NÚMEROS COMPLEJOS

Enfoque *Problem-solving*

Gerard Romo Garrido

TooMates
Cool·lección

Toomates Cool·lección

Los documentos de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho.
Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "**licencias digitales**" con las que las editoriales pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo libro, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.
Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de licencias digitales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf".

El conocimiento no es una mercancía.

El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las editoriales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de unos libros de texto que actualmente son muy mediocres, y no mediante retorcidas técnicas comerciales.

toomates@gmail.com

Actualmente, **Toomates Cool·lección** consta de los siguientes libros:

Geometría axiomática:

GA	**Geometría Axiomática**	pdf	1 2 ... 23 portada
PG	**Problemas de Geometría**	pdf	1 2 3 4 5 6 7

Problem-solving:

AR	**Teoría de números**	pdf	1 2
PT	**Trigonometría**	pdf	doc
DE	**Desigualdades**	pdf	doc
PC	**Números complejos**	pdf	doc
PA	**Álgebra** **(en preparación)**	pdf	doc
PC	**Combinatoria** **(en preparación)**	pdf	doc
PR	**Probabilidad** **(en preparación)**	pdf	doc

Libros de texto (En catalán)

AG	**Àlgebra**	pdf	1 2
FU	**Funcions**	pdf	doc
GN	**Geometria analítica**	pdf	1 2
TR	**Trigonometria**	pdf	doc
CO	**Nombres complexos**	pdf	doc
AL	**Àlgebra Lineal** **2n batxillerat**	pdf	doc
GL	**Geometria Lineal** **2n batxillerat**	pdf	doc
CI	**Càlcul Infinitesimal** **2n batxillerat**	pdf	1 2
PL	**Programació Lineal** **2n batxillerat**	pdf	doc

Recopilaciones de problemas

SE	**Compendium OME 2005-2019**	pdf	
SA	**Compendium AIME 1983-2019**	pdf	
ST	**Compendium PAU TEC 1998-2019**	pdf	
SC	**Compendium PAU CCSS 1998-2019**	pdf	
PM	**Problemas de Matemáticas**	pdf	doc

Versión de este documento: 28/03/2020

www.toomates.net

Índice

Este libro es la continuidad natural de "**Nombres complexos**":

http://www.toomates.net/biblioteca/NombresComplexos.pdf

1 Problemas con números complejos.

1.1 F

¿Cual es el valor mínimo entero de k para que

$$2x(k\,x-4)-x^2+6=0$$

no tenga raíces reales?

ASHME 1974 #10

1.2 F

Sea $\alpha = z+z^2+z^4$ y $\beta = z^3+z^5+z^6$, donde z es un número complejo tal que $z^7=1$ y $z\neq 1$. Entonces, α y β son las raíces de la ecuación cuadrática $x^2+px+q=0$ para ciertos p y q números enteros. Encuentra el par ordenado (p,q).

1.3 M

Resuelve la ecuación compleja

$$i\,z^4\,\bar{z}+1=0$$

1.4 M

Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los afijos de las soluciones de la ecuación

$$z^3+(-1+i)z^2+(1-i)z+i=0$$

1.5 MF

Sea z un número complejo con parte imaginaria igual a 164 tal que

$$\frac{z}{z+n}=4i$$

donde n es un número entero positivo. Encuentra n.

AIME1 2009 #2

1.6 F

Determina el número de pares ordenados (a,b) con $a,b\in IR$ tales que

$$(a+bi)^{2002}=a-bi$$

AMC 12A 2002 #24

1.7 M

Sean a,b,c,d números complejos no nulos para los cuales existe un complejo z tal que satisface al mismo tiempo las ecuaciones $az^3+bz^2+cz+d=0$ y $bz^3+cz^2+dz+a=0$. Determina todos los posibles valores de z.

HMMT 2010, Álgebra #4

1.8 M

Sean v y w dos raíces de la ecuación $z^{1997}-1=0$, diferentes y tomadas aleatoriamente. Calcula la probabilidad de que $|v+w|\geq 1$.

AIME 1997 #14 (modificado)

1.9 F

Determina todos los enteros $n\geq 1$ tales que $x^{n+1}+x^n+1$ sea divisible por x^2+x+1.

1.10 M

Determina $z^n+\dfrac{1}{z^n}$ sabiendo que $z+\dfrac{1}{z}=2\sin\alpha$.

1.11 D

Resuelve la ecuación $(z+1)^n-(z-1)^n=0$

1.12 D

La ecuación

$$z^{10}+(13z-1)^{10}=0$$

tiene 10 raíces complejas r_1, $\overline{r_1}$, r_2, $\overline{r_2}$, ..., r_5, $\overline{r_5}$. Encuentra el valor de

$$\frac{1}{r_1\overline{r_1}}+\frac{1}{r_2\overline{r_2}}+\frac{1}{r_3\overline{r_3}}+\frac{1}{r_3\overline{r_3}}+\frac{1}{r_4\overline{r_4}}+\frac{1}{r_5\overline{r_5}}$$

AIME 1994 #13

1.13 F

Sean x,y,z números complejos tales que $xy=-80-320i$, $yz=60$, $zx=-96+24i$, donde $i=\sqrt{-1}$. Sean a,b números reales tales que $x+y+z=a+bi$. Determina a^2+b^2.

AIME II 2018 #5

1.14 F

Sean $z_1=18+83i$, $z_2=18+39i$, $z_3=78+99i$, donde $i=\sqrt{-1}$. Sea z el único número complejo con las propiedades siguientes:

a) $\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\cdot\dfrac{z-z_2}{z-z_3}$ es un número real

b) La parte imaginaria de z es lo mayor posible.

Determina la parte real de z.

AIME I 2017 #10

1.15 F

Si las seis soluciones de $x^6 = -64$ se escriben de la forma $a + bi$, con a, b reales, entonces el producto de sus soluciones con $a > 0$ es:

(A) -2 (B) 0 (C) $2i$ (D) 4 (E) 16

AHSME 1990 #22

1.16 D

Sea N la cantidad de números complejos z con la propiedad que $|z| = 1$ y $z^{6!} - z^{5!}$ sea un número real. Determina el residuo cuando N se divide entre 1000.

AIME I 2018 #6

1.17 F

El polinomio $f(z) = az^{2018} + bz^{2017} + cz^{2016}$ tiene coeficientes reales no superiores a 2019, y

$$f\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) = 2015 + 2019\sqrt{3}i$$

Determina el residuo cuando $f(1)$ se divide entre 1000.

AIME II 2019 #8

2 Números complejos aplicados a la trigonometría.

2.1 F

Si $i^2 = -1$, determina el valor de la suma

$$\cos 45^{\circ} + i\cos 135^{\circ} + \ldots + i^{n}\cos(45 + 90n^{\circ}) + \ldots + i^{40}\cos(3645^{\circ})$$

AHSME 1977 #16

2.2 M

Calcula $\cot\left(\cot^{-1}(3) + \cot^{-1}(7) + \cot^{-1}(13) + \cot^{-1}(21)\right)$

2.3 M

Determina todos los valores enteros de θ con $0 \le \theta \le 90$ para los cuales

$$\left(\cos\theta^{\circ} + i\sin\theta^{\circ}\right)^{75}$$

es un número real.

ARML 1995 #T5

2.4 M

Demuestra que

$$\cos 0^{\circ} + \cos 1^{\circ} + \cos 2^{\circ} + \ldots + \cos 89^{\circ} = \frac{1 + \cot\left(0.5^{\circ}\right)}{2}$$

2.5 M

Determina $2\cos 72^{\circ}$

2.6 M

Sean $a = \cos\dfrac{2\pi}{7}$, $b = \cos\dfrac{4\pi}{7}$, $c = \cos\dfrac{8\pi}{7}$. Calcular $ab + bc + ac$.

3 Números complejos aplicados a la geometría.

3.1

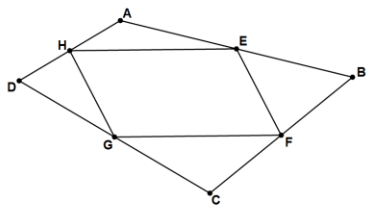
En el plano complejo $2+i$ es el centro de un cuadrado y $5+5i$ uno de sus vértices. Halla los otros vértices del cuadrado.

3.2

Determina el lugar geométrico de los números complejos z que verifican:
$|z-2i| = 2|z+3|$

3.3 F

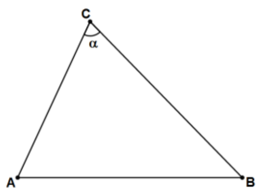
Demuestra que los puntos medios de cualquier cuadrilátero forman siempre un paralelogramo.



3.4 M

Demostrar, mediante números complejos, el Teorema del Coseno:

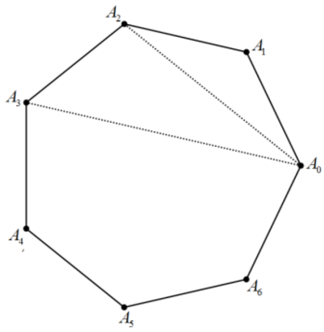
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos\angle A$$



3.5 D

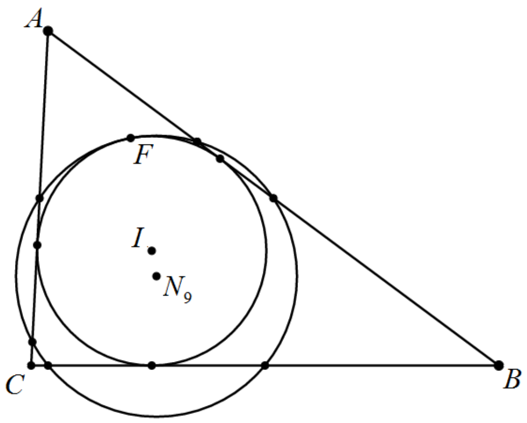
Sea $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ un polígono regular de 7 lados. Demostrar que

$$\frac{1}{A_0A_1} = \frac{1}{A_0A_2} + \frac{1}{A_0A_3}$$



3.6 D

Demostrar que la circunferencia inscrita y la circunferencia de los Nueve Puntos son tangentes entre sí. El punto de tangencia se denomina "Punto de Feuerbach" del triángulo.

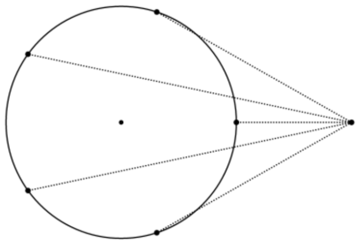


3.7 M

Sean $Q_1,...,Q_n$ n puntos equiespaciados en una circunferencia de radio 1 centrada en O. Sea P un punto de la semirrecta OQ_1 tal que $OP = 2$. Determina el producto

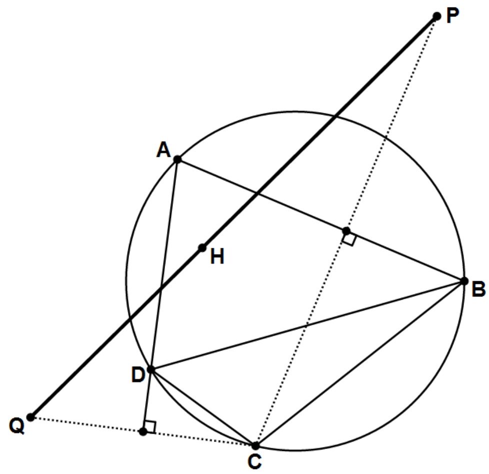
$$\prod_{k=1}^{n} PQ_k$$

en función de n.



3.8 F

Dado un cuadrilátero cíclico $ABCD$, sean P y Q los puntos simétricos de C respecto a AB y AD respectivamente. Demuestra que la recta PQ pasa por el ortocentro de ΔABD.

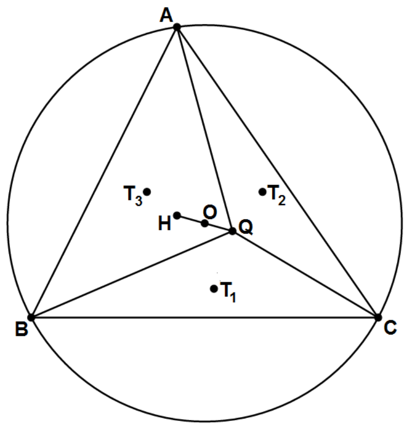


3.9 MF

Sea O el circuncentro y H el ortocentro de un triángulo ΔABC. Sea Q un punto tal que O es el punto medio de HQ. Sean T_1, T_2 y T_3 los respectivos baricentros de ΔBCQ, ΔCAQ y ΔABQ. Demostrar que

$$AT_1 = BT_2 = CT_3 = \frac{4}{3}R$$

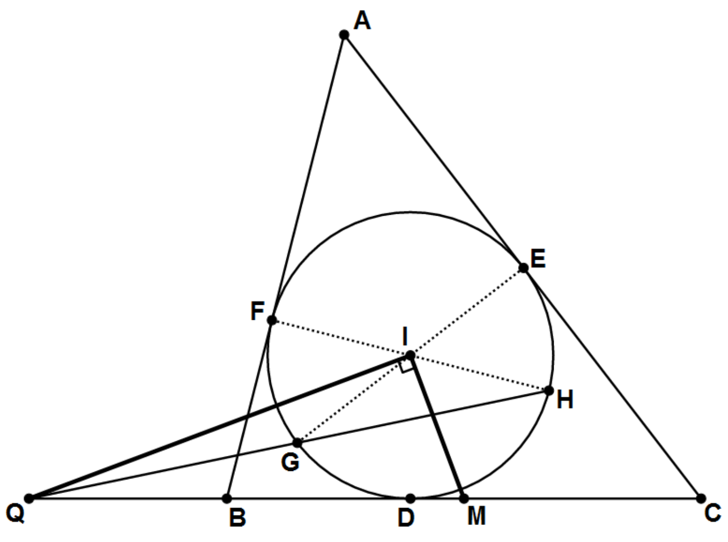
donde R denota el circunradio de ΔABC.



