p
1.c)	det(B)=det(A(1)A(2)A(3)A(4))= =det(A(1)) det(A(2)) det(A(3)) det(A(4)) $Dar\ \det A(3) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ Deci, det(B)=0	1p 1p 2p 1p
2.a)	$16 \circ 81 = \sqrt{16 \cdot 81} =$ $= \sqrt{16} \cdot \sqrt{81} =$ $= 4 \cdot 9 =$ $= 36 \in \boldsymbol{N}$	2p 1p 1p 1p
2.b)	$1 \circ (16 \circ 81) = 1 \circ 36 = \sqrt{1 \cdot 36} = 6$ **(I)** $(1 \circ 16) \circ 81 = \sqrt{1 \cdot 16} \circ 81 = 4 \circ 81 = \sqrt{4 \cdot 81} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{81} = 2 \cdot 9 = 18$ (II) Din (I) și (II) => 6<18, deci $1 \circ (16 \circ 81) < (1 \circ 16) \circ 81$	2p 2p 1p
2.c)	$(2x+1) \circ 1 = 3 \Rightarrow 2x + 1 = 9$ x=4 $4 \in A$ și verifică ecuația	2p 2p 1p
SUBIECTUL III (30 puncte)		
1.a)	$f'(x) = (2x - \sin x)' =$ $= 2 - \cos x$	1p 4p
1.b)	$f(0) = 0 - \sin 0 = 0$ $f'(0) = 2 - \cos 0 = 2 - 1 = 1$ $f'(0) - f(0) = 1 - 0 = 1 > 0$	2p 2p 1p
1.c)	$f'(x) = (2 - \cos x) > 0,$ $\Rightarrow$ f crescătoare pe **R**.	3p 2p
2.a)	f este derivabilă pe **R**, și $f'(x) = (x^2 e^x)' = (x^2)' e^x + x^2 (e^x)' = 2xe^x + x^2 e^x$ $\Rightarrow f'(x) = (2x + x^2)e^x = x(x+2)e^x = g(x),\ \forall x \in R$, deci f este o primitivă a funcției g	3p 2p

2.b)	$\int \frac{g(x)}{f(x)}dx = \int \frac{x(x+2)e^x}{x^2e^x}dx = \int \frac{(x+2)}{x}dx = \int (1+\frac{2}{x})dx =$ $= x + 2\ln\mid x \mid + C = x + 2\ln x + C$	3p 2p
2.c)	Fie H: [-1; ∞)→**R** o primitivă a funcției continue h. $H'(x) = h(x) = f(x) - g(x) = x^2e^x - x(x+2)e^x = -2xe^x, \quad \forall x \in [-1;\infty)$ $H''(x) = (-2x-2)e^x, \quad \forall x \in [-1;\infty)$ Deducem așadar că $H''(x) \leq 0$, $\forall\, x \in [-1;\infty)$ ⇒ H concavă ⇒ orice primitivă a funcției h este concavă	1p 2p 1p 1p

Simulare județeană _Examenul național de bacalaureat , ianuarie 2025
Proba E.c)
Matematică *M_pedagogic* ***Varianta 1***

Mate.info.ro
profu' de mate

Filiera vocațională: profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I – Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete (30 puncte)

5p **1.** Arătați că $\sqrt{125}-\sqrt{45}=2\sqrt{5}$

5p **2.** Determinați câte numere naturale pare, de două cifre se pot forma cu cifrele 3,4,5,6 și 7.

5p **3.** Să se rezolve în **R** ecuația: $5^{\,7-x^2}=5^{-9}$.

5p **4.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f:**R**→**R**, f(x)=2x-1 și g:**R**→**R**, g(x)=2-x

5p **5.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să fie divizibil cu 3.

5p **6.** În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele M(2;3), N(5;3) și P(5;6). Stabiliți natura ΔMNP.

SUBIECTUL al II-lea – Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete (30 puncte)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție x∗y=x+y+7xy

5p **1**. Să se demonstreze că 0∗2025 este pătrat perfect.

