TRIGONOMETRÍA

Enfoque *Problem-solving*

Gerard Romo Garrido

TooMates
Cool·lección

Toomates Cool·lección

Los documentos de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho.
Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "**licencias digitales**" con las que las editoriales pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo libro, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.
Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de licencias digitales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf".

El conocimiento no es una mercancía.

El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las editoriales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de unos libros de texto que actualmente son muy mediocres, y no mediante retorcidas técnicas comerciales.

toomates@gmail.com

Actualmente, **Toomates Cool·lección** consta de los siguientes libros:

Geometría axiomática:

GA	**Geometría Axiomática**	pdf	1 2 ... 23 portada
PG	**Problemas de Geometría**	pdf	1 2 3 4 5 6 7

Problem-solving:

AR	**Teoría de números**	pdf	1 2
PT	**Trigonometría**	pdf	doc
DE	**Desigualdades**	pdf	doc
PC	**Números complejos**	pdf	doc
PA	**Álgebra** (en preparación)	pdf	doc
PC	**Combinatoria** (en preparación)	pdf	doc
PR	**Probabilidad** (en preparación)	pdf	doc

Libros de texto (En catalán)

AG	**Àlgebra**	pdf	1 2
FU	**Funcions**	pdf	doc
GN	**Geometria analítica**	pdf	1 2
TR	**Trigonometria**	pdf	doc
CO	**Nombres complexos**	pdf	doc
AL	**Àlgebra Lineal** 2n batxillerat	pdf	doc
GL	**Geometria Lineal** 2n batxillerat	pdf	doc
CI	**Càlcul Infinitesimal** 2n batxillerat	pdf	1 2
PL	**Programació Lineal** 2n batxillerat	pdf	doc

Recopilaciones de problemas

SE	**Compendium OME 2005-2019**	pdf	
SA	**Compendium AIME 1983-2019**	pdf	
ST	**Compendium PAU TEC 1998-2019**	pdf	
SC	**Compendium PAU CCSS 1998-2019**	pdf	
PM	**Problemas de Matemáticas**	pdf	doc

Versión de este documento: 28/03/2020

www.toomates.net

Índice

Para evitar la duplicación de contenidos, algunos temas relacionados con la trigonometría se encuentran en otros libros de esta misma colección:

Problemas con desigualdades trigonométricas: Es el Apartado 8 de

http://www.toomates.net/biblioteca/Desigualdades.pdf

Números complejos aplicados a la trigonometría: Es el Apartado 2 de

http://www.toomates.net/biblioteca/ProblemasNumerosComplejos.pdf

Números complejos aplicados a la trigonometría (2): Es el Apartado 4 de

http://www.toomates.net/biblioteca/ProblemasNumerosComplejos.pdf

Este libro es la continuidad natural de "**Trigonometria**":

http://www.toomates.net/biblioteca/Trigonometria.pdf

1 Problemas con las funciones trigonométricas.

1.1 MF

Si $\tan x = \dfrac{2ab}{a^2 - b^2}$, con $a > b > 0$ y $0^\circ < x < 90^\circ$, entonces $\sin x$ es igual a:

(A) $\dfrac{a}{b}$ (B) $\dfrac{b}{a}$ (C) $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2a}$ (D) $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2ab}$ (E) $\dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$

AHSME 1972 #20

1.2 MF

Si $\sin 2x \cdot \sin 3x = \cos 2x \cdot \cos 3x$, entonces uno de los valores de x es:

(A) 18º (B) 30º (C) 36º (D) 45º (E) 60º

AHSME 1984 #15

1.3 F

Calcula

$$\log_{10}(\tan 1^\circ) + \log_{10}(\tan 2^\circ) + \log_{10}(\tan 3^\circ) + ... + \log_{10}(\tan 89^\circ)$$

AHSME 1987 #20

1.4 MF

Demuestra que

$$1 - \cot 23^\circ = \frac{2}{1 - \cot 22^\circ}$$

1.5 F

a) Determina $\sin 15^\circ$, $\cos 15^\circ$ y $\tan 15^\circ$

b) Encuentra las soluciones x en $(0, 90^\circ)$ de la ecuación $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sin x} + \dfrac{\sqrt{3} + 1}{\cos x} = 4\sqrt{2}$

1.6 M

Demostrar que

$$(4\cos^2 9^\circ - 3)(4\cos^2 27^\circ - 3) = \tan 9^\circ$$

1.7 MF

Si $\tan x + \tan y = 25$ y $\cot x + \cot y = 30$, determina $\tan(x + y)$.

AIME 1983 #3

1.8 [MF]

$$\frac{\sin 10^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 10^\circ + \cos 20^\circ}$$ es igual a:

(A) $\tan 10^\circ + \tan 20^\circ$ (B) $\tan 30^\circ$ (C) $\frac{1}{2}\left(\tan 10^\circ + \tan 20^\circ\right)$ (D) $\tan 15^\circ$ (E) $\frac{1}{4}\tan 60^\circ$

AHSME 1984 #23

1.9 [D]

Sean a y b números reales en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Demuestra que

$$\sin^6 a + 3\sin^2 a \cos^2 b + \cos^6 b = 1 \text{ si y solo si } a = b$$

1.10 [D]

Demostrar que

$$\csc\frac{180^\circ}{7} = \csc\frac{360^\circ}{7} + \csc\frac{540^\circ}{7}$$

Nota 1: Se presentan dos soluciones: mediante trigonometría y mediante el estudio de los ángulos internos del heptágono regular.
Nota 2: En PG/#6.69 encontramos nuevas aplicaciones del heptágono regular.

1.11 [F]

Sea $x_0 = 2003$, y sea $x_{n+1} = \dfrac{1 + x_n}{1 - x_n}$ para $n \geq 1$. Determina x_{2004}.

1.12 [F]

Demostrar que

$$\tan 3a - \tan 2a - \tan a = \tan 3a \tan 2a \tan a$$

Para todo $a \neq \dfrac{k\pi}{2}$, con $k \in Z$

1.13 [D]

Sean a, b, c, d números en el intervalo $[0, \pi]$ tales que

$$\sin a + 7\sin b = 4(\sin c + 2\sin d)$$
$$\cos a + 7\cos b = 4(\cos c + 2\cos d)$$

Demostrar que $2\cos(a - d) = 7\cos(b - c)$

1.14 D

Sea x un número real tal que $\sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{11}{36}$. Determina $\sin^{12} x + \cos^{12} x$.

AIME I 2019, problema #8

1.15 F

Resuelve la ecuación

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$$

IMO 1962, problema #4

Nota: Este mismo problema se resuelve en PC/#4.1 mediante números complejos.

1.16 D

Resuelve la ecuación

$$\cos^n x - \sin^n x = 1$$

donde n es un número natural.

IMO 1961, problema #3

1.17 MF

Si $A = 20^o$ y $B = 25^o$, entonces el valor de $(1+\tan A)(1+\tan B)$ es

(A) $\sqrt{3}$ (B) 2 (C) $1+\sqrt{2}$ (D) $2(\tan A + \tan B)$
(E) Ninguno de los anteriores

AHSME 1985 #16

1.18 F

Sean a, b, c números reales. Consideremos la ecuación cuadrática en $\cos x$:

$$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$$

Usando los números a, b, c, forma una ecuación cuadrática en $\cos 2x$ con las mismas raíces que la ecuación original. Compara las ecuaciones en $\cos x$ y en $\cos 2x$ para $a = 4, b = 2, c = -1$.

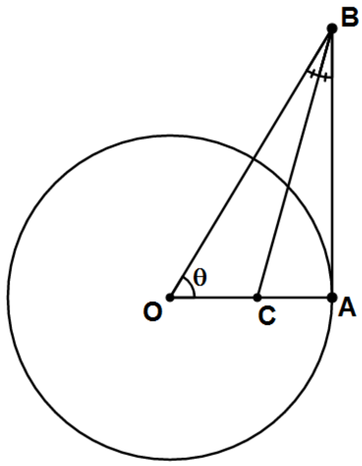
IMO 1959 #3

2 Trigonometría aplicada a la resolución de problemas geométricos.

2.1 MF

Una circunferencia centrada en O y con radio 1 contiene el punto A. El segmento AB es tangente a la circunferencia en A y $\angle AOB = \theta$. Si el punto C está en $\overline{OA}$ y el segmento $\overline{BC}$ es la bisectriz de $\angle ABO$, entonces $OC =$

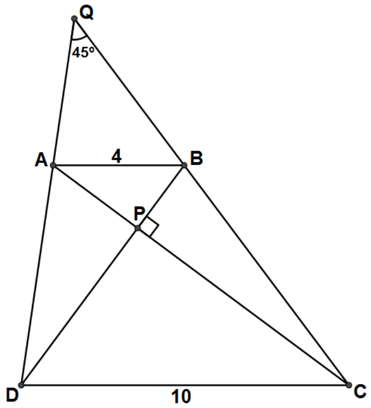
(A) $\sec^2\theta - \tan\theta$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta}$ (D) $\frac{1}{1+\sin\theta}$ (E) $\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$



AMC 12 2000 #17

2.2 D

Sea un trapecio $ABCD$, con $AB // CD$, $AB = 4$ y $CD = 10$. Supongamos que las rectas AC y BD se cortan en ángulo recto, y que las rectas BC y DA, cuando se extienden a un punto Q, forman un ángulo de 45º. Determina $[ABCD]$, el área del trapecio $ABCD$.



2.3 F

En un triángulo ΔABC,

$$3\sin A + 4\cos B = 6 \ , \ 4\sin B + 3\cos A = 1$$

determina la medida del ángulo C.

AMC12 1999

2.4 [F]

Sea ΔABC un triángulo acutángulo. Demostrar que:

a) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$.

b) $\tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3}$.

2.5 [F]

Demostrar que, en cualquier triángulo ΔABC,

a) $\dfrac{\tan\dfrac{A-B}{2}}{\tan\dfrac{A+B}{2}} = \dfrac{a-b}{a+b}$

b) $\tan\dfrac{A-B}{2}\tan\dfrac{C}{2} = \dfrac{a-b}{a+b}$

Nota: Estas dos identidades se conocen como "Teorema de la Tangente".