Yug MO 1990, 3-4 grade

3.10 MD

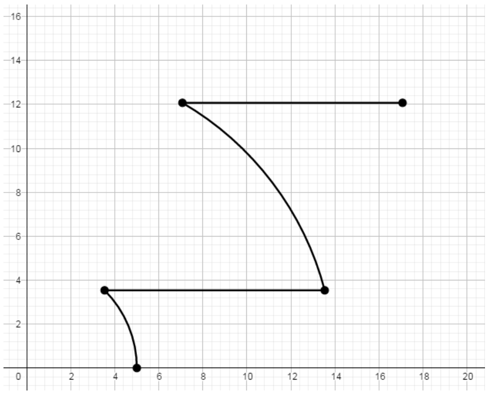
Sea un triángulo ΔABC con incentro I, sean E y F los puntos de tangencia entre la circunferencia inscrita y los lados $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$, respectivamente. Sean G y H los puntos simétricos respectivos de E y F respecto el centro I. Sea Q el punto de corte de $\overline{GH}$ y $\overline{BC}$, y sea M el punto medio de $\overline{BC}$. Demostrar que $\overline{IQ}$ y $\overline{IM}$ son perpendiculares.



Taiwan TST 2014

3.11 M

Una partícula está localizada en el punto de coordenadas $(5,0)$. Se define un movimiento de la partícula como la rotación de $\pi/4$ radianes alrededor del origen seguida de una traslación de 10 unidades hacia la derecha*. Determinar la posición de la partícula después de 150 movimientos.



AIME II 2008 #9

* "*in the positive x-direction*" en el original en inglés.

Nota: Los problemas de este apartado corresponden a los siguientes enunciados dentro de "Problemas de Geometría":

3.3=6.67	3.4=6.68	3.5=6.69	3.6=6.70	3.7=6.71
3.8=6.73	3.9=6.75	3.10=6.76	3.11=6.77	

4 Números complejos aplicados a la trigonometría (2).

Resumen teórico.
Trabajaremos con números complejos de módulo 1, es decir, números que se pueden expresar en forma trigonométrica como

$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$

En este caso, y aplicando las fórmulas de Moire, tenemos

$$z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

y puesto que su módulo es 1, su inverso es el conjugado:

$$z^{-n} = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \cos n\theta - i\sin n\theta$$

De estas dos igualdades podemos aislar $\cos n\theta$ y $i\sin n\theta$:

$$\cos n\theta = \frac{z^n + z^{-n}}{2} \qquad i\sin n\theta = \frac{z^n - z^{-n}}{2}$$

4.1 D

Resolver la ecuación

$$\cos^2\theta + \cos^2 2\theta + \cos^2 3\theta = 1$$

IMO 1962 #4

Nota: Este mismo problema se resuelve en PT/#1.15 mediante identidades trigonométricas. Se pretende ahora resolverlo mediante números complejos.

Soluciones.

1.1

$$2x(k\,x-4)-x^2+6=0 \Leftrightarrow 2kx^2-8x-x^2+6=0 \Leftrightarrow (2k-1)x^2-8x+6=0$$

Una ecuación de segundo grado no tendrá raíces reales cuando su discriminante sea negativo:

$$D=(-8)^2-4(2k-1)\cdot 6=64-48k+24=-48k+88<0 \Leftrightarrow -48k<-88 \Leftrightarrow k>\frac{88}{48}=\frac{11}{6}\cong 1.83$$

Luego la solución es $k=2$.

1.2

Si α y β son las raíces de la ecuación cuadrática $x^2+px+q=0$, entonces

$$0=(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\,\beta=x^2+px+q=0 \Leftrightarrow \begin{cases} p=-(\alpha+\beta) \\ q=\alpha\,\beta \end{cases}$$

Puesto que z es una raíz de la unidad y $z\neq 1$, sabemos que $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=0$, luego

$$\alpha+\beta=1+z+z^2+z^4+z^3+z^5+z^6-1=0-1=-1$$

Por otro lado,

$$\alpha\beta=z^4+z^5+z^6+3z^7+z^8+z^9+z^{10}=$$
$$=z^4\left(1+z+z^2+3z^3+z^4+z^5+z^6\right)=z^4\left(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+2z^3\right)=$$
$$=z^4\left(2z^3\right)=2z^7=2$$

Así pues, la ecuación buscada es $x^2+x+2=0$, y $(p,q)=(1,2)$

1.3

$$i\,z^4\,\bar{z}+1=0 \Leftrightarrow i\,z^4\,\bar{z}=-1 \Leftrightarrow z^4\,\bar{z}=\frac{-1}{i}=\frac{-1i}{i^2}=i \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left|z^4\,\bar{z}\right|=|i|=1 \Rightarrow 1=\left|z^4\right|\left|\bar{z}\right|=|z|^4|z|=|z|^5 \Rightarrow |z|=1$$

Luego las soluciones pertenecen a la circunferencia unidad, y por tanto $\bar{z}=\dfrac{1}{z}$.

$$0=i\,z^4\,\bar{z}+1=i\,z^4\,\frac{1}{z}+1=i\,z^3+1 \Leftrightarrow i\,z^3=-1 \Leftrightarrow z^3=\frac{-1}{i}=\frac{-1i}{i^2}=i$$

Luego las soluciones son las tres raíces cúbicas de i

$$i=1\left(\cos 90^{\circ}+i\sin 90^{\circ}\right)$$

$$\theta_k = \frac{90^o}{3} + \frac{360^o}{3}k = 30^o + 120^o k \quad k = 0, 1, 2$$

$$\theta_0 = 30^o + 120^o \cdot 0 = 30^o \Rightarrow z_0 = \cos 30^o + i \sin 30^o$$
$$\theta_1 = 30^o + 120^o \cdot 1 = 150^o \Rightarrow z_1 = \cos 150^o + i \sin 150^o$$
$$\theta_2 = 30^o + 120^o \cdot 2 = 270^o \Rightarrow z_2 = \cos 270^o + i \sin 270^o$$

1.4
Observamos que $z = -i$ es una solución de la ecuación. En efecto:
$$0 = (-i)^3 + (-1+i)(-i)^2 + (1-i)(-i) + i = i + (-1+i)(-1) - (1-i)i + i = i + 1 - i - i - 1 + i = 0$$

Ahora, realizando una división sintética de polinomios, vemos que:
$$\frac{z^3 + (-1+i)z^2 + (1-i)z + i}{z+i} = z^2 - z + 1$$

Las soluciones de $0 = z^2 - z + 1 \Leftrightarrow z = \dfrac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \dfrac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

Vemos que las tres soluciones pertenecen a la circunferencia unidad:
$$\left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \frac{1}{2}\sqrt{1+3} = \frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$$
$$|-i| = 1$$

Luego la solución es $|z| = 1$

1.5
Sea $z = a + 164i$
$$\frac{z}{z+n} = 4i \Leftrightarrow z = 4i(z+n) \Leftrightarrow$$
$$a + 164i = 4i(a + 164i + n) \Leftrightarrow$$
$$a + 164i = 4ai - 164 \cdot 4 + 4ni \Leftrightarrow \begin{cases} a = -164 \cdot 4 = -656 \\ 164i = 4ai + 4ni = (4a+4n)i \Leftrightarrow 164 = 4a + 4n \end{cases}$$

$$164 = 4(-656) + 4n \Leftrightarrow n = 697$$

1.6
Se nos pide determinar el número de soluciones de la ecuación $z^{2002} = \bar{z}$
Una posible solución trivial es $z = 0$.
Pero si $z \neq 0$, está claro que $|z| = 1$, pues
$$z^{2002} = \bar{z} \Rightarrow |z|^{2002} = \left|z^{2002}\right| = |\bar{z}| = |z|$$
y una ecuación $x^{2002} = x$, con $x = |z| \in IR$ solo tiene soluciones $x = 0$ o $x = 1$.

Pero si $|z| = 1$ entonces $\bar{z} = \frac{1}{z}$, y por lo tanto

$z^{2002} = \bar{z} = \frac{1}{z} \Leftrightarrow z^{2003} = 1$ y z es alguna de las 2003 raíces de grado 2003 de la unidad.

1.7

Supongamos que se cumple $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$. Entonces, multiplicando a izquierda y derecha por z:

$bz^3 + cz^2 + dz + a = 0 \Rightarrow bz^3 + cz^2 + dz = -a$

$$0 = z \cdot 0 = z\left(az^3 + bz^2 + cz + d\right) = az^4 + bz^3 + cz^2 + dz = az^4 - a = a(z^4 - 1) \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ z^4 - 1 = 0 \end{cases}$$

Puesto que, por hipótesis, $a \neq 0$, llegamos a $z^4 = 1$, es decir, z es alguna de las cuatro raíces de grado 4 de la unidad: $1, -1, i, -i$.

$$\begin{cases} az^3 + bz^2 + cz + d = 0 \\ bz^3 + cz^2 + dz + a = 0 \end{cases}$$

Para $z = 1$: $\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ b + c + d + a = 0 \end{cases} \Rightarrow a + b + c + d = 0$

Para $z = -1$: $\begin{cases} -a + b - c + d = 0 \\ -b + c - d + a = 0 \end{cases} \Rightarrow -a + b - c + d = 0$

Para $z = i$: $\begin{cases} -ai - b + ci + d = 0 \Rightarrow 0 = 0i = -ai^2 - bi + ci^2 + di = a - bi - c + di \\ -bi - c + di + a = 0 \end{cases}$

Para $z = -i$: $\begin{cases} ai - b - ci + d = 0 \\ bi - c - di + a = 0 \Rightarrow 0 = 0i = i\left(bi - c - di + a\right) = -b - ci + d + ai \end{cases}$

No existe ningún conjunto a, b, c, d para los cuales sean solución las cuatro raíces cuartas. En efecto: Puesto que se debe cumplir para los cuatro valores, los complejos a, b, c, d deben satisfacer el sistema:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ -a + b - c + d = 0 \\ -bi - c + di + a = 0 \\ ai - b - ci + d = 0 \end{cases}$$

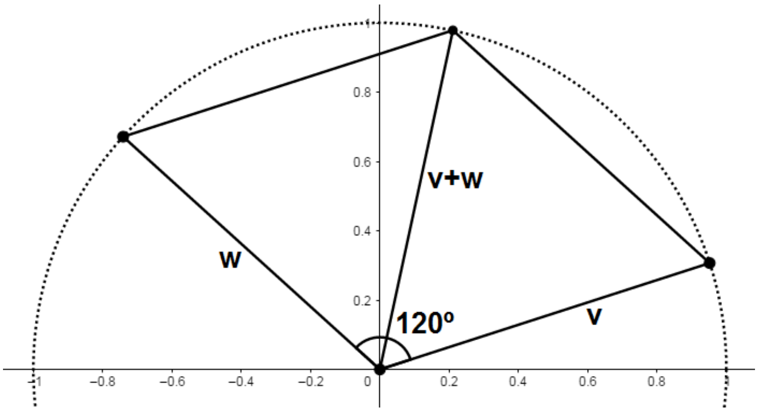
Y este sistema solo tiene solución $a = b = c = d = 0$, contradiciendo la hipótesis del enunciado.

Sin embargo, es fácil encontrar valores a, b, c, d para los cuales se cumpla alguna de las cuatro. Por ejemplo, puesto que $z^4 = 1$, sabemos que $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, luego tomando $a = b = c = d = 1$ obtendremos tres de las cuatro soluciones: $\{-1, i, -i\}$

1.8

El complejo $v+w$ se representa geométricamente como el vector de la diagonal del paralelogramo determinado por v y w. Observamos que

$|v+w|=1 \Leftrightarrow$ el ángulo entre v y w es de 120º, que es cuando determinan dos triángulos equiláteros:



$|v+w|\geq 1 \Leftrightarrow \angle(v,w)\leq 120º$

Sean v y w dos raíces distintas de la ecuación $z^{1997}-1=0$.
Sabemos que en la circunferencia unidad hay 1997 complejos diferentes que cumplen esta condición, repartidos homogéneamente por toda la circunferencia.
En 240º habrán 1331 valores posibles ($1997\frac{2}{3}=1331.33$), luego, como no pueden ser el mismo, descartamos 1, 1330 en total.

Una vez fijado el primero, la probabilidad de que el segundo "caiga" dentro de 120º a su izquierda o a su derecha es de $1330/1997$

Nota 1: En el libro donde encuentro este problema la solución propuesta es $1331/1997$.

Nota 2: En el problema AIME original se pide la probabilidad de que

$$|v+w|\geq\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

1.9
Sean $p(x)=x^{n+1}+x^n+1$ y $q(x)=x^2+x+1$. El polinomio $p(x)$ será divisible por $q(x)$ si y solo si $p(x)=q(x)h(x)$, pero entonces
$q(x)=0 \Rightarrow h(x)=q(x)h(x)=0h(x)=0$, es decir, las raíces de $q(x)$ serán raíces de $p(x)$.

