FUNCIONES

Metodología Problem Solving

Gerard Romo Garrido

Toomates Coolección Vol. 12

Toomates Coolección

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "**licencias digitales**" con las que las editoriales pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo libro, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.
Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de licencias digitales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía**.
El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las editoriales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de unos libros de texto que actualmente son muy mediocres, y no mediante retorcidas técnicas comerciales.
 Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas.

¡Libérate de la tiranía y mediocridad de las editoriales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos

Toomates Coolección **Problem Solving** (en español):
Geometría Axiomática , Problemas de Geometría 1 , Problemas de Geometría 2
Introducción a la Geometría , Álgebra , Teoría de números , Combinatoria , Probabilidad
Trigonometría , Desigualdades , Números complejos , Funciones

Toomates Coolección **Llibres de Text** (en catalán):
Nombres (Preàlgebra) , Àlgebra , Proporcionalitat , Mesures geomètriques , Geometria analítica
Combinatòria i Probabilitat , Estadística , Trigonometria , Funcions , Nombres Complexos ,
Àlgebra Lineal , Geometria Lineal , Càlcul Infinitesimal , Programació Lineal , Mates amb Excel

Toomates Coolección **Compendiums**:
Ámbito PAU: Catalunya TEC Catalunya CCSS Galicia País Vasco Portugal A Portugal B Italia
Ámbito Canguro: ESP , CAT , FR , USA , UK , AUS
Ámbito USA: Mathcounts AMC 8 AMC 10 AMC 12 AIME USAJMO USAMO Putnam
Ámbito español: OME , OMEFL , OMEC , OMEA , OMEM , CDP
Ámbito internacional: IMO OMI IGO SMT INMO CMO REOIM Arquimede HMMT BMO
Ámbito Pruebas acceso: ACM4 , CFGS , PAP
Recopilatorios Pizzazz!: Book A Book B Book C Book D Book E Pre-Algebra Algebra
Recopilatorios AHSME: Book 1 Book 2 Book 3 Book 4 Book 5 Book 6 Book 7 Book 8 Book 9

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales, para facilitar su edición. Descarga en los siguientes enlaces la versión "**.doc**" de este documento:
www.toomates.net/biblioteca/ProblemasFunciones01.doc → **http://www.toomates.net/biblioteca/ProblemasFunciones06.doc**

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a **toomates@gmail.com**

¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.

Consulta el **Catálogo de libros** de la biblioteca Toomates Coolección en http://www.toomates.net/biblioteca.htm

Encontrarás muchos más materiales para el aprendizaje de las matemáticas en **www.toomates.net**

Visita mi **Canal de Youtube**: **https://www.youtube.com/c/GerardRomo**

Versión de este documento: **25/09/2023**

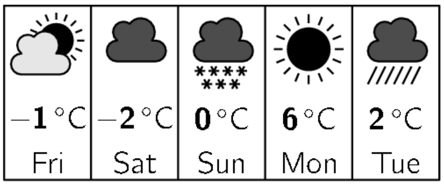
Índice.

1 El lenguaje de las funciones.

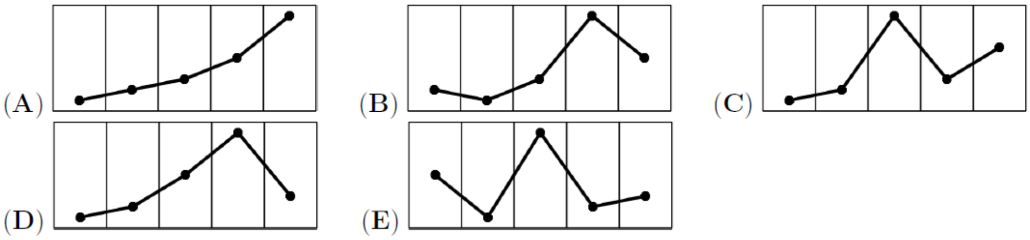
1.1 Representación gráfica de una función.

1.1.1 MF

Jenny mira su aplicación meteorológica que muestra el tiempo previsto y las temperaturas máximas para los próximos cinco días.



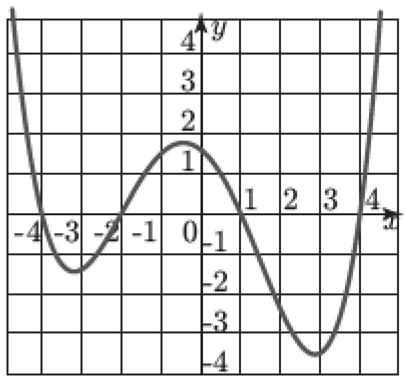
¿Cuál de los gráficos si corresponde con una representación de las temperaturas máximas?



Cangur B1 2021 #2, Kangaroo Junior 2021 #2

1.1.2 MF

La figura muestra la gráfica de una función f : [−5; 5] → IR. ¿Cuántas soluciones diferentes tiene la ecuación f(f(x)) = 0 ?

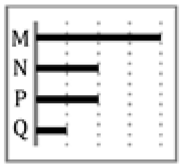


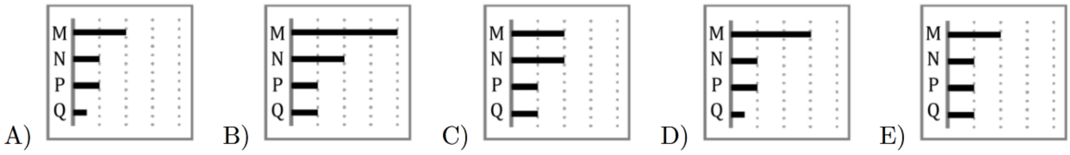
(A) 8 (B) 4 (C)7 (D) 2 (E) 6

Cangur B2 2021 #21, Kangaroo Junior 2021 #21

1.1.3 MF

En el teléfono inteligente de Nadya, este diagrama muestra cuánto tiempo pasó la semana pasada en cada una de sus aplicaciones. Esta semana redujo a la mitad el tiempo dedicado a dos de estas aplicaciones, pero dedicó la misma cantidad de tiempo a las otras dos aplicaciones. ¿Cuál de los siguientes podría ser el diagrama para esta semana?

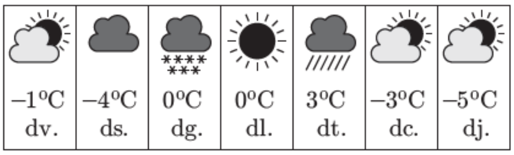


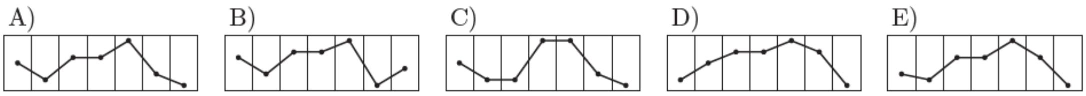


Cangur B1 2022 #8, Cangur B2 2022 #1, Kangaroo Junior 2022 #8

1.1.4 MF

Jenny mira su aplicación meteorológica que muestra el tiempo previsto y las temperaturas máximas para los próximos cinco días. ¿Cuál de los gráficos si corresponde con una representación de las temperaturas máximas?

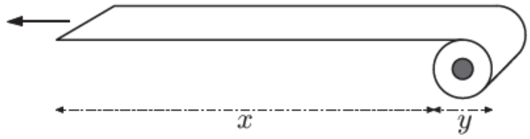


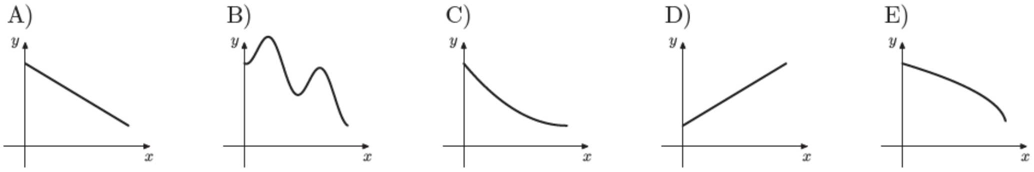


Cangur B2 2021 #2, Kangaroo Student 2021 #1

1.1.5 M

Un cachorro travieso agarra el extremo de un rollo de papel higiénico y se aleja a una velocidad constante. ¿Cuál de las siguientes funciones describe mejor el grosor y del rollo en función de la parte desenrollada x?