2.6 [F]

Supongamos que en un triángulo ΔABC, $\dfrac{a}{b} = 2+\sqrt{3}$ y $\angle C = 60^{\circ}$. Determina la medida de los ángulos A y B.

2.7 [F]

Dado un triángulo ΔABC, demuestra que:

a) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$
b) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A \cos B \cos C$
c) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A \cos B \cos C$
d) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1$

Nota: Este problema es una continuación natural de PG/#6.85.

2.8 [MF]

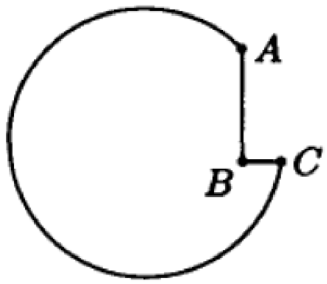
Sea s el semiperímetro de un triángulo ΔABC. Demuestra que:

a) $s = 4R\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

b) $s \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}R$

2.9 M

Una máquina cortadora genera piezas de la siguiente forma:



El radio de la circunferencia es $\sqrt{50}$ cm, la longitud AB es 6cm y la longitud BC es 2cm. El ángulo $\angle ABC$ es recto. Determina el cuadrado de la distancia (en centímetros) de B al centro de la circunferencia.

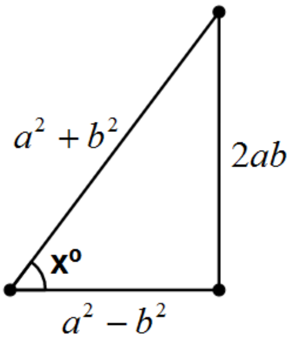
AIME 1983 #4

Nota: Los problemas de este apartado corresponden a los siguientes enunciados dentro de "Problemas de Geometría":

2.1=6.43	2.2=6.78	2.3=6.83	2.4=6.80	2.5=6.81
2.6=6.82	2.7=6.86	2.8=6.87	2.9=7.13	

Soluciones

1.1
Buscamos un triángulo rectángulo con catetos $2ab$ y $a^2 - b^2$, pero entonces su hipotenusa será
$$hip^2 = (2ab)^2 + (a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2 + a^4 + b^4 - 2a^2b^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 \Rightarrow$$
$$hip = a^2 + b^2$$



Y por lo tanto $\sin x = \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$

1.2
$$\sin 2x \cdot \sin 3x = \cos 2x \cdot \cos 3x \Leftrightarrow$$
$$0 = \cos 2x \cdot \cos 3x - \sin 2x \cdot \sin 3x = \cos(2x + 3x) = \cos(5x) \Leftrightarrow$$
$$5x = \begin{cases} 90^{\circ} \Leftrightarrow x = 90^{\circ}/5 = 18^{\circ} \\ 270^{\circ} \Leftrightarrow x = 270^{\circ}/5 = 54^{\circ} \end{cases}$$

Pero la solución $x = 54^{\circ}$ no aparece en la lista del enunciado, luego la respuesta es $x = 18^{\circ}$

1.3
Aplicando la propiedad fundamental de los logaritmos: $\log_{10}(x) + \log_{10}(y) = \log_{10}(x \cdot y)$

$$\log_{10}(\tan 1^{\circ}) + \log_{10}(\tan 2^{\circ}) + \log_{10}(\tan 3^{\circ}) + \ldots + \log_{10}(\tan 89^{\circ}) =$$
$$\log_{10}(\tan 1^{\circ} \cdot \tan 2^{\circ} \cdot \tan 3^{\circ} \cdot \ldots \cdot \tan 89^{\circ})$$

Ahora tenemos en cuenta que
$$\tan(n) \cdot \tan(90 - n) = \frac{\sin n}{\cos n} \frac{\sin(90 - n)}{\cos(90 - n)} = \frac{\sin n}{\cos n} \frac{\cos n}{\sin n} = 1$$
Luego podemos agrupar las tangentes del interior del paréntesis por parejas, cuyos productos serán igual a 1, quedando solo $\tan(45) = 1$.
$$\log_{10}(\tan 1^{\circ} \cdot \tan 2^{\circ} \cdot \tan 3^{\circ} \cdot \ldots \cdot \tan 89^{\circ}) =$$
$$\log_{10}(\tan 1^{\circ} \cdot \tan 89^{\circ} \cdot \tan 2^{\circ} \cdot \tan 88^{\circ} \cdot \tan 3^{\circ} \cdot \tan 87^{\circ} \cdot \ldots \cdot \tan 45) =$$
$$\log_{10}(1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1) = \log_{10}(1) = 0$$

1.4

$$1-\cot 23=\frac{2}{1-\cot 22}\Leftrightarrow$$
$$(1-\cot 23)(1-\cot 22)=2\Leftrightarrow$$
$$\left(1-\frac{\cos 23}{\sin 23}\right)\left(1-\frac{\cos 22}{\sin 22}\right)=2\Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{\sin 23-\cos 23}{\sin 23}\right)\left(\frac{\sin 22-\cos 22}{\sin 22}\right)=2\Leftrightarrow$$
$$(\sin 23-\cos 23)(\sin 22-\cos 22)=2\sin 23\sin 22$$

Para la parte derecha aplicamos la identidad del ángulo doble:

$$2\sin 23\sin 22=\cos(23-22)-\cos(23+22)=\cos 1-\cos 45$$

Para la parte derecha aplicamos la propiedad distributiva:

$$(\sin 23-\cos 23)(\sin 22-\cos 22)=$$
$$=\sin 23\sin 22-\sin 23\cos 22-\cos 23\sin 22+\cos 23\cos 22=$$
$$=\sin 23\sin 22+\cos 23\cos 22-(\sin 23\cos 22+\cos 23\sin 22)=$$
$$=\cos(23-22)-\sin(23+22)=\cos 1-\sin 45$$

Y el problema queda resuelto puesto que $\sin 45=\cos 45$.

1.5

a)

$$\cos 15=\cos(45-30)=\cos 45\sin 30+\sin 45\cos 30=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2}{4\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin 15=\sin(45-30)=\sin 45\cos 30-\cos 45\sin 30=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2}{4\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\tan 15=\frac{\sin 15}{\cos 15}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)/(2\sqrt{2})}{\left(\sqrt{3}-1\right)/(2\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

b)

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sin x}+\frac{\sqrt{3}+1}{\cos x}=4\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\cos x+\left(\sqrt{3}+1\right)\sin x}{\cos x\sin x}=4\sqrt{2}\Leftrightarrow$$
$$\left(\sqrt{3}-1\right)\cos x+\left(\sqrt{3}+1\right)\sin x=4\sqrt{2}\cos x\sin x\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\cos x+\left(\sqrt{3}+1\right)\sin x}{2\sqrt{2}}=2\cos x\sin x\Leftrightarrow$$
$$\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\cos x+\left(\sqrt{3}+1\right)\sin x}{2\sqrt{2}}=\sin 2x\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\sqrt{2}}\cos x+\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{2\sqrt{2}}\sin x=\sin 2x\quad(*)$$

Ahora aplicamos el apartado a : $\sin 15 = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, $\cos 15 = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

Con lo que
$(*) \Leftrightarrow \sin 15 \cos x + \cos 15 \sin x = \sin 2x \Leftrightarrow$

$$\sin(x+15) = \sin 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x+15 = 2x \Leftrightarrow 15 = 2x - x = x \Leftrightarrow x = 15^{\circ} \\ x+15 = 180-2x \Leftrightarrow x+2x = 180-15 \Leftrightarrow 3x = 165 \Leftrightarrow x = \dfrac{165}{3} = 55^{\circ} \end{cases}$$

Las soluciones son $x = 15^{\circ}$ y $x = 55^{\circ}$

1.6
Sabemos que $\cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x = \cos x\left(-3+4\cos^2 x\right)$

Luego $4\cos^2 x - 3 = \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$

$$\left(4\cos^2 9^{\circ}-3\right)\left(4\cos^2 27^{\circ}-3\right) = \frac{\cos 27}{\cos 9}\cdot\frac{\cos 81}{\cos 27} = \frac{\cos 81}{\cos 9}$$

Luego el problema se reduce a demostrar

$$\frac{\cos 81}{\cos 9} = \tan 9 \Leftrightarrow \frac{\cos 81}{\cos 9} = \frac{\sin 9}{\cos 9} \Leftrightarrow \cos 81 = \sin 9$$

Lo cual es cierto pues $\cos 81 = \cos(90-9) = \sin 9$

Fuente de la solución: 103 Trigonometry Problems From the Training of the USA IMO Team (Titu Andreescu, Zuming Feng), página 92

1.7

$$30 = \cot x + \cot y = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} = \frac{\tan x + \tan y}{\tan x \tan y} = \frac{25}{\tan x \tan y} \Rightarrow \tan x \tan y = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x \tan y} = \frac{25}{1-5/6} = 150$$

1.8

$$\frac{\sin 10^{\circ}+\sin 20^{\circ}}{\cos 10^{\circ}+\cos 20^{\circ}} = \frac{2\sin\left(\dfrac{10+20}{2}\right)\cos\left(\dfrac{10-20}{2}\right)}{2\cos\left(\dfrac{10+20}{2}\right)\cos\left(\dfrac{10-20}{2}\right)} = \frac{\sin 15^{\circ}}{\cos 15^{\circ}} = \tan 15^{\circ}$$

1.9

La resolución de este problema se basa en la identidad

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=\frac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]$$

En nuestro caso observamos que

$$\sin^6 a+3\sin^2 a\cos^2 b+\cos^6 b-1=\left(\sin^2 a\right)^3+\left(\cos^2 b\right)^3+(-1)^3-3(\sin^2 a)(\cos^2 b)(-1)$$

Luego, tomando $x=\sin^2 a$, $y=\cos^2 b$, $z=-1$, tenemos

$$\sin^6 a+3\sin^2 a\cos^2 b+\cos^6 b-1=$$

$$=\left(\sin^2 a+\cos^2 b-1\right)\frac{1}{2}\left[\left(\sin^2 a-1\right)^2+\left(\cos^2 a-1\right)^2+\left(\sin^2 a-\cos^2 a\right)^2\right]$$

Y por tanto

$$\sin^6 a+3\sin^2 a\cos^2 b+\cos^6 b=1\Leftrightarrow \sin^6 a+3\sin^2 a\cos^2 b+\cos^6 b-1=0\Leftrightarrow$$

$$\left(\sin^2 a+\cos^2 b-1\right)\frac{1}{2}\left[\left(\sin^2 a-1\right)^2+\left(\cos^2 a-1\right)^2+\left(\sin^2 a-\cos^2 a\right)^2\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^2 a+\cos^2 b-1=0\\ \begin{cases}\sin^2 a=1\Leftrightarrow a=\pi/2\\ \cos^2 a=1\Leftrightarrow a=0\\ \sin^2 a-\cos^2 a=0\end{cases}\end{cases}$$

Puesto que la segunda posibilidad lleva a contradicción, solo nos queda la posibilidad

$$\sin^2 a+\cos^2 b-1=0\Leftrightarrow \sin^2 a+\left(1-\sin^2 b\right)-1=0\Leftrightarrow \sin^2 a-\sin^2 b=0\Leftrightarrow$$

$$\sin^2 a=\sin^2 b\Leftrightarrow \sin a=\sin b\Leftrightarrow a=b$$

Donde en todo momento estamos teniendo muy en cuenta que $0\le a,b\le\frac{\pi}{2}$.