La raíz primitiva de tercer grado de la unidad $\varepsilon=e^{2\pi i/3}$ es raíz de $q(x)$, luego también lo será de $p(x)$.

$$\varepsilon=e^{2\pi i/3}=\cos 120^{\circ}+i\sin 120^{\circ}=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\varepsilon^2=\bar{\varepsilon}=\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\varepsilon^3=1$$

$n=1 \Rightarrow \varepsilon^2+\varepsilon+1=0$ cierto.
$n=2 \Rightarrow \varepsilon^3+\varepsilon^2+1=0 \Leftrightarrow 1+\bar{\varepsilon}+1=0 \Leftrightarrow \bar{\varepsilon}=-2$ no es cierto.
$n=3 \Rightarrow \varepsilon^4+\varepsilon^3+1=0 \Leftrightarrow \varepsilon+1+1=0 \Leftrightarrow \varepsilon=-2$ no es cierto.

$n>3 \Rightarrow n=3a+b$, con $0\le b\le 2$

$$\varepsilon^{n+1}+\varepsilon^n+1=\varepsilon^{3a+b+1}+\varepsilon^{3a+b}+1=\varepsilon^{3a}\left(\varepsilon^{b+1}+\varepsilon^b\right)+1=\left(\varepsilon^3\right)^a\left(\varepsilon^{b+1}+\varepsilon^b\right)+1=$$
$$=1\left(\varepsilon^{b+1}+\varepsilon^b\right)+1=\varepsilon^{b+1}+\varepsilon^b+1=0 \Leftrightarrow b=1$$

Luego será divisible para todos aquellos n de la forma $n=3k+1$, es decir $n=1 \bmod 3$.

1.10
$$2\sin\alpha=z+\frac{1}{z}=\frac{z^2+1}{z} \Leftrightarrow 2\sin\alpha\, z=z^2+1 \Leftrightarrow 0=z^2-2\sin\alpha\, z+1 \Leftrightarrow$$
$$z=\frac{2\sin\alpha\pm\sqrt{(-2\sin\alpha)^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2}=\sin\alpha\pm\sqrt{\sin^2\alpha-1}=\sin\alpha\pm\sqrt{-\cos^2\alpha}=$$
$$=\sin\alpha\pm i\left|\cos\alpha\right|=\sin\alpha\pm i\cos\alpha$$

(aquí hemos aplicado $\pm|x|=\pm x$)

Los posibles valores de z son $z_1=\sin\alpha\pm i\cos\alpha$ y $z_2=\overline{z_1}$.
En todo caso, $|z|=1$, y por lo tanto $z^n+\frac{1}{z^n}=z^n+\bar{z}^n$ y su valor es el mismo para las dos posibles soluciones. Por lo tanto, solo hace falta estudiar uno de los dos casos.

Supongamos que $z=\sin\alpha+i\cos\alpha$. Entonces:

$$z=\sin\alpha+i\cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\beta+i\sin\beta$$

en donde hemos definido $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

$$z^n = \cos n\beta + i \sin n\beta$$
$$\frac{1}{z^n} = \overline{z^n} = \cos n\beta - i \sin n\beta$$
$$z^n + \frac{1}{z^n} = \cos n\beta + i \sin n\beta + \cos n\beta - i \sin n\beta = 2\cos n\beta = 2\cos n\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

Fuente de la solución: Compiled and Solved Problems in Geometry and Trigonometry (Florentin Smarandache), página 76 .

1.11

$$(z+1)^n - (z-1)^n = 0 \Leftrightarrow (z+1)^n = (z-1)^n \Leftrightarrow (z+1)^n = (z-1)^n \underset{z\neq 1}{\Leftrightarrow} \frac{(z+1)^n}{(z-1)^n} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$$

Es decir, $\frac{z+1}{z-1}$ es una raíz n-ésima de la unidad:

$$\frac{z+1}{z-1} = \varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin\frac{2\pi k}{n} \quad k = 0,1,...,n-1$$

$$\frac{z+1}{z-1} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin\frac{2\pi k}{n} \Leftrightarrow z+1 = \left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin\frac{2\pi k}{n}\right)(z-1) =$$
$$= \left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin\frac{2\pi k}{n}\right)z - \left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin\frac{2\pi k}{n}\right) \Leftrightarrow$$
$$z - \left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin\frac{2\pi k}{n}\right)z = -\left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin\frac{2\pi k}{n}\right) - 1 \Leftrightarrow$$
$$\left(1 - \left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin\frac{2\pi k}{n}\right)\right) z = -\left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin\frac{2\pi k}{n}\right) - 1 \Leftrightarrow$$
$$\left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin\frac{2\pi k}{n} - 1\right) z = \cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin\frac{2\pi k}{n} + 1 \Rightarrow$$
$$z = \frac{\cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin\frac{2\pi k}{n} + 1}{\cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin\frac{2\pi k}{n} - 1} = (*)$$

$$\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}-1=1-2\sin^2\frac{\pi k}{n}+i\,2\sin\frac{\pi k}{n}\cos\frac{\pi k}{n}-1=$$
$$=-2\sin^2\frac{\pi k}{n}+i\,2\sin\frac{\pi k}{n}\cos\frac{\pi k}{n}=2\sin\frac{\pi k}{n}\left(-\sin\frac{\pi k}{n}+i\cos\frac{\pi k}{n}\right)$$

$$\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}+1=2\cos^2\frac{\pi k}{n}-1+i2\sin\frac{\pi k}{n}\cos\frac{\pi k}{n}+1=$$
$$=2\cos^2\frac{\pi k}{n}+i2\sin\frac{\pi k}{n}\cos\frac{\pi k}{n}=2\cos\frac{\pi k}{n}\left(\cos\frac{\pi k}{n}+i\sin\frac{\pi k}{n}\right)$$

$$(*)=\frac{2\cos\frac{\pi k}{n}\left(\cos\frac{\pi k}{n}+i\sin\frac{\pi k}{n}\right)}{2\sin\frac{\pi k}{n}\left(-\sin\frac{\pi k}{n}+i\cos\frac{\pi k}{n}\right)}=\frac{2\cos\frac{\pi k}{n}\left(\cos\frac{\pi k}{n}+i\sin\frac{\pi k}{n}\right)}{2(-i)\sin\frac{\pi k}{n}\left(i\sin\frac{\pi k}{n}+\cos\frac{\pi k}{n}\right)}=$$
$$=\frac{2\cos\frac{\pi k}{n}}{2(-i)\sin\frac{\pi k}{n}}=\frac{\cos\frac{\pi k}{n}}{-i\sin\frac{\pi k}{n}}=i\cot\left(\frac{\pi k}{n}\right)$$

Fuente de la solución: Compiled and Solved Problems in Geometry and Trigonometry (Florentin Smarandache), página 76 .

1.12

$$z^{10}+(13z-1)^{10}=0\Leftrightarrow z^{10}=-(13z-1)^{10}=i^{10}(13z-1)^{10}=(i(13z-1))^{10}\Leftrightarrow$$
$$\frac{z^{10}}{(i(13z-1))^{10}}=1\Leftrightarrow\left(\frac{z}{i(13z-1)}\right)^{10}=1\Leftrightarrow\left(\frac{z}{13iz-i}\right)^{10}=1$$

Luego $\frac{z}{13iz-i}=\varepsilon_k=\cos\frac{2\pi k}{10}+i\sin\frac{2\pi k}{10}\quad k=0,1,...,9$ es una de las diez raíces de grado 10 de la unidad.

$$\frac{z}{13iz-i}=\varepsilon_k\Leftrightarrow z=\varepsilon_k(13iz-i)=13i\varepsilon_k z-i\varepsilon_k\Leftrightarrow i\varepsilon_k=13i\varepsilon_k z-z=(13i\varepsilon_k-1)z\Leftrightarrow$$
$$z=\frac{i\varepsilon_k}{13i\varepsilon_k-1}=\frac{1}{13-\frac{1}{i\varepsilon_k}}=\frac{1}{13+i\overline{\varepsilon_k}}$$

Donde hemos utilizado que $\frac{1}{i\varepsilon_k}=\frac{1}{i}\frac{(-i)}{(-i)}\frac{1}{\varepsilon_k}=-i\frac{1}{\varepsilon_k}=-i\overline{\varepsilon_k}$

Luego las soluciones de la ecuación son de la forma $z_k=\frac{1}{13+i\overline{\varepsilon_k}}$

Las raíces de grado 10 de la unidad presentan las siguientes propiedades:

$\varepsilon_5 = -1 = -\varepsilon_0$
$\varepsilon_6 = -\varepsilon_1 = \overline{\varepsilon_4}$
$\varepsilon_7 = -\varepsilon_2 = \overline{\varepsilon_3}$
$\varepsilon_8 = -\varepsilon_3 = \overline{\varepsilon_2}$
$\varepsilon_9 = -\varepsilon_4 = \overline{\varepsilon_1}$

Luego:

$$z_0 = \frac{1}{13 + i\overline{\varepsilon_0}} = \frac{1}{13+i} \Rightarrow \quad \overline{z_5} = \frac{1}{13 - i\varepsilon_5} = \frac{1}{13 - i(-1)} = \frac{1}{13+i} = z_0 \Rightarrow \overline{z_0} = z_5$$

$$z_1 = \frac{1}{13 + i\overline{\varepsilon_1}} = \frac{1}{13+i\varepsilon_9} \Rightarrow \overline{z_4} = \frac{1}{13 - i\varepsilon_4} = \frac{1}{13 + i\varepsilon_9} = z_1 \Rightarrow \overline{z_1} = z_4$$

$$z_2 = \frac{1}{13 + i\overline{\varepsilon_2}} = \frac{1}{13+i\varepsilon_8} \Rightarrow \overline{z_3} = \frac{1}{13 - i\varepsilon_3} = \frac{1}{13 + i\varepsilon_8} = z_2 \Rightarrow \overline{z_2} = z_3$$

$$z_6 = \frac{1}{13 + i\overline{\varepsilon_6}} = \frac{1}{13+i\varepsilon_4} \Rightarrow \overline{z_9} = \frac{1}{13 - i\varepsilon_9} = \frac{1}{13 + i\varepsilon_4} = z_6 \Rightarrow \overline{z_6} = z_9$$

$$z_7 = \frac{1}{13 + i\overline{\varepsilon_7}} = \frac{1}{13+i\varepsilon_3} \Rightarrow \overline{z_8} = \frac{1}{13 - i\varepsilon_8} = \frac{1}{13 + i\varepsilon_3} = z_7 \Rightarrow \overline{z_7} = z_8$$

Puesto que $\dfrac{1}{r_i \overline{r_i}} = \dfrac{1}{|r_i|^2}$, nos piden calcular $\dfrac{1}{|z_0|^2} + \dfrac{1}{|z_1|^2} + \dfrac{1}{|z_2|^2} + \dfrac{1}{|z_6|^2} + \dfrac{1}{|z_7|^2}$

$$|z_k| = \left|\frac{1}{13 + i\overline{\varepsilon_k}}\right| = \frac{1}{|13 + i\overline{\varepsilon_k}|} \Rightarrow |z_k|^2 = \frac{1}{|13 + i\overline{\varepsilon_k}|^2} \Rightarrow \frac{1}{|z_k|^2} = |13 + i\overline{\varepsilon_k}|^2$$

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{10} + i\sin\frac{2\pi k}{10} \Rightarrow \overline{\varepsilon_k} = \cos\frac{2\pi k}{10} - i\sin\frac{2\pi k}{10} \Rightarrow$$

$$i\overline{\varepsilon_k} = i\cos\frac{2\pi k}{10} + \sin\frac{2\pi k}{10} \Rightarrow 13 + i\overline{\varepsilon_k} = i\cos\frac{2\pi k}{10} + \sin\frac{2\pi k}{10} + 13 \Rightarrow$$

$$|13 + i\overline{\varepsilon_k}|^2 = \cos^2\frac{2\pi k}{10} + \left(\sin\frac{2\pi k}{10} + 13\right)^2 =$$

$$= \cos^2\frac{2\pi k}{10} + \sin^2\frac{2\pi k}{10} + 13^2 + 2\cdot 13\sin\frac{2\pi k}{10} = 1 + 13^2 + 26\sin\frac{2\pi k}{10} =$$

$$= 170 + 26\sin\frac{2\pi k}{10}$$

$$|13 + i\overline{\varepsilon_0}|^2 + |13 + i\overline{\varepsilon_1}|^2 + |13 + i\overline{\varepsilon_2}|^2 + |13 + i\overline{\varepsilon_6}|^2 + |13 + i\overline{\varepsilon_7}|^2 =$$

$$= 170\cdot 5 + 26\left(\sin\frac{2\pi\cdot 0}{10} + \sin\frac{2\pi\cdot 1}{10} + \sin\frac{2\pi\cdot 2}{10} + \sin\frac{2\pi\cdot 6}{10} + \sin\frac{2\pi\cdot 7}{10}\right) = (*)$$

$$\sin\frac{2\pi\cdot 0}{10}+\sin\frac{2\pi\cdot 1}{10}+\sin\frac{2\pi\cdot 2}{10}+\sin\frac{2\pi\cdot 6}{10}+\sin\frac{2\pi\cdot 7}{10}=$$
$$=\sin 0+\sin\frac{\pi}{5}+\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{6\pi}{5}+\sin\frac{7\pi}{5}=$$
$$=\sin\frac{\pi}{5}+\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\left(\frac{5\pi}{5}+\frac{\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}\right)=$$
$$=\sin\frac{\pi}{5}+\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)+\sin\left(\pi+\frac{2\pi}{5}\right)=$$
$$=\sin\frac{\pi}{5}+\sin\frac{2\pi}{5}-\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)=0$$

$$(*)=170\cdot 5+26\cdot 0=170\cdot 5=850$$

1.13

Primera versión. Resolviendo el sistema.