5p **2**. Să se arate că x∗y=$7(x+\frac{1}{7})\,(y+\frac{1}{7})-\frac{1}{7}$,∀ x,y∈**R**.

5p **3**.Să se demonstreze că legea „∗" este asociativă.

5p **4**. Verificați dacă e=0 este elementul neutru al acestei legi de compoziție..

5p **5.** Să se rezolve în **R** ecuația x∗1=17.

5p **6**. Să se calculeze:$\left(-\frac{3}{7}\right)*\left(-\frac{2}{7}\right)*\left(-\frac{1}{7}\right)$

SUBIECTUL al III-lea – Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete (30 de puncte)

Se consideră matricele $B=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și mulțimea M={A(x,y)=$\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix}$/x,y ∈ **R** }.

5p **1**. Să se calculeze B-A(3;2)

5p **2**. Să se determine p,q ∈**R** astfel încât este adevarată egalitatea $\begin{pmatrix}3p-q & q-2\\ -5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -5 & 2\end{pmatrix}$

5p **3**. Să se arate că B^4=I_2

5p **4**. Să se calculeze B+B^2+B^3+....+B^8

5p **5**. Să se verifice dacă det(A(2;1)) - det(A(-2;-1))=0

5p **6**. Să se determine matricele A(x;y) ∈M,știind că x,y∈**Z** și det(A(x;y))=1.

Str. General Berthelot, nr. 28-30
sector 1, 010168, București
Tel: +40 (21) 405 62 00
+40 (21) 405 63 00
www.edu.ro

Str. Ecaterina Teodoroiu, nr. 8B, Slatina, 230015, jud. Olt
E/mail ISJ: secretariat@isjolt.ro
Tel: +40 (249) 41 09 27
Fax: +40 (249) 41 28 01
www.isjolt.ro

Mate.info.ro
profu' de mate

Simulare județeană _Examenul național de bacalaureat , ianuarie 2025
Proba E.c)
Matematică *M_pedagogic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- ***Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.***
- ***Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.***
- ***Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare***

SUBIECTUL I (30 puncte)		
1.	Scoaterea factorilor de sub radicali $5\sqrt{5}-3\sqrt{5}=2\sqrt{5}$	2p 3p
2.	Cifra unităților poate fi aleasă în două moduri Pentru fiecare alegere a cifrei unităților , cifra zecilor poate fi aleasă în câte 5 moduri Deci se pot forma $2\cdot 5=10$ numere	2p 1p 2p
3.	$5^{7-x^2}=5^{-9}\Leftrightarrow 7-x^2=-9$ $7+9=x^2$ $x^2=16$ $x=\pm 4$	2p 1p 1p 1p
4.	$\mathrm{f(x)=g(x)}\Leftrightarrow 2\mathrm{x}-1=2-\mathrm{x}$ $3\mathrm{x}=3$ $x=1$, deci $y=1$ Așadar coordonatele punctului de intersecție sunt x=1 și y=1	2p 2p 1p
5.	$\mathrm{P}=\frac{\text{Numar cazuri favorabile}}{\text{Numar cazuri posibile}}$ Cazuri favorabile: 3,6,9 -deci 3 cazuri favorabile , iar numărul cazurilor posibile este 9 $\mathrm{P}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$	2p 1p 2p
6.	Calculul lungimilor laturilor MN=3, NP=3, MP=$3\sqrt{2}$ Conform reciprocei teoremei lui Pitagora triunghiul este dreptunghic MNP triunghi dreptunghic isoscel	3p 1p 1p
SUBIECTUL II (30 puncte)		
1.	$0*2025=0+2025+7\cdot 0\cdot 2025=$ $=2025$ $2025=45^2$ este pătrat perfect	3p 2p
2.	x∗y=x+y+7xy=$7xy+x+y+\frac{1}{7}-\frac{1}{7}=$ $=7\left(xy+\frac{x}{7}+\frac{y}{7}+\frac{1}{49}\right)-\frac{1}{7}=$ $=7[\left(xy+\frac{x}{7}\right)+(\frac{y}{7}+\frac{1}{49})]-\frac{1}{7}=$	1p 1p 1p