Fuente de la solución: 103 Trigonometry Problems From the Training of the USA IMO Team (Titu Andreescu, Zuming Feng), página 135

1.10

Sea $\alpha=\frac{180^{\circ}}{7}$

$$\csc\frac{180^{\circ}}{7}=\csc\frac{360^{\circ}}{7}+\csc\frac{540^{\circ}}{7}\Leftrightarrow\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin 3\alpha}=\frac{\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha\,\sin 3\alpha}\Leftrightarrow$$

$$\sin 2\alpha\,\sin 3\alpha=\sin\alpha\left(\sin 2\alpha+\sin 3\alpha\right)$$

Demostración mediante identidades trigonométricas.
Observamos que $3\alpha + 4\alpha = 180º$, luego $\sin(3\alpha) = \sin(180º - 4\alpha) = \sin(4\alpha)$

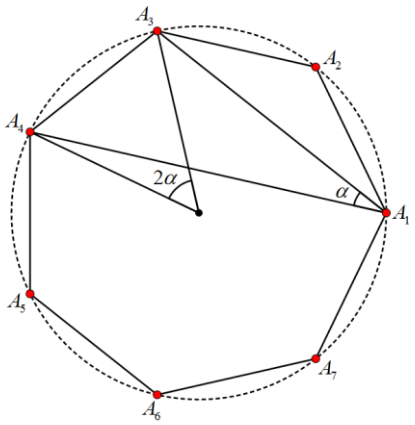
Con lo cual la igualdad anterior queda
$$\sin 2\alpha \sin 3\alpha = \sin \alpha (\sin 2\alpha + \sin 4\alpha)$$

Pero ahora, por la identidad "Suma-A-Producto":
$$\sin 2\alpha + \sin 4\alpha = 2\sin\left(\frac{6\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha}{2}\right) = 2\sin 3\alpha \cos \alpha$$
Luego llegamos a la igualdad
$$\sin 2\alpha \sin 3\alpha = 2\sin \alpha \sin 3\alpha \cos \alpha$$

Que es cierta aplicando la identidad del seno del ángulo doble:
$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

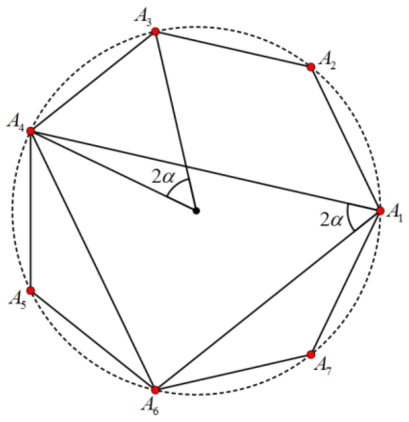
Demostración geométrica.
Consideremos un heptágono regular $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ inscrito en una circunferencia de radio $1/2$.
Cada ángulo $\angle A_iOA_{i+1}$ mide $\dfrac{360º}{7} = 2\alpha$

Aplicando el Teorema del Seno al triángulo $\Delta A_1A_3A_4$:



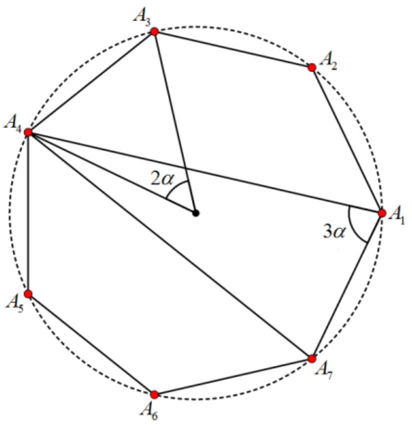
$$\frac{\overline{A_3A_4}}{\sin \angle A_3A_1A_4} = 2R = 1 \Rightarrow$$
$$\overline{A_3A_4} = \sin \angle A_3A_1A_4 = \sin \alpha$$

Aplicando el Teorema del Seno al triángulo $\Delta A_1A_4A_6$:



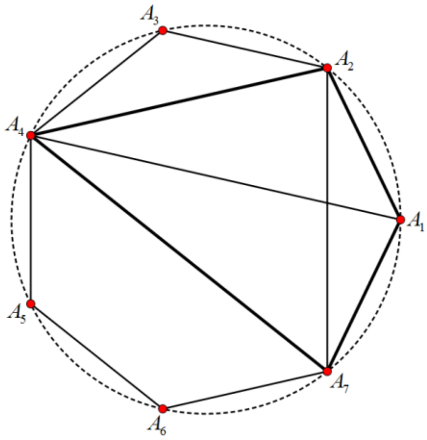
$$\frac{\overline{A_4A_6}}{\sin \angle A_4A_1A_6} = 2R = 1 \Rightarrow$$
$$\overline{A_4A_6} = \sin \angle A_4A_1A_6 = \sin 2\alpha$$

Aplicando el Teorema del Seno al triángulo $\Delta A_1A_4A_7$:



$$\frac{\overline{A_4A_7}}{\sin \angle A_4A_1A_7} = 2R = 1 \Rightarrow$$
$$\overline{A_4A_7} = \sin \angle A_4A_1A_7 = \sin 3\alpha$$

Finalmente, aplicando el Teorema de Ptolomeo al cuadrilátero cíclico $A_1A_2A_4A_7$



$$\overline{A_1A_4} \cdot \overline{A_2A_7} = \overline{A_2A_4} \cdot \overline{A_1A_7} + \overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_4A_7} \Leftrightarrow$$
$$\overline{A_4A_7} \cdot \overline{A_4A_6} = \overline{A_4A_6} \cdot \overline{A_3A_4} + \overline{A_3A_4} \cdot \overline{A_4A_7} \Leftrightarrow$$
$$\sin 3\alpha \sin 2\alpha = \sin 2\alpha \sin \alpha + \sin \alpha \sin 3\alpha = \sin \alpha \left(\sin 2\alpha + \sin 3\alpha \right)$$

Fuente de esta solución: "103 Trigonometry Problems From the Training of the USA IMO Team" (Titu Andreescu, Zuming Feng, 2005) , pág. 21

1.11

Sea $x_0 = \tan(\alpha_0)$ para cierto α_0.

Entonces:

$$x_1 = \frac{1 + x_0}{1 - x_0} = \frac{\tan(45^\circ) + \tan(\alpha_0)}{1 - \tan(45^\circ)\tan(\alpha_0)} = \tan(\alpha_0 + 45^\circ)$$

y por tanto, en general:

$$x_{n+1} = \frac{1 + x_n}{1 - x_n} = \tan(\alpha_0 + 45(n+1))$$

Por lo que vemos un bucle de repetición:

$$x_4 = \frac{1+x_n}{1-x_n} = \tan(\alpha_0 + 45\cdot 4) = \tan(\alpha_0 + 180) = \tan(\alpha_0)$$

Puesto que $2004 \bmod 4 = 0$, llegamos a $x_{2004} = x_0 = 2003$

1.12

$$\tan 3a - \tan 2a - \tan a = \tan 3a\ \tan 2a\ \tan a \Leftrightarrow$$
$$\tan 3a - \tan 3a\ \tan 2a\ \tan a = \tan 2a + \tan a \Leftrightarrow$$
$$\tan 3a(1 - \tan 2a\ \tan a) = \tan 2a + \tan a \Leftrightarrow$$
$$\tan 3a = \frac{\tan 2a + \tan a}{1 - \tan 2a\ \tan a}$$

Lo cual es cierto, basta aplicar la identidad trigonométrica de la tangente de la suma:

$$\tan 3\alpha = \tan(2\alpha + \alpha) = \frac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan 2\alpha \tan\alpha}$$

Fuente de la solución: 103 Trigonometry Problems From the Training of the USA IMO Team" (Titu Andreescu, Zuming Feng, 2005) , pág. 65

1.13

$$\sin a + 7\sin b = 4(\sin c + 2\sin d) = 4\sin c + 8\sin d \Rightarrow$$
$$\sin a - 8\sin d = 4\sin c - 7\sin b \Rightarrow$$
$$(\sin a - 8\sin d)^2 = (4\sin c - 7\sin b)^2 \Rightarrow$$
$$\sin^2 a - 16\sin a\sin d + 64\sin^2 d = 16\sin^2 c - 56\sin c\sin b + 49\sin^2 b$$

$$\cos a + 7\cos b = 4(\cos c + 2\cos d) = 4\cos c + 8\cos d \Rightarrow$$
$$\cos a - 8\cos d = 4\cos c - 7\cos b \Rightarrow$$
$$(\cos a - 8\cos d)^2 = (4\cos c - 7\cos b)^2 \Rightarrow$$
$$\cos^2 a - 16\cos a\cos d + 64\cos^2 d = 16\cos^2 c - 56\cos c\cos b + 49\cos^2 b$$