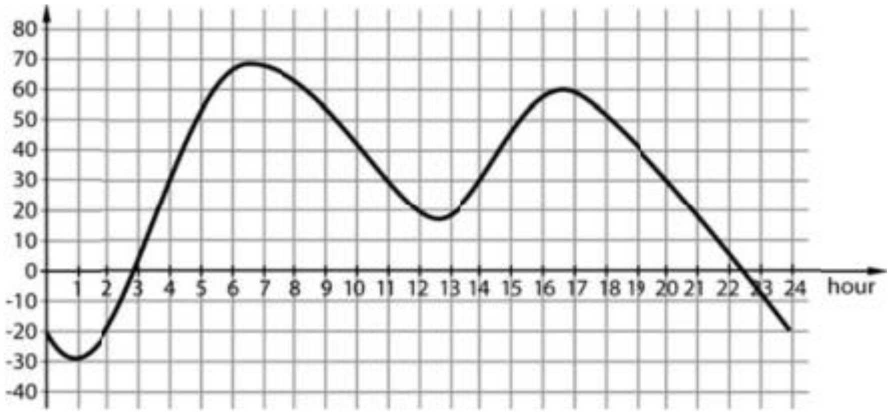




Cangur B2 2021 #19, Kangaroo Student 2021 #19

1.1.6 [MF]

La gráfica muestra las subidas y bajadas del nivel del agua en un puerto a lo largo de un día.



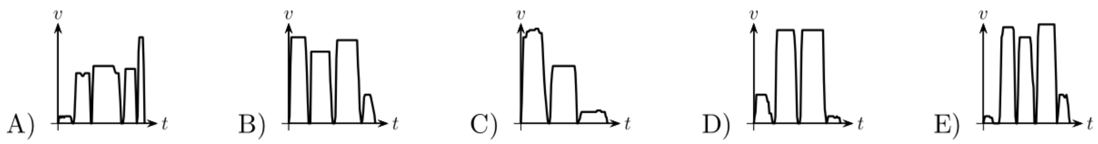
¿Durante cuántas horas ese nivel se mantuvo por encima de 30 cm?

(A) 5   (B) 6   (C) 7   (D) 9   (E) 13

Canguro N6 2012 #1, Cangur N4 2012 #1, Kangaroo Student 2012 #2

1.1.7 [MF]

María ha tenido que correr para conseguir coger el metro, baja en la segunda parada que hace el metro después de que haya subido, y posteriormente camina hasta la escuela. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor la relación entre la velocidad y el tiempo a lo largo del desplazamiento que ha realizado María?



Cangur B1 2023 #5, Canguro N5 2023 #2

1.2 Problemas modelizables con funciones de primer grado.

1.2.1

Un conejo y un erizo tenían una carrera alrededor de una pista circular de 550 m de largo. Ambos corrieron a velocidades constantes. La velocidad del conejo era de 10 m/s y la velocidad del erizo era de 1 m/s. Empezaron al mismo tiempo. Sin embargo, el erizo corrió en dirección opuesta al conejo. Cuando se encontraron, el erizo inmediatamente se dio la vuelta y corrió tras el conejo. ¿Cuánto tiempo después de que el conejo llegó a la meta, llegó el erizo a la meta?

(A) 45 s.   (B) 50 s.   (C) 55 s.   (D) 100 s.   (E) 505 s.

Cangur B1 2022 #17, Kangaroo Junior 2022 #17

2 Sucesiones y series.

2.1 Sucesiones recursivas.

Estas sucesiones están definidas declarando el valor del primer elemento a_1, junto con una regla que nos permite obtener el término a_n a partir del anterior a_{n-1} o de algunos anteriores.

2.1.1 D

Definimos la siguiente secuencia recursiva: $t_1 = 20$, $t_2 = 21$, y $t_n = \dfrac{5t_{n-1}+1}{25t_{n-2}}$.

Determina t_{2020}.

AIME II 2020 #6

2.1.2 MF

Definimos la función f recursivamente por $f(1) = f(2) = 1$ y

$$f(n) = f(n-1) - f(n-2) + n$$

para todos los enteros $n \geq 3$. Determina $f(2018)$.

(A) 2016 (B) 2017 (C) 2018 (D) 2019 (E) 2020

AMC 12B 2018 #18

2.1.3 F

En una sucesión, $0 < a_1 < 1$. Para todo $n \geq 1$, se cumple $a_{2n} = a_2 \cdot a_n + 1$ y $a_{2n+1} = a_2 \cdot a_n - 2$.

Si además, sabemos que $a_7=2$, determina el valor de a_2.

(A) Igual a a_1 (B) 5 (C) 4 (D) 3 (E) 2

Cangur B2 2022 #28, Kangaroo Student 2022 #29

2.1.4 M

Hacemos una lista de números, los cuatro primeros son 2, 0, 2, 3 y el resto cumplen la siguiente regla: Cada número es el entero no negativo más pequeño que es diferente de todos los cuatro términos anteriores. ¿Cuál es el número que hay en la posición 2023 de esta lista?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Cangur B1 2023 #22, Canguro N5 2023 #22

2.2 Sucesiones y series geométricas.

Se define la sucesión geométrica de razón r y valor inicial a de la siguiente forma:

$$t_0 = a \, , t_1 = ar \, , t_2 = t_1 \cdot r = ar^2 \, , t_3 = t_2 \cdot r = ar^3 \, , \ldots , t_n = ar^n$$

Si $r \neq 1$, podemos calcular fácilmente la fórmula de la suma de n términos de una sucesión geométrica, sin necesidad de memorizar ninguna fórmula:

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n = a + r\left(a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}\right) =$$
$$= a + r\left(S - ar^n\right) = a + rS - ar^{n+1} \Rightarrow S - rS = a - ar^{n+1} = a\left(1 - r^{n+1}\right) \Rightarrow$$
$$S(1-r) = a\left(1 - r^{n+1}\right) \Rightarrow S = a\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Serie geométrica.

La serie geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} ar^n$ es convergente si y solo si $|r| < 1$, en cuyo caso su suma vale

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

2.2.1 M

Un gusano se mueve durante todo el día y duerme durante toda la noche. Empieza en el punto O y avanza una distancia de 5 unidades hacia el este. Cada noche, el gusano gira 60º en el sentido contrario al de las agujas del reloj, y al día siguiente avanza en esta nueva dirección la mitad de la distancia del día anterior. Este gusano se acerca más y más a un cierto punto P. Determina las coordenadas de dicho punto.

AIME I 2020 #8

Nota: Este problema se plantea y se resuelve en PC/3.12 mediante números complejos.

2.2.2 M

La sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ comienza con $a_1 = 49$. Para $n \geq 1$, el término a_{n+1} se obtiene añadiendo 1 a la suma de las cifras de a_n y elevando al cuadrado el resultado. Por ejemplo, $a_2 = (4 + 9 + 1)^2 = 196$. ¿Cuánto vale a_{2019}?

(A) 121 (B) 25 (C) 64 (D) 400 (E) 49

Canguro N6 2019 #29, Cangur B2 2019 #28

2.2.3 F

¿Cuál es el límite de la sucesión de término general $\left(\frac{n-2}{n}\right)^{3n}$?

(A) $\frac{1}{e^3}$ (B) e^3 (C) $\frac{1}{e^6}$ (D) e^6

PAU PORTUGAL 635 2019 #3

2.2.4 F

Sea r un número real mayor que 1. Se sabe que r es la razón de una progresión geométrica de términos positivos. Se sabe, además, que para dos términos consecutivos de dicha progresión, su suma es igual a 12 y su diferencia entre el mayor y el menor es igual a 3. Determine el valor de r.

PAU PORTUGAL 635 2019 #7

2.2.5 M

Existe un único número real positivo x tal que los tres números

$$\log_8(2x)\ ,\ \log_4 x\ ,\ \log_2 x$$

en este orden, forman una progresión geométrica con razón positiva común. Determina x.

AIME I 2020 #2

2.2.6 D

Existe una única secuencia de enteros no negativos $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ tal que

$$\frac{2^{289}+1}{2^{17}+1} = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \ldots + 2^{a_k}$$

Determina el número k.

(A) 117 (B) 136 (C) 137 (D) 273 (E) 306

AMC 12A 2020 #19

2.2.7 F

¿Cuál es la mayor cantidad de números enteros consecutivos cuya suma sea 45?

