PROBLEMAS DE GEOMETRÍA 3

Gerard Romo Garrido

Toomates Coolección vol. 2.3

Toomates Coolección

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "licencias digitales", "licencias de uso" y en general cualquier forma de "pago por el acceso a los materiales didácticos", con las que algunas empresas pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo material, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.

Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de pago por acceso a los materiales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía**.

El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las empresas comerciales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de los materiales que ofrecen, (que son muy mediocres) y no mediante retorcidas técnicas comerciales.

 Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas. **¡Libérate de la tiranía y mediocridad de los productos comerciales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos.**

Problem Solving (en español):

Geometría Axiomática   Problemas de Geometría Vol. 1   Vol. 2   Vol. 3
Introducción a la Geometría   Álgebra   Teoría de números Vol. 1   Vol. 2   Combinatoria
Probabilidad Trigonometría   Desigualdades   Números complejos   Calculus & Precalculus

Libros de texto para ESO y bachillerato (en español y en catalán):

Cálculo infinitesimal ESP CAT   Álgebra Lineal ESP CAT   Geometría Lineal ESP CAT
Números Complejos ESP CAT   Combinatoria y probabilidad ESP CAT   Estadística ESP CAT
Programación Lineal ESP CAT   Álgebra ESP CAT   Trigonometria ESP CAT
Geometria analítica ESP CAT   Funciones ESP CAT   Números (Preálgebra) ESP CAT
Proporcionalidad ESP CAT   Medidas geométricas ESP CAT   Mates amb Excel

PAU españolas:

Cataluña TEC   Cataluña CCSS   Valencia   Galicia   País Vasco   Baleares

Reválidas internacionales:

Portugal   Italia   Francia   Rumanía   Hungría   Polonia   Pearson Edexcel International A Level
China-Gaokao   China-Zhongkao   Corea-Suneung   Cambridge International A Level
Cambridge IGCSE   AQA GCSE   International Baccalaureate (IB)   Pearson Edexcel IGCSE

Evaluación diagnóstica y pruebas de acceso:

ACM6EP   ACM4   CFGS   PAP

Competiciones matemáticas:

Canguro: España   Cataluña   Francia   USA   Reino Unido   Austria
USA: Mathcounts AMC 8 10 12 AIME USAJMO USAMO TSTST TST ELMO Putnam HMMT
España: OME   OMEFL   OMEEX   OMC   OMEA   OMEM   OMA   CDP
Europa: OMI   Arquimede   BMO   BalkanMO   JBMO   OPM   OMP   OMJ
Internacional: IMO   IGO   SMT   INMO   CMO   EGMO   KMO   KJMO
AHSME: Book 1   2   3   4   5   6   7   8   9

Otros materiales:

Pizzazz! Book A   B   C   D   E   Pre-Algebra   Algebra ,   REOIM , Llibre3r , Excalibur

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales para facilitar su edición. Descarga en el siguiente enlace la versión "**.docx**" de este documento:

http://www.toomates.net/biblioteca/ProblemasGeometria3.docx

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a **toomates@gmail.com**

¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.

Consulta el **catálogo de libros** completo en http://www.toomates.net

¿Problemas para descargar algún documento? Descarga toda la biblioteca Toomates Aquí MEGA

Visita mi **Canal de Youtube**: https://www.youtube.com/c/GerardRomo

Visita mi **blog:** https://toomatesbloc.blogspot.com/

Versión de este documento: **10/01/2026**

Presentación.

Este libro forma parte de mi colección de problemas de geometría:
http://www.toomates.net/biblioteca/ProblemasGeometria.pdf
http://www.toomates.net/biblioteca/ProblemasGeometria2.pdf
http://www.toomates.net/biblioteca/ProblemasGeometria3.pdf

que son el complemento práctico del libro de teoría:
http://www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica.pdf

Para aquellos que empiezan se recomienda el libro
http://www.toomates.net/biblioteca/Geometria.pdf

donde encontrarán problemas de una dificultad mucho más moderada.

En este libro aparecen también algunos problemas de **desigualdades geométricas**, pero estos se han agrupado en los Temas 10 y sucesivos del dossier específico
www.toomates.net/biblioteca/Desigualdades.pdf

Los problemas de **trigonometría** también se han agrupado en un dossier específico:
www.toomates.net/biblioteca/ProblemasTrigonometria.pdf

Todos los problemas se acompañan de sus respectivas **soluciones** totalmente desarrolladas, algunas de ellas con dos o más versiones diferentes. Siempre se indica la fuente del enunciado y de la solución. Si no se indica la fuente, son del autor de este libro, Gerard Romo, que con ellas pretende ser útil, no exhibir erudición.

Se acompaña cada problema con una indicación de su **dificultad**:

Muy fácil, fácil, Medio, Difícil y Muy difícil.

Es una referencia totalmente subjetiva. Por ejemplo, un mismo problema puede *caer* de "Muy dificil" a "Muy fácil" por el simple hecho de haber realizado uno similar anteriormente.

Las referencias numéricas que aparecen en las soluciones (por ejemplo: “6.3.2” o “11.6.4”) indican apartados del libro de teoría.

Índice.

10.1 IMO 2025 #2

Sean Ω y Γ circunferencias de centros M y N, respectivamente, tales que el radio de Ω es menor que el radio de Γ. Supongamos que las circunferencias Ω y Γ se cortan en dos puntos distintos A y B. La recta MN corta a Ω en C y a Γ en D, de forma que los puntos C, M, N y D están sobre esa recta en ese orden. Sea P el circuncentro del triángulo ACD. La recta AP corta de nuevo a Ω en $E \neq A$. La recta AP corta de nuevo a Γ en $F \neq A$. Sea H el ortocentro del triángulo PMN.
Demuestre que la recta paralela a AP que pasa por H es tangente al circuncírculo del triángulo BEF.

(El ortocentro de un triángulo es el punto de intersección de sus alturas.)

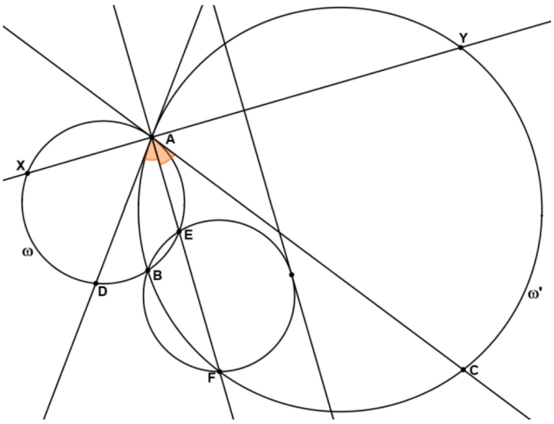
IMO 2025 #2

Problema solucionado paso a paso en vídeo

https://youtu.be/_cwBIfBK3l4
https://youtu.be/3OmHhpKiFj4

10.2 IGO 2016 Intermediate #5

Sean ω y ω' circunferencias con puntos de corte A y B. Trazamos la recta tangente a ω por A que cortará ω' en C y la recta tangente a ω' por A que cortará ω en D. Supongamos que la bisectriz interna de $\angle CAD$ corta ω y ω' en E y en F, respectivamente, y que la bisectriz externa de $\angle CAD$ corta ω y ω' en X e Y, respectivamente. Demuestra que la mediatriz del segmento XY es tangente al circuncírculo del triángulo BEF.



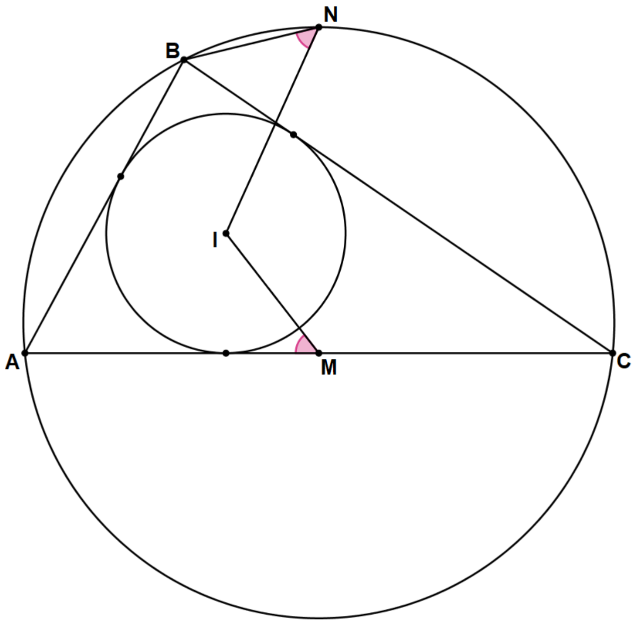
IGO 2016 Intermediate #5

Problema solucionado paso a paso en vídeo

https://youtu.be/3OmHhpKiFj4

10.3 Oral Moscow Math Olympiad 2009.

Sea ΔABC un triángulo (AB<BC) y sea I su incentro. Sea M el punto medio del lado AC y N el punto medio del arco ABC de la circunferencia circunscrita. Demuestra que $\angle IMA = \angle INB$.