Sumando estas dos igualdades, llegamos a

$$\sin^2 a - 16\sin a\sin d + 64\sin^2 d + \cos^2 a - 16\cos a\cos d + 64\cos^2 d =$$
$$16\sin^2 c - 56\sin c\sin b + 49\sin^2 b + 16\cos^2 c - 56\cos c\cos b + 49\cos^2 b$$
$$1 + 64 - 16(\sin a\sin d + \cos a\cos d) = 16 + 49 - 56(\sin c\sin b + \cos c\cos b) \Leftrightarrow$$
$$65 - 16(\sin a\sin d + \cos a\cos d) = 65 - 56(\sin c\sin b + \cos c\cos b) \Leftrightarrow$$
$$-16(\sin a\sin d + \cos a\cos d) = -56(\sin c\sin b + \cos c\cos b) \Leftrightarrow$$
$$2(\sin a\sin d + \cos a\cos d) = 7(\sin c\sin b + \cos c\cos b) \Leftrightarrow$$
$$2\cos(a-d) = 7\cos(b-c)$$

En donde hemos aplicado la identidad notable "coseno de la diferencia"

Fuente de la solución: 103 Trigonometry Problems From the Training of the USA IMO Team" (Titu Andreescu, Zuming Feng, 2005) , pág. 91

1.14

Sean $a=\sin x$ y $b=\cos x$. Está claro que $a^2+b^2=1$.

$$\frac{11}{36}=\frac{11}{36}\cdot 1=(a^{10}+b^{10})(a^2+b^2)=a^{12}+a^{10}b^2+a^2b^{10}+b^{12}=a^{12}+b^{12}+a^2b^2\left(a^8+b^8\right)$$

Luego todo se reduce a determinar $a^2b^2\left(a^8+b^8\right)$

$$1=1^3=(a^2+b^2)^3=\binom{3}{0}\left(a^2\right)^0\left(b^2\right)^3+\binom{3}{1}\left(a^2\right)^1\left(b^2\right)^2+\binom{3}{2}\left(a^2\right)^2\left(b^2\right)^1+\binom{3}{3}\left(a^2\right)^3\left(b^2\right)^0=$$

$$=b^6+3a^2b^4+3a^4b^2+a^6=a^6+b^6+3a^2b^2\left(a^2+b^2\right)=a^6+b^6+3a^2b^2$$

Sea $y=a^2b^2$. La igualdad anterior se puede escribir como $1=a^6+b^6+3y\Rightarrow a^6+b^6=1-3y$

$$1=1^5=(a^2+b^2)^5=$$

$$=\binom{5}{0}\left(a^2\right)^0\left(b^2\right)^5+\binom{5}{1}\left(a^2\right)^1\left(b^2\right)^4+\binom{5}{2}\left(a^2\right)^2\left(b^2\right)^3+\binom{5}{3}\left(a^2\right)^3\left(b^2\right)^2+$$

$$+\binom{5}{4}\left(a^2\right)^4\left(b^2\right)^1+\binom{5}{5}\left(a^2\right)^5\left(b^2\right)^0=b^{10}+5a^2b^8+10a^4b^6+10a^6b^4+5a^8b^2+a^{10}=$$

$$=a^{10}+b^{10}+5a^2b^2\left(a^6+b^6\right)+10a^4b^4\underbrace{\left(a^2+b^2\right)}_{=1}=\frac{11}{36}+5y\left(a^6+b^6\right)+10y^2=$$

$$=\frac{11}{36}+5y(1-3y)+10y^2$$

Resolvemos la ecuación resultante:

$$1=\frac{11}{36}+5y(1-3y)+10y^2\Leftrightarrow 1=\frac{11}{36}+5y-5y^2\Leftrightarrow\begin{cases}y=1/6\\ y=5/6\end{cases}$$

La solución $y=5/6$ la descartamos por extraña (???) y nos quedamos con:

$$a^2b^2=y=\frac{1}{6}$$

$$a^4+b^4=\left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2=1-2\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

$$a^8+b^8=\left(a^4+b^4\right)^2-2a^4b^4=\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{4}{9}-2\frac{1}{36}=\frac{4}{9}-\frac{1}{18}=\frac{7}{18}$$

Finalmente:

$$a^{12}+b^{12}=\frac{11}{36}-a^2b^2\left(a^8+b^8\right)=\frac{11}{36}-\frac{1}{6}\cdot\frac{7}{18}=\frac{11}{36}-\frac{7}{108}=\frac{13}{54}$$

Fuente de la solución: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2019_AIME_I_Problems/Problem_8

1.15
Aplicamos las identidades trigonométricas del coseno del ángulo doble y triple:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 2x = \left(2\cos^2 x - 1\right)^2$$

$$\cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x \Rightarrow \cos^2 3x = \left(-3\cos x + 4\cos^3 x\right)^2$$

Luego

$$1 = \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x =$$

$$\cos^2 x + \left(2\cos^2 x - 1\right)^2 + \left(-3\cos x + 4\cos^3 x\right)^2 =$$

$$= \cos^2 x + 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 + 9\cos^2 x - 24\cos^4 x + 16\cos^6 x =$$

$$= 6\cos^2 x - 20\cos^4 x + 16\cos^6 x + 1 \Leftrightarrow$$

$$0 = 6\cos^2 x - 20\cos^4 x + 16\cos^6 x = 2\cos^2 x\left(3 - 10\cos^2 x + 8\cos^4 x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \pi/2, 3\pi/2 \\ 3 - 10\cos^2 x + 8\cos^4 x = 0 \end{cases}$$

Resolvemos la ecuación $3 - 10\cos^2 x + 8\cos^4 x = 0$ mediante un cambio de variable $z = \cos^2 x$

$$8z^2 - 10z + 3 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4\cdot 8\cdot 3}}{2\cdot 8} = \frac{10 \pm 2}{2\cdot 8} = \begin{cases} z = 3/4 \\ z = 1/2 \end{cases}$$

$$z = \cos^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \begin{cases} \pi/6 \\ 11\pi/6 \end{cases} \qquad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \begin{cases} 5\pi/6 \\ 7\pi/6 \end{cases}$$

$$z = \cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \begin{cases} \pi/4 \\ 7\pi/4 \end{cases} \qquad \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \begin{cases} 3\pi/4 \\ 5\pi/4 \end{cases}$$

Las soluciones son: $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ y todos sus múltiplos 2π .

Nota: Este mismo problema se resuelve en PC/#4.1 mediante números complejos.

1.16
Primer caso: $n = 1$

Aplicamos las fórmulas de TR/5.4 para expressar $\cos x - \sin x$ como un seno puro:
En nuestro caso $A = 1$, $B = -1$ y por tanto:

$$\begin{cases} a^2 = A^2 + B^2 = 1^2 + (-1)^2 \Rightarrow a = \sqrt{2} \\ \tan b = \frac{A}{B} = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow b = 3\pi/4 \end{cases} \Rightarrow \cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin(x + 3\pi/4)$$

Con lo que hemos convertido una ecuación difícil en una ecuación más sencilla:

$$\cos x - \sin x = 1 \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{2}\sin(x + 3\pi/4) = 1 \Leftrightarrow$$
$$\sin(x + 3\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$
$$x + \frac{3\pi}{4} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2\pi m \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} + 2\pi m = \frac{-\pi}{2} + 2\pi m \\ \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi m = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m \Leftrightarrow x = 0 + 2\pi m \end{cases}$$

Las soluciones son: $x = \frac{-\pi}{2} + 2\pi m$ i $x = 0 + 2\pi m$

Segundo caso: n par $n = 2k$ para cierto $k > 1$ natural.

$$\cos^n x - \sin^n x = 1 \Leftrightarrow \cos^{2k} x - \sin^{2k} x = 1 \Leftrightarrow \left(\cos^2 x\right)^k = 1 + \left(\sin^2 x\right)^k \geq 1$$
$$\left(\cos^2 x\right)^k = 1 + \left(\sin^2 x\right)^k = 1 \Leftrightarrow \left(\sin^2 x\right)^k = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} 0 + 2\pi m \\ \pi + 2\pi m \end{cases}$$

Tercer caso: n impar: $n = 2k + 1$ para cierto $k > 1$ natural.

Sea $y = -x$

$$\cos^n x - \sin^n x = 1 \Leftrightarrow$$
$$\left(\cos(-y)\right)^n - \left(\sin(-y)\right)^n = 1 \Leftrightarrow$$
$$\left(\cos y\right)^n - \left(-\sin y\right)^n = 1 \Leftrightarrow$$
$$\left(\cos y\right)^n + \left(\sin y\right)^n = 1$$

Luego

$$1 = \cos^n y + \sin^n y =$$
$$= \cos^{2k+1} y + \sin^{2k+1} y \leq$$
$$\leq \left|\cos^{2k+1} y\right| + \left|\sin^{2k+1} y\right| =$$
$$= \left|\cos^{2k-1} y \cos^2 y\right| + \left|\sin^{2k-1} y \sin^2 y\right| =$$
$$= \cos^2 y \left|\cos^{2k-1} y\right| + \sin^2 y \left|\sin^{2k-1} y\right| \leq$$
$$\leq \cos^2 y + \sin^2 y = 1$$

Luego las desigualdades anteriores son igualdades, y por tanto:

$$1 = \left|\cos^{2k+1} y\right| + \left|\sin^{2k+1} y\right|$$

y esta igualdad solo se puede dar si $\cos y \geq 0$ y también $\sin y \geq 0$,

$$1 = \cos^2 y \left|\cos^{2k-1} y\right| + \sin^2 y \left|\sin^{2k-1} y\right|$$

y esta igualdad solo se puede dar si $|\cos y| = 1$ o bien $|\sin y| = 1$

De lo anterior deducimos que, o bien $\cos y = 1$, y por tanto

$$\cos y = 1 \Leftrightarrow \cos(-x) = 1 \Leftrightarrow -x = 0 + 2\pi m \Leftrightarrow x = 0 + 2\pi m$$

o bien:

$$\sin y = 1 \Leftrightarrow \sin(-x) = 1 \Leftrightarrow -x = \pi / 2 + 2\pi m \Leftrightarrow x = -\pi / 2 + 2\pi m = 3\pi / 2 + 2\pi m$$

Y las soluciones son $x = 0 + 2\pi m$ y $x = 3\pi / 2 + 2\pi m$ para todo m natural.