(A) 9 (B) 25 (C) 45 (D) 90 (E) 120

AMC 12A 2019 #4

2.2.8 M

Definimos recursivamente la siguiente sucesión de números por $a_1 = 1,\ a_2 = \frac{3}{7}$, y

$$a_n = \frac{a_{n-2} \cdot a_{n-1}}{2a_{n-2} - a_{n-1}}.$$

Entonces a_{2019} se puede escribir como $\frac{p}{q}$, con p y q enteros positivos coprimos.

Determina $p+q$.

(A) 2020 (B) 4039 (C) 6057 (D) 6061 (E) 8078

AMC 12A 2019 #9

2.2.9 M

Para cierto entero positivo k, la representación en base k de la fracción (en base 10) $\frac{7}{51}$ es $0.\overline{23}_k = 0.232323\ldots_k$. Determina k.

(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

AMC 12A 2019 #11

2.2.10 MF

Determina $\sum_{i=1}^{100}\sum_{j=1}^{100}(i+j)$

(A) 100100 (B) 500500 (C) 505000 (D) 1001000 (E) 1010000

AMC 12B 2018 #9

2.2.11 M

Sea A el conjunto de todos los enteros cuyos únicos factores primos son 2, 3 y 5. La suma infinita

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{18}+\frac{1}{20}+\ldots$$

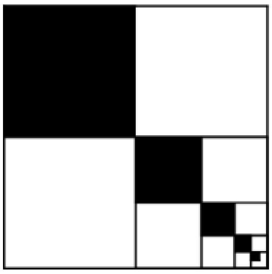
de todos los recíprocos de los elementos de A se puede escribir como $\frac{m}{n}$, donde m y n son enteros positivos relativamente primos. Determina $m+n$.

(A) 16 (B) 17 (C) 19 (D) 23 (E) 36

AMC 12A 2018 #19

2.2.12 M

Un cuadrado de área 84 se ha dividido en cuatro partes iguales. El cuadrado superior de la izquierda está pintado de negro. El cuadrado inferior derecho se ha vuelto a dividir en cuatro cuadrados, de la misma forma que he ha hecho con el cuadrado inicial. Este proceso se repite un número infinito de veces. Determina el área pintada de negro.



(A) 24 (B) 28 (C) 31 (D) 35 (E) 42

Cangur B2 2023 #9, Canguro N6 2023 #8

2.3 Sucesiones aritméticas.

2.3.1 F

La sucesión $a_0, a_1, a_2 ...$ es una sucesión aritmética estrictamente creciente de números enteros positivos, cumpliendo

$$2^{a_7} = 2^{27} \cdot a_7$$

Determina el menor valor posible de a_2.

(A) 8 (B) 12 (C) 16 (D) 17 (E) 22

AMC 12B 2022 #9

2.3.2 MF

El número de manzanas que crecen en seis manzanos siguen una progresión aritmética en la que el mayor número de manzanas creciendo en el árbol con más manzanas es el doble del número de manzanas creciendo en el árbol con menos manzanas. Hay un total de 990 manzanas. Determina el mayor número de manzanas que crece en los seis árboles.

AIME II 2023 #1

3 Máximos y mínimos.

Esta sección está dedicada a la determinación de máximos y mínimos sin utilizar derivación.

3.1.1 Problema solucionado paso a paso en vídeo .

Sea M(k) el valor máximo de $\left|4x^2 - 4x + k\right|$ para todo x en el intervalo [−1, 1]. Si k puede ser cualquier número real, determina el valor mínimo de M(k).

(A) 5 (B) 8 (C) 11/2 (D) 4 (E) 9/2

Cangur B2 2021 #29, Kangaroo Student 2021 #29

Solución: https://youtu.be/93ph_XE0sts

3.1.2

Determina el valor mínimo del producto de dos números si sabemos que su suma es igual a 1.

4 Calculus.

4.1 Recta tangente.

4.1.1

La recta $y = ax + 16$ corta la gráfica de $y = x^3$ en dos puntos diferentes. Determina el valor de a.

SMT 2022 Calculus Test #2

5 Ecuaciones funcionales.

5.1 Ecuaciones funcionales nivell inicial.

5.1.1 F

La función f(x) de números reales cumple

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)\ ,\ f(1)=2$$

Determina el valor de la expresión siguiente:

$$\frac{f(2)}{f(1)}+\frac{f(3)}{f(2)}+\ldots+\frac{f(2021)}{f(2020)}$$

(A) 2^{2020} (B) 2021/2020 (C) 2020 (D) 2021 (E) Ninguna de las respuestas anteriores

Cangur B2 2021 #23, Kangaroo Student 2021 #23

5.1.2 MF

Determina la función que satisface la ecuación

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$$

A) $f(x)=\frac{2}{x}$ B) $f(x)=\frac{1}{x+1}$ C) $f(x)=1+\frac{1}{x}$ D) $f(x)=\frac{1}{x}$ E) $f(x)=x+\frac{1}{x}$

Canguro N6 2012 #8, Cangur N4 2012 #8

5.1.3 MF

Dos funciones f y g satisfacen el sistema de ecuaciones $f(x)+2g(1-x)=x^2$ y $f(1-x)-g(x)=x^2$. ¿Qué función es f ?

(A) $x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$ (B) $x^2+\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$ (C) $-x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$ (D) x^2-4x+5

(E) No existen dos funciones que cumplan el enunciado.

Cangur B2 2023 #21, Canguro N6 2023 #21

5.1.4 F

Encontrar todas las funciones $f: IR \to IR$ tales que

$$f(x+y)-f(x-y)=4xy$$

5.1.5 MF

Una función f definida para los enteros positivos verifica que $f(x)+f(y)=f(x\cdot y)$ cualesquiera que sean los números enteros positivos x e y. Si $f(2)=8$ y $f(3)=10$, calcula $f(12)$.

III Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid 2003 B 3

5.1.6 F

En el conjunto de enteros positivos definimos una función f tal que

$$f(x)+f(y)=f(x\cdot y)$$

para cualesquiera x e y. Si $f(10)=14$ y $f(40)=20$, ¿Cuál es el valor de $f(500)$?

(A) 29 (B) 30 (C) 39 (D) 48 (E) 50

XXII Concurso de Primavera de Matemáticas 2018 #21

5.1.7 F **Problema solucionado paso a paso en vídeo**

$f(x)$ es una función tal que $\begin{cases} f(x+1)=2f(x)-2002 & \forall x\in Z \\ f(2005)=2008 \end{cases}$

Entonces $f(2004)$ vale:

(A) 2004 (B) 2005 (C) 2008 (D) 2010 (E) 2016

Canguro 2005 N6 #9, Kangaroo 2005 Student #9

Solución: https://youtu.be/ig-xAXibDgo

5.1.8 F

Sea $f: Z\to Z$ una función que verifica $f(x)=f(x+1)+f(x-1)$ para todo entero x. Si $f(20)=18$ y $f(18)=20$, determinar $f(20182018)$.

LV Olimpiada Matemática Española Comunidad de Madrid 2018 #4

5.1.9 F

Sea f una función tal que, para todo x se verifica que $f(x)=f(x-1)+f(x+1)$. Si $f(20)=16$ y $f(16)=20$, calcula $f(2016)$.

XXXIV Concurso "PUIG ADAM" 2016 Nivel III (1º de Bachillerato) #1

5.1.10 F

Una función cumple la propiedad $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ para cualquier entero x e y. Además, $f(1)=1/2$. Calcula $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$.

(A) 1/8 (B) 3/2 (C) 5/2 (D) 15/8 (E) 6

Kangaroo 2018 Student #24, Canguro 2018 N6 #24, Cangur 2018 B2 #23

5.1.11 F

Una función transforma números reales positivos en números reales. Para todo x real positivo se cumple

$$2f(x)+3f\left(\frac{2010}{x}\right)=5x$$

Determina el valor de $f(6)$.

(A) 993 (B) 1 (C) 2009 (D) 1013 (E) 923

Kangaroo 2010 Student #29, Canguro 2010 N6 #29, Cangur 2010 N4 #29

5.2 Ecuaciones funcionales nivell medio.

5.2.1 M

Sea Z el conjunto de los números enteros. Determinar todas las funciones f : Z → Z tales que, para todos los enteros a y b,

$$f(2a)+2f(b)=f\left(f\left(a+b\right)\right)$$

IMO 2019 #1

Soluciones.

1.1.1

Observando detenidamente las gráficas (B)

1.1.2

Observando detenidamente la gràfica de la función vemos que

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -4, -2, 1, 4$

$f(x) = -4 \to$ Dos valores de x.