Oral Moscow Math Olympiad 2009

Fuente: https://www.youtube.com/watch?v=RlieTaEGU4s (Michael Greenberg)

10.4 OIM 2025 #5.

El triángulo ABC es acutángulo con AB < AC. Sean ω la circunferencia inscrita del triángulo ABC y Γ su circunferencia circunscrita. Sea D el punto de tangencia de ω con el lado BC y sea L el punto de ω diametralmente opuesto a D. La recta AL corta al lado BC en el punto E. Sea N el punto medio del arco BC de Γ que contiene a A. La recta NL corta de nuevo a ω en el punto K. Demostrar que los puntos A,N,E,K están en una misma circunferencia.

OIM 2025 #5

Problema solucionado paso a paso en vídeo

https://youtu.be/b10ACa7cGxk

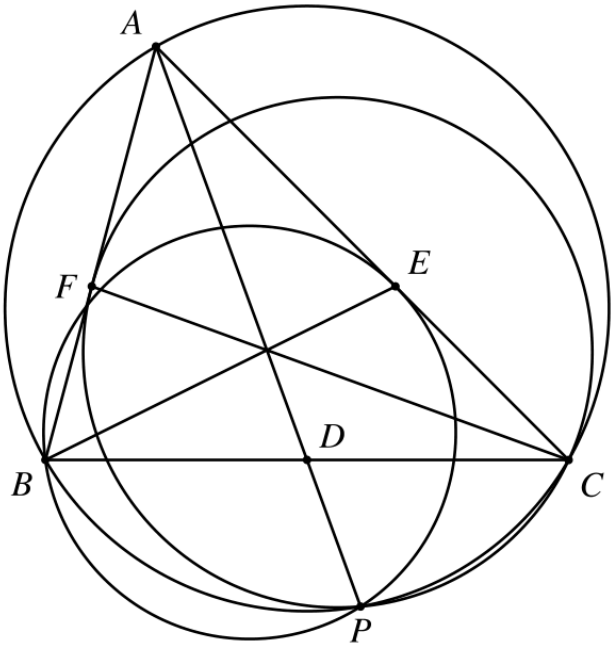
10.5 Balkan MO 2025 #2.

Sea ΔABC un triángulo agudo con ortocentro H y sea D un punto arbitrario en el interior del lado BC. Supongamos que E y F son puntos de los segmentos AB y AC respectivamente tales que los cuadriláteros ABDF y ACDE son cíclicos. Sea P el punto de corte de BE y CE. Sea L el punto de la recta HA tal que LC es tangente al circuncírculo del triángulo ΔPBC en el punto C. Sea X el punto de corte entre las rectas BH y CP. Demostrar que D, L y X son colineales.

Balkan MO 2025 #2

10.6 China High School Math League Second Round 2025 #1.

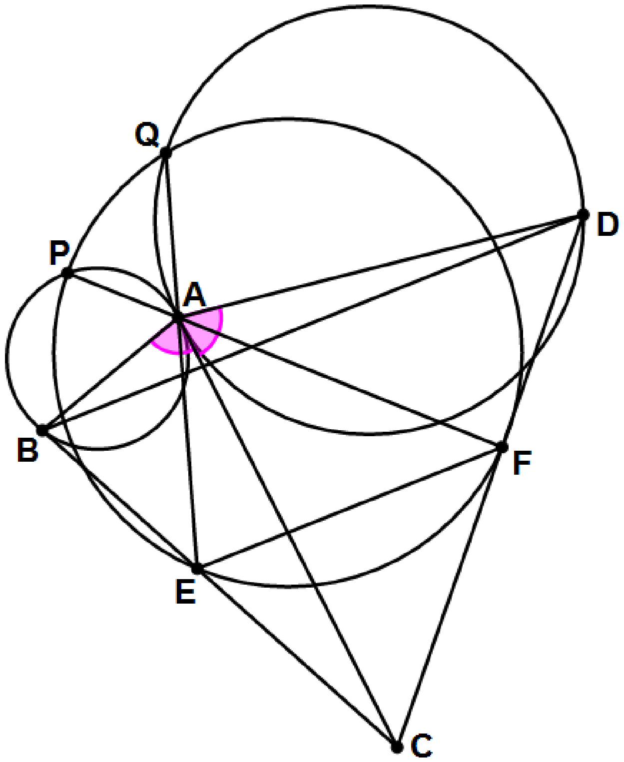
Dado un triángulo ΔABC , sea D el punto medio del lado BC y sea P≠A el segundo punto de corte entre la recta AD y la circunferencia circunscrita de ΔABC . Trazamos la circunferencia por B y P y tangente al lado AC, y sea E su punto de corte con el lado AC. Trazamos la circunferencia por C y por P y tangente al lado AB, y sea F su punto de corte con el lado AB. Demuestra que las rectas AD, BE y CF son concurrentes.



China National High School Math League Second Round 2025 #1

10.7 China High School Math League Second Round 2024 #1.

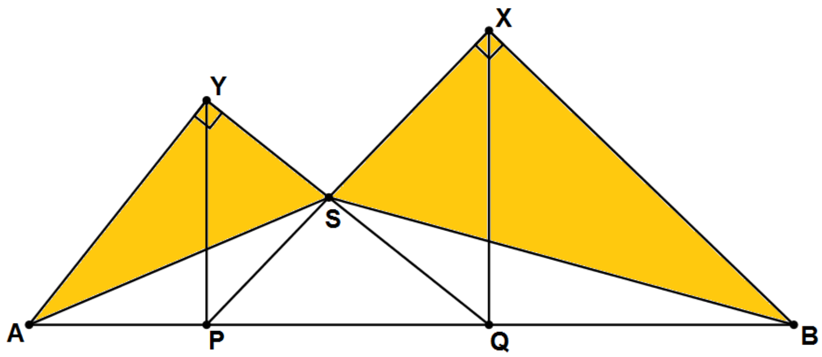
Dado un cuadrilátero convexo ABCD, en el que AC es la bisectriz de $\angle BAD$, sean E y F puntos en los lados BC y CD, respectivamente, tales que $EF \parallel BD$. Sean P y Q puntos pertenecientes a las extensiones de FA y EA tales que las circunferencias (ABP) y (ADQ) son ambas tangentes a AC. Demuestra que B, P, Q y D son cocíclicos.



China High School Math League 2024 Round 2 #1

10.8 IGO 2025 Intermediate Level #1.

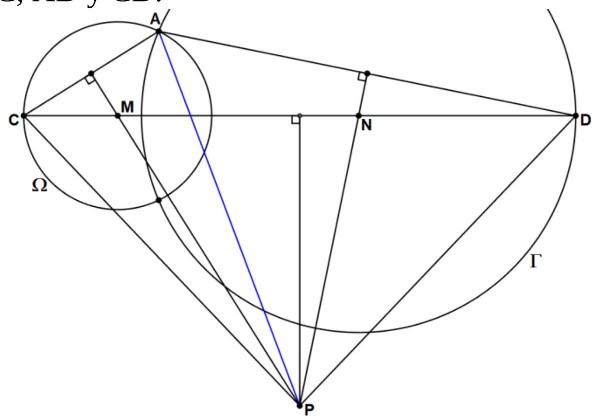
Dado un trapezoide rectángulo PYXQ ($PY \perp PQ \perp QX$), sean A y B puntos pertenecientes a la recta PQ tales que $\angle AYQ = \angle BXP = 90^{o}$. Demuestra que $\Delta AYS \approx \Delta BXS$, donde S es la intersección de las diagonales de dicho trapezoide.