Fuente de esta solución: "International Mathematical Olympiads 1959-1977 Compiled and with solutions by Samuel L. Greitzer", pág. 41

1.17

Tomamos la identidad trigonométrica de la tangente de la suma de ángulos, y aislamos el producto de tangentes:

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \Leftrightarrow$$
$$\tan(A + B)\left(1 - \tan A \tan B\right) = \tan A + \tan B \Leftrightarrow$$
$$1 - \tan A \tan B = \frac{\tan A + \tan B}{\tan(A + B)}$$

En nuestro caso $\tan(A + B) = \tan(20 + 25) = \tan(45) = 1$, luego
$1 - \tan A \tan B = \tan A + \tan B$

Y por tanto
$(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 1 + \tan B + \tan A + \tan A \tan B = 1 + 1 - \tan A \tan B + \tan A \tan B = 2$

1.18

Primera versión.

Aplicamos la identidad trigonométrica $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \frac{\cos 2x + 1}{2} = \cos^2 x \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{\cos 2x + 1}{2}}$$
$$\sqrt{\frac{\cos 2x + 1}{2}} = \sqrt{\frac{2\cos 2x + 2}{4}} = \frac{\sqrt{2\cos 2x + 2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2\cos 2x + 2}}{2}$$

$$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0 \Leftrightarrow$$
$$a\left(\frac{\cos 2x + 1}{2}\right) \pm b\sqrt{\frac{\cos 2x + 1}{2}} + c = 0 \Leftrightarrow$$
$$a\left(\cos 2x + 1\right) \pm b\sqrt{2\cos 2x + 2} + 2c = 0 \Leftrightarrow$$
$$\pm b\sqrt{\cos 2x + 1} = -2c - a\left(\cos 2x + 1\right) \Leftrightarrow$$
$$\left(\pm b\sqrt{2\cos 2x + 2}\right)^2 = \left[-2c - a\left(\cos 2x + 1\right)\right]^2 \Leftrightarrow$$

$$2b^2(\cos 2x+1)=(2c)^2+4ca(\cos 2x+1)+(a(\cos 2x+1))^2 \Leftrightarrow$$
$$2b^2(\cos 2x+1)=4c^2+4ac\cos 2x+4ac+a^2(\cos 2x+1)^2 \Leftrightarrow$$
$$2b^2(\cos 2x+1)=4c^2+4ac\cos 2x+4ac+a^2(\cos^2 2x+1+2\cos 2x)\Leftrightarrow$$
$$2b^2\cos 2x+2b^2=4c^2+4ac\cos 2x+4ac+a^2\cos^2 2x+a^2+2a^2\cos 2x \Leftrightarrow$$
$$0=4c^2+4ac\cos 2x+4ac+a^2\cos^2 2x+a^2+2a^2\cos 2x-2b^2\cos 2x-2b^2 \Leftrightarrow$$
$$0=a^2\cos^2 2x+(4ac+2a^2-2b^2)\cos 2x-2b^2+4c^2+4ac+a^2$$

Para $a=4, b=2, c=-1$ tenemos
$$0=16\cos^2 2x+8\cos 2x-4=4(4\cos^2 2x+2\cos 2x-1)$$

y vemos que los coeficientes son proporcionales a los de la ecuación original.

Segunda versión.
Sean $r_1=\cos x_1$ y $r_2=\cos x_2$ las raíces de la ecuación original $a\cos^2 x+b\cos x+c=0$.
Sabemos que $r_1+r_2=\frac{-b}{a}$ y $r_1 r_2=\frac{c}{a}$

Sean $R_1=\cos 2x_1=2\cos^2 x_1-1=2r_1^2-1$ y $R_2=\cos 2x_2=2\cos^2 x_2-1=2r_2^2-1$ las raíces de la ecuación buscada:
$$Az^2+Bz+C=0$$

Donde A,B,C son funciones de a,b,c

Luego
$$\left.\begin{array}{l}R_1=2r_1^2-1\\ R_2=2r_2^2-1\end{array}\right\}\Rightarrow R_1+R_2=2r_1^2-1+2r_2^2-1=2(r_1^2+r_2^2)-2=2((r_1+r_2)^2-2r_1r_2)-2=\frac{-B}{A}\Leftrightarrow$$
$$2\left(\left(\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}\right)-2=\frac{-B}{A}\Leftrightarrow 2\frac{b^2}{a^2}-4\frac{c}{a}-2=\frac{-B}{A}$$
$$R_1R_2=(2r_1^2-1)(2r_2^2-1)=4r_1^2r_2^2-2r_1^2-2r_2^2+1=4(r_1r_2)^2-2(r_1^2+r_2^2)+1=$$
$$=4(r_1r_2)^2-2((r_1+r_2)^2-2r_1r_2)+1=4\left(\frac{c}{a}\right)^2-2\left(\left(\frac{b}{a}\right)^2-2\left(\frac{c}{a}\right)\right)+1=$$
$$=4\frac{c^2}{a^2}-2\left(\frac{b^2}{a^2}-2\frac{c}{a}\right)+1=\frac{C}{A}$$

Tomando $A=a^2$ se llega a:
$$Az^2+Bz+C=a^2z+(4ac+2a^2-2b^2)z-2b^2+4c^2+4ac+a^2=0$$

Fuente de esta segunda versión: "International Mathematical Olympiads 1959-1977, Compiled and with solutions by Samuel L.Greitzer", pág 23, en donde es atribuida a Gerhard Arenstorf.

2.1

Aplicando el Teorema de la bisectriz,

$$\frac{OC}{AC}=\frac{OB}{AB}=\frac{1}{\sin\theta}\Rightarrow\frac{OC}{1-OC}=\frac{OB}{AB}=\frac{1}{\sin\theta}\Rightarrow OC\sin\theta=1-OC\Rightarrow OC\sin\theta+OC=1\Rightarrow$$

$$OC(\sin\theta+1)=1\Rightarrow OC=\frac{1}{\sin\theta+1}$$

2.2

Sea $AP=2x$ y $PB=2y$. Por Pitágoras, $4^2=AB^2=(2x)^2+(2y)^2=4(x^2+y^2)\Rightarrow x^2+y^2=4$.

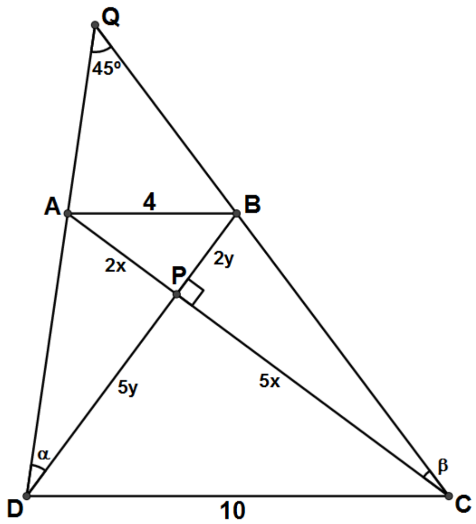
Los triángulos ΔQDC y ΔQAB son semejantes, con una razón de proporcionalidad de $\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$.

Las diagonales de un trapecio determinan triángulos semejantes, luego

$$\frac{PC}{PA}=\frac{10}{4}\Rightarrow PC=\frac{10}{4}PA=\frac{10}{4}2x=5x$$

$$\frac{PD}{PB}=\frac{10}{4}\Rightarrow PD=\frac{10}{4}PB=\frac{10}{4}2y=5y$$

Sea $\alpha=\angle ADP$ y $\beta=\angle BCP$.



$$180=\angle QBD+\angle DBC=180-45-\alpha+180-90-\beta\Rightarrow$$

$$0=180-45-\alpha-90-\beta=45-(\alpha+\beta)\Rightarrow\alpha+\beta=45º$$

Puesto que $\angle APB=90º$, $[ABCD]=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}7x\cdot 7y=\frac{49}{2}xy$

En efecto:

$$[ABCD]=[\Delta ABD]+[\Delta BCD]=\frac{BD\cdot AP}{2}+\frac{BD\cdot PC}{2}=\frac{1}{2}PD(AP+PC)=\frac{1}{2}PD\cdot AC$$

Aplicamos la identidad trigonométrica de la tangente de la suma de ángulos:

$$1 = \tan(45) = \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{2x}{5y} + \frac{2y}{5x}}{1 - \frac{2x}{5y}\cdot\frac{2y}{5x}} = \frac{\frac{2x^2 + 2y^2}{5xy}}{1 - \frac{4}{25}} \Leftrightarrow$$

$$1 - \frac{4}{25} = \frac{2x^2 + 2y^2}{5xy} \Leftrightarrow \frac{21}{25} = \frac{2x^2 + 2y^2}{5xy} \Leftrightarrow \frac{21}{5} = \frac{2(x^2 + y^2)}{xy} = \frac{21}{5} = \frac{2\cdot 4}{xy} = \frac{8}{xy} \Leftrightarrow$$

$$xy = \frac{40}{21}$$

Y finalmente, $[ABCD] = \frac{49}{2}xy = \frac{49}{2}\frac{40}{21} = \frac{140}{3}$

Fuente de la solución: 103 Trigonometry Problems From the Training of the USA IMO Team (Titu Andreescu, Zuming Feng, 2005) , pág. 7