$$\begin{cases} xy=-80-320i=-80(1+4i) \\ yz=60 \\ zx=-96+24i=24(-4+i) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} yz=60\Rightarrow y=\dfrac{60}{z} \\ xy=-80(1+4i) \end{array}\right\}\Rightarrow x\frac{60}{z}=-80(1+4i)\Rightarrow \frac{x}{z}=-\frac{80}{60}(1+4i)=-\frac{4}{3}(1+4i)\Rightarrow x=-\frac{4}{3}z(1+4i)$$

$$zx=24(-4+i)\Rightarrow z\left(-\frac{4}{3}z(1+4i)\right)=24(-4+i)\Rightarrow z^2=\frac{24(i-4)}{\left(\frac{-4}{3}\right)(1+4i)}=-18i$$

Las raíces cuadradas de i son $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, luego las raíces cuadradas de $-18i$ son $z=\pm 3(i-1)$

Sea $z=3(i-1)$. Entonces:

$$y=\frac{60}{z}=\frac{60}{3(i-1)}=-10-10i$$

$$xy=-80(1+4i)\Rightarrow x=\frac{-80(1+4i)}{-10-10i}=20+12i$$

Finalmente:

$$x+y+z=7+5i\Rightarrow a=7,b=5\Rightarrow a^2+b^2=7^2+5^2=49+25=74$$

Nota: las condiciones del enunciado se cumplen tanto para $z=3(i-1)$, $y=-10-10i$, $x=20+12i$ como para $z=-3(i-1)$, $y=10+10i$, $x=-20-12i$.

Segunda versión. Mediante notación exponencial.
Pasamos a notación exponencial: $x = r_1 e^{i\theta_1}$, $y = r_2 e^{i\theta_2}$, $z = r_3 e^{i\theta_3}$.

$$|xy| = r_1 \cdot r_2 = |-80 - 320i| = 80\sqrt{17}$$
$$|yz| = r_2 \cdot r_3 = |60| = 60$$
$$|xz| = r_1 \cdot r_3 = |-96 + 24i| = 24\sqrt{17}$$

Este sistema tiene por solución: $r_1 = 4\sqrt{34}$, $r_2 = 10\sqrt{2}$ y $r_3 = 3\sqrt{2}$

$$xy = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} = -80 - 320i = 80\sqrt{17} e^{i\arctan(4)} \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 = \arctan(4)$$
$$yz = r_2 r_3 e^{i(\theta_2+\theta_3)} = 60 = 60e^{i0} \Rightarrow \theta_2 + \theta_3 = 0 \Rightarrow \theta_3 = -\theta_2$$
$$xz = r_1 r_3 e^{i(\theta_1+\theta_3)} = -96 + 24i = 24\sqrt{17} e^{i\arctan(-1/4)} \Rightarrow \theta_1 + \theta_3 = \arctan(-1/4)$$

$$\left.\begin{array}{l} \theta_1 + \theta_2 = \arctan(4) \\ \theta_1 - \theta_2 = \arctan(-1/4) \end{array}\right\} \Rightarrow 2\theta_2 = \arctan(4) - \arctan(-1/4) = \pi/2 \Rightarrow \theta_2 = \pi/4$$

Y por tanto $\theta_3 = -\theta_2 = -\pi/4$.

De todo lo anterior deducimos que $y = 10\sqrt{2}e^{i\pi/4} = 10 + 10i$, $z = 3\sqrt{2}e^{-i\pi/4} = 3 - 3i$
y utilizando $xy = -80 - 320i$, deducimos que $x = -20 - 12i$.

Como en la primera versión, basta sumar $x + y + z$ para llegar al resultado 74.

Fuente de esta versión: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AIME_II_Problems/Problem_5

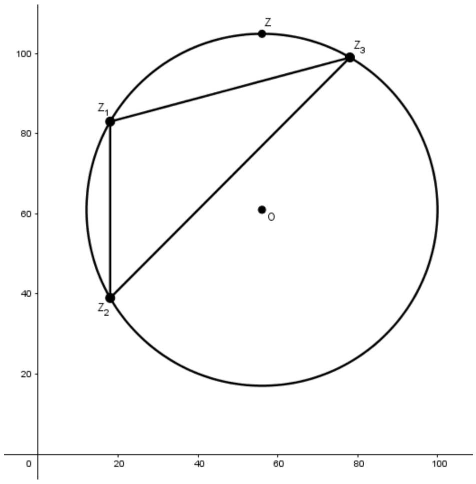
1.14
Vemos que este problema es una aplicación directa de 20.12.3b:

$$\text{A, B, C y D son cocíclicos o colineales} \Leftrightarrow \frac{(c-a)\cdot(d-b)}{(c-b)\cdot(d-a)} \in IR$$

En nuestro caso:

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z - z_2}{z - z_3} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z - z_2}{z - z_3} \in IR \Leftrightarrow z_1, z_2, z_3, z \text{ cocíclicos o colineales.}$$

Está claro que colineales no lo podrán ser, pues no lo son ya z_1, z_2, z_3, luego la condición a del enunciado equivale a que z pertenezca a la circunferencia circunscrita determinada por z_1, z_2, z_3.
La condición b del enunciado sitúa el punto z en el extremo superior de la circunferencia:



El centro O de esta circunferencia pasa por la mediatriz del segmento z_1z_2, es decir, a una altura $y=\dfrac{83+39}{2}=61$.

El centro O pasará también por la mediatriz del segmento z_2z_3, que calcularemos por geometría analítica:

$z_2=18+39i$, $z_3=78+99i$,

$m_1=\dfrac{99-39}{78-18}=\dfrac{60}{60}=1\Rightarrow m_2=\dfrac{-1}{1}=-1$

Punto medio: $P=\dfrac{(18+78,39+99)}{2}=\dfrac{(96,138)}{2}=(48,69)$

$y=-x+b\Rightarrow 69=-48+b\Rightarrow b=69+48=117$

La mediatriz es $y=-x+117$, y imponiendo además $y=61$ tenemos que el centro es

$61=-x+117\Rightarrow x=117-61=56\Rightarrow O=(56,61)$

La parte real de z será 56.

1.15

Primera versión. Calculando explícitamente las raíces.

$-64=64(\cos 180º+i\sin 180º)$

Luego $\sqrt[6]{-64}=\sqrt[6]{64}(\cos\theta_k+i\sin\theta_k)$, con $\theta_k=\dfrac{180}{6}+\dfrac{360}{6}k=30+60k \quad k=0,1,...5$

$\theta_0=30º$

$\theta_1=30+60\cdot 1=90º$

$\theta_2=30+60\cdot 2=150º$

$\theta_3=30+60\cdot 3=210º$

$\theta_4=30+60\cdot 4=270º$

$\theta_5=30+60\cdot 5=330º$

Las únicas raíces con parte real positiva son $z_0=2(\cos 30+i\sin 30)$ y su conjugado

$z_5=2(\cos 330+i\sin 330)$

Su producto es $z_0z_5=2\cdot 2(\cos(30+330)+i\sin(30+330))=4$

Segunda versión. Sin tener que calcular las seis raíces explícitamente.
Sabemos que las seis raíces de -64 están distribuidas equiespaciadamente en la circunferencia de radio $\sqrt[6]{64}=2$.
Vemos que $\pm 2i$ son raíces de -64, luego existirán exactamente dos con parte real positiva, y serán conjugadas la una de la otra.
Sabemos que el producto de un número por su conjugado es el cuadrado del módulo, luego su producto será $2^2=4$.

1.16
Primera versión.
Pasando a forma exponencial: $z=e^{i\theta}$,
$z^{6!}=z^{720}=e^{720i\theta}$
$z^{5!}=z^{120}=e^{120i\theta}$
$z^{6!}-z^{5!}\in IR \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z^{6!})=\mathrm{Im}(z^{5!})$, y, puesto $|z|=1$, esto solo puede pasar si sucede una de las dos condiciones siguientes:
a) $z^{6!}=z^{5!} \Leftrightarrow e^{720i\theta}=e^{120i\theta} \Rightarrow 720\theta=120\theta \Leftrightarrow 600\theta=0$,
ecuación que tiene 600 soluciones, puesto que estamos trabajando $\mathrm{mod}\, 2\pi$.
b) $z^{6!},z^{5!}$ son reflexiones la una de la otra respecto del eje imaginario.
Luego $e^{720i\theta}=e^{(\pi-120\theta)i} \Rightarrow 720\,\theta=\pi-120\theta \Leftrightarrow 840\,\theta=\pi$, ecuación que tiene 840 soluciones.
Un total de $600+840=1440$ soluciones, y por tanto su residuo al dividirlo entre 1000 es 440.

Segunda versión.
Puesto que $|z|=1$, $\bar{z}=\dfrac{1}{z^{-1}}$
Puesto que $z^{6!}-z^{5!}$ es real, será igual a su conjugado, luego

$$z^{6!}-z^{5!}=z^{720}-z^{120}=\overline{z^{720}-z^{120}}=\bar{z}^{720}-\bar{z}^{120}=\frac{1}{z^{720}}-\frac{1}{z^{120}} \Rightarrow z^{720}-z^{120}=\frac{1}{z^{720}}-\frac{1}{z^{120}}$$

Multiplicando ambos lados por z^{720} obtenemos un polinomio de grado 1440, que tendrá 1440 soluciones complejas.

Tercera versión.

$$z^{6!}-z^{5!}\in IR \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z^{6!})=\mathrm{Im}(z^{5!}) \Leftrightarrow \sin(720\,\theta)=\sin(120\,\theta) \Leftrightarrow \sin(720\,\theta)-\sin(120\,\theta)=0$$

Aplicando la identidad trigonométrica "Resta-A-Producto", tenemos

$$0=\sin(720\,\theta)-\sin(120\,\theta)=2\cos\left(\frac{720\,\theta+120\,\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{720\,\theta-120\,\theta}{2}\right)=$$

$$=2\cos\left(\frac{840\,\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{600\,\theta}{2}\right)=2\cos\left(\frac{840\,\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{600\,\theta}{2}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(\dfrac{840\,\theta}{2}\right)=0\\ \sin\left(\dfrac{600\,\theta}{2}\right)=0\end{cases}$$

La primera ecuación tiene 840 soluciones y la segunda 600, haciendo un total de 1440 soluciones.

Fuente: Soluciones #3, #4 y #2 respectivamente de la web "artofproblemsolving.com"

1.17

El número $p = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ en notación exponencial es $e^{60^{o}i}$, luego:

$p^2 = e^{120^{o}i} = \cos 120^{o} + i\sin 120^{o} = -\cos 60^{o} + i\sin 60^{o}$

$p^3 = e^{180^{o}i} = -1$

$p^6 = e^{360^{o}i} = 1$, y por tanto $p^{2016} = p^{3\cdot 366} = \left(p^3\right)^{366} = 1^{366} = 1$

$f(z) = a\,z^{2018} + b\,z^{2017} + c\,z^{2016} = z^{2016}\left(a\,z^2 + b\,z + c\right)$

$2015 + 2019\sqrt{3}i = f\left(p\right) = p^{2016}\left(a\,p^2 + b\,p + c\right) =$

$= -a\cos 60^{o} + ai\sin 60 + b\cos 60^{o} + bi\sin 60^{o} + c =$

$= \left(b-a\right)\cos 60^{o} + c + (a+b)i\sin 60^{o} \Rightarrow \begin{cases} \left(b-a\right)\cos 60^{o} + c = 2015 \\ (a+b)\sin 60^{o} = 2019\sqrt{3} \end{cases}$

$(a+b)\sin 60^{o} = 2019\sqrt{3} \Leftrightarrow (a+b)\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2019\sqrt{3} \Leftrightarrow a+b = 4038$

Puesto que, por hipótesis, $a,b \le 2019$, $a+b = 4038 \Leftrightarrow a = b = 2019$
Finalmente, sustituyendo en la primera ecuación:
$\left(b-a\right)\cos 60^{o} + c = 2015 \Rightarrow c = 2015$

Luego $f(1) = a1^{2018} + b1^{2017} + c1^{2016} = a+b+c = 2019+2019+2015 = 6053$, y su residuo al dividir por 1000 es 53.

