PROBLEMAS DE GEOMETRÍA 2

Gerard Romo Garrido

Toomates Coolección vol. 3

Toomates Coolección

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "**licencias digitales**" con las que las editoriales pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo libro, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.
Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de licencias digitales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía**.
El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las editoriales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de unos libros de texto que actualmente son muy mediocres, y no mediante retorcidas técnicas comerciales.
 Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas.

¡Libérate de la tiranía y mediocridad de las editoriales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos

Toomates Coolección **Problem Solving** (en español):
Geometría Axiomática , Problemas de Geometría 1 , Problemas de Geometría 2
Introducción a la Geometría , Álgebra , Teoría de números , Combinatoria , Probabilidad
Trigonometría , Desigualdades , Números complejos , Funciones

Toomates Coolección **Llibres de Text** (en catalán):
Nombres (Preàlgebra) , Àlgebra , Proporcionalitat , Mesures geomètriques , Geometria analítica
Combinatòria i Probabilitat , Estadística , Trigonometria , Funcions , Nombres Complexos ,
Àlgebra Lineal , Geometria Lineal , Càlcul Infinitesimal , Programació Lineal , Mates amb Excel

Toomates Coolección **Compendiums**:
PAU España: Cataluña TEC Cataluña CCSS Valencia Galicia País Vasco Baleares
PAU Internacional: Portugal A Portugal B Italia UK (A Level) IB Francia (BAC)
Canguro: ESP CAT FR USA UK AUS
USA: Mathcounts AMC 8 10 12 AIME USAJMO USAMO TSTST TST ELMO Putnam
España: OME OMEFL OMEC OMEA OMEM CDP
Internacional: IMO OMI IGO SMT INMO CMO REOIM Arquimede HMMT BMO
Pruebas acceso: ACM4 , CFGS , PAP
Pizzazz!: Book A Book B Book C Book D Book E Pre-Algebra Algebra
AHSME: Book 1 Book 2 Book 3 Book 4 Book 5 Book 6 Book 7 Book 8 Book 9

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales, para facilitar su edición. Descarga en los siguientes enlaces la versión "**.doc**" de este documento:
www.toomates.net/biblioteca/ProblemasGeometria12.doc

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a **toomates@gmail.com**

¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.

Versión de este documento: **30/03/2024**

Consulta el **Catálogo de libros** Toomates Coolección en http://www.toomates.net/biblioteca.htm
Visita mi **Canal de Youtube**: **https://www.youtube.com/c/GerardRomo**
Encontrarás muchos más materiales para el aprendizaje de las matemáticas en
www.toomates.net **¡Matemáticas patós!**

Presentación.

Este libro es la continuación del Tomo 1 de Problemas de Geometría:

http://www.toomates.net/biblioteca/ProblemasGeometria.pdf

y ambos son el complemento práctico del libro de teoría:

http://www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica.pdf

Para aquellos que empiezan se recomienda el libro

http://www.toomates.net/biblioteca/Geometria.pdf

donde encontrarán problemas de una dificultad mucho más moderada.

Índice.

9.48 IMO 2017 #4 (Difícil)
9.49 Olimpiada Rusa 2009 G9 #2, AIME II 2012 #15 (Difícil)
9.50 IMO 2014 #4 (Difícil)
9.51 IMO 2015 SL #G3 (Muy difícil)
9.52 IGO 2017 Advanced Level #3 (Difícil)
9.53 ELMO 2014 #5 (Difícil)
9.54 USAMO 2008 #2 (Medio)
9.55 USA TST 2005 #6 (Difícil)
9.56 ELMO SL 2013 Geometry #3 (Medio)
9.57 IGO 2023 Elementary Level #2 (Medio)
9.58 IGO 2023 Elementary Level #4 (Difícil)
9.59 IGO 2021 Elementary Level #4 (Medio)
9.60 IGO 2023 Intermediate Level #1 (Fácil)
9.61 AIME I 2024 #10 (Medio)
9.62 AIME II 2024 #10 (Medio)
9.63 KVANT NR 12/2017 (Difícil)
9.64 OME 2024 #3 (Medio)

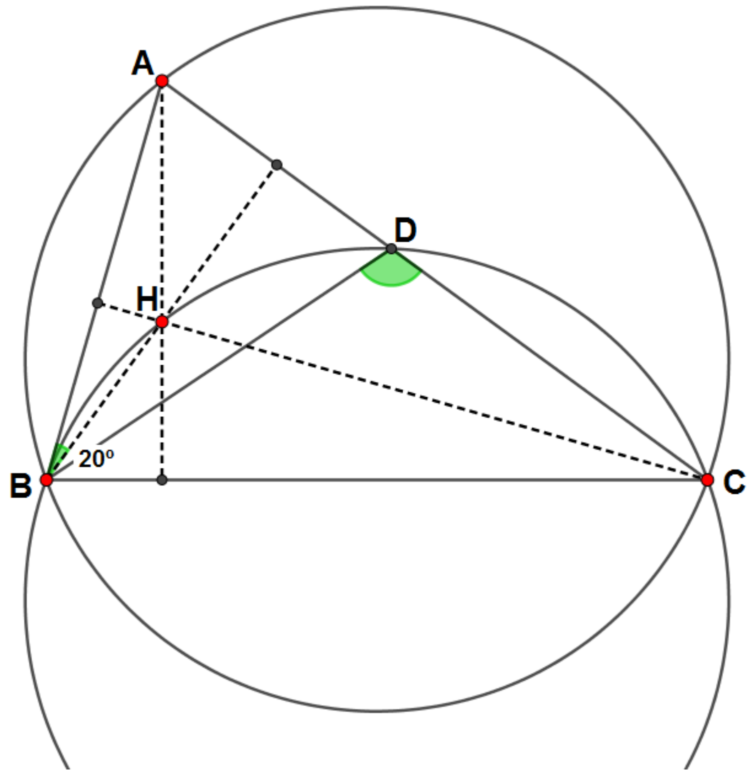
9.1 Producto de áreas en cuadrilátero cíclico.

Sean A, B, C y D puntos en una circunferencia. Supongamos que AC y BD se cortan en un punto E en el interior del círculo. Si $[\Delta ABE]\cdot[\Delta CDE]=36$. ¿Cuál es el valor de $[\Delta ADE]\cdot[\Delta BCE]$? (Dado un triángulo ΔABC, $[\Delta ABC]$ denota su área).

SMT 2022 Geometry #1

9.2 Ángulo determinado por el ortocentro y circuncírculo.

Sea ΔABC un triángulo acutángulo y escaleno. Sea H su ortocentro. Supongamos que la circunferencia que pasa por B, H y C corta CA de nuevo en D. Si $\angle ABH = 20°$, determina el ángulo $\angle BDC$.



SMT 2022 Geometry #2

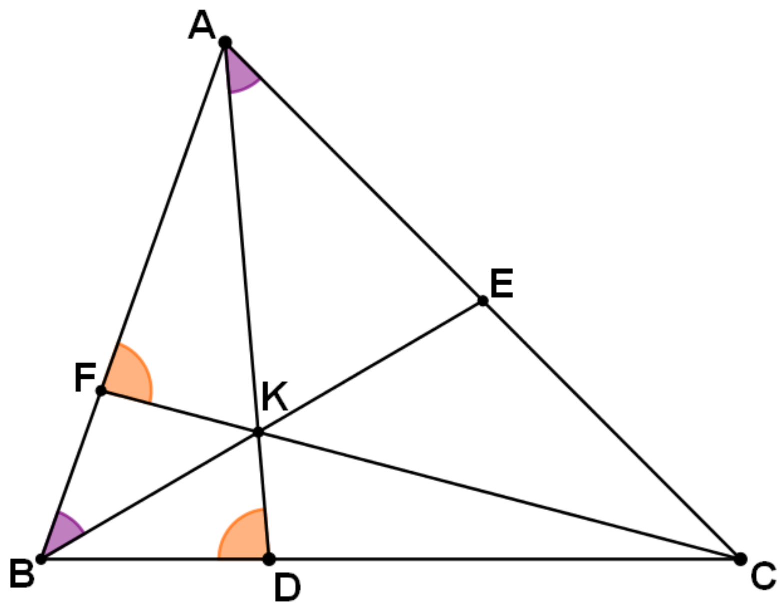
9.3 Área de un triángulo determinado por alturas y circuncírculo.

Sea ΔABC un triángulo de lados 13, 14 y 15. Denotamos por D, E y F los pies respectivos de las alturas por A, B y C. Supongamos que el circuncírculo de ΔDEF corta AD, BE y CF en I, J y K respectivamente. Determina el área de ΔIJK .

SMT 2022 Geometry #3

9.4 Ángulos iguales con punto interior en un triángulo.

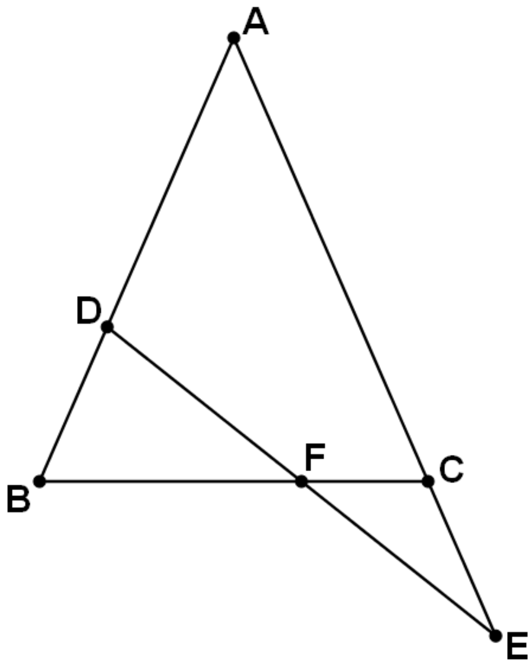
Dado un triángulo ΔABC, sean D, E y F los respectivos puntos en los segmentos BC, CA y AB de forma que AD, BE y CF concurren en un mismo punto K. Supongamos que $BD/DC = BF/FA$ y que $\angle ADB = \angle AFC$. Demuestra que $\angle ABE = \angle CAD$.



CRMO 2011 #1

9.5 Recta transversal en un triángulo.

Dado un triángulo ΔABC, con $AB = AC$. Marcamos los puntos D en el segmento AB y E en la recta AC de forma que $DB = EC$. Sea F el punto de corte entre DE y BC. Demuestra que $DF = FE$.



Fuente: Geometry Problems for Math Competitions (Jerry Gu) (página 99)

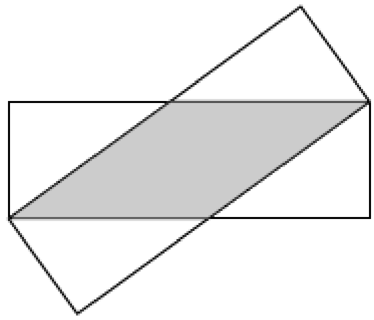
9.6 Bisectriz perpendicular en un triángulo rectángulo.

Sea ΔABC un triángulo rectángulo con $\angle B = 90^{\circ}$ y sea I su incentro. Trazamos una recta perpendicular a AI por I, que cortará la recta CB en D. Demuestra que CI es perpendicular a AD y que $ID = \sqrt{b(b-a)}$, donde $BC = a$ y $CA = b$.

RMO 2016 #1

9.7 Área de una zona común entre dos rectángulos.

Dos rectángulos idénticos con lados de 3 cm y 9 cm se superponen como en la figura.
¿Cuál es el área, en cm², de la zona común de los dos rectángulos?

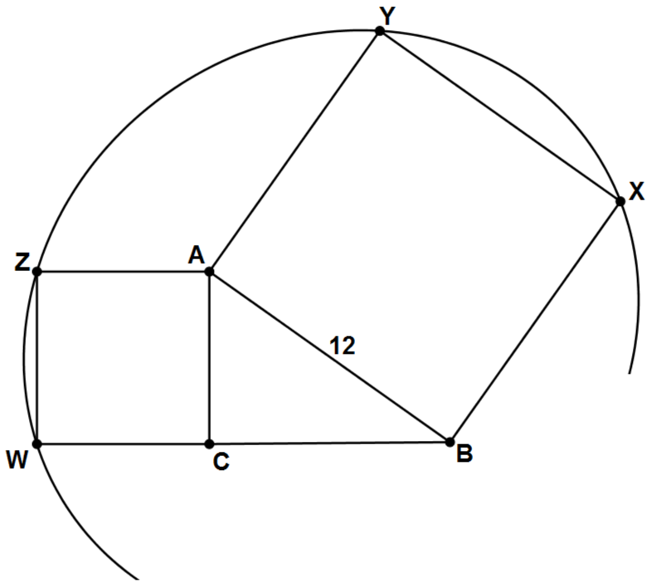


(A) 12 (B) 13,5 (C) 14 (D) 15 (E) 16

Canguro N5 2020 #24

9.8 Triángulo rectángulo y dos cuadrados en una circunferencia.

Sea ΔABC cumpliendo $\angle C = 90^{\circ}$ y $AB = 12$. Trazamos los cuadrados ABXY y ACWZ exteriores al triángulo. Supongamos que los puntos X, Y, Z y W pertenecen a una misma circunferencia. Determina el perímetro del triángulo.



(A) $12+9\sqrt{3}$ (B) $18+6\sqrt{3}$ (C) $12+12\sqrt{2}$ (D) 30 (E) 32

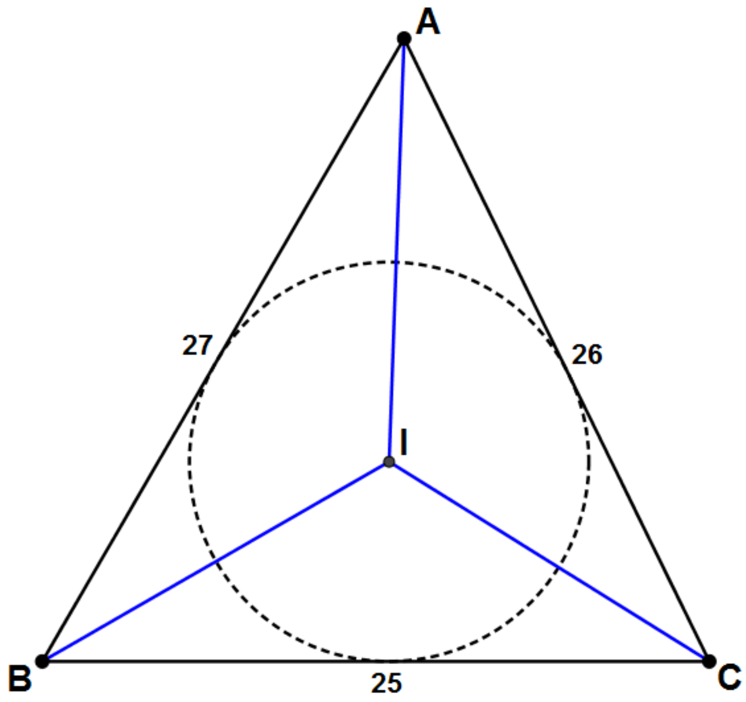
AMC 12B 2015 #19

Problema solucionado paso a paso en vídeo

https://youtu.be/ic7c8RRj81A

9.9 Distancia entre un vértice del triángulo y el incentro.

Sea ΔABC un triángulo con $AB = 27$, $AC = 26$ y $BC = 25$. Sea I el punto de intersección de las bisectrices interiores de ΔABC. Determina BI.

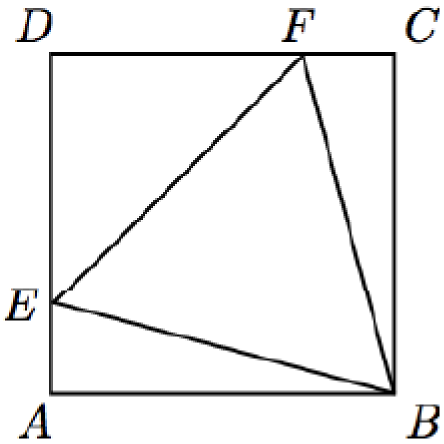


(A) 15 (B) $5+\sqrt{26}+3\sqrt{3}$ (C) $3\sqrt{26}$ (D) $\frac{2}{3}\sqrt{546}$ (E) $9\sqrt{3}$

AMC 12A 2012 #18

9.10 Razón de áreas con triángulo equilátero en cuadrado.

Los puntos E y F están situados en un cuadrado ABCD de forma que ΔBEF es equilátero. Determina la razón del área de ΔDEF respecto de la de ΔABE.



(A) 4/3   (B) 3/2   (C) $\sqrt{3}$ (D) 2   (E) $1+\sqrt{3}$

AMC 10A 2004 #20

Nota: Se presenta aquí una solución utilizando únicamente el Teorema de Pitágoras, sin necesidad de conocer las propiedades trigonométricas de los ángulos 15º o 75º.

9.11 Área determinada por una curva.

Determina el área de la región interior de la curva determinada por la ecuación

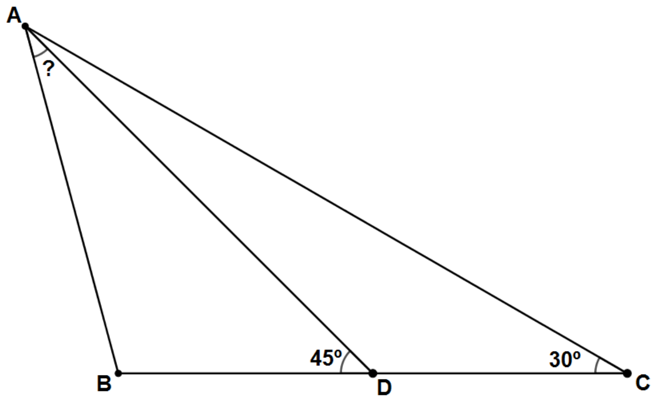
$$x^2 + y^2 = |x| + |y|$$

(A) $\pi + \sqrt{2}$ (B) $\pi + 2$ (C) $\pi + 2\sqrt{2}$ (D) $2\pi + \sqrt{2}$ (E) $2\pi + 2\sqrt{2}$

AMC 10B 2016 #21

9.12 Ángulo determinado por una mediana con 45º y 30º.

En el triángulo ΔABC, el segmento AD es una mediana. El ángulo ∠ACB es de 30º y el ángulo ∠ADB es de 45º. Determina el ángulo ∠BAD.

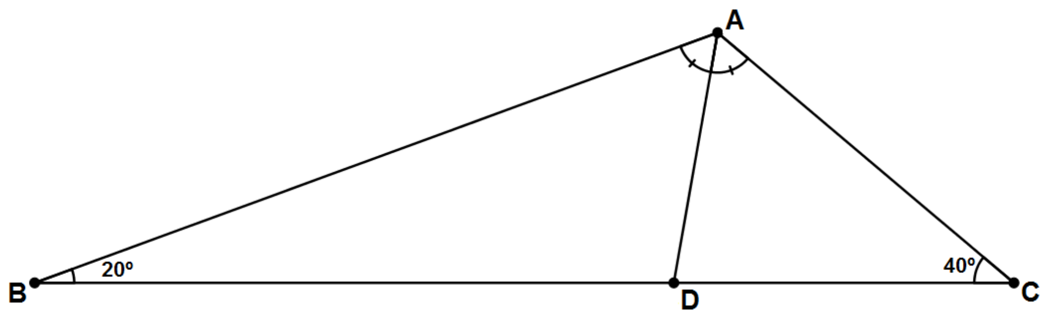


(A) 45º (B) 30º (C) 25º (D) 20º (E) 15º

Cangur N3 2009 #29

9.13 Base de un triángulo conociendo bisectriz y ángulos.

En el triángulo ΔABC, el ángulo B es 20º y el ángulo C es 40º. La longitud de la bisectriz del ángulo A es 2. Calcular BC − AB.

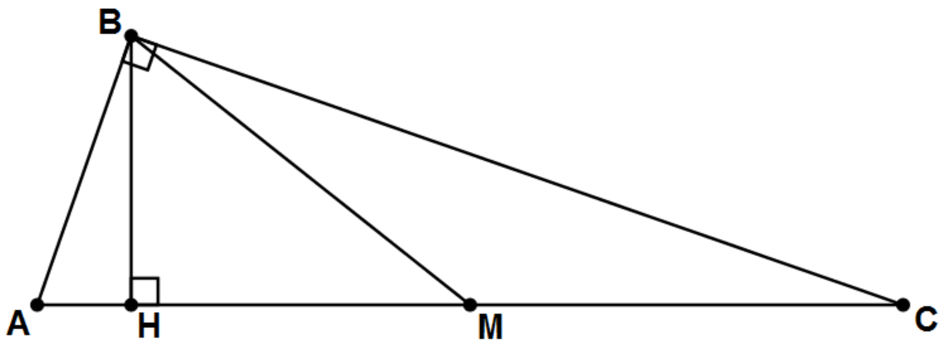


(A) 1   (B) 1,5   (C) 2   (D) 4   (E) Imposible saberlo

Canguro N3 2009 #30, Cangur N1 2009 #30, Kangaroo Kadett 2009 #30

9.14 Ángulo dada la razón entre altura y mediana.

En un triángulo rectángulo ABC, se trazan la altura BH y la mediana BM desde el vértice B del ángulo recto. Si BM = 2 BH ¿cuánto mide el menor de los ángulos del triángulo?



(A) 15º (B) 24º (C) 30º (D) 45º (E) imposible de determinar

Canguro N4 2008 #14

9.15 Distancia con bisectriz y dos circuncírculos.

Sea ΔABC un triángulo con lados AB=11, BC=24 y CA=20. La bisectriz de $\angle BAC$ corta $\overline{BC}$ en el punto D, y corta la circunferencia circunscrita de ΔABC en el punto $E \neq A$. La circunferencia circunscrita de ΔBED corta la recta AB en los puntos B y $F \neq B$. Determina CF.

(A) 28 (B) $20\sqrt{2}$ (C) 30 (D) 32 (E) $20\sqrt{3}$

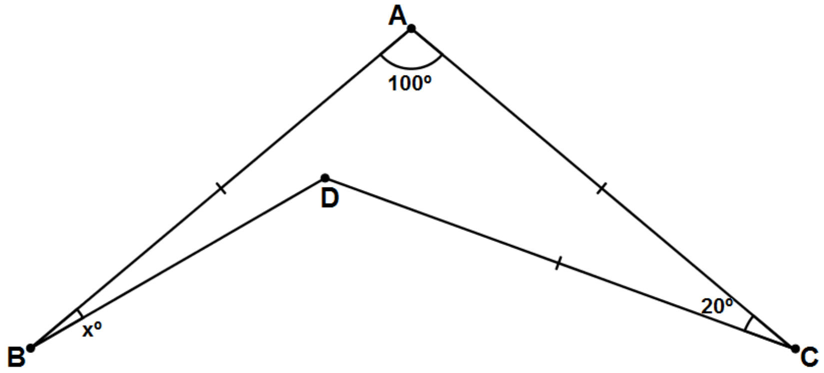
AMC 12B Fall 2021 #24

Problema solucionado paso a paso en vídeo

https://youtu.be/qBaBlS5tRkk

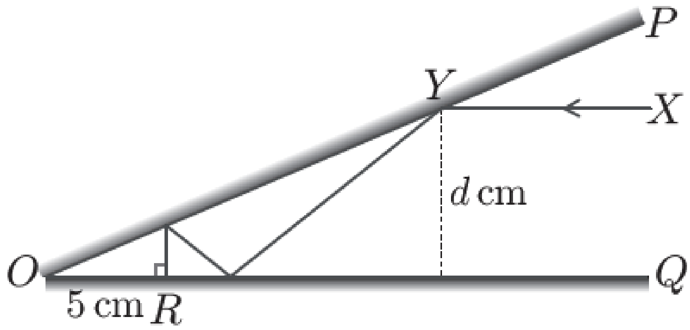
9.16 Un clásico.

Determina el ángulo $\angle ABD$, sabiendo que $AB = AC = CD$, $\angle BAC = 100^{o}$ y $\angle ACD = 20^{o}$.



9.17 Reflexión de un rayo de luz en un espejo.

Dos espejos planos OP y OQ están inclinados en un ángulo agudo (el diagrama no está a escala). Un rayo de luz XY paralelo a QO refleja OP en Y . El rayo se refleja y golpea el espejo OQ, se refleja de nuevo y golpea el espejo OP y se refleja por tercera vez y golpea el espejo OQ en ángulo recto a R, como se muestra. La distancia OR es 5 cm. El rayo XY está d cm del espejo OQ.

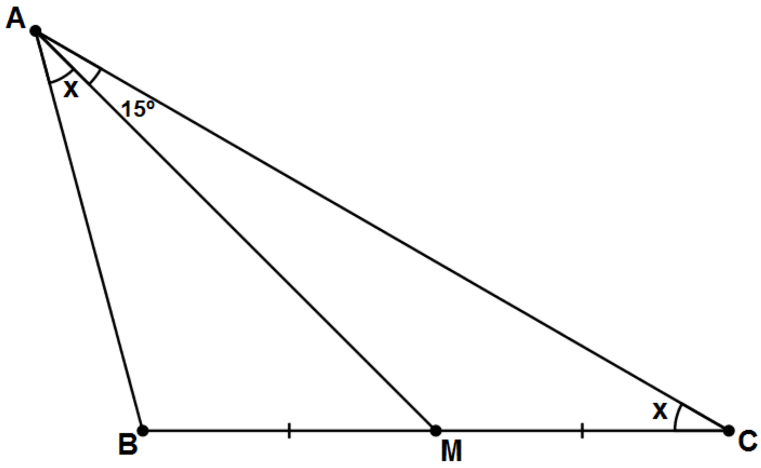


(A) 6 (B) 4 (C) 5 (D) 5,5 (E) 4,5

Cangur B2 2021 #28, Kangaroo Student 2021 #28

9.18 Determinación de ángulo con mediana y ángulo de 15°.

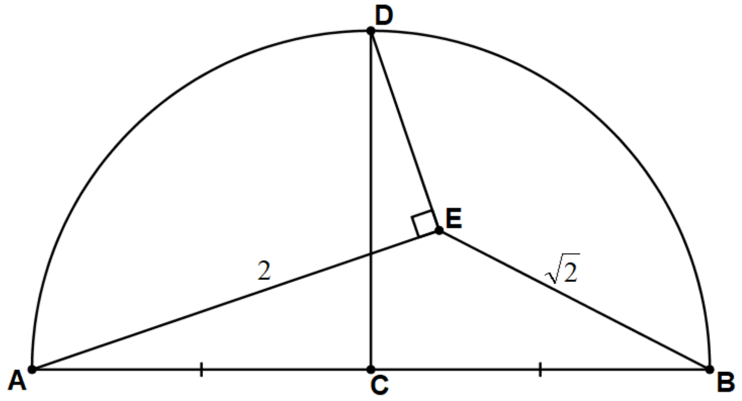
Determina el ángulo x:



Observación: Este problema es muy similar al problema 7.10

9.19 Área de semicírculo con punto interior.

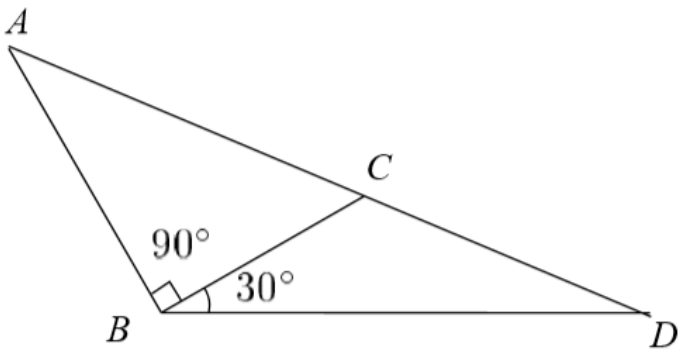
Determina el área del semicírculo:



Fuente: "Geometria Top" en Facebook

9.20 Triángulo con ceviana y ángulos de 30º y 90º.

En el siguiente diagrama los segmentos AB y CD tienen longitud 1 y los ángulos $\angle ABC$ y $\angle CBD$ son de 90º y 30º, respectivamente. Determina la longitud AC.



CMO 1986 #1

Problema solucionado paso a paso en vídeo

https://youtu.be/OaAUPmrifHw

9.21 Coseno con medianas y triángulo interno equilátero.

En el triángulo ΔABC las medianas $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$ se cortan en G y ΔAGE es equilátero. Entonces $\cos(C)$ se puede escribir como $m\sqrt{p}/n$, donde m y n son enteros positivos coprimos y p es un entero positivo no divisible por el cuadrado de ningún primo. Determina $m+n+p$.

(A) 44 (B) 48 (C) 52 (D) 56 (E) 60

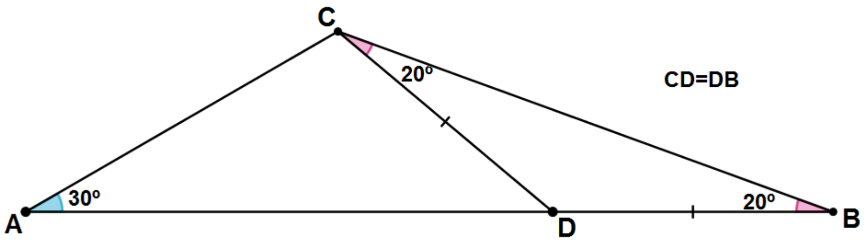
AMC 12B 2022 #19

Problema solucionado paso a paso en vídeo

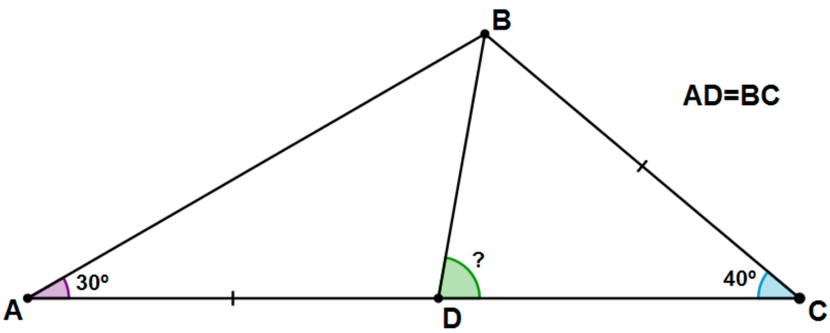
https://youtu.be/5L2T5n51lRE

9.22 Propiedad del triángulo 30-40-110 y aplicaciones.

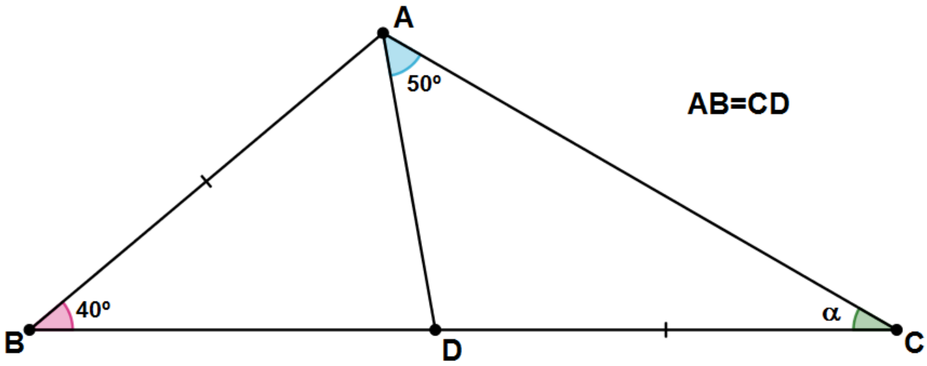
a) (Lema) Demuestra que $AD = BC$:



b) Determina el ángulo indicado.

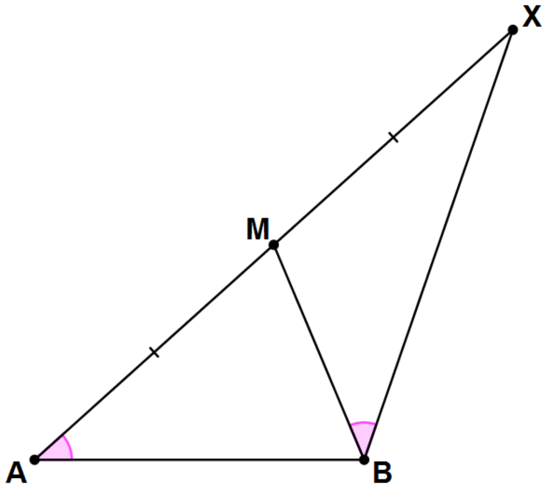


c) Determina el ángulo α



9.23 Lugar geométrico con punto medio y dos ángulos iguales.

Fijado un segmento $\overline{AB}$, consideramos todos los puntos X con la propiedad que en el triángulo ΔAXB el punto medio M del segmento $\overline{AX}$ cumple $\angle XAB = \angle XBM$. Demuestra que todos estos puntos X están sobre una misma circunferencia.



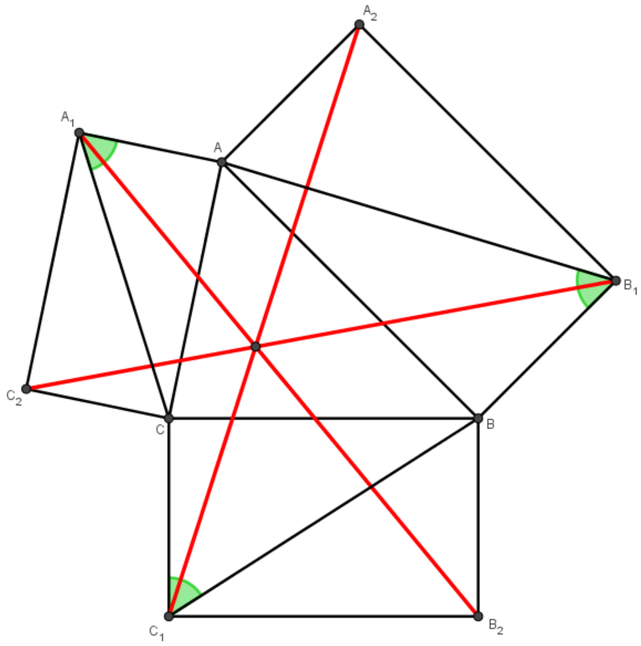
OMEFL Cataluña 2023 #2

9.24 Rectas concurrentes con rectángulos en un triángulo.

Trazamos los rectángulos BCC_1B_2, CAA_1C_2 y ABB_1A_2 en el exterior de un triángulo agudo ΔABC, cumpliendo, además, que:

$$\angle BC_1C + \angle CA_1A + \angle AB_1B = 180^{\circ}$$

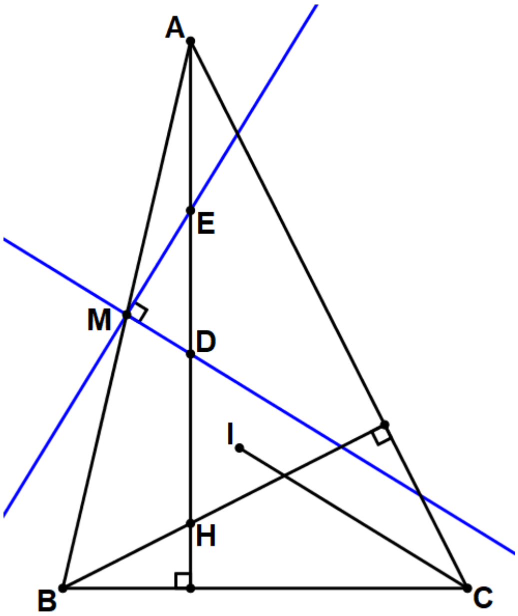
Demuestra que las rectas B_1C_2, C_1A_2 y A_1B_2 son concurrentes.



USAMO 2021 #1

9.25 Segmentos iguales en altura con recta paralela a bisectriz.

Sea ABC un triángulo acutángulo y escaleno con incentro I y ortocentro H. Sea M el punto medio de AB. Sobre la recta AH se consideran puntos D y E tales que la recta MD es paralela a CI y ME es perpendicular a CI. Prueba que AE = DH.



OME 2023 #2

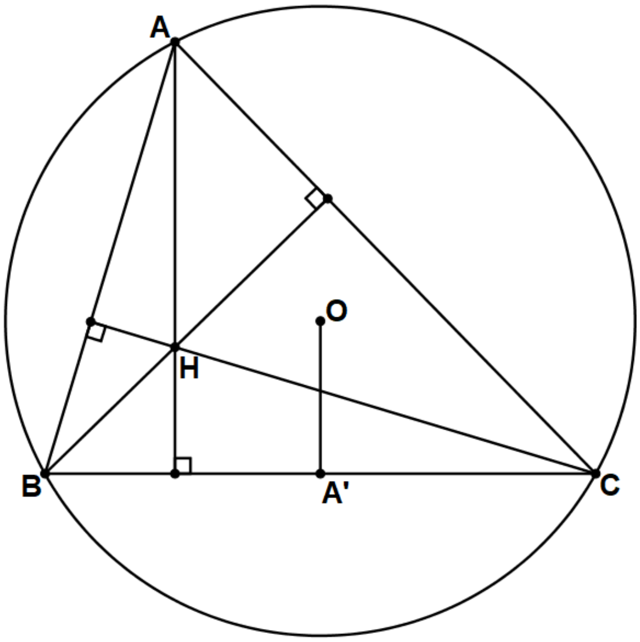
Problema solucionado paso a paso en vídeo

https://youtu.be/R44gZmKTL1Q

9.26 Distancia entre un vértice y el ortocentro.

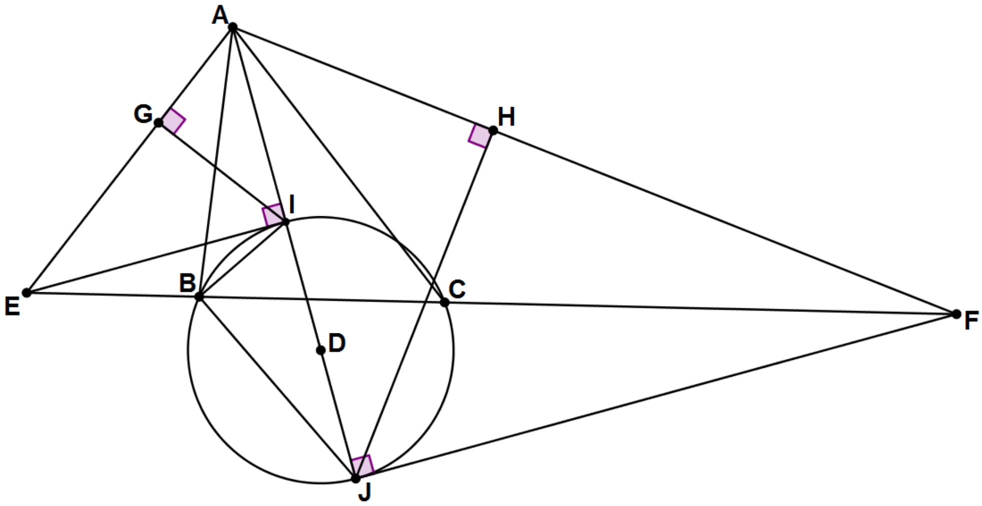
La distancia entre un vértice y el ortocentro es el doble de la distancia entre el circuncentro y el lado opuesto.

$$AH = \frac{1}{2} OA'$$



9.27 Segmentos iguales con bisectriz y rectas perpendiculares.

En el triángulo escaleno ABC con incentro I, la recta AI corta de nuevo a la circunferencia circunscrita en el punto D, y J es el punto tal que D es el punto medio de IJ. Se consideran puntos E y F en la recta BC tales que IE y JF son perpendiculares a AI. Se consideran puntos G en AE y H en AF tales que IG y JH son perpendiculares a AE y AF, respectivamente. Prueba que BG = CH.



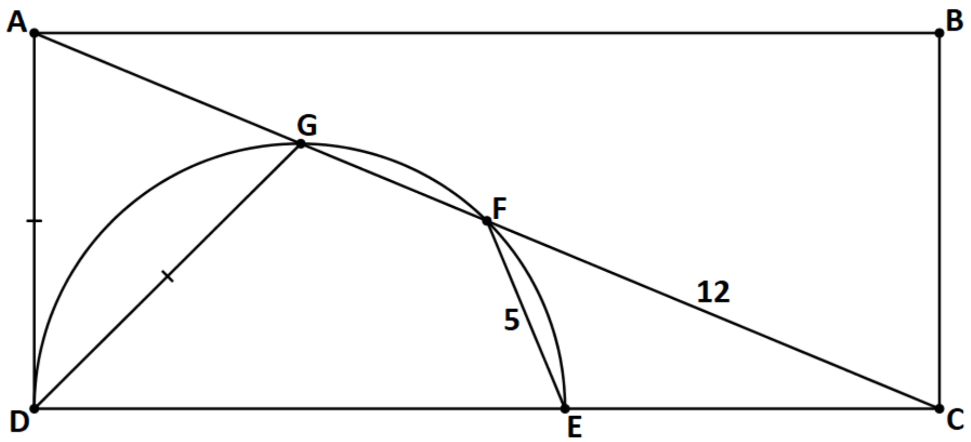
OME 2023 #6

Problema solucionado paso a paso en vídeo

https://youtu.be/kI9IlN4HGDw

9.28 Distancia con rectángulo y semicircunferencia.

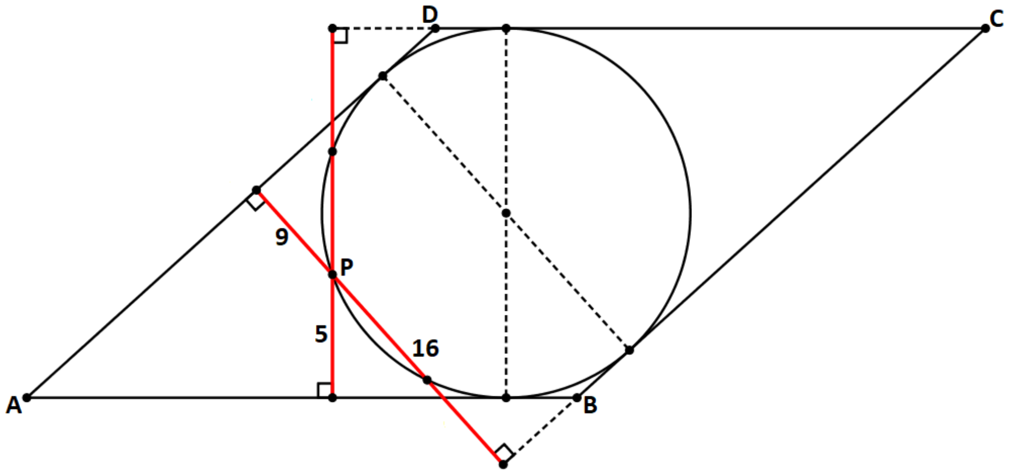
La construcción de la siguiente figura muestra un rectángulo ABCD, de manera que DE es el diámetro de una semicircunferencia, y se cumple AD=DG, EF=5 y FC=12. Calcúlese la longitud del segmento AB.



Fuente: Grupo "Retos Matemáticos" en Telegram

9.29 Perímetro de un rectángulo con incírculo.

Sea ABCD un rombo con $\angle BAD < 90^\circ$. Sea P un punto perteneciendo a su incírculo tal que las distancias de P a las rectas DA, AB y BC son 9, 5 y 16, respectivamente. Determina el perímetro de ABCD.



AIME I 2023 #8

Problema solucionado paso a paso en vídeo

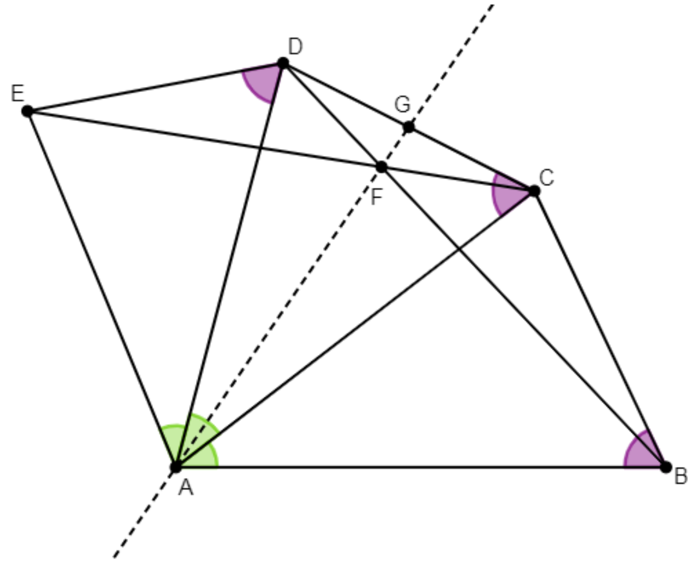
https://youtu.be/hQu4NUUZRVw

9.30 Punto medio determinado por tres triángulos semejantes.

Sea ABCDE un pentágono formado por tres triángulos semejantes:

$$\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE \text{ y } \angle EDA = \angle DCA = \angle CBA$$

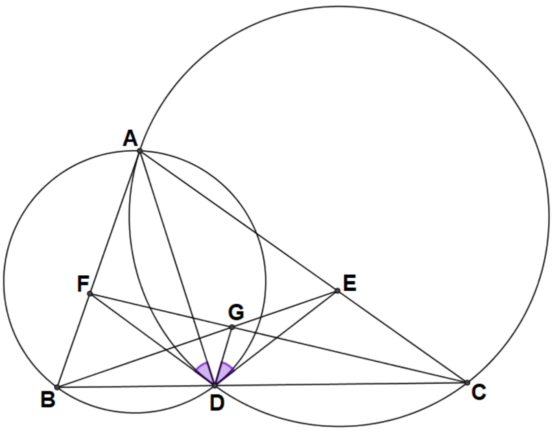
Trazamos los segmentos EC y DB y sea F su punto de corte. Trazamos la recta AF y sea G su punto de corte con el segmento DC. Demostrar que G es el punto medio del segmento DC.



Fuente: https://youtu.be/MvUUWQ2BEZQ (OptionalProblem)

9.31 Ángulos iguales en triángulo con bisectriz.

En el triángulo escaleno ABC, la bisectriz del ángulo A corta al lado BC en el punto D. Las rectas que pasan por D y son tangentes a las circunferencias circunscritas de los triángulos ABD y ACD cortan a las rectas AC y AB en los puntos E y F respectivamente. Si BE y CF se cortan en G, demostrar que los ángulos $\angle EDG$ y $\angle ADF$ son iguales.