2.3

Elevamos al cuadrado las dos igualdades:

$$36 = 6^2 = (3\sin A + 4\cos B)^2 = 9\sin^2 A + 16\cos^2 B + 12\sin A\cos B$$

$$1 = 1^2 = (4\sin B + 3\cos A)^2 = 16\sin^2 B + 9\cos^2 A + 12\sin B\cos A$$

Y las sumamos:

$$37 = 36 + 1 = 9\sin^2 A + 16\cos^2 B + 24\sin A\cos B + 16\sin^2 B + 9\cos^2 A + 24\sin B\cos A =$$

$$= 9\sin^2 A + 9\cos^2 A + 16\cos^2 B + 16\sin^2 B + 24\sin A\cos B + 24\sin B\cos A =$$

$$= 9(\sin^2 A + \cos^2 A) + 16(\cos^2 B + \sin^2 B) + 24(\sin A\cos B + \sin B\cos A) =$$

$$= 9\cdot 1 + 16\cdot 1 + 24(\sin A\cos B + \sin B\cos A) =$$

$$= 25 + 24(\sin A\cos B + \sin B\cos A) \Rightarrow$$

$$37 - 25 = 24(\sin A\cos B + \sin B\cos A) \Rightarrow$$

$$12 = 24(\sin A\cos B + \sin B\cos A) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} = \frac{12}{24} = \sin A\cos B + \sin B\cos A = \sin(A + B)$$

$$\sin C = \sin(180 - (A + B)) = \sin(A + B) = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 30^{\circ}$$

2.4

a) $\tan C = \tan(180 - (A + B)) = -\tan(A + B)$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C \Leftrightarrow$$

$$\tan A + \tan B - \tan(A + B) = -\tan A\tan B\tan(A + B) \Leftrightarrow$$

$$\tan A + \tan B = -\tan A\tan B\tan(A + B) + \tan(A + B) \Leftrightarrow$$

$$\tan A + \tan B = \tan(A + B)(1 - \tan A\tan B) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B} = \tan(A + B)$$

y esta última igualdad es la identidad trigonométrica de la tangente de la suma.

b) **Primera versión.**

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C \Rightarrow$$

$$1=\frac{\tan A+\tan B+\tan C}{\tan A\tan B\tan C}=\frac{1}{\tan B\tan C}+\frac{1}{\tan A\tan C}+\frac{1}{\tan A\tan B}$$

Aplicamos la desigualdad HM-GM:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}}\le\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}$$

$$3=\frac{3}{1}=\frac{3}{\frac{1}{\tan B\tan C}+\frac{1}{\tan A\tan C}+\frac{1}{\tan A\tan B}}\le\sqrt[3]{\tan B\tan C\tan A\tan C\tan A\tan B}=$$

$$=\sqrt[3]{\tan^2 A\tan^2 B\tan^2 C}=\sqrt[3]{(\tan A\tan B\tan C)^2}=\left(\sqrt[3]{\tan A\tan B\tan C}\right)^2\Rightarrow$$

$$\sqrt{3}\le\sqrt[3]{\tan A\tan B\tan C}\Leftrightarrow\left(\sqrt{3}\right)^3\le\tan A\tan B\tan C\Leftrightarrow\sqrt{3^3}\le\tan A\tan B\tan C\Leftrightarrow$$

$$3\sqrt{3}\le\tan A\tan B\tan C$$

Segunda versión.

Aplicando directamente la desigualdad GM-AM:

$$\sqrt[3]{\tan A\tan B\tan C}\le\frac{\tan A+\tan B+\tan C}{3}=\frac{\tan A\tan B\tan C}{3}\Leftrightarrow$$

$$\tan A\tan B\tan C\le\frac{(\tan A\tan B\tan C)^3}{27}\Leftrightarrow$$

$$27\tan A\tan B\tan C\le(\tan A\tan B\tan C)^3\Leftrightarrow$$

$$27\le(\tan A\tan B\tan C)^2\Leftrightarrow$$

$$27\tan A\tan B\tan C\le(\tan A\tan B\tan C)^3\Leftrightarrow$$

$$3\sqrt{3}=\sqrt{27}\le\tan A\tan B\tan C$$

2.5

a)

$$\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}=\frac{2\sin((A-B)/2)}{2\cos((A-B)/2)}\frac{\cos((A+B)/2)}{\sin((A+B)/2)}=\frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}-\frac{A+B}{2}\right)+\sin\left(\frac{A-B}{2}+\frac{A+B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}\right)+\sin\left(\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\right)}=$$

$$\frac{\sin(-B)+\sin A}{\sin B+\sin A}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin B+\sin A}$$

Aplicando el Teorema del Seno:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\Rightarrow\begin{cases}a=2R\sin A\Rightarrow\sin A=\dfrac{a}{2R}\\ b=2R\sin B\Rightarrow\sin B=\dfrac{b}{2R}\\ c=2R\sin C\Rightarrow\sin C=\dfrac{c}{2R}\end{cases}$$

$$(*)=\frac{\frac{a}{2R}-\frac{b}{2R}}{\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}}=\frac{a-b}{a+b}$$

b)

$$\tan\frac{A-B}{2}\left(\tan\frac{A+B}{2}\right)^{-1}=\frac{a-b}{a+b}\Leftrightarrow\tan\frac{A-B}{2}\cot\frac{A+B}{2}=\frac{a-b}{a+b}$$

Pero

$$A+B+C=180\Rightarrow C=180-(A+B)\Rightarrow\frac{C}{2}=90-\left(\frac{A+B}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\tan\left(\frac{C}{2}\right)=\tan\left(90-\left(\frac{A+B}{2}\right)\right)=\cot\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

con lo que se demuestra la identidad del enunciado.

2.6

Primera versión: Aplicando el Teorema del Coseno:

$$\frac{a}{b}=2+\sqrt{3}\Rightarrow a=\left(2+\sqrt{3}\right)b$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=\left(2+\sqrt{3}\right)^2b^2+b^2-2\left(2+\sqrt{3}\right)bb\cos 60^{o}=$$

$$=b^2\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^2+1-2\left(2+\sqrt{3}\right)\frac{1}{2}\right)=b^2\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^2+1-\left(2+\sqrt{3}\right)\right)=b^2\left(3\left(2+\sqrt{3}\right)\right)\Rightarrow$$

$$\frac{c}{b}=\sqrt{3(2+\sqrt{3})}$$

Por el Teorema del Seno:

$$\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{c/2R}{b/2R}=\frac{c}{b}=\sqrt{3(2+\sqrt{3})}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin C=\sqrt{3(2+\sqrt{3})}\sin B\Rightarrow$$

$$\sin B=\frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3(2+\sqrt{3})}}\Rightarrow\sin^2 B=\frac{3/4}{3(2+\sqrt{3})}=\frac{1}{4(2+\sqrt{3})}\Rightarrow$$

$$\cos 2B=1-2\sin^2 B=1-2\frac{1}{4(2+\sqrt{3})}=1-\frac{1}{2(2+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 2B=30^{o}\Rightarrow B=15^{o}$$

$$\Rightarrow A=180-B-C=180^{o}-60^{o}-15^{o}=105^{o}$$

Segunda versión: Como aplicamos el Teorema de la Tangente (ver problema :

$$\tan\frac{A-B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{a-b}{a+b}=\frac{a/b-1}{a/b+1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow$$
$$\tan\frac{A-B}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow$$
$$\tan\frac{A-B}{2}=1\Rightarrow\frac{A-B}{2}=45^{\circ}\Rightarrow A-B=90^{\circ}$$

Por otro lado, $A+B+C=180\Rightarrow A+B=180-C=120^{\circ}$

Y el sistema $\begin{cases}A+B=120\\ A-B=90\end{cases}$ tiene como solución $A=105^{\circ}$, $B=15^{\circ}$

Fuente de esta segunda versión: 103 Trigonometry Problems From the Training of the USA IMO Team (Titu Andreescu, Zuming Feng, 2005) , pág. 108.

2.7
a) **Primera versión.** Desarrollando el término de la derecha.
Aplicamos la identidad trigonométrica "Producto-A-Suma":
$$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$$

Luego
$$4\sin A\sin B\sin C=2(\sin A\sin B)\sin C=$$
$$=2(\cos(A-B)-\cos(A+B))\sin C=2\sin C\cos(A-B)-2\sin C\cos(A+B)$$
$$2\sin C\cos(A-B)=\sin(C-(A-B))+\sin(C+(A-B))=$$
$$=\sin(C-A+B)+\sin(C+A-B)=(*)$$
$$A+B+C=180\Rightarrow B+C=180-A\Rightarrow B+C-A=180-2A\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\sin(B+C-A)=\sin(180-2A)=\sin(2A)$$
De la misma forma $\sin(C+A-B)=\sin(2B)$
$$(*)=\sin(2A)+\sin(2B)$$
$$2\sin C\cos(A+B)=\sin(C-(A+B))+\sin(C+(A+B))=$$
$$=\sin(C-A-B)+\sin(C+A+B)=(**)$$
$$A+B+C=180\Rightarrow A+B=180-C\Rightarrow A+B-C=180-2C\Rightarrow$$
$$C-A-B=-(A+B-C)=-(180-2C)\Rightarrow\sin(C-A-B)=\sin(-(180-2C))=$$
$$=-\sin(180-2C)=-\sin(2C)$$
$$\sin(A+B+C)=\sin(180^{\circ})=0$$
$$(**)=-\sin(2C)$$
Y finalmente,
$$2\sin A\sin B=\sin(2A)+\sin(2B)-(-\sin(2C))=$$
$$\sin(2A)+\sin(2B)+\sin(2C)$$
tal y como queríamos ver.

Segunda versión. Desarrollando el término de la izquierda.