10.1

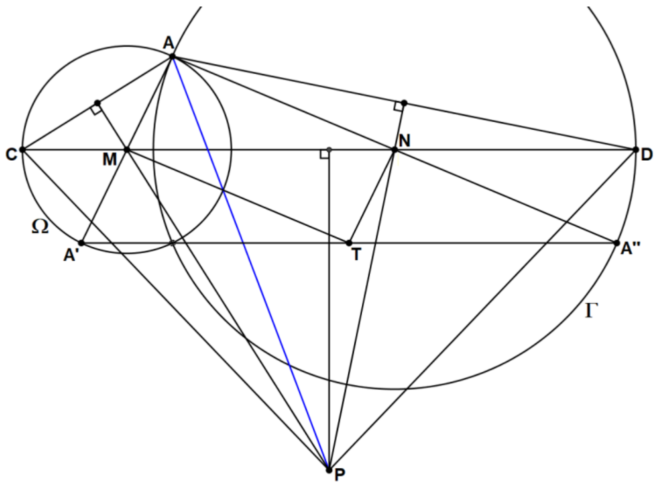
Primera versión.
Vamos a demostrar que la recta tangente al circuncírculo del triángulo ΔBEF que pasa por H es paralela a AP. Por unicidad de los elementos implicados, los dos enunciados son equivalentes.

Por ser P el centro de la circunferencia circunscrita a ΔCAD, será el punto de corte de las mediatrices de AC, AD y CD.



En primer lugar prolongamos trazamos la recta AM hasta cortar de nuevo Ω en A', de forma que AA' es un diámetro de Ω. De la misma forma, prolongamos la recta AN hasta cortar de nuevo Γ en el punto A", de forma que AA" es un diámetro de Γ.
Puesto que M es el punto medio de AA' y N es el punto medio de AA", aplicando el Teorema del Conector de Puntos Medios del triángulo tendremos que la recta A'A" es paralela a MN. Sea T el punto medio del segmento AA'. Sabemos también que AA'=2MN, luego A'T=TA".

Por otro lado, la recta paralela a AD por M cortará A'A" en su punto medio T, y la recta paralela a AC por N cortará A'A" también en T.



Así pues, ANTM y A’MNT son paralelogramos.

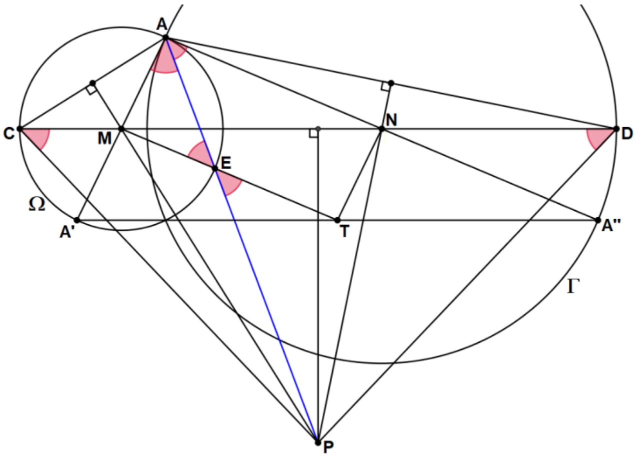
Sea $E = AP \cap MT$. Veamos que E pertenece a la circunferencia Ω.

$$\left.\begin{array}{l} AP = PD \\ AN = ND \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ANP \equiv \Delta DNP \Rightarrow \angle PAN = \angle PDN$$

Por otro lado, $PD = PC \Rightarrow \angle PDN = \angle PCN$

$$\left.\begin{array}{l} CP = AD \\ CM = MA \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta PCM \equiv \Delta PAM \Rightarrow \angle PCN = \angle PCM = \angle MAP$$

Por otro lado, $MT \,//\, AD \Rightarrow \angle PAN = \angle PET = \angle MEA$



Observación: Una forma elegante de demostrar que $\angle MAE = \angle EAN$ es la siguiente: El triángulo ΔAND es isósceles, por lo tanto su altura PN es bisectriz del ángulo $\angle AND$. Luego ND es bisectriz del ángulo suplementario de $\angle ANC$, y por tanto es su bisectriz exterior. De la misma forma demostramos que MP es la bisectriz exterior del ángulo $\angle AMN$. Así pues, el punto P es el A-excentro del triángulo ΔMAN, y por tanto AP es la bisectriz del ángulo $\angle MAD$.

Así pues, $\angle MEA = \angle MAE$, y por tanto ΔMAE es isósceles, luego $ME = MA$ que es el radio de la circunferencia Ω, es decir, E pertenece a dicha circunferencia.

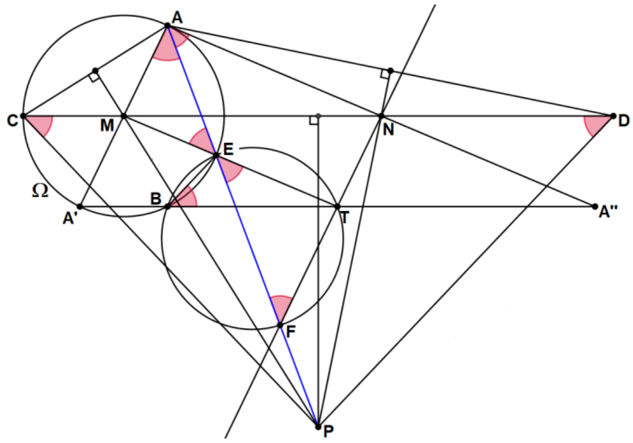
Definimos el punto $B = \Omega \cap A'A''$. Más adelante demostraremos que este punto es el punto B definido en el enunciado. Definimos además $F = NT \cap AP$.

$NT \,//\, AA' \Rightarrow \angle NFE = \angle MAE$

$B = \Omega \cap A'A'' \in \Omega \Rightarrow BA'AE$ es un cuadrilátero cíclico. Luego

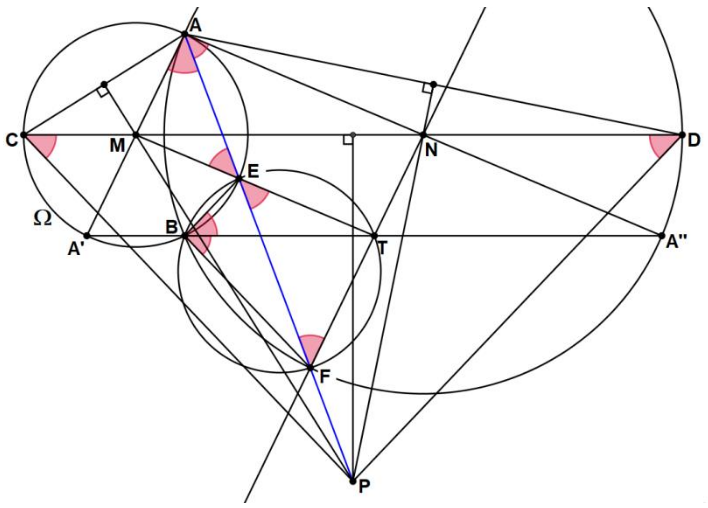
$\angle A''BE = \angle A'AE = \angle MAE$

Luego $\angle TFE = \angle NFE = \angle MEA = \angle MAE = \angle A'AE = \angle EBT$, y por tanto el cuadrilátero TEBF es cíclico.

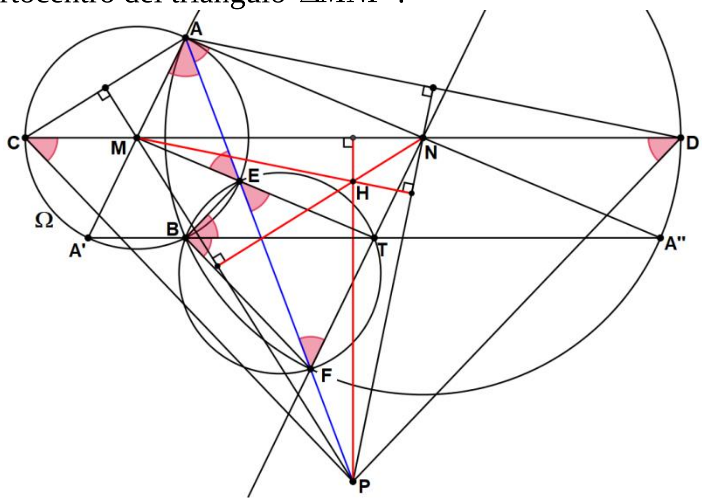


Observamos que $F \in \Gamma$, pues por ser BETF cíclico, $\angle NFA = \angle TFE = \angle FET = \angle FAE$, luego ΔANF es isósceles, y por tanto $FN = AN$ que es el radio de Γ, y por tanto $F \in \Gamma$.