	$=7[x\left(y+\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{7}(y+\frac{1}{7})]-\frac{1}{7}=$ $=7(x+\frac{1}{7})\,(y+\frac{1}{7})-\frac{1}{7}$	1p 1p
3.	$(x*y)*z=49\left(x+\frac{1}{7}\right)\left(y+\frac{1}{7}\right)\left(z+\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{7}$ Analog pentru $x*(y*z)$ Finalizare	2p 2p 1p
4.	$x*0=x+0+7\cdot x\cdot 0=x$ $0*x=0+x+7\cdot 0\cdot x=x$ Deci $x*0=0*x=x, \forall x\in R$, e $=0$ element neutru al legii de compoziție " $*$ "	2p 2p 1p
5.	$x*1=x+1+7\cdot x\cdot 1=8x+1$ $x*1=17 \Leftrightarrow 8x+1=17$ $8x=16$ $x=2\in R$	2p 1p 1p 1p
6.	$\left(-\frac{3}{7}\right)*\left(-\frac{2}{7}\right)*\left(-\frac{1}{7}\right)=\left[\left(-\frac{3}{7}\right)*\left(-\frac{2}{7}\right)\right]*(-\frac{1}{7})=$ $=\left(-\frac{3}{7}-\frac{2}{7}+7\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{7}\right)*\left(-\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{7}*\left(-\frac{1}{7}\right)$ și $\frac{1}{7}*\left(-\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{7}+\left(-\frac{1}{7}\right)+7\cdot\frac{1}{7}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)=-\frac{1}{7}$	1p 2p 2p
SUBIECTUL III (30 puncte)		
1.	B-A(3;2)= $\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}-4 & -3\\ 4 & -2\end{pmatrix}$	2p 3p
2.	$\begin{pmatrix}3p-q & q-2\\ -5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -5 & 2\end{pmatrix}\Leftrightarrow 3p-q=2$ și q-2=5 Deci, q=7 și p=3	3p 2p
3.	$B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-I_2$ $B^4=(B^2)^2=(-I_2)^2=I_2$	3p 2p
4.	$B^2=-I_2, B^3=-B,\ B^4=I_2,\ldots\ldots, B^8=I_2$ $B+B^2+B^3+\ldots+B^8=B-I_2-B+I_2+B-I_2-B+I_2=O_2$	3p 2p
5.	$\det(A\,(2;1))=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 2-(-1)\cdot 1=4+1=5$ $\det(A\,(-2;-1))=\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=(-2)\cdot(-2)-1\cdot(-1)=4+1=5$ $\det(A\,(2;1))-\det(A\,(-2;-1))=5-5=0$	2p 2p 1p

6.	$\det(A(x;y)) = \begin{vmatrix} x & y \\ -y & x \end{vmatrix} = x \cdot x - (-y) \cdot y = x^2 + y^2$	1p
	det(A(x,y))=1$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1$, x,y $\in \mathbf{Z} \Rightarrow x^2 = 0$ *și* $y^2 = 1$ sau $x^2 = 1$ *și* $y^2 = 0$	2p
	Deci x=0 și y= ± 1 sau x= ± 1 și y=0 $\Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	2p

Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model ianuarie 2025

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Mate.info.ro profu' de mate

SUBIECTUL I (30 puncte)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_3=9$ și $a_{24}=114$. Verificați dacă 2024 este termen al șirului $(a_n)_{n\geq 1}$.

5p **2.** Determinați $m\in\mathbb{R}$ știind că ecuația $x^2-mx-1-m=0$ are două rădăcini reale strict negative distincte.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(4-2^x\right)=2-x$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $M=\{0,1,2,...,7\}$. Determinați numărul submulțimilor lui M care conțin cel puțin un număr impar.

5p **5.** Determinați distanța dintre dreptele paralele $d_1:3x-4y+5=0$ și $d_2:y=mx-10$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $tgx+ctgx=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $X(a)=I_3+aA$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că $\det\left(X(1)\right)=16$.