OME 2019 #6

Problema solucionado paso a paso en vídeo

https://youtu.be/Z59ddeE9Z_U

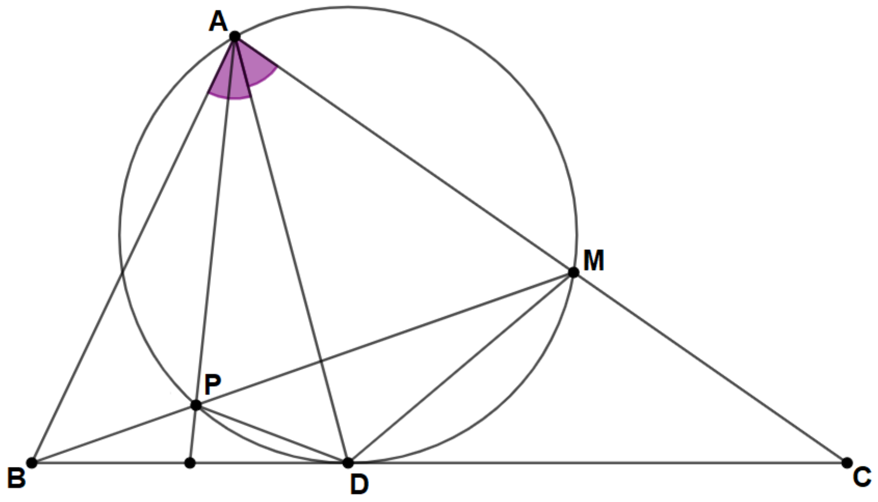
9.32 Distancias iguales con bisectrices y puntos medios.

En el triángulo BCD, los puntos medios respectivos de los lados BC, AB y AC son D, E y F. Sean: M el punto donde la bisectriz interior del ángulo $\angle ADB$ corta al lado AB, y N donde la bisectriz interior del ángulo $\angle ADC$ corta al lado AC. Sean además O el punto de intersección de las rectas AD y MN, P el punto de intersección de AB y FO, y R el punto de intersección de AC y EO. Demuestra que PR = AD.

OME 2017 #6

9.33 Mediana determinada por bisectriz y recta tangente.

En un triángulo ABC, la bisectriz del ángulo BAC corta al lado BC en el punto D. Sea la circunferencia Γ, que pasa por el punto A y es tangente a BC en el punto D. Si M es el otro punto de intersección de Γ con el lado AC y la recta BM corta a la circunferencia Γ en el punto P, demuestre que AP es una mediana del triángulo ABD .



OPOS Andalucía 2023 #6

9.34 Recta tangente a circunferencia circunscrita.

Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB < AC$. Sean:
- D el pie de la bisectriz del ángulo en A.
- E el punto del segmento BC (diferente de B) tal que $AB = AE$,
- F el punto del segmento BC (diferente de B) tal que $BD = DF$,
- G el punto del segmento AC tal que $AB = AG$.

Demostrar que la circunferencia circunscrita al triángulo EFG es tangente a la recta AC.

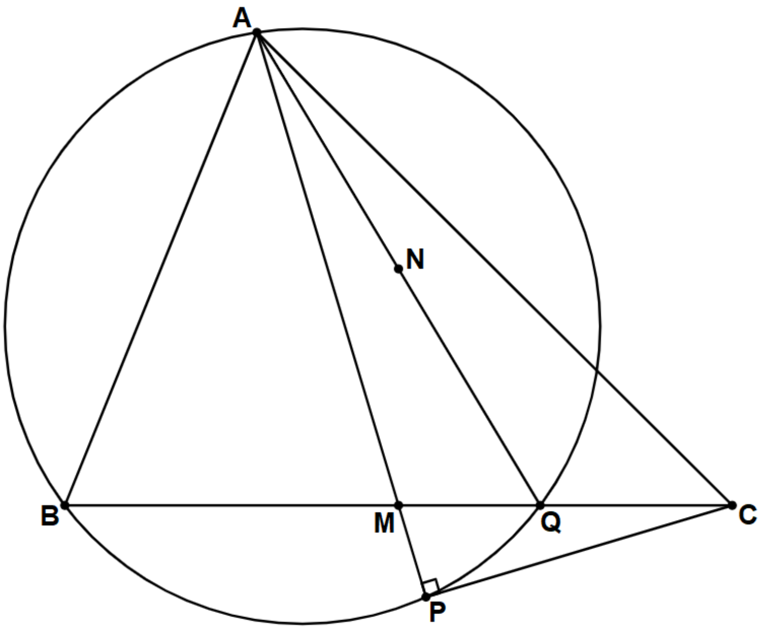
OMI 2022 #2

Problema solucionado paso a paso en vídeo

https://youtu.be/5SEEuiv4vjY

9.35 Punto equidistante a vértices de un triángulo.

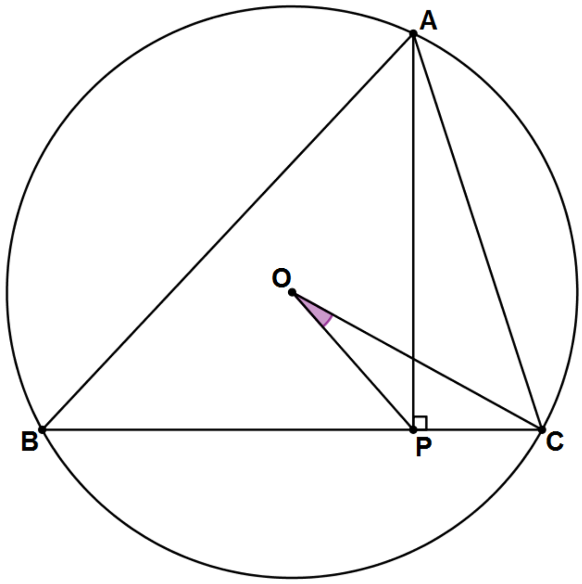
En un triángulo agudo ΔABC, sea M el punto medio de $\overline{BC}$. Sea P el pie de la perpendicular por C a AM. Supongamos que el circuncírculo del triángulo ΔABP corta la recta BC en dos puntos distintos B y Q. Sea N el punto medio de $\overline{AQ}$. Demuestra que $NB = NC$.



USAMO 2023 #1, USAJMO 2023 #2

9.36 Desigualdad con ángulo determinado por circuncentro.

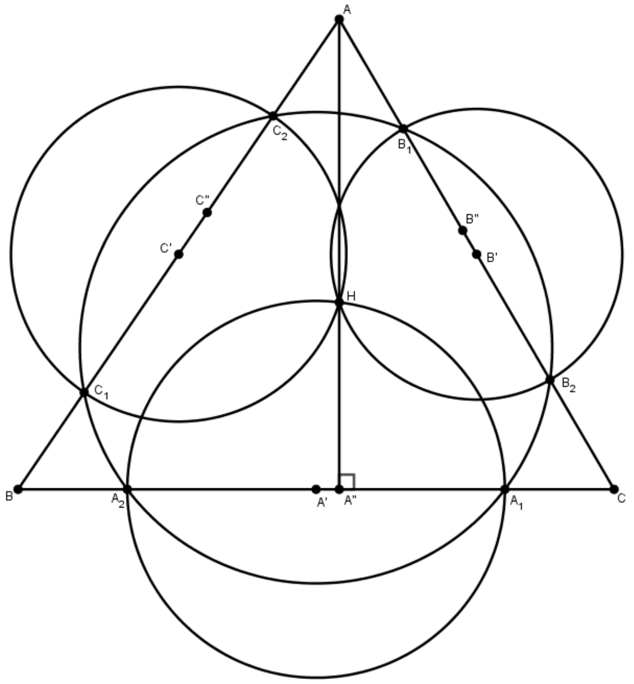
Sea ABC un triángulo acutángulo con circuncentro O. Sea P sobre BC el pie de la altura por A. Supongamos que $\angle BCA \geq \angle ABC + 30º$. Demostrar que $\angle CAB + \angle COP < 90º$



IMO 2001 #1

9.37 Puntos cocíclicos con ortocentro y puntos medios.

Un triángulo acutángulo ABC tiene ortocentro H. La circunferencia con centro en el punto medio de BC que pasa por H corta a la recta BC en A_1 y A_2. La circunferencia con centro en el punto medio de CA que pasa por H corta a la recta CA en B_1 y B_2. La circunferencia con centro en el punto medio de AB que pasa por H corta a la recta AB en C_1 y C_2. Demostrar que A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 están sobre una misma circunferencia.



IMO 2008 #1

Problema solucionado paso a paso en vídeo

https://youtu.be/-CRKlCOpBHs

9.38 Triángulo rectángulo con longitudes enteras.

Sea ΔABC un triángulo con $\angle A = 90^{\circ}$. Sean D y E puntos en los lados AC y AB, respectivamente, tales que $\angle ABD = \angle DBC$ y $\angle ACE = \angle ECB$. Sea I el punto de corte de los segmentos BD y CE. Determina si es posible o no que todos los segmentos AB, AC, BI, ID, CI e IE tengan longitudes enteras.

USAMO 2010 #4

9.39 Desigualdad con un punto en el interior de un triángulo.

Sea ΔABC un triángulo y sea I el centro de su circunferencia inscrita. Sea P un punto en el interior del triángulo tal que

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$

Demuestre que $AP \geq AI$ y que vale la igualdad si y sólo si $P = I$.

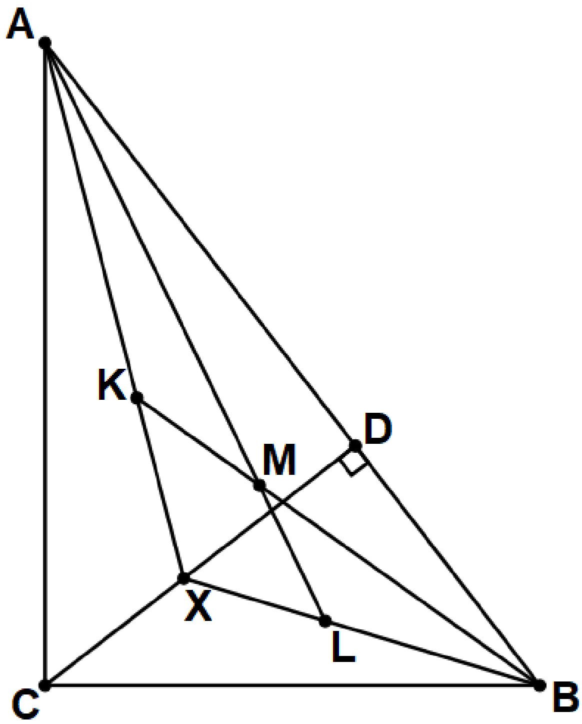
IMO 2006 #1

Problema solucionado paso a paso en vídeo

https://youtu.be/O9RQhpOw0zY

9.40 Segmentos iguales en triángulo rectángulo y altura.

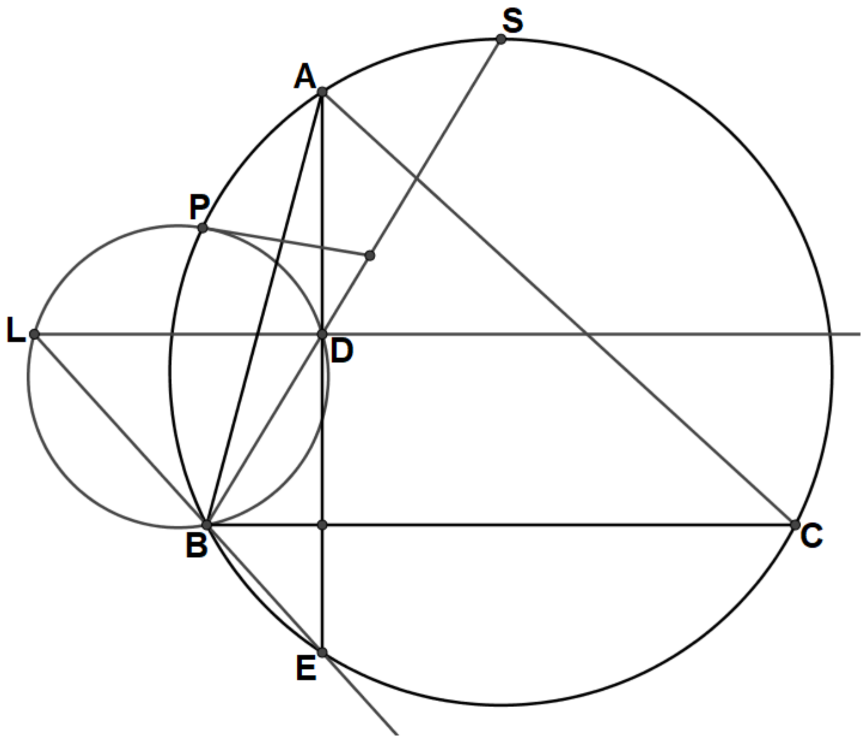
Sea ABC un triángulo tal que ∠BCA = 90º, y sea D el pie de la altura desde C. Sea X un punto interior del segmento CD. Sea K el punto en el segmento AX tal que BK = BC. Análogamente, sea L el punto en el segmento BX tal que AL = AC. Sea M el punto de intersección de AL y BK. Demostrar que MK = ML.



IMO 2012 #5

9.41 Recta tangente corta bisectriz.

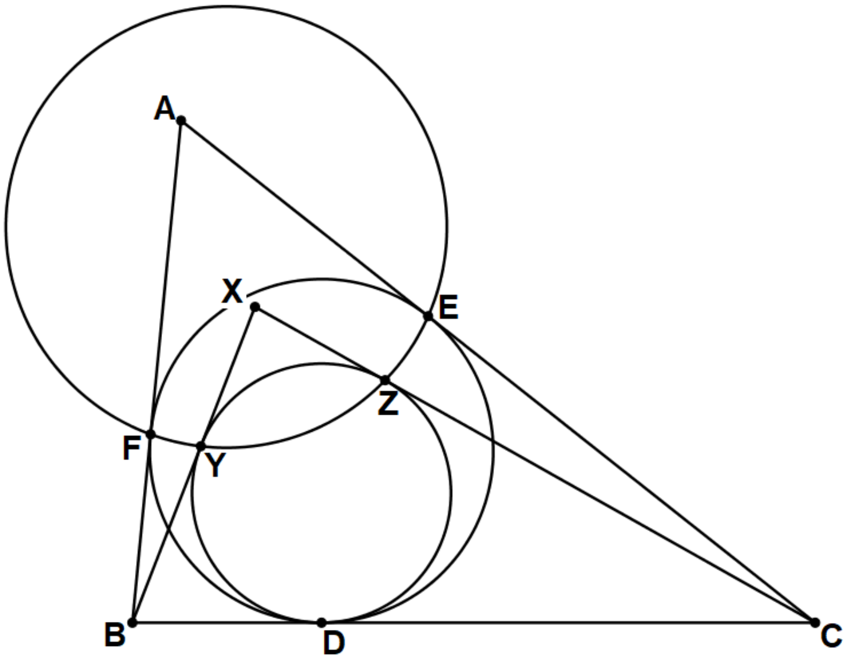
Sea ABC un triángulo acutángulo con AB<AC. Sea Ω el circuncírculo de ABC. Sea S el punto medio del arco CB de Ω que contiene a A. La perpendicular por A a BC corta al segmento BS en D y a Ω de nuevo en $E \neq A$. La paralela a BC por D corta a la recta BE en L. Sea ω el circuncírculo del triángulo BDL. Las circunferencias ω y Ω se cortan de nuevo en $P \neq B$. Demuestra que la recta tangente a ω en P corta a la recta BS en un punto de la bisectriz interior del ángulo ∠BAC.



IMO 2023 #2

9.42 Cuatro puntos cocíclicos con incírculo.

El incírculo de ABC toca BC, CA y AB en D, E y F, respectivamente. Sea X un punto en el interior de ABC tal que el incírculo de XBC también toca BC en D, y sean Y, Z sus puntos de contacto con CX y XB, respectivamente. Demuestra que EFZY es un cuadrilátero cíclico.



IMO SL 1995 G3

Problema solucionado paso a paso en vídeo

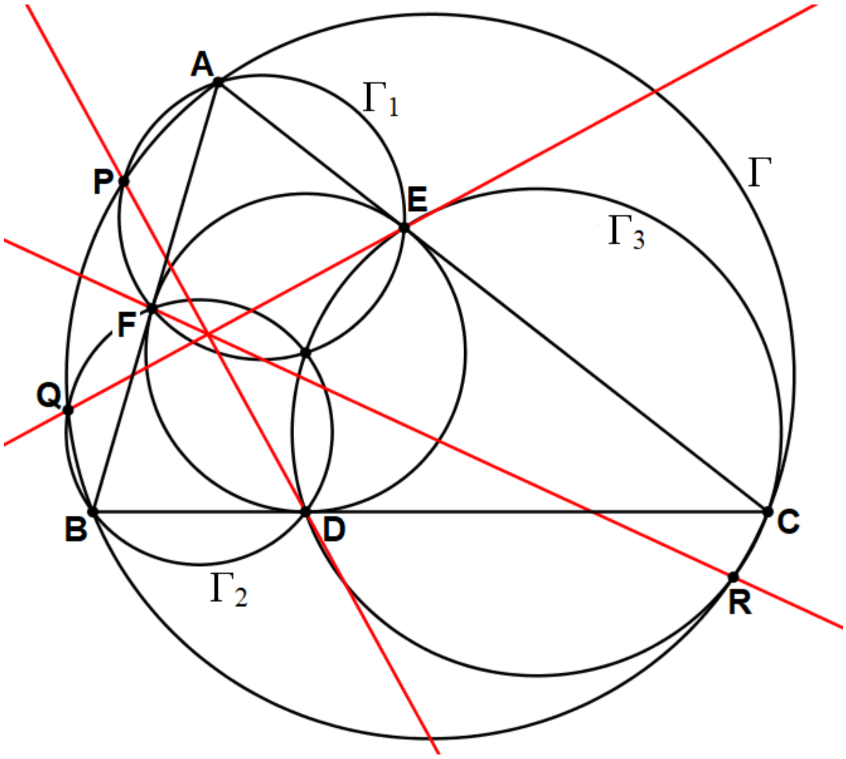
https://youtu.be/l0ZrdxcXxy4

9.43 Punto de corte de 3 cevianas determinadas por el incírculo.

Sean D, E y F los respectivos puntos de contacto entre el incírculo de un triángulo ABC y los respectivos lados BC, CA y AB. Sean Γ, Γ_1, Γ_2 y Γ_3 los circuncírculos de los triángulos ABC, AEF, BDF y CDE, respectivamente. Supongamos que Γ y Γ_1 cortan en A y P, que Γ y Γ_2 cortan en B y Q, y que Γ y Γ_3 cortan en C y R.

(a) Demuestra que las circunferencias Γ_1, Γ_2 y Γ_3 tienen un punto en común.

(b) Demuestra que PD, QE y RF son concurrentes.



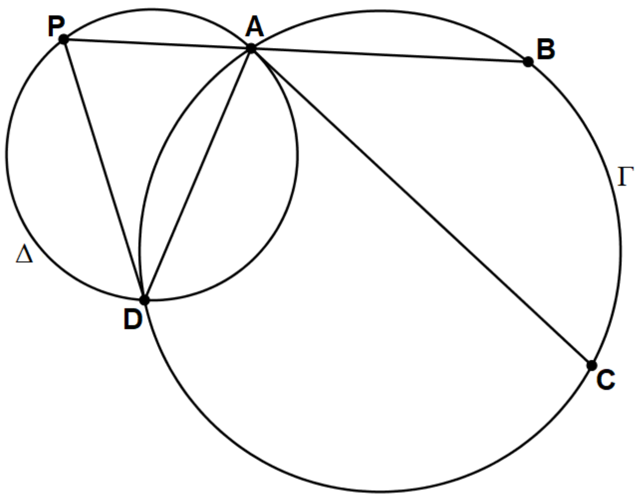
Canadian Mathematical Olympiad 2007 #5

Problema solucionado paso a paso en vídeo

https://youtu.be/SifGXpfmGbs

9.44 Segmentos congruentes en dos circunferencias secantes.

Sean A, B y C puntos pertenecientes a una circunferencia Γ. Sea Δ una circunferencia tangente a AC en A, que cortará de nuevo Γ en D y cortará de nuevo AB en P. Supongamos que el punto A está entre B y P. Demuestra que si AD=DP, entonces BP=AC.



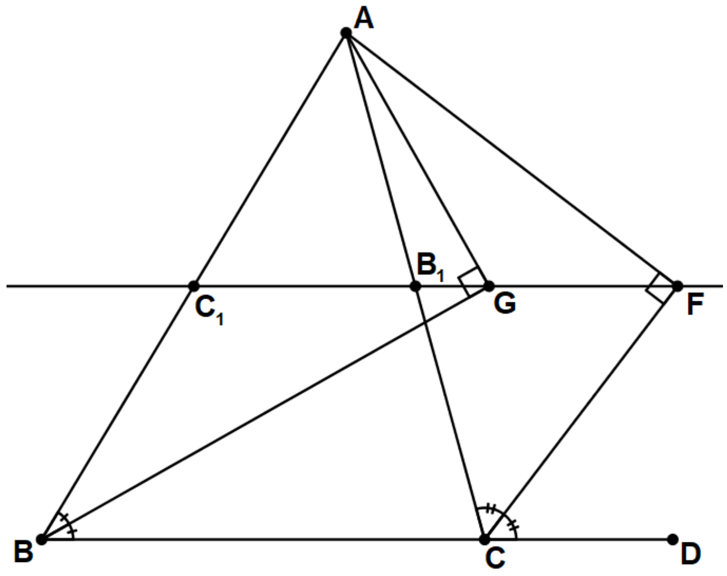
BMO 2020 Round 1 #5

Problema solucionado paso a paso en vídeo

https://youtu.be/-UwXNuMaavE

9.45 Puntos colineales con bisectrices y ángulos rectos.

Sea ABC un triángulo acutángulo no isósceles, y sean B_1 y C_1 los puntos medios de los lados AC y AB, respectivamente. Sea D un punto en BC tal que C está entre B y D. Sea F un punto tal que $\angle AFC$ es un ángulo recto y $\angle DCF = \angle FCA$. Sea G un punto tal que $\angle AGB$ es un ángulo recto y $\angle CBG = \angle GBA$. Demuestra que los puntos B_1, C_1, F y G son colineales.

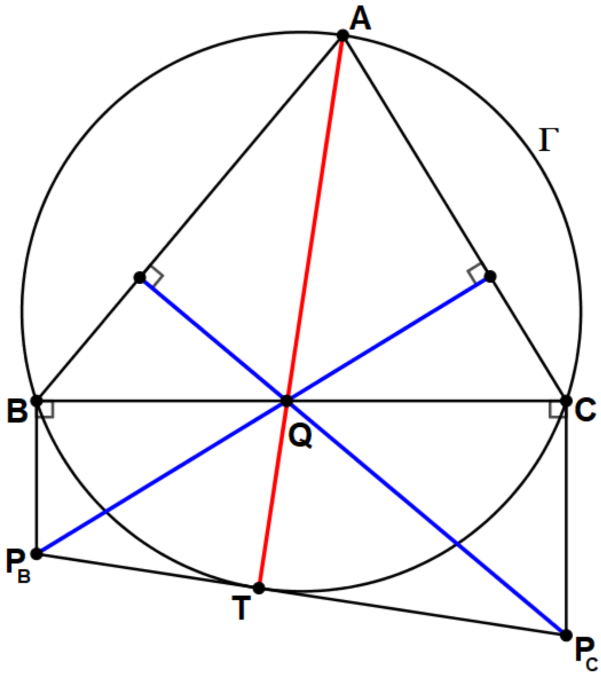


BMO 2022 Round 1 #3

9.46 Puntos colineales con ángulos rectos y circuncírculo.

Sea ABC un triángulo agudo con circuncírculo Γ. Sean l_B y l_C las rectas perpendiculares a BC que pasan por B y C, respectivamente. Sea T un punto que pertenece al arco menor BC. La recta tangente a Γ en T corta l_B y l_C en P_B y P_C, respectivamente. Sea Q el punto de corte entre la recta por PB perpendicular a AC y la recta por PC perpendicular a AB. Demuestra que si Q pertenece a BC, entonces la recta AT pasa por Q.

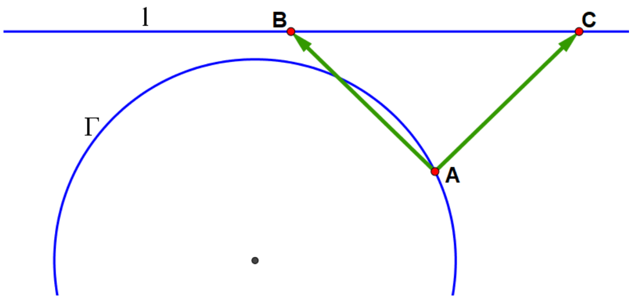
(Un arco menor de una circunferencia es el arco más corto de los dos arcos determinados por dos puntos extremos)



BMO 2022 Round 2 #4

9.47 Ciclo de saltos entre circunferencia y recta.

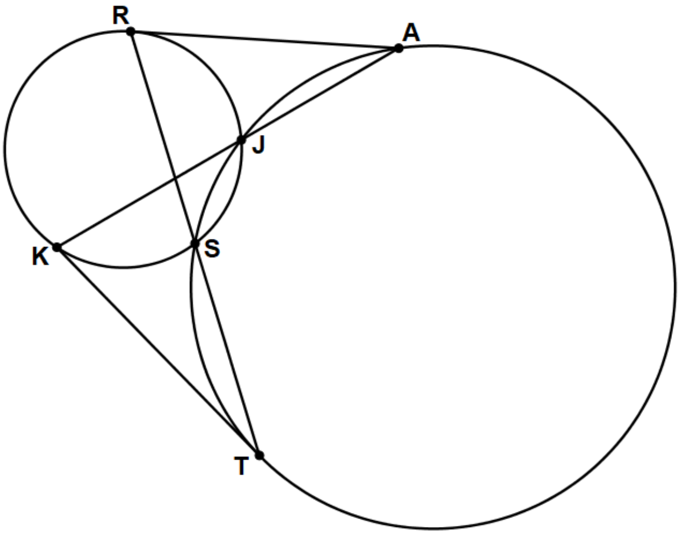
Sea Γ una circunferencia de radio 1. Sea l una recta de forma que la distancia perpendicular de l al centro de Γ está comprendida estrictamente entre 1 y 2. Una rana se coloca en un punto de Γ cuya distancia perpendicular a l es estrictamente menor que 1. Entonces realiza una serie de saltos, cada salto tiene una longitud de 1 y si un salto empieza en Γ acaba en l y viceversa. Demuestra que la rana siempre acabará volviendo a un punto en el que ha estado anteriormente.



BMO 2022 Round 1 #6

9.48 Recta tangente mediante cuerdas y recta tangente.

Sean R y S puntos distintos sobre la circunferencia Ω tales que RS no es un diámetro de Ω. Sea l la recta tangente a Ω en R. El punto T es tal que S es el punto medio del segmento RT. El punto J se elige en el menor arco RS de Ω de manera que Γ, la circunferencia circunscrita al triángulo JST, intersecta a l en dos puntos distintos. Sea A el punto común de Γ y l más cercano a R. La recta AJ corta por segunda vez a Ω en K. Demostrar que la recta KT es tangente a Γ.



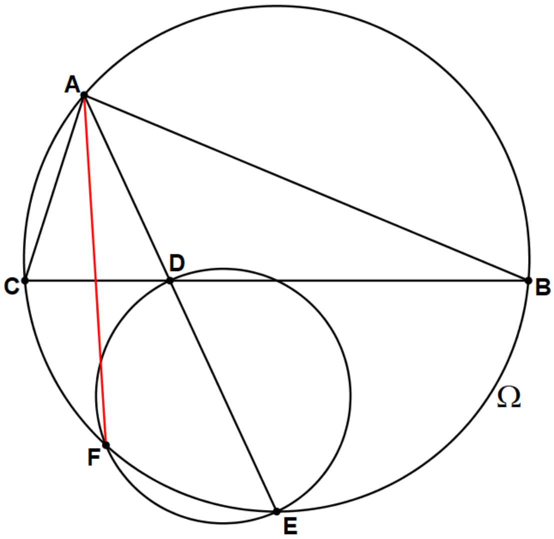
IMO 2017 #4

Problema solucionado paso a paso en vídeo

https://youtu.be/2BaPzJDNQ9Y

9.49 Olimpiada Rusa 2009 Grade 9 #2, AIME II 2012 #15.

a) En un triángulo ΔABC con circuncírculo Ω, la bisectriz interna del ángulo $\angle A$ corta $\overline{BC}$ en D y Ω de nuevo en E. La circunferencia con diámetro $\overline{DE}$ corta Ω de nuevo en F. Demuestra que $\overline{AF}$ es una simediana del triángulo ΔABC.



Olimpiada Rusa 2009 Grade 9 #2

b) Sea ABC un triángulo inscrito en una circunferencia ω con AB=5, BC=7 y AC=3. La bisectriz del ángulo A corta el lado $\overline{BC}$ en D y la circunferencia ω en un segundo punto E. Sea γ la circunferencia de diámetro $\overline{DE}$. Las circunferencias ω y γ se cortan en E y en un segundo punto F. Se cumple $AF^2 = \frac{m}{n}$ donde m y n son enteros positivos coprimos. Determina $m+n$.

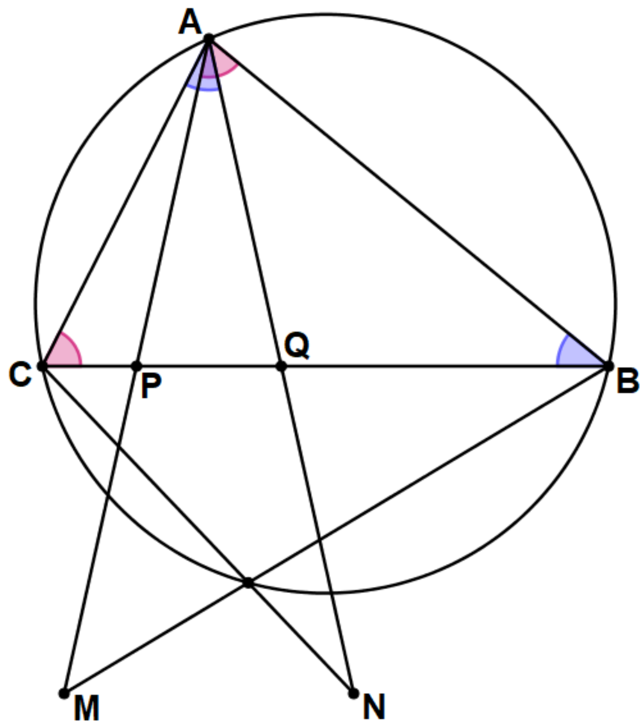
AIME II 2012 #15

Problema solucionado paso a paso en vídeo

https://youtu.be/QLtlGbZUaws

9.50 Intersección de puntos simétricos en el circuncírculo.

Sean P y Q dos puntos del segmento BC de un triángulo agudo ΔABC tales que $\angle PAB = \angle BCA$ y $\angle CAQ = \angle ABC$. Sean M y N los puntos de AP y AQ, respectivamente, tales que P es el punto medio de AM y Q es el punto medio de AN. Demostrar que la intersección de BM y CN pertenece a la circunferencia circunscrita del triángulo ΔABC.



IMO 2014 #4

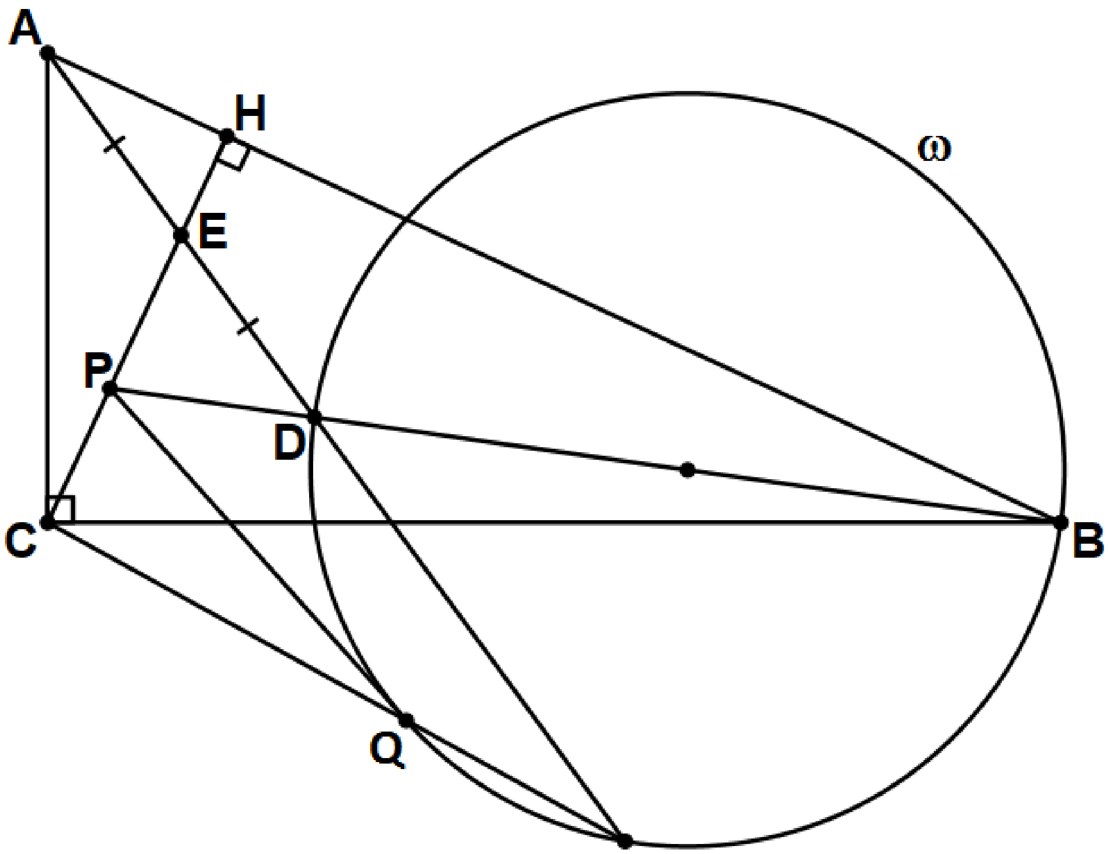
Nota: Este mismo problema aparece en este recopilatorio como problema 2.10, 4.25 y 9.50, con lo que será resuelto mediante un total de cinco técnicas diferentes.

Problema solucionado paso a paso en vídeo

https://youtu.be/9syd0bEiVPc

9.51 Intersección de dos segmentos en triángulo rectángulo.

Sea ΔABC un triángulo con $\angle C = 90°$, y sea H el pie de la altura por C. Tomamos un punto D en el interior del triángulo ΔCBH de forma que CH pasa por el punto medio de AD. Sea P el punto de intersección entre las rectas BD y CH. Sea ω la semicircunferencia de diámetro DB que corta el segmento CB en un punto interior. Trazamos la recta que pasa por P y es tangente a ω en Q. Demuestra que las rectas CQ y AD se cortan en ω.



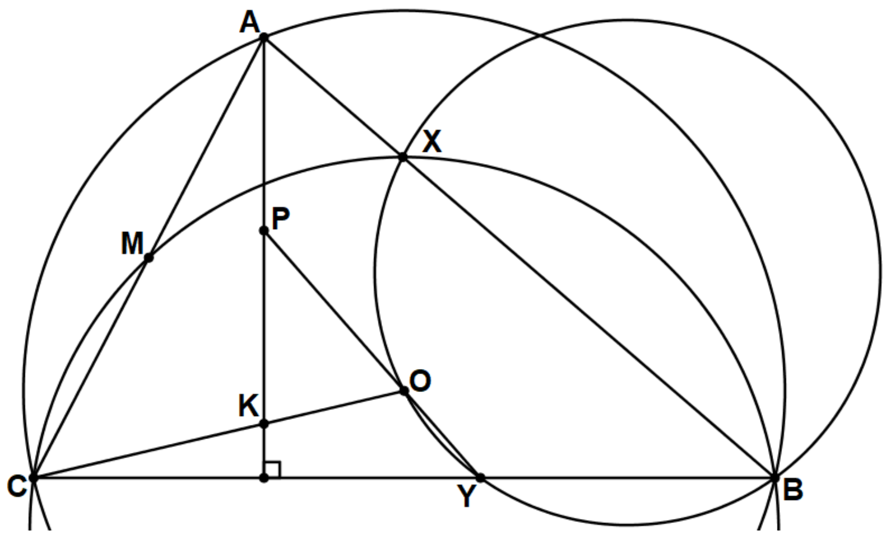
IMO 2015 SL #G3

Problema solucionado paso a paso en vídeo

https://youtu.be/WDqVKLHA4-0

9.52 IGO 2017 Advanced Level #3.

Sea O el circuncentro de un triángulo ΔABC. La recta CO corta la altura por A en el punto K. Sean P y M los puntos medios de $\overline{AK}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Si PO corta BC en Y, y el la circunferencia circunscrita del triángulo BCM corta AB en X, demuestra que BXOY es cíclico.



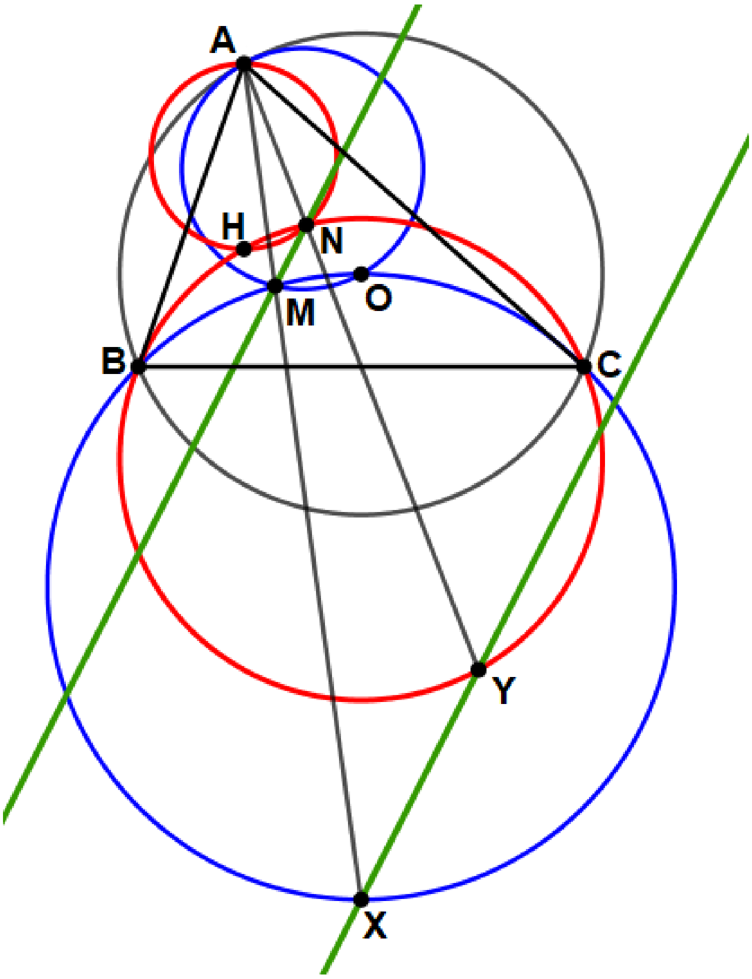
IGO 2017 Advanced Level #3

Problema solucionado paso a paso en vídeo

https://youtu.be/dGbswDsmDLM

9.53 ELMO 2014 #5.

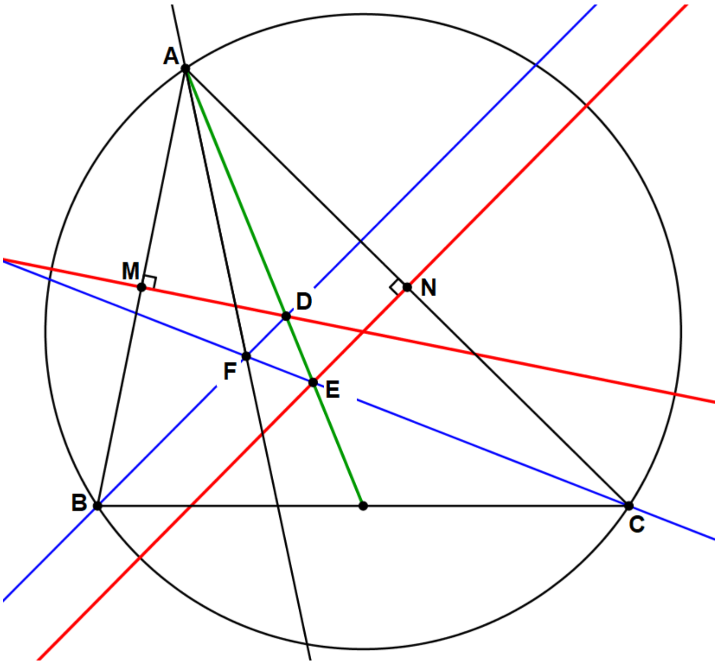
Marcamos el ortocentro H y el circuncentro O de un triángulo ΔABC. La circunferencia (ΔBOC) cortará la circunferencia de diámetro AO en $M \neq O$. Sea X el segundo punto de corte entre AM y (ΔBOC). De forma similar, (ΔBHC) cortará la circunferencia de diámetro AH en $N \neq H$ y sea Y el segundo punto de corte entre (ΔBHC) y AN. Demuestra que $MN \parallel XY$.



ELMO 2014 #5

9.54 USAMO 2008 #2.

En un triángulo ΔABC, sean M y N los respectivos puntos medios de los lados AB y AC. Las mediatrices de AB y AC cortan la A-mediana en D y E, respectivamente. Sea F el punto de corte entre BD y CE. Demuestra que A, M, F y N son cocíclicos.



USAMO 2008 #2

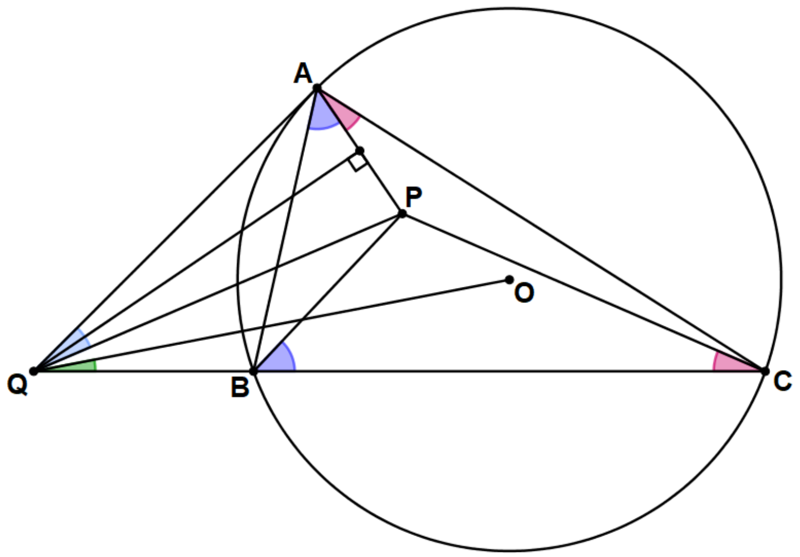
Nota: Este mismo problema aparece como problema 3.24 en el primer volumen de este recopilatorio de problemas de geometría, en donde se presenta una solución analítica basada en coordenadas baricéntricas. Ahora presentamos una solución sintética.

Problema solucionado paso a paso en vídeo

https://youtu.be/ZXDTW9ml8TQ

9.55 TST 2005 #6.

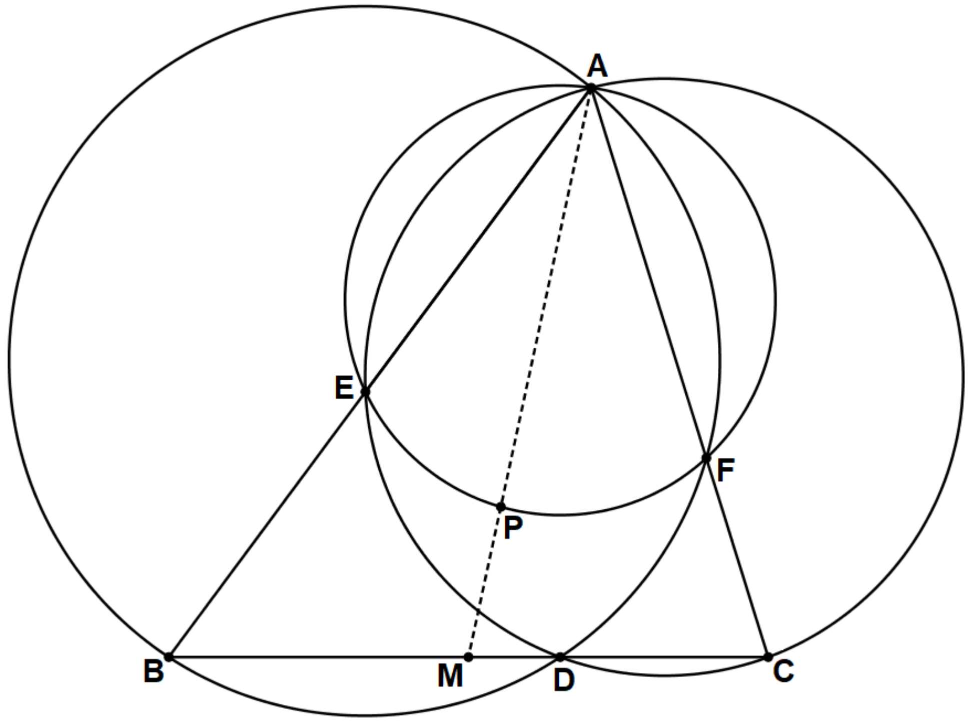
Sea P un punto en el interior de un triángulo ΔABC tal que $\angle PAB = \angle PBC$ y $\angle PAC = \angle PCB$. Supongamos que la mediatriz del segmento AP corta BC en Q. Si O es el circuncentro de ΔABC, demuestra que $\angle AQP = 2\angle OQB$.



USA TST 2005 #6

9.56 ELMO SL 2013 Geometry #3.

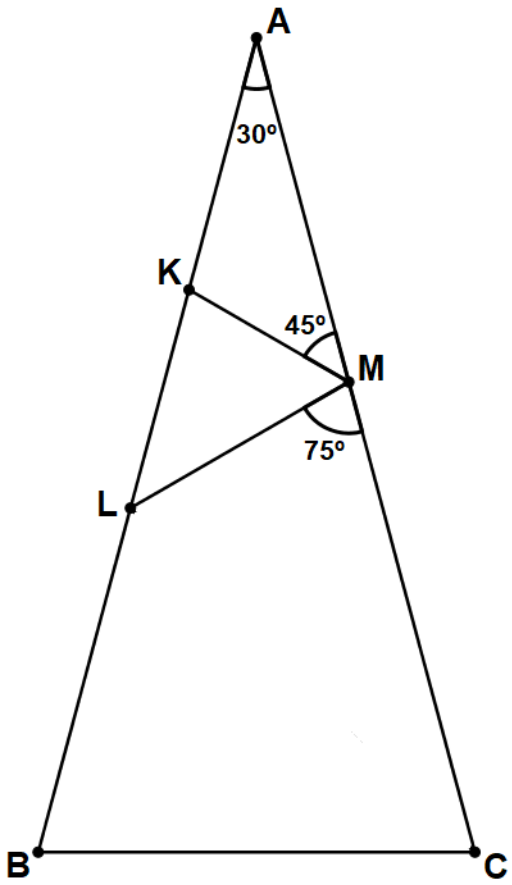
En un triángulo ΔABC, sea D un punto perteneciente a la recta BC. El circuncírculo de ΔABD corta de nuevo AC en $F \neq A$, y el circuncírculo de ΔADC corta AB de nuevo en $E \neq A$. Demuestra que, al mover D, el circuncírculo de ΔAEF pasa por un punto fijo diferente de A, y que este punto pertenece a la A-mediana del triángulo ΔABC.