También observamos que $B \in \Gamma$, pues por ser AEBA' cíclico,
$\angle A''BF = \angle FET = \angle FET = \angle FAA''$, luego AA"FB es cíclico, es decir,
$B \in (A''FA) = \Gamma$, pues acabamos de ver que $F \in \Gamma$.
Así pues, B es el segundo punto de corte entre Ω y Γ, y por tanto coincide con el B definido en el enunciado.



Sea ahora H el ortocentro del triángulo ΔMNF .



Vamos a demostrar que H es el incentro del triángulo ΔMNT .

$$\left.\begin{array}{l} HM \perp NP \\ AD \perp NP \end{array}\right\} \Rightarrow MH \,//\, AD$$

Puesto que, además, $AN \,//\, MT$, se deduce que $\angle TMH = \angle NAD$
$AN = ND$ luego ΔADN es isósceles, y por tanto $\angle NAD = \angle ADN$
pero puesto que $MH \,//\, AD$ tenemos $\angle ADN = \angle ADM = \angle DMH = \angle NMH$.
Con todo esto hemos demostrado que $\angle TMH = \angle HMN$.

$$\left.\begin{array}{l} HN \perp MP \\ AC \perp MP \end{array}\right\} \Rightarrow NH \,//\, AC \Rightarrow \angle MNH = \angle ACN = \angle CAM$$

Sabemos que A'MNT es un paralelogramo, luego $AA' // NT$. Por otro lado, sabemos que $CA // NH$, luego $\angle CAM = \angle CAA' = \angle HNT$.
Con todo esto hemos demostrado que $\angle MNH = \angle HNT$.

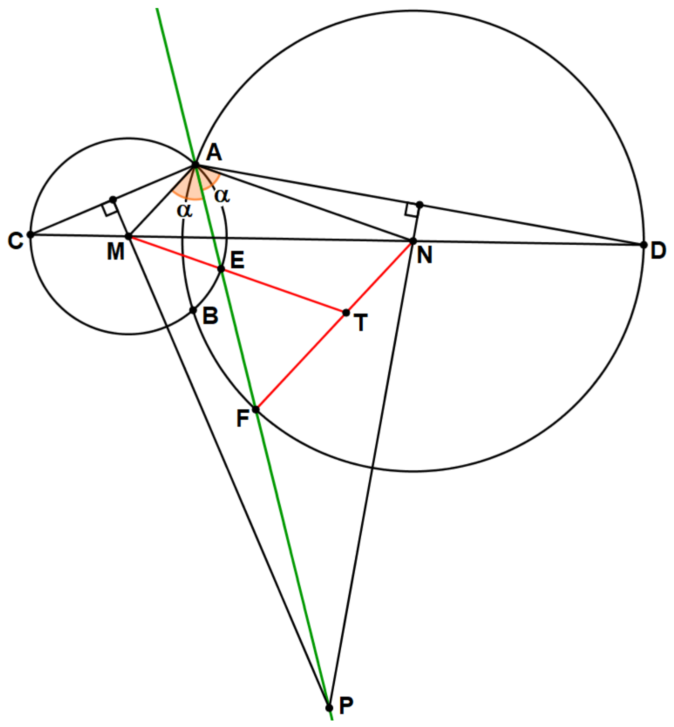
De $\angle TMH = \angle HMN$ y $\angle MNH = \angle HNT$ se deduce que H es el incentro del triángulo ΔMNT , y por tanto HT es bisectriz del ángulo $\angle MTN$, es decir $\angle MTH = \angle HTN$.

Por último, puesto que TFBE es un cuadrilátero cíclico, $\angle ETN = \angle EBF = 2\angle FET$.
De lo anterior se deduce que $\angle MTH = \angle HTN = \angle FET$.
Por lo tanto $\angle ETH = \angle FET \Rightarrow FE // TH$ y $\angle ETH = \angle EFT$, es decir, la recta HT es la recta tangente a (EFT) por T, y puesto que (EFT)=(EBF), hemos demostrado que la recta tangente a (EBF) por H es paralela a AP.

Segunda versión.

Nota: esta segunda versión se basa en el razonamiento de la segunda solución del problema 10.2

En primer lugar vemos que $\alpha = \angle NAP = \angle MAP$. En efecto, puesto que P es el centro de la circunferencia circunscrita de ΔCAD , será el punto de corte de las mediatrices de los segmentos CA, AD y CD. Puesto que ΔCAM es isósceles, la mediatriz de CA es la bisectriz interior del ángulo $\angle CMA$, que es la bisectriz exterior del ángulo ΔAMN .
Con el mismo razonamiento demostramos que la mediatriz del segmento AD es la bisectriz exterior del ángulo $\angle ANM$, luego su punto de corte P será el A-excentro del triángulo ΔAMN , por lo que AP será bisectriz interior del ángulo $\angle MAN$.
Observamos que $NF // AM$, pues ΔANF es un triángulo isósceles, y por tanto $\angle AFN = \angle FAN = \alpha$, luego $\angle NFA = \angle MAF \Rightarrow AM // FN$
Con argumentos similares demostramos que $ME // AN$.
Sea T el punto de corte entre ME y NF.



Veamos ahora que ETFB es un cuadrilátero cíclico.
Está claro que AMTN es un paralelogramo, luego $\angle ETN = \angle MAN = 2\alpha$.
Por otro lado,

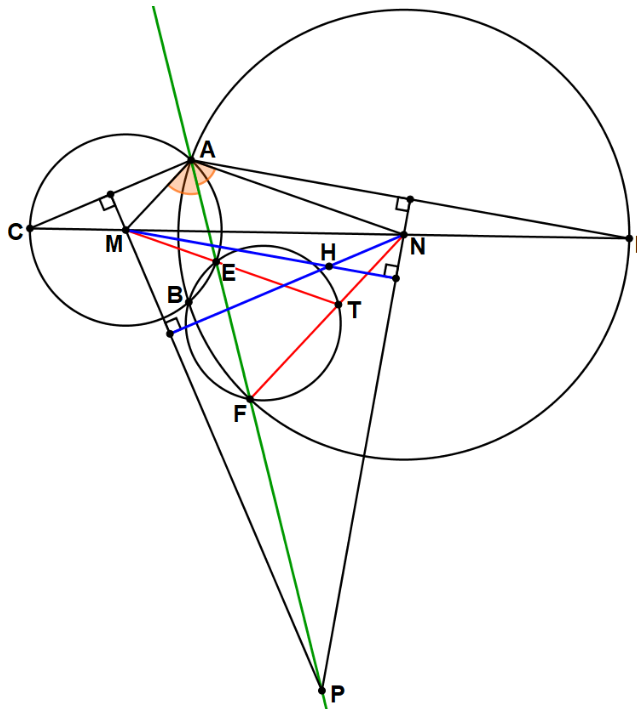
$$\angle EBA = \angle ACE = \frac{1}{2}\angle AME = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha$$

$$\angle ABF = 180^\circ - \angle ADF = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle ANF = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - 2\alpha) = 90^\circ + \alpha$$

$$\angle FBE = \angle FBA - \angle EBA = 90^\circ + \alpha - (90^\circ - \alpha) = 2\alpha = \angle ETM$$

Luego ETFB es cíclico.

Sea H el ortocentro de ΔNMP.



$$\left.\begin{array}{l} MH \perp PN \\ AD \perp PN \end{array}\right\} \Rightarrow MH \,//\, AD, \text{ luego } \angle NMH = \angle NDA = \angle NAD = \angle TMH$$

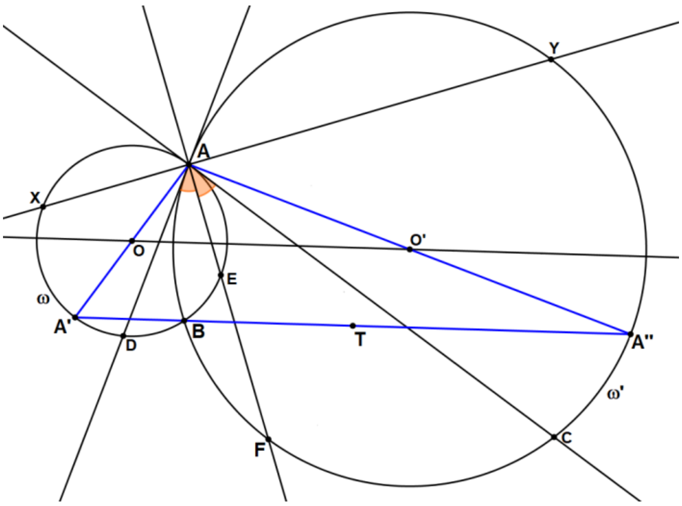
$$\left.\begin{array}{l} NH \perp PM \\ AC \perp PM \end{array}\right\} \Rightarrow NH \,//\, AC, \text{ luego } \angle HNM = \angle NCA = \angle CAM = \angle HNT$$

De lo anterior se deduce que H es el incentro del triángulo ΔMNT, pues es el punto de corte de dos de sus bisectrices. Luego HT es bisectriz del ángulo $\angle MTN$.
Puesto que sabemos que $\angle ETN = 2\alpha$, se deduce que
$\angle MTH = \angle HTN = \alpha = \angle FET \Rightarrow HT \,//\, EF$
y hemos demostramos que HT es tangente a (BEF), tal y como queríamos ver.