$f(x) = -2 \to$ Dos valores de x.

$f(x) = 1 \to$ Dos valores de x.

$f(x) = 4 \to$ Dos valores de x.

Y en la gráfica se aprecia claramente que todos estos ocho valores de x son distintos entre ellos. (A)

1.1.3

La opción C, por observación detenida de las gráficas.

1.1.4

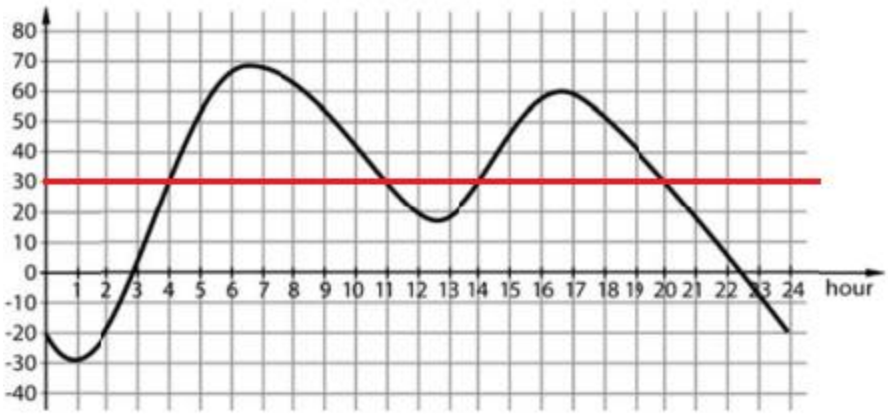
La opción A, por observación detenida de las gráficas.

1.1.5

Está claro que cuanto mayor sea x, menor será y, luego es una función descendiente.
Tenemos como candidatos A, C y E.
Observamos que la relación entre x e y no es lineal. Un mismo segmento de x, es decir un trozo de papel desenrollado, al principio, producirá un y pequeño, porque el diámetro del rollo es grande y ocupará pocas vueltas. Pero al final, cuando el diámetro es pequeño, ese mismo trozo ocupará muchas vueltas, es decir, mucho diámetro, mucha magnitud y, luego la gráfica que se adapta a este comportamiento es (E).

1.1.6

Basta con observar detenidamente la gráfica:



Por encima de 30 cm estuvo entre las 4 y las 11, y entre las 14 y las 20, 13 horas en total (E).

1.1.7 (D)

1.2.1
Podemos interpretar la distancia recorrida por el conejo como $C = 10t$ y la distancia recorrida por el erizo como $E = 550 - t$, donde t es el tiempo transcurrido en segundos.
Determinamos el tiempo transcurrido hasta encontrarse

$$10t = 550 - t \Leftrightarrow 11t = 550 \Leftrightarrow t = 550/11 = 50 \text{ segundos.}$$

Y la distancia recorrida es $10t = 500$ metros.
El tiempo que necesitará el conejo para llegar a la meta es

$$10t + 500 = 550 \Leftrightarrow 10t = 50 \Leftrightarrow t = 50/10 = 5 \text{ segundos}$$

El tiempo que necesitará el erizo para llegar a la meta es

$$1t + 500 = 550 \Leftrightarrow t = 50 \text{ segundos}$$

Luego el erizo llegó 45 segundos después del conejo. (A)

2.1.1
Primera versión.

$$t_3 = \frac{5\cdot 21+1}{25\cdot 20} = \frac{106}{25\cdot 20} = \frac{53}{250}$$

$$t_4 = \frac{5\cdot\frac{53}{250}+1}{25\cdot 21} = \frac{\frac{53}{50}+1}{25\cdot 21} = \frac{\frac{53+50}{50}}{25\cdot 21} = \frac{53+50}{25\cdot 21\cdot 50} = \frac{103}{25\cdot 21\cdot 50}$$

$$t_5 = \frac{5\cdot\frac{103}{25\cdot 21\cdot 50}+1}{25\cdot\frac{53}{250}} = \frac{\frac{103}{5\cdot 21\cdot 50}+1}{\frac{53}{10}} = \left(\frac{103}{5\cdot 21\cdot 50}+1\right)\frac{10}{53} = \left(\frac{103+5\cdot 21\cdot 50}{5\cdot 21\cdot 50}\right)\frac{10}{53} =$$

$$= \left(\frac{5353}{5\cdot 21\cdot 50}\right)\frac{10}{53} = \left(\frac{53\cdot 101}{5\cdot 21\cdot 50}\right)\frac{10}{53} = \frac{101}{5\cdot 21\cdot 5} = \frac{101}{5\cdot 21\cdot 5} = \frac{101}{525}$$

$$t_6 = \frac{5\frac{101}{525}+1}{25\frac{103}{25\cdot 21\cdot 50}} = \frac{\frac{101}{105}+1}{\frac{103}{21\cdot 50}} = \left(\frac{101}{105}+1\right)\frac{21\cdot 50}{103} = \frac{206}{105}\cdot\frac{21\cdot 50}{103} = \frac{2\cdot 21\cdot 50}{105} =$$

$$= \frac{2\cdot 21\cdot 10}{21} = 2\cdot 100 = 20$$

$$t_6 = \frac{5\cdot 20+1}{25\frac{101}{525}} = \frac{5\cdot 20+1}{25\frac{101}{525}} = \frac{101}{\frac{101}{21}} = 21$$

Luego vemos que hay un bucle de longitud 5: $\left(\ 20\ ,\ 21\ ,\ \frac{53}{250}\ ,\ \frac{103}{25\cdot 21\cdot 50}\ ,\ \frac{101}{525}\ \right)$

Y puesto que $2020 = 404\cdot 5$, $t_{2020} = t_5 = \dfrac{101}{525}$

Segunda versión.
Similar a la primera, para ahorrarnos cálculos podemos definir $s_n = 5t_n$, y por tanto

$$t_n = \frac{5t_{n-1}+1}{25t_{n-2}} = \frac{s_{n-1}+1}{5s_{n-2}} \Rightarrow s_n = \frac{s_{n-1}+1}{s_{n-2}}$$

Con $s_1 = 100$ y $s_2 = 105$. Ahora hacemos los cálculos:

$s_3 = \dfrac{53}{50}$, $s_4 = \dfrac{103}{105\cdot 50}$, $s_5 = \dfrac{101}{105}$, $s_6 = 100$ y $s_7 = 105$.

Y observamos el bucle.

Tercera versión. (Oficial de la MAA)

En general, para una sucesión de la forma

$t_1 = a$, $t_2 = b$, $t_3 = \dfrac{kb+1}{k^2 a}$

Tenemos:

$$t_4 = \frac{k(kb+1)/(k^2 a)+1}{k^2 b} = \frac{(kb+1)/(ka)+1}{k^2 b} = \left(\frac{kb+1}{ka}+1\right)\frac{1}{k^2 b} = \frac{kb+1}{kak^2 b} + \frac{1}{k^2 b} =$$

$$= \frac{kb+1}{ak^3 b} + \frac{1}{k^2 b} = \frac{kb+1}{ak^3 b} + \frac{ka}{ak^3 b} = \frac{ka+kb+1}{k^3 ab}$$

$$t_5 = \left(k\frac{ka+kb+1}{k^3 ab}+1\right)\left(\frac{a}{kb+1}\right) = \left(\frac{ka+kb+1}{k^2 ab}+1\right)\left(\frac{a}{kb+1}\right) =$$

$$= \frac{ka+kb+1}{k^2 ab}\frac{a}{kb+1} + \frac{a}{kb+1} = \frac{ka+kb+1}{k^2 b(kb+1)} + \frac{k^2 ab}{k^2 b(kb+1)} =$$

$$= \frac{ka+kb+1+k^2 ab}{k^2 b(kb+1)} = \frac{ak+1}{bk^2}$$

Y finalmente $t_6 = a$ y $t_7 = b$

Y observamos el bucle de longitud 5.