ELMO SL 2013 Geometry #3

9.57 IGO 2023 Elementary Level #2.

En un triángulo isósceles ΔABC con AB=AC y $\angle A = 30^{o}$, sean L y M puntos en los lados AB y AC, respectivamente, tales que $AL = CM$. Sea K un punto en AB tal que $\angle AMK = 45^{o}$. Si $\angle LMC = 75^{o}$, demuestra que $KM + ML = BC$.



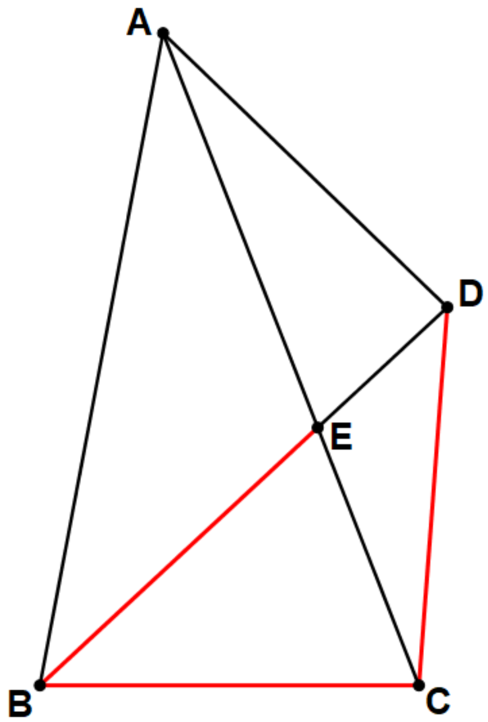
IGO 2023 Elementary Level #2

Problema solucionado paso a paso en vídeo

https://youtu.be/0gy2kENvgPU

9.58 IGO 2023 Elementary Level #4.

Sea ABCD un cuadrilátero convexo. Sea E el punto de intersección de sus diagonales. Supongamos que $CD = BC = BE$. Demuestra que $AD + DC \geq AB$.



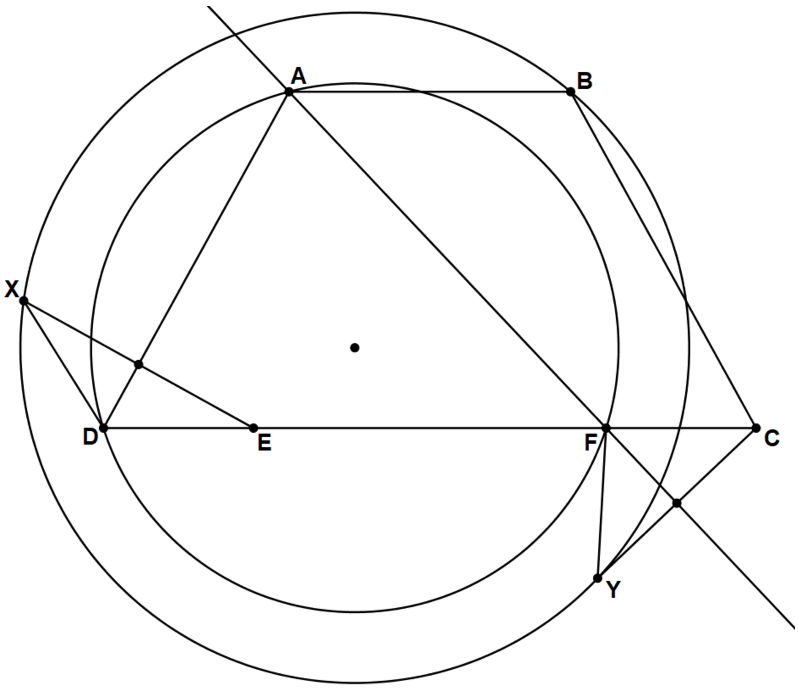
IGO 2023 Elementary Level #4

Problema solucionado paso a paso en vídeo

https://youtu.be/x3tEApr8-7A

9.59 IGO 2021 Elementary Level #4.

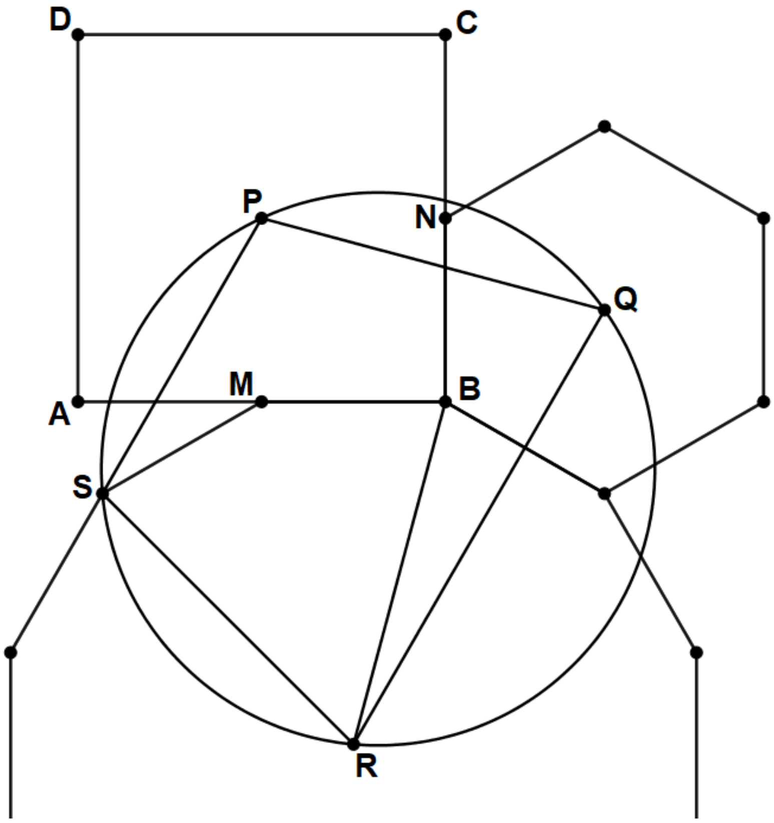
Sea ABCD un trapecio isósceles ($AB \parallel CD$) y sean puntos E y F perteneciendo al segmento CD de forma que D, E, F y C están en este orden y $DE = CF$. Sean X e Y los respectivos puntos simétricos de E y C con respecto a AD y AF. Demuestra que los circuncírculos de los triángulos ΔADF y ΔBXY son concéntricos.



IGO 2021 Elementary Level #4

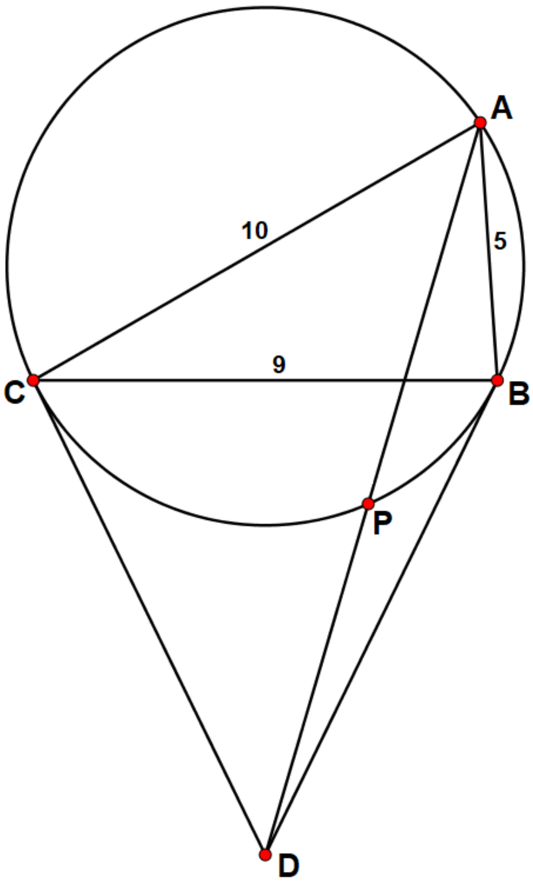
9.60 IGO 2023 Intermediate Level #1.

Sean M y N los puntos medios de los lados AB y BC de un cuadrado ABCD. Generamos el esquema de la siguiente figura, en el que hemos dibujado un hexágono regular y un polígono regular de 12 lados. Los puntos P, Q y R son los centros de estos tres polígonos. Demuestra que PQRS es un cuadrilátero cíclico.



9.61 AIME I 2024 #10.

Sea ΔABC un triángulo inscrito en una circunferencia ω. Sea D el punto de corte de las rectas tangentes a ω por B y C, y supongamos que $\overline{AD}$ corta ω en P. Si AB=5, BC=9 y AC=10, AP se puede escribir de la forma m/n, donde m y n son enteros coprimos. Determina m+n.



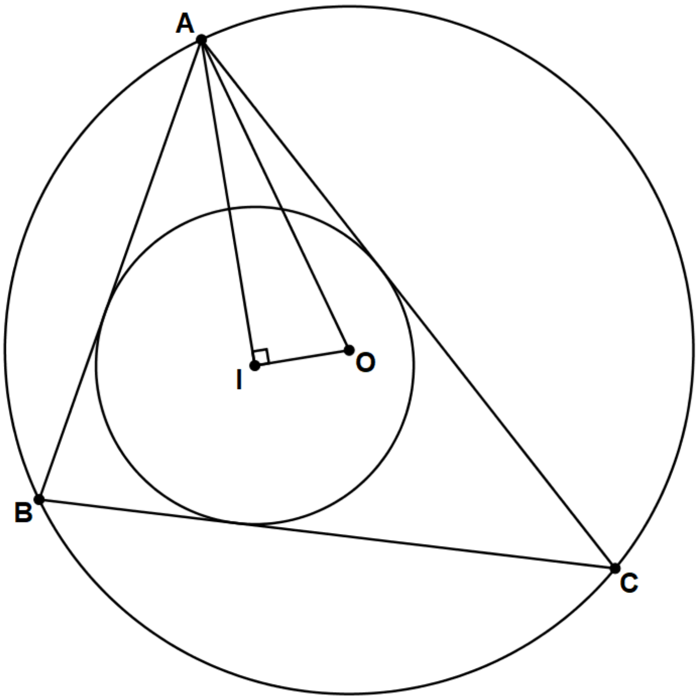
AIME I 2024 #10

Problema solucionado paso a paso en vídeo

https://youtu.be/Lt750QBxwBs

9.62 AIME II 2024 #10.

Sea ΔABC un triángulo con incentro I y circuncentro O tal que $\overline{IA} \perp \overline{OI}$. El circunradio es 13 y el inradio es 6. Determina $AB \cdot AC$.



AIME II 2024 #10

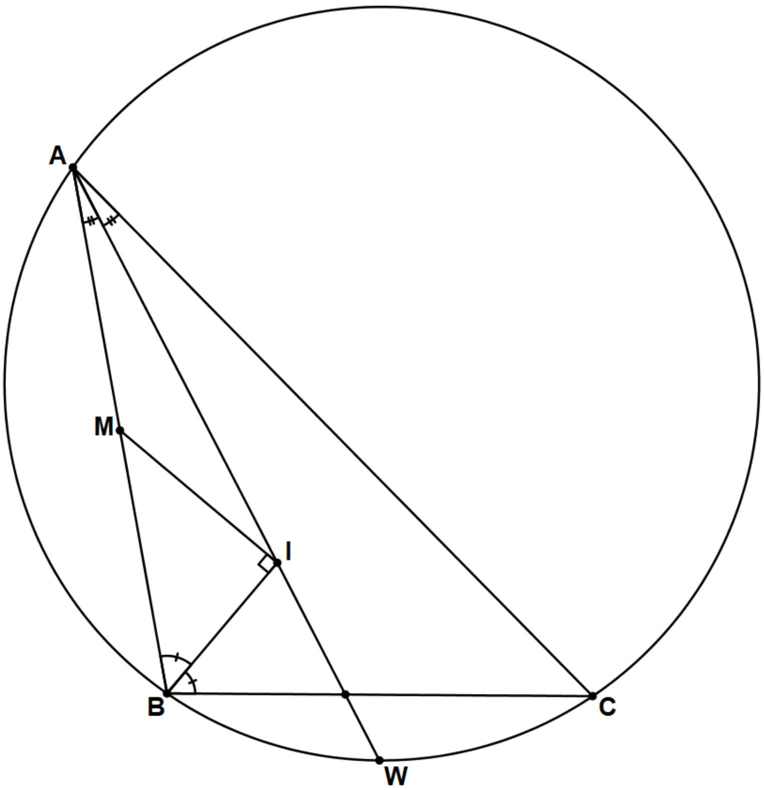
Problema solucionado paso a paso en vídeo

https://youtu.be/4MyCzEoxHwU

9.63 KVANT NR 12/2017.

Sea M el punto medio del lado AB de un triángulo ΔABC, I el incentro de ΔABC, y W el punto de intersección entre el la bisectriz AI y el circuncírculo de ΔABC.
Suponiendo que $\angle BIM = 90^o$, demuestra que:

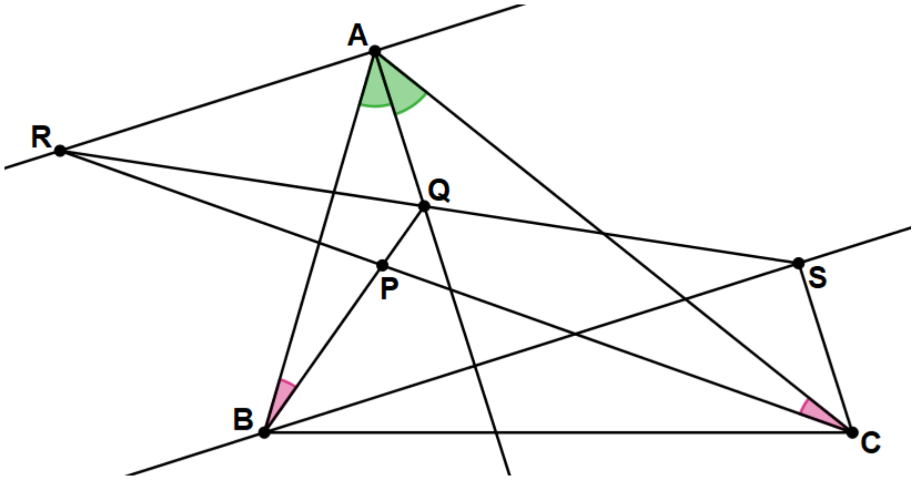
a) $AI = 2IW$
b) $AB + AC = 3BC$



Kvant nr 12/2017

9.64 OME 2024 #3.

Sean ABC un triángulo escaleno y P un punto interior tal que ∠PBA = ∠PCA. Las rectas PB y PC cortan a las bisectrices interior y exterior de A en los puntos Q y R, respectivamente. Sea S el punto tal que CS es paralela a AQ y BS es paralela a AR. Demuestra que Q, R, S están alineados.



OME 2024 #3

Problema solucionado paso a paso en vídeo

https://youtu.be/qVvQPQdASHc

Soluciones.

9.1

Sea $\alpha = \angle AEB$.

$$36 = [\Delta ABE]\cdot[\Delta CDE] = \frac{\sin\alpha \cdot AE \cdot BE}{2}\cdot\frac{\sin\alpha \cdot DE \cdot EC}{2} =$$

$$= \frac{\sin\alpha \cdot AE \cdot DE}{2}\cdot\frac{\sin\alpha \cdot BE \cdot EC}{2} = [\Delta ADE]\cdot[\Delta ACE]$$

Luego la respuesta correcta es 36.

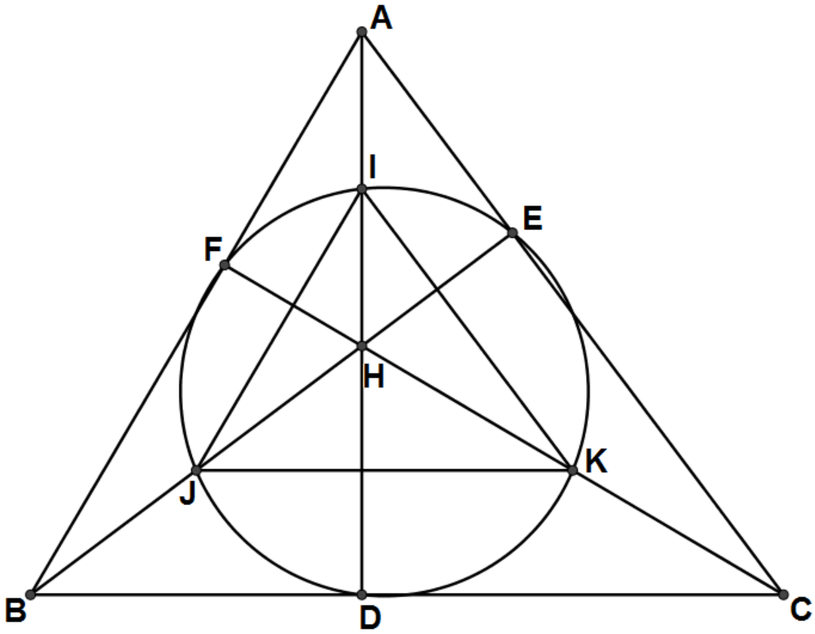
9.2

$\angle BDC = \angle BHC$ por ser ángulos que abarcan el mismo arco.
Sea C' el punto de corte entre HC y el lado AB.
$\angle BHC = 180º - \angle BC'H$ por ser ángulos suplementarios.
$\angle BC'H = 90º - \angle C'BH = 90º - \angle ABH = 90º - 20º = 70º$ puesto que $CC' \perp AB$.
Luego $\angle BDC = \angle BHC = 180º - 70º = 110º$

Nota: En las soluciones oficiales (SMT, página 942) se ofrece una solución alternativa mediante la recta de Simpson.

9.3

Lo primero que observamos es que la circunferencia (ΔDEF) es la “circunferencia de los nueve puntos” asociada al triángulo ΔABC, pues es la única circunferencia que pasa por los pies de las alturas (GA/11.7.1).



Sabemos que esta circunferencia, además, pasa por los puntos medios de los segmentos HA, HB y HC, luego los puntos I, J y K son precisamente estos puntos.

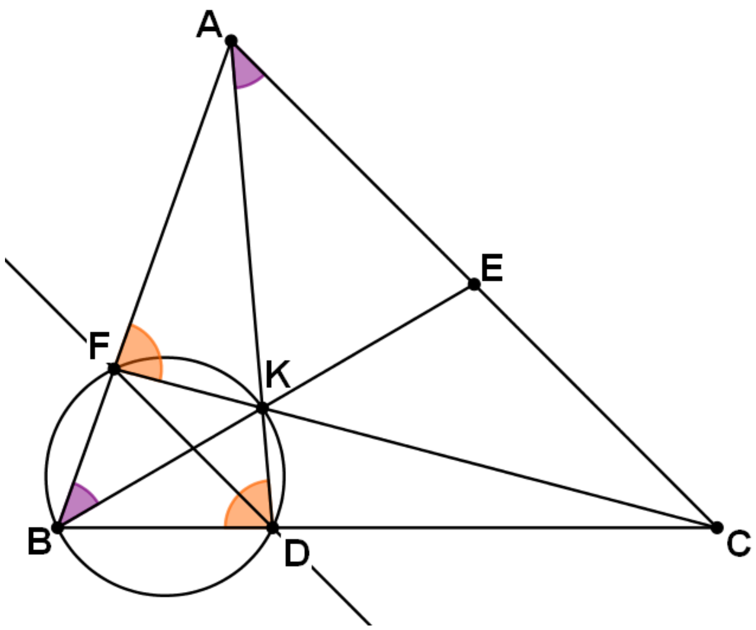
Aplicando el “Teorema del Conector de puntos medios” (GA/7.2.1) al triángulo ΔHAC, se deduce que IK es paralelo a AC y $|IK| = \frac{1}{2}|AC|$. Con este mismo razonamiento se deduce que el triángulo ΔIJK es una homotecia de razón 1/2 del triángulo ΔABC. Luego su área será $(1/2)^2$ del área del triángulo ΔABC.

El área del triángulo ΔABC se puede calcular sin necesidad de calculadoras aplicando por la fórmula de Heron (GA/10.5.11)

$[\Delta ABC] = 84 \Rightarrow [\Delta IJK] = 84/4 = 21$

9.4

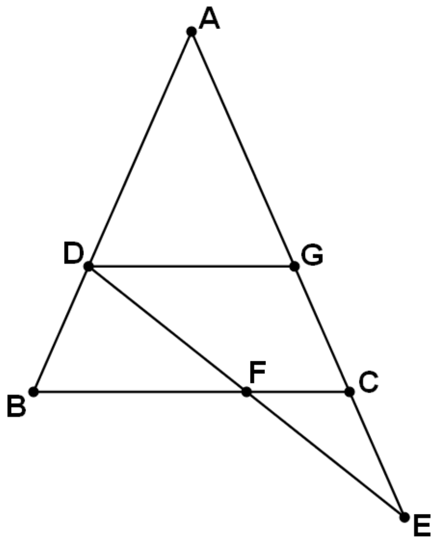
De $BD/DC = BF/FA$ deducimos que $FD // AC$.
De $\angle ADB = \angle AFC$ deducimos que el cuadrilátero FKDB es cíclico.



Luego $\angle ABE = \angle FBK = \angle FDK$
y $\angle FDK = \angle FDA = \angle DAC$ por ser AD una transversal entre dos rectas paralelas.

9.5

Primera versión.
Trazamos la recta paralela a BC por D. Sea G su punto de corte con AC.



El triángulo ΔADG es isósceles, luego $AD = AG$, y por tanto $DB = GC$.

Aplicando el teorema BPT (8.2.8) al triángulo ΔDGE con $DG // FC$ tenemos

$$\frac{DF}{FE} = \frac{GC}{CE}$$

Luego

$$\frac{DF}{FE} = \frac{DB}{CE} = \frac{DB}{DB} = 1 \Rightarrow DF = FE$$

Segunda versión.
Como aplicación directa del Teorema de Menelao (11.2.2), aplicado al triángulo ΔADE y la transversal DE:

$$1 = \frac{AB}{BD} \cdot \frac{DF}{FE} \cdot \frac{EC}{CA} = \frac{DF}{FE} \Rightarrow DF = FE$$

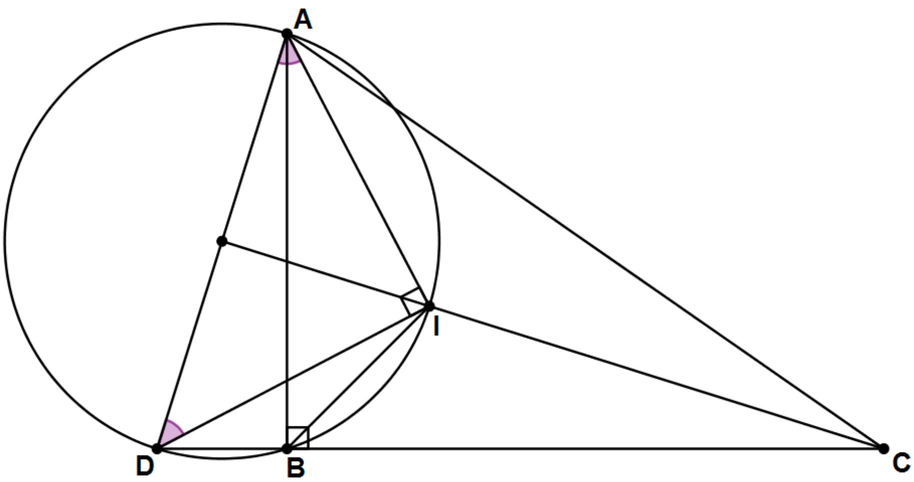
en donde hemos aplicado que $AB = CA$ y $BD = EC$.

Fuente de estas soluciones: Geometry Problems for Math Competitions (Jerry Gu) (página 99)

9.6

Aplicando el Teorema de Tales, sabemos que los puntos I , B pertenecen a la circunferencia de diámetro AD, luego $\angle ADI = \angle ABI = 45^{o}$.
Por otro lado, $\angle DAI = 90^{o} - \angle ADI = 90^{o} - 45^{o} = 45^{o}$.
Luego ΔADI es un triángulo isósceles, con $AI = DI$.
$\angle IAC = \angle IAB = \angle IDB$ y $\angle ACI = \angle ICD$, por lo que $\Delta ACI \approx \Delta DCI$, y como comparten dos lados iguales, serán congruentes, es decir $AC = DC$.

Así pues, el triángulo ΔACD será isósceles, y por lo tanto su bisectriz CI será también altura, es decir, $CI \perp AD$, tal y como queríamos ver.



$$ID = \sqrt{b(b-a)} \Leftrightarrow ID^2 = AC \cdot (AC - BC) = AC \cdot BD \Leftrightarrow \frac{ID}{BD} = \frac{AC}{ID} = \frac{CD}{ID}$$

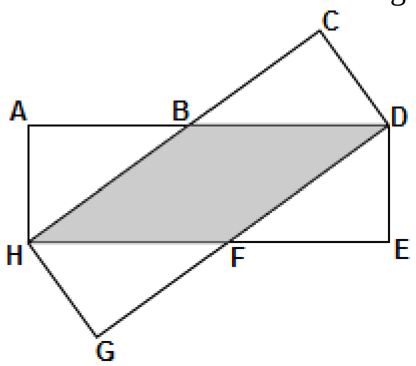
Y esta última igualdad se deduce que los triángulos ΔDIB y ΔDCI son semejantes. En efecto, está claro que comparten el ángulo $\angle IDC = \angle IDB$, y además
$\angle ICB = 90^{o} - \angle ADB = \angle DAB = \angle DIB$

Observación: En las soluciones oficiales se ofrece un argumento alternativo:

$$DB = AC - CB = b - a$$
$$AD^2 = c^2 - (b-a)^2 = c^2 + b^2 + a^2 - 2ab = 2b(b-a)$$
$$2ID^2 = AD^2 = 2b(b-a)$$

9.7

Denotemos de la siguiente forma los vértices de esta configuración:



Sean $a = FE$, $b = FD$. Por Pitágoras, $b^2 = a^2 + 3^2$.

Los triángulos ΔFED y ΔFGH son semejantes, pues son rectángulos y además comparten el ángulo en el vértice F, pero también son congruentes, pues $GH = DE = 3$.
Luego $9 = HF + FE = b + a$.
Solo nos queda resolver el sistema

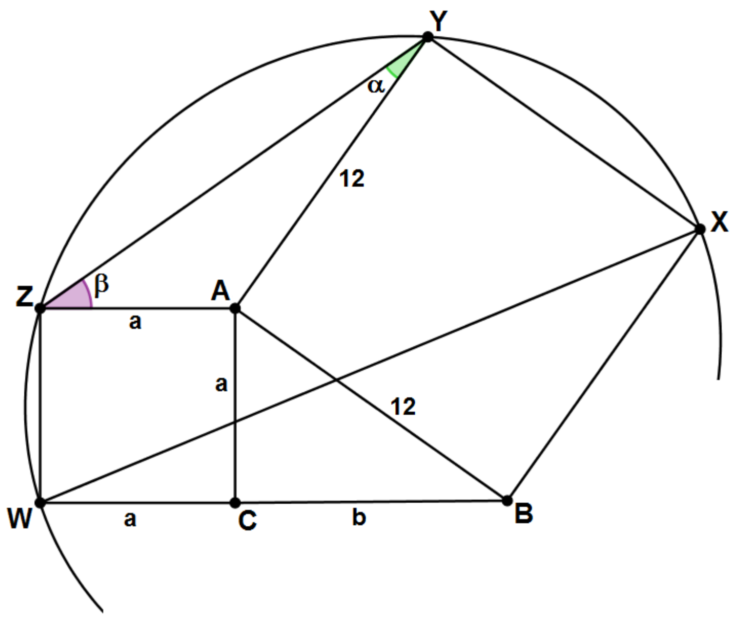
$$\begin{cases} b^2 = a^2 + 3^2 \\ 9 = a + b \end{cases} \Rightarrow b^2 = (9-b)^2 + 9 = 9^2 - 18b + b^2 + 9 \Rightarrow 18b = 90 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow a = 4$$

$$[\Delta DED] = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

y él área buscada es $3 \cdot 9 - 2 \cdot 6 = 15$ (D)

9.8

Sean $a = AC$ y $b = BC$. Está claro que $a^2 + b^2 = 12^2$.
Sean $\alpha = \angle ZYA$ y $\beta = \angle YZA$.



Por ser ZYXW un cuadrilátero cíclico, los ángulos opuestos serán suplementarios. Es decir:

$180^\circ = \angle ZYX + \angle ZWX = \angle ZYA + \angle AYX + \angle ZWX = \alpha + 90^\circ + \angle ZWX \Leftrightarrow$

$90^\circ = \alpha + \angle ZWX \Leftrightarrow \angle ZWX = 90^\circ - \alpha$

Pero $\angle ZWB = 90^\circ$, por lo tanto $\angle XWB = \alpha$.

Con un razonamiento similar,

$180^\circ = \angle WZY + \angle YXW = \angle WZA + \angle YZA + \angle YXW = 90^\circ + \beta + \angle YXW \Leftrightarrow$

$90^\circ = \beta + \angle YXW \Leftrightarrow \angle YXW = 90^\circ - \beta$

Pero $\angle YXB = 90^\circ$, y por lo tanto $\angle WXB = \beta$.

Así pues, por el criterio AA, los triángulos ΔZYA y ΔXBW son semejantes, y por tanto sus lados correspondientes son proporcionales:

$\dfrac{a+b}{12} = \dfrac{12}{a} \Leftrightarrow a(a+b) = 12^2$

Recordamos que se cumple $a^2 + b^2 = 12^2$, y por tanto

$a^2 + b^2 = a(a+b) = a^2 + ab \Rightarrow b^2 = ab \overset{b\neq 0}{\Rightarrow} b = a$

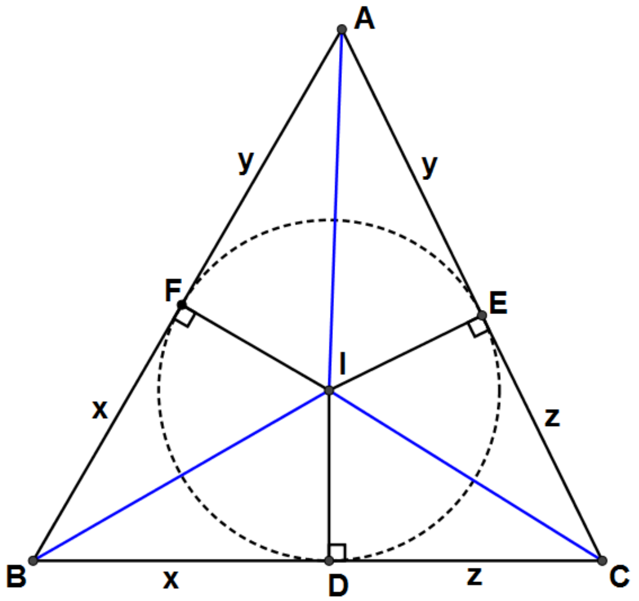
Es decir, nuestro triángulo rectángulo es un triángulo rectángulo isósceles.

Finalmente, $12^2 = a^2 + b^2 = 2a^2 \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{144}{2} = 72 \Rightarrow a = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

El perímetro del triángulo es $a + b + 12 = 2 \cdot 6\sqrt{2} + 12 = 12\sqrt{2} + 12$ (C)

9.9

Sean D, E y F los respectivos pies de las perpendiculares por el punto I a los lados BC, AC y AB.
Sabemos que segmentos tangentes concurrentes son congruentes (GA/10.2.9), luego $x = BD = BF$, $y = AF = AE$, $z = CD = CE$



Por las condiciones del enunciado se cumple:

$$\begin{cases} x + z = 25 \\ x + y = 27 \\ y + z = 26 \end{cases}$$

Que es un sistema que es fácilmente resoluble:
Restando a la tercera ecuación la primera obtenemos $y - x = 1$, y sumando con la segunda obtenemos $2y = 28 \Rightarrow y = 14 \Rightarrow x = y - 1 = 13$

Por otro lado, el área de este triángulo se puede determinar por la fórmula de Heron:

$$s = \frac{25 + 26 + 27}{2} = 39$$

$$[\Delta ABC] = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{39(39-25)(39-26)(39-27)} = 78\sqrt{14}$$

Ahora aplicamos la relación entre área e inradio (GA/11.4.8):

$$78\sqrt{14} = [\Delta ABC] = r \cdot s = 39r \Rightarrow r = 2\sqrt{14}$$

Y, finalmente, solo nos queda aplicar Pitágoras para determinar BI:

$$BI^2 = BD^2 + DI^2 = x^2 + r^2 = 13^2 + 4 \cdot 7 = 225 \Rightarrow BI = \sqrt{225} = 15 \quad \text{(A)}$$

9.10

Es fácil determinar los ángulos internos que aparecen en esta figura:
$\angle EBF = 60^o \Rightarrow \angle EBA = \angle FBC = 15^o$
$\angle EDF = 90^o \Rightarrow \angle DEF = \angle DFE = 45^o$

Supongamos que $AB = BC = CD = DA = 1$.
Sea $x = DE \Rightarrow EA = 1 - x$.
Aplicando Pitágoras en ΔDEF tenemos $EF^2 = DE^2 + DF^2 = 2x^2$, pero aplicando Pitágoras en ΔABE se cumple

$$2x^2 = EF^2 = EB^2 = EA^2 + AB^2 = (1-x)^2 + 1^2 = 1 - 2x + x^2 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 2 - 2x = 2(1-x) \Rightarrow \frac{x^2}{1-x} = 2$$

Calculamos las áreas respectivas:

$$[\Delta DEF] = \frac{1}{2}x^2 = x^2/2$$

$$[\Delta ABE] = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1-x) = \frac{1-x}{2}$$

Y por tanto:

$$\frac{[\Delta DEF]}{[\Delta ABE]} = \frac{x^2/2}{(1-x)/2} = \frac{x^2}{1-x} = 2 \quad \text{(D)}$$

Fuente de esta solución: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2004_AMC_10A_Problems/Problem_20 en donde se presentan hasta cinco soluciones diferentes.

9.11

Está claro que la curva $x^2 + y^2 = |x| + |y|$ es perfectamente simétrica respecto al origen: Un punto $P = (x, y)$ satisface la ecuación si y solo si la satisface $(-x, y)$, $(x, -y)$ o $(-x, -y)$.

Supongamos que P pertenece al primer cuadrante: $0 \le x, y$, y por tanto $|x| = x$, $|y| = y$.

Vamos a completar cuadrados:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} x + \left(\frac{1}{2}\right) = x^{2^2} - x + \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

En nuestro caso:

$$x^2 + y^2 = x + y \Leftrightarrow x^2 - x + y^2 - y = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

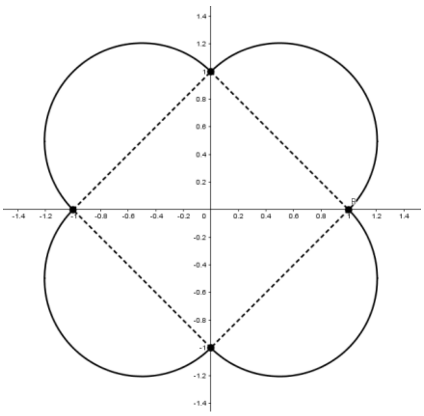
Si definimos $P = (x, y)$, $Q = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, esta última ecuación se puede interpretar de forma geométrica:

$$d(P,Q)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow d(P,Q) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Es decir, es la ecuación de la circunferencia de centro $Q = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y radio $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Los puntos $A = (1,0)$ y $B = (0,1)$ satisfacen la ecuación del enunciado: $1^2 + 0^2 = 1 + 0$.

Interpretando toda la información anterior llegamos a la conclusión de que la región interior determinada por la curva consta de un cuadrado de lado $\sqrt{2}$ y dos círculos de radio $\sqrt{2}/2$:



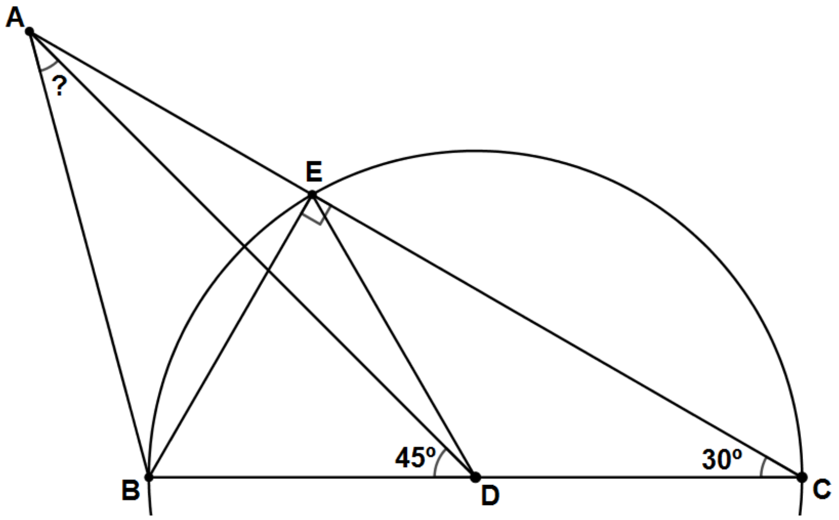
y por tanto su área será

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 + 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 + 2\pi \cdot \frac{2}{4} = 2 + \pi \quad \text{(B)}$$

9.12

Para resolver este problema trazaremos la circunferencia de centro D y radio $BD = DC$. Sea E su punto de corte con el segmento AC. Trazamos los segmentos BE y DE. Por el Teorema de Tales, $\angle BEC = 90°$, luego:

$$\angle EBC = 180° - \angle BEC - \angle ECB = 180° - 90° - 30° = 60°$$



Por otro lado, $\angle ADC = 180° - \angle ADB = 180° - 45° = 135°$, y por tanto $\angle DAC = 180° - \angle ADC - \angle ACD = 180° - 135° - 30° = 15°$

Por el Teorema del Ángulo Central, $\angle BDE = 2 \cdot \angle BCE = 2 \cdot 30° = 60°$, y por tanto el triángulo ΔBED es un triángulo equilátero, pues sus ángulos son de 60º. Por lo tanto sus lados son iguales, es decir:

$$BE = BD = DE.$$

Pero el triángulo ΔAED es isósceles en el vértice E, pues $\angle DAE = \angle EDA = 15°$, y por tanto:

$$AE = ED = DB = BE.$$

Finalmente, puesto que $AE = BE$ y $\angle AEB = 90°$, se deduce que el triángulo ΔAEB es un triángulo rectángulo isósceles, es decir, es un triángulo 45-45-90, luego $\angle BAE = 45°$ y por último $\angle BAE = \angle BAE - \angle DAE = 45° - 15° = 30°$ (B)

9.13

$\angle BAC = 180° - \angle ABC - \angle ACB = 180° - 20° - 40° = 120° \Rightarrow \angle BAD = \angle DAC = \angle BAC / 2 = 60°$

Trazamos una circunferencia con centro B y radio AB. Sea E su punto de corte en el segmento BC.

Está claro que buscamos determinar la longitud EC.

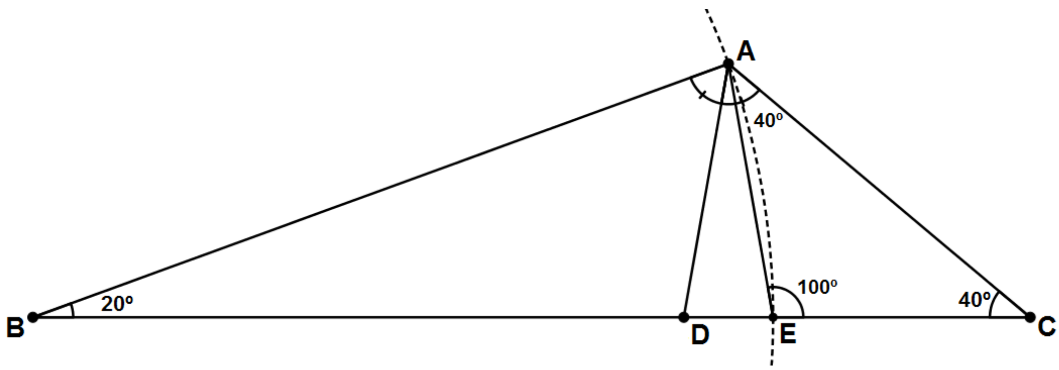
$\angle BDA = 180° - \angle DBA - \angle BAD = 180° - 20° - 60° = 100°$

$\angle ADC = 180° - \angle BDA = 180° - 100° = 80°$

El triángulo ΔABE es isósceles en B, luego $\angle BAE = \angle BEA = (180° - 20°)/2 = 80°$, que es precisamente el ángulo $\angle ADE$, luego el triángulo $\angle ADE$ es isósceles en A, y por tanto $AE = AD = 2$.

$\angle DAE = 180° - \angle ADE - \angle AED = 180° - 80° - 80° = 20° \Rightarrow$

$\angle EAC = \angle DAC - \angle DAE = 60° - 20° = 40°$

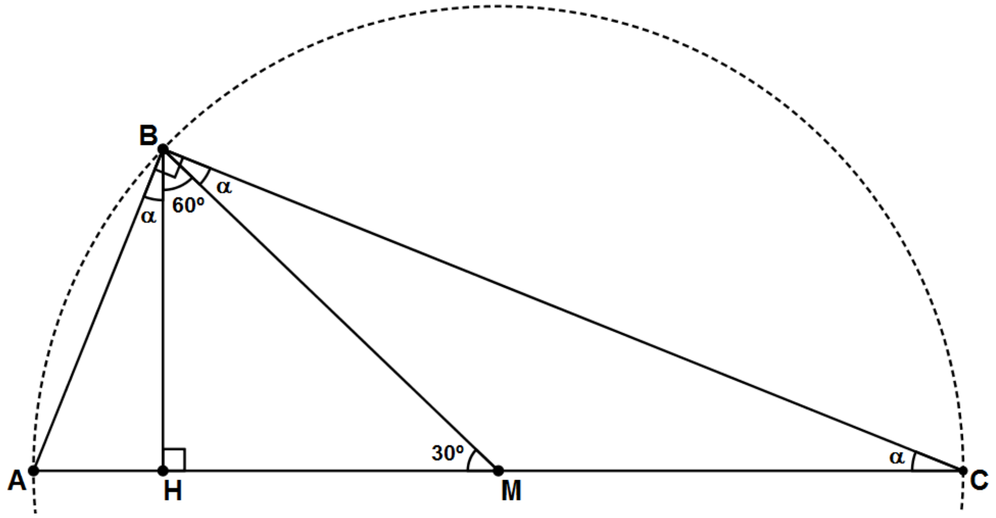


De nuevo, observamos que el triángulo $\angle ADC$ es isósceles en el vértice D, y por tanto $EC = EA = 2$ (C)

9.14

En primer lugar observamos que el triángulo rectángulo ΔHBM es conocido, pues si su hipotenusa es el doble de uno de sus catetos, se tratará del triángulo 30-60-90, y por tanto $\angle HBM = 60^\circ$ y $\angle HMB = 30^\circ$.
Trazamos la circunferencia de centro M y radio $AM = AC$. Por el Teorema de Tales, puesto que $\angle ABC = 90^\circ$, el punto B pertenecerá a dicha circunferencia.