10.2

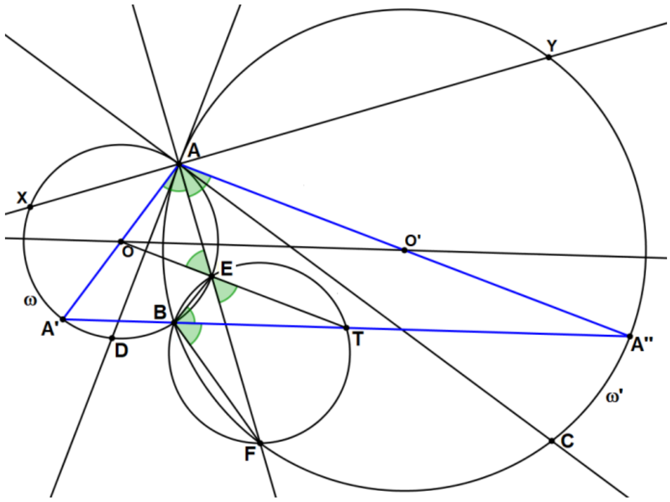
Primera versión.

Sean O y O' los centros respectivos de las circunferencias ω y ω'.
Trazamos la recta OA y sea A'≠A su segundo punto de corte con ω.
Trazamos la recta O’A y sea A"≠A su segundo punto de corte con ω'.
Trazamos la recta A'A".
Aplicando el Teorema del conector de puntos medios, puesto que O es el punto medio de AA' y O' es el punto medio de AA", la recta A'A" será paralela a OO' y A'A"=2 OO'.
Sea T el punto medio del segmento A'A".

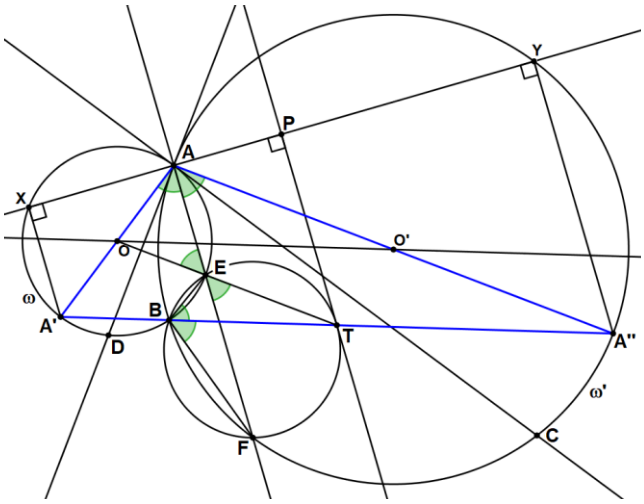


Sabemos que $XY \perp AF$, $AD \perp AO'$, $AC \perp AO$ y $\angle DAE = \angle EAC$. De todo esto se deduce que $\angle A'AF = \angle FAA''$.
El punto B pertenece a la recta A'A", pues $B \in \omega \Rightarrow \angle A'BA = 90°$, $B \in \omega' \Rightarrow \angle ABA'' = 90°$, luego $\angle A'BA = \angle ABA'' = 90°$ y por tanto los puntos A', B y A" están alineados.
Sea $E = OT \cap AE$. Por el teorema del conector de puntos medios, sabemos que $OT \,//\, AA''$. Luego $\angle OEA = \angle FET = \angle EAO' = \angle OAE$, y por tanto el triángulo ΔOAE es isósceles, luego $OA = OE$, de donde se deduce que $E \in \omega$. Con esto garantizamos que el punto E así definido corresponde con el punto E tal y como está definido en el enunciado.

$\angle EBT = \angle A'AE$ por ser AEBA' un cuadrilátero cíclico.
$\angle TBF = \angle A''BF = \angle A''AF = \angle OEA = \angle FET$
Así pues, $\angle FET = \angle FBT$ y por lo tanto el cuadrilátero ETFB es cíclico.

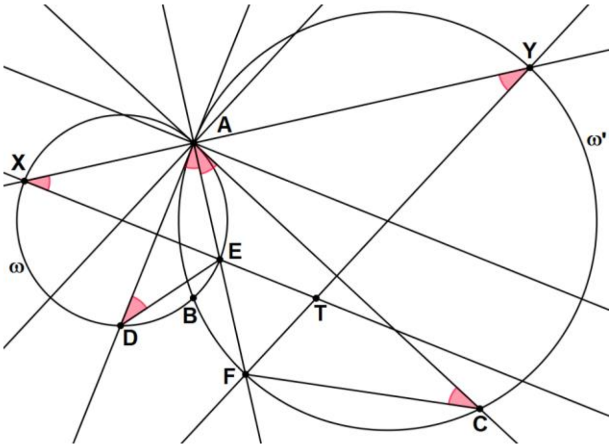


Finalmente trazamos la recta tangente a $(\Delta ETFB)$ por T. Sea P su punto de corte con XT. Está claro que $\angle ETP = \angle EFT = \angle FET$, luego $TP \mathbin{//} AE$. Pero $XY \perp AE$, luego $XY \perp PT$.



Finalmente, sabemos que $A'XA = A''YA = 90^{o}$ por Teorema de Tales, luego en el cuadrilátero XYA"A' tenemos una transversal TP con $TP \mathbin{//} A'X \mathbin{//} A''Y$ siendo T el punto medio del lado A'A", luego P será el punto medio de XY.
Con todo esto hemos demostrado que la tangente a la circunferencia circunscrita a ΔBEF es la mediatriz del segmento XY, que es equivalente al problema planteado en el enunciado.

Segunda versión.
Sea T el punto de corte entre XE y YF.
Sea $\alpha = \angle DAE = \angle EAC$. Por ser AC tangente a ω, $\angle ADE = \angle AXE = \angle EAC = \alpha$.
Por ser AD tangente a ω', $\angle ACF = \angle AYF = \angle DAE = \alpha$.
De lo anterior se deduce que $\angle TXY = \angle TYX$ luego ΔTXY es un triángulo isósceles, $TX = TY$, y la mediatriz del segmento XY pasa por T.
Las bisectrices internas y externas de un ángulo son perpendiculares, luego $XY \perp AF$.
Luego AF y la mediatriz del segmento XY son perpendiculares comunes a XY, luego son paralelas entre ellas.



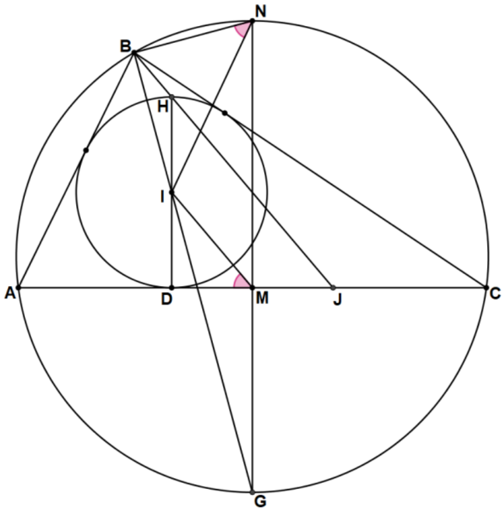
$\angle EBA = \angle EXA = \alpha$.
$\angle FBA = 180° - \angle FYA = 180° - \alpha$
Luego $\angle FBE = \angle FBA - \angle EBA = 180° - 2\alpha$
$\angle XAE = 90°$, y por tanto $\angle FET = \angle XEA = 90° - \alpha$.
Con el mismo razonamiento, $\angle FAY = 90°$, $\angle EFT = \angle AFY = 90° - \alpha$.
Y por tanto $\angle FTE = 180° - \angle TFE - \angle TEF = 180° - 90° + \alpha - 90° + \alpha = 2\alpha$
Así pues, los ángulos $\angle FBE$ y $\angle FTE$ son suplementarios y por tanto ETFB es cíclico.