2.1
Vemos que los valores de este sumatorio se van repitiendo de cuatro en cuatro:

$n = 0 \rightarrow \begin{cases} i^0 = 1 \\ \cos(45+90\cdot 0) \end{cases} \rightarrow \cos 45 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$n = 1 \rightarrow \begin{cases} i^1 = i \\ \cos(45+90\cdot 1) = \cos 135^{o} \end{cases} \rightarrow i\cos 135 = \dfrac{-i\sqrt{2}}{2}$

$n = 2 \rightarrow \begin{cases} i^2 = -1 \\ \cos(45+90\cdot 2) = \cos 225^{o} \end{cases} \rightarrow -\cos 225 = -\cos(180+45) = -\cos(135) =$

$= -(-\cos 45) = \cos 45 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$n = 3 \rightarrow \begin{cases} i^3 = -i \\ \cos(45+90\cdot 3) = \cos 315^{o} \end{cases} \rightarrow -i\cos 225 = i\cos(135) = \dfrac{-i\sqrt{2}}{2}$

La suma de estos cuatro valores es igual a $2\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{-2i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

Y el valor correspondiente a $n=4$ es el mismo que para $n=0$, el valor para $n=5$ es el mismo que para $n=1$,etc.

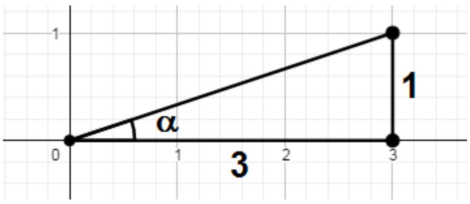
Luego el valor total de los primeros 40 será 10 veces el valor de los cuatro primeros, es decir, $10\sqrt{2}-10i\sqrt{2}$,

No olvidemos que hay uno más, el valor $n\to 40$, luego el resultado final será:

$$10\sqrt{2}-10i\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{21}{2}\sqrt{2}-10i\sqrt{2}$$

2.2

Nos basamos en el puro concepto de cotangente: base / altura. Por ejemplo:
$\cot^{-1}(3)=\alpha$ porque podemos construir un triángulo de base 3 y altura 1 con ángulo α .



Resolvemos este problema con números complejos, pasando a la circunferencia unidad, pues en la circunferencia unidad la suma de ángulos se determina mediante multiplicaciones.

$$\cot^{-1}(3)=e^{i\alpha}=\frac{3+i}{\sqrt{10}} \qquad hip=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$$

$$\cot^{-1}(7)=e^{i\beta}=\frac{7+i}{5\sqrt{2}} \qquad hip=\sqrt{7^2+1^2}=5\sqrt{2}$$

$$\cot^{-1}(13)=e^{i\gamma}=\frac{13+i}{\sqrt{170}} \qquad hip=\sqrt{13^2+1^2}=\sqrt{170}$$

$$\cot^{-1}(21)=e^{i\delta}=\frac{21+i}{\sqrt{442}} \qquad hip=\sqrt{21^2+1^2}=\sqrt{442}$$

$$\cot^{-1}(3)+\cot^{-1}(7)+\cot^{-1}(13)+\cot^{-1}(21)=$$
$$=e^{i\alpha}e^{i\beta}e^{i\gamma}e^{i\delta}=\frac{3+i}{\sqrt{10}}\cdot\frac{7+i}{5\sqrt{2}}\cdot\frac{13+i}{\sqrt{170}}\cdot\frac{21+i}{\sqrt{442}}=\frac{3+2i}{\sqrt{13}}=\frac{3}{\sqrt{13}}+\frac{2i}{\sqrt{13}}$$

Luego, finalmente, $\cot\left(\cot^{-1}(3)+\cot^{-1}(7)+\cot^{-1}(13)+\cot^{-1}(21)\right)=\dfrac{3/\sqrt{13}}{2/\sqrt{13}}=\dfrac{3}{2}$

2.3

En primer lugar, $\left|(\cos\theta^{\circ}+i\sin\theta^{\circ})^{75}\right| = \left|(\cos\theta^{\circ}+i\sin\theta^{\circ})\right|^{75} = 1^{75} = 1$, luego

$$(\cos\theta^{\circ}+i\sin\theta^{\circ})^{75} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

Si $(\cos\theta^{\circ}+i\sin\theta^{\circ})^{75} = 1$, entonces $\cos\theta^{\circ}+i\sin\theta^{\circ}$ es una de las raíces de grado 75 de la unidad, y por tanto $\theta = k\frac{360}{75} = k\frac{24}{5}$ con $0 \le k < 75$.

Puesto que, además, exigimos $0 \le \theta \le 90$,

$$\theta \le 90 \Leftrightarrow \frac{24k}{5} \le 90 \Leftrightarrow k \le \frac{90\cdot 5}{24} = 18.75 \Rightarrow k \le 18$$

Puesto que, además, exigimos que sean enteros, los números enteros de la forma

$k\frac{24}{5}$ con $0 \le k \le 18$

Serán aquellos en los que k sea 0 o múltiplo de 5 = $\{5,10,15\}$, un total de 4 contando el 0 inicial.

Luego hay cuatro soluciones: $\theta = 0^{\circ}, 24^{\circ}, 48^{\circ}, 72^{\circ}$.

Para el caso $(\cos\theta^{\circ}+i\sin\theta^{\circ})^{150} = \left((\cos\theta^{\circ}+i\sin\theta^{\circ})^{75}\right)^{2} = (-1)^{2} = 1$ y nos encontramos con un problema similar con las raíces de grado 150 de la unidad.

He hecho estas dos ramas se podrían haber unificado desde el principio puesto que

$$(\cos\theta^{\circ}+i\sin\theta^{\circ})^{75} = \pm 1 \Rightarrow \left((\cos\theta^{\circ}+i\sin\theta^{\circ})^{75}\right)^{2} = (\pm 1)^{2} = 1 \Rightarrow (\cos\theta^{\circ}+i\sin\theta^{\circ})^{150} = (\pm 1)^{2} = 1$$

2.4

Sea ε la raíz principal de grado 360 de la unidad, es decir:

$$\varepsilon = \cos(1^{\circ}) + i\sin(1^{\circ})$$

Entonces:

$$\varepsilon^{2} = \cos(2^{\circ}) + i\sin(2^{\circ})$$
$$\varepsilon^{3} = \cos(3^{\circ}) + i\sin(3^{\circ})$$
$$\varepsilon^{3} = \cos(3^{\circ}) + i\sin(3^{\circ})$$
$$\varepsilon^{4} = \cos(4^{\circ}) + i\sin(4^{\circ})$$
$$\ldots$$

Queremos calcular $\mathrm{Re}(1+\varepsilon+\varepsilon^{2}+\ldots+\varepsilon^{88}+\varepsilon^{89})$

Aplicando la fórmula de la serie geométrica:

$$1+\varepsilon+\varepsilon^{2}+\ldots+\varepsilon^{88}+\varepsilon^{89} = \frac{\varepsilon^{90}-1}{\varepsilon-1} = \frac{i-1}{\varepsilon-1}$$

Luego reducimos nuestro problema a determinar $\mathrm{Re}\left(\dfrac{i-1}{\varepsilon-1}\right)$:

$$\frac{i-1}{\varepsilon-1}=\frac{i-1}{\cos 1^{\circ}-1+i\sin 1^{\circ}}=\frac{i-1}{\cos 1^{\circ}-1+i\sin 1^{\circ}}\frac{(\cos 1^{\circ}-1-i\sin 1^{\circ})}{(\cos 1^{\circ}-1-i\sin 1^{\circ})}=$$
$$=\frac{(i-1)(\cos 1^{\circ}-1-i\sin 1^{\circ})}{(\cos 1^{\circ}-1)^2+\sin^2 1^{\circ}}$$
$$\mathrm{Re}\left(\frac{i-1}{\varepsilon-1}\right)=\frac{1}{(\cos 1^{\circ}-1)^2+\sin^2 1^{\circ}}\mathrm{Re}[(i-1)(\cos 1^{\circ}-1-i\sin 1^{\circ})]$$

$$(i-1)(\cos 1^{\circ}-1-i\sin 1^{\circ})=i\cos 1^{\circ}-i+\sin 1^{\circ}-\cos 1^{\circ}+1+i\sin 1^{\circ}=$$
$$=(\sin 1^{\circ}-\cos 1^{\circ}+1)+i(\cos 1^{\circ}-1+\sin 1^{\circ})\Rightarrow$$
$$\mathrm{Re}[(i-1)(\cos 1^{\circ}-1-i\sin 1^{\circ})]=\sin 1^{\circ}-\cos 1^{\circ}+1$$

Luego queremos demostrar que $\dfrac{\sin 1^{\circ}-\cos 1^{\circ}+1}{(\cos 1^{\circ}-1)^2+\sin^2 1^{\circ}}=\dfrac{1+\cot(0.5^{\circ})}{2}$

$$\frac{\sin 1^{\circ}-\cos 1^{\circ}+1}{(\cos 1^{\circ}-1)^2+\sin^2 1^{\circ}}=\frac{\sin 1^{\circ}-\cos 1^{\circ}+1}{\cos^2 1^{\circ}-2\cos 1^{\circ}+1+\sin^2 1^{\circ}}=$$
$$=\frac{\sin 1^{\circ}-\cos 1^{\circ}+1}{-2\cos 1^{\circ}+1+1}=\frac{\sin 1^{\circ}-\cos 1^{\circ}+1}{-2\cos 1^{\circ}+2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 1^{\circ}-\cos 1^{\circ}+1}{1-\cos 1^{\circ}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 1^{\circ}}{1-\cos 1^{\circ}}+\frac{-\cos 1+1}{1-\cos 1^{\circ}}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 1^{\circ}}{1-\cos 1^{\circ}}+1\right)=\frac{\cot(0.5^{\circ})+1}{2}$$

Donde hemos utilizado la identidad de la tangente del ángulo mitad:

$$\frac{1-\cos 1^{\circ}}{\sin 1^{\circ}}=\tan(0.5^{\circ})\Rightarrow\cot(0.5^{\circ})=\frac{\sin 1^{\circ}}{1-\cos 1^{\circ}}$$

2.5

$\theta=72^{\circ}=\dfrac{2\pi}{5}$. El número $z=e^{i\theta}$ es una raíz quinta de la unidad: $z^5=1$, y puesto que $z\neq 1$, $z^4+z^3+z^2+z+1=0$.

Dividiendo la igualdad anterior por z^2:

$$0=\frac{z^4+z^3+z^2+z+1}{z^2}=\frac{z^4+1}{z^2}+\frac{z^3+z}{z^2}+1=\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)+1$$

Sea $t=z+\dfrac{1}{z}$. Entonces $z^2+\dfrac{1}{z^2}=t^2-2$ y llegamos a la ecuación

$$t^2-2+t+1=0\Leftrightarrow t=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Nos piden $2\cos 72^{\circ}=z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

2.6

Sea $A=\dfrac{2\pi}{7}$. Entonces $2A=\dfrac{4\pi}{7}$ y $4A=\dfrac{8\pi}{7}$.

Luego $\cos\dfrac{2\pi}{7}=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)\Rightarrow\cos\dfrac{4\pi}{7}=\dfrac{1}{2}\left(z^2+\dfrac{1}{z^2}\right)\Rightarrow\cos\dfrac{8\pi}{7}=\dfrac{1}{2}\left(z^4+\dfrac{1}{z^4}\right)$

Y multiplicando por 4 nosotros buscamos determinar

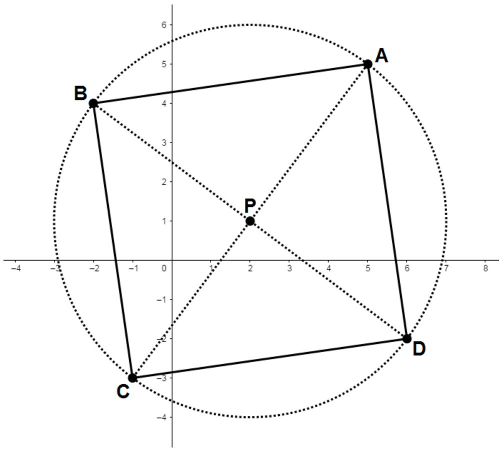
$$\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)\left(z^4+\frac{1}{z^4}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^4+\frac{1}{z^4}\right)$$

Ahora, utilizando que $z^7=1$, la expresión anterior se convierte en

$2\left(z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6\right)=2(0-1)=-2$, y por lo tanto el valor buscado es $\dfrac{1}{4}(-2)=\dfrac{-1}{2}$.

3.1

Sea $a = 5 + 5i$, que corresponde con el punto $A = (5,5)$, y $p = 2 + i$, que corresponde con el punto $P = (2,1)$. Queremos determinar los puntos B, C, D, que se corresponden con los complejos b, c, d.