Sea $\alpha = \angle ACB$ el ángulo que queremos determinar. Puesto que $MB = MC$, el triángulo ΔBMC será isósceles, y por tanto $\alpha = \angle MBC$.
Por otro lado, los triángulos ΔABH y ΔABC son semejantes por el Criterio AA de semejanza, pues ambos son triángulos rectángulos que comparten un ángulo común $\angle BAC$. Por lo tanto, $\alpha = \angle ACB = \angle ABH$

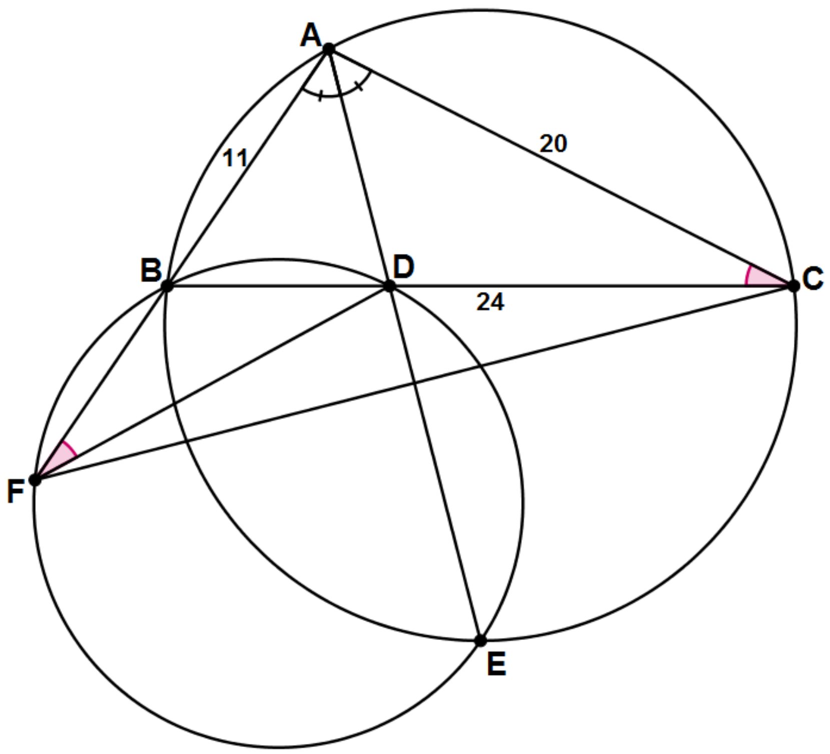


Así pues, en el vértice B nos aparece la siguiente ecuación:
$90^\circ = 2\alpha + 60^\circ \Rightarrow \alpha = 15^\circ$ (A)

9.15

En primer lugar, vamos a demostrar que FA=FC, mediante dos versiones diferentes:

Primera versión.
$\angle AFD = \angle BFD = \angle BED = \angle BEA = \angle ACB = \angle ACD$
Luego $\angle AFD = \angle ACD$, $\angle FAD = \angle DAC$ y por tanto los triángulos ΔAFD y ΔACD son semejantes por el criterio AA. Pero comparten el lado común AD, luego son congruentes. Así pues, $AF = AC = 24 \Rightarrow FB = AF - AB = 20 - 11 = 9$

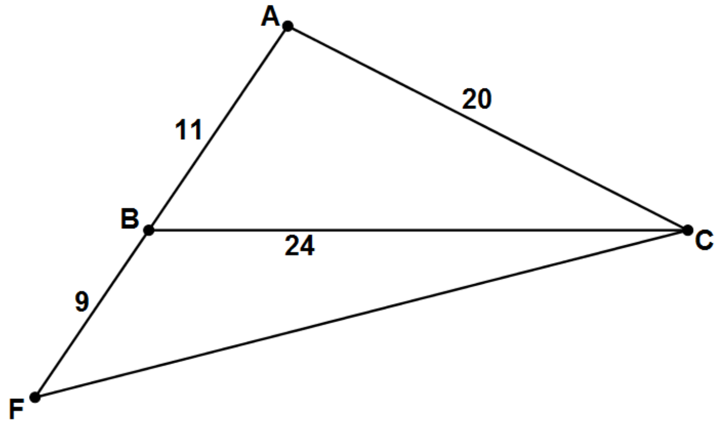


Segunda versión.
$\angle ABD = \angle ABC = \angle AEC$, y $\angle BAD = \angle DAC = \angle EAC$, luego $\Delta ABD \approx \Delta AEC$,
y por tanto
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow AB \cdot AC = AD \cdot AE$$

Aplicando PoP vemos que se cumple $AD \cdot AE = AB \cdot AF$, y por tanto deducimos que
$AB \cdot AC = AD \cdot AE = AB \cdot AF \Rightarrow AB \cdot AC = AB \cdot AF \Rightarrow AC = AF$.
Así pues, $AF = AC = 24 \Rightarrow FB = AF - AB = 20 - 11 = 9$

Segunda parte. Una vez que sabemos que AC=AF, el lado FC lo podemos deducir de dos maneras diferentes:

Primera versión.
Observamos que nos queda el siguiente triángulo ΔAFC con la ceviana BC. Podemos deducir el lado FC que falta mediante el **Teorema de Stewart**:



$$24^2 \cdot 20 + 11 \cdot 9 \cdot 20 = FC^2 \cdot 11 + 20^2 \cdot 9 \Leftrightarrow 13500 = FC^2 \cdot 11 + 3600 \Leftrightarrow 13500 = FC^2 \cdot 11 + 3600 \Leftrightarrow$$
$$9900 = FC^2 \cdot 11 \Leftrightarrow 900 = FC^2 \Leftrightarrow 30 = FC$$

Segunda versión.
El lado FC se podría deducir también por el Teorema del Coseno:

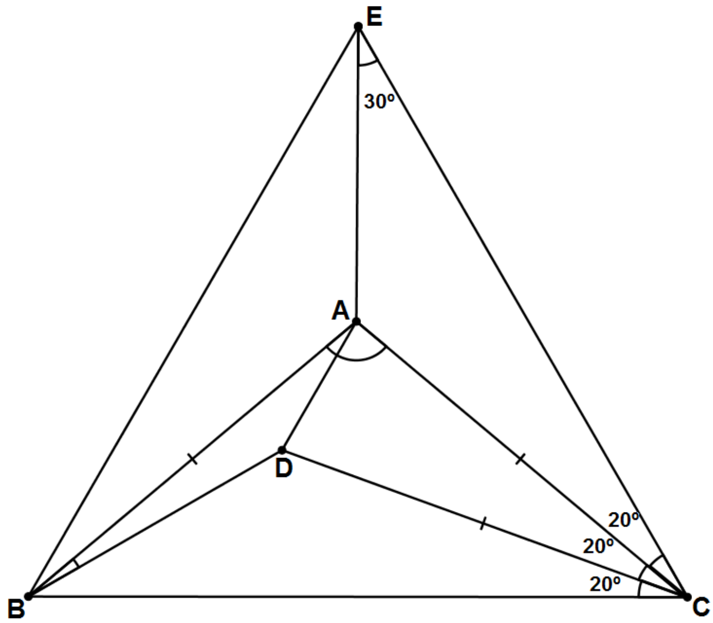
$$24^2 = 11^2 + 20^2 - 2 \cdot 11 \cdot 20 \cdot \cos(\angle BAC) \Leftrightarrow \frac{24^2 - 11^2 - 20^2}{-2 \cdot 11 \cdot 20} = \cos(\angle BAC) \Leftrightarrow \cos(\angle BAC) = \frac{-1}{8}$$

Y por tanto

$$FC^2 = 20^2 + 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot 20 \cos(\angle BAC) = 800 - 80\left(\frac{-1}{8}\right) = 900 \Rightarrow FC = \sqrt{900} = 30$$

9.16

Trazamos el segmento BC. El triángulo ΔABC es isósceles, luego $\angle ACB = \angle ABC = 40^{o}$.
Completamos un triángulo equilátero ΔEBC marcando el punto E de forma que $\angle BCE = 60^{o}$ y $EC = BC$.

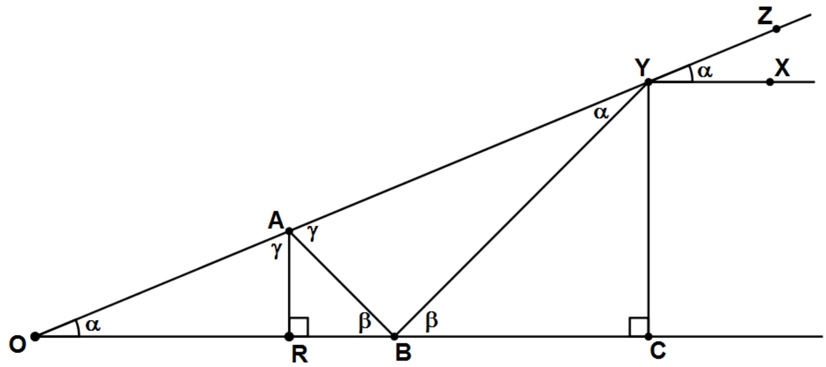


Está claro que $\angle ACE = 20^{o} = \angle BCD$ y $\angle AEC = 30^{o}$, y puesto que $AC = CD$, y $BC = CE$, los triángulos ΔECA y ΔBCD serán congruentes por el criterio SAS, y por tanto $\angle CBD = \angle AEC = 30^{o}$ y finalmente $\angle ABD = \angle ABC - \angle CBD = 40^{o} - 30^{o} = 10^{o}$

Fuente de la solución: Angel Silva Palacios en Facebook.

9.17

Completamos el esquema añadiendo los puntos A, B, C y Z, tal y como se muestra en la siguiente imagen.
Sabemos que, por la propiedad de incidencia de un rayo de luz, el ángulo de entrada es igual al ángulo de salida, es decir:
$\alpha = \angle ZYX = \angle AYB$, $\beta = \angle ABR = \angle YBC$, $\gamma = \angle OAR = \angle YAB$.
Además, $\alpha = \angle AOR$, por ser OZ una transversal de dos rectas paralelas OC y YX.



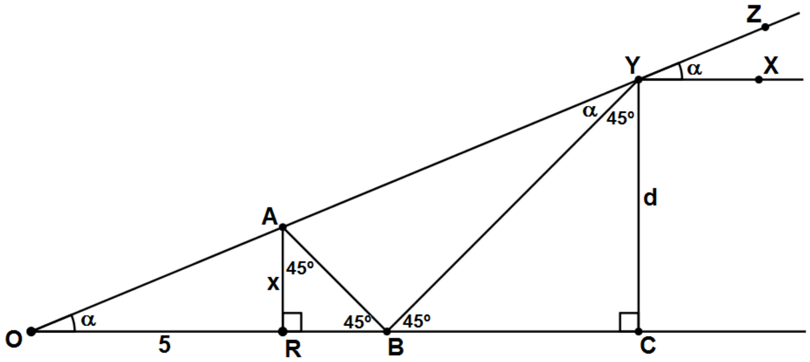
Observamos las siguientes ecuaciones:
Por ser ΔOAR un triángulo rectángulo, $\alpha + \gamma = 90^{o}$
Por ser ΔRAB un triángulo rectángulo, $\angle RAB = 90 - \beta$, y por tanto:
$180^{o} = \gamma + 90 - \beta + \gamma \Leftrightarrow 90 = 2\gamma - \beta$
$\angle ABY = 180^{o} - 2\beta$, y por tanto
$\gamma + 180 - 2\beta + \alpha = 180 \Leftrightarrow \gamma - 2\beta + \alpha = 0$
Con lo cual obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 90^{o} \\ 2\gamma - \beta = 90^{o} \\ \gamma - 2\beta + \alpha = 0^{o} \end{cases}$$

Que se resuelve en $\alpha = 45/2^{o}$, $\beta = 45^{o}$, $\gamma = 135/2^{o}$

Nota: En realidad no hacía falta generar y resolver este sistema. Una vez vemos que tenemos los triángulos ΔORA y ΔYBA ambos con ángulos α y γ, se deduce que son semejantes por el criterio AA, y por tanto $\angle ABY = \angle ORA = 90^{o}$. Ahora, teniendo en cuenta que $180^{o} = \beta + 90^{o} + \beta$ por ser ángulos suplementarios alrededor del punto B, se llega directamente a $\beta = 45^{o}$, que es todo lo que necesitamos para acabar este problema.

Con estos resultados observamos que los triángulos ΔBCY y ΔBRA son triángulos 45-45-90, es decir, triángulos rectángulos isósceles, y por tanto $d = CY = BC$, $x = AR = RB$



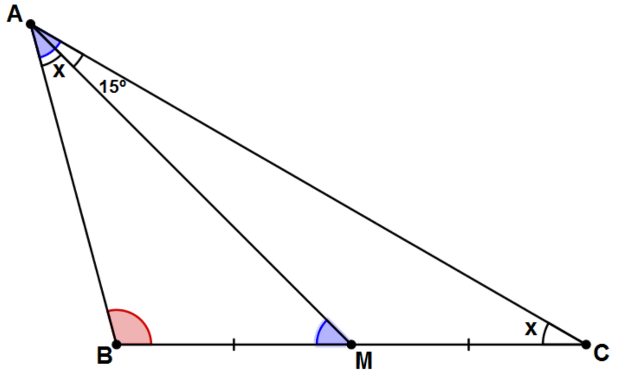
Sabemos que los triángulos 45-45-90 mantienen una proporcionalidad de lados
$1:1:\sqrt{2}$,
Luego $BC = d, BY = \sqrt{2}d$, $x = AR = RB$, $AB = \sqrt{2}x$

Pero por último observamos que $\angle ABY = 180º - 45º - 45º = 90º$, con lo cual los triángulos ΔABY y ΔARO son semejantes, pues tienen los mismos ángulos. Luego sus lados serán proporcionales:

$$\frac{AB}{AR} = \frac{YB}{OR} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}x}{x} = \frac{\sqrt{2}d}{5} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}d}{5} \Leftrightarrow d = 5$$

9.18

La clave para resolver este problema está en que, aplicando el Teorema del ángulo exterior, $\angle AMB = 15^{o} + x = \angle BAC$.
Luego los triángulos ΔABC y ΔMBA son semejantes, pues tienen sus ángulos iguales (de hecho, se podría haber visto sin necesidad del cálculo anterior, por el criterio AA, pues $x = \angle BAM = \angle C$ y comparten el ángulo $\angle B$ común).



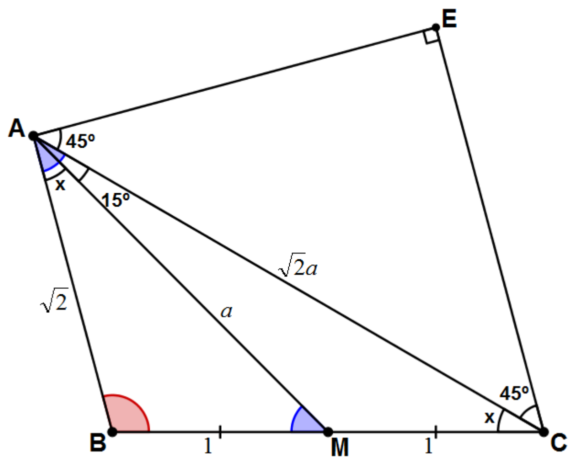
Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $BM = MC = 1$. Luego, por proporcionalidad de lados,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BM}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = BM \cdot BC = 1 \cdot 2 \Rightarrow AB = \sqrt{2}$$

Vamos a llamar $a = AM$.
De nuevo, por proporcionalidad de lados,

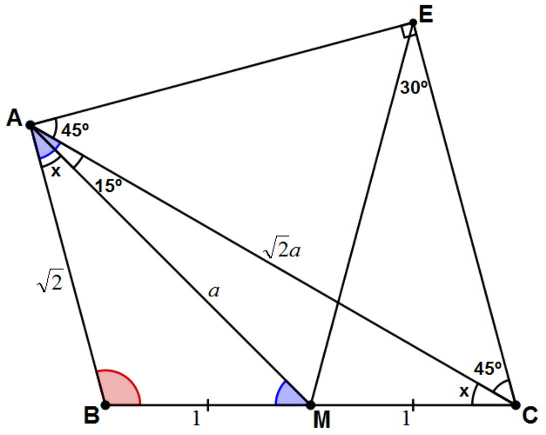
$$\frac{AC}{AM} = \frac{BC}{AB} \Leftrightarrow \frac{AC}{a} = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow AC = \frac{2a}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}a}{2} = \sqrt{2}a$$

Ahora construimos un triángulo rectángulo isósceles ΔAEC sobre el lado AC:



Sabemos que, puesto que es un triángulo 45º-45º-45º, $AC = \sqrt{2}AE = \sqrt{2}CE$, luego $AE = CE = a$.
Trazamos el segmento ME, y observamos que el triángulo ΔAEM tiene ángulo $\angle EAM = 45^{o} + 15^{o} = 60^{o}$, y $AE = AM$, luego es un triángulo equilátero, y por tanto $EM = AE = ME = a$.

Luego el triángulo ΔMEC cumple $EM = EC = a$, y por lo tanto es isósceles, con $\angle MEC = 90º - 60º = 30º$



Finalmente,

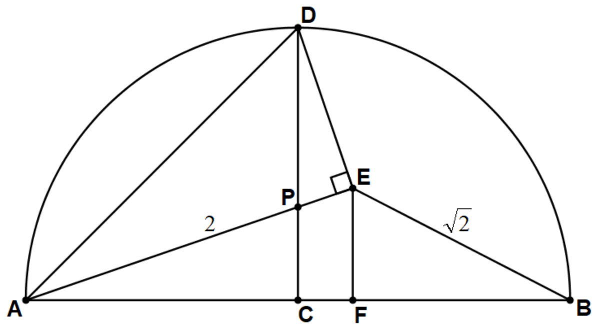
$$\angle MCE = \frac{180º - \angle MEC}{2} = \frac{180º - 30º}{2} = 75º \Rightarrow$$

$$x = \angle BCA = \angle BCE - \angle ACE = 75º - 45º = 30º$$

Fuente de esta solución: GEOMETRI GÜNLÜGÜ PROBLEM 311 https://youtu.be/oxA9DkFu8wI

9.19

Sea el radio $R = AC = BC = CD$



Aplicando Pitágoras,

$AD^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$, por lo tanto $DE^2 = AD^2 - 2^2 = 2R^2 - 4$

$EF^2 = 2^2 - AF^2 = 4 - (R + CF)^2 = 4 - R^2 - 2R \cdot CF - CF^2$

$EF^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 - FB^2 = 2 - (R - CF)^2 = 2 - R^2 + 2R \cdot CF - CF^2$

Y por tanto:

$$2 = 2R \cdot CF + 2R \cdot CF = 4R \cdot CF \Rightarrow CF = \frac{1}{2R}$$

Luego

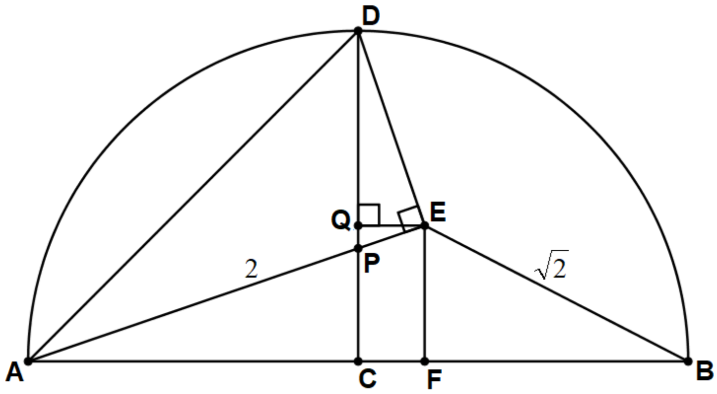
$$AF = AC + CF = R + \frac{1}{2R}$$

Y por tanto

$$EF^2 = 2^2 - AF^2 = 4 - \left(R + \frac{1}{2R}\right)^2 \qquad (1)$$

Por otro lado, $\Delta DEP \approx \Delta ACP$, pues son triángulos rectángulos compartiendo un mismo ángulo en P. Luego $\angle PDE = \angle PAC$.

Trazamos la perpendicular a DP por E, sea Q su punto de corte con DP.



$$\Delta DEQ \approx \Delta DEP \approx \Delta ACP \approx \Delta AFE \Rightarrow \frac{EF}{EA} = \frac{CF}{DE} \Leftrightarrow EF = \frac{EA \cdot CF}{DE} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EF^2 = EA^2 CF^2 \frac{1}{DE^2} = 2^2 \cdot \left(\frac{1}{2R} \right)^2 \frac{1}{2R^2 - 4} = \frac{1}{R^2 \left(2R^2 - 4 \right)} \quad (2)$$

Así pues, uniendo (1) con (2) llegamos a la ecuación

$$\frac{1}{R^2 \left(2R^2 - 4 \right)} = 4 - \left(R + \frac{1}{2R} \right)^2 = 4 - \left(\frac{2R^2 + 1}{2R} \right)^2 = 4 - \frac{\left(2R^2 + 1 \right)^2}{4R^2} = \frac{16R^2 - \left(2R^2 + 1 \right)^2}{4R^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\left(2R^2 - 4 \right)} = \frac{16R^2 - \left(2R^2 + 1 \right)^2}{4} \Leftrightarrow 4 = \left(2R^2 - 4 \right) \left[16R^2 - \left(2R^2 + 1 \right)^2 \right] \Leftrightarrow x = R^2$$

$$4 = (2x - 4) \left[16x - (2x + 1)^2 \right] = (2x - 4) \left[16x - 4x^2 - 4x - 1 \right] = (2x - 4) \left(12x - 4x^2 - 1 \right) \Leftrightarrow$$

$$4 = -8x^3 + 40x^2 - 50x + 4 \Leftrightarrow 0 = -8x^3 + 40x^2 - 50x = x(-8x^2 + 40x - 50)$$

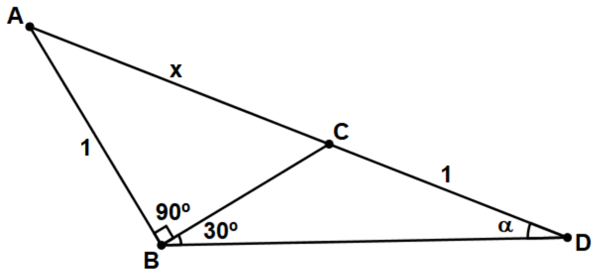
Puesto que está claro que $x \neq 0$ podemos simplificar y deducir que

$$0 = -8x^2 + 40x - 50 \Rightarrow x = R^2 = \frac{5}{2}$$

Finalmente, el área será $\frac{\pi R^2}{2} = \frac{5}{4} \pi$

9.20

Primera versión. Mediante Teorema del seno.
Sea $x = AC$, $\alpha = \angle ADB$.



Aplicamos el Teorema del Seno al triángulo ΔABD:

$$\frac{\sin(90°+30°)}{x+1} = \frac{\sin(\alpha)}{1} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}/2}{x+1} = \sin(\alpha)$$

Aplicando el Teorema del Seno al triángulo ΔCDB:

$$\frac{\sin(\alpha)}{BC} = \frac{\sin(30°)}{1} \Leftrightarrow \sin(\alpha) = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}$$

Con lo cual llegamos a la igualdad

$$\frac{\sqrt{3}/2}{x+1} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{x+1} = \sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow$$
$$(x+1)\sqrt{x^2-1} = \sqrt{3} \Rightarrow (x+1)^2(x^2-1) = 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = 0$$

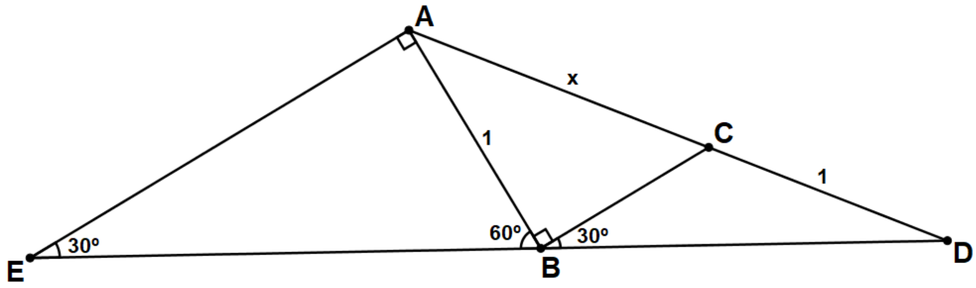
Para resolver esta última ecuación la vamos a factorizar:

$$0 = x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = x^3(x+2) - 2(x+2) = (x^3-2)(x+2)$$

Ahora está claro que sus raíces son -2 y $\sqrt[3]{2}$. La primera no tiene sentido en el contexto de este problema pues es negativa, por lo que nos quedamos con la solución $x = \sqrt[3]{2}$.

Una manera alternativa de resolver esta última ecuación es determinar la raíz $x = -2$ por tanteo (Ruffini). Y con esta raíz factorizar el polinomio como $(x+2)(x^3-2)$, luego la segunda solución real es $x = \sqrt[3]{2}$, que es la solución que buscamos.

Segunda versión. Mediante triángulos semejantes.
Sea $x = AC$. Por Pitágoras, $BC = \sqrt{x^2-1}$.
Trazamos la paralela a BC por A y sea E su punto de corte con el lado BD.



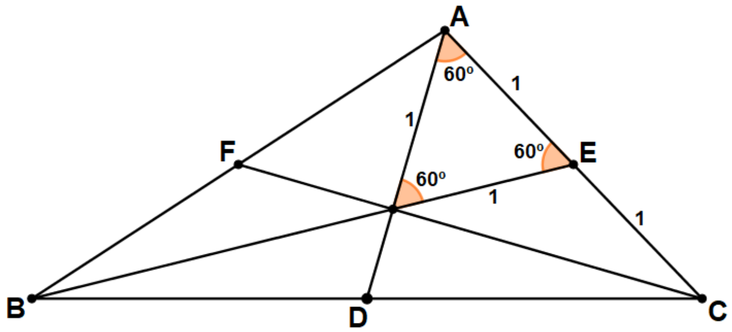
Está claro que el triángulo ΔABE es un triángulo 30º-60º-90º, y puesto que $AB=1$, tendremos $AE=\sqrt{3}$ y $BE=2$.
Por otro lado, ΔAED y ΔCBD están en posición de Tales, y por tanto son semejantes.
Luego:

$$\frac{AD}{CD}=\frac{AE}{BC}\Leftrightarrow\frac{x+1}{1}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-1}}\Leftrightarrow(x+1)\sqrt{x^2-1}=\sqrt{3}$$

ecuación que resolveremos con el razonamiento de la primera versión.

9.21

Prolongamos la mediana CG hasta cortar el lado AB en su punto medio F.
ΔAGE equilátero, $\Rightarrow \angle AEG = 60^{o} \Rightarrow \angle GEC = 180^{o} - \angle AEG = 180^{o} - 60^{o} = 120^{o}$.
$GE = EC \Rightarrow \Delta GEC$ isósceles. $\Rightarrow \angle EGC = \angle ECG = \dfrac{180^{o} - \angle GEC}{2} = \dfrac{180^{o} - 120^{o}}{2} = 30^{o}$.
Así pues, $\angle AGC = \angle AGE + \angle EGC = 60^{o} + 30^{o} = 90^{o}$, es decir, el triángulo ΔAGC es rectángulo.
Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, $AE = EC = AG = GE = 1$.



Luego, aplicando Pitágoras, $GC = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.
Ahora vamos a aplicar que el baricentro corta las medianas en proporcionalidad 1:2. Así pues, $GD = AG/2 = 1/2$, $GB = 2GE = 2$, $GF = CG/2 = \sqrt{3}/2$.
Puesto que $\angle DGC = 180^{o} - (\angle AGE + \angle EGC) = 180^{o} - (60^{o} + 30^{o}) = 90^{o}$, el triángulo ΔDGC es rectángulo, y por tanto, por Pitágoras,

$$CD = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

De la misma forma, $\angle FGA = 90^{o}$, el triángulo ΔFGA es rectángulo, y por tanto, por Pitágoras,

$$AF = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Así pues, $BC = 2CD = 2\dfrac{\sqrt{13}}{2} = \sqrt{13}$, $AB = 2AF = 2\dfrac{\sqrt{7}}{2} = \sqrt{7}$.
Finalmente solo queda aplicar el Teorema del Coseno en el triángulo ΔABC:

$$\left(\sqrt{7}\right)^2 = 2^2 + \left(\sqrt{13}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} \cos C \Leftrightarrow$$

$$\cos C = \frac{7 - 4 - 13}{-4\sqrt{13}} = \frac{5}{2\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{13}}{2 \cdot 13} = \frac{5\sqrt{13}}{26}$$

Y la respuesta correcta es $5 + 13 + 26 = 44$ (A)

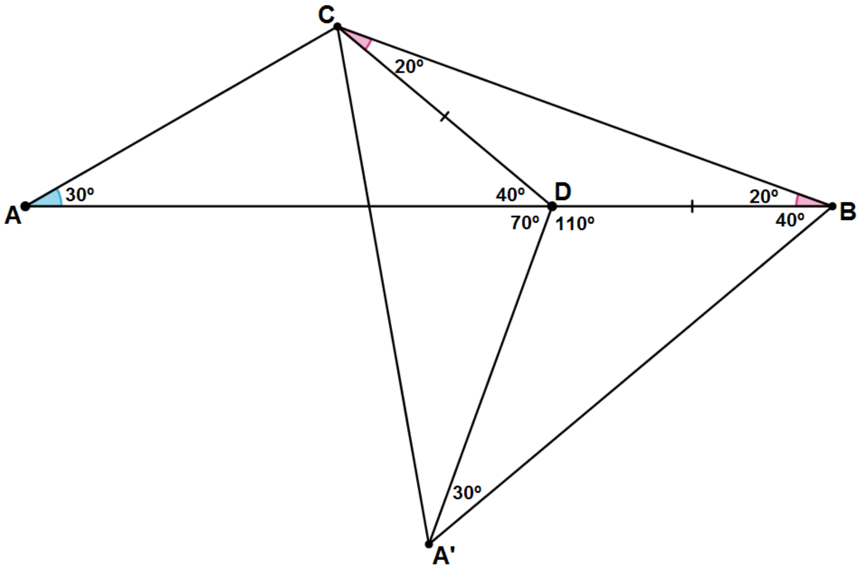
9.22

a) Está claro que $\angle CDA = 20° + 20° = 40°$

Sea A' el punto tal que $\angle ABA' = \angle CDA = 40°$ y $\angle BDA' = \angle DCA = 110°$.

Se cumple $\angle ADA' = 180° - \angle A'DB = 180° - 110° = 70°$

Luego $\angle CDA' = \angle CDA + \angle ADA' = 40° + 70° = 110°$



Los triángulos $\Delta A'DB$ y ΔACD son congruentes por construcción.

Pero ahora vemos que los triángulos $\Delta CDA'$ y $\Delta A'DB$ son congruentes por el criterio SAS, puesto que $CD = DB$, $AD = AD$ y $\angle CDA' = \angle A'DB$.

Luego $\angle CA'D = \angle DA'B = 30°$ y $\angle DCA' = \angle DBA' = 40°$.

Finalmente, $\angle CA'B = \angle CA'D + \angle DA'B = 30° + 30° = 60°$ y

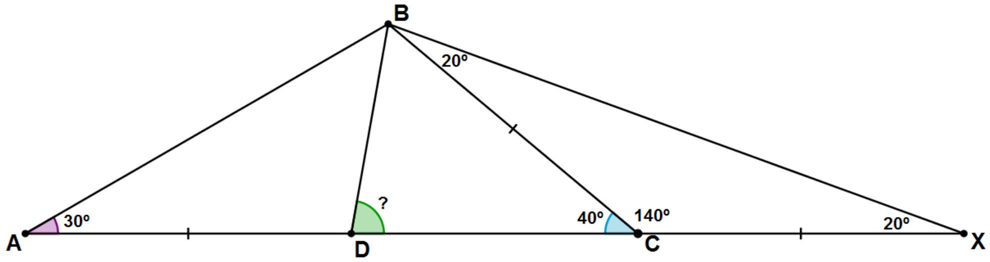
$\angle A'CB = \angle A'CD + \angle DCB = 40° + 20° = 60°$

Es decir, que el triángulo $\Delta A'BC$ es equilátero, puesto que sus tres ángulos son de 60º, y por tanto sus lados son iguales: $BC = A'B = A'C$.

Ahora solo queda tener en cuenta que $A'B = AD$ puesto que $\Delta A'DB \equiv \Delta ACD$.

b) Prolongamos el lado AC hasta un punto X tal que BC=CX.

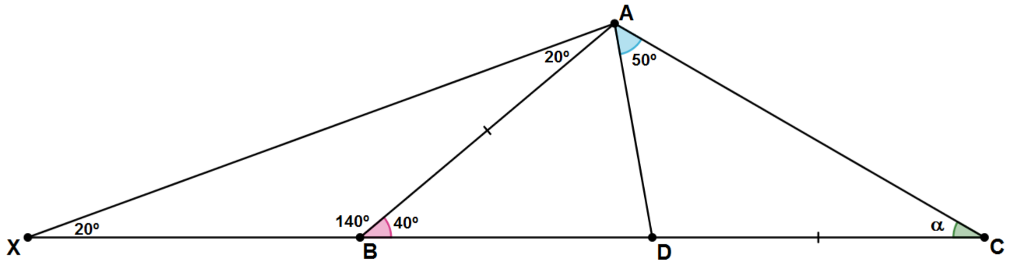
Está claro que $\angle BCX = 180° - \angle BCA = 180° - 40° = 140°$, y puesto que el triángulo ΔBCX es isósceles, pues $BC = CX$, deducimos que $\angle CBX = \angle BXC = 20°$:



Pero ahora estamos en cumpliendo las condiciones el apartado a, con lo que podemos afirmar que $BX = AC$.

Pero por otro lado, $AC = AD + DC = CX + DC = DX$, luego $BX = DX$, y por tanto el triángulo ΔBXD es isósceles, de lo que deducimos que
$\angle XDB = \angle BDX = (180º - 20º)/2 = 80º$.

c) Prolongamos el lado BC hasta un punto X tal que $XB = BA$.
$\angle XBA = 180º - \angle CBA = 180º - 40º = 140º$, y por ser $\angle XBA$ isósceles, se deduce que $\angle AXB = \angle XAB = 20º$.



Aplicando el apartado a, tendremos que $XA = BC$, y por tanto:

$$XA = BC = BD + CD = BD + XB = XD$$

Luego el triángulo ΔAXD es isósceles, y por tanto

$$\angle XDA = \angle XAD = (180º - 20º)/2 = 80º$$

Finalmente,

$$\alpha = 180º - (\angle X + \angle A) = 180º - 20º - 80º - 50º = 30º$$

Fuente de estas soluciones: https://gogeometry.blogspot.com/2010/02/problem-423-triangle-30-40-degree-angle.html

9.23

Vamos a resolver este problema como aplicación de la Circunferencia de Apolonio (Ver el apartado 11.11 de Geometria Axiomática), para ello tenemos que demostrar que XA/XB es constante.

Los triángulos ΔAXB y ΔBXM son semejantes pues comparten dos ángulos comunes. Por tanto:

$$\frac{AX}{BX}=\frac{BX}{XM}\Leftrightarrow\frac{2XM}{BX}=\frac{BX}{XM}\Rightarrow 2=\frac{BX^2}{XM^2}=\left(\frac{BX}{XM}\right)^2\Rightarrow\frac{BX}{XM}=\sqrt{2}$$

Luego

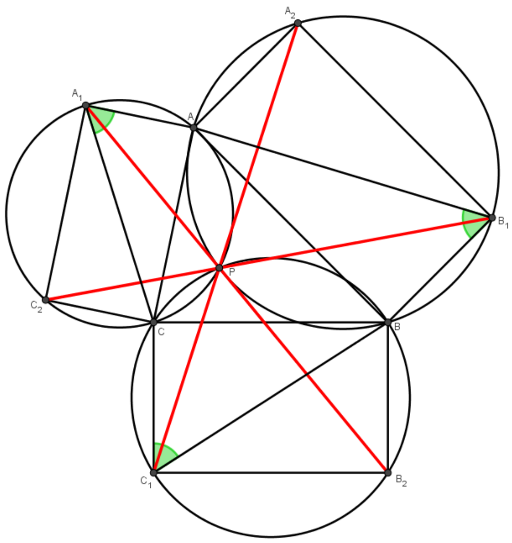
$$\frac{XM}{BX}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\frac{2XM}{BX}=\frac{2}{\sqrt{2}}\Rightarrow\frac{AX}{BX}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

tal y como queríamos ver.

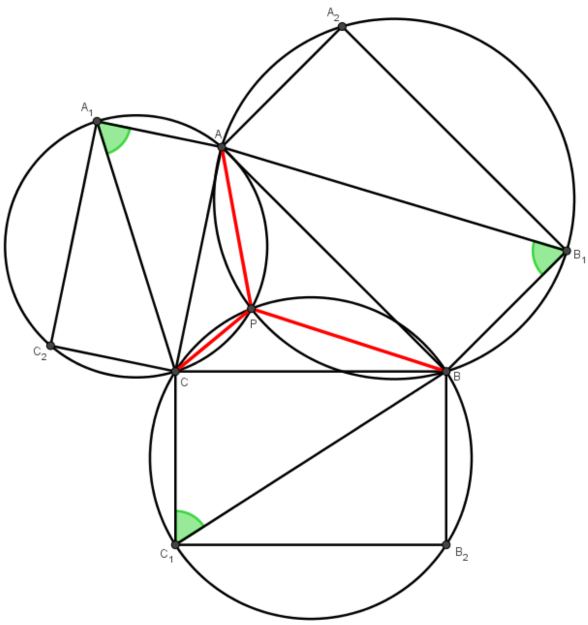
Observación. En las soluciones oficiales (Compendium OMEC, página 439) se presentan otras dos soluciones alternativas, todas ellas jugando con estos mismos elementos.

9.24

La clave para resolver este problema es observar que el punto de concurrencia buscado es el punto P de intersección común de las tres circunferencias circunscritas a los tres rectángulos.



En efecto, si P es el punto de intersección de las tres circunferencias circunscritas, $\angle C_2PA = 90º$, $\angle APB_1 = 90º$, y por tanto los puntos C_2, P, B_1 están alineados, y de la misma forma se demuestra que A_1, P, B_2 están alineados y que C_1, P, A_2 están alineados.



Sea P el punto de corte de las circunferencias circunscritas (CAA_1) y (ABB_1). Entonces:

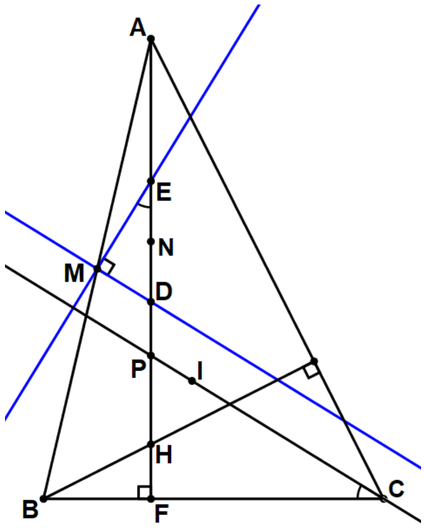
$$\angle C_2PB = 360º - (\angle CPA + \angle BPA) = 180º - \angle CPA + 180º - \angle BPA =$$
$$= \angle CA_1A + \angle AB_1B = 180º - \angle CC_1B$$

y por tanto P pertenece a la circunferencia circunscrita (CBC_1). Así pues, hemos demostrado que, con la condición del enunciado, las tres circunferencias concurren en un punto común P.

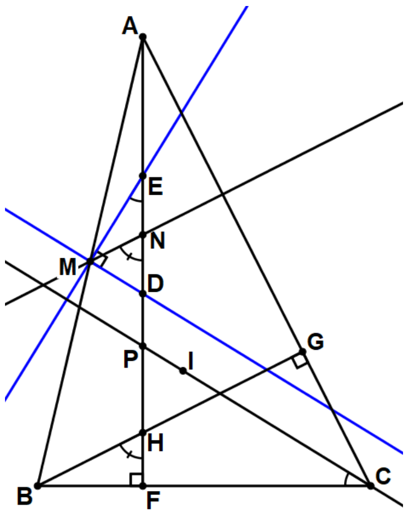
9.25

Sea F el pie de la altura sobre el vértice A. Sea N el punto medio del segmento DE. Vamos a demostrar que D es también el punto medio del segmento AH, con lo cual estará claro que $AE = DH$. En efecto: $AE = AN - EN = HN - DN = DH$.

Prolongamos la bisectriz CI hasta cortar AF en el punto P. La clave para resolver este problema es observar que los triángulos rectángulos ΔFPC y ΔMDE son semejantes, puesto que, por paralelismo, $\angle MDE = \angle FPC$, y por tanto $\angle MED = \angle PCF = \angle C/2$.



Puesto que el punto medio de la hipotenusa de todo triángulo es su circuncentro, por lo que, aplicando el Teorema del ángulo central tendremos
$\angle MND = 2\angle MED = 2 \cdot \angle C/2 = \angle C$.
Sea G el pie de la altura por B. Está claro que $\Delta BGC \approx \Delta BFH$ por el criterio AA, luego
$\angle BHF = \angle BCG = \angle C$

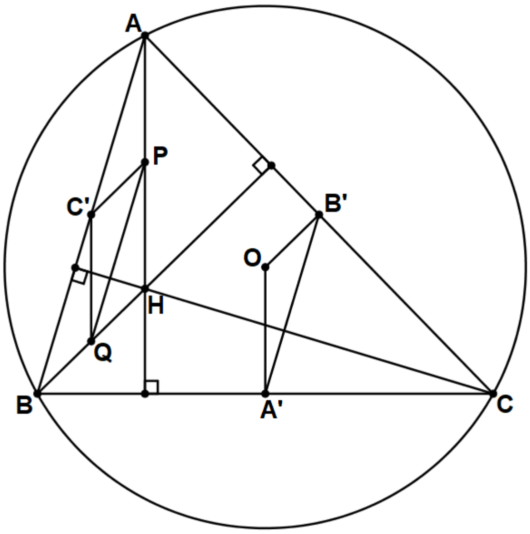


Con todo esto llegamos a $\angle MND = \angle BHF$, por lo que $MN // BH$, y por el conector de puntos medios, se deduce que $AN = NH$, es decir, que N es el punto medio del segmento AH, tal y como queríamos ver.

Fuente de esta solución: Soluciones oficiales (OME pág. 957)

9.26

Sean A', B' y C' los puntos medios de los lados BC, AC y AB, respectivamente. Sea P el punto medio del segmento AH, y Q el punto medio del segmento BH.



Puesto que C' es el punto medio de AB y P es el punto medio de AH, por el Teorema del conector de puntos medios (TCPM), $C'P \,//\, BH$ y puesto que BH y OB' son perpendiculares comunes de AC, se deduce que son paralelas, y por tanto $C'P \,//\, OB'$. Con un razonamiento similar se deduce que $C'Q \,//\, OA'$.

Por otro lado, A' y B' son los puntos medios de los lados BC y AC, y por tanto, por el TCPM, $A'B' \,//\, AB$ y $A'B' = \dfrac{AB}{2}$.

Puesto que P y Q son los puntos medios de los segmentos AH y BH, de nuevo por el TCOM, $PQ \,//\, AB$ y $PQ = \dfrac{AB}{2}$.
De lo anterior se deduce que $PQ = A'B'$.
Puesto que C' y Q son los puntos medios de los segmentos AB y BH, por el TCPM, $C'Q = \dfrac{AH}{2}$

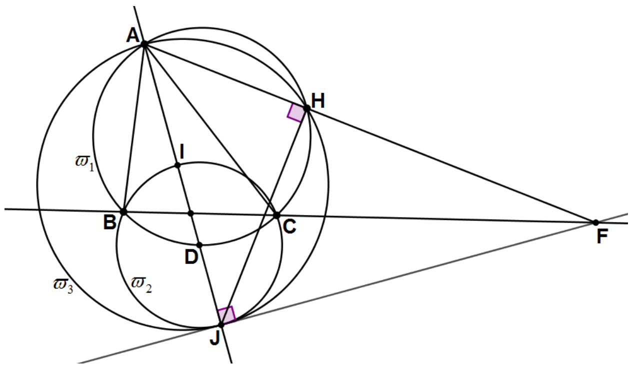
Así pues, los triángulos $\Delta OB'A'$ y $\Delta C'PQ$ tienen los lados paralelos dos a dos, por lo tanto son semejantes (Criterio AA), y puesto que, además, $PQ = A'B'$, los triángulos serán congruentes, luego $OA' = C'Q = \dfrac{AH}{2} = AP$, tal y como queríamos ver.

9.27

En primer lugar vamos a demostrar que el punto H pertenece a la circunferencia circunscrita del triángulo ΔABC.

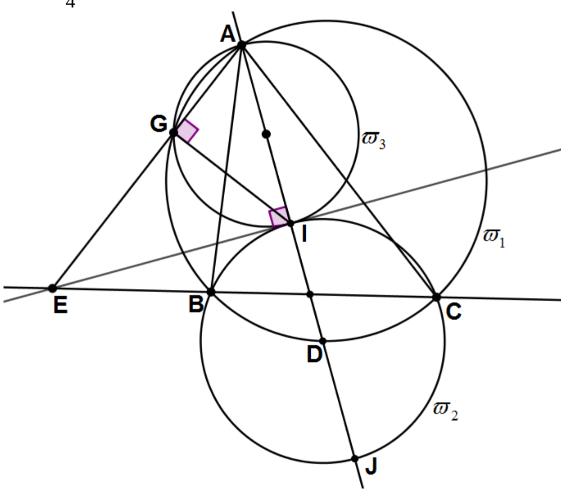
Sabemos que el punto D es el centro de la circunferencia circunscrita del triángulo ΔBIC, y su diámetro es IJ.

Sea $\varpi_1 = (\Delta ABC)$ y $\varpi_2 = (\Delta BIC)$. Trazamos además la circunferencia de diámetro AJ, a la que llamaremos ϖ_3.



El eje radical de ϖ_1 y ϖ_2 es la recta $BC = BF$.
El eje radical de ϖ_2 y ϖ_3 es la recta JF.
Estos dos ejes radicales tienen punto común F.
Sea $H' \neq A$ el segundo punto de corte entre ϖ_1 y ϖ_3.
Luego el eje radical de ϖ_1 y ϖ_3 es AH', que forzosamente debe pertenecer a AF (ver "Centro radical, 14.2). Luego H' es un punto de AF que pertenece a ϖ_3, y por tanto, aplicando Tales, $\angle AH'J$ será recto. Luego JH' será la perpendicular por J que pasa por AF, y por unicidad de la perpendicular que pasa por un punto exterior a una recta, $H' = H$.

Con un razonamiento similar demostramos que G también pertenece a la circunferencia $\varpi_1 = (\Delta ABC)$. Sea ahora ϖ_4 la circunferencia de diámetro AI.



El eje radical de ϖ_1 y ϖ_2 es la recta $BC = BE$.

El eje radical de ϖ_2 y ϖ_4 es la recta IE.
Estos dos ejes radicales tienen punto común E.
Sea $G' \neq A$ el segundo punto de corte entre ϖ_1 y ϖ_4.
Luego el eje radical de ϖ_1 y ϖ_4 es AG',
Así pues, forzosamente G' pertenecerá a AE, y puesto que G' pertenece a ϖ_4, aplicando Tales, $\angle AG'I$ es recto, y por tanto G' será el punto de corte entre AE y su perpendicular por I, es decir $G' = G$ y por tanto G pertenece a $\varpi_1 = (\Delta ABC)$.
Ahora vamos a demostrar que los triángulos rectángulos ΔAIE y ΔAJF son semejantes mediante proporcionalidad de lados, es decir, $\frac{AI}{EI} = \frac{AJ}{FJ}$.
Sea K el punto de corte entre la bisectriz AI y el lado BC.
Queremos ver que

$$\frac{AI}{EI} = \frac{AJ}{FJ} \Leftrightarrow \frac{AI}{AJ} = \frac{EI}{FJ}$$

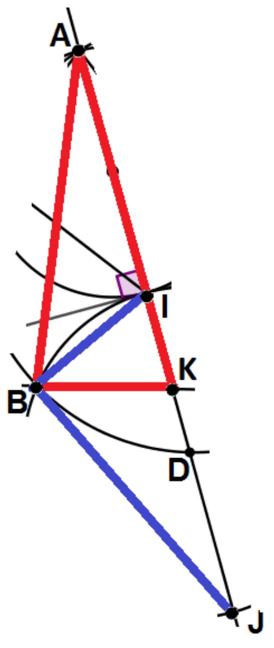
Por otro lado, está claro que $\Delta EIK \approx \Delta FJK$, y por tanto

$$\frac{EI}{IK} = \frac{FJ}{JK} \Leftrightarrow \frac{EI}{FJ} = \frac{IK}{JK}$$

Luego tenemos que demostrar que

$$\frac{AI}{AJ} = \frac{IK}{JK}$$

Para ello observamos que BI es la bisectriz interior por B del triángulo ΔABK, y BJ la bisectriz exterior,



y por tanto (ver 11.4.2 y 11.4.3)

$$\frac{AI}{IK} = \frac{AB}{BK} = \frac{JA}{JK} \Rightarrow \frac{AI}{JA} = \frac{IK}{JK}$$

tal y como queríamos ver.
Así pues, $\Delta AIE \approx \Delta AJF$, y por tanto $\angle EAI = \angle JAF = \angle IAH$, y puesto que $\angle BAI = \angle IAC$ por definición de recta bisectriz, deducimos que $\angle GAB = \angle EAB = \angle CAH$. Ángulos iguales abarcan cuerdas iguales (ver 10.1.2), por lo que podemos concluir que $GB = HC$.

9.28

Marcamos el centro de la circunferencia O y varios de sus segmentos internos.

$AD = DG \Rightarrow \Delta ADG$ isósceles $\Rightarrow \angle DAG = \angle AGD$

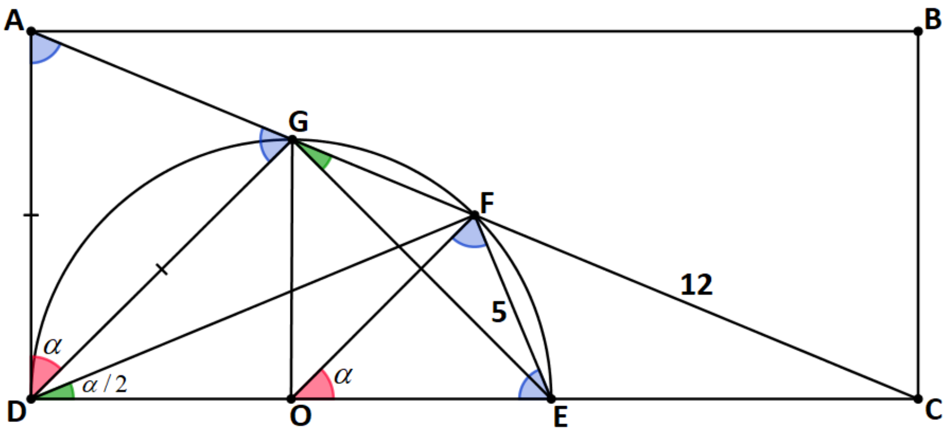
Por ser DGFE cíclico, $\angle FEO = \angle AGD$

Por ser ΔOFE isósceles $\angle OFE = \angle FEO$.