Observamos, además, que $\angle EFT = \angle FET$, luego ΔFET es isósceles y por tanto $EF = FT$.
Con todo esto hemos demostrado que la mediatriz del segmento XY pasa por T, que es el punto medio del arco EF en la circunferencia (ΔEFB), y es paralela a EF, luego es tangente a la circunferencia circunscrita del triángulo ΔEFB, tal y como queríamos ver.

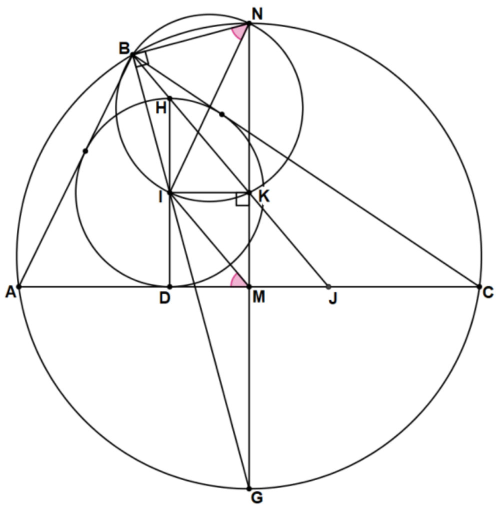
Fuente: Soluciones oficiales. Compendium IGO pág. 74

10.3

Trazamos las rectas MN y BI, que sabemos que se cortarán en G, el punto medio del arco AC.
Sea D el punto de contacto entre el incírculo y el lado AC, y por este punto trazamos el diámetro DH de dicho incírculo. Trazamos la recta BH que cortará el lado AC en el punto J.



Sabemos que, aplicando el "Teorema del diámetro del incírculo" (ver problema 5.43), que DM=MJ y que IM//HJ.
Sea K el punto de corte entre BJ y MN.
Aplicando el Teorema del Conector de Puntos medios, puesto que DH//MN y DM=MJ, entonces K es el punto medio de HJ.
Por lo tanto IK//DM, por lo que IKMD es un rectángulo, y por tanto $\angle IKN$ es un ángulo recto.
Sabemos que el ángulo $\angle IBN$ es recto, luego el cuadrilátero IKNB es cíclico.

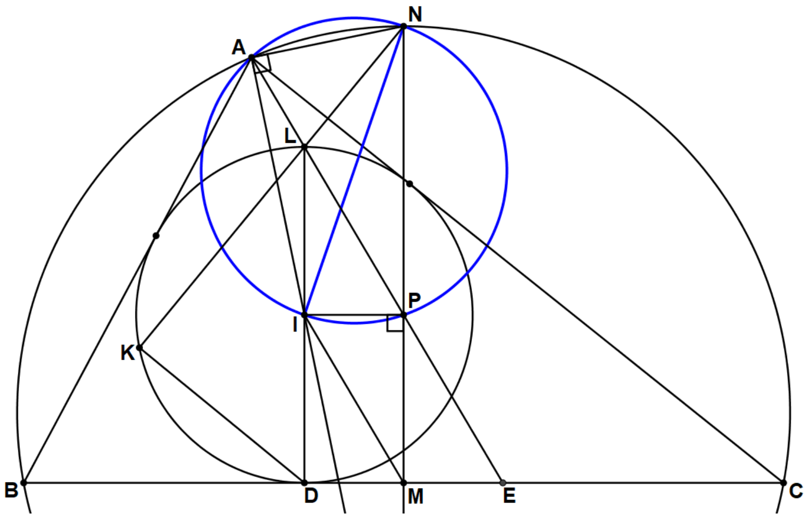


Luego $\angle BNI = \angle BKI$ y puesto que IK//DJ, $\angle BKI = \angle IMD$, tal y como queríamos ver.

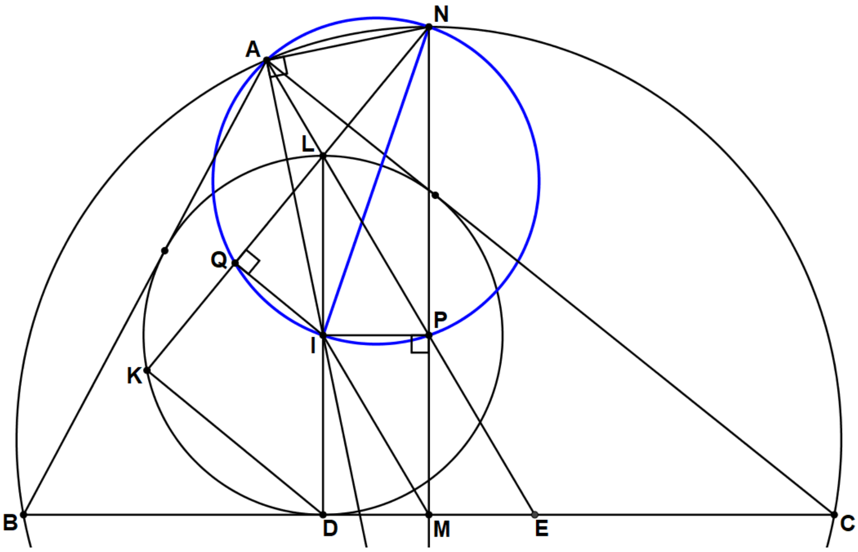
Fuente de la solución: https://www.youtube.com/watch?v=RlieTaEGU4s (Michael Greenberg)

10.4

Construimos el cuadrilátero cíclico ANPI exactamente igual como lo hemos hecho en el problema anterior:
Sea M el punto medio del lado BC.
Aplicando el Teorema del diámetro del incentro (ver problema 5.43) sabemos que DM=ME y IM//AE.
Sea P el punto de corte entre AE y MN. Sabemos que LP=PE, luego IP//DE, por lo que IPMD es un rectángulo, luego $\angle IPM$ es recto, y puesto que sabemos que $\angle IAN$ también es recto, el cuadrilátero ANPI es cíclico, y su circunferencia circunscrita es el segmento IN.



Sea Q el punto medio del segmento KL.
Aplicando el Teorema del Conector de Puntos Medios, puesto que I es el punto medio de LD, QI//KD, y puesto que $\angle LKD$ es recto, pues K pertenece a la circunferencia de diámetro LD, se deduce que $\angle LQI$ es recto, y por tanto Q pertenece también a la circunferencia circunscrita a ANPI.



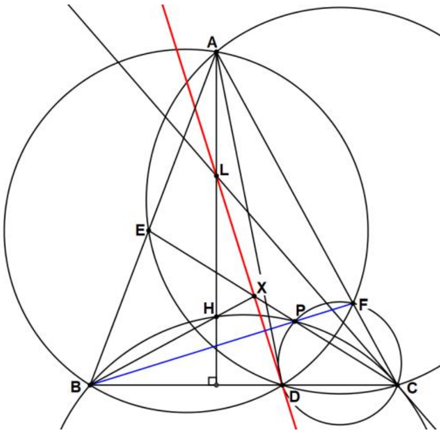
Finalmente, aplicando "potencia de un punto",

$$AL \cdot LE = AL \cdot 2LP = 2AL \cdot LP = 2NL \cdot LQ = NL \cdot 2LQ = NL \cdot LK$$

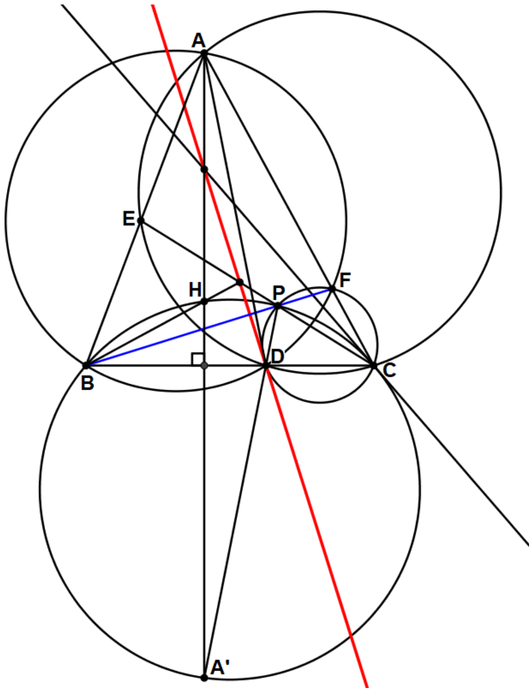
y por tanto AENK es cíclico.