En primer lugar aplicamos una traslación $z \to z - p$ para situar el centro en el origen.
Luego $A \to A' = a - p = 5 + 5i - (2 + i) = 3 + 4i$.
Rotamos 90º en sentido positivo multiplicando por i:

$$B' = A'i = (3 + 4i)i = 3i + 4i^2 = -4 + 3i$$

$$C' = B'i = (-4 + 3i)i = -4i + 3i^2 = -3 - 4i$$

$$D' = C'i = (-3 - 4i)i = -3i - 4i^2 = 4 - 3i$$

Y ahora deshacemos la traslación inicial sumando p a cada punto:

$$B = B' + p = -4 + 3i + 2 + i = -2 + 4i$$

$$C = C' + p = -3 - 4i + 2 + i = -1 - 3i$$

$$D = D' + p = (4 - 3i) + 2 + i = 6 - 2i$$

3.2

Primera versión. Sea $z = a + bi$

$$z - 2i = a + bi - 2i = a + (b-2)i \Rightarrow |z - 2i| = |a + (b-2)i| = \sqrt{a^2 + (b-2)^2}$$

$$z + 3 = a + bi + 3 = a + 3 + bi \Rightarrow |z + 3| = |a + 3 + bi| = \sqrt{(a+3)^2 + b^2}$$

$$2|z + 3| = 2\sqrt{(a+3)^2 + b^2}$$

$$|z-2i| = 2|z+3| \Leftrightarrow \sqrt{a^2+(b-2)^2} = 2\sqrt{(a+3)^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+(b-2)^2} = 2\sqrt{(a+3)^2+b^2} = \sqrt{4\left((a+3)^2+b^2\right)} \Leftrightarrow$$

$$a^2+(b-2)^2 = 4\left((a+3)^2+b^2\right) \Leftrightarrow$$

$$a^2+b^2-4b+4 = 4a^2+24a+36+4b^2 \Leftrightarrow$$

$$a^2+b^2-4b+4-4a^2-24a-36-4b^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-3a^2-3b^2-4b-24a-32 = 0 \Leftrightarrow 3a^2+3b^2+4b+24a+32 = 0 \Leftrightarrow$$

$$a^2+b^2+\frac{4}{3}b+8a+\frac{32}{3} = 0 \Leftrightarrow (a+4)^2+\left(b+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{52}{9} = 0 \Leftrightarrow (a+4)^2+\left(b+\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{52}{9}$$

Obteniendo una circunferencia de centro $\left(-4,-\frac{2}{3}\right)$ y radio $\frac{2\sqrt{13}}{3}$

Segunda versión.

Aplicamos la propiedad $|z|^2 = z\,\bar{z}$

$$|z-2i| = 2|z+3| = |2(z+3)|^2 = |2z+6|^2 \Leftrightarrow$$

$$(z-2i)\overline{(z-2i)} = (2z+6)\overline{(2z+6)} \Leftrightarrow$$

$$(z-2i)(\bar{z}+2i) = (2z+6)(2\bar{z}+6) \Leftrightarrow$$

$$z\bar{z}+2iz-2i\bar{z}-4i^2 = 4z\bar{z}+12z+12\bar{z}+36 = 0 \Leftrightarrow$$

$$z\bar{z}+2iz-2i\bar{z}-4i^2-4z\bar{z}-12z-12\bar{z}-36 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-3z\bar{z}+2i(z-\bar{z})-12(z+\bar{z})-32 = 0 \Leftrightarrow$$

$$3z\bar{z}-2i(z-\bar{z})+12(z+\bar{z})+32 = 0$$

Sea $z = a+bi \Rightarrow \bar{z} = a-bi \Rightarrow \begin{cases} z-\bar{z} = a+bi-(a-bi) = 2bi \\ z+\bar{z} = a+bi+(a-bi) = 2a \\ z\,\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2-b^2i^2 = a^2+b^2 \end{cases}$

Y nuestra ecuación queda de la forma

$$3(a^2+b^2)-2i2bi+12\cdot 2a+32 = 0 \Leftrightarrow 3(a^2+b^2)+4b+24a+32 = 0$$

Ecuación que encontramos en la primera versión de este mismo problema.

Fuente de esta solución: "Problemas de olimpiadas sobre números complejos" (Paola Posadas Prados) Pág. 23

3.3

Vamos a resolver este problema mediante números complejos.

Los puntos $A, B; C, D$ están representados por los complejos a, b, c, d .

Los puntos medios son:

$H = \frac{a+d}{2}$, $E = \frac{a+b}{2}$, $F = \frac{b+c}{2}$ y $G = \frac{c+d}{2}$

veamos que los segmentos HE y GF son paralelos:

$$HE /\!/ GF \Leftrightarrow \frac{h-e}{\bar{h}-\bar{e}} = \frac{g-f}{\bar{g}-\bar{f}}$$

$$h-e=\frac{a+d}{2}-\frac{a+b}{2}=\frac{a+d-(a+b)}{2}=\frac{a+d-a-b}{2}=\frac{d-b}{2}$$

$$\bar{h}-\bar{e}=\overline{h-e}=\overline{\left(\frac{d-b}{2}\right)}=\frac{\bar{d}-\bar{b}}{2}$$

$$\frac{h-e}{\bar{h}-\bar{e}}=\frac{(d-b)/2}{(\bar{d}-\bar{b})/2}=\frac{d-b}{\bar{d}-\bar{b}}$$

De la misma forma:

$$g-f=\frac{c+d}{2}-\frac{b+c}{2}=\frac{d-b}{2}$$

$$\bar{g}-\bar{f}=\overline{g-f}=\frac{\bar{d}-\bar{b}}{2}$$

$$\frac{g-f}{\bar{g}-\bar{f}}=\frac{d-b}{\bar{d}-\bar{b}}$$

Y efectivamente se cumple la condición de paralelismo.

La condición $GH // EF$ se demuestra de forma similar.

Otra manera alternativa es comprobar que los lados opuestos son congruentes:

$$\overline{GH}=\overline{EF}\Leftrightarrow |H-G|=|F-E|\Leftrightarrow \left|\frac{a+d}{2}-\frac{c+d}{2}\right|=\left|\frac{b+c}{2}-\frac{a+b}{2}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{a+d-c-d}{2}\right|=\left|\frac{b+c-a-b}{2}\right|\Leftrightarrow \left|\frac{a-c}{2}\right|=\left|\frac{c-a}{2}\right|$$

3.4

Queremos demostrar que se cumple: $AB^2=AC^2+BC^2-2\cdot AC\cdot BC\cos\angle C$

Puesto que $\cos C=\dfrac{\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}}{|CA|\,|CB|}=\dfrac{\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}}{|c-a|\,|c-b|}$, nos queda

$$|b-a|^2=|c-a|^2+|c-b|^2-2|c-a|\cdot|c-b|\cos\angle C=|c-a|^2+|c-b|^2-2\left(\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}\right)=$$

Pero por otro lado: $\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}=(a-c)\bullet(b-c)=a\bullet b-a\bullet c-c\bullet b+c\bullet c$

Pero también sabemos que $|z|^2=z\bullet z$, luego

$$|c-a|^2+|c-b|^2=(c-a)\bullet(c-a)+(c-b)\bullet(c-b)$$
$$=c\bullet c-c\bullet a-a\bullet c+a\bullet a+c\bullet c-c\bullet b-b\bullet c+b\bullet b=$$
$$=2c\bullet c-2c\bullet a+a\bullet a-2c\bullet b+b\bullet b=$$

Luego la parte derecha de la igualdad queda:

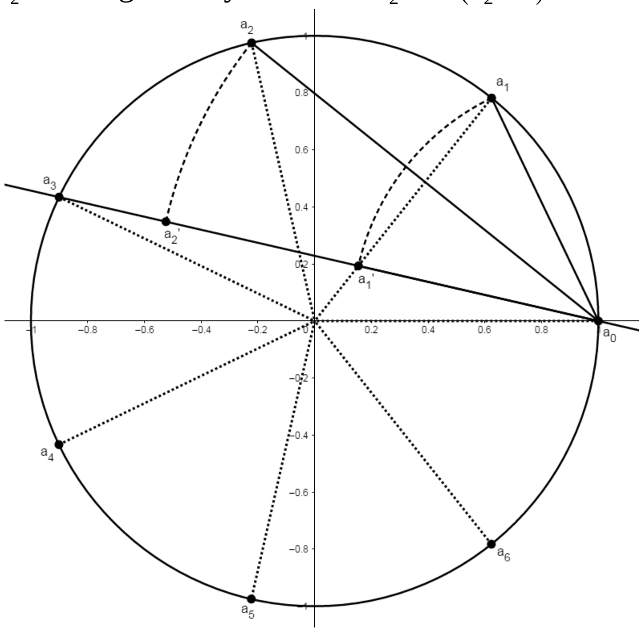
$$2c \bullet c - 2c \bullet a + a \bullet a - 2c \bullet b + b \bullet b - 2(a \bullet b - a \bullet c - c \bullet b + c \bullet c) =$$
$$= 2c \bullet c - 2c \bullet a + a \bullet a - 2c \bullet b + b \bullet b - 2a \bullet b + 2a \bullet c + 2c \bullet b - 2c \bullet c =$$
$$= a \bullet a + b \bullet b - 2a \bullet b = (a-b) \bullet (a-b) = |a-b|^2 = AB^2$$

Tal y como queríamos ver.

3.5
Vamos a resolver este problema mediante números complejos.
El polígono regular $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ lo vamos a identificar con las 7 raíces complejas de grado 7 de la unidad:

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = (1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^5, \varepsilon^6) \text{ con } \varepsilon = e^{2\pi i/7}.$$

Sea a_1' la rotación de a_1 con ángulo ε y centro 1: $a_1' = \varepsilon(a_1 - 1) + 1$
Sea $\omega = e^{2\pi i/14}$. Se cumple $\omega^2 = \varepsilon$.
Sea a_2' la rotación de a_2 con ángulo ω y centro 1: $a_2' = \omega(a_2 - 1) + 1$



Los puntos a_0, a_1', a_2', a_3 están alineados, luego para demostrar la condición

$$\frac{1}{A_0A_1} = \frac{1}{A_0A_2} + \frac{1}{A_0A_3}$$

basta (?) demostrar la igualdad:

$$\frac{1}{a_1' - 1} = \frac{1}{a_2' - 1} + \frac{1}{a_3 - 1}$$

Vamos a ello:

$$\left.\begin{array}{l} a_1' = \varepsilon(a_1 - 1) + 1 \\ a_1 = \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow a_1' = \varepsilon(\varepsilon - 1) + 1 = \omega^2(\omega^2 - 1) + 1$$

$$\left.\begin{array}{l} a_2' = \omega(a_2 - 1) + 1 \\ a_1 = \varepsilon^2 = (\omega^2)^2 = \omega^4 \end{array}\right\} \Rightarrow a_2' = \omega(\omega^4 - 1) + 1$$

$$a_3 = \varepsilon^3 = (\omega^2)^3 = \omega^6$$

Es decir:

$$\frac{1}{\omega^2(\omega^2-1)} = \frac{1}{\omega(\omega^4-1)} + \frac{1}{\omega^6-1} = \frac{\omega^6 - 1 + \omega(\omega^4-1)}{\omega(\omega^4-1)(\omega^6-1)} = \frac{\omega^6+\omega^5-\omega-1}{\omega(\omega^4-1)(\omega^6-1)}$$

$$\frac{1}{\omega^2(\omega^2-1)} = \frac{\omega^6+\omega^5-\omega-1}{\omega(\omega^2-1)(\omega^2+1)(\omega^6-1)} \Leftrightarrow$$

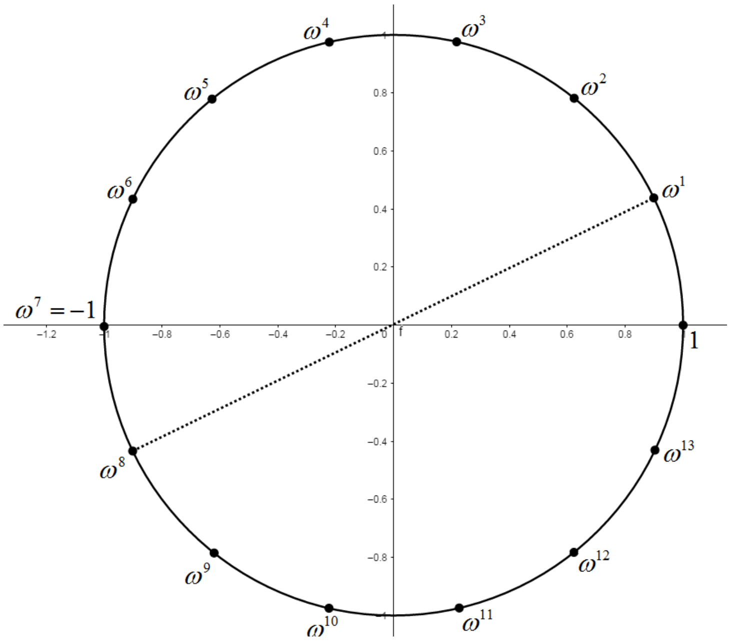
$$\frac{1}{\omega} = \frac{\omega^6+\omega^5-\omega-1}{(\omega^2+1)(\omega^6-1)} \Leftrightarrow$$

$$(\omega^2+1)(\omega^6-1) = \omega(\omega^6+\omega^5-\omega-1) \Leftrightarrow$$

$$\omega^8+\omega^6-\omega^2-1 = \omega^7+\omega^6-\omega^2-\omega \Leftrightarrow$$

$$\omega^8-\omega^7+\omega-1=0$$

Pero aquí aplicamos que $\omega^8 = -\omega$ y $\omega^7 = -1$:



Con lo que la ecuación $\omega^8-\omega^7+\omega-1=0$ es trivial.

Fuente de la solución: Complex Numbers in Geometry (Marko Radovanovic, 2007), pág. 3

3.6
Vamos a resolver este problema mediante números complejos.

Antes de nada, necesitamos caracterizar la tangencia entre dos circunferencias mediante distancias: dos circunferencias de centros O_1 y O_2 y radios r_1 y r_2 serán tangentes si y solo si

$$O_1O_2 = r_1 - r_2$$

En nuestro caso, sabemos que el radio de la circunferencia de los nueve puntos es la mitad del radio de la circunferencia circunscrita (ver 11.7.1).