Así pues, $\Delta ADG \approx \Delta FOE$ por el criterio de semejanza AA, de donde se deduce que $\alpha = \angle FOE = \angle ADG$.

Aplicando el Teorema del Ángulo Central,

$\angle FGE = \angle FOE / 2 = \alpha / 2$



Ahora observamos que, puesto que F pertenece a la circunferencia de diámetro DE, $\angle DFE = 90^o$, pero por otro lado, $\angle DAC = \angle DFE$, luego $\Delta DFE \approx \Delta CDA$ por el criterio de semejanza AA, y por tanto $\angle FCE = \angle FDE = \alpha / 2$.

Así pues, ΔDFC es isósceles y por tanto $DF = FC$, y por tanto F pertenece a la mediatriz del segmento CD, de lo que se deduce que $AF = FC = 12$, y por tanto $AC = AF + FC = 24$.

También observamos que $\angle FCE = \alpha / 2 = \angle FGE$, luego el triángulo ΔGEC es isósceles y por tanto $GE = EC$.

Por último, puesto que GFED es cíclico, $\angle EFC = \angle DGC$, y por tanto $\Delta DGC \approx \Delta FEC$ por el criterio AA de semejanza. Luego

$\frac{DG}{FE} = \frac{GC}{EC} = \frac{DC}{FC} \Rightarrow \frac{DG}{5} = \frac{DC}{12} \Rightarrow AD = DG = \frac{5DC}{12}$ y por tanto, aplicando Pitágoras,

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = \left(\frac{5}{12}DC\right)^2 + DC^2 = \frac{25}{144}DC^2 + DC^2 = \left(\frac{25}{144}+1\right)DC^2 = \frac{169}{144}DC^2 \Rightarrow$$

$$AC = \sqrt{\frac{169}{144}}DC = \frac{13}{12}DC$$

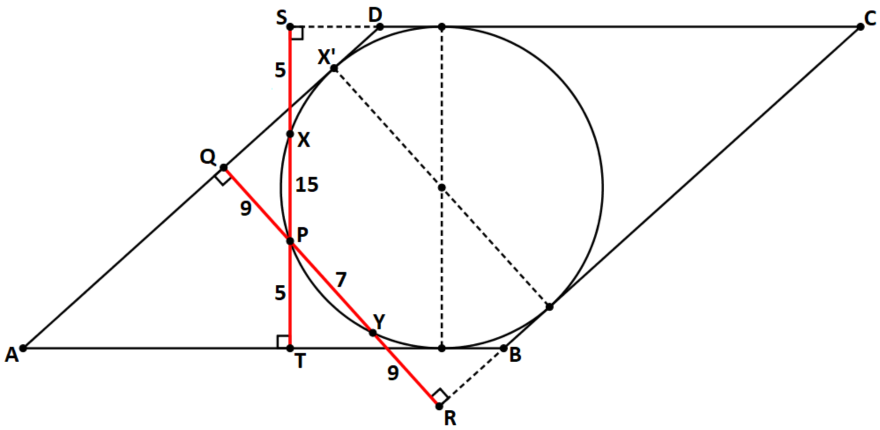
Así pues,

$$24 = AC = \frac{13}{12}DC \Rightarrow DC = \frac{288}{13}.$$

9.29

Trazamos la perpendicular a AD y BC por P, y sean Q y R sus respectivos puntos de corte.
Trazamos la perpendicular a AB y CD por P, y sean S y T sus respectivos puntos de corte.
Sea $X \neq P$ el segundo punto de corte entre la recta ST y el circuncírculo.
Sea $Y \neq P$ el segundo punto de corte entre la recta QR y el circuncírculo.

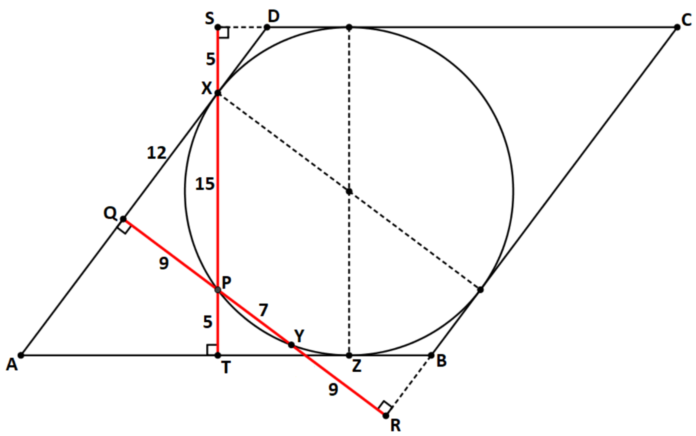
Puesto que todo rombo los lados opuestos equidistan,
$QR = ST \Rightarrow 9+16 = 5+PS \Rightarrow PS = 20$.
Es fácil demostrar que $XS = PT = 5$, por lo que $PX = PS - XS = 20-5=15$
y que $QP = YR = 9$, por lo que $PY = PR - YR = 16-9=7$.



Sea X' el punto de tangencia entre el incírculo y la recta AD. Aplicando el Teorema de la Tangente-Secante (¶101) tenemos:

$$QX'^2 = QP \cdot QY = 9 \cdot (9+7) = 144 \Rightarrow QX' = \sqrt{144} = 12$$

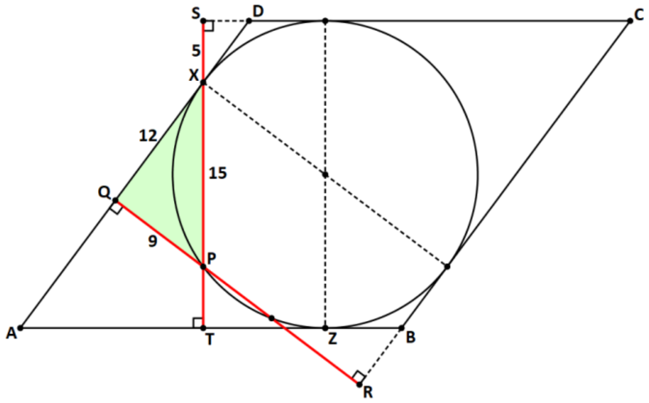
Y por tanto, aplicando Pitágoras, $PX'^2 = PQ^2 + QX'^2 = 9^2 + 12^2 = 225 = 15^2$, de donde se deduce que $X' = X$.



Los triángulos ΔXSD y ΔXQP son claramente semejantes, pues son triángulos rectángulos y tienen un ángulo en común, luego

$$\frac{XS}{XQ} = \frac{XD}{XP} \Leftrightarrow \frac{5}{12} = \frac{XD}{15} \Rightarrow XD = \frac{15 \cdot 5}{12} = \frac{25}{4}$$

Por otro lado, los triángulos ΔXPQ y ΔXAT son claramente semejantes, pues son rectángulos y comparten el ángulo $\angle QXP$:



Luego

$$\frac{XP}{XA} = \frac{XQ}{XT} \Leftrightarrow \frac{15}{XA} = \frac{12}{20} \Leftrightarrow XA = 25$$

Y finalmente $AD = XA + XD = 25 + \frac{25}{4} = \frac{125}{4}$

Y el perímetro del rombo es $4AD = 125$.

Observación 1. Una semejanza aún más potente hubiera sido trazar la perpendicular a AB por D, que cortará AB en D'. Los triángulos $\Delta ADD'$ y ΔXPQ son claramente semejantes, y sabemos que $DD' = ST = 25$, luego

Luego

$$\frac{DD'}{AD} = \frac{XQ}{XP} \Leftrightarrow \frac{25}{AD} = \frac{12}{15} \Leftrightarrow AD = \frac{125}{4}$$

Observación 2. Sin utilizar esta última semejanza se podría haber seguido de la siguiente manera:

Sea Z el punto de tangencia entre el incírculo y el lado AB. Aplicando el Teorema de la Tangente-Secante (¶101) tenemos

$$TZ^2 = TP \cdot TZ = 5 \cdot (5 + 15) = 100 \Rightarrow TZ = \sqrt{100} = 10$$

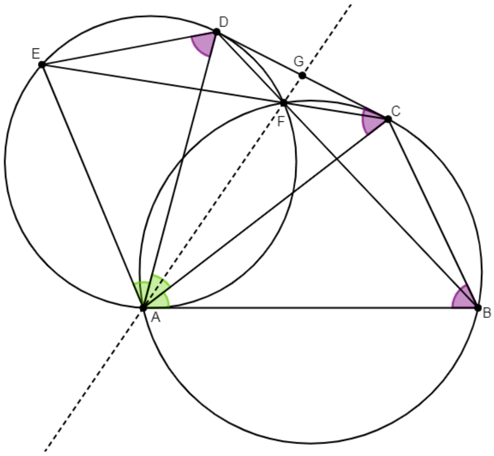
Puesto que $AX = AZ \Rightarrow AQ + 12 = AT + 10 \Rightarrow AT = AQ + 2$, y aplicando Pitágoras en los triángulos ΔAQP y ΔATP, que tienen la diagonal AP común, tenemos

$$AQ^2 + 9^2 = AT^2 + 5^2 \Leftrightarrow AQ^2 + 81 = (AQ + 2)^2 + 25 \Leftrightarrow AQ^2 + 56 = (AQ + 2)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow AQ^2 + 56 = (AQ + 2)^2 = AQ^2 + 4AQ + 4 \Rightarrow 56 = 4AQ + 4 \Rightarrow 52 = 4AQ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AQ = 13$$

Finalmente, $AD = AQ + QX + XD = 13 + 12 + \frac{25}{4} = \frac{125}{4}$

9.30

En primer lugar observamos que A es el centro de la semejanza espiral que pasa B a E y C a D:



Ahora observamos que $\Delta BAD \approx \Delta CAE$. En efecto,

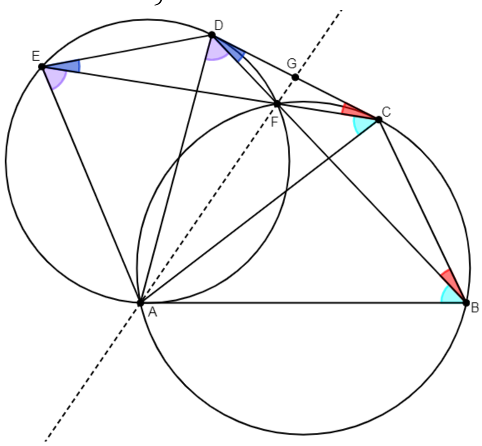
$$\Delta BAC \approx \Delta DAE \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$$

Y puesto que $\angle BAD = 2\angle BAC = \angle CAE$, solo hace falta aplicar el criterio SAS de semejanza.

$$\Delta BAD \approx \Delta CAE \Rightarrow \begin{cases} \angle AEC = \angle ADB \\ \angle ECA = \angle DBA \end{cases}$$

Y puesto que $\angle ABC = \angle ACD$, está claro que $\angle DBC = \angle ECD$.

De la misma forma, $\left. \begin{array}{l} \angle AED = \angle ADC \\ \angle CED = \angle BDC \end{array} \right\} \Rightarrow \angle CED = \angle BDC$



Pero ahora observamos que, puesto que $\angle DCE = \angle CBF$, aplicando el "Teorema de la Caracterización Angular de una recta tangente" (10.2.7), tenemos que la recta DC será tangente a la circunferencia circunscrita del triángulo ΔABC , y con el mismo razonamiento tenemos que la recta DC será tangente a la circunferencia circunscrita del triángulo ΔADE.

Ahora aplicamos el Teorema de la Tangente en ambas circunferencias:

$$\left. \begin{array}{l} GC^2 = GF \cdot FA \\ GD^2 = GF \cdot FA \end{array} \right\} \Rightarrow GC^2 = GD^2 \Rightarrow GC = GD$$

Tal y como queríamos ver.

Fuente de esta solución: https://youtu.be/MvUUWQ2BEZQ (OptionalProblem)

9.31

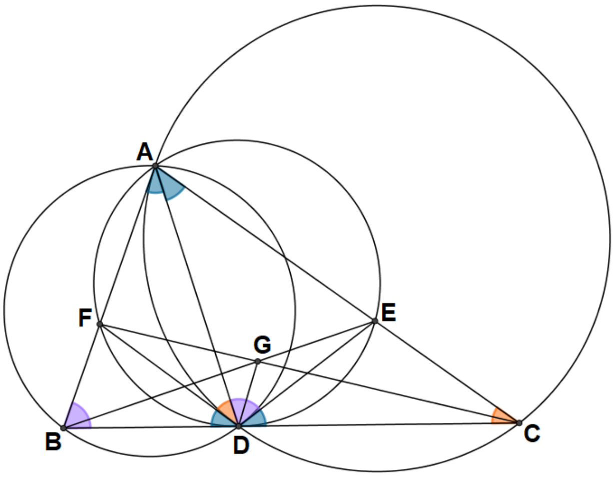
Aplicamos el "Teorema de la Caracterización Angular de una recta tangente" (10.2.7):

FD es tangente a (ACD), luego $\angle FDA = \angle C$.

DE es tangente a (ABD), luego $\angle ADE = \angle B$.

Así pues, $\angle FDE = \angle FDA + \angle ADE = \angle C + \angle B = 180° - \angle A$, y por tanto el cuadrilátero AEDF es cíclico.

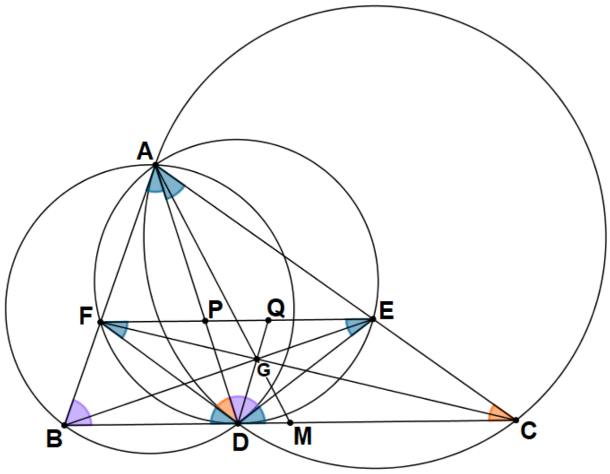
También deducimos que $\angle EDC = \angle DAC$ y $\angle FDB = \angle BAD = \angle DAC$.



Trazamos el segmento EF.

$\angle FED = \angle FAD = \angle EDC$, luego $EF \,//\, BC$, y por tanto la distancia de F a BC es igual a la distancia de E a BC. Puesto que, además, $\angle FAD = \angle DAE$, está claro que $FD = ED$ puesto que son cuerdas determinando arcos iguales.

Sean P y M los puntos de corte de la recta AG con FE y BC, respectivamente. Sea Q el punto de corte de DG con FE.

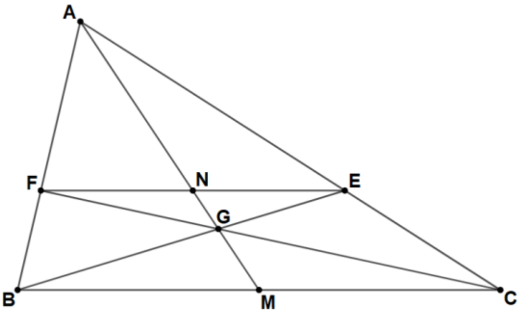


Es un hecho general que M es el punto medio de BC y que $FP = EQ$ (lo demostraremos al final en un lema).

Puesto que $FD = ED$ y $\angle EFD = \angle EAD = \angle FAD = \angle FED$, por el criterio AA de semejanza deduciremos que los triángulos ΔPFD y ΔQED son semejantes, con lo que llegaremos a $\angle FDP = \angle EDP$, tal y como queríamos ver.

Lema .

a) Dado un triángulo ΔABC, y los puntos F en AB y E en AC tales que $FE \,//\, BC$, el punto G de intersección entre BE y FC pertenece a la mediana por A, es decir, que si M es el punto de corte entre AG y BC, se cumple $BM = MC$.



Sea N el punto de corte entre AG y FE.

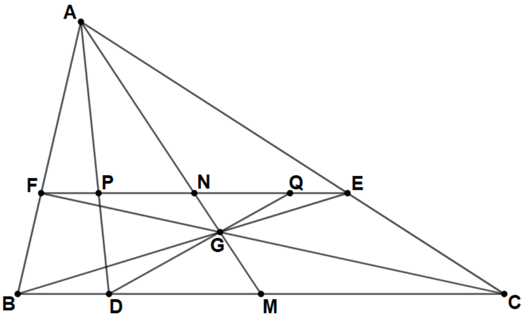
$$\Delta AFN \approx \Delta ABM \;,\; \Delta ANE \approx \Delta MC \Rightarrow \frac{FN}{BM} = \frac{AN}{AM} = \frac{NE}{MC} \Rightarrow \frac{FN}{NE} = \frac{BM}{MC}$$

$$\Delta FNG \approx \Delta CMG \;,\; \Delta NEG \approx \Delta MBG \Rightarrow \frac{FN}{MC} = \frac{NG}{GM} = \frac{NE}{BM} \Rightarrow \frac{FN}{NE} = \frac{MC}{BM}$$

Luego

$$\frac{BM}{MC} = \frac{MC}{BM} \Rightarrow BM^2 = MC^2 \Rightarrow BM = MC \,.$$

b) Si D pertenece a BC y sean P el punto de corte entre FE y AD y Q el punto de corte entre DG y FE, se cumple $FP = QE$.



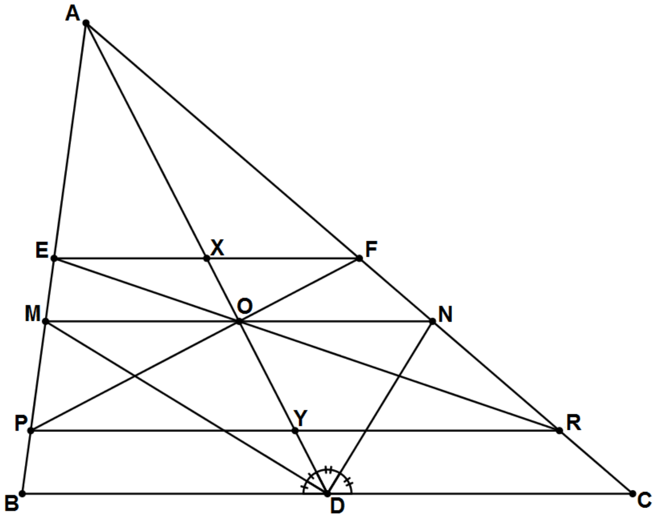
$$\Delta FEG \approx \Delta BCG \Rightarrow \frac{BG}{BC} = \frac{GE}{FE} \Rightarrow \frac{FE}{GE} = \frac{GE}{BG}$$

$$\Delta GBD \approx \Delta GEQ \Rightarrow \frac{BD}{QE} = \frac{BG}{GE} \Rightarrow \frac{QE}{BD} = \frac{GE}{BG}$$

$$\Delta AFP \approx \Delta ABD \;,\; \Delta AFE \approx \Delta ABC \Rightarrow \frac{FP}{BD} = \frac{AF}{AB} = \frac{FE}{BC} = \frac{GE}{BG} = \frac{QE}{BD} \Rightarrow \frac{FP}{BD} = \frac{QE}{BD} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow FP = QE$$

9.32
Sean X e Y los puntos de corte entre EF y PD y la mediana AD, respectivamente.



Aplicando el Teorema del Conector de Puntos Medios (7.2.1), está claro que $EF // BC$, y que $EF = \frac{1}{2} BC = BD = DC$.
Aplicando el Teorema de la Bisectriz (11.4.2) en ΔABD y en ΔACD tenemos:

$$\frac{BM}{MA} = \frac{BD}{AD} = \frac{DC}{AD} = \frac{CN}{NA} \Rightarrow \frac{BM}{MA} = \frac{CN}{NA}$$

Luego aplicando el Teorema de Tales (8.2.8) tenemos $MN // BC$.

Por ser Triángulos en posición de Tales tenemos

$$\frac{EX}{BD} = \frac{AX}{AD} = \frac{XF}{CD} = \frac{XF}{BD} \Rightarrow EX = XF$$

De la misma manera se demuestra que $MO = OM$.

Aplicamos el Teorema de Menelao (11.2.2) en el triángulo ΔAMN y la transversal PF :

$$\frac{AP}{PM} \cdot \frac{MO}{ON} \cdot \frac{NF}{FA} = 1 \Rightarrow \frac{AP}{PM} \cdot \frac{NF}{FA} = 1 \Rightarrow \frac{AP}{PM} = \frac{FA}{NF}$$

Aplicamos el Teorema de Menelao (11.2.2) en el triángulo ΔAMN y la transversal RE :

$$\frac{AE}{EM} \cdot \frac{MO}{ON} \cdot \frac{NR}{RA} = 1 \Rightarrow \Rightarrow \frac{AE}{EM} = \frac{AR}{NR}$$

Pero, como además de $EF // MN$ se deduce que $\frac{AF}{FN} = \frac{AE}{EM}$ y por tanto que

$$\frac{AP}{PM} = \frac{AR}{NR}$$

De donde concluimos que $PR // MN$.
Una vez hemos obtenido estos resultados seguimos razonando de la siguiente manera:

$$\frac{BD + AD}{AD} = \frac{BD}{AD} + 1 = \frac{MB}{AM} + 1 = \frac{MB + AM}{AM} = \frac{AB}{AM} = \frac{BC}{MN} = \frac{2EF}{MN}$$

Y por tanto:

$$\frac{2}{MN} = \frac{BD + AD}{AD \cdot EF} = \frac{BD}{AD \cdot EF} + \frac{AD}{AD \cdot EF} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{EF}$$

Ahora solo nos queda aplicar el siguiente resultado (que demostraremos al final como lema): Si EFRP es un trapecio y MN es una recta paralela a las bases que pasa por el punto O de intersección de las diagonales, la longitud de MN es media armónica de las bases del trapecio:

$$\frac{2}{MN}=\frac{1}{EF}+\frac{1}{PR}$$

Aplicando esto último al resultado obtenido anteriormente llegamos a

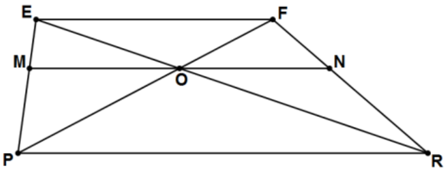
$$\frac{1}{AD}+\frac{1}{EF}=\frac{1}{EF}+\frac{1}{PR}\Rightarrow\frac{1}{AD}=\frac{1}{PR}\Rightarrow AD=PR\,.$$

Fuente de esta solución: Soluciones oficiales (Compendium OME pág. 794)

Lema.

Sea EFQP un trapecio y O el punto de corte de sus diagonales EQ y FP. Sea M en EP y N en FQ tales que MN es paralela a las bases y O pertenece a MN. Entonces la longitud de MN es media armónica de las bases, es decir:

$$\frac{2}{MN}=\frac{1}{EF}+\frac{1}{PR}$$



Demostración.

Aplicando Tales en el triángulo ΔPEF con la paralela OM:

$$\frac{EF}{MO}=\frac{PE}{PM}=\frac{MP+EM}{MP}$$

Aplicando Tales en el triángulo ΔrEF con la paralela ON:

$$\frac{EF}{NO}=\frac{FR}{NR}=\frac{FN+NR}{NR}$$

Aplicando Tales en el triángulo ΔEPR con la paralela OM:

$$\frac{PR}{MO}=\frac{PE}{EM}=\frac{EM+MP}{EM}$$

Aplicando Tales en el triángulo ΔFPR con la paralela ON:

$$\frac{PR}{NO}=\frac{FR}{FN}=\frac{FN+NR}{FN}$$

Sumando las cuatro identidades anteriores:

$$\frac{MO}{EF}+\frac{NO}{EF}+\frac{MO}{PR}+\frac{NO}{PR}=\frac{MP}{MP+EM}+\frac{NR}{FN+NR}+\frac{EM}{EM+MP}+\frac{FN}{FN+NR}$$

Es decir:

$$\frac{MO+NO}{EF}+\frac{MO+NO}{PR}=\frac{MN}{EF}+\frac{MN}{PR}=\frac{MP+EM}{MP+EM}+\frac{NR+FN}{FN+NR}=1+1=2$$

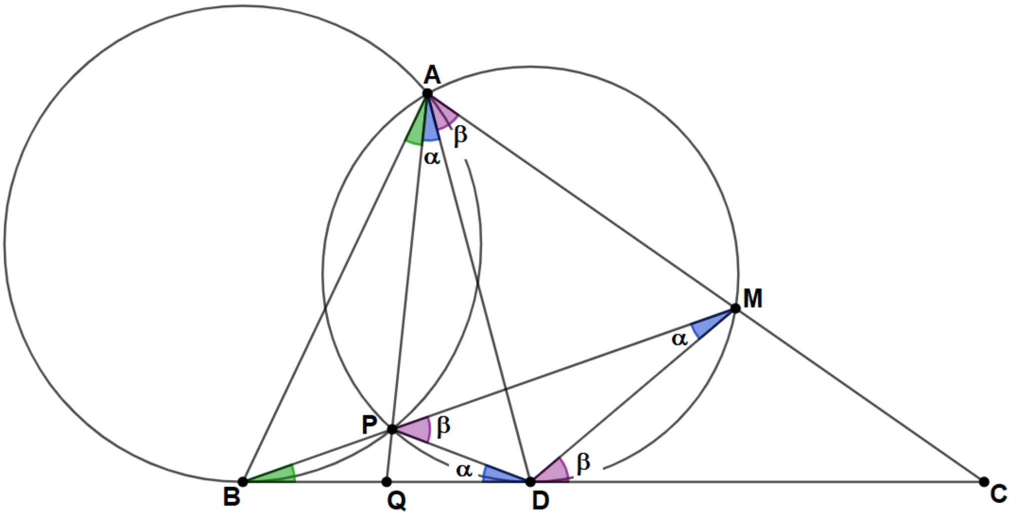
$$MN\left(\frac{1}{EF}+\frac{1}{PR}\right)=2\Leftrightarrow\frac{1}{EF}+\frac{1}{PR}=\frac{2}{MN}$$

Tal y como queríamos ver.

Fuente de esta demostración: www.matetam.com

9.33

Sea Q el punto de corte entre AP y la recta BC. Para demostrar que Q es el punto medio del triángulo ΔABD vamos a demostrar que la recta BC es tangente a la circunferencia circunscrita de ΔABP, y el problema quedará resuelto aplicando GA/14.1.4 (Punto de corte entre la tangente común y el eje radical).



Para demostrar que BC es tangente a ΔABP aplicaremos el Teorema de la caracterización de una tangente al circuncírculo de un triángulo (GA/10.2.7), es decir, hay que demostrar que $\angle CBP = \angle BAP$. Sea $\alpha = \angle PAD$ y $\beta = \angle DAC = \angle BAD$.

Está claro que $\angle BAP = \angle BAD - \angle PAD = \beta - \alpha$

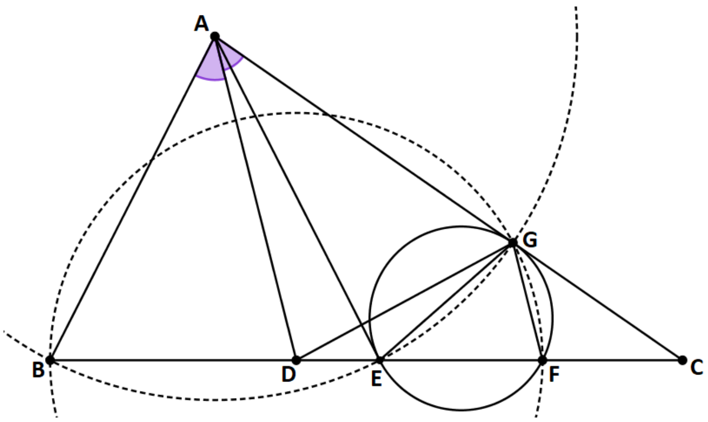
AMDP es un cuadrilátero cíclico, por lo tanto $\angle PMD = \angle PAD = \alpha$.

DC es tangente a (ΔAMD) y por tanto $\angle MDC = \angle PAM = \beta \Rightarrow \angle BDM = 180 - \beta$.

Finalmente, $\angle DBM = 180º - \angle BDM - \angle BMD = 180º - (180º - \beta) - \alpha = \beta - \alpha = \angle BAP$, tal y como queríamos ver.

9.34

Primera versión.



Sean $\alpha = \angle BAD = \angle DAG$, $\beta = \angle ADB$ y $\gamma = \angle ABD$

Los triángulos ΔABD y ΔAGD son congruentes. Basta aplicar el criterio SAS pues $AB = AG$, $\angle BAD = \angle DAG$ y $AD = AD$. Por lo tanto $BD = DG$, $\gamma = \angle AGD$ y $\beta = \angle ADG$.

Por otro lado, ΔABE es isósceles, y por tanto $\gamma = \angle ABD = \angle AEB$.

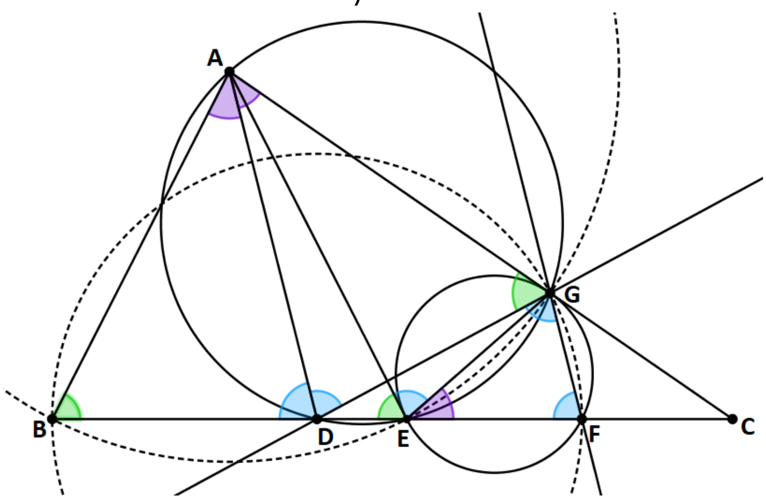
De donde deducimos que $\angle AED = \angle AEB = \gamma = \angle AGD$, y por tanto el cuadrilátero AGED es cíclico, y por tanto $\angle AGE = \angle ADB = \beta$.

Aplicamos el Teorema de la bisectriz al triángulo ΔABC :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Leftrightarrow \frac{AG}{AC} = \frac{DF}{DC} \Leftrightarrow \frac{AC}{AG} = \frac{DC}{DF} \Leftrightarrow \frac{AG + GC}{AG} = \frac{DF + FC}{DF} \Leftrightarrow$$

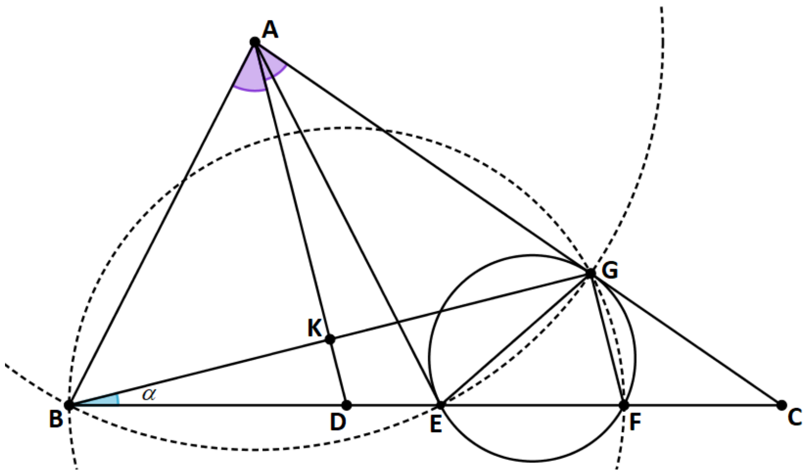
$$\Leftrightarrow \frac{AG}{AG} + \frac{GC}{AG} = \frac{DF}{DF} + \frac{FC}{DF} \Leftrightarrow 1 + \frac{GC}{AG} = 1 + \frac{FC}{DF} \Leftrightarrow \frac{GC}{AG} = \frac{FC}{DF}$$

Luego, aplicando Tales en el triángulo ΔADC con la transversal GF, deducimos que $AD \,//\, GF$, y por tanto $\angle GFE = \angle ADB = \beta$.



Así pues, hemos visto que $\angle AGE = \beta = \angle GFE$, y por lo tanto solo tenemos que aplicar el Teorema de la caracterización de la recta tangente a la circunferencia circunscrita al triángulo ΔEGF (10.2.7).

Segunda versión.
Como en la versión anterior, queremos demostrar que $\angle AGE = \angle GFE$.
Trazamos la recta BG y sea K su punto de corte con la recta AD. Sea $\alpha = \angle GBC$.



Puesto que AB=AG, el triángulo ΔABG es isósceles, en un triángulo isósceles coinciden la bisectriz, la altura y la mediana por el vértice opuesto a la base. Es decir, $AK \perp BG$ y BK=KG.
Pero también se cumple BD=DF, y por tanto, aplicando el Teorema de Tales, $AD \,//\, GF$.
De lo que se deduce que $\angle BGF = \angle BKD = 90^\circ$, y por tanto $\angle GFE = 90^\circ - \alpha$.

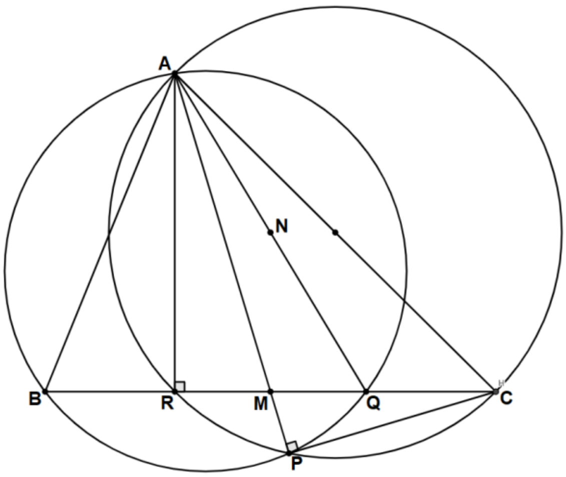
Por otro lado, está claro que los puntos B, E y G pertenecen a una misma circunferencia de centro A, por lo que $\angle GAE = 2\angle GBE = 2\alpha$.
Por ser ΔAEG isósceles, $\angle AGE = \dfrac{180^\circ - \angle EAG}{2} = \dfrac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$
Así pues, concluimos que $\angle AGE = \angle GFE$, tal y como queríamos ver.

Fuente de esta segunda versión: Soluciones oficiales (Compendium OMI, página 132)

9.35

Demostrar que $NB = NC$ equivale a demostrar que N pertenece a la mediatriz del lado BC. Puesto que M es el punto medio de este lado, basta demostrar que $MN \perp AB$.

Trazamos la circunferencia de diámetro AC. Puesto que $AP \perp PC$, por Tales está claro que P pertenece a esta circunferencia. Sea $R \neq C$ el segundo punto de corte entre esta circunferencia y BC. De nuevo por tales se cumplirá $AR \perp BC$, es decir, AR es la altura por A del triángulo ΔABC.

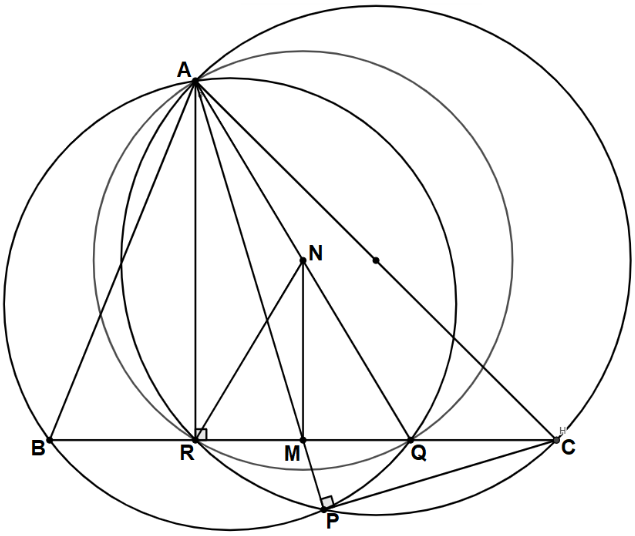


Vamos a demostrar que $RM = MQ$.

Aplicando Potencia de un punto, y teniendo en cuenta que $BM = MC$

$BM \cdot MQ = AM \cdot MP = RM \cdot MC \Rightarrow BM \cdot MQ = RM \cdot BM \Rightarrow MQ = RM$

Ahora trazamos la circunferencia de diámetro AQ, cuyo centro es N. Puesto que $AR \perp RQ$, por Tales está claro que el punto R pertenecerá a esta circunferencia.



$RN = NQ$, luego el triángulo ΔRNQ es isósceles, además $RM = MQ$, luego NM es mediana del triángulo, y puesto que en un triángulo isósceles coincide mediana y altura, $MN \perp RQ$. Así pues, N pertenece a la mediatriz del lado BC, y por tanto equidista de los vértices B y C, tal y como queríamos ver.

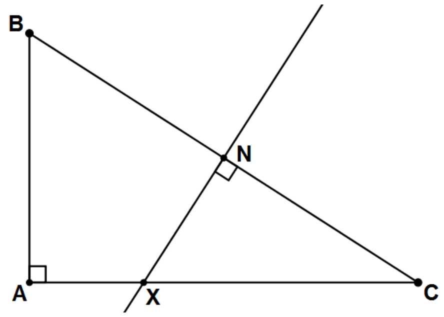
9.36

Primera versión.

Lema.

Dado un triángulo ΔABC, rectángulo en A, sea N el punto medio de la hipotenusa BC. Sea X el punto de corte entre la perpendicular por BC y el lado AC.

a) $AX < BN$



Sabemos que en todo triángulo rectángulo, la hipotenusa es siempre el lado mayor, luego:

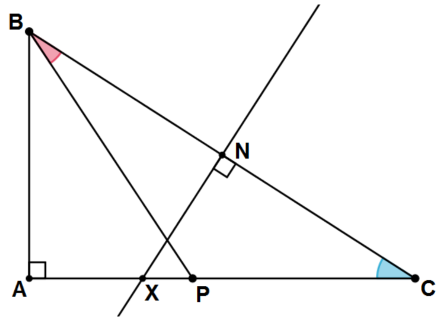
$$AC < BC \text{ y } XC > NC$$

Y por tanto:

$$AX = AC - XC < AC - NC < BC - NC = BN$$

b) Sea P un punto del lado AC.

Se cumple $AP > AX \Leftrightarrow \angle PBC < \angle PCB$



Sabemos que el punto X es el que hace que ΔXBC sea isósceles: $\angle XBC = \angle XCB$.

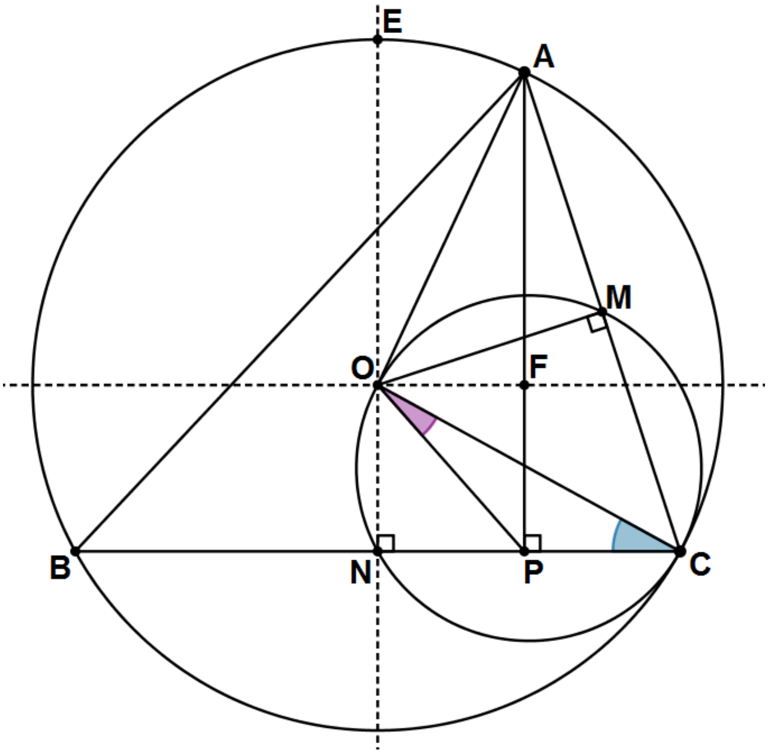
$AP > AX \Leftrightarrow \angle PBC < \angle XBC = \angle XCB = \angle PCB$

c) Como corolario, si $AP > \frac{1}{2}BC \Rightarrow \angle PBC < \angle PCB$

En efecto, por el apartado a, $AX < \frac{1}{2}BC < AP \Rightarrow AX < AP$

d) Si $\angle C > 30° \Rightarrow BC < 2AB$.

Solucionemos ahora el problema.
Sean N y M los respectivos puntos medios de los lados BC y AC.
Sea E el punto de corte entre ON y la circunferencia (ΔABC), en el mismo lado que O.
Trazamos la paralela a BC por O, que cortará la altura AP en el punto F.



Sabemos que $\angle NOC = \angle A$, y por tanto

$$\angle OCP = \angle OCN = 90^\circ - \angle NOC = 90^\circ - \angle A$$

Así pues,

$$\angle A + \angle COP < 90^\circ \Leftrightarrow \angle COP < 90^\circ - \angle A \Leftrightarrow \angle COP < \angle OCP$$

Por otro lado, por Tales, los puntos M y N pertenecen a la circunferencia de diámetro OC, y por tanto el cuadrilátero OMCN es cíclico. Luego, teniendo en cuenta que $\angle AOM = \angle B$,

$$\angle C = \angle EOM = \angle EOA + \angle AOM = \angle EOA + \angle B \Rightarrow \angle C - \angle B = \angle EOA$$

Así pues,

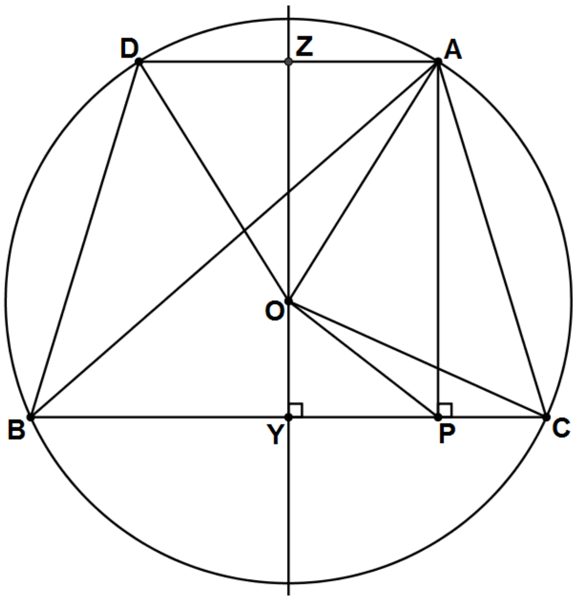
$$\angle C \geq \angle B + 30^\circ \Leftrightarrow \angle C - \angle B \geq 30^\circ \Leftrightarrow \angle EOA \geq 30^\circ$$

Pero, puesto que $EO \,//\, AF$, pues ambas son perpendiculares comunes de BC, $\angle EOA = \angle OAF$
Así pues, tenemos como hipótesis que $\angle OAF \geq 30^\circ$.
Ahora, aplicando el apartado d del lema,

$$OA < 2OF \Leftrightarrow OC < 2NP \Leftarrow NP > \frac{1}{2}OC \Rightarrow \angle COP < \angle OCP$$

tal y como queríamos ver.

Segunda versión.
En la web Art Of Problem Solving encontramos esta segunda versión, similar a la mía.
Trazamos la mediatriz del lado BC. Sea Y su punto de corte con dicho lado.
Trazamos la recta paralela a BC por A. Sea Z su punto de corte con OY.
Puesto que DO=AO, el triángulo ΔDAO es isósceles. Claramente OZ es perpendicular a AD, luego es altura de ΔDAO, que como es isósceles también será mediana, y por tanto DZ=ZA.



Con todo esto $DACB$ es un cuadrilátero isósceles, y por tanto $\angle CBD = \angle BCA$.
Luego de la condición del enunciado $\angle BCA \geq \angle ABC + 30^{\circ}$ deducimos que $\angle DBA \geq 30^{\circ}$.
Y por tanto $\angle DOA = 2\angle DBA \geq 60^{\circ}$.
Por consiguiente $AZ \geq OA/2 \Rightarrow YP \geq OC/2$, puesto que $AZ = YP$ y $OA = OC$.
Así pues, $OP > YP \geq OC/2 \Rightarrow OP > OC/2$.
Luego $PC = YC - YP < OC - YP < OC - OC/2 = OC/2 < OP$
Y finalmente, $PC < OP \Rightarrow \angle COP < \angle OCP$.

Fuente de esta segunda versión:
https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=2001_IMO_Problems/Problem_1&oldid=96396

Tercera versión.
En las "Solution Notes" de Evan Chen encontramos una tercera versión realmente elegante basada en trigonometría.