5p **b)** Demonstrați că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+3ab)$, pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați $p\in\mathbb{R}$, astfel încât $X\left(-\frac{2025}{2025}\right)\cdot X\left(-\frac{2024}{2025}\right)\cdot\ldots\cdot X\left(\frac{2025}{2025}\right)=X(p)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție asociativă $x\circ y=\frac{1}{3}xy-x-y+6$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=\frac{1}{3}(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x, y.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $\left(2^n+3\right)\circ\left(2^{n+1}+3\right)\circ\left(2^{n+2}+3\right)=\frac{1}{9}\left(2^{27}+27\right)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}$ și șirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n=f(1)+f(2)+...+f(n)$.

Str. Lucian Blaga, nr. 26
550169, Sibiu
Tel: +40 (0) 369 10 12 02
Fax: +40 (0) 269 21 08 17
www.sbisj.ro

Mate.info.ro
profu' de mate

5p **a)** Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **b)** Arătați că șirul $(x_n)_{n\ge1}$ este strict crescător.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right)^{2n}$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2025\cdot x^{2024}}{x^{2025}+1}$ și $F:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$ o primitivă a sa.

5p **a)** Calculați $\int f(x)dx$.

5p **b)** Arătați că $F\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\right)\le F\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)$.

5p **c)** Calculați $\int_0^1\left[F(x)+xf(x)\right]dx$.

Str. Lucian Blaga, nr. 26
550169, Sibiu
Tel: +40 (0) 369 10 12 02
Fax: +40 (0) 269 21 08 17
www.sbisj.ro

Mate.info.ro profu' de mate

Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Model ianuarie 2025

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30puncte)

5p	**1)** Arătați că $2\cdot\log_5\left(4-\sqrt{6}\right)+2\cdot\log_5\left(4+\sqrt{6}\right)-\log_5 4=2$.
5p	**2)** Se consideră funcția $f:R\to R$, $f(x)=x^2+2x-3$. Determinați $f(A)$, unde $A=\left[-2,2\right)$.
5p	**3)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x+\dfrac{1}{\log_2 x}=\dfrac{5}{2}$.
5p	**4)** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,4,5\}$. Calculați probabilitatea ca, alegând una dintre submulțimile mulțimii A, aceasta să aibă cel mult două elemente.
5p	**5)** În reperul cartezian xOy se consideră dreptele paralele $d_1:3x-4y=0$ și $d_2:6x-8y-5=0$. Determinați distanța dintre dreptele d_1 și d_2.
5p	**6)** Calculați $tgx+ctgx$, știind că $x\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ și $\sin x=-\dfrac{4}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea (30puncte)

	1) Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+3x & -2x\\ 6x & 1-4x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\left(A(x)-I_2\right)=0$, pentru orice număr real x.
5p	**b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y-x\cdot y)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Arătați că $\det\left(A^2(x)+I_2\right)>0$, pentru orice număr real x.
	2) Pe mulțimea $G=(0,1)$ se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\dfrac{2024xy}{2025xy-x-y+1}$.
5p	**a)** Calculați $\dfrac{1}{2025}\circ\dfrac{1}{2025}$.
5p	**b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.
5p	**c)** Arătați că $f:(0,\infty)\to(0,1)$, $f(x)=\dfrac{x}{x+2024}$ este un izomorfism între grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive $\left((0,\infty),\cdot\right)$ și grupul $(G,\circ)$.

SUBIECTUL al III-lea (30puncte)

	1) Se consideră funcția $f:R\to R$, $f(x)=e^{-3x+3}-\dfrac{9}{2}x^2+12x-\dfrac{17}{2}$.
5p	**a)** Calculați $f'(x)$, $x\in R$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$, situat

Mate.info.ro
profu' de mate

pe graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că funcția f are un singur punct de inflexiune.

2) Se consideră funcția $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} 2025\left(1 - x^{2024}\right), & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$.