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C =$$
$$2\sin\left(\frac{2A+2B}{2}\right)\cos\left(\frac{2A-2B}{2}\right) + 2\sin C\cos C =$$
$$2\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\sin C\cos C =$$
$$2\sin C\cos(A-B) + 2\sin C\cos C =$$
$$2\sin C(\cos(A-B) + \cos C) =$$
$$2\sin C\left(\cos\left(\frac{A-B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B-C}{2}\right)\right) =$$

$$A+B+C = 180 \Rightarrow A+C = 180-B \Rightarrow A+C-B = 180-2B$$
$$\Rightarrow \frac{A+C-B}{2} = \frac{180-2B}{2} = 90-B \Rightarrow \cos\left(\frac{A+C-B}{2}\right) = \cos(90-B) = \sin B$$

$$A+B+C = 180 \Rightarrow B+C = 180-A \Rightarrow B+C-A = 180-2A \Rightarrow$$
$$\frac{B+C-A}{2} = \frac{180-2A}{2} \Rightarrow 90-A \Rightarrow \frac{A-B-C}{2} = -\frac{B+C-A}{2} = -(90-A) \Rightarrow$$
$$\cos\left(\frac{A-B-C}{2}\right) = \cos(-(90-A)) = \cos(90-A) = \sin A$$
$(*) = 2\sin C\sin B\sin A$, tal y como queríamos ver.

b) **Primera versión.**
$$2\cos A\cos B = \cos(A-B) + \cos(A+B) \Rightarrow$$
$$4\cos A\cos B\cos C = 2(\cos(A-B) + \cos(A+B))\cos C =$$
$$2\cos(A-B)\cos C + 2\cos(A+B)\cos C = (*)$$
$$2\cos(A-B)\cos C = \cos(A-B-C) + \cos(A-B+C)$$
$$A+B+C = 180 \Rightarrow B+C = 180-A \Rightarrow B+C-A = 180-2A$$
$$\Rightarrow A-B-C = -(B+C-A) = -(180-2A) \Rightarrow$$
$$\cos(A-B-C) = \cos(-(180-2A)) = \cos(180-2A) = -\cos 2A$$
$$A+B+C = 180 \Rightarrow A+C = 180-B \Rightarrow A+C-B = 180-2B \Rightarrow$$
$$\cos(A-B+C) = \cos(180-2B) = -\cos(2B)$$
$$2\cos(A+B)\cos C = \cos(A+B-C) + \cos(A+B+C)$$
$$A+B+C = 180 \Rightarrow A+B = 180-C \Rightarrow A+B-C = 180-2C \Rightarrow$$
$$\cos(A+B-C) = \cos(180-2C) = -\cos(2C)$$
$$\cos(A+B+C) = \cos(180^\circ) = -1$$
Luego $(*) = -\cos 2A - \cos 2B - \cos 2C - 1$, tal y como queríamos ver.

Segunda versión.
$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C =$$
$$2\cos(A+B)\cos(A-B) + \cos 2C = (*)$$
$$A+B+C = 180 \Rightarrow A+B = 180-C \Rightarrow \cos(A+B) = \cos(180-C) = -\cos C$$

$(*) = -2\cos C\cos(A-B) + \cos 2C =$

$-2\cos C\cos(A-B) + 2\cos^2 C - 1 =$

$-2\cos C\left(\cos(A-B) - \cos C\right) - 1$

Luego el problema se reduce a demostrar que

$$-2\cos C\left(\cos(A-B) - \cos C\right) = -4\cos A\cos B\cos C$$

o equivalentemente:

$$\cos(A-B) - \cos C = 2\cos A\cos B$$

que se demuestra fácilmente mediante la identidad Suma-A-Producto:

$\cos(A-B) - \cos C = \cos(A-B) + \cos(A+B) =$

$= 2\cos\left(\dfrac{A-B+A+B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-B-(A+B)}{2}\right) = 2\cos A\cos(-B) = 2\cos A\cos B$

c) Se deduce directamente de b aplicando la identidad del seno del ángulo doble:

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \dfrac{1-\cos 2x}{2} = \sin^2 x$

$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \dfrac{1-\cos 2A}{2} + \dfrac{1-\cos 2B}{2} + \dfrac{1-\cos 2C}{2} =$

$= \dfrac{1-\cos 2A + 1 - \cos 2B + 1 - \cos 2C}{2} = \dfrac{3-\left(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C\right)}{2} =$

$= \dfrac{3-\left(-1-4\cos A\cos B\cos C\right)}{2} = \dfrac{3+1+4\cos A\cos B\cos C}{2} = \dfrac{4+4\cos A\cos B\cos C}{2} =$

$= 2 + 2\cos A\cos B\cos C$

d) Se deduce directamente de c:

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C =$

$= 1 - \sin^2 A + 1 - \sin^2 B + 1 - \sin^2 C + 2\cos A\cos B\cos C =$

$= 3 - \left(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C\right) + 2\cos A\cos B\cos C =$

$= 3 - \left(2 + 2\cos A\cos B\cos C\right) + 2\cos A\cos B\cos C =$

$= 1 - 2\cos A\cos B\cos C + 2\cos A\cos B\cos C = 1$

2.8

a)

$\sin A = \sin 2\dfrac{A}{2} = 2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2} \Rightarrow$

$\sin A\sin B\sin C = 2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2} =$

$= 8\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} \Rightarrow$

$\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} = \dfrac{\sin A\sin B\sin C}{8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = (*)$

Aplicamos los apartados b y d del problema #6.44:

$$(*) = \frac{\frac{[\Delta ABC]}{2R^2}}{8\frac{r}{4R}} = \frac{[\Delta ABC]}{4rR} \Rightarrow$$

Y aplicando 11.4.8:

$$4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{[\Delta ABC]}{r} = \frac{rs}{r} = s$$

b)

$$4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = s \le \frac{3\sqrt{3}}{2}R \Leftrightarrow$$

$$4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

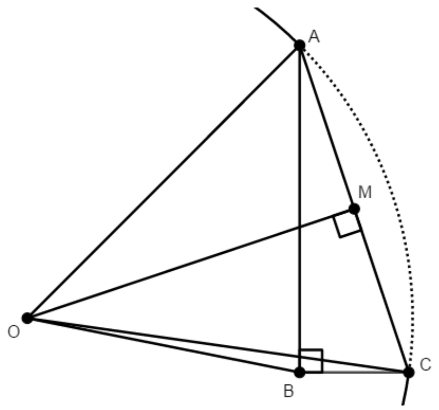
$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Y este resultado se demostró en el apartado f del problema #6.85.

2.9

Primera versión. Mediante trigonometría.

Trazamos la cuerda AC y sea M su punto medio. Sabemos que $OM \perp AC$.



Por Pitágoras: $AC = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$, y por tanto $AM = \sqrt{10}$.

De nuevo por Pitágoras: $OM = \sqrt{50 - 10} = \sqrt{40}$.

Y por tanto $\tan\angle OAM = \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}} = 2$

Está claro que $\tan\angle BAC = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Ahora aplicamos la fórmula de la diferencia de ángulos:

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

$$\tan\angle OAB=\tan\left(\angle OAC-\angle BAC\right)=\frac{\tan\left(\angle OAC\right)-\tan\left(\angle BAC\right)}{1+\tan\left(\angle OAC\right)\tan\left(\angle BAC\right)}=$$

$$=\frac{2-1/3}{1+2\cdot(1/3)}=1$$

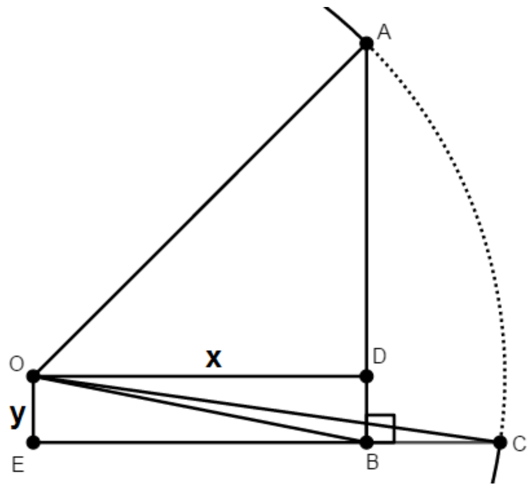
Y por tanto: $\cos\angle OAB=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Finalmente aplicamos el Teorema del Coseno al triángulo ΔOAB:

$$OB^2=\left(\sqrt{50}\right)^2+6^2-2\sqrt{50}\cdot 6\frac{5}{\sqrt{50}}=50+36-2\cdot 6\cdot 5=26$$

Segunda versión. Mediante Pitágoras únicamente.

Trazamos la perpendicular a AC por el centro O, y sea D su punto de corte con AC. Sea E el punto de corte entre la perpendicular a BC por O y la recta BC. Sean $x=OD$, $y=BD$. Queremos calcular x^2+y^2.



$$\begin{cases}\left(\sqrt{50}\right)^2=x^2+AD^2\\ \left(\sqrt{50}\right)^2=y^2+EC^2\\ EC=x+2\\ AD=6-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}50=x^2+(6-y)^2\\ 50=y^2+(x+2)^2\end{cases}$$

Resolvemos este sistema:

$$50 = y^2 + (x+2)^2 \Rightarrow y = \sqrt{50-(x+2)^2}$$

$$50 = x^2 + (6-y)^2 = x^2 + 6^2 + y^2 - 12y$$

$$50 = x^2 + 6^2 + 50 - (x+2)^2 - 12\sqrt{50-(x+2)^2}$$

$$50 = x^2 + 6^2 + 50 - x^2 - 4x - 4 - 12\sqrt{50-(x+2)^2}$$

$$-32 = -4x - 12\sqrt{50-(x+2)^2}$$

$$8 = x + 3\sqrt{50-(x+2)^2}$$

$$8 - x = 3\sqrt{50-(x+2)^2}$$

$$(8-x)^2 = 9\left(50-(x+2)^2\right) \Rightarrow x = \begin{cases} -7 \\ 5 \end{cases}$$

Tomando la única solución aceptable $x = 5$, la ecuación $50 = x^2 + (6-y)^2$ nos ofrece dos soluciones posibles: $y = 1$ y $y = 11$.
Pero la solución $y = 11$ no satisface la condición $50 = y^2 + (x+2)^2$, luego la única solución posible es $x = 5$, $y = 1$, y por tanto $x^2 + y^2 = 6$.