Siguiendo los razonamientos de las versiones anteriores, queremos demostrar que $PC < PO$.

$$PC < PO \Leftrightarrow PC^2 < PO^2$$

Por Potencia de un punto, $PB \cdot PC = R^2 - PO^2$, donde R es el radio de la circunferencia circunscrita.
Luego $PO^2 = R^2 - PB \cdot PC$ y por tanto

$$PC^2 < PO^2 \Leftrightarrow$$
$$PC^2 < R^2 - PB \cdot PC \Leftrightarrow$$
$$PC^2 + PB \cdot PC < R^2 \Leftrightarrow$$
$$PC^2 + PB \cdot PC < R^2 \Leftrightarrow$$
$$PC(PC + PB) < R^2 \Leftrightarrow$$
$$PC \cdot BC < R^2$$

Utilizando la notación habitual $a = BC, b = AC, c = AB$, $\cos C = \dfrac{PC}{b} \Rightarrow PC = b\cos C$

Y por lo tanto

$$PC \cdot BC < R^2 \Leftrightarrow ab\cos C < R^2 \Leftrightarrow \frac{a}{2R}\frac{b}{2R}\cos C < \frac{1}{4}$$

Aplicando el Teorema del Seno en ΔABC,

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{a}{2R} = \sin A,\ \frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow \frac{b}{2R} = \sin B$$

Luego llegamos a

$$\sin A \sin B \cos C < \frac{1}{4}$$

Aplicamos la identidad trigonométrica "Producto a Suma"

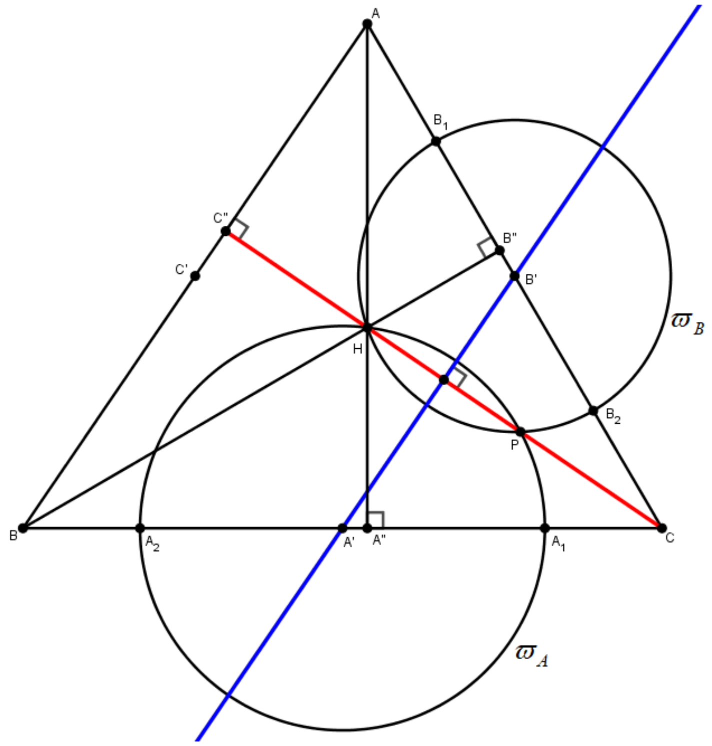
$$\sin B \cos C = \frac{1}{2}\left(\sin(C+B) - \sin(C-B)\right) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

y teniendo en cuenta que $\sin A < 1$, demostramos la condición anterior, tal y como queríamos ver.

Fuente de esta versión: "IMO 2001 Solution Notes", Evan Chen

9.37

Llamaremos A', B', C' los respectivos puntos medios de los lados BC, AC y AB.
Llamaremos A'', B'', C'' las respectivas alturas por los vértices A, B y C.
Sea ϖ_A la circunferencia de centro A' y radio $A'H$. Sea ϖ_B la circunferencia de centro B' y radio $B'H$.



El eje radical de las circunferencias ϖ_A y ϖ_B es una recta que pasa por H y por su segundo punto de corte al que llamaremos P. Sabemos que esta recta es perpendicular a la recta que pasa por los respectivos centros A' y B'. Pero la recta $A'B'$ pasa por los puntos medios de los lados BC y AC, luego aplicando el Teorema del conector de puntos medios (7.2.1), tenemos $A'B' // AB$, y por otro lado la altura $C''C$ cumple $C''C \perp AB$, luego $CC'' \perp A''B''$, y puesto que, además $H \in CC''$, por la unicidad de la recta perpendicular que pasa por un punto dado, deducimos que la altura $C''C$ es el eje radical de las circunferencias ϖ_A y ϖ_B.

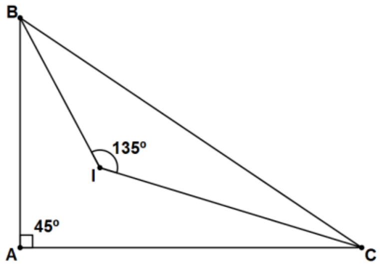
Ahora el problema queda resuelto como aplicación directa de 14.2.3, puesto que $A_1A_2 \cap B_1B_2 = C \in C''C$.
En efecto, $CA_1 \cdot CA_2 = CP \cdot CH = CB_2 \cdot CB_1 \Rightarrow A_1A_2B_1B_2$ cocíclicos aplicando el Recíproco al Teorema de la Potencia (10.2.2).
Con un razonamiento similar se demuestra que C_1 y C_2 pertenecen a ϖ_A.

9.38

No hay ningún triángulo que cumpla estas condiciones. De hecho, vamos a ver que ni siquiera hay ningún triángulo rectángulo con AB, AC, BI e IC enteros.

Lo primero que vemos es que $\angle BIC = 135^{o}$. En efecto,

$$90^{o} + 2\angle IBC + 2\angle ICB = 180^{o} \Rightarrow \angle IBC + \angle ICB = 45^{o} \Rightarrow$$
$$\angle BIC = 180 - \left(\angle IBC + \angle ICB\right) = 135^{o}$$



Luego, aplicando el Teorema del Coseno,

$$BC^{2} = BI^{2} + IC^{2} - 2BI \cdot IC \cdot Cos135^{o} \Leftrightarrow$$
$$AB^{2} + AC^{2} = BI^{2} + IC^{2} - 2BI \cdot IC \cdot Cos135^{o}$$

De esta última igualdad se deduce que $Cos135^{o}$ es un número racional si AB, AC, BI e IC son enteros, lo cual es absurdo, pues $Cos135^{o} = -Cos45^{o} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ no es racional.

Fuente de esta solución: Soluciones oficiales (USAMO, pág. 244)

9.39

Sabemos que $\angle PBA + \angle PBC = \angle B$ y $\angle PCA + \angle PCB = \angle C$, luego

$$\angle PBA + \angle PBC + \angle PCA + \angle PCB = \angle B + \angle C = 180^{\circ} - \angle A$$

Así pues, la condición del enunciado equivale a

$$\angle PCB + \angle PBC + \angle PCB + \angle PCB = 180^{\circ} - \angle A \Leftrightarrow$$

$$2(180^{\circ} - \angle BPC) = 180^{\circ} - \angle A \Leftrightarrow$$

$$180^{\circ} - \angle BPC = 90^{\circ} - \frac{\angle A}{2} \Leftrightarrow 180^{\circ} - 90^{\circ} + \frac{\angle A}{2} = \angle BPC \Leftrightarrow 90^{\circ} + \frac{\angle A}{2} = \angle BPC$$

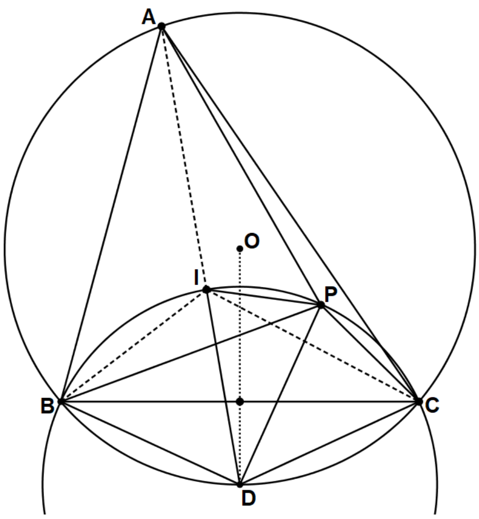
Pero este ángulo $90^{\circ} + \frac{\angle A}{2}$ es precisamente $\angle BIC$, en efecto,

$$\angle BIC = 180^{\circ} - (\angle IBC + \angle ICB) = 180^{\circ} - \left(\frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} \right) = 180^{\circ} - \frac{1}{2}(180^{\circ} - \angle A) =$$

$$= 90^{\circ} + \frac{\angle A}{2}$$

Puesto que P pertenece al interior del triángulo, estará en el mismo lado que I respecto de la recta BC, y por tanto podemos aplicar la caracterización GA/10.5.3 de puntos cocíclicos, es decir, P pertenecerá a la circunferencia circunscrita del triángulo ΔBIC.

Pero esta circunferencia es conocida. Sabemos que su centro D es la intersección de la bisectriz por A y la mediatriz del lado BC (ver GA/11.12.2), es decir, es el punto medio del arco BC.



Si $P \neq I$ tenemos que ΔADP es un triángulo, y teniendo en cuenta que ΔIPD es isósceles,

$$AP + PD > AD = AI + ID = AI + PD \Rightarrow AP > AI$$

y la igualdad acontece cuando A, P y D están alineados, es decir, cuando P=I.

Fuente de esta solución: Soluciones oficiales (IMO, pág. 860)

9.40

Primera versión.

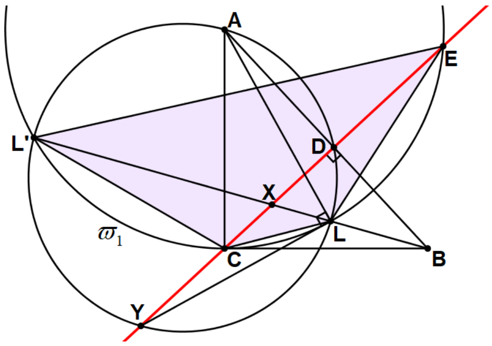
Sea ϖ_1 la circunferencia de centro A y radio AC. Está claro que L pertenece a ϖ_1.

Sea $E \neq C$ el segundo punto de corte entre ϖ_1 y CD.

Sea $L' \neq L$ el segundo punto de corte entre ϖ_1 y XB.

Trazamos la recta tangente a ϖ_1 por L y sea Y su punto de corte con CD. Vamos a demostrar que este punto no depende de L, solo de A, D, B y X.

Puesto que $\angle ADY = \angle ALY = 90^{\circ}$, los puntos D y L pertenecerán a la circunferencia de diámetro AY.



Luego $\angle AYD = \angle ALD$.

Por otro lado, los triángulos rectángulos $\angle ABC$ y $\angle ACD$ son semejantes, pues comparten el ángulo en $\angle A$, por lo tanto

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC}$$

y teniendo en cuenta que $AC = AL$ obtenemos

$$\frac{AL}{AD} = \frac{AB}{AL}$$

Y por tanto los triángulos ΔALB y ΔADL serán semejantes (pues comparten también el ángulo en A).

Por lo tanto

$$\angle ABL = \angle ALD$$

Y por consiguiente

$$\angle XBD = \angle LBA = \angle ALD = \angle ALD = \angle AYD$$

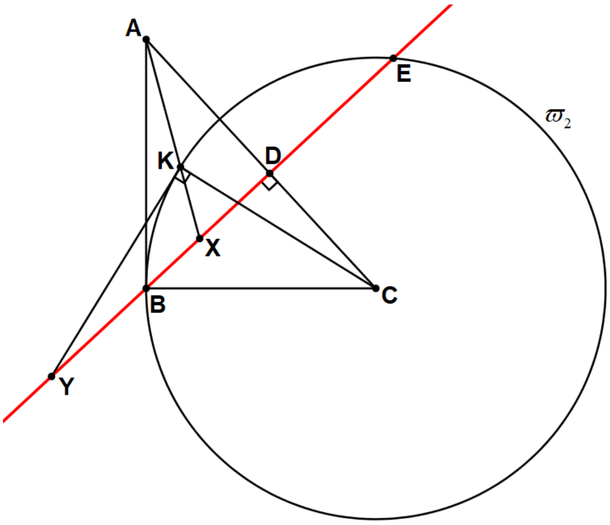
Así pues, los triángulos rectángulos ΔAYD y ΔXBD serán semejantes por el criterio AA, y por tanto sus lados serán proporcionales:

$$\frac{DY}{AD} = \frac{DB}{DX} \Rightarrow DY = AD\frac{DB}{DX}$$

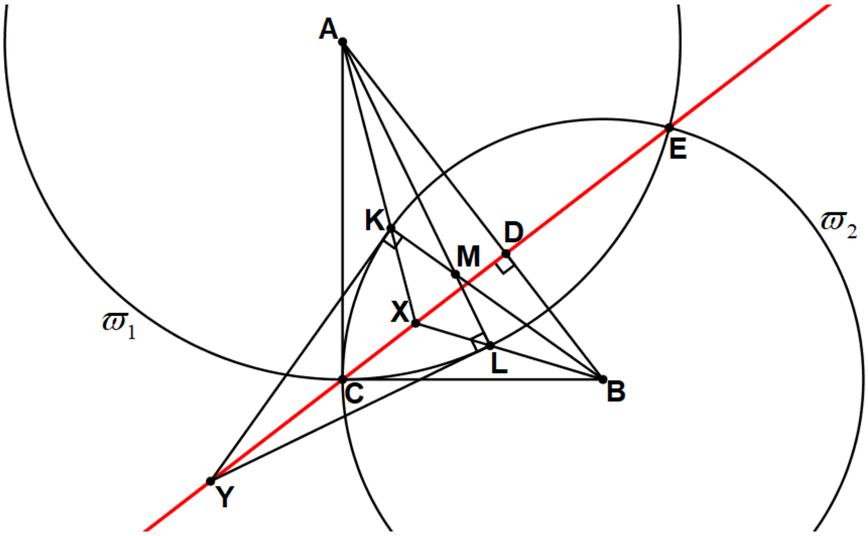
Así pues, hemos visto que la recta tangente a ϖ_1 por L corta CX en un punto Y que no depende de L, solo de A, D, B y X.

Observación: Se puede comprobar que el cuadrilátero cíclico $ELCL'$ es un cuadrilátero armónico (ver GA/12.6.1), y que, por consiguiente, los puntos Y, C, X, E son una cuaterna armónica.

Todo este argumento lo podemos hacer ahora para la circunferencia ϖ_2 de centro B y radio BC. Está claro que K pertenece a ϖ_2. La recta tangente a ϖ_2 por K cortará la recta BD en un punto que no dependerá de K, por lo tanto será el mismo Y que hemos calculado anteriormente.



Puesto que Y pertenece al eje radical de las circunferencias ϖ_1 y ϖ_2,
$YL^2 = pow(Y,\varpi_1) = pow(Y,\varpi_2) = YK^2 \Rightarrow YL = YK$, luego los triángulos rectángulos ΔYKM y ΔYLM serán congruentes, y por tanto $KM = ML$, tal y como queríamos ver.



Fuente de esta solución: https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/GeoGebra/2012IM

Segunda versión.

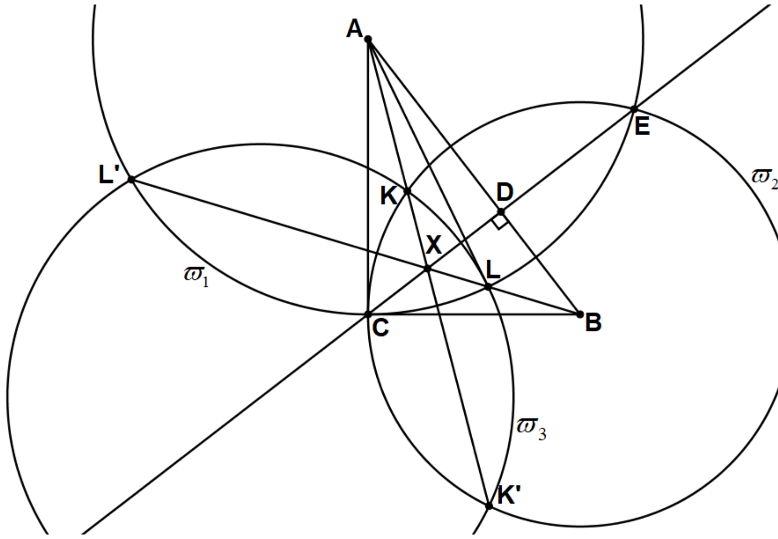
Como en la versión anterior, sea ϖ_1 la circunferencia de centro A y radio AC y ϖ_2 la circunferencia de centro B y radio BC. Está claro que la altura CD es el eje radical de estas dos circunferencias (es una recta perpendicular a la recta que pasa por sus centros y pasa por C, que es uno de sus dos puntos de corte), luego el segundo punto de corte $E \neq C$ entre las dos circunferencias también pertenecerá a CD.

Puesto que $AC \perp BC$, AC será tangente a ϖ_2 en C, y BC será tangente a ϖ_1 en C.

Por potencia de un punto,

$$XK \cdot XK' = XC \cdot XE = XL \cdot XL'$$

Luego los puntos L', K, L, K' son cíclicos. Sea ϖ_3 la circunferencia que los contiene.



De nuevo por Potencia de un punto,

$$AL^2 = AC^2 = AK \cdot KK'$$

Luego AL es tangente a ϖ_3 en L. De la misma forma se demuestra que BK es tangente a ϖ_3 en K.

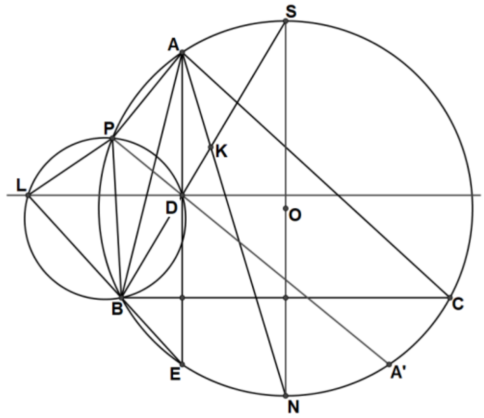
Así pues, L y K son tangentes a una misma circunferencia, y por tanto MK y ML son tangentes por un mismo punto M a una misma circunferencia ϖ_3, y por tanto son segmentos iguales (ver GA/10.1.13), tal y como queríamos demostrar.

Fuente de esta solución: Soluciones oficiales (IMO página 1284)

9.41

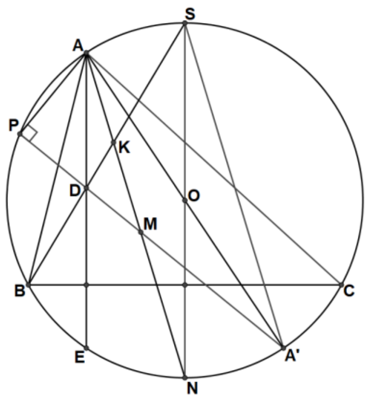
Sea O el circuncentro de ΔABC.
Sea $G \neq S$ el segundo punto de corte entre la mediatriz del lado BC y Ω.
Sabemos que la bisectriz interior del ángulo $\angle BAC$ es la recta AG.
Por lo tanto, si se cumplen las condiciones del enunciado, forzosamente $K = BS \cap AG$.
Veamos que este punto satisface las condiciones del enunciado, es decir, PK es tangente a ω.

Primer paso.
Lo primero que vamos a ver es que se cumple $PD \perp AP$. Para ello prolongamos el segmento PD hasta cortar la circunferencia Ω en un punto al que llamaremos A'.



Se cumple $\angle BPA' = \angle BPD = \angle BLD = \angle EBC = \angle EAC = 90^{\circ} - \angle C$
Así pues, $\angle BOA' = 2\angle BPA' = 2(90^{\circ} - \angle C) = 180^{\circ} - 2\angle C$
Pero, por otro lado, $\angle AOB = 2\angle C$, por lo que los ángulos $\angle AOB$ y $\angle BOA'$ son suplementarios, o lo que es lo mismo, los puntos A, O y A' están alineados, es decir, AA' es un diámetro, y por tanto, por Tales, $\angle APA' = 90^{\circ}$.

Segundo paso.
Lo segundo que vamos a demostrar es que $PK = AK$. Para ello trazamos el punto $M = PD \cap AK$. Puesto que ΔAPM es un triángulo rectángulo y M está en la hipotenusa, $PK = AK \Leftrightarrow AK = KM$.



Por un lado,

$$\angle NAC = \angle A / 2 \Rightarrow \angle NOC = \angle A.$$

Pero por otro,

$$\angle A'OC = 2\angle A'AC = 2\angle OAC = 180^{\circ} - \angle AOC = 180^{\circ} - 2\angle B.$$

Luego

$$\angle NOA' = \angle NOC - \angle A'OC = 2\angle NAC - \angle A'OC = \angle A - 180^{\circ} + 2\angle B =$$
$$= \angle B - \angle C$$

Pero también se cumple

$$\angle AOS = \angle AOC - \angle SOC = 2\angle B - \angle SOC = 2\angle B - (\angle B + \angle C) = \angle B - \angle C$$

En donde hemos aplicado que $\angle SOC = 2\angle SBC = 180^{\circ} - \angle BSC = 180^{\circ} - \angle A = \angle B + \angle C$

Así pues, $\angle NOA' = \angle AOS$, y por tanto $AN // SA'$

Sea $T = AA' \cap KS$.

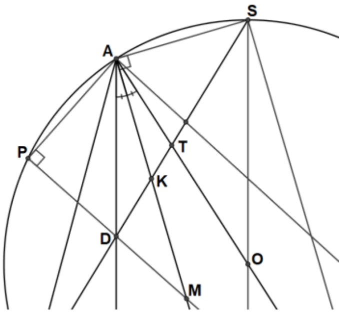
Así pues, $\Delta ATN \approx \Delta A'TS$, y por tanto $\dfrac{AK}{SA'} = \dfrac{TK}{TS}$

También se cumple $\Delta KDM \approx \Delta SDA'$, y por tanto $\dfrac{KM}{SA'} = \dfrac{DK}{DS}$

Así pues, para demostrar que $AK = KM$ será suficiente demostrar que

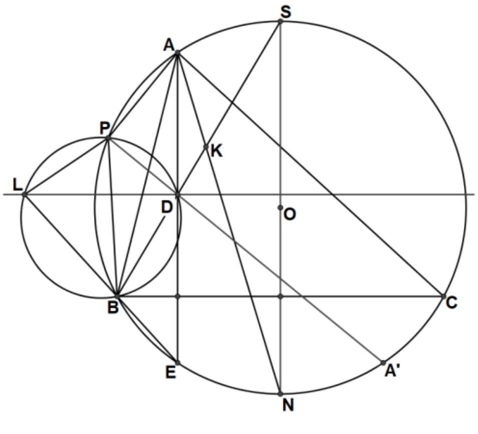
$$\frac{TK}{TS} = \frac{DK}{DS} \Leftrightarrow \frac{TK}{DK} = \frac{TS}{DS}$$

Pero esta última igualdad es una aplicación directa del Teorema de la bisectriz exterior (GA/11.4.3), aplicada al triángulo ΔDAT con la bisectriz interior AK y la bisectriz exterior AS (recordamos que $\angle AKS = 90^{o}$)



Tercer paso.

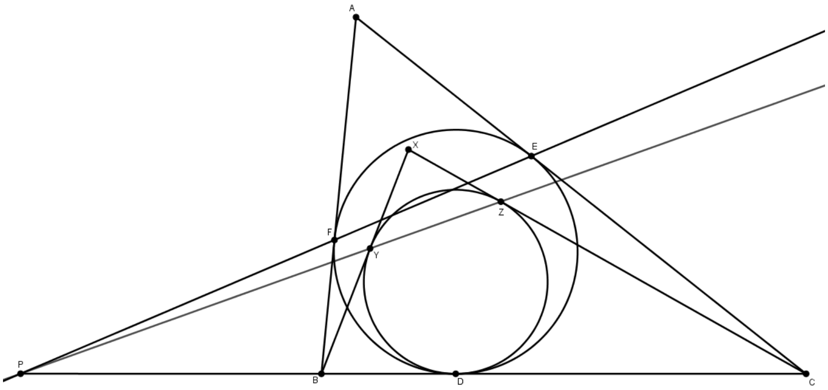
Volvemos a la configuración inicial. Vemos que $\Delta AKD \approx \Delta AKB$, pues $\angle DAK = \angle KBA$



Luego $\dfrac{AK}{KB} = \dfrac{KD}{AK} \Leftrightarrow AK^2 = KD \cdot KB$, y puesto que $AK = PK$, llegamos a $PK^2 = KD \cdot KB$, y por tanto PK es tangente a la circunferencia ω aplicando la caracterización de recta tangente mediante potencia de un punto (GA/10.2.8).

9.42

El problema se reduce a demostrar que las rectas FE y YZ se cortan en un punto P que pertenece a la recta BC, pues entonces, por la caracterización de Tangente mediante Potencia de un punto, $PY \cdot PZ = PD^2 = PF \cdot PE$ y aplicamos el Recíproco del Teorema de la Potencia (GA/10.2.2) o simplemente aplicamos GA/14.2.3.



Por ser segmentos tangentes a una circunferencia que tienen un extremo común B, se cumple BD=BY. De la misma forma se demuestra que BD=BF, que CD=CZ=CE, XY=XZ y AF=AE.

Trazamos la recta YZ y sea P su punto de corte con la recta BC. Aplicando el Teorema de Menelao (GA/11.2.2) al triángulo ΔXBC, tenemos

$$\frac{XY}{YB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CZ}{ZX} = 1$$

Teniendo en cuenta que XY=ZX obtenemos

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CZ}{YB} = 1$$

Para demostrar que los puntos P, Y, Z están alineados aplicaremos el mismo Teorema de Menelao ahora en el triángulo ΔABC. Queremos demostrar

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

Teniendo en cuenta que AF=EA obtenemos

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CE}{FB} = 1$$

Y ahora teniendo en cuenta que CE=CZ y FB=YB, llegamos

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CZ}{YB} = 1$$

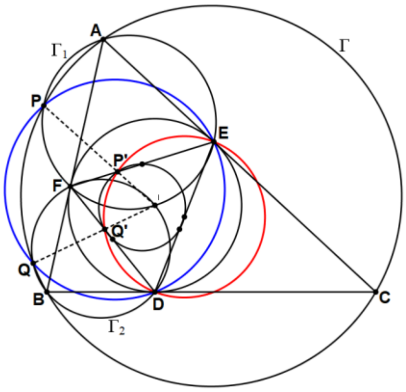
Que es precisamente la igualdad que hemos demostrado anteriormente.

Fuente de esta solución: Solving Problems in Geometry (Kim Hoo Hang, pág. 165)

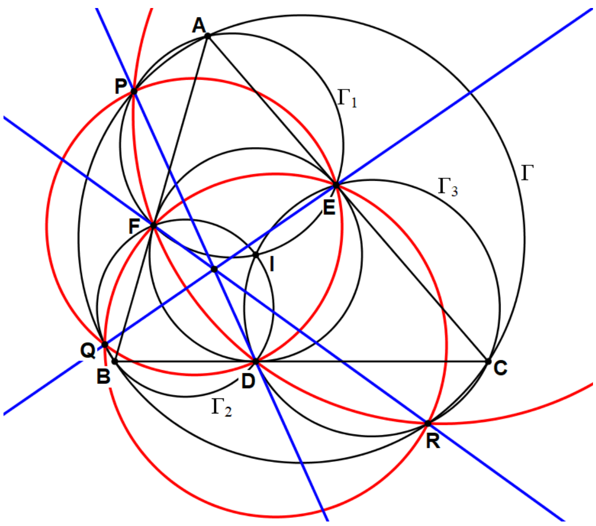
9.43

(a) Γ_1, Γ_2 y Γ_3 tienen como punto en común el incentro I del triángulo ΔABC.
En efecto, sabemos que $IE \perp AC$ y $IF \perp AB$, luego, por Tales, los puntos E y F pertenecerán a la circunferencia de diámetro AI. Así pues, forzosamente, la circunferencia circunscrita (ΔAEF) tiene que ser precisamente esta circunferencia de diámetro AI. El mismo argumento vale para las otras dos circunferencias Γ_2 y Γ_3.

(b) Vamos a demostrar que los puntos P, Q, E y D son cocíclicos.
Para ello nos basaremos en los resultados de GA/13.6.1, en donde hemos realizado una inversión respecto de (ΔDEF). Mediante esta inversión, P es la imagen de P', el pie de la altura de ΔDEF por el vértice D, y Q es la imagen de Q', el pie de la altura de ΔDEF por el vértice E. Pero está claro que $\angle EPD = \angle DQ'E = 90^{\circ}$, y por tanto, por Tales, los puntos P' y Q' pertenecerán a la circunferencia de diámetro DE, y por tanto, la imagen de esta circunferencia por la inversión es precisamente la circunferencia que pasa por los puntos E, D, P, Q.



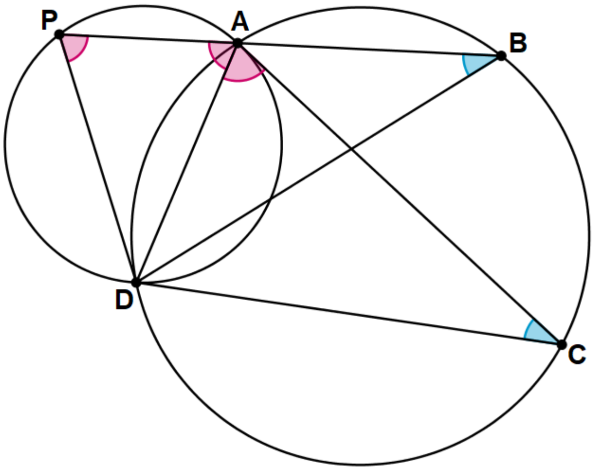
Pero, de la misma forma, se demuestra que los puntos R, Q, F, E son cocíclicos, como lo son también P, R, F, D, y, puesto que las tres rectas PD, QE y RF son los ejes radicales de estas tres circunferencias, está claro que tendrán el centro radical como punto en común.



9.44

Primera versión. Mediante semejanza de triángulos.

Puesto que AD=DP, el triángulo ΔDPA es isósceles, y por tanto $\angle DPA = \angle PAD$.
Por la caracterización angular de recta tangente (10.2.7) , $\angle DAC = \angle DPA$.
Por otro lado, por ser ángulos que abarcan el mismo arco, $\angle ABD = \angle ACD$.

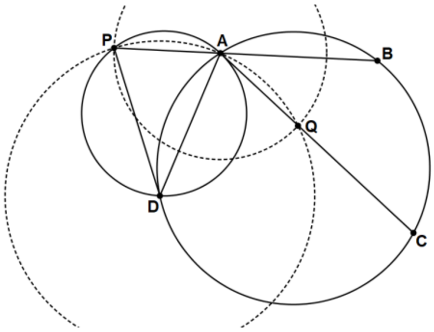


Así pues, los triángulos ΔPBD y ΔACD son semejantes, y puesto que, además, se cumple PD=AD, son congruentes. Así pues, PB=DC, tal y como queríamos ver.

Segunda versión. Mediante semejanza espiral.

Vamos a demostrar que existe una semejanza espiral que envía el segmento orientado $\overrightarrow{PB}$ al segmento orientado $\overrightarrow{AC}$. Para ello seguiremos los pasos del apartado 15.6.4.
En primer lugar vemos que $A = PB \cap AC$.
Trazamos (BAC) y vemos que es la circunferencia Γ.
Trazamos (PAA). Para ello debemos interpretar A como un doble punto, y por tanto trazar la circunferencia que pasa por P y es tangente a AC, que es precisamente Δ.
Luego el centro de la semejanza espiral que envía $\overrightarrow{PB} \to \overrightarrow{AC}$ es el punto de intersección de estas dos circunferencias, que es el punto D.
Pero, además, esta semejanza espiral envía $P \to A$, y sabemos que $DP = DA$, luego el factor de ampliación de esta semejanza es 1, es decir, se trata de una rotación de centro D, y las rotaciones conservan las distancias, y por tanto el segmento imagen tendrá igual longitud que el segmento origen, es decir, PB=AC, tal y como queríamos ver.

Tercera versión. Mediante una rotación.
Sea Q el punto de corte entre la circunferencia de centro D y radio DP=DA y la circunferencia de centro A y radio AP. Vamos a demostrar que Q pertenece a la recta AC.



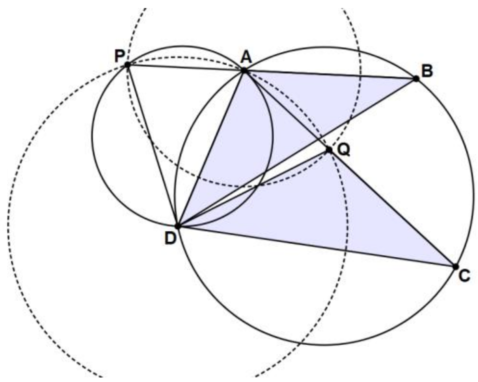
Por construcción, DQ=DA=DP y AP=AQ, luego los triángulos ΔPAD y ΔAQD son triángulos isósceles congruentes, y por tanto $\angle DAQ = \angle DPA$, y por tanto deducimos que AQ es tangente a (ΔAPD) en A (por el criterio angular de tangencia), pero AC era la recta tangente a (ΔAPD), y por tanto Q pertenece a AC.

Vemos que el segmento AC es la rotación del segmento PB respecto del centro D y ángulo $\alpha = \angle PDA = \angle ADQ$, una rotación que envía $P \to A$ y $A \to D$, luego está claro que envía la recta PA a la recta AQ. Queda ver que envía $B \to C$.

Vamos a ver que los triángulos ΔABD y ΔQCD son congruentes. En efecto, $\angle ABD = \angle ACD = \angle QCD$ por ser ángulos que abarcan el mismo arco AD.
Por otro lado, $\angle DAB = \angle DQC$ porque la rotación envía $DA \to DQ$ y $AB = PA \to AQ = AC$.
Puesto que, además, $DA = DQ$, tendremos que son congruentes: $\Delta ABD \equiv \Delta QCD$.

La igualdad $\angle DAB = \angle DQC$ se puede demostrar también de la siguiente forma:

$$\angle DQC = 180^\circ - \angle DQA = 180^\circ - \angle DPA = 180^\circ - \angle PAD = \angle DAB$$



Así pues, $\Delta ABD \equiv \Delta QCD \Rightarrow AB = QC$, y como además sabemos que $PA = AQ$, llegamos a $PB = PA + AB = AQ + QC = AC$, tal y como queríamos ver.

Fuente de las versiones 1 y 2: https://youtu.be/BtnPjG9OvZg

9.45

Veamos que el punto F pertenece a la recta B_1C_1. Sea ω la circunferencia de diámetro AC, y por tanto su centro será C_1. Por Tales, F pertenecerá a ω, puesto que $\angle AFC = 90^o$. Sea H el pie de la altura por A del triángulo ΔABC. De nuevo por Tales sabemos que H también pertenece a ω.

Sea I el punto medio del segmento AH. Aplicando el Teorema del Conector de puntos medios dos veces, $B_1C_1 // BC$, y $BC = HC$ por tanto la recta B_1C_1 pasará por el punto medio del lado AH, es decir, I pertenece a B_1C_1.

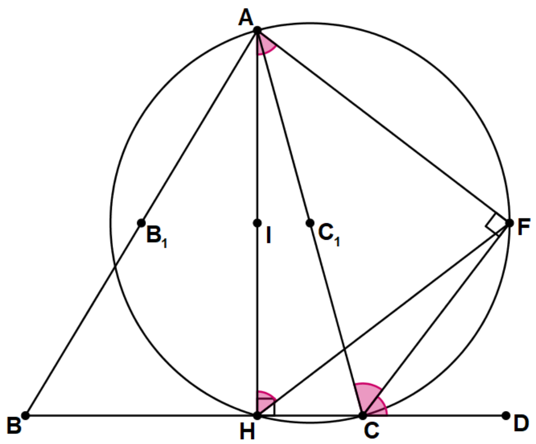
Además, $B_1C_1 // BC$ y $BC \perp AH$, luego $IC_1 = B_1C_1 \perp AH$. Así pues, IC_1 es la mediatriz del segmento AH.

Sea $\alpha = \angle DCF = \angle FCA$.

Por otro lado, por ser AFCH un cuadrilátero inscrito en ω, $\angle HAF = \angle DCF = \alpha$.

Por ser ángulos que abarcan un mismo arco de circunferencia, $\angle AHF = \angle ACF = \alpha$.

Así pues, $\angle AHF = \angle HAF$, y por tanto el triángulo ΔAFH es isósceles con base AH.



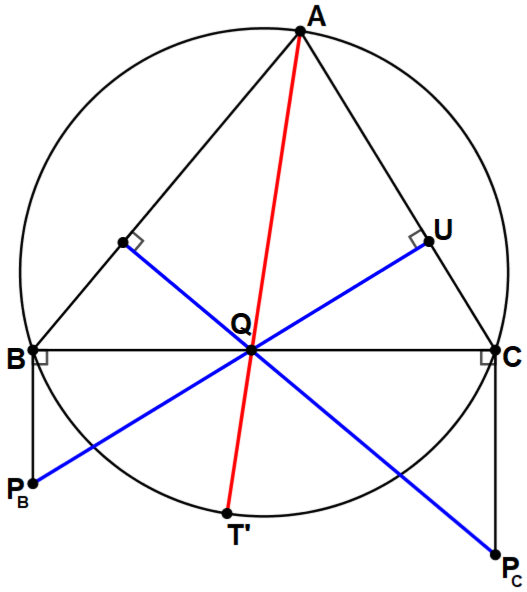
Pero en un triángulo isósceles la mediatriz de la base pasa por el vértice opuesto, es decir, que F pertenece a la recta $IC_1 = B_1C_1$, tal y como queríamos ver.

Con un argumento similar se demuestra que el punto G pertenece a esta misma recta. Aunque vemos que en las soluciones oficiales (Compendium BMO, pág. 157) esto fue penalizado: "There were also penalties for students who provided an argument for *F* lying on B_1C_1 and simply stated the same argument also works for *G* (or vice-versa). While the arguments are similar, in many approaches they weren't identical so at least some justification was required".

En las soluciones oficiales (Compendium BMO, pág. 157) se presentan otras soluciones alternativas.

9.46

Sea T' el segundo punto de corte entre la recta AQ y la circunferencia (ΔABC). Vamos a demostrar que T'=T.
Sea U el punto de corte entre el lado AC y la recta $P_B Q$.



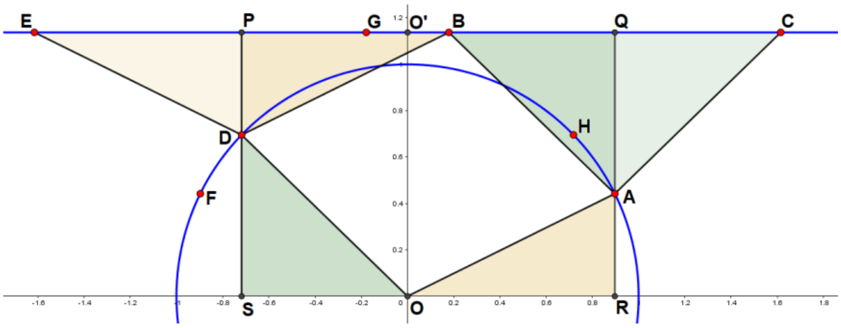
Los triángulos ΔBP_BQ y ΔUCQ son semejantes, pues son triángulos rectángulos compartiendo el ángulo en el vértice Q. Luego $\angle BP_BQ = \angle UCQ = \angle ACB$.
Por otro lado, $\angle ACB = \angle BT'A$ pues $ABT'C$ es un cuadrilátero cíclico.
Así pues, $\angle BP_BQ = \angle BT'Q$, y por tanto el cuadrilátero $BQT'P_B$ es cíclico.
De lo que deducimos que $\angle P_BT'Q = 180^o - \angle P_BBQ = 180^o - 90^o = 90^o$.
Con razonamientos similares llegamos a $\angle P_CT'Q = 90^o$, es decir, que los puntos P_B, T' y P_C están alineados.
Pero P_BP_C es la recta tangente a (ΔABC) por el punto T, por lo tanto T será el único punto de esta circunferencia que pertenece a P_BP_C. Luego $T = T'$ y por tanto Q pertenece a $AT' = AT$, tal y como queríamos ver.

Fuente de esta solución: Soluciones oficiales (Compendium BMO, pág. 215)

9.47

Sea A el punto inicial, y sea O el centro de la circunferencia.
Entre una recta y una circunferencia o entre dos circunferencias solo puede haber, como máximo, dos puntos de corte.
La rana puede saltar a los puntos B y C en l, y del punto B puede saltar a D o volver a A. Del punto D puede saltar a E o volver a B.
Del punto C puede saltar a H o volver a A.

Trazamos las perpendiculares por D y A a la recta l, y sean P, Q, R, S los puntos de corte respectivos con l y la paralela a l por O, tal y como se indica en el esquema siguiente:



Sea O' el punto de intersección entre la recta l y la perpendicular por O.

Observamos que, por construcción, $OA = AB = BD = DO$, luego OABD es un rombo, y por tanto un paralelogramo, es decir, $DB \,//\, OA$ y $DO \,//\, BA$.
Luego $\angle PBD = \angle AOR$, $\angle SDO = \angle BAQ$, y por lo tanto $\Delta PBD \equiv \Delta ROA$ y $\Delta BQA \equiv \Delta OSD$.
Con todo esto se deduce que E es el punto simétrico de C respecto a O'.
En efecto, $EO' = EP + SO = PB + BQ = OR + QC = O'Q + QC = O'C$.

De aquí deducimos que los puntos que encontraremos a partir de E serán los mismos puntos que aparecen saliendo de C, es decir, estamos trabajando con un conjunto finito de puntos. Esto lo podemos razonar de la siguiente forma: Si del punto E puede saltar a F o volver a D, D será el punto simétrico de H y F será el punto simétrico de A. Y por consiguiente, de F puede volver a E o saltar a G, que será el punto simétrico de B. Finalmente, de G puede ir a H o volver a F.
Así pues, estamos siempre trabajando con ocho puntos del plano: A, B, C, D, E, F, G y H.

Observación. En las soluciones oficiales (Compendium BMO, pág. 164) se presentan otras soluciones alternativas.

9.48

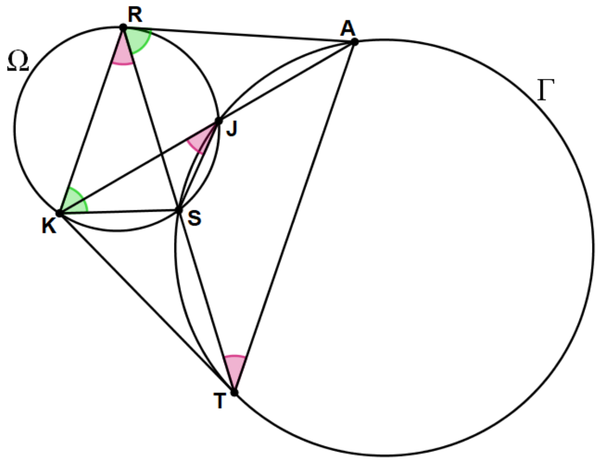
Primera versión.

Por ser ángulos que abarcan un mismo arco, $\angle KRS = \angle KJS$.

Por ser el ángulo exterior en un cuadrilátero cíclico, $\angle KJS = \angle STA$

Por ser RA tangente a $\Omega = (\Delta RKS)$, $\angle SRA = \angle KSR$.

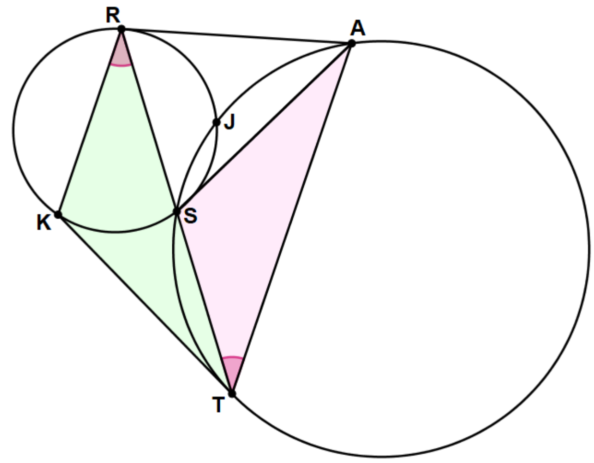
Por lo tanto, por el criterio AA de semejanza, $\Delta KRS \approx \Delta RTA$



Así pues,

$$\frac{KR}{RT} = \frac{RS}{TA} \Rightarrow \frac{KR}{RT} = \frac{ST}{TA} \Rightarrow \frac{KR}{ST} = \frac{RT}{TA}$$

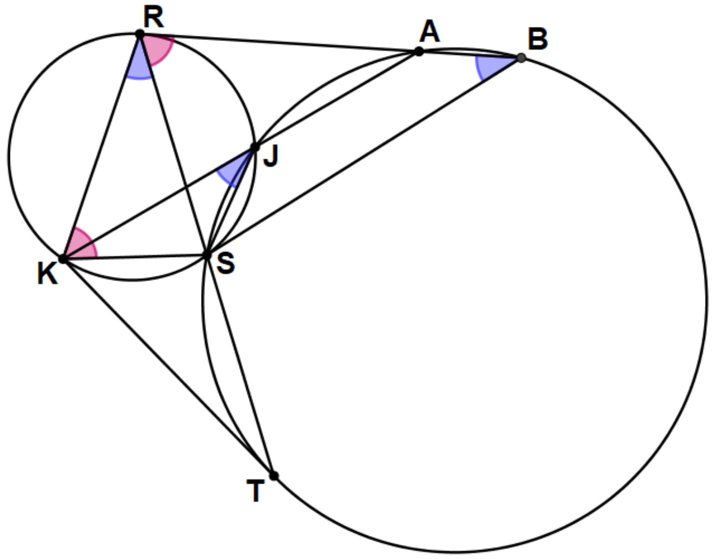
y como sabemos que $\angle KRT = \angle RTA$, aplicando el criterio SAS llegamos a $\Delta KRT \approx \Delta STA$



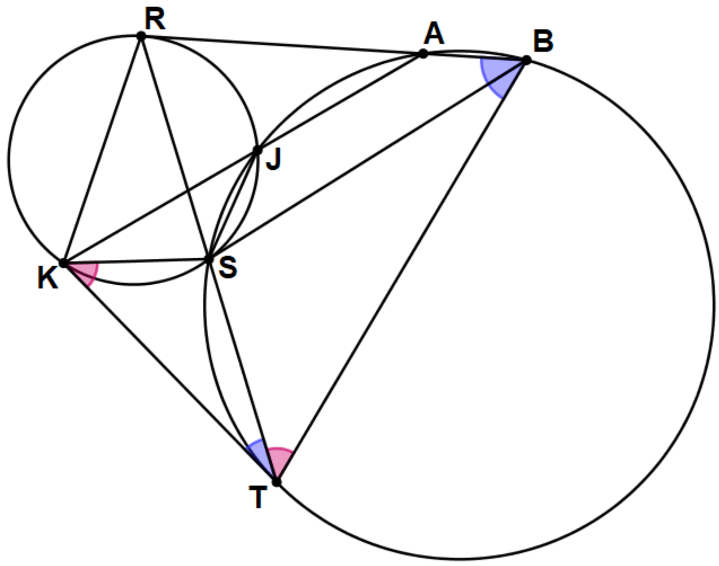
Y por tanto $\angle KTR = \angle SAT$, que es la caracterización angular de segmento tangente, tal y como queríamos ver.

Fuente: Soluciones oficiales (Compendium IMO, pág. 1691)

Segunda versión. Mediante Dumpty Point.
Sea B el segundo punto de corte entre RA y Γ.
Por ser JABS cíclico, $\angle KJS = \angle ABS$.
Por abarcar un mismo arco de circunferencia, $\angle KRS = \angle KJS$
Así pues, $\angle RBS = \angle KRS$.
Por ser RA tangente a Ω, $\angle SRA = \angle RKS$.
Así pues, los triángulos ΔKRS y ΔRBS son semejantes y directamente orientados, es decir, se cumplen las condiciones de la Proposición GA/15.7.3, es decir, el centro S es el centro de una semejanza espiral que envía $\overrightarrow{BR} \to \overrightarrow{RK}$



Y por tanto (apartado c de la proposición), el punto S será el centro de una semejanza espiral que envía $\overrightarrow{KT} \to \overrightarrow{TB}$, es decir, los triángulos ΔKST y ΔTSB son semejantes y positivamente orientados, y por tanto, en particular $\angle STK = \angle SBT$, de lo que se deduce que KT es tangente a $(\Delta STB) = \Gamma$.