5p **a)** Arătați că funcția f admite primitive pe R.

5p **b)** Calculați $\int_0^e f(x)dx$.

5p **c)** Arătațică $2025\int_1^x f^{2024}(t)dt + \int_1^x f^{2025}(t)dt = xf^{2025}(x)$, pentru orice $x \geq 1$.

Str. Lucian Blaga, nr. 26
550169, Sibiu
Tel: +40 (0) 369 10 12 02
Fax: +40 (0) 269 21 08 17
www.sbisj.ro

Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Model ianuarie 2025

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 puncte)

5p **1)** Arătați că $2-\frac{1}{3}:\left(2-\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{5}$.

5p **2)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-3$. Arătați că $f(-1)-f(1)=0$.

5p **3)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $11^{8-4x}=121^2$.

5p **4)** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre acesta să aibă cifra zecilor egală cu 7.

5p **5)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,-1)$ și $B(2,2)$. Determinați numerele reale m și n pentru care $\overrightarrow{AB}=(m-2)\vec{i}+(3-n)\vec{j}$.

5p **6)** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=\sqrt{5}$, $BC=5$ și $\sin A=1$. Determinați lungimea laturii AC a triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1) Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(-2))=1$.

5p **b)** Arătați că $A(-10)\cdot A(10)-A(0)=O_2$.

5p **c)** Arătați că $\det(A(x-1)\cdot A(x+1))>0$, pentru orice număr real x.

2) Pe mulțimea numerelor reale strict pozitive se definește legea de compoziție $x*y=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2$.

5p **a)** Arătați că $2*\frac{1}{2}=\left(\frac{5}{2}\right)^2$.

5p **b)** Arătați că $(x+5)*(2x+10)=\frac{9}{2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $x^2*x=4$.

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1) Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^{2025}+2025x+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=2025\left(x^{2024}+1\right), x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este convexă pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{xf(x)}{\left(x^{1013}-1\right)^2}=1$.

Str. Lucian Blaga, nr. 26
550169, Sibiu
Tel: +40 (0) 369 10 12 02
Fax: +40 (0) 269 21 08 17
www.sbisj.ro

Mate.info.ro profu' de mate

2) Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$.

5p **a)** Calculați $\int (x+1)\cdot f(x)dx$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe $(-1,+\infty)$.

5p **c)** Determinați primitiva $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f pentru care $F(0)=2025$.

Str. Lucian Blaga, nr. 26
550169, Sibiu
Tel: +40 (0) 369 10 12 02
Fax: +40 (0) 269 21 08 17
www.sbisj.ro

Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică M_*mate-info*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z = 3 + 4i$. Calculați $|z|$.

5p **2.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Determinați valoarea reală a parametrului m, astfel încât punctul $A(m, 2)$ să aparțină graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $|2x - 1| = |x + 7|$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de cel mult două cifre, acesta să fie multiplu de 5.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 3)$, $B(1, 4)$ și $C(2, 5)$. Calculați aria triunghiului ABC.

5p **6.** Fie x un număr real astfel încât $\sin x + \cos x = \frac{5}{4}$. Calculați $\sin 2x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a)) = (a+2)(a-1)^2$, pentru orice a real.

5p **b)** Dați exemplu de o valoare a parametrului a astfel încât $\det(A(a) \cdot A(b)) = 0$, pentru orice b real.

5p **c)** Rezolvați ecuația $A(2) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, unde $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție „$*$”, $x * y = xy - 3x - 3y + 12$.

5p **a)** Calculați $5 * 7$.

5p **b)** Arătați că $e = 4$ este elementul neutru al legii „$*$”.

5p **c)** Arătați că $1 * 2 * \ldots * 2024 \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3 + x^2}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = -\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$, $x \in (0, +\infty)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x - 2x$.

5p **a)** Arătați că $\int f(x)\,dx = e^x - x^2 + \mathcal{C}$.

5p **b)** Calculați $\int x^2 f(x)\,dx$.

5p **c)** Calculați $\int f(x) \cdot \sin x\ dx$.