Fuente de estas soluciones: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/1983_AIME_Problems/Problem_4

Fuentes

1.1 Trigonometry A Clever Study Guide (James Tanton, 2015) pág. 69
1.2 Trigonometry A Clever Study Guide (James Tanton, 2015) pág. 70
1.3 Trigonometry A Clever Study Guide (James Tanton, 2015) pág. 70
1.4 103 Trigonometry Problems From the Training of the USA IMO Team (Titu Andreescu, Zuming Feng), página 64.
1.6 103 Trigonometry Problems From the Training of the USA IMO Team (Titu Andreescu, Zuming Feng), página 65.
1.7 "Contest Problem Book V", pág. 166
1.8 "Contest Problem Book V", pág. 11
1.9 103 Trigonometry Problems From the Training of the USA IMO Team (Titu Andreescu, Zuming Feng), página 75
1.10 103 Trigonometry Problems From the Training of the USA IMO Team" (Titu Andreescu, Zuming Feng, 2005) , pág. 21
1.11 103 Trigonometry Problems From the Training of the USA IMO Team" (Titu Andreescu, Zuming Feng, 2005) , pág. 27
1.13 103 Trigonometry Problems From the Training of the USA IMO Team" (Titu Andreescu, Zuming Feng, 2005) , pág. 27
1.15 International Mathematical Olympiads 1959-1977 Compiled and with solutions by Samuel L. Greitzer
1.16 International Mathematical Olympiads 1959-1977 Compiled and with solutions by Samuel L. Greitzer, pág. 41
1.18 "International Mathematical Olympiads 1959-1977, Compiled and with solutions by Samuel L.Greitzer", pág 1.
2.2 103 Trigonometry Problems From the Training of the USA IMO Team (Titu Andreescu, Zuming Feng, 2005) , pág. 7
2.3 103 Trigonometry Problems From the Training of the USA IMO Team (Titu Andreescu, Zuming Feng, 2005) , pág. 65
2.4 103 Trigonometry Problems From the Training of the USA IMO Team (Titu Andreescu, Zuming Feng, 2005) , pág. 66.
2.5 103 Trigonometry Problems From the Training of the USA IMO Team (Titu Andreescu, Zuming Feng, 2005) , pág. 69.
2.6 103 Trigonometry Problems From the Training of the USA IMO Team (Titu Andreescu, Zuming Feng, 2005) , pág. 69.
2.8 103 Trigonometry Problems From the Training of the USA IMO Team (Titu Andreescu, Zuming Feng, 2005) , pág. 67.

Apéndice

El "problem-solving", tal y como yo lo entiendo.

La resolución de poblemas, el llamado "**problem-solving**" es la experiencia más apasionante de las matemáticas. Los "ejercicios", tan repetitivos propios de los libros de texto, pasan ahora a ser "problemas", y cada problema es una aventura única, es un enemigo desconocido al que el estudiante es llamado a enfrentarse con valentía. **La resolución de problemas no es muy importante ni poco importante, es lo único importante en matemáticas**. Pero el problem-solving no es para pusilánimes. Dejemos algunas cosas claras:

1. El problem-solving requiere tiempo: Cada problema exige tiempo para pensarlo, tiempo para resolverlo, y en la mayoría de las veces, tiempo, mucho tiempo para estudiar detenidamente la solución propuesta cuando hemos fracasado en su resolución. Solo así se aprende, día tras día, semana tras semana, año tras año. Solo después de muchos fracasos llegan los primeros éxitos.
Todos los problemas de los libros de "Toomates Cool·lección" se ofrecen siempre con las soluciones totalmente desarrolladas, pero no mires nunca la solución, no te rindas, hasta haber dedicado al problema todo el tiempo necesario... y un poco más.

2. La frustración es inevitable, pero la impotencia que uno siente al fracasar intentando resolver problemas demasiado difíciles puede llegar a quemar al estudiante de matemáticas, por ello es fundamental **seleccionar problemas de dificultad adecuada**.

Todos los problemas de los libros de "Toomates Cool·lección" se presentan siempre indicando su dificultad: **MF**: Muy fácil, **F**: Fácil, **M**: Dificultad media, **D**: Difícil, **MD**: Muy difícil.

Aunque hay que dejar claro que el grado de dificultad de un problema es algo muy subjetivo: Aquello que alguien puede considerar difícil puede ser muy fácil para otro.

3. Todo juego exige unas reglas, reglas que deben estar claras. Es muy frustrante (aunque muy enriquecedor) enfrentarse durante horas a un problema para finalmente descubrir que se están utilizando técnicas o conceptos que uno desconoce. La sensación de haber perdido el tiempo miserablemente puede ser muy desoladora. **Las técnicas y conceptos teóricos que se utilizan en la resolución de los problemas deben estar claros**.

Los libros de problemas de "Toomates Cool·lección" se acompañan con los "libros de teoría" en donde se recopilan de una forma ordenada todos los contenidos teóricos utilizados en las resolución de los problemas.

4. La resolución de problemas supone en el estudiante **un nivel importante de iniciativa y autonomía**. Los libros de "Toomates Cool·lección" son un recurso más que el estudiante tiene a su disposición en su biblioteca personal, biblioteca que deberá enriquecer con la adquisición de infinidad de otros recursos encontrados en Internet, y muchos libros, gratuitos y comprados, digitales y en papel.

5. El problem-solving requiere la máxima concentración. Cuando nos enfrentamos a un problema, ¡el cerebro encendido y el móvil apagado!

Las competinciones AMC, un excelente sendero hacia las IMO detrás de un mar de siglas.

AMC (American Mathematics Competitions)
Es el programa de competiciones matemáticas organizado por la MAA (Mathematical Association of America) para la selección del equipo que representará a USA en la IMO. Organiza el sistema de pruebas selectivas AMC10/12, AIME y USAMO.

El sistema escolar USA consta de 12 cursos ("grades") divididos en 3 niveles, que corresponden a las siguientes edades: **Elementary school (**Preschool: 4-5, Kindergarten: 5-6, 1st Grade: 6-7, 2nd Grade: 7-8, 3rd Grade: 8-9, 4th Grade: 9-10, 5th Grade: 10-11) **Middle school** (6th Grade: 11-12, 7th Grade: 12-13, 8th Grade: 13-14), **High school** (9th Grade "Freshman":14-15, 10th Grade "Sophomore": 15-16, 11th Grade "Junior": 16-17, 12th Grade "Senior": 17-18)

AHSME (American High School Mathematics Examination) (1949-2000)
Es la antigua competición matemática para los grados 9 a 12. A partir del año 2000 desaparece al bifurcarse en AMC10 (Grado 10) y AMC12 (Grado 12).
Consta de 30 preguntas "tipo test" con 5 posibles respuestas, para resolver en 90 minutos.
Los estudiantes que alcanzan los 100 puntos o más de los 150 posibles obtienen el "**AHSME Honor Roll**", y son invitados a participar en la AIME (American Invitational Mathematics Examination). Se suelen clasificar unos 4000 estudiantes anualmente.
Para alcanzar estos 100 puntos, los estudiantes deben contestar correctamente aproximadamente la mitad de las 30 preguntas y dejar en blanco el resto, pues las respuestas equivocadas conllevan severas penalizaciones.
Las calculadoras se permiten a partir de 1994, aunque no son necesarias.

AMC8 (American Mathematics Competition Grade 8)
Prueba de 25 preguntas "tipo test" en 40 minutos, para estudiantes de Grado 8 (13-14 años, el 2º ESO en España).
Cubre (aunque no está limitado a ellos) los temas propios del currículum de la "Middle School": Combinatoria, probabilidad, estimación, razonamiento de proporcionalidad, geometría elemental incluyendo teorema de Pitágoras, visión espacial, aplicaciones en la vida cotidiana, lectura e interpretación de gráficos y tablas.
Además, en las últimas preguntas pueden aparecer funciones y ecuaciones lineales y cuadráticas, geometria cartesiana y algunos elementos de álgebra básica.

AMC10/12 (American Mathematics Competition Grades 10 & 12)
Prueba de 25 preguntas "tipo test" en 75 minutos.
La AMC10 está pensada para estudiantes hasta el grado 10 (el 4º de ESO en España), y 17.5 años de edad como máximo, y cubre el currículum hasta dicho grado.
La AMC12 está pensada para estudiantes hasta el grado 12 (el 2º de Bachillerato en España), y cubre todo el currículum de la "high school", incluyendo trigonometría, álgebra avanzada, geometría avanzada, pero excluyendo el calculus.

Existen dos versiones de dichas pruebas: A y B, con la misma estructura y el mismo nivel de dificultad. Las preguntas son diferentes porque se presentan en fechas diferentes. Los estudiantes se pueden presentar a ambas pruebas.

AIME (American Invitational Mathematics Examination)
Prueba de 15 preguntas en 3 horas. Las respuestas son siempre números positivos de tres dígitos. Son convocados los mejores estudiantes en AMC10 y/o AMC12. Su primera edición fue en el año 1983.

USAMO y USAJMO (USA Mathematical Olympiad y USA Junior Mathematical Olympiad)
Prueba de 6 preguntas en dos días, 9 horas de duración.
A la USAMO son convocados los mejores estudiantes en AMC12 y AIME (alrededor del 5% superior). A la USAJMO son convocados los mejores estudiantes en AMC10 y AIME (alrededor del 2.5% superior). Solo pueden presentarse estudiantes americanos y estudiantes en escuelas americanas o en Canadá.
Los 6 estudiantes con mejores puntuaciones en el combinado AMC10/12, AIME y USAMO forman el equipo que representa a USA en la Annual International Mathematical Olympiad (IMO)

IMO (International Mathematical Olympiad)
Es una competición anual para estudiantes preuniversitarios y es la más antigua de las Olimpiadas Internacionales de Ciencias.1 La primera IMO se celebró en Rumania en 1959. Desde entonces se ha celebrado cada año. Cerca de cien países de todo el mundo envían equipos de un máximo de seis estudiantes junto con un líder de equipo, un tutor - o colíder - y observadores. La competición consta de dos cuestionarios con tres problemas cada uno. Cada pregunta da una puntuación máxima de 7 puntos, con una puntuación máxima total de 42 puntos. La prueba se desarrolla en dos días, en cada uno de los cuales el concursante dispone de cuatro horas y media para resolver tres problemas. Estos se escogen entre varias áreas de la matemática vista en secundaria, los cuales pueden clasificarse *grosso modo* en geometría, teoría de números, álgebra y combinatoria. No se requieren conocimientos de matemáticas superiores y de las soluciones se espera que sean cortas y elegantes. Encontrarlas requiere, sin embargo, ingenio excepcional y habilidad matemática.