10.5

En primer lugar observamos que $\angle PCD = \angle ECD = \angle EAD$
y $\angle PBD = \angle FBD = \angle FAD$
y por tanto $\angle BPC = 180° - \angle PBD - \angle PCD = 180° - \angle BAC = 180° - \angle BHC$
y por tanto BHPC es ciclico.
Por otro lado, $\angle PFD = \angle BFD = \angle BAD = \angle EAD = \angle ECD = \angle PCD$, luego PDCD es cíclico.



Por lo tanto $\angle DPC = \angle DFC = \angle ABC$
Sea A' el punto de corte entre la altura AH y la circunferencia $(BHPC)$.



Se cumple $\angle A'PC = \angle A'HC = \angle ABC = \angle DPC$

Luego los puntos A', D y P están alineados.
Este problema se resuelve finalmente como aplicación del Teorema de Pascal (GA/12.7.1) aplicado al hexágono HCPCAB,con el que queda demostrado que los puntos $L = CC \cap HA$, $D = BC \cap PA'$ y $X = PC \cap BH$ están alineados.

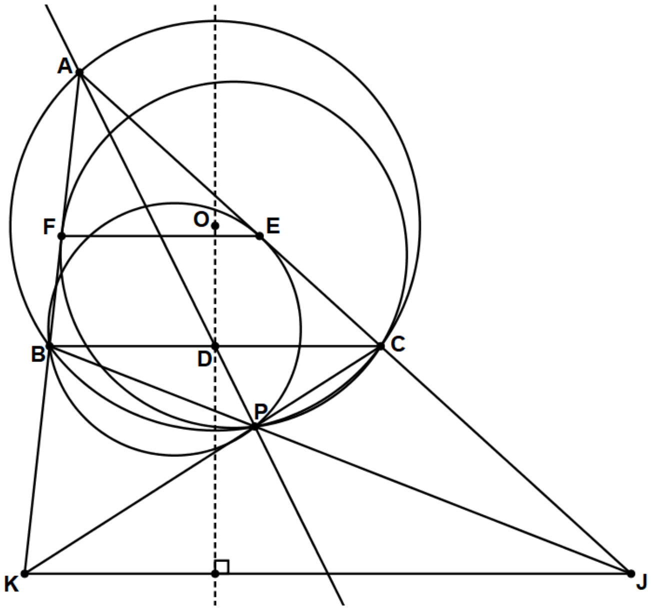
Fuente de esta solución: Soluciones oficiales (BalkanMO pág.161)

10.6

Completamos el cuadrilátero cíclico ACPB con los puntos $J = AC \cap BP$ y $K = AB \cap CP$.

Por el Teorema de Brocard (GA/13.5.11) sabemos que el triángulo ΔKDJ es autopolar, y que el circuncentro O es su ortocentro, luego

$$OD \perp JK \Rightarrow BC // KJ \Rightarrow \frac{JA}{KA} = \frac{CA}{BA} = \frac{JC}{KB}$$



Por otro lado, por PoP,

$$JE^2 = JP \cdot JB = JC \cdot JA$$
$$KF^2 = KP \cdot KB = KB \cdot KA$$

Y por tanto

$$\left(\frac{JE}{KF}\right)^2 = \frac{JE^2}{KF^2} = \frac{JC \cdot JA}{KB \cdot KA} = \frac{JC \cdot CA}{KB \cdot BA} = \frac{JA^2}{KA^2} = \left(\frac{JA}{KA}\right)^2 \Rightarrow \frac{JE}{KF} = \frac{JA}{KA} \Rightarrow EF // KJ$$

y puesto que $BC // KJ$ concluimos que $EF // BC \Rightarrow \frac{CE}{FB} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow \frac{AF}{FB} = \frac{AE}{CE}$

y finalmente aplicamos el Teorema de Ceva (GA/11.2.1), teniendo en cuenta que BD=DC,

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{AE}{CE} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

y por tanto las tres rectas son concurrentes.

10.7

La clave para solucionar este problema es demostrar que las rectas BP y DQ se cortan en un punto de AC.

En primer lugar, sea L el punto de corte entre BP y AC.

Puesto que BD//EF, los triángulos ΔBDC y ΔEFC están en posición de Tales y por tanto son semejantes. Luego $CE/CB = CF/CD$.

Sea K el punto de AC tal que $BA // EK$. De nuevo, $\Delta CBA \approx \Delta CEK$ y por tanto

$$\frac{CK}{CA} = \frac{CE}{CB} = \frac{CF}{CD}$$

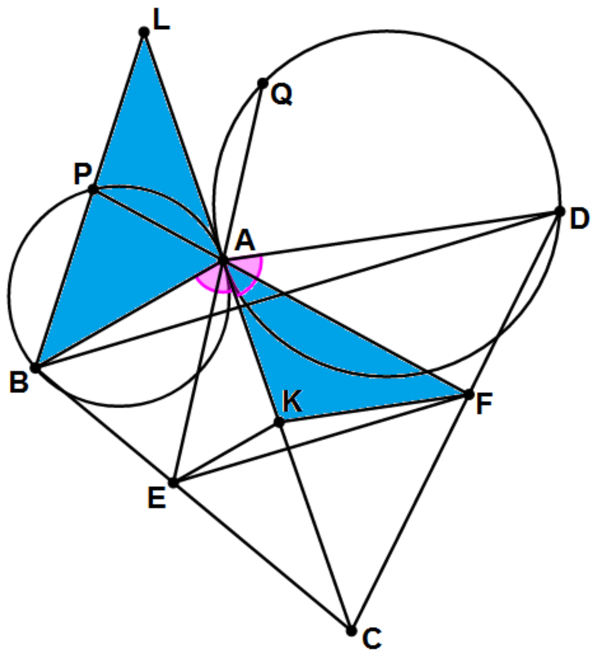
De $CK/CA = CF/CD$ se deduce que $\Delta CDA \approx \Delta CFK$, es decir, $AD // KF$.

Por ser AL tangente a (ABP) tenemos $\angle PAL = \angle ABL$

Luego $\angle ABL = \angle PAL = \angle KAF$

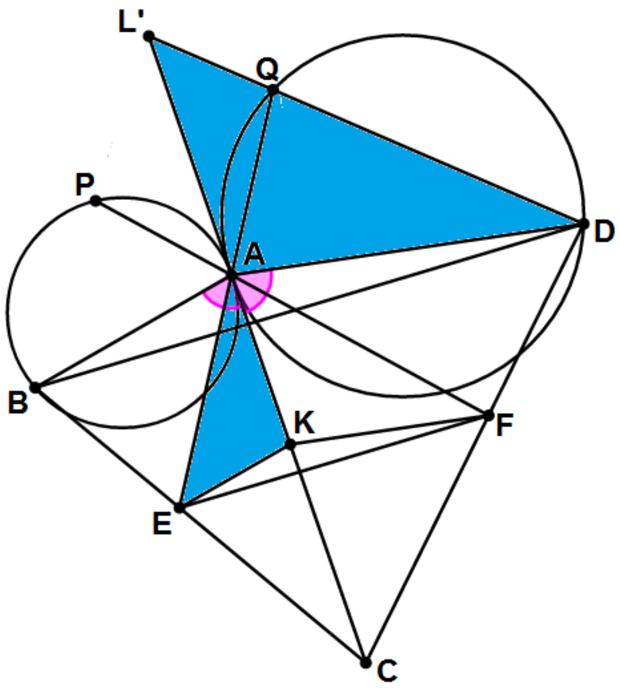
Por otro lado, $\angle BAL = 180^o - \angle BAC = 180^o - \angle CAD = \angle AKF$

Luego $\Delta BLA \approx \Delta AFK$



Y por tanto $\dfrac{BL}{AF} = \dfrac{AB}{AK} = \dfrac{AL}{KF} \Rightarrow AL = \dfrac{KF \cdot AB}{AK}$

Ahora hacemos todo este desarrollo tomando el punto $L' = PQ \cap AC$, y con argumentos análogos llegamos a $\Delta DL'A \approx \Delta AEK$ y por tanto $\dfrac{DL'}{AE} = \dfrac{AD}{AK} = \dfrac{AL}{KE} \Rightarrow AL' = \dfrac{KE \cdot AD}{AK}$

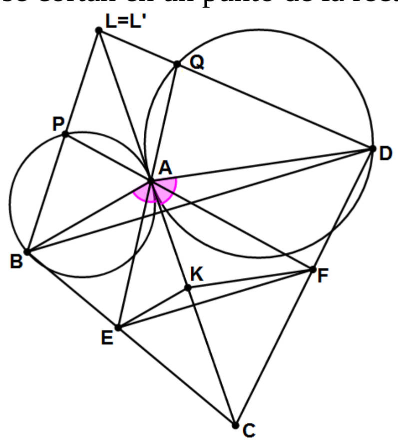


De $\Delta CBA \approx \Delta CEK$ y $\Delta CDA \approx \Delta CFK$ se deduce que

$$\frac{KE}{AB} = \frac{KC}{AC} = \frac{KF}{AD} \Rightarrow KF \cdot AB = KE \cdot AD$$

Por lo tanto $AL = \dfrac{KF \cdot AB}{AK} = \dfrac{KE \cdot AD}{AK} = AL' \Rightarrow AL = AL' \Rightarrow L = L'$

Es decir, las rectas BP y DQ se cortan en un punto de la recta AC.