2.1.2

$$f(n) = f(n-1) - f(n-2) + n = f(n-2) - f(n-3) + n - 1 - f(n-2) + n =$$

$$= -f(n-3) + 2n - 1$$

Luego

$$f(n-3) = -f(n-6) + 2(n-3) - 1 = -f(n-6) + 2n - 7$$

Y por tanto:

$$f(n) = -(-f(n-6) + 2n - 7) + 2n - 1 = f(n-6) - 2n + 7 + 2n - 1 = f(n-6) + 6$$

Así pues, por cada vez que puedo restar 6, sumo 6, y puesto que $2018 = 336 \cdot 6 + 2$

Puedo restar 336 veces, y por tanto

$$f(2018) = f(2) + 336 \cdot 6 = 1 + 2016 = 2017 \quad \text{(B)}$$

2.1.3

$2 = a_7 = a_{2\cdot 3+1} = a_2 \cdot a_3 - 2 \Rightarrow 4 = a_2 \cdot a_3$

Por otro lado, $a_3 = a_{2\cdot 1+1} = a_2 \cdot a_1 - 2$, y por tanto la ecuación anterior queda de la forma

$4 = a_2 \cdot a_3 = a_2(a_2 \cdot a_1 - 2)$

Por otro lado, tenemos que

$a_2 = a_{2\cdot 1} = a_2 \cdot a_1 + 1 \Rightarrow a_2 - 1 = a_2 \cdot a_1$

Y sustituyendo en la ecuación anterior llegamos a

$$4 = a_2(a_2 - 1 - 2) \Leftrightarrow 4 = a_2(a_2 - 3) \Leftrightarrow 0 = a_2^2 - 3a_2 - 4 \Rightarrow a_2 = \begin{cases} -1 \\ 4 \end{cases}$$

$a_2 = -1 \Rightarrow (-1) - 1 = (-1)a_1 \Rightarrow -2 = -a_1 \Rightarrow a_1 = 2$, lo que contradice la hipótesis del enunciado, luego la única solución posible es 4 (C)

2.1.4

Vamos construyendo la lista:

2023 1402 3140 2314 0231 4023 1402...

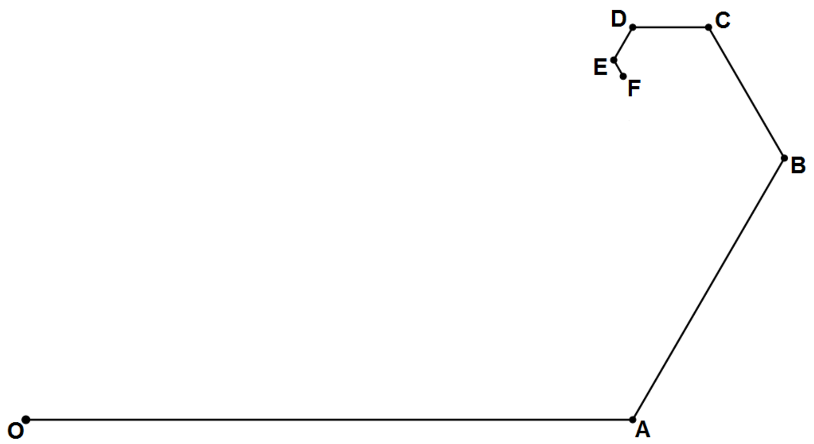
y vemos que desde la posición 25 se van repitiendo en bloques de 20 en 20:

"1402 3140 2314 0231 4023"

2023 = 4 + 2019 = 4 + 100×20 + 19

el dígito que hace 4+19=23 es "2" (C).

2.2.1



Veamos en primer lugar como se comporta en vertical:

Paso 1 OA: 0

Paso 2 AB: $\frac{y}{5/2} = \sin 60^{o} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{4}\sqrt{3}$

Paso 3 BC: $\frac{y}{5/4} = \cos 30^{o} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{8}\sqrt{3}$

Paso 4 CD: 0

Paso 5 DE: $\frac{y}{5/16} = \sin 60^{o} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{32}\sqrt{3}$

Paso 6 EF: $\frac{y}{5/32} = \cos 30^{o} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{64}\sqrt{3}$

La variación vertical es:

$$\frac{5}{2}0 + \frac{5}{2^2}\sqrt{3} + \frac{5}{2^3}\sqrt{3} + \frac{5}{2^4}\cdot 0 - \frac{5}{2^5}\sqrt{3} - \frac{5}{2^6}\sqrt{3} +$$
$$+\frac{5}{2^7}0 + \frac{5}{2^8}\sqrt{3} + \frac{5}{2^9}\sqrt{3} + \frac{5}{2^{10}}\cdot 0 - \frac{5}{2^{11}}\sqrt{3} - \frac{5}{2^{12}}\sqrt{3} + \ldots$$

Vemos por separado cada uno de estos bloques de seis pasos:

$$\frac{5}{2^2}\sqrt{3}+\frac{5}{2^3}\sqrt{3}-\frac{5}{2^5}\sqrt{3}-\frac{5}{2^6}\sqrt{3}=\frac{5}{2^2}\sqrt{3}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}\right)=\frac{5}{2^2}\sqrt{3}\,\frac{21}{16}$$
$$\frac{5}{2^8}\sqrt{3}+\frac{5}{2^9}\sqrt{3}-\frac{5}{2^{11}}\sqrt{3}-\frac{5}{2^{12}}\sqrt{3}=\frac{5}{2^8}\sqrt{3}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}\right)=\frac{5}{2^8}\sqrt{3}\,\frac{21}{16}$$

Así pues, estamos sumando:

$$\frac{5}{2^2}\sqrt{3}\,\frac{21}{16}+\frac{5}{2^8}\sqrt{3}\,\frac{21}{16}+\frac{5}{2^{14}}\sqrt{3}\,\frac{21}{16}+\frac{5}{2^{20}}\sqrt{3}\,\frac{21}{16}+\ldots=\frac{5}{2^2}\sqrt{3}\,\frac{21}{16}\left(1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{2^{18}}+\ldots\right)=$$
$$=\frac{5}{2^2}\sqrt{3}\,\frac{21}{16}\left(1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{\left(2^6\right)^2}+\frac{1}{\left(2^6\right)^3}+\ldots\right)=\frac{5}{2^2}\sqrt{3}\,\frac{21}{16}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^6}\right)^n=\frac{5}{2^2}\sqrt{3}\,\frac{21}{16}\,\frac{64}{63}=\frac{5}{\sqrt{3}}$$

Veamos ahora su comportamiento en horizontal.

Paso 1 OA: 5
Paso 2 AB: $\frac{x}{5/2}=\cos 60^{\circ}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{5}{4}$
Paso 3 BC: $\frac{x}{5/4}=\sin 30^{\circ}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{-5}{8}$
Paso 4 CD: $x=\frac{-5}{8}$
Paso 5 DE: $\frac{x}{5/16}=\cos 60^{\circ}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{-5}{32}$
Paso 6 EF: $\frac{x}{5/32}=\sin 30^{\circ}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{5}{64}$
Luego se ha producido un cambio total de $5+\frac{5}{4}-\frac{5}{8}-\frac{5}{8}-\frac{5}{32}+\frac{5}{64}=\frac{315}{64}$

En el siguiente grupo de 6 pasos será $\frac{1}{2^6}\cdot\frac{315}{64}$

Y el resultado final será $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^6}\right)^n\frac{315}{64}=\frac{315}{64}\,\frac{64}{63}=5$

Así pues, el gusano se acerca más y más al punto $\left(5\,,\frac{5}{\sqrt{3}}\right)$

2.2.2
Vamos viendo como se comporta la sucesión:
$a_2=(4+9+1)^2=196$
$a_3=(1+9+6+1)^2=17^2=289$
$a_4=(2+8+9+1)^2=20^2=400$
$a_5=(4+0+0+1)^2=5^2=25$

$a_6 = (2+5+1)^2 = 8^2 = 64$
$a_7 = (6+4+1)^2 = 11^2 = 121$
$a_8 = (1+2+1+1)^2 = 5^2 = 25 = a_5$
Y vemos que entramos en un bucle: $a_8 = a_5, a_9 = a_6, a_{10} = a_7$.
Y puesto que $2019 = 5 + 671 \cdot 3 + 1 \to a_{2019} = a_6 = 64$ (C)

2.2.3

$$\left(\frac{n-2}{n}\right)^{3n} = \left(\frac{n}{n} + \frac{-2}{n}\right)^{3n} = \left(1 + \frac{-2}{n}\right)^{3n} = \left(1 + \frac{1}{(-n/2)}\right)^{3n} = \left(\left(1 - \frac{1}{(n/2)}\right)^{-n/2}\right)^{-6} \to e^{-6} = \frac{1}{e^6}$$

La respuesta correcta es la (C)

2.2.4

$a_n = a_0 \cdot r^n$. Vamos a suponer que la sucesión es creciente, es decir, que $r > 1$.