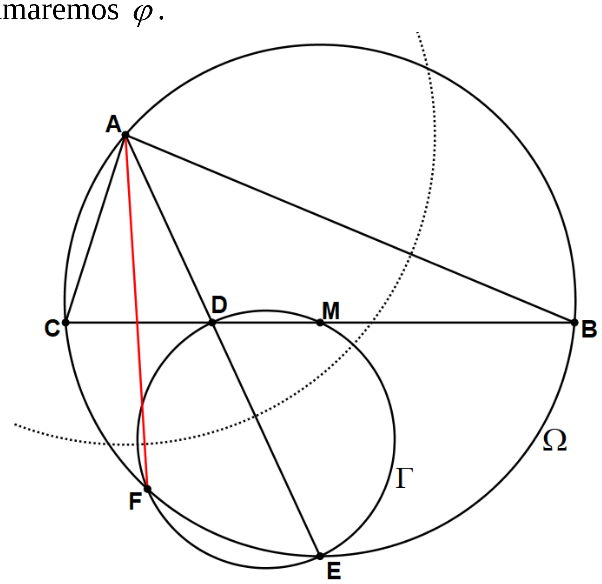


Fuente: "On a special center of spiral similarity" (Jafet Baca)

9.49

a) Sea Γ la circunferencia de diámetro $\overline{DE}$.

Vamos a aplicar la **"Force-Overlaid inversion"** (ver GA/15.1.7) en el triángulo ΔABC, a la que llamaremos φ.



Sabemos que $\varphi(B) = C$ y que $\varphi(C) = B$, luego la imagen de la recta BC será la circunferencia que pasa por B, C y A, es decir, en la circunferencia $\Omega = (\Delta ABC)$.

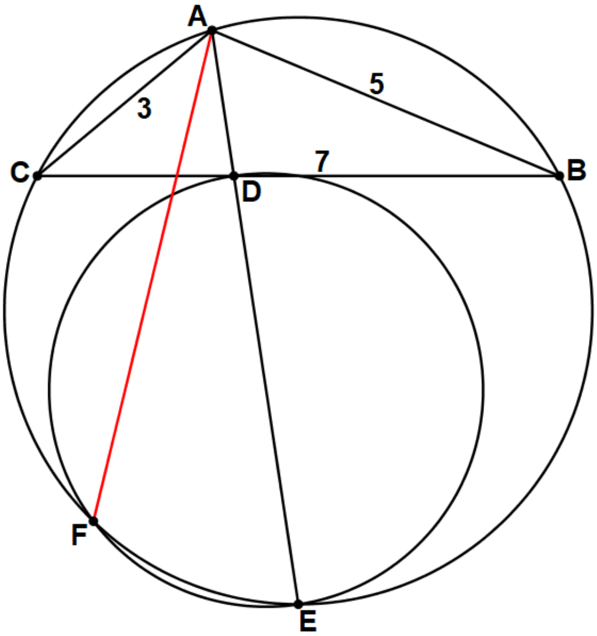
El punto D pertenece a la bisectriz, luego su imagen respecto de φ también pertenecerá a la bisectriz. Por otro lado, el punto D pertenece a BC, luego su imagen respecto de φ pertenecerá a la imagen de BC, es decir a Ω. Así pues, la imagen de D será E.

De la misma forma se demuestra que la imagen de E es D.

Está claro que una simetría respecto de la bisectriz dejará invariante la circunferencia Γ, y por tanto, por las propiedades básicas de una inversión, la transformación φ dejará invariante Γ: $\varphi(\Gamma) = \Gamma$.

Sabemos que el punto E pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{BC}$, luego el punto medio M del lado $\overline{BC}$ pertenecerá a Γ, puesto que $\angle DME = 90^{o}$.
El punto M pertenece a $\overline{BC}$ y a Γ, luego su imagen pertenecerá a $\varphi(BC) = \Omega$ y a $\varphi(\Gamma) = \Gamma$, es decir, tiene que ser el punto F.
Puesto que sabemos que esta transformación envía una semirrecta $\overrightarrow{AM}$ a su conjugada isogonal, hemos demostrado que $\overrightarrow{AF} = \varphi\left(\overrightarrow{AM}\right)$ es conjugada isogonal de la mediana $\overrightarrow{AM}$, es decir, hemos demostrado que $\overrightarrow{AF}$ es una simediana.

c)



Aplicando el Teorema del Coseno,

$$7^2 = 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cdot \cos(\angle A) \Leftrightarrow \frac{-1}{2} = \cos(\angle A) \Leftrightarrow \angle A = 120^{o}$$

Por otro lado, estamos con la configuración del apartado anterior, es decir, AF es una simediana y por tanto ABFC es un cuadrilátero armónico (ver GA/15.5.1). Así pues, si definimos $x = CF$, $y = BF$, se cumplirá

$$3y = 5x$$

Aplicando el Teorema del Coseno en el triángulo ΔBCF ,

$$7^2 = x^2 + y^2 - 2\cdot x\cdot y\cdot \cos(60^{o}) \Leftrightarrow 49 = x^2 + y^2 - 2xy\frac{1}{2} \Leftrightarrow 49 = x^2 + y^2 - xy$$

Luego

$$49 = x^2 + \left(\frac{5}{3}x\right)^2 - x\frac{5}{3}x = x^2 + \frac{25x^2}{9} - \frac{5x^2}{3} = \frac{19x^2}{9} \Leftrightarrow x = \frac{21}{\sqrt{19}} \Rightarrow y = \frac{35}{\sqrt{19}}$$

Finalmente, aplicando el Teorema de Ptolomeo:

$$7AF = 3\cdot\frac{35}{\sqrt{19}} + 5\cdot\frac{21}{\sqrt{19}} = \frac{105}{\sqrt{19}} + \frac{105}{\sqrt{19}} = \frac{210}{\sqrt{19}} \Rightarrow AF = \frac{30}{\sqrt{19}} \Rightarrow AF^2 = \frac{900}{19}$$

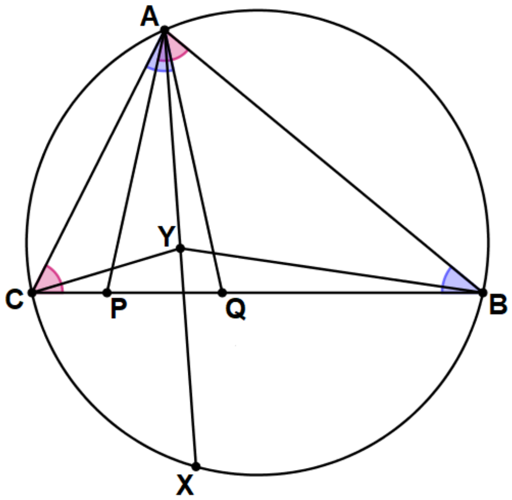
Y por tanto, la respuesta correcta es $900 + 19 = 919$.

Fuente de esta solución: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2012_AIME_II_Problems/Problem_15

9.50

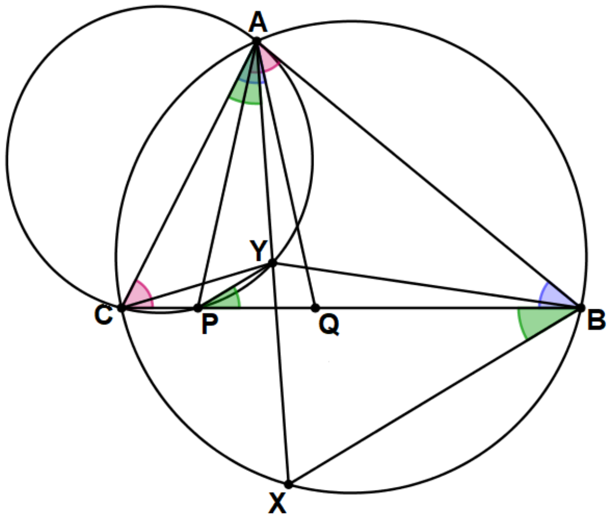
Primera versión. Mediante Dumpty-point.

Sea X el punto de corte entre MB y NC y sea Y el punto medio del segmento $\overline{AX}$. Vamos a demostrar que Y es el A-Dumpty point del triángulo ΔABC, y por lo tanto sabemos que su punto simétrico X pertenecerá a la circunferencia circunscrita (ΔABC) (ver GA/15.7.3).



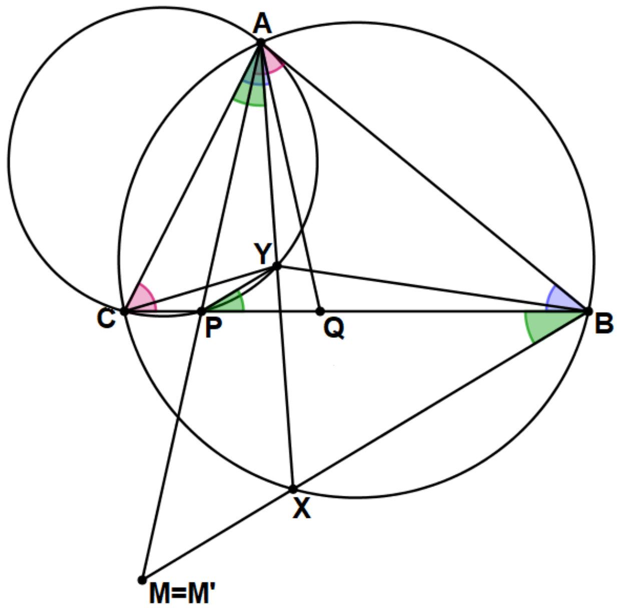
Sea Y el A-Dumpty point del triángulo ΔABC. Entonces $\Delta CYA \approx \Delta AYB$, y por tanto $\angle YCA = \angle YAB$, y puesto que, por hipótesis, $\angle PCA = \angle PAB$, se deduce que $\angle PCY = \angle PCA - \angle YCA = \angle PAB - \angle YAB = \angle PAQ$

De lo que deducimos que AYPC es un cuadrilátero cíclico, y por tanto $\angle YCB = \angle CAY = \angle CBX$



De lo anterior se deduce que $YP // BX$ (ángulos internos alternos iguales).

Sea M' el punto de corte entre AP y BX. En el triángulo $\Delta AXM'$, puesto que Y es el punto medio de AX y $YP // XM'$ podemos aplicar el Teorema del conector de puntos medios para garantizar que P es el punto medio de AM', es decir, que $M = M'$.



Con un argumento similar se demuestra que CN pasa por X, es decir, que $X = BM \cap CN \in (ABC)$.

Segunda versión. Mediante triángulos semejantes.

En primer lugar vemos que $\Delta ABP \approx \Delta ABC \approx \Delta AQC$ por el criterio AA.

Luego $\angle APB = \angle AQC = \angle A$, y por tanto ΔAQP es un triángulo isósceles, de lo que se deduce que $PM = AP = AQ = QN$.

Puesto que $\Delta ABP \approx \Delta AQC$, tenemos

$$\frac{AP}{QC} = \frac{AB}{AC} = \frac{BP}{AQ} \Rightarrow \frac{NQ}{QC} = \frac{NQ}{PM}$$

Y puesto que, además, $\angle BPM = \angle NQC$, llegamos a $\Delta BMP \approx \Delta NCQ$, de lo que se deduce que $\angle BMP = \angle NCQ$ y $\angle PBM = \angle QNC$, con lo cual llegamos finalmente a $\Delta BPM \approx \Delta BSC$, y por tanto $\Delta BPM = BSC = \angle B + \angle C = 180° - \angle A$.

9.51

Primera versión. (Mediante semejanza espiral)

Sea M la proyección del punto D sobre el lado AB. Puesto que $DM \perp AB$, el punto M pertenecerá a la circunferencia ω.

Está claro que $PM \parallel PH$ puesto que ambas son perpendiculares comunes a AB.

Puesto que AE=ED, por el conector de puntos medios se deduce que AH=HM.

Por otro lado, por Potencia de un punto, puesto que PQ es tangente a ω,

$$PQ^2 = PD \cdot PB \Rightarrow \frac{PQ^2}{PD^2} = \frac{PD \cdot PB}{PD^2} = \frac{PB}{PD} = \frac{HB}{HM} = \frac{HB}{HA}$$

Aplicando el Primer Teorema del Cateto (GA/8.4.1a)

$$HB = \frac{BC^2}{AB}, \quad HA = \frac{AC^2}{AB}$$

Y por tanto:

$$\frac{HB}{HA} = \frac{BC^2}{AB} : \frac{AC^2}{AB} = \frac{BC^2}{AC^2} \cdot \frac{AB}{AB} = \frac{BC^2}{AC^2}$$

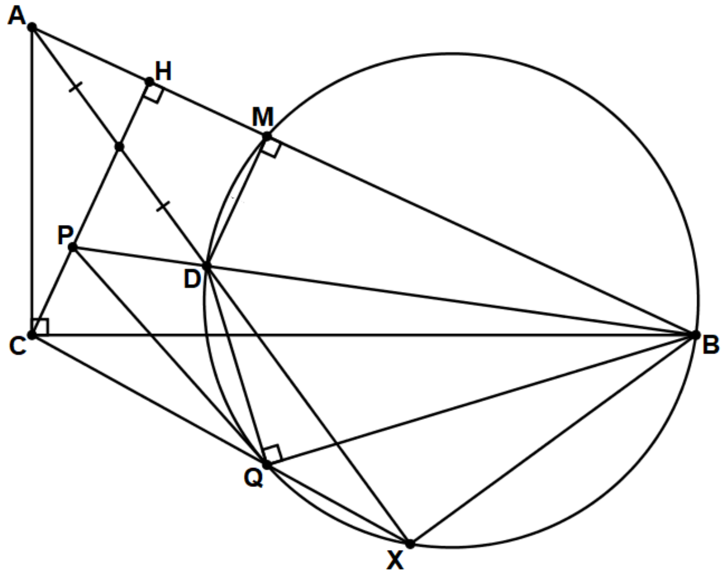
Con lo que llegamos a

$$\frac{PQ^2}{PD^2} = \frac{BC^2}{AC^2} \Rightarrow \frac{PQ}{PD} = \frac{BC}{AC}$$

Puesto que PQ es tangente a $\omega = (\Delta DBQ)$, $\angle PQD = \angle PBQ$, y por tanto $\Delta PQD \approx \Delta PBQ$, luego

$$\frac{BC}{AC} = \frac{PQ}{PD} = \frac{QB}{DQ}$$

Y como además, $\angle DQB = 90^{\circ}$, llegamos a $\Delta ACB \approx \Delta DQB$.



Así pues, B es el centro de una semejanza espiral que envía $\overrightarrow{QD} \rightarrow \overrightarrow{CA}$, luego también será el centro de una semejanza espiral que envía $\overrightarrow{QC} \rightarrow \overrightarrow{DA}$. (ver GA/15.6.4)

Sea $X = QC \cap AD$. El punto B será el segundo punto de intersección entre (ΔQXD) y (ΔCXA).

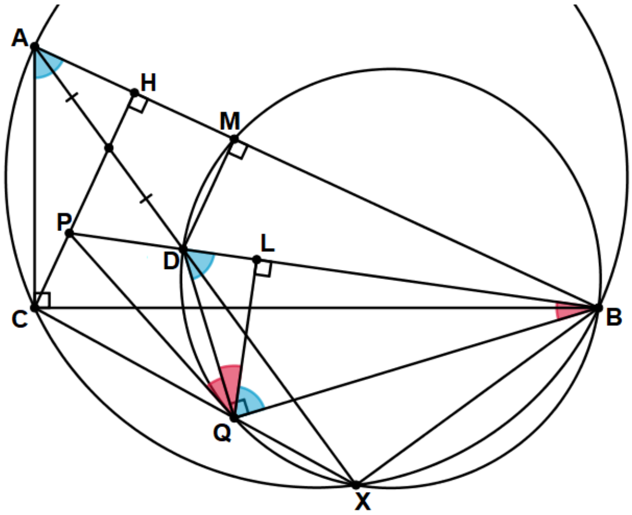
Es decir, $X = QC \cap AD \in (\Delta QXD) = (\Delta QBD) = \omega$, tal y como queríamos ver.

Fuente de esta solución: On a special center of spiral similarity (Jafet Baca)

Segunda versión. (También mediante semejanza espiral)
Sea M la proyección de D en el lado AB. Entonces

$$\frac{PD}{PB} = \frac{HM}{HB} = \frac{HA}{HB}$$

Sea L la proyección de Q sobre DB.



Los triángulos ΔDQB y ΔLQB son triángulos rectángulos compartiendo el ángulo en B, luego son semejantes, y por tanto $\angle QDB = \angle LQB$, luego $\Delta DLQ \approx \Delta QLB$ y por tanto

$$\angle DQL = \angle QBL$$

Por otro lado, puesto que PQ es tangente a $\omega = (\Delta DQB)$, $\angle PQD = \angle DBQ = \angle DQL$, es decir, BQ es la A-bisectriz interior y QB es la A-bisectriz exterior del triángulo ΔPQL. Luego, aplicando el Teorema de la bisectriz,

$$\frac{PD}{DL} = \frac{PQ}{QL} = \frac{PB}{BL} \Rightarrow \frac{PD}{PB} = \frac{DL}{BL}$$

Así pues,

$$\frac{HA}{HB} = \frac{PD}{PB} = \frac{DL}{BL}$$

De la igualdad

$$\frac{HA}{HB} = \frac{DL}{BL}$$

se deduce que la semejanza espiral τ de centro B que envía $A \to D$ envía $H \to L$. Esta semejanza espiral envía también la circunferencia de diámetro AB, es decir (ΔABC) a la circunferencia de diámetro DB, es decir ω.
Puesto que, además, $CH \perp AB$ y $LQ \perp DB$, de deduce que τ envía $C \to Q$. Así pues, los triángulos ΔABC y ΔDBQ son semejantes, y se sigue como en la versión anterior.

Fuente de esta versión: Soluciones oficiales (Compendium IMO, pág. 1505)

Tercera versión. (Mediante semejanza de triángulos)
De nuevo, sea M la proyección ortogonal de D en AB. Los triángulos ΔABC y ΔCAH son semejantes pues son triángulos rectángulos compartiendo un mismo ángulo en el vértice A. Luego $\angle ACH = \angle ABC$. Por otro lado, en versiones anteriores ya hemos visto que AH=HM, y por tanto los triángulos ΔAHC y ΔMHC son congruentes, y por tanto $\angle ACH = \angle MCH$.

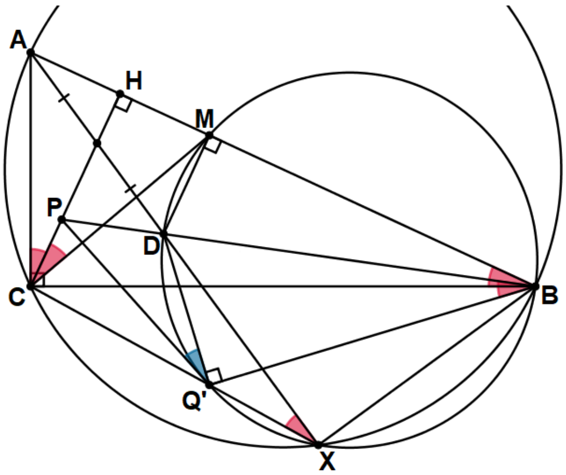
Prolongamos el segmento AD hasta cortar ω en el punto X.
Puesto que $\angle AXB = \angle DXB = 90^{\circ}$, el punto X también pertenecerá a la circunferencia $\Gamma = (\Delta ABC)$.
Sea $Q' \neq X$ el segundo punto de corte entre CX y ω. Queremos demostrar que $Q' = Q$, es decir, que PQ' es tangente a ω, o lo que es lo mismo, que $\angle PQ'D = \angle DBQ'$

Puesto que BXQ'D es un cuadrilátero cíclico,

$$\angle DBQ' = \angle DXQ' = \angle AXC = \angle ABC = \angle ACH = \angle HCM$$

Y por tanto los triángulos ΔHCM y $\Delta DQ'B$ son semejantes, y por tanto

$$\frac{HM}{CM} = \frac{DQ'}{DB} \Leftrightarrow HM \cdot DB = CM \cdot DQ'$$



Por otro lado, $DM \,//\, HP$, y por tanto $\frac{PD}{BD} = \frac{HM}{MB} \Leftrightarrow PD \cdot MB = HM \cdot BD$.
Así pues, $PD \cdot MB = HM \cdot BD = CM \cdot DQ' \Rightarrow \frac{PD}{DQ'} = \frac{CM}{MB}$.

Por otro lado, $\angle CMA = 180^{\circ} - \angle CXB = 180^{\circ} - \angle Q'XB = \angle Q'DB$, luego $\angle CMA = \angle Q'DB \Rightarrow \angle CMB = 180^{\circ} - \angle CMA = 180^{\circ} - \angle Q'DB = \angle PDQ'$.
De lo anterior se deduce que los triángulos ΔCMB y $\Delta PDQ'$ son semejantes, y por tanto
$\angle DQ'P = \angle MBC$, o lo que es lo mismo, $\angle PQ'D = \angle DBQ'$, tal y como queríamos ver.

Fuente de esta versión: Soluciones oficiales (Compendium IMO, pág. 1505)

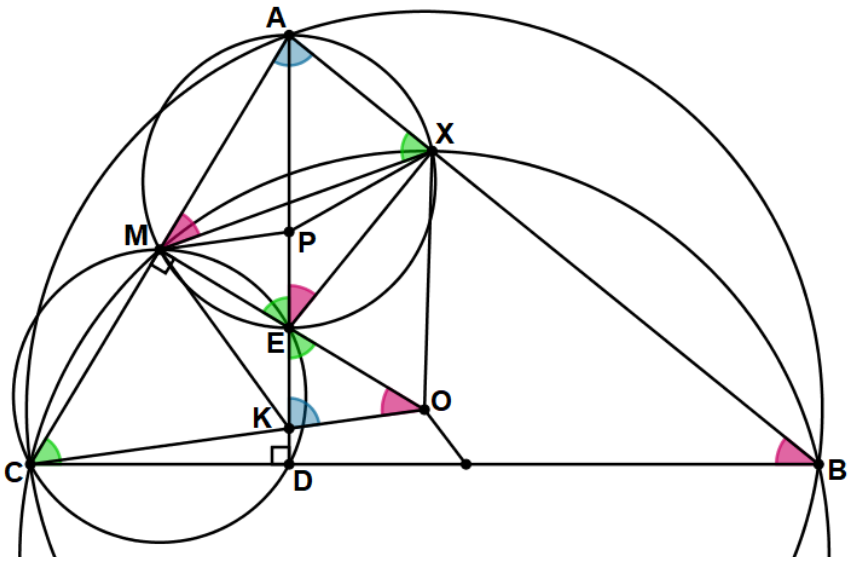
9.52

Vamos a demostrar que Y pertenece a la circunferencia (ΔXOB). Para ello demostraremos que $\angle POX = \angle XBY = \angle B$.

Puesto que el circuncentro O es la intersección de las mediatrices de los lados, sabemos que $MO \perp AC$. Sea D el pie de la altura por A y E el punto de intersección entre MO y AD. Puesto que $ME \perp AC$ y $CD \perp AD$, el cuadrilátero MEDC es cíclico, y por tanto $\angle KEO = \angle C$.
Por otro lado, aplicando el Teorema del ángulo central, $2\angle B = \angle COA$, pero puesto que MO es O-altura del triángulo isósceles ΔCAO, tendremos que $\angle COM = \angle COA / 2 = \angle B$, y por tanto $\angle EKO = \angle A$, Es decir, $\Delta EOK \approx \Delta CBA$.
Trazamos ahora el segmento $\overline{MX}$. Puesto que X pertenece a (ΔCMB), tendremos $\angle AXM = \angle C$, y por tanto $\angle AMX = \angle B$, es decir, $\Delta XMA \approx \Delta CBA$, y por tanto:

$$\frac{AX}{XM} = \frac{AC}{BC} \quad (1)$$

Puesto que $\angle AXM = \angle AEM$, el cuadrilátero AXEM será cíclico, y por tanto $\angle AEX = \angle AMX$.



Vamos a demostrar que $\Delta XPA \approx \Delta XOM$.
Por un lado, $\angle XMO = 90° - \angle XMA = 90° - \angle B = \angle XAP$, luego lo único que tenemos que demostrar es que

$$\frac{AX}{XM} = \frac{AP}{MO}$$

Aplicando (1) tenemos que demostrar que

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AP}{MO}$$

Antes ya hemos visto que $\angle COM=\angle B$, y por tanto $\angle MCO=90^{\circ}-\angle COM=90^{\circ}-\angle B$

Aplicando el Teorema del Seno en ΔAKC: $\frac{AC}{\sin\angle A}=\frac{AK}{\sin(90^{\circ}-\angle B)}$

Aplicando el Teorema del Seno en ΔOMC: $\frac{OM}{\sin(90^{\circ}-\angle B)}=\frac{OC}{\sin(\angle CMO)}=OC$

Luego

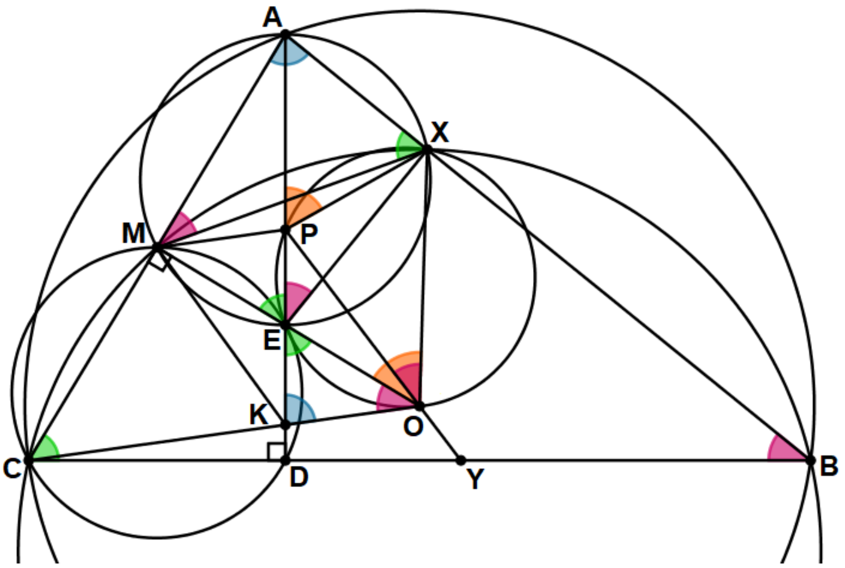
$$\frac{AK}{OM}=\frac{AC\cdot\sin(90^{\circ}-\angle B)/\sin\angle A}{OC\cdot\sin(90^{\circ}-\angle B)}=\frac{AC}{OC\cdot\sin\angle A}\Rightarrow\frac{AP}{OM}=\frac{AC}{2OC\cdot\sin\angle A}=\frac{AC}{2r\cdot\sin\angle A}$$

Donde r es el radio de la circunferencia circunscrita (ΔABC).

Aplicando el Teorema del Seno en ΔABC: $2r=\frac{BC}{\sin\angle A}\Rightarrow BC=2r\sin\angle A$

Con lo que llegamos a $\frac{AP}{OM}=\frac{AC}{BC}$, tal y como queríamos ver.

Y puesto que $\Delta XPA\approx\Delta XOM$, tenemos que $\angle XPA=\angle XOE$, y por tanto el cuadrilátero XOEP es cíclico.



Y por tanto, finalmente, $\angle XOP=\angle XEP$, y por tanto $\angle XOP=\angle B$ y el cuadrilátero BXOY es cíclico, tal y como queríamos ver.

Fuente de esta solución: Soluciones oficiales (Compendium IGO, página 108)

9.53

Vemos que N es el A-Humpty Point de ΔABC. En efecto, pertenece a la circunferencia (ΔBHC) y $HN \perp AN$ puesto que N pertenece a la circunferencia de diámetro AH.

Vemos también que M es el A-Dumpty Point de ΔABC, con argumentos similares y utilizando las propiedades de 15.7.3 f) y g).

Así pues, son conjugados isogonales, y por tanto $\angle BAX = \angle BAM = \angle CAN = \angle CAY$ y $\angle MBA = \angle NBC = \angle CYN$, de lo que se deduce que $\Delta AMB \approx \Delta ACY$.
Con argumentos similares se deduce que $\Delta ANB \approx \Delta ACX$.

$$\Delta AMB \approx \Delta ACY \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AC}{AY} \Rightarrow AM \cdot AY = AB \cdot AC$$

$$\Delta ANB \approx \Delta ACX \Rightarrow \frac{AB}{AX} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow AB \cdot AC = AN \cdot AX$$

Y por tanto $AM \cdot AY = AN \cdot AX \Rightarrow \dfrac{AM}{AX} = \dfrac{AN}{AY}$, es decir, los triángulos ΔAMN y ΔAXY están en posición de Tales, y en consecuencia, $MN \,//\, XY$.

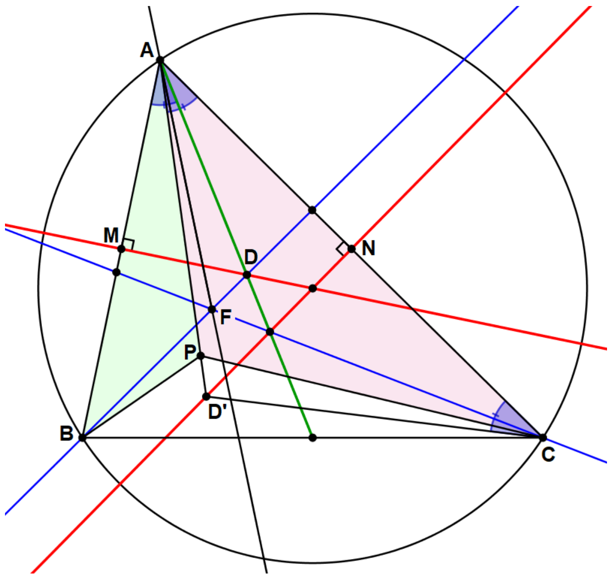
Fuente de esta solución: Documento "On two special points in triangle" , Kapil Pause.

9.54

Primera versión. Mediante A-Dumpty Point.
Sea O el circuncentro del triángulo ΔABC. Está claro que $\angle OMA = \angle ONA = 90^\circ$, y por tanto N y M pertenecen a la circunferencia de diámetro AO. Solo tenemos que demorar que F también pertenece a esta circunferencia, es decir, $\angle OFA = 90^\circ$, y para ello solo debemos demostrar que F es el A-Dumpty Point del triángulo ΔABC, y aplicar 15.7.3f.

Sea P el A-Dumpty Point del triángulo ΔABC. Tenemos que demostrar que $P = F$, es decir, que P es el punto de intersección entre DB y CE.

Veamos en primer lugar que P pertenece a DB. Sea D' el punto de corte entre AP y la mediatriz de AC.



El punto P es el centro de la semejanza espiral que envía $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{AC}$, es decir, envía $B \to A$ y $A \to C$.
Luego envía el punto medio M de AB al punto medio N de AC: $M \to N$, y envía la perpendicular por M a la perpendicular por N: $MO \to NO$.

Por otro lado, sabemos que AP y AD son conjugadas isogonales, y por tanto

$$\angle BAD = \angle CAP = \angle CAD'$$

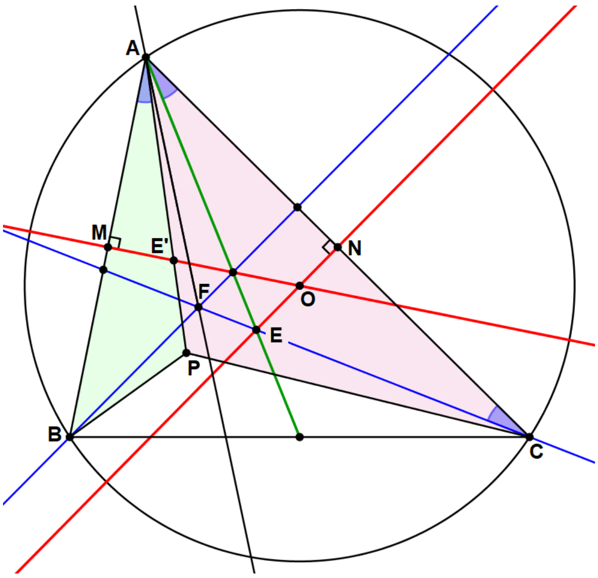
Y por ser D'N la mediatriz del lado AC, $\angle CAD' = \angle D'CA$.
Así pues, $\angle BAD = \angle ACD'$, y puesto que D pertenece a la mediatriz de AB, su imagen pertenecerá a la mediatriz de AC, y con el resultado anterior $\angle CAD' = \angle D'CA$ podemos garantizar que esta semejanza espiral envía $D \to D'$.

Puesto que sabemos que envía $B \to A$, envía $BD \to AD'$, y está claro que P pertenece a AD', y P es fijo por la semejanza espiral, pues es su centro, luego P pertenecerá a BD, tal y como queríamos ver.

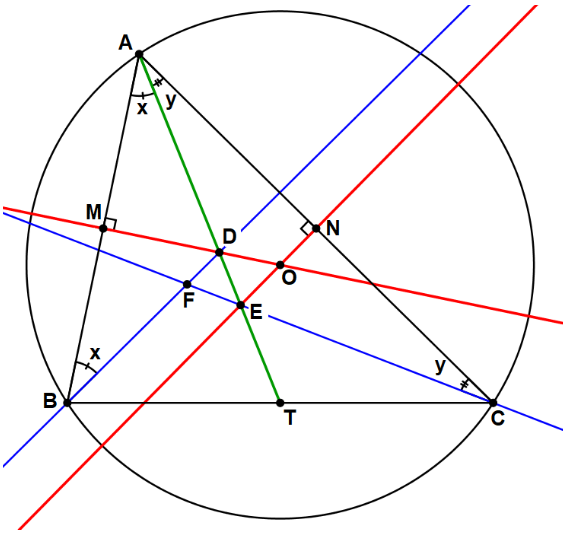
Definiendo ahora $E' = AP \cap MO$, y teniendo en cuenta que

$$\angle BAE' = \angle EAC = \angle ACE$$

vemos que esta semejanza espiral envía $E' \to E$, y por tanto $AE' \to CE$ y puesto que P pertenece a AE', su imagen que es el propio P pertenecerá a CE, tal y como queríamos ver.



Segunda versión. Aplicando Angle Chasing y Teorema del Seno.
Siguiendo el razonamiento de la primera versión, queremos demostrar $\angle AFO = 90°$.
Sean $x = \angle ABD = \angle BAD$ y $y = \angle EAC = \angle ECA$, por lo que $x + y = \angle A$.



Vamos a suponer que $AB > AC$. Otras configuraciones posibles se resuelven con argumentos equivalentes.
En primer lugar vemos que, puesto que son ángulos exteriores de los triángulos ΔABD y ΔACE, se cumple $\angle FDE = 2x$ y $\angle DEF = 2y$, y por tanto

$$\angle DFE = 180° - 2x - 2y = 180° - 2(x+y) \Rightarrow \angle BFE = 2(x+y) = 2\angle A = \angle BOC,$$

Luego los puntos B, F, O y C son cocíclicos.

Sea T el punto medio del lado BC. Aplicando el Teorema del Seno en ΔABT :

$$\frac{BT}{\sin x}=\frac{AB}{\sin \angle BTA}\Rightarrow AB=BT\sin \angle BTA \sin x$$

Aplicando el Teorema del Seno en ΔACT :

$$\frac{CT}{\sin y}=\frac{AC}{\sin \angle CTA}\Rightarrow AC=CT\sin \angle CTA \sin y$$

Puesto que son ángulos suplementarios, $\sin \angle BTA=\sin \angle CTA$, y puesto que T es el punto medio de BC, $BT=CT$, con lo que llegamos a

$$AB\sin x=AC\sin y$$

Aplicando el Teorema del Seno en ΔABF :

$$\frac{AF}{\sin x}=\frac{AB}{\sin \angle AFB}\Rightarrow AF\sin \angle AFB=AB\sin x$$

Aplicando el Teorema del Seno en ΔACF :

$$\frac{AF}{\sin y}=\frac{AC}{\sin \angle AFC}\Rightarrow AF\sin \angle AFC=AC\sin y$$

Con lo que, finalmente, llegamos a

$$AF\sin \angle AFB=AF\sin \angle AFC\Rightarrow \sin \angle AFB=\sin \angle AFC$$

Por otro lado, $\angle AFB+\angle AFC=360^{\circ}-2\angle A>180^{\circ}$, con lo cual podemos deducir de la igualdad anterior que $\angle AFB=\angle AFC$, y por tanto

$$2\angle AFB=\angle AFB+\angle AFC=360^{\circ}-2\angle A\Rightarrow \angle AFB=\angle AFC=180^{\circ}-\angle A.$$

Puesto que BFOC es cíclico, $\angle OFC=\angle OBC=90^{\circ}-\angle A$

Con lo que, finalmente,

$$\angle AFO=\angle AFC-\angle OFC=180^{\circ}-\angle A-(90^{\circ}-\angle A)=90^{\circ}$$

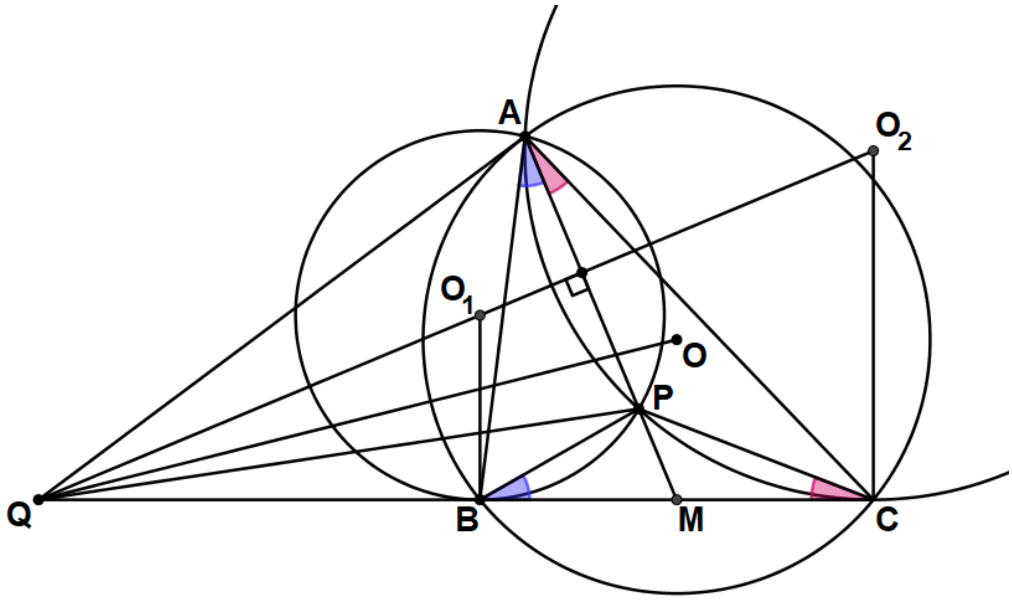
tal y como queríamos ver.

Fuente de esta versión: Soluciones oficiales (CompendiumUSAMO, pág. 194)

9.55

Sean $\omega_1 = (\Delta APB)$ y $\omega_2 = (\Delta APC)$. De $\angle PAB = \angle PBC$ y $\angle PAC = \angle PCB$ se deduce que BC es recta tangente común a ambas circunferencias, por lo que su eje radical, que es AP, pasará por su punto medio M.
Sea Q el punto de corte entre la mediatriz de AP y la recta BC. Vamos a demostrar que AQ es tangente a (ΔABC).

$\Delta ABM \approx \Delta BMP \Rightarrow \angle BPM = \angle B$ y $\Delta ACM \approx \Delta CMP \Rightarrow \angle CPM = \angle C$
luego $\angle BPC = \angle B + \angle C = 180° - \angle A$, $\angle APB = 180° - \angle B$, $\angle APC = 180° - \angle C$



Aplicando el Teorema del Seno en ΔAPB y en ΔAPC:

$$2O_1B = \frac{AB}{\sin \angle APB} = \frac{AB}{\sin(180° - \angle B)} = \frac{AB}{\sin(\angle B)}$$

$$2O_2C = \frac{AC}{\sin \angle APC} = \frac{AC}{\sin(\angle C)}$$

Por construcción de circunferencia circunscrita, los puntos Q, O_1, O_2 están alineados, pues O_1 y O_2 pasan ambos por la mediatriz del segmento AP, y $O_1B // O_2C$ pues ambos segmentos son perpendiculares comunes a BC. Luego, por Triángulos en Posición de Tales,

$$\frac{QB}{QC} = \frac{O_1B}{O_2C} = \frac{AB/(2\sin(\angle B))}{AC/(2\sin(\angle C))} = \frac{AB\sin(\angle C)}{AC\sin(\angle B)}$$

Aplicando el Teorema del Seno en el triángulo ΔABC,

$$\frac{AB}{\sin(\angle C)} = \frac{AC}{\sin(\angle B)} \Rightarrow \frac{\sin(\angle C)}{\sin(\angle B)} = \frac{AB}{AC}$$

Con lo que llegamos a

$$\frac{QB}{QC} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

Trazamos ahora la recta tangente a (ΔABC) por A y sea Q' su punto de corte con AB.
Aplicando el criterio AA de semejanza de triángulos, $\Delta Q'AC \approx \Delta Q'BA$, luego

$$\frac{AB}{AC} = \frac{Q'B}{Q'A}$$

Y por tanto,

$$\frac{Q'B}{Q'C} = \frac{Q'B \cdot Q'A}{Q'C \cdot Q'A} = \frac{Q'B}{Q'A} \cdot \frac{Q'A}{Q'C} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{Q'A}{Q'C} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{Q'B}{Q'A} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

Por lo tanto, con el punto Q' también se cumple

$$\frac{Q'B}{Q'C} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

De donde se deduce que $Q = Q'$, es decir, la recta AQ es tangente a (ΔABC).
Luego $\angle QAO = 90^{o}$, y por tanto los puntos A, O , M y Q son cocíclicos, y por tanto $\angle QAM = \angle QOM$.
Con este resultado es fácil solucionar el problema.
Sea $\alpha = \angle AQP$. El triángulo ΔAQP es isósceles en Q, por lo que

$$\alpha + 2\angle QAP = 180^{o} \Rightarrow \alpha = 180^{o} - 2\angle QAP = \alpha = 180^{o} - 2\angle QAM$$

Sea $\beta = \angle OQB$. Se cumple

$$\angle QOM + \beta = 90^{o} \Rightarrow \beta = 90^{o} - \angle QOM \Rightarrow$$

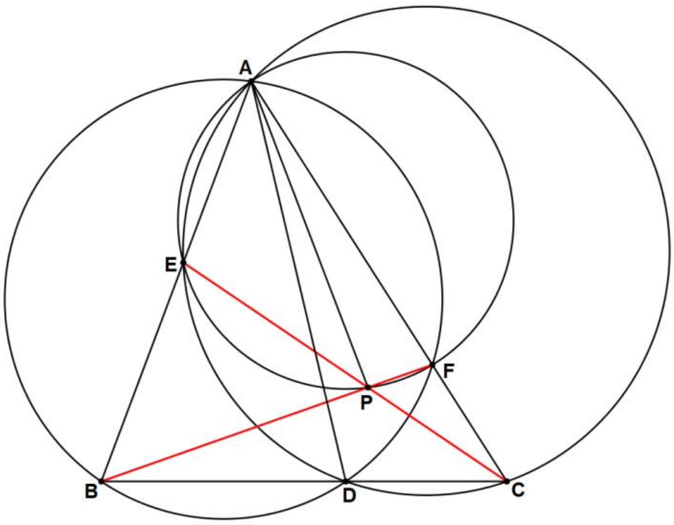
$$\Rightarrow 2\beta = 180^{o} - 2\angle QOM = 180^{o} - 2\angle QAM = \alpha$$

tal y como queríamos demostrar.

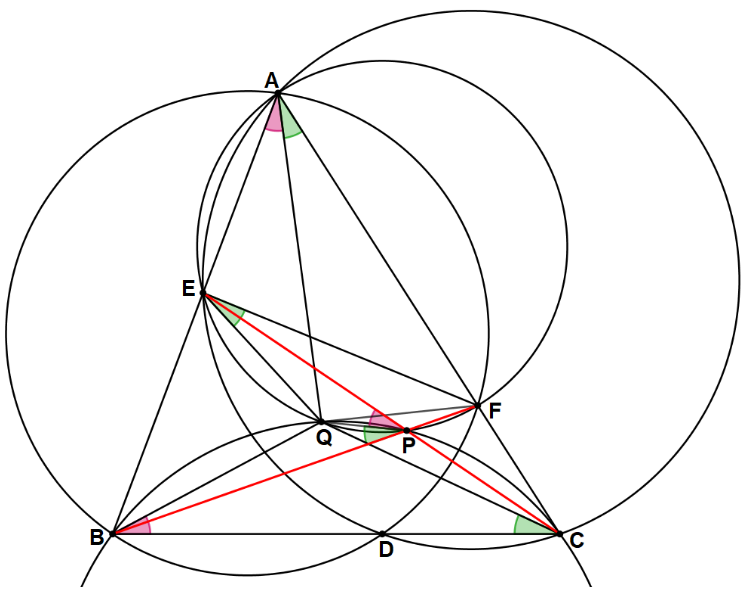
Fuente de esta solución: https://artofproblemsolving.com/community/c698232h1693635

9.56

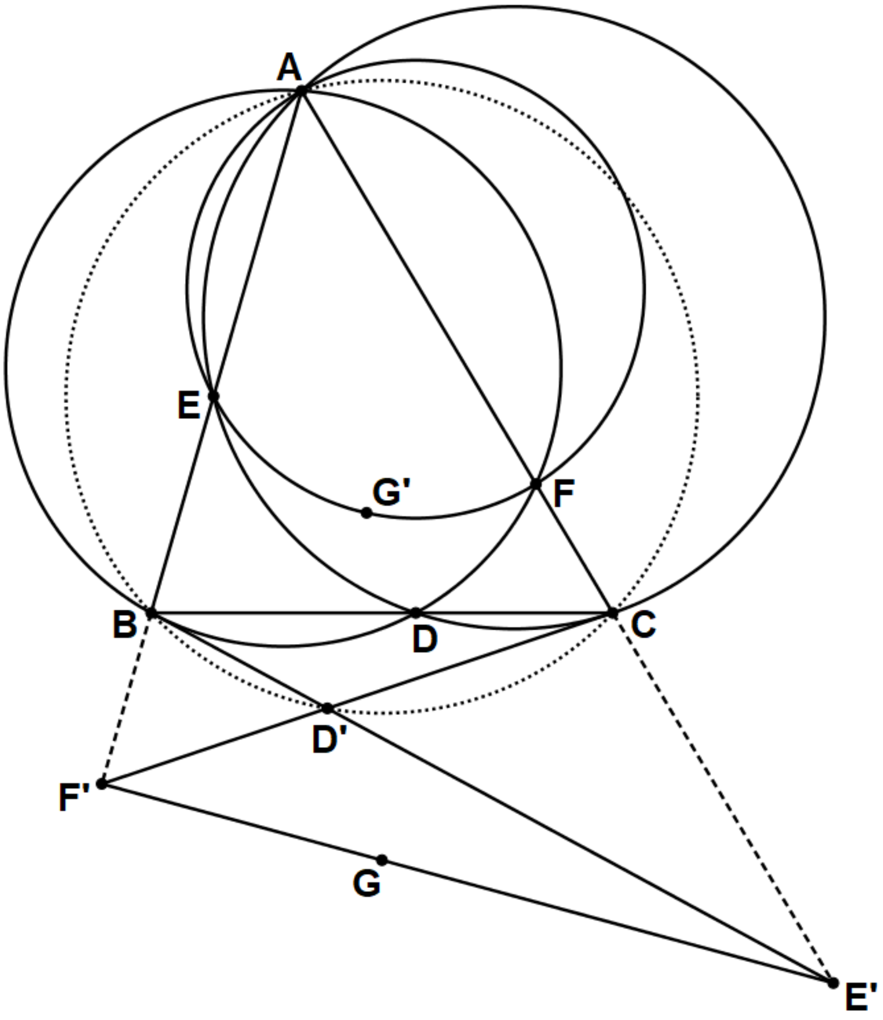
Primera versión.
Trazamos las rectas BF y EC, y sea P su punto de corte.
$\angle PBC = \angle FBD = \angle FAD$, $\angle PCB = \angle ECD = \angle EAD$ y por tanto
$\angle PBC + \angle PCB = \angle FAD + \angle EAD = \angle A$
Luego $\angle BPC = 180º - (\angle PBC + \angle PCB) = 180º - \angle A \Rightarrow \angle EPB = \angle A = \angle EAF$
de lo que se deduce que el punto P pertenece a la circunferencia (ΔAEF).