Luego, siendo I el incentro, N_9 el centro de la circunferencia de los nueve puntos y r el radio de la circunferencia inscrita, queremos ver que

$$IN_9 = \frac{1}{2}R - r$$

o equivalentemente, $2IN_9 = R - 2r$.

Pero, por otro lado, sabemos que $R - 2r = \frac{OI^2}{R}$, donde O es el ortocentro del triángulo (ver 11.13.2)

Luego llegamos a:

$$2RIN_9 = OI^2$$

Tomamos (ver 20.10.13) $A = x^2$, $B = y^2$ y $C = z^2$, para los cuales tenemos
$I = -(xy + yz + zx)$, $N_9 = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ y $O = 0$.
Estamos trabajando con la circunferencia unidad, luego $R = 1$ y la igualdad a demostrar es, por tanto:

$$2IN_9 = OI^2$$

Luego

$$2IN_9 = 2\left|\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + (xy + yz + zx)\right| = \left|\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + 2(xy + yz + zx)\right| =$$

$$= \left|(x + y + z)^2\right| = |x + y + z|^2$$

Por otro lado,

$$OI^2 = |-(xy + yz + zx) - 0|^2 = |xy + yz + zx|^2$$

Ahora aplicamos la propiedad $|a|^2 = a\,\bar{a}$:

En la izquierda:

$$|x+y+z|^2 = (x+y+z)\overline{(x+y+z)} = (x+y+z)(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}) = (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

En la derecha:

$$|xy+yz+zx|^2 = (xy+yz+zx)\overline{(xy+yz+zx)} = (xy+yz+zx)\left(\overline{xy}+\overline{yz}+\overline{zx}\right) =$$
$$= (xy+yz+zx)\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)$$

Y ambas expresiones son iguales a $\dfrac{(x+y+z)(xy+yz+zx)}{xyz}$, con lo que el problema queda resuelto.

Fuente de la solución: "Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads", Evan Chen, 2016. Página 108

3.7

Resolvemos este problema mediante números complejos, tomando como puntos $Q_1,...,Q_n$ los complejos $1,\varepsilon,\varepsilon^2,...,\varepsilon^{n-1}$.

Sabemos que $1,\varepsilon,\varepsilon^2,...,\varepsilon^{n-1}$ son las n raíces del polinomio x^n-1, luego este polinomio se puede factorizar como:

$$x^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-\varepsilon^k\right)$$

Y, en particular, para $x=2$:

$$2^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}\left(2-\varepsilon^k\right) \Rightarrow 2^n-1=\left|2^n-1\right|=\prod_{k=0}^{n-1}\left|2-\varepsilon^k\right|=\prod_{k=0}^{n-1} PQ_k$$

Fuente de la solución: "Lecture 11 Complex Numbers" (Holden Lee 2/19/11) pág. 10

3.8

Vamos a resolver este problema mediante números complejos.
Supondremos que el cuadrilátero ABCD está inscrito en la circunferencia unidad.
Por 20.10.12c sabemos que $h=a+b+d$

Por 20.10.5 sabemos que $p=a+b-ab\bar{c}=a+b-\dfrac{ab}{c}$ y $q=a+d-ad\bar{c}=a+d-\dfrac{ad}{c}$

Por 20.6.2 los puntos P, Q y H estarán alineados si y solo si

$$\frac{p-h}{\overline{p}-\overline{h}}=\frac{q-h}{\overline{q}-\overline{h}}$$

$$p-h=a+b-\frac{ab}{c}-a-b-d=-\frac{ab}{c}-d$$
$$\overline{p}-\overline{h}=-\frac{c}{ab}-\frac{1}{d}$$

$$\frac{p-h}{\overline{p}-\overline{h}}=\frac{-\frac{ab}{c}-d}{-\frac{c}{ab}-\frac{1}{d}}=\frac{\frac{ab}{c}+d}{\frac{c}{ab}+\frac{1}{d}}=\frac{\frac{ab+cd}{c}}{\frac{cd+ab}{abd}}=\frac{abd}{c}$$

$$q-h=a+d-\frac{ad}{c}-a-b-d=-\frac{ad}{c}-b$$

Vemos que entre $p-h$ y $q-h$ la única diferencia es que se intercambian los valores de b y d, luego llegaremos al mismo resultado:

$$\frac{q-h}{\overline{q}-\overline{h}}=\frac{abd}{c}$$

Y por lo tanto son puntos alineados, tal y como queríamos ver.

Fuente de la solución: Complex Numbers in Geometry (Marko Radovanovic, 2007), pág. 17

3.9

Vamos a resolver este problema mediante números complejos.
Supongamos el triángulo inscrito en la circunferencia unidad, y por tanto $R=1$.
$h=a+b+c$ por 20.10.12c.
$O=0$ por 20.10.12a.
Luego $Q=H+2\overrightarrow{HO}=H+2(O-H)\Rightarrow h=h+2(0-h)=-h=-a-b-c$.

Por 20.2.9, el baricentro T_1 de ΔBCQ será $t=\frac{b+c+q}{3}=\frac{b+c-a-b-c}{3}=\frac{-a}{3}$

Queremos ver $AT_1=\frac{4}{3}R=\frac{4}{3}$.

$AT_1=\left|\overrightarrow{AT_1}\right|=|t_1-a|=\left|\frac{-a}{3}-a\right|=\left|\frac{-4a}{3}\right|=\frac{4}{3}|a|=\frac{4}{3}$, tal y como queríamos ver.

Las otras dos igualdades: $BT_2=CT_3=\frac{4}{3}R$ se demuestran de la misma manera.

3.10
Resolvemos este problema mediante números complejos.
Vamos a considerar el triángulo ΔDEF de los puntos de tangencia entre el triángulo ΔABC y su circunferencia inscrita. Además, vamos a considerar la circunferencia inscrita como la circunferencia unidad $|z|=1$. Luego $I=0$.
Asociamos a los puntos D,E,F los complejos d,e,f .
Luego $h=-f$ y $g=-e$.
Por 20.10.8, tenemos $b=\frac{2df}{d+f}$ y $c=\frac{2ed}{e+d}$.
y por tanto

$$m=\frac{b+c}{2}=\frac{\frac{2df}{d+f}+\frac{2ed}{e+d}}{2}=\frac{df}{d+f}+\frac{ed}{e+d}=\frac{df(e+d)+ed(d+f)}{(d+f)(e+d)}=$$

$$=\frac{dfe+fd^2+ed^2+edf}{(d+f)(e+d)}=\frac{fd^2+ed^2+2edf}{(d+f)(e+d)}$$

Para determinar el punto Q evitamos utilizar b y c, y utilizaremos únicamente d de forma muy ingeniosa: ¡dos veces!, puesto que es tangente, se considera "doble" , es decir $BC=DD$, y aplicando 20.10.9:

$$q=\frac{dd(g+h)-gh(d+d)}{dd-gh}=\frac{d^2(-e-f)-(-e)(-f)(2d)}{d^2-(-e)(-f)}=\frac{d^2(-e-f)-2efd}{d^2-ef}=$$

$$=\frac{d^2(e+f)+2efd}{ef-d^2}=\frac{d^2e+d^2f+2efd}{ef-d^2}$$

Y finalmente:

$$QI\perp IM\Leftrightarrow\frac{q-0}{m-0}\in i\,IR\Leftrightarrow\frac{q}{m}\in i\,IR\Leftrightarrow\overline{\left(\frac{q}{m}\right)}=-\frac{q}{m}$$

$$\frac{q}{m}=\frac{d^2e+d^2f+2efd}{ef-d^2}\div\frac{fd^2+ed^2+2edf}{(d+f)(e+d)}=\frac{(d+f)(e+d)}{ef-d^2}$$

$$\overline{\left(\frac{q}{m}\right)}=\frac{(\bar{d}+\bar{f})(\bar{e}+\bar{d})}{\bar{e}\bar{f}-\bar{d}^2}=\frac{\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{f}\right)\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{d}\right)}{\frac{1}{e}\frac{1}{f}-\frac{1}{d^2}}=\frac{\left(\frac{f+d}{df}\right)\left(\frac{d+e}{de}\right)}{\frac{1}{fe}-\frac{1}{d^2}}=$$

$$=\frac{(f+d)(d+e)}{d^2fe\left(\frac{1}{fe}-\frac{1}{d^2}\right)}=\frac{(f+d)(d+e)}{d^2fe\left(\frac{d^2-fe}{d^2fe}\right)}=\frac{(f+d)(d+e)}{d^2-fe}=\frac{(f+d)(d+e)}{-(fe-d^2)}=-\frac{q}{m}$$

Tal y como queríamos ver.

Fuente de la solución: "Bashing Geometry with Complex Numbers, Evan Chen, August 29, 2015" pág. 5

3.11

$z_0 = 5 + 0i$

$z_1 = e^{i\pi/4} z_0 + 10 = e^{i\pi/4} 5 + 10 = 5e^{i\pi/4} + 10$

$z_2 = e^{i\pi/4} z_1 + 10 = e^{i\pi/4}\left(5e^{i\pi/4} + 10\right) + 10 = 5\left(e^{i\pi/4}\right)^2 + 10e^{i\pi/4} + 10$

$z_3 = e^{i\pi/4} z_2 + 10 = e^{i\pi/4}\left(5\left(e^{i\pi/4}\right)^2 + 10e^{i\pi/4} + 10\right) + 10 = 5\left(e^{i\pi/4}\right)^3 + 10\left(e^{i\pi/4}\right)^2 + 10e^{i\pi/4} + 10$

Por lo tanto vemos la pauta:

$z_n = 5\left(e^{i\pi/4}\right)^n + 10\left(e^{i\pi/4}\right)^{n-1} + \ldots + 10\left(e^{i\pi/4}\right)^2 + 10e^{i\pi/4} + 10 =$

$= 5\left(e^{i\pi/4}\right)^n + 10\left(\left(e^{i\pi/4}\right)^{n-1} + \ldots + \left(e^{i\pi/4}\right)^2 + e^{i\pi/4} + 1\right)$

Pero por otro lado, vemos que

$e^{\pi/4}$, $\left(e^{\pi/4}\right)^2 = e^{2/2} = i$, $\left(e^{\pi/4}\right)^3$, $\left(e^{\pi/4}\right)^4 = -1$, $\left(e^{\pi/4}\right)^5 = -e^{\pi/4}$, $\left(e^{\pi/4}\right)^6 = -i$, $\left(e^{\pi/4}\right)^8 = 1$

es decir, son las raíces de grado 8 de la unidad, y por tanto

$z_n = \left(e^{i\pi/4}\right)^7 + \left(e^{i\pi/4}\right)^6 + \left(e^{i\pi/4}\right)^5 + \ldots + e^{i\pi/4} + 1 = 0$

Luego

$z_8 = 5\left(e^{i\pi/4}\right)^8 + 10\left(\left(e^{i\pi/4}\right)^7 + \ldots + \left(e^{i\pi/4}\right)^2 + e^{i\pi/4} + 1\right) = 5\left(e^{i\pi/4}\right)^8 + 10 \cdot 0 =$

$= 5 \cdot 1 + 10 \cdot 0 = 5 = z_0$

Es decir, los valores generan un bucle de grado 8: $z_8 = z_0 = 5$.

150 mod 8 = 6 , luego

$z_{150} = z_6 = 5\left(e^{i\pi/4}\right)^6 + 10\left(\left(e^{i\pi/4}\right)^5 + \left(e^{i\pi/4}\right)^4 + \left(e^{i\pi/4}\right)^3 + \left(e^{i\pi/4}\right)^2 + e^{i\pi/4} + 1\right) =$

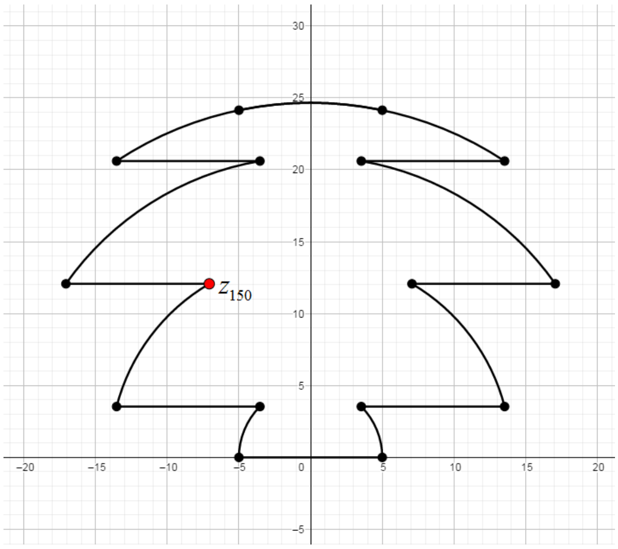
$= 5(-i) + 10\left(\left(e^{i\pi/4}\right)^5 + (-1) + \left(e^{i\pi/4}\right)^3 + i + e^{i\pi/4} + 1\right) =$

$= 5(-i) + 10\left(-e^{i\pi/4} + (-1) + \left(e^{i\pi/4}\right)^3 + i + e^{i\pi/4} + 1\right) =$

$= 5(-i) + 10\left(\left(e^{i\pi/4}\right)^3 + i\right) = 5(-i) + 10\left(e^{i\pi/4}\right)^3 + 10i = 10\left(e^{i\pi/4}\right)^3 + 5i =$