$$12 = a_n + a_{n-1} = a_0 \cdot r^n + a_0 \cdot r^{n-1} = a_0 r^{n-1}(r+1) \Rightarrow \frac{12}{r+1} = a_0 r^{n-1}$$

$$3 = a_n - a_{n-1} = a_0 \cdot r^n - a_0 \cdot r^{n-1} = a_0 r^{n-1}(r-1) \Rightarrow \frac{3}{r-1} = a_0 r^{n-1}$$

Luego

$$\frac{12}{r+1} = \frac{3}{r-1} \Rightarrow 12(r-1) = 3(r+1) \Rightarrow 12r - 12 = 3r + 3 \Rightarrow 12r - 3r = 3 + 12$$

$$\Rightarrow 9r = 15 \Rightarrow r = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

2.2.5

$$a = \log_8(2x) = \log_8(2) + \log_8(x) = \log_{2^3}(2) + \log_8(x) = \frac{1}{3} + \log_8(x)$$

$$b = \log_4 x = \frac{\log_8 x}{\log_8 4} = \frac{\log_8 x}{\log_{2^3} 2^2} = \frac{\log_8 x}{2/3} = \frac{3}{2}\log_8 x$$

$$c = \log_2 x = \frac{\log_8 x}{\log_8 2} = \frac{\log_8 x}{\log_{2^3} 2} = \frac{\log_8 x}{1/3} = 3\log_8 x$$

Luego, denotando $k = \log_8(x)$, llegamos a

$$a = \frac{1}{3} + k \ , \ b = \frac{3}{2}k \ , \ c = 3k$$

Por ser una sucesión geométrica:

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow \frac{3/2k}{1/3+k} = \frac{3k}{3/2k} = 2 \Leftrightarrow \frac{3k}{2} = 2\left(\frac{1}{3} + k\right) \Leftrightarrow \frac{3k}{2} = \frac{2}{3} + 2k \Leftrightarrow \frac{3k}{2} = \frac{2+6k}{3}$$

$$\Leftrightarrow 9k = 4 + 12k \Leftrightarrow 9k - 12k = 4 \Leftrightarrow -3k = 4 \Leftrightarrow k = \frac{-4}{3}$$

$$\frac{-4}{3}=\log_8(x) \Leftrightarrow x=8^{-4/3}=2^{-4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$$

2.2.6
Teniendo en cuenta que $289=17^2$, hacemos el cambio de variable $u=2^{17}$, y por tanto

$$\frac{2^{289}+1}{2^{17}+1}=\frac{u^{17}+1}{u+1}$$

Realizamos la división sintética:

$$\frac{u^{17}+1}{u+1}=u^{16}-u^{15}+u^{14}-u^{13}+\ldots+u^2-u+1=$$
$$=u^{15}(u-1)+u^{13}(u-1)+u^{11}(u-1)+\ldots+u(u-1)+1=$$
$$=(u-1)(u^{15}+u^{13}+\ldots+u)+1$$

Ahora observamos que tenemos una suma de una sucesión geométrica de razón 2:

$$u-1=2^{17}-1=2^{16}+2^{15}+\ldots+2+1$$

Luego, finalmente:

$$\frac{2^{289}+1}{2^{17}+1}=\left(2^{16}+2^{15}+\ldots+2^1+2^0\right)\left(2^{17\cdot 15}+2^{17\cdot 13}+2^{17\cdot 11}+\ldots+2^{17\cdot 3}+2^{17\cdot 1}\right)+2^0$$

Es una suma de $17\cdot 8+1=137$ potencias de 2 (C)

2.2.7
En principio podríamos creer que la respuesta correcta es 9, puesto que

$$1+2+3+\ldots+9=45$$

Pero debemos observar que podemos trabajar también con números negativos, y ver que

$$(-89)+(-88)+(-87)+\ldots+89+90=90$$

Luego podemos encontrar una suma de 90 términos.
Aunque no es apropiado en un contexto de una competición matemática, se puede demostrar que 90 es la solución máxima:

$$45=x+x+1+x+2+\ldots+x+(n-1)=n\,x+1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)=$$
$$=n\,x+\frac{n(n-1)}{2}\Rightarrow 90=2n\,x+n(n-1)=n(2x+n-1)\Rightarrow n\,|\,90\Rightarrow 90\le 90$$

2.2.8
Primera versión.
Calculamos a mano los primeros valores de esta sucesión:

$$a_1=1,\ a_2=\frac{3}{7},\ a_3=\frac{3}{11}\ ,\ a_4=\frac{1}{5}\ ,\ a_5=\frac{3}{19}\ ,\ a_6=\frac{3}{23}\ ,\ a_7=\frac{1}{9}\ ,\ a_8=\frac{3}{31}\ ,\ a_9=\frac{3}{35}$$

Y observamos que siguen una pauta en grupos de tres en tres: Sea $N=\lfloor (n-1)/3 \rfloor$,

$$\left(\frac{1}{4N+1}, \frac{3}{12N+7}, \frac{3}{12N+11} \right)$$

$2019-1=672\cdot 3+2$, luego nos piden el tercer elemento del grupo $N=672$, es decir:

$$a_{2019}=\frac{3}{12N+11}=\frac{3}{12\cdot 672+11}=\frac{3}{8075}$$

Y la respuesta correcta es $8075+3=8078 \quad (E)$

Segunda versión.

Con un poco más de observación podríamos haber visto que $\dfrac{1}{4N+1}=\dfrac{3}{12N+3}$

Y que por tanto la sucesión del enunciado se reduce a:

$$a_n=\frac{3}{4n-1}\rightarrow a_{2019}=\frac{3}{4\cdot 2019-1}=\frac{3}{8075}$$

Esto se puede demostrar por inducción:

Supongamos que es cierto hasta n, entonces

$$a_{n+1}=\frac{a_{n-1}\cdot a_n}{2a_{n-1}-a_n}=\frac{\dfrac{3}{4(n-1)-1}\cdot\dfrac{3}{4n-1}}{2\dfrac{3}{4(n-1)-1}-\dfrac{3}{4n-1}}=\frac{\dfrac{9}{(4(n-1)-1)(4n-1)}}{\dfrac{6(4n-1)-3(4(n-1)-1)}{(4(n-1)-1)(4n-1)}}=$$

$$=\frac{9}{6(4n-1)-3(4(n-1)-1)}=\frac{9}{24n-6-12n+15}=\frac{9}{12n+9}=\frac{3}{4n+3}=\frac{3}{4n+4-1}=$$

$$=\frac{3}{4(n+1)-1}$$

2.2.9

$$0.\overline{23}_k=0.232323\ldots_k=2\cdot k^{-1}+3\cdot k^{-2}+2\cdot k^{-3}+3\cdot k^{-4}+2\cdot k^{-5}+3\cdot k^{-6}+\ldots=$$

$$(2k+3)k^{-2}+(2k+3)k^{-4}+(2k+3)k^{-6}+\ldots=(2k+3)\sum_{n=1}^{\infty}\left(k^2\right)^{-n}=$$

$$(2k+3)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(k^{-2}\right)^n-1\right)=(2k+3)\left(\frac{1}{1-k^{-2}}-1\right)=(2k+3)\left(\frac{k^{-2}}{1-k^{-2}}\right)=$$

$$(2k+3)\left(\frac{1}{k^2-1}\right)=\frac{2k+3}{k^2-1}$$

Así pues, llegamos a la ecuación

$$\frac{7}{51}=\frac{2k+3}{k^2-1}\Leftrightarrow 7\left(k^2-1\right)=51\left(2k+3\right)\Leftrightarrow 7k^2-7=102k+153\Leftrightarrow$$

$$7k^2-102k-160=0\Leftrightarrow k=\frac{102\pm\sqrt{102^2-4\cdot 7\cdot(-160)}}{2\cdot 7}=\frac{102\pm\sqrt{14884}}{2\cdot 7}=$$

$$=\frac{102\pm 122}{2\cdot 7}=\begin{cases}16\\ 10/7\end{cases}$$

La única solución entera es $k=16$.

Observación. Nos podemos “saltar” esta última ecuación, demasiado larga sin calculadora, aprovechando que la pregunta es de tipo multirespuesta, con lo que todo se reduce a determinar qué opción de entre las cinco propuestas satisface dicha ecuación.