Sea $Q \neq P$ el otro punto de intersección entre (ΔBCP) y (ΔEFP).
$\angle QBC = \angle EPQ = \angle EAQ$ y $\angle QCB = \angle QPB = \angle QAF$. Luego el punto Q es el A-Humpty point del triángulo ΔABC, que es un punto que no depende de D y que sabemos que pertenece a la A-mediana de ΔABC (ver GA/15.1.8). Este punto pertenece a (ΔAEF) por construcción.



Segunda versión.
Vamos a solucionar este problema aplicando la "Force-Overlaid inversion" (GA/15.1.7) y la proposición GA/15.4.4.
Sabemos que la Force-Overlaid inversion intercambia $C \leftrightarrow B$, y $BC \leftrightarrow (\Delta ABC)$, por lo que pasará el punto $D \in BC$ a un punto $D' \in (\Delta ABC)$.
También transforma $F \in AC \leftrightarrow F' \in AB$ y $E \in AB \leftrightarrow E' \in AC$,
$(\Delta ABD) = (\Delta ABF) \leftrightarrow CF'$, $(\Delta ACD) = (\Delta ACE) \leftrightarrow BE'$
Y aplicando GA/15.4.4 sabemos que la recta $E'F'$ contiene un punto fijo G (que no depende de D', y por tanto tampoco de D), que pertenece a la A-simediana del triángulo ΔABC. La imagen G' de G por la transformación Force-Overlaid pertenecerá a la circunferencia (ΔAEF), y G' pertenece a la A-mediana del triángulo pues esta transformación pasa puntos a sus conjugados isogonales.

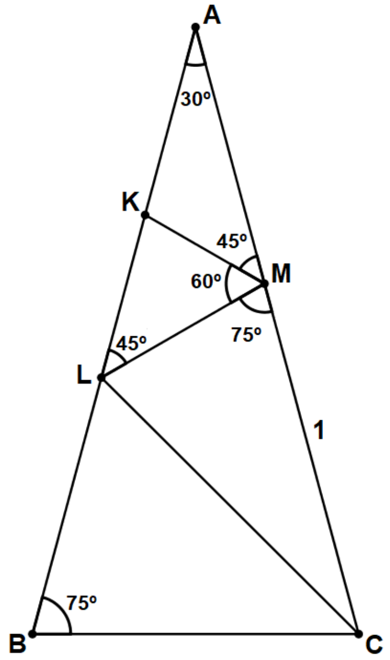


Fuentes de esta versión: "trumpeter" en https://artofproblemsolving.com/community/c6h545085p3151962
"A Special Point on the Median" (Anant Mudgal, Gunmay Handa)

9.57

Primera versión. (Mediante trigonometría)

Está claro que $\angle ABC = \angle ACB = 75^\circ$, $\angle KML = 60^\circ$ y $\angle ALM = 45^\circ$.
Puesto que $AB = AC$ y $AL = MC$, se cumple $AM = LB$.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $AL = MC = 1$.



Aplicando el Teorema del seno en ΔAML:

$$\frac{LM}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{\sin 105^\circ} \Rightarrow LM = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin(180^\circ - 105^\circ)} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 75^\circ}$$

Aplicando el Teorema del coseno en ΔMLC:

$$LC^2 = LM^2 + 1^2 - 2 \cdot LM \cdot \cos 75^\circ = 1 + LM\left(LM - 2\cos 75^\circ\right)$$

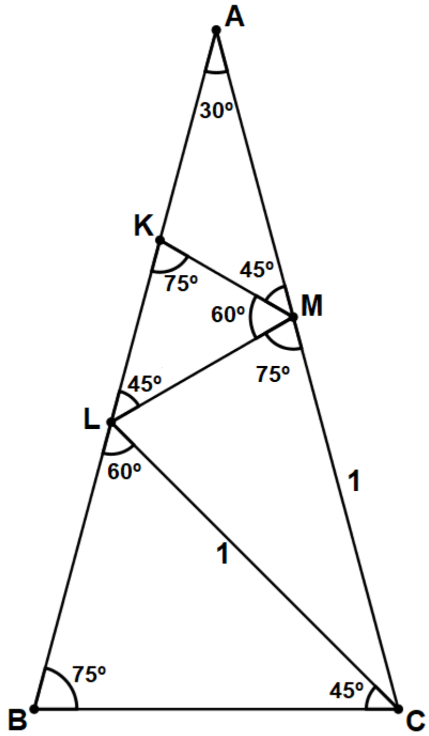
Pero

$$LM - 2\cos 75^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 75^\circ} - 2\cos 75^\circ = \frac{\sin 30^\circ - 2\cos 75^\circ \sin 75^\circ}{\sin 75^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 30^\circ - \sin 150^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{\sin 30^\circ - \sin 30^\circ}{\sin 75^\circ} = 0$$

Luego $LC^2 = 1 \Rightarrow LC = 1 = AL$. De aquí deducimos que el triángulo ΔALC es isósceles, luego

$$\angle LCM = 30^\circ \Rightarrow \angle MLC = 75^\circ \Rightarrow \angle BLC = 60^\circ, \angle BCL = 45^\circ.$$



Luego $\Delta ABC \approx \Delta CML$, y por tanto

$$\frac{BC}{LM} = \frac{AC}{1} \Rightarrow \frac{BC}{LM} = AM + MC = AM + 1 \Rightarrow BC = AM \cdot LM + LM$$

Ahora solo queda demostrar que $AM \cdot LM = KM$.

Aplicando el Teorema del seno en ΔKML:

$$\frac{KM}{\sin 45^{\circ}} = \frac{LM}{\sin 75^{\circ}} \Leftrightarrow \frac{KM}{LM} = \frac{\sin 45^{\circ}}{\sin 75^{\circ}}$$

Aplicando el Teorema del seno en ΔAML:

$$\frac{AM}{\sin 45^{\circ}} = \frac{1}{\sin 105^{\circ}} \Leftrightarrow AM = \frac{\sin 45^{\circ}}{\sin 105^{\circ}} = \frac{\sin 45^{\circ}}{\sin\left(180^{\circ} - 75^{\circ}\right)} = \frac{\sin 45^{\circ}}{\sin 75^{\circ}}$$

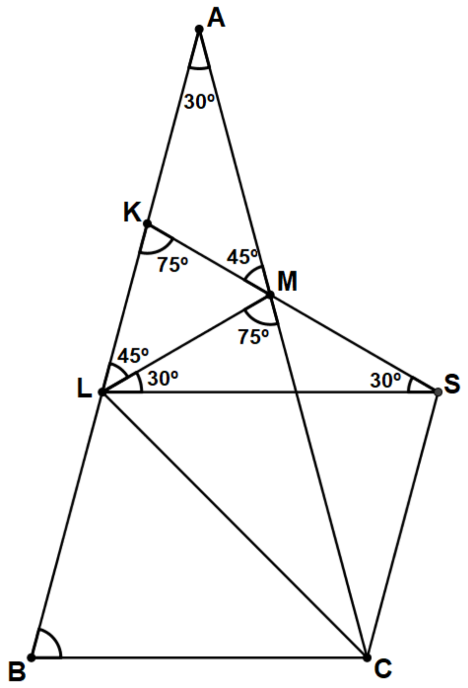
tal y como queríamos ver.

Segunda versión. (Solución oficial)

Trazamos la recta paralela a BC por L y sea S su punto de corte con KM.
$\angle LKM = \angle A + \angle KMA = 30^o + 45^o = 75^o = \angle B = \angle SLA$

Luego el triángulo ΔKLS es isósceles, por lo tanto $KS = SL$ y $\angle KSL = 30^o$
$\angle SLM = \angle SLA - \angle MLA = \angle CBA - \angle MLA = 75^o - 45^o = 30^o$

Luego el triángulo ΔLMS es isósceles y por tanto $LM = MS$.



Por ser ángulos opuestos por el vértice, $\angle CMS = \angle AMK = 45^o$, y como además MS=LM y MC=AL, los triángulos ΔAML y ΔCMS son congruentes, de lo que deducimos que $SC = AM = BL$ y $\angle MCS = \angle LAM = 30^o$, de lo que deducimos que $CS // BL$.
Así pues CS BL son segmentos paralelos y congruentes, luego LSCB es un paralelogramo (GA/7.1.2b).
Finalmente, $BC = LS = KS = KM + MS = KM + ML$, tal y como queríamos ver.

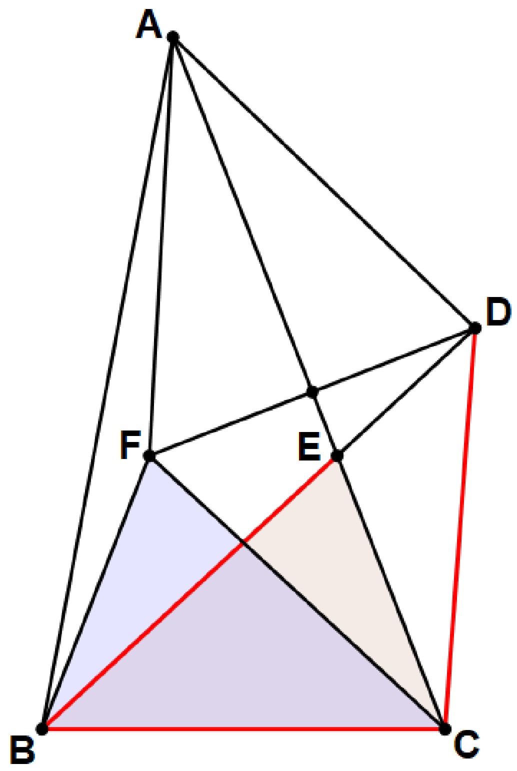
9.58

Marcamos el punto simétrico de D respecto de la recta AC, al que llamaremos F.

$\angle BCF = \angle BCE - \angle FCE = \angle BEC - \angle DCE = 180^{o} - \angle DEC - \angle DCE =$

$= 180^{o} - (\angle DEC + \angle DCE) = \angle EDC = \angle EBC$

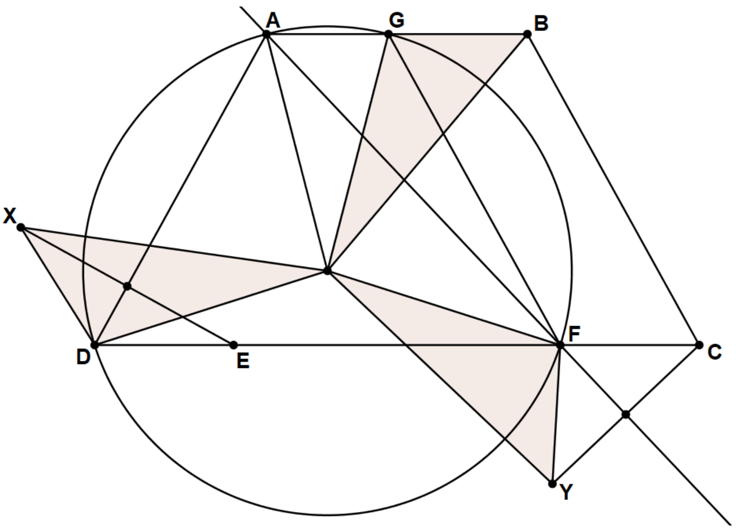
y por otro lado, $FC = DC = BC = BE$, luego $\Delta BCF \equiv \Delta EBC$, y por tanto $EC = FB$.
Ahora $AD + DC = AF + DC \geq AF + EC = AF + FB \geq AB$.



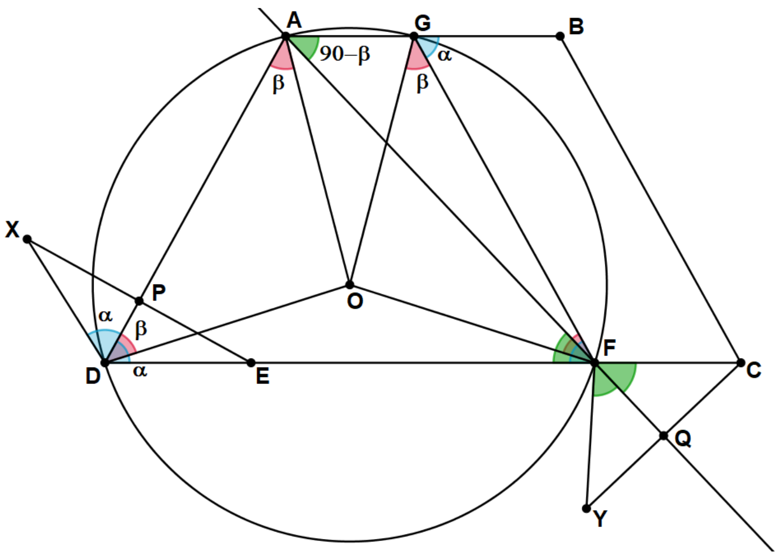
Fuente de esta solución: Soluciones oficiales (Compendium IGO, pág. 291)

9.59

Trazamos el circuncírculo asociado a ΔADF y sea O su centro. Vamos a demostrar que $OX = OB = OY$, con lo cual habremos demostrado que O también es el circuncírculo asociado a ΔBXY.
Sea $G \neq A$ el segundo punto de corte entre (ΔADF) y AB. Entonces el cuadrilátero AGFD es cíclico, y por tanto $\angle BGF = \angle ADF = \angle AFD$, y por tanto $GF \,//\, BC$. Como además $GB \,//\, FC$, tenemos que GBCF es un paralelogramo, y por tanto $GB = FC$.
Por construcción de punto simétrico, $XD = DE = FC = FY = GB$. Además, está claro que $OA = OG = OF = OD$.
Vamos a demostrar que $\angle ODX = \angle OGB = \angle OFY$, con lo que, aplicando el criterio SAS de congruencia de triángulos, habremos demostrado que $\Delta ODX \equiv \Delta OGB \equiv \Delta OFY$, de donde se deducirá que $OX = OB = OY$, tal y como queríamos ver.



Sean P y Q los respectivos centros de las simetrías de E sobre AD y de C sobre AF.



Los triángulos ΔAOD y ΔGOF son triángulos isósceles congruentes por el criterio SSS.

Así pues, $\angle BGO = \angle BGF + \angle FGO = \angle ADF + \angle ADO = \angle ADX + \angle ADO = \angle ADX$.

Por otro lado, sea $\beta = \angle OGF = \angle OFG = \angle ODA = \angle OAD$.

$$\angle GOF = 180^{\circ} - 2\beta \Rightarrow \angle GAF = 90^{\circ} - \beta = \angle AFD = \angle CFQ = \angle QFY$$

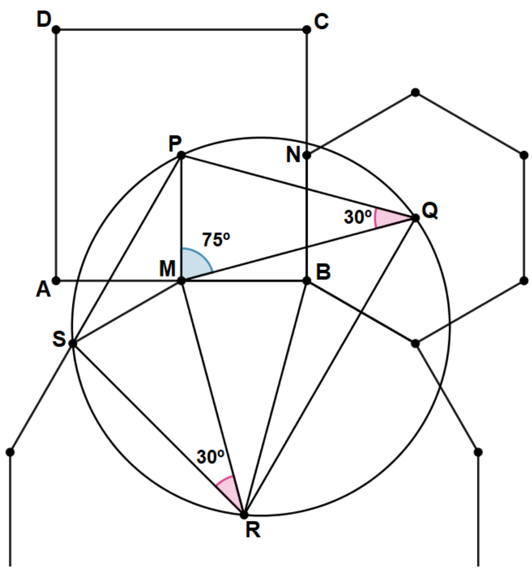
Por lo que $\angle DFY = 180^{\circ} - \angle AFD - \angle QFY = 180^{\circ} - (180^{\circ} - 2\beta) = 2\beta$

$\angle GFD = \angle FDA = \angle FGB = \alpha \Rightarrow \angle OFD = \angle GFD - \angle GFO = \alpha - \beta$ y finalmente

$\angle OFY = \angle OFD + \angle DFY = \alpha - \beta + 2\beta = \alpha + \beta = \angle BGO$.

9.60

Primera versión.
Vemos que $\angle MRS = 360^{o}/12 = 30^{o}$, luego ΔMRS es un triángulo isósceles 75º-75º-30º.
Por otro lado, observando el cuadrado PNBM y el triángulo equilátero ΔNQB, vemos que el triángulo ΔPQM también es un triángulo isósceles 75º-75º-30º, y como además PM=MB=MS, $\Delta PQM \equiv \Delta MRS$. Vemos que el cuadrilátero PQRS está formado por dos triángulos congruentes, luego es un trapecio isósceles y por tanto un cuadrilátero cíclico.



Segunda versión. (Solución oficial)
Vamos a demostrar que $\angle PQR$ y $\angle PSR$ son suplementarios.
el hexágono está formado por triángulos equiláteros con el centro Q, luego

$\angle NQB = 60^{o}$, $\angle BQR = 30^{o}$, luego $\angle NQR = 60^{o}+30^{o} = 90^{o}$.

$NP = NQ$, luego y ΔPNQ es isósceles en N, por otro lado,

$\angle PNQ = \angle PNB + \angle BNQ = 90^{o}+60^{o} = 150^{o}$, luego $\angle QPN = \angle NQP = 15^{o}$.

Finalmente, $\angle PQR = \angle NQR - \angle NQP = 90^{o}-15^{o} = 75^{o}$.
Veamos ahora su ángulo opuesto.
$\angle AMS = 180^{o}-75^{o}-75^{o} = 30^{o}$, $\angle PMS = 90^{o}+30^{o} = 120^{o}$. Puesto que SM=MP, el triángulo $\angle SMP$ es isósceles, y por tanto $\angle SPM = \angle MSP = 30^{o}$.
$\angle PSQ = \angle PSM + \angle MSR = 30^{o}+75^{o} = 105^{o}$.
Con todo lo anterior llegamos a $\angle PSQ + \angle PQR = 105^{o}+75^{o} = 180^{o}$, los ángulos opuestos son suplementarios y por tanto el cuadrilátero es cíclico.

Fuente de esta solución: Compendium IGO, pág. 300

9.61

Primera versión.

En primer lugar vemos que, por construcción, AD es la A-simediana del triángulo ΔABC (ver GA/15.4.1) . Sea S el punto de corte entre AD y BC.
Luego, aplicando GA/15.2.5,

$$\frac{CS}{9-CS}=\left(\frac{AC}{AB}\right)^2=\left(\frac{10}{5}\right)^2=4\Rightarrow CS=\frac{36}{5}\text{ , } SB=\frac{9}{5}$$

Ahora ya podemos aplicar el Teorema de Stewart (GA/9.1.6):

$$AS^2\cdot 9+\frac{36}{5}\cdot\frac{9}{5}\cdot 9=5^2\cdot\frac{36}{5}+10^2\cdot\frac{9}{5}\Rightarrow AS=\frac{26}{5}$$

Aplicando el Teorema de la Potencia:

$$AS\cdot SP=CS\cdot SB\Rightarrow\frac{26}{5}\cdot SP=\frac{36}{5}\cdot\frac{9}{5}\Rightarrow SP=\frac{162}{65}$$

Y finalmente:

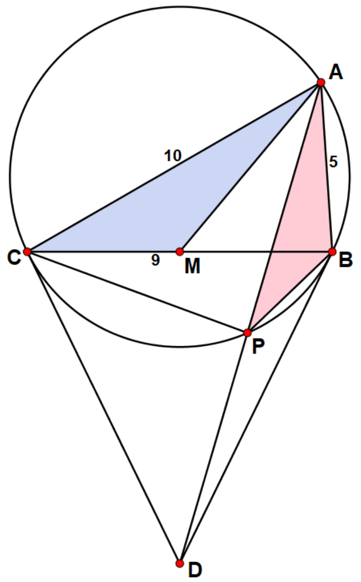
$$AP=AS+SP=\frac{26}{5}+\frac{162}{65}=\frac{100}{13}\text{ y la respuesta es } 100+13=113$$

Segunda versión.

Sea M el punto medio del segmento BC. El Teorema de Apolonio (GA/11.5.5) nos permite determinar la longitud de la mediana:

$$AM=\frac{\sqrt{2\cdot 10^2+2\cdot 5^2-9^2}}{2}=\frac{\sqrt{2\cdot 10^2+2\cdot 5^2-9^2}}{2}=\frac{13}{2}$$

Sabemos que AD es la A-simediana del triángulo ΔABC, y que $\Delta AMC\approx\Delta BP$ (GA/15.4.3b)



Luego

$$\frac{10}{AP}=\frac{13/2}{5}\Rightarrow AP=\frac{100}{13}$$

Fuente de esta versión: https://artofproblemsolving.com/w iki/index.php/2024_AIME_I_Problems/Problem_10

Tercera versión.

Aplicando el Teorema del Coseno:

$$9^2 = 10^2 + 5^2 - 2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot \cos \angle A \Rightarrow \cos \angle A = \frac{11}{25}$$

$$10^2 = 9^2 + 5^2 - 2 \cdot 9 \cdot 5 \cdot \cos \angle B \Rightarrow \cos \angle B = \frac{1}{15}$$

Sabemos que la perpendicular por D al lado BC pasa por su punto medio M, y que $\angle DCB = \angle A$ por ser CD es tangente a ω, luego

$$\frac{11}{25} = \cos \angle A = \frac{9/2}{CD} \Rightarrow CD = \frac{225}{22}$$

Por otro lado,

$$\angle ACD = \angle C + \angle BCD = \angle C + \angle A = 180^{o} - \angle B$$

Luego

$$\cos \angle ACD = -\cos \angle B$$

Y ahora, de nuevo aplicamos el Teorema del Coseno:

$$AD^2 = 10^2 + \left(\frac{225}{22}\right)^2 - 2 \cdot 10 \cdot \frac{225}{22} \cdot \cos \angle ACD = 10^2 + \left(\frac{225}{22}\right)^2 + 2 \cdot 10 \cdot \frac{225}{22} \cdot \cos \angle B =$$

$$= 100 + \frac{225^2}{22^2} + 2 \cdot 10 \cdot \frac{225}{22} \cdot \frac{1}{15} = \frac{5^4 \cdot 13^2}{22^2} \Rightarrow AD = \frac{5^2 \cdot 13}{22}$$

Aplicando Potencia de un punto,

$$\left(\frac{225}{22}\right)^2 = DP \frac{5^2 \cdot 13}{22} \Rightarrow DP = \frac{225^2 \cdot 22}{22^2 \cdot 5^2 \cdot 13} = \frac{225^2}{22 \cdot 5^2 \cdot 13} = \frac{3^4 5^4}{22 \cdot 5^2 \cdot 13} = \frac{3^4 5^2}{22 \cdot 13}$$

Finalmente,

$$AP = AD - DP = \frac{5^2 \cdot 13}{22} - \frac{3^4 5^2}{22 \cdot 13} = \frac{5^2 \cdot 13^2 - 3^4 5^2}{22 \cdot 13} = \frac{2200}{22 \cdot 13} = \frac{100}{13}$$

Fuente de esta versión: https://artofproblemsolving.com/w iki/index.php/2024_AIME_I_Problems/Problem_10

9.62

Primera versión.

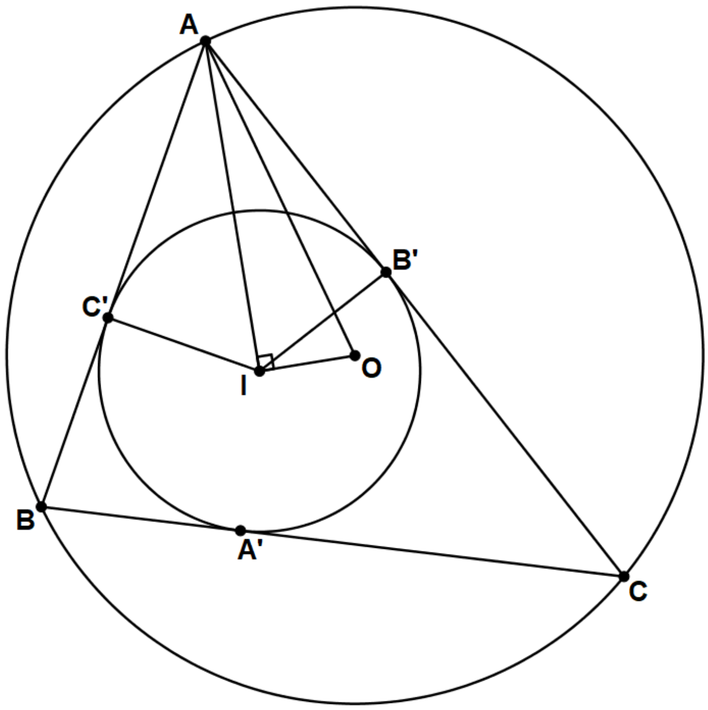
Aplicando el Teorema de Euler (GA/11.13.1),

$$OI^2 = R(R-2r) = 13\cdot(13-2\cdot 6) = 13$$

Puesto que $OA = R = 13$, aplicando Pitágoras,

$$AI^2 = OA^2 - OI^2 = 13^2 - 13 = 13(13-1) = 13\cdot 12$$

Sean A', B', C' los puntos de corte entre los lados BC, AC y AB y el incírculo.



De nuevo por Pitágoras,

$$AC'^2 = AI^2 - IC'^2 = 13\cdot 12 - 6^2 = 120$$

Con estos datos podemos determinar el ángulo en el vértice A:

$$\sin(\angle A/2) = \frac{IC'}{AI} = \frac{6}{\sqrt{13\cdot 12}}$$

$$\cos(\angle A/2) = \frac{AC'}{AI} = \frac{\sqrt{120}}{\sqrt{13\cdot 12}}$$

Aplicando la identidad trigonométrica del ángulo doble:

$$\sin(\angle A) = 2\sin(\angle A/2)\cos(\angle A/2) = 2\frac{6}{\sqrt{13\cdot 12}}\frac{\sqrt{120}}{\sqrt{13\cdot 12}} = \frac{12\sqrt{120}}{12\cdot 13} = \frac{\sqrt{120}}{13}$$

$$\cos^2(\angle A) = 1 - \sin^2(\angle A) = 1 - \frac{120}{13^2} = \frac{13^2 - 120}{13^2} = \frac{49}{13^2} \Rightarrow \cos(\angle A) = \frac{7}{13}$$

Aplicando el Teorema del Seno:

$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = 2R \Rightarrow a = 2R\sin(\angle A) = 2\cdot 13\cdot\frac{\sqrt{120}}{13} = 2\sqrt{120}$$

Aplicando GA/11.6.5b:

$$4rRs = abc \Leftrightarrow 4\cdot 6\cdot 13\left(\frac{2\sqrt{120}+b+c}{2}\right) = 2\sqrt{120}bc \Leftrightarrow$$

$$6\cdot 13\left(2\sqrt{120}+b+c\right) = \sqrt{120}bc$$

Aplicando el Teorema del Coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\angle A) \Leftrightarrow 4\cdot 120 = b^2 + c^2 - 2bc\frac{7}{13}$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot 120 = (b+c)^2 - 2bc - 2bc\frac{7}{13} = (b+c)^2 - 2bc\left(1+\frac{7}{13}\right) = (b+c)^2 - 2bc\frac{20}{13}$$

Denotando $S = b+c$ y $P = bc$ llegamos al sistema

$$\begin{cases} 6\cdot 13\left(2\sqrt{120}+S\right) = \sqrt{120}P \\ 4\cdot 120 = S^2 - \frac{40}{13}P \end{cases}$$

Cuyas únicas soluciones son $P = 0$ y $P = 468$. En efecto,

$$6\cdot 13\left(2\sqrt{120}+S\right) = \sqrt{120}P \Rightarrow 2\sqrt{120} + S = \frac{\sqrt{120}P}{6\cdot 13} \Rightarrow S = \frac{\sqrt{120}P}{6\cdot 13} - 2\sqrt{120} =$$

$$= \sqrt{120}\left(\frac{P}{6\cdot 13} - 2\right) \Rightarrow S^2 = 120\left(\frac{P}{6\cdot 13} - 2\right)^2$$

$$4\cdot 120 = S^2 - \frac{40}{13}P = 120\left(\frac{P}{6\cdot 13} - 2\right)^2 - \frac{40}{13}P \Leftrightarrow 4 = \left(\frac{P}{6\cdot 13} - 2\right)^2 - \frac{40}{13\cdot 120}P =$$

$$= \left(\frac{P}{6\cdot 13}\right)^2 - 2\frac{P}{6\cdot 13}\cdot 2 + 2^2 - \frac{40}{13\cdot 120}P \Leftrightarrow$$

$$0 = \left(\frac{P}{6\cdot 13}\right)^2 - 2\frac{P}{6\cdot 13}\cdot 2 - \frac{40}{13\cdot 120}P = P\left(\frac{P}{(6\cdot 13)^2} - \frac{4}{6\cdot 13} - \frac{40}{13\cdot 120}\right)$$

De donde se deduce que $P = 0$ o que

$$0 = \frac{P}{(6\cdot 13)^2} - \frac{4}{6\cdot 13} - \frac{40}{13\cdot 120} = \frac{P}{6^2\cdot 13^2} - \frac{4}{6\cdot 13} - \frac{40}{13\cdot 120} \Leftrightarrow$$

$$0 = \frac{P}{6\cdot 13} - \frac{4}{1} - \frac{40}{20} = \frac{P}{6\cdot 13} - 4 - 2 \Leftrightarrow P = 6\cdot 6\cdot 13 = 468$$

Segunda versión. Mediante triángulos semejantes.

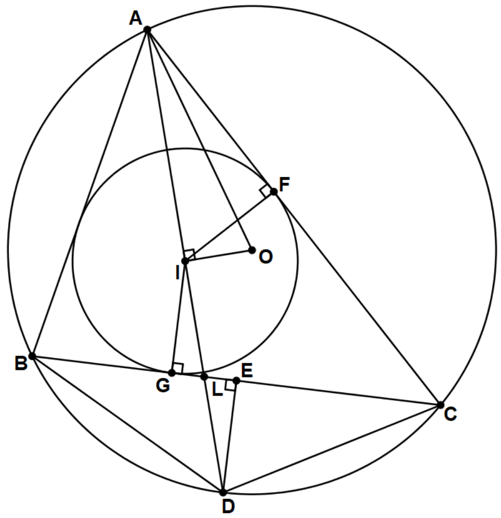
Prolongamos el segmento AI hasta cortar BC en L y (ΔABC) de nuevo en D.
$\angle DBC = \angle DAC$ y $\angle ADC = \angle ABC$ por ser ángulos que abarcan un mismo arco de circunferencia. Luego $\Delta ABL \approx \Delta ADC$, y por tanto

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AL}{AC} \Rightarrow AB \cdot AC = AD \cdot AL$$

Hemos expresado el producto que queremos calcular en términos de AD y AL.

Puesto que en nuestro caso $AI \perp IO$, y $AO = OD$, los triángulos ΔAIO y ΔDIO son triángulos rectángulos congruentes, y por tanto $AI = ID$. luego $AD = AI + ID = 2AI$.

Vamos a determinar AL.
Sean E y G los pies de las perpendiculares a BC por D y I, respectivamente. Sea F el pie de la perpendicular a AC por I.



$\angle IAF = \angle DAC = \angle DBC$, luego $\Delta DEB \approx \Delta FIA$.
Sabemos que $ID = BD$ por el Teorema del Tridente (GA/11.12.1b).
Luego $BD = AI$ y por tanto $\Delta DEB \equiv \Delta FIA$, de donde se deduce que $ED = IF = 6$.
Pero también $IG = 6$, luego $IG = ED$ y por tanto está claro que los triángulos rectángulos ΔIGL y ΔDEL son congruentes. Así pues, $IL = LD$, luego
$IL = \frac{1}{2} ID = \frac{1}{2} AI$, y por tanto

$$AL = AI + IL = AI + \frac{1}{2} AI = \frac{3}{2} AI$$

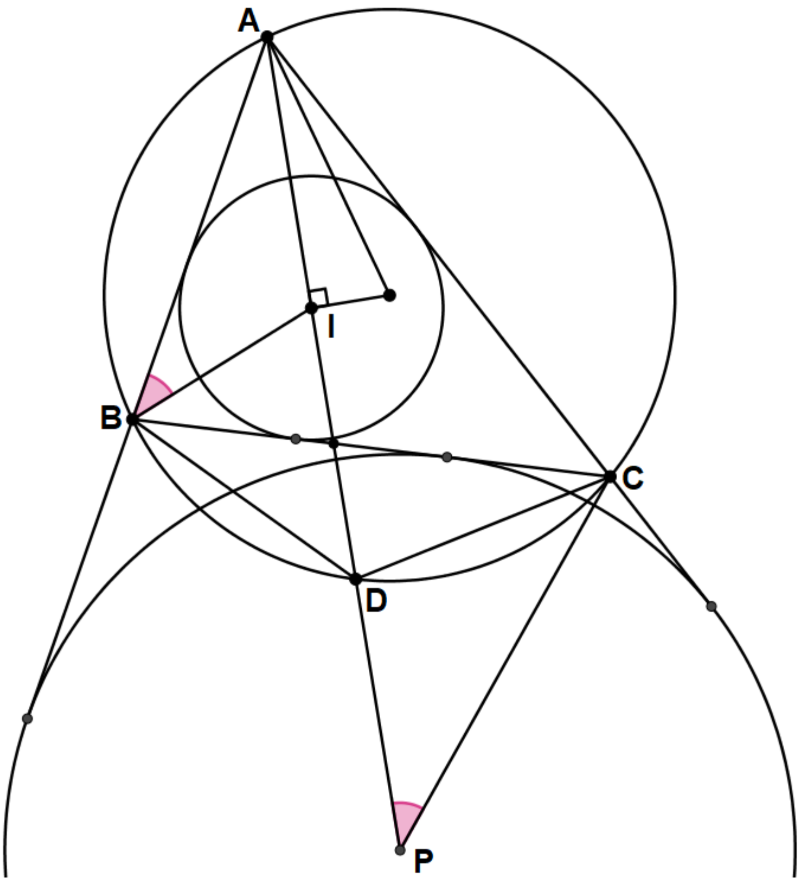
Finalmente:

$$AB \cdot AC = AD \cdot AL = 2AI \cdot \frac{3}{2} AI = 3AI^2 .$$

El segmento AI se deduce directamente aplicando el Teorema de Euler y Pitágoras, tal y como hemos argumentado en el inicio de la primera versión de la solución de este problema: $AI^2 = 13 \cdot 12$ y por tanto $AB \cdot AC = 3 \cdot 13 \cdot 12 = 468$.

Tercera versión. Mediante circunferencia circunscrita.

Trazamos la circunferencia circunscrita asociada al vértice A, y sea P su centro. Sea D el segundo punto de corte entre AI y (ΔABC).



Aplicando $\Delta ABI \approx \Delta ACP$, tenemos

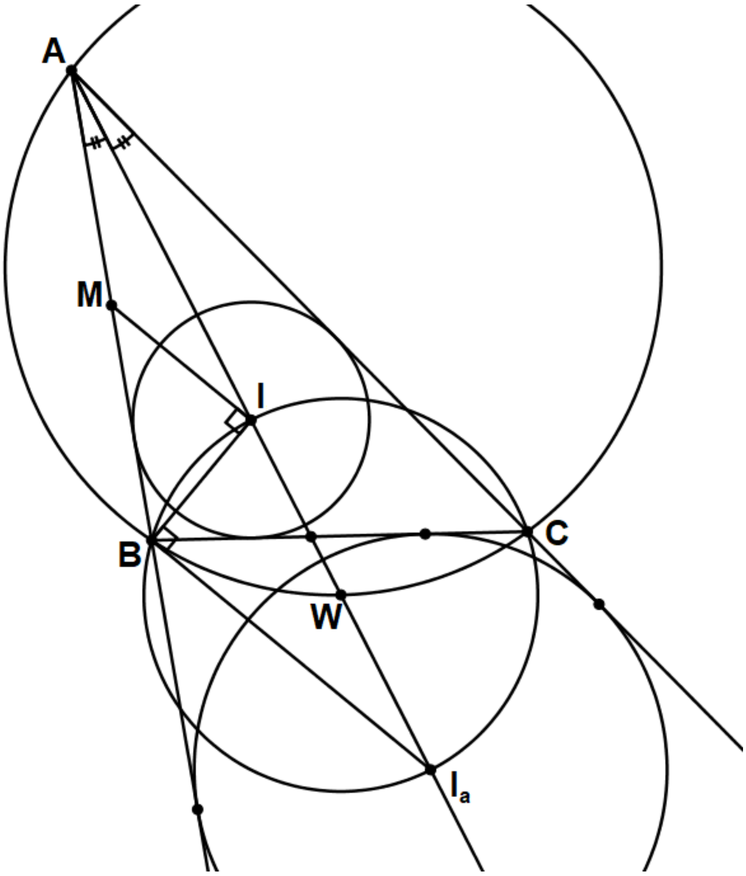
$$\frac{AB}{AI} = \frac{AP}{AC} \Rightarrow AB \cdot AC = AI \cdot AP$$

Pero siguiendo los argumentos de las versiones anteriores, $ID = AI = \sqrt{13 \cdot 12}$,
y por el Teorema del Tridente, $ID = DP$, luego $AP = 3AI$, con lo que finalmente
$AB \cdot AC = AI \cdot AP = 3AI^2 = 3 \cdot 12 \cdot 13 = 468$.

Fuente de las versiones 2 y 3: https://artofproblemsolving.com/w iki/index.php/2024_AIME_II_Problems/Problem_10

9.63

a) Trazamos la circunferencia A-excrita asociada al triángulo ΔABC , con centro I_a .



Sabemos que $IW = WI_a$ (11.12.4).

Sabemos también que I_a es el punto de corte de las dos bisectrices exteriores asociadas a los vértices B y C del triángulo ΔABC (11.10.1). Luego, aplicando 3.10.6, $BI \perp BI_a$.

Puesto que $MI \perp BI$, tenemos que MI y BI_a son perpendiculares comunes a BI, luego son paralelas.

Puesto que $AM = MB$, por el transportador de puntos medios se deduce que $AI = II_a$, y finalmente $AW = AI + IW = II_a + IW = IW + WI_a + IW = 3IW$.

b) Aplicando el Teorema del Tridente sabemos que $WB = WC = WI$. Del apartado anterior se deduce que $AW = 3IW = 3WC$.

Ahora basta aplicar el Teorema de Ptolomeo al cuadrilátero ABWC:

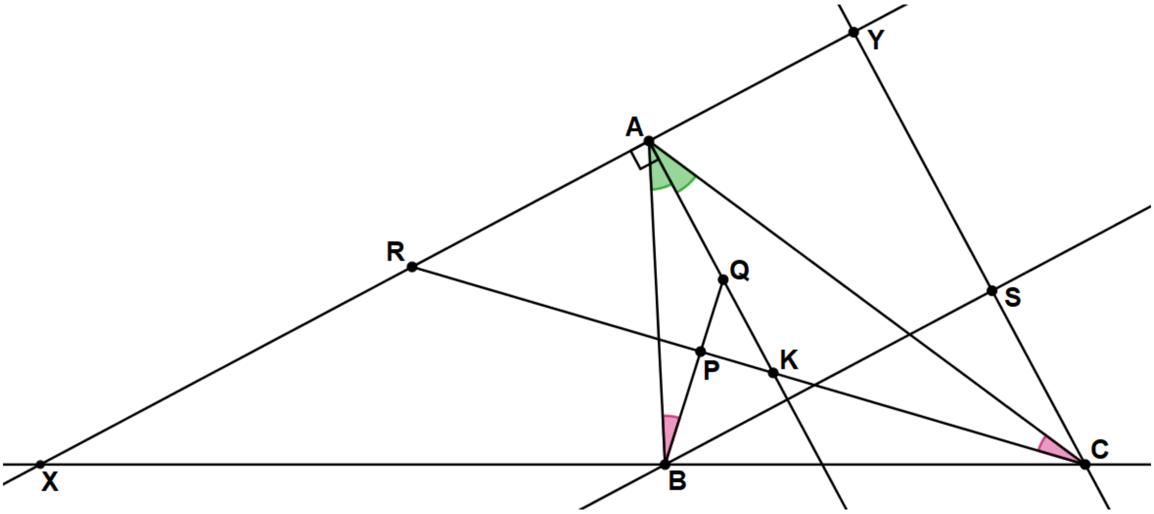
$$AB \cdot WC + AC \cdot WB = AW \cdot BC \Leftrightarrow AB \cdot WC + AC \cdot WC = 3WC \cdot BC \Rightarrow AB + AC = 3BC$$

9.64

Primera versión. (Solución oficial)

Sea S el punto de intersección entre la paralela a AR por B y la paralela a AQ por C, tal y como se indica el enunciado.
Sea K el punto de corte entre RC y la bisectriz interior.
Sea X el punto de corte entre la bisectriz exterior AR y el lado BC.
Sea Y el punto de corte entre CS y AR.

Para demostrar que R, Q y S están alineados es suficiente demostrar que $\frac{AQ}{AK}=\frac{YS}{YC}$.



Por el criterio AA, $\Delta AQB \approx \Delta AKC \Rightarrow \frac{AQ}{AK}=\frac{AB}{AC}$

Por el Teorema de la bisectriz exterior, $\frac{AB}{AC}=\frac{XB}{XC}$

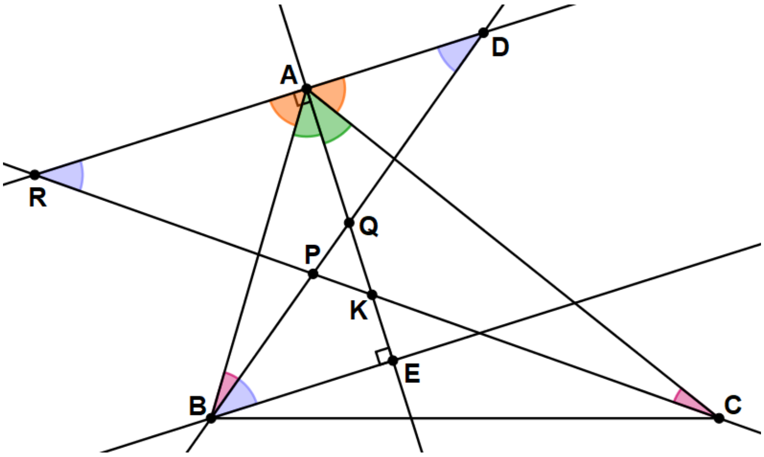
Pero por paralelismo $BS // XY \Rightarrow \frac{XB}{XC}=\frac{YS}{YC}$

Con lo que llegamos a $\frac{AQ}{AK}=\frac{YS}{YC}$ tal y como queríamos demostrar.

Fuente de esta versión: CompendiumOME pág. 1017

Segunda versión.

Dado el triángulo ΔABC, y el punto interior P tal que $\angle PBA=\angle PCA$, prolongamos BP hasta cortar la bisectriz interior en el punto Q y la bisectriz exterior en el punto D.
Sea K el punto de corte entre RC y la bisectriz interior. Trazamos la perpendicular la bisectriz por el vértice B y sea E su punto de corte con dicha bisectriz.
Sabemos que la bisectriz interior y la bisectriz exterior por un vértice son perpendiculares, luego BE será paralela a AR.
$\angle RAE=\angle DAE=90^{\circ}$, $\angle BAQ=\angle CAQ$, luego $\angle RAB=\angle DAC$.
Luego $\angle RAC=\angle DAB \Rightarrow \Delta RAC \approx \Delta DAB$ por el criterio AA, y por tanto
$\angle ARC=\angle ADB$
Pero $RD // BE \Rightarrow \angle RDB=\angle EBD$.



De aquí se deduce que $\Delta KRA \approx \Delta QBE \Rightarrow \dfrac{BQ}{QE} = \dfrac{RK}{KA} \Rightarrow BQ \cdot KA = RK \cdot QE$.

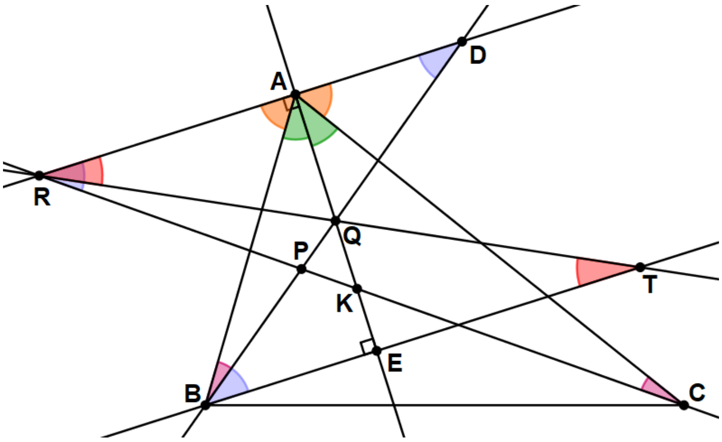
Por el criterio AA, $\Delta AQB \approx \Delta AKC \Rightarrow \dfrac{AQ}{AK} = \dfrac{BQ}{KC} \Rightarrow AQ \cdot KC = AK \cdot BQ$

De las dos igualdades anteriores llegamos finalmente a

$$RK \cdot QE = AQ \cdot KC \Rightarrow \frac{QE}{AQ} = \frac{KC}{RK}$$

Prolongamos la recta RQ hasta cortar BE en el punto T.

$$RA // BE \Rightarrow \angle ART = \angle RTB \Rightarrow \Delta AQR \approx \Delta EQT \Rightarrow \frac{QT}{RQ} = \frac{QE}{AQ}$$



Así pues $\dfrac{KC}{RK} = \dfrac{QT}{RQ} \Rightarrow KQ // TC$, con lo que hemos demostrado que el punto T es en realidad el punto S del enunciado, y el problema queda resuelto.