Luego por "potencia de un punto" aplicado a una recta tangente a circunferencias,

$$\left.\begin{array}{l} AL^2 = LP \cdot LB \\ AL^2 = LQ \cdot LD \end{array}\right\} \Rightarrow LP \cdot LB = LQ \cdot LD$$

Y por tanto los puntos P, Q, D y B son cocíclicos, aplicando 10.2.2.

10.8

Primera versión.

En el trapezoide rectángulo PYXQ trazamos la paralela a PQ por S, que cortará PY en C y QX en D, y trazamos la paralela a PY por S que cortará PQ en N.

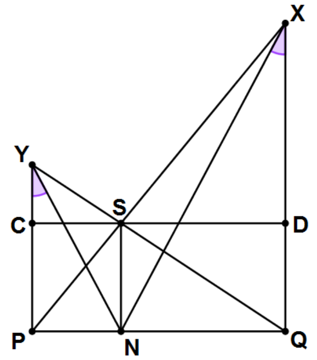
$$PY \,//\, QX \Rightarrow \begin{cases} \angle PYS = \angle SQX \\ \angle YPS = \angle SXQ \end{cases} \Rightarrow \Delta PYS \approx \Delta QXS \Rightarrow \frac{QX}{PY} = \frac{QS}{SY} = \frac{XS}{SP}$$

Por otro lado,

$$\left.\begin{matrix} PQ \,//\, CS \\ NS \,//\, PY \end{matrix}\right\} \Rightarrow \angle NSQ = \angle CYS \Rightarrow \Delta NSQ \approx \Delta CYS \Rightarrow \frac{SQ}{NQ} = \frac{SY}{CS} \Rightarrow \frac{SQ}{SY} = \frac{NQ}{CS}$$

Puesto que CS=PN llegamos a

$$\frac{QX}{PY} = \frac{QS}{SY} = \frac{NQ}{PN} \Rightarrow \frac{QX}{PY} = \frac{NQ}{PN} \Rightarrow \Delta XQN \approx \Delta YPN \Rightarrow \angle PYN = \angle NXQ$$



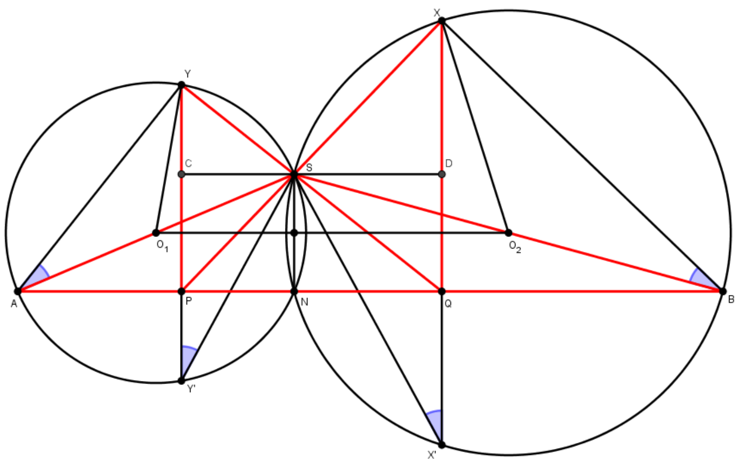
En el esquema del enunciado, trazamos la circunferencia ω_1 de diámetro AS, cuyo centro O_1 es el punto medio del segmento AS, y trazamos la circunferencia ω_2 de diámetro SB, cuyo centro O_2 es el punto medio del segmento SB.
El punto Y pertenece a ω_1 y el punto X pertenece a ω_2 por teorema de Tales.
Prolongamos el segmento YP hasta cortar ω_1 de nuevo en Y' y prolongamos el segmento XQ hasta cortar ω_2 de nuevo en X'.

Puesto que O_1O_2 es la mediatriz del segmento SN, está claro que YP=CY' y XQ=DX', por otro lado, CS=PN y SQ=NQ, por lo que

$\Delta YPN \equiv \Delta Y'CS \Rightarrow \angle CY'S = \angle PYN$

$\Delta QXN \equiv \Delta DX'S \Rightarrow \angle DX'S = \angle QXN$

Con lo que $\angle YY'S = \angle XX'S$



Otra forma de verlo es observar que los arcos YS y Y'N son iguales por simetría.
Así pues,

$$\angle YY'S = \angle YAS = 1/2 \angle YO_1S$$

$$\angle XX'S = \angle XBS = 1/2 \angle XO_2S$$

Luego $\angle YY'S = \angle XX'S \Rightarrow \angle YAS = \angle XBS$ y $\angle YO_1S = \angle XO_2S$

Por ser ΔYO_1S y ΔXO_2S triángulos isósceles, de $\angle YO_1S = \angle XO_2S$ se deduce que

$$\angle O_1YS = \angle O_1SY = \angle O_2XS = \angle O_2SX \Rightarrow$$

$$\angle ASY = \angle O_1SY = \angle O_2XS = \angle BXS$$

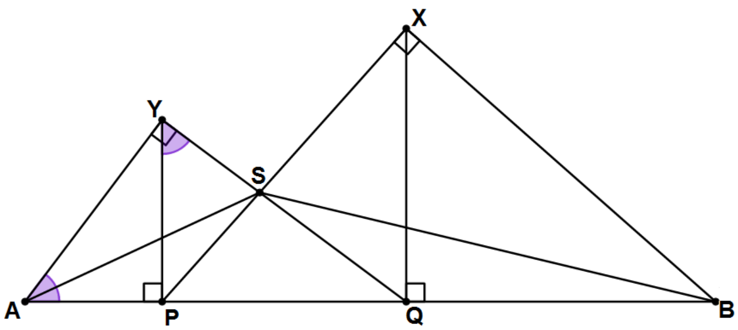
Así pues, por el criterio AA de semejanza de triángulos, $\Delta AYS \approx \Delta BXS$.

Segunda versión (Solución oficial).

Para ver que $\Delta AYS \approx \Delta BXS$, puesto que ambos triángulos son rectángulos, es suficiente ver que $\frac{AY}{BX} = \frac{YS}{XS}$

En primer lugar vemos que $\angle YAP = \angle QYP \Rightarrow \Delta APY \approx \Delta YPQ \Rightarrow \frac{AY}{YQ} = \frac{PY}{PQ}$

Y de la misma forma $\angle XBQ = \angle QXS \Rightarrow \Delta BQX \approx \Delta XQP \Rightarrow \frac{PX}{BX} = \frac{PQ}{QX}$



Luego

$$\frac{AY}{BX} = \frac{AY}{YQ} \cdot \frac{PX}{BX} \cdot \frac{QY}{PX} = \frac{PY}{PQ} \cdot \frac{PQ}{QX} \cdot \frac{QY}{PX} = \frac{PY}{QX} \cdot \frac{QY}{PX} = (*)$$

Por otro lado, $\Delta PSY \approx \Delta XSQ \Rightarrow \frac{PY}{QX} = \frac{PS}{SX} = \frac{SY}{SQ}$

y por tanto

$$(*) = \frac{YS}{SQ} \cdot \frac{QY}{PX} = \frac{YS}{PX} \cdot \frac{QY}{SQ} = \frac{YS}{PX}\left(\frac{QS + YS}{SQ}\right) = \frac{YS}{PX}\left(1 + \frac{YS}{SQ}\right) =$$

$$= \frac{YS}{PX}\left(1 + \frac{SP}{SX}\right) = \frac{YS}{PX}\left(\frac{SX + SP}{SX}\right) = \frac{YS}{PX}\left(\frac{PX}{SX}\right) = \frac{YS}{SX}$$

tal y como queríamos ver.