$= 10\left(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ\right) + 5i = 10\cos 135^\circ + i(5 + 10\sin 135^\circ) \cong -7.07 + 12.07i$

Nota: Los sucesivos puntos generan la siguiente simpática figura con forma de arbolito:



4.1

Usamos las identidades

$$\cos n\theta = \frac{z^n + z^{-n}}{2} \qquad i\sin n\theta = \frac{z^n - z^{-n}}{2}$$

para convertir esta ecuación en una ecuación sobre números complejos:

$$\cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2} \Rightarrow \cos^2\theta = \left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2 = \frac{\left(z+z^{-1}\right)^2}{4}$$

$$\cos^2 2\theta = \frac{z^2+z^{-2}}{2} \Rightarrow \cos^2 2\theta = \frac{\left(z^2+z^{-2}\right)^2}{4}$$

$$\cos^2 3\theta = \frac{z^3+z^{-3}}{2} \Rightarrow \cos^2 3\theta = \frac{\left(z^3+z^{-3}\right)^2}{4}$$

$$\frac{\left(z+z^{-1}\right)^2}{4} + \frac{\left(z^2+z^{-2}\right)^2}{4} + \frac{\left(z^3+z^{-3}\right)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(z+z^{-1}\right)^2 + \left(z^2+z^{-2}\right)^2 + \left(z^3+z^{-3}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$z^2+z^{-2}+2zz^{-1}+z^4+z^{-4}+2z^2z^{-2}+z^6+z^{-6}+2z^3z^{-3} = 4 \Leftrightarrow$$

$$z^2+z^{-2}+2+z^4+z^{-4}+2+z^6+z^{-6}+2 = 4 \Leftrightarrow z^2+z^{-2}+z^4+z^{-4}+z^6+z^{-6}+2 = 0$$

Reordenamos los elementos para obtener una progresión geométrica de razón z^2.
Sabemos que $z^2 \neq 1$ porque la ecuación del enunciado no se satisface para θ múltiples de π.

$$z^{-6}+z^{-4}+z^{-2}+\underbrace{1}_{=z^0}+z^2+z^4+z^6 = -1$$

Por lo tanto, aplicando la fórmula de la suma de términos de una sucesión geométrica:

$$\frac{z^6 - z^{-6}}{1-z^2} = -1$$

o bien (???)

$$z^7 - z^{-7} = -\left(z - z^{-1}\right)$$

Ahora recuperamos la ecuación trigonométrica subjacente:

$$z^7 - z^{-7} = 2i\sin 7\theta \qquad z^1 - z^{-1} = 2i\sin\theta$$

$$2i\sin 7\theta = -2i\sin\theta \Leftrightarrow \sin 7\theta = -\sin\theta \Leftrightarrow \sin 7\theta = \sin(-\theta)$$

Esta última ecuación tiene por soluciones:

$$7\theta = -\theta + 2\pi k \quad k = 0,1,2,3,\ldots \Leftrightarrow 8\theta = 2\pi k \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}k \quad k = 0,1,2,3,\ldots \quad k \neq 0 \bmod 4$$

o bien:

$$7\theta = \pi - (-\theta) + 2\pi k \quad k = 0,1,2,3,\ldots \Leftrightarrow 7\theta = \pi + \theta + 2\pi k \Leftrightarrow 6\theta = \pi + 2\pi k = \pi(2k+1) \Leftrightarrow$$

$$\theta = \frac{\pi(2k+1)}{6}$$

Fuente de esta solución: International Mathematical Olympiads Compiled and with solutions by Samuel L.Greitzer, pág. 49

Fuentes.

1.1 "Contest Problem Book V", pág. 9
1.3 "Problemas de olimpiadas sobre números complejos" (Paola Posadas Prados)
1.4 "Problemas de olimpiadas sobre números complejos" (Paola Posadas Prados), pág. 33
1.9 "Lecture 11; Complex Numbers" (Holden Lee, 2/19/11), pág. 10
1.10 Compiled and Solved Problems in Geometry and Trigonometry (Florentin Smarandache), página 61
1.11 Compiled and Solved Problems in Geometry and Trigonometry (Florentin Smarandache), página 61
1.12 Complex Numbers ARML Practice (Misha Lavrov 10/7/2012) pág. 46
2.1 "Contest Problem Book V", pág. 30
2.4 "Lecture 11 Complex Numbers" (Holden Lee, 2/19/11) pág. 7
3.1 "Problemas de olimpiadas sobre números complejos" (Paola Posadas Prados)
3.2 "Problemas de olimpiadas sobre números complejos" (Paola Posadas Prados) Pág. 23
3.5 Complex Numbers in Geometry (Marko Radovanovic, 2007), pág. 3
3.6 "Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads", Evan Chen, 2016. Página 108
3.7 "Lecture 11 Complex Numbers" (Holden Lee 2/19/11) pág. 10
3.8 Complex Numbers in Geometry (Marko Radovanovic, 2007), pág. 4
3.9 Complex Numbers in Geometry (Marko Radovanovic, 2007), pág. 3
3.10 "Bashing Geometry with Complex Numbers, Evan Chen, August 29, 2015" pág. 5
3.11 "Lecture 11 Complex Numbers Holden Lee 2/19/11" pág. 6
4.1 International Mathematical Olympiads Compiled and with solutions by Samuel L.Greitzer, pág. 4

Apéndice.

El "problem-solving", tal y como yo lo entiendo.

La resolución de poblemas, el llamado "**problem-solving**" es la experiencia más apasionante de las matemáticas. Los "ejercicios", tan repetitivos propios de los libros de texto, pasan ahora a ser "problemas", y cada problema es una aventura única, es un enemigo desconocido al que el estudiante es llamado a enfrentarse con valentía. **La resolución de problemas no es muy importante ni poco importante, es lo único importante en matemáticas**. Pero el problem-solving no es para pusilánimes. Dejemos algunas cosas claras:

1. El problem-solving requiere tiempo: Cada problema exige tiempo para pensarlo, tiempo para resolverlo, y en la mayoría de las veces, tiempo, mucho tiempo para estudiar detenidamente la solución propuesta cuando hemos fracasado en su resolución. Solo así se aprende, día tras día, semana tras semana, año tras año. Solo después de muchos fracasos llegan los primeros éxitos.
Todos los problemas de los libros de "Toomates Cool·lección" se ofrecen siempre con las soluciones totalmente desarrolladas, pero no mires nunca la solución, no te rindas, hasta haber dedicado al problema todo el tiempo necesario... y un poco más.

2. La frustración es inevitable, pero la impotencia que uno siente al fracasar intentando resolver problemas demasiado difíciles puede llegar a quemar al estudiante de matemáticas, por ello es fundamental **seleccionar problemas de dificultad adecuada**.

Todos los problemas de los libros de "Toomates Cool·lección" se presentan siempre indicando su dificultad: **MF**: Muy fácil, **F**: Fácil, **M**: Dificultad media, **D**: Difícil, **MD**: Muy difícil.

Aunque hay que dejar claro que el grado de dificultad de un problema es algo muy subjetivo: Aquello que alguien puede considerar difícil puede ser muy fácil para otro.

3. Todo juego exige unas reglas, reglas que deben estar claras. Es muy frustrante (aunque muy enriquecedor) enfrentarse durante horas a un problema para finalmente descubrir que se están utilizando técnicas o conceptos que uno desconoce. La sensación de haber perdido el tiempo miserablemente puede ser muy desoladora. **Las técnicas y conceptos teóricos que se utilizan en la resolución de los problemas deben estar claros**.

Los libros de problemas de "Toomates Cool·lección" se acompañan con los "libros de teoría" en donde se recopilan de una forma ordenada todos los contenidos teóricos utilizados en las resolución de los problemas.

4. La resolución de problemas supone en el estudiante **un nivel importante de iniciativa y autonomía**. Los libros de "Toomates Cool·lección" son un recurso más que el estudiante tiene a su disposición en su biblioteca personal, biblioteca que deberá enriquecer con la adquisición de infinidad de otros recursos encontrados en Internet, y muchos libros, gratuitos y comprados, digitales y en papel.

5. El problem-solving requiere la máxima concentración. Cuando nos enfrentamos a un problema, ¡el cerebro encendido y el móvil apagado!

Las competinciones AMC, un excelente sendero hacia las IMO detrás de un mar de siglas.

AMC (American Mathematics Competitions)
Es el programa de competiciones matemáticas organizado por la MAA (Mathematical Association of America) para la selección del equipo que representará a USA en la IMO. Organiza el sistema de pruebas selectivas AMC10/12, AIME y USAMO.

El sistema escolar USA consta de 12 cursos ("grades") divididos en 3 niveles, que corresponden a las siguientes edades: **Elementary school (**Preschool: 4-5, Kindergarten: 5-6, 1st Grade: 6-7, 2nd Grade: 7-8, 3rd Grade: 8-9, 4th Grade: 9-10, 5th Grade: 10-11), **Middle school** (6th Grade: 11-12, 7th Grade: 12-13, 8th Grade: 13-14), **High school** (9th Grade "Freshman":14-15, 10th Grade "Sophomore": 15-16, 11th Grade "Junior": 16-17, 12th Grade "Senior": 17-18)

AHSME (American High School Mathematics Examination) (1949-2000)
Es la antigua competición matemática para los grados 9 a 12. A partir del año 2000 desaparece al bifurcarse en AMC10 (Grado 10) y AMC12 (Grado 12).
Consta de 30 preguntas "tipo test" con 5 posibles respuestas, para resolver en 90 minutos.
Los estudiantes que alcanzan los 100 puntos o más de los 150 posibles obtienen el "**AHSME Honor Roll**", y son invitados a participar en la AIME (American Invitational Mathematics Examination). Se suelen clasificar unos 4000 estudiantes anualmente.
Para alcanzar estos 100 puntos, los estudiantes deben contestar correctamente aproximadamente la mitad de las 30 preguntas y dejar en blanco el resto, pues las respuestas equivocadas conllevan severas penalizaciones.
Las calculadoras se permiten a partir de 1994, aunque no son necesarias.

AMC8 (American Mathematics Competition Grade 8)
Prueba de 25 preguntas "tipo test" en 40 minutos, para estudiantes de Grado 8 (13-14 años, el 2º ESO en España).
Cubre (aunque no está limitado a ellos) los temas propios del currículum de la "Middle School": Combinatoria, probabilidad, estimación, razonamiento de proporcionalidad, geometría elemental incluyendo teorema de Pitágoras, visión espacial, aplicaciones en la vida cotidiana, lectura e interpretación de gráficos y tablas.
Además, en las últimas preguntas pueden aparecer funciones y ecuaciones lineales y cuadráticas, geometria cartesiana y algunos elementos de álgebra básica.

AMC10/12 (American Mathematics Competition Grades 10 & 12)
Prueba de 25 preguntas "tipo test" en 75 minutos.
La AMC10 está pensada para estudiantes hasta el grado 10 (el 4º de ESO en España), y 17.5 años de edad como máximo, y cubre el currículum hasta dicho grado.
La AMC12 está pensada para estudiantes hasta el grado 12 (el 2º de Bachillerato en España), y cubre todo el currículum de la "high school", incluyendo trigonometría, álgebra avanzada, geometría avanzada, pero excluyendo el calculus.

Existen dos versiones de dichas pruebas: A y B, con la misma estructura y el mismo nivel de dificultad. Las preguntas son diferentes porque se presentan en fechas diferentes. Los estudiantes se pueden presentar a ambas pruebas.

AIME (American Invitational Mathematics Examination)
Prueba de 15 preguntas en 3 horas. Las respuestas son siempre números positivos de tres dígitos. Son convocados los mejores estudiantes en AMC10 y/o AMC12. Su primera edición fue en el año 1983.

USAMO y USAJMO (USA Mathematical Olympiad y USA Junior Mathematical Olympiad)
Prueba de 6 preguntas en dos días, 9 horas de duración.
A la USAMO son convocados los mejores estudiantes en AMC12 y AIME (alrededor del 5% superior). A la USAJMO son convocados los mejores estudiantes en AMC10 y AIME (alrededor del 2.5% superior). Solo pueden presentarse estudiantes americanos y estudiantes en escuelas americanas o en Canadá.
Los 6 estudiantes con mejores puntuaciones en el combinado AMC10/12, AIME y USAMO forman el equipo que representa a USA en la Annual International Mathematical Olympiad (IMO)

IMO (International Mathematical Olympiad)
Es una competición anual para estudiantes preuniversitarios y es la más antigua de las Olimpiadas Internacionales de Ciencias.1 La primera IMO se celebró en Rumania en 1959. Desde entonces se ha celebrado cada año. Cerca de cien países de todo el mundo envían equipos de un máximo de seis estudiantes junto con un líder de equipo, un tutor - o colíder - y observadores. La competición consta de dos cuestionarios con tres problemas cada uno. Cada pregunta da una puntuación máxima de 7 puntos, con una puntuación máxima total de 42 puntos. La prueba se desarrolla en dos días, en cada uno de los cuales el concursante dispone de cuatro horas y media para resolver tres problemas. Estos se escogen entre varias áreas de la matemática vista en secundaria, los cuales pueden clasificarse *grosso modo* en geometría, teoría de números, álgebra y combinatoria. No se requieren conocimientos de matemáticas superiores y de las soluciones se espera que sean cortas y elegantes. Encontrarlas requiere, sin embargo, ingenio excepcional y habilidad matemática.