2.2.10

Fijando un i tenemos:

$$\sum_{j=1}^{100}(i+j)=i+1+i+2+i+3+\ldots+i+100=100i+1+2+3+\ldots+100=100i+\frac{100\cdot 101}{2}=$$

$$=100i+\frac{100\cdot 101}{2}=100i+5050$$

$$\sum_{i=1}^{100}\sum_{j=1}^{100}(i+j)=\sum_{i=1}^{100}100i+5050=5050\cdot 100+100\sum_{i=1}^{100}i=505000+100\frac{100\cdot 101}{2}=$$

$$=505000+100\cdot 50\cdot 101=505000+505000=1010000\qquad (E)$$

2.2.11

Queremos calcular la siguiente serie: $\sum_{0\le a,b,c<\infty}2^a3^b5^c$

Si fijamos un b y un c, tenemos:

$$\sum_{0\le a,b,c<\infty}\frac{1}{2^a3^b5^c}=\sum_{0\le a<\infty}\frac{1}{2^a3^b5^c}=\sum_{0\le a<\infty}\frac{1}{2^a3^b5^c}=\frac{1}{3^b5^c}\sum_{0\le a<\infty}\frac{1}{2^a}=\frac{1}{3^b5^c}\left(\frac{1}{1-(1/2)}\right)=$$

$$=\frac{1}{3^b5^c}\left(2\right)=2\frac{1}{3^b5^c}$$

Donde hemos aplicado la fórmula de la serie geométrica.

Luego ahora podemos hacer lo mismo fijando b y haciendo la suma infinita en c:

$$\sum_{0\le a,b,c<\infty}\frac{1}{2^a3^b5^c}=\sum_{0\le c<\infty}2\frac{1}{3^b5^c}=2\sum_{0\le c<\infty}\frac{1}{3^b5^c}=2\frac{1}{3^b}\sum_{0\le c<\infty}\frac{1}{5^c}=2\frac{1}{3^b}\left(\frac{1}{1-(1/5)}\right)=$$

$$=2\frac{1}{3^b}\left(\frac{5}{4}\right)=2\frac{5}{4}\frac{1}{3^b}=\frac{5}{2}\frac{1}{3^b}$$

A ahora haciendo la suma infinita en b:

$$\sum_{0\le a,b,c<\infty}\frac{1}{2^a3^b5^c}=\sum_{0\le b<\infty}\frac{5}{2}\frac{1}{3^b}=\frac{5}{2}\sum_{0\le b<\infty}\frac{1}{3^b}=\frac{5}{2}\left(\frac{1}{1-1/3}\right)=\frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{15}{4}$$

y la solución es $15+4=19$

2.2.12
Vemos que la fracción S pintada de negro corresponde a la serie geométrica
$$S=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4}+...$$
Luego
$$4S=4\frac{1}{4}+4\frac{1}{4}\frac{1}{4}+4\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4}+4\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4}+...=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4}+...=1+S\Rightarrow$$
$$3S=1\Rightarrow S=\frac{1}{3}$$

Luego la parte pintada de negro es $\frac{1}{3}\cdot 84=28$ (B)

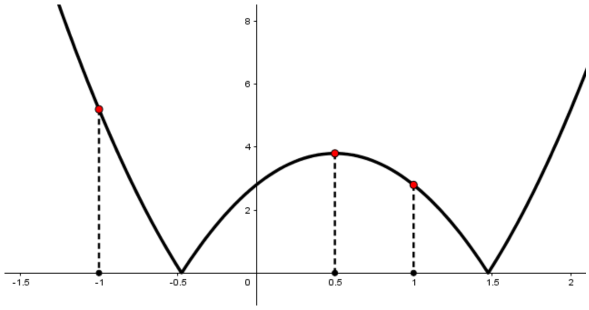
2.3.1
De la condición $2^{a_7}=2^{27}\cdot a_7$ se deduce que a_7 es una potencia de 2, digamos que $a_7=2^k$.
Luego $2^{a_7}=2^{27}\cdot 2^k=2^{27+x}\Rightarrow a_7=27+x$
La menor potencia que encontramos que satiface esta condición es
$$32=a_7=27+x\Rightarrow x=5.$$

Luego buscamos la menor sucesión aritmética estrictamente creciente de números enteros positivos cumpliendo $a_7=32$.
En general, en una sucesión aritmética, $a_n=a_0+kn$ para cierta constante k.
$$a_7=32=a_0+7k\Rightarrow 32-a_0=7k$$
Probamos varias posibilidades:
$$k=4\Rightarrow a_0=4\Rightarrow a_2=4+4\cdot 2=12$$
$$k=3\Rightarrow a_0=11\Rightarrow a_2=11+3\cdot 2=17$$
Vemos que el valor mínimo se obtiene con $k=4, a_2=12$ (B)

2.3.2
Sea a_i el número de manzanas que crece en el arbol $0\le i\le 5$.
Por ser una progresión aritmética, $a_i=a_0+k\,i$, para cierto número k.
Sabemos que $a_5=2a_0$, y que $\sum a_i=990$.
Luego
$$a_5=2a_0\Leftrightarrow a_1+5k=2a_0\Leftrightarrow 5k=a_0$$
$$990=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=a_0+a_0+k+a_0+2k+a_0+3k+a_0+4k+a_0+5k=$$
$$6a_0+15k=6\cdot 5k+15k=45k\Rightarrow k=\frac{990}{45}=22\Rightarrow a_5=2a_0=2\cdot 5k=2\frac{990}{9}=220$$

3.1.1
La función $f(x)=\left|4x^2-4x+k\right|$ es una parábola con las ramas hacia arriba en la que hemos cambiado de signo su parte negativa.

El vértice de esta parábola está en $x = \dfrac{4}{2 \cdot 4} = \dfrac{1}{2}$, luego tenemos que prestar atención a tres puntos de su gráfica, los tres candidatos a máximo: El vértice de la parábola i los puntos frontera del dominio.

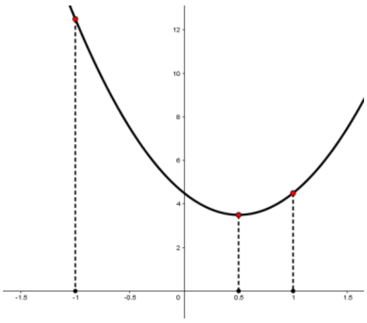


$$f(-1) = \left|4(-1)^2 - 4(-1) + k\right| = |8 + k|$$
$$f(1/2) = \left|4(1/2)^2 - 4(1/2) + k\right| = |k - 1|$$
$$f(1) = \left|4 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + k\right| = |k|$$

El discriminante de esta parábola es $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot k = 16 - 16k = 0 \Leftrightarrow k = 1$.

a) Si $k \geq 1$, la parábola está totalmente por encima del eje X, y vemos que el valor máximo se toma en $x = -1$. En efecto:

$$8 + k > k > k - 1$$



Luego $k \geq 1 \Rightarrow M(k) = 8 + k$

b) Si $0 \leq k \leq 1 \Rightarrow k - 1 \leq 0 \Rightarrow |k - 1| = 1 - k$.

$f(-1) = 8 + k$
$f(1/2) = 1 - k$
$f(1) = k$
Sigue siendo el máximo $f(-1) = 8 + k$

c) Si $-1 \leq k \leq 0 \Rightarrow k - 1 \leq 0 \Rightarrow |k - 1| = 1 - k$

$f(-1) = 8 + k$
$f(1/2) = 1 - k$
$f(1) = -k$
Sigue siendo el máximo $f(-1) = 8 + k$

d) Si $-8 \leq k \leq -1 \Rightarrow k - 1 \leq 0 \Rightarrow |k - 1| = 1 - k$

$f(-1)=8+k$
$f(1/2)=1-k$
$f(1)=-k$

$$8+k>1-k \Leftrightarrow 8-1>-k-k \Leftrightarrow 7>-2k \Leftrightarrow k<\frac{-7}{2}=-3.5$$

Entre $-8\le k\le -3.5$ el máximo se encuentra en $f(1/2)=1-k$
Entre $-3.5<x\le -1$ el máximo se encuentra en $f(-1)=8+k$

e) Si $k<-8 \Rightarrow 8+k<0 \Rightarrow |8+k|=k-8$

$f(-1)=k-8$
$f(1/2)=1-k$
$f(1)=-k$

y está claro que el valor máximo lo encontramos en $f(1/2)=1-k$

Así pues, la función $M(k)$ tiene el siguiente comportamiento:

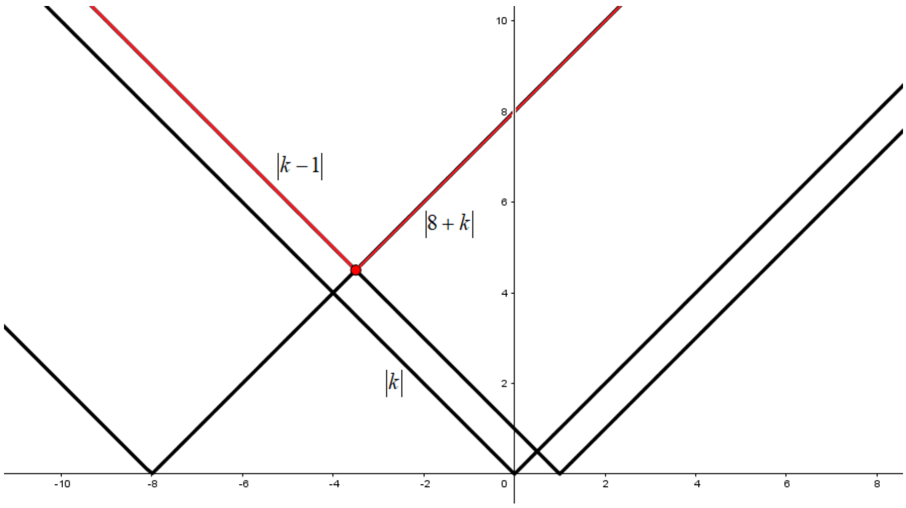
$$M(k)=\begin{cases}8+k & k\ge -3.5\\ 1-k & k<-3.5\end{cases}$$

Una función contínua, decreciente por la izquierda de $x=-3.5$, creciente por la derecha de $x=-3.5$, luego la función tiene un mínimo en $x=-3.5$, y su valor es:

$M(-3.5)=4.5=9/2$ (E)

Observación:
Una versión más rápida sería representar gráficamente las tres funciones:

$$f(k)=|8+k| \ ,\ g(k)=|k-1| \ ,\ h(k)=|k|$$



y observar que la función máximo tiene un mínimo en $x=-3.5$ con valor $M(-3.5)=4.5=9/2$

3.1.2
Queremos determinar el mínimo de xy sabiendo que $x+y=1$.
$x+y=1 \Rightarrow y=1-x \Rightarrow xy=x(1-x)$

La función $f(x)=x(1-x)$ tiene forma parabólica, con las ramas hacia arriba, y su mínimo se encuentra en su vértice:

$$f(x)=x(1-x)=x-x^2 \Rightarrow V=\frac{-b}{2a}=\frac{-1}{2(-1)}=\frac{1}{2}$$

Y su valor mínimo es $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

4.1.1

La única posibilidad aceptable es que la recta sea tangente a la curva. Por lo tanto, tienen la misma pendiente:

$$3x^2=a$$

y pasan por un mismo punto:

$$x^3=ax+16=3x^2x+16 \Rightarrow -2x^3=16 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow a=3(-2)^2=12$$

Se puede comprobar fácilmente que, en efecto, $y=12x+16$ cumple las condiciones requeridas.

5.1.1

Vemos que la función cumple $f(n+1)=f(n)\,f(1)$, luego

$$\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{f(n)\,f(1)}{f(n)}=f(1)=2$$

Y por tanto

$$\frac{f(2)}{f(1)}+\frac{f(3)}{f(2)}+\ldots+\frac{f(2021)}{f(2020)}=\underbrace{2+2+\ldots+2}_{2020}=2020\cdot 2=4040 \quad \text{(E)}$$

5.1.2

Vamos probando los candidatos propuestos hasta ver que la opción D cumple la condición del enunciado:

$$f(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1/x}=\frac{1}{f(x)}$$

5.1.3

$$\left.\begin{array}{l} f(1-x)-g(x)=x^2 \\ y=1-x \Rightarrow x=1-y \end{array}\right\} \Rightarrow f(y)-g(1-y)=(1-y)^2$$

y como esto funciona para cualquier y podemos deducir que

$$f(x)-g(1-x)=(1-x)^2 \Rightarrow 2f(x)-2g(1-x)=2(1-x)^2$$

Luego, sumando ambas ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)+2g(1-x)=x^2 \\ 2f(x)-2g(1-x)=2(1-x)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 3f(x)=x^2+2(1-x)^2=3x^2-4x+2 \Rightarrow f(x)=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$$

y la respuesta correcta es (A)

5.1.4

Sustituyendo $y=x$ tenemos

$$f(x+x)-f(x-x)=4xx \Leftrightarrow f(2x)-f(0)=4x^2 \Leftrightarrow f(2x)=4x^2+f(0)=(2x)^2+f(0)$$

Mediante el cambio de variable $z=2x$ nos queda la función

$$f(z) = z^2 + f(0)$$

y vemos que el valor de $f(0)$ es libre, en efecto, para cualquier constante k, la función

$$f(z) = z^2 + k$$

cumple las condiciones del enunciado. En efecto:

$$f(x+y) = (x+y)^2 + k = x^2 + 2xy + y^2 + k$$

$$f(x-y) = (x-y)^2 + k = x^2 - 2xy + y^2 + k$$

$$f(x+y) - f(x-y) = 2xy + 2xy = 4xy$$

Así pues, las funciones que satisfacen la condición del enunciado son todas las funciones de la forma $f(z) = z^2 + k$ para cualquier constante k.

5.1.5

$$f(12) = f(3\cdot 4) = f(3) + f(4) = f(3) + f(2\cdot 2) = f(3) + f(2) + f(2) = 10 + 8 + 8 = 26$$

5.1.6

$$20 = f(40) = f(4\cdot 10) = f(4) + f(10) = f(4) + 14 \Rightarrow f(4) = 20 - 14 = 6$$

$$6 = f(4) = f(2\cdot 2) = f(2) + f(2) = 2f(2) \Rightarrow f(2) = 6/2 = 3$$

$$14 = f(10) = f(2\cdot 5) = f(2) + f(5) = 3 + f(5) \Rightarrow f(5) = 14 - 3 = 11$$

$$f(100) = f(10\cdot 10) = f(10) + f(10) = 14 + 14 = 28$$

$$f(500) = f(5\cdot 100) = f(5) + f(100) = 11 + 28 = 39$$

5.1.7

$$2008 = f(2005) = f(2004 + 1) = 2f(2004) - 2002 \Rightarrow$$

$$2008 + 2002 = 2f(2004) \Rightarrow$$

$$4010 = 2f(2004) \Rightarrow$$

$$f(2004) = \frac{4010}{2} = 2005$$

5.1.8

Está claro que $f(19) = f(19+1) + f(19-1) = f(20) + f(18) = 18 + 20 = 38$.

Ahora observamos que podemos ir calculando los valores de la función uno por uno, pues

$$f(x+1) = f(x) - f(x-1)$$

Así pues,

$$f(21) = f(20) - f(19) = 18 - 38 = -20$$

$$f(22) = f(21) - f(20) = -20 - 18 = -38$$

$$f(23) = f(22) - f(21) = -38 - (-20) = -18$$

$$f(24) = f(23) - f(22) = -18 - (-38) = 20$$

$$f(25) = f(24) - f(23) = 20 - (-18) = 38$$

$$f(26) = f(25) - f(24) = 38 - 20 = 18$$

Y vemos una pauta que se repite en ciclos de 6 valores:

18	19	20	21	22	23
20	38	18	-20	-38	-18

Queremos saber qué valor va en la posición $20182018-18=20182000=336366\cdot 6+4$, que será el valor que ocupa la quinta posición, es decir, -38.

5.1.9
Aplicando la igualdad del enunciado obtenemos el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} f(17)=f(16)+f(18) \\ f(18)=f(17)+f(19) \\ f(19)=f(18)+f(20) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(17)=20+f(18) \\ f(18)=f(17)+f(19) \\ f(19)=f(18)+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(18)=20+f(18)+f(19) \\ f(19)=f(18)+16 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -20=f(19) \\ f(19)=f(18)+16 \end{cases} \Rightarrow -20=f(18)+16 \Rightarrow -36=f(18)$$

$$f(19)=f(18)+16=-36+16=-20 \Rightarrow f(17)=20-36=-16$$

Y ahora, puesto que $f(x+1)=f(x)-f(x-1)$ podemos ir calculando los siguientes valores de la función:

$$f(21)=f(20)-f(19)=16-(-20)=36$$
$$f(22)=f(21)-f(20)=36-16=20$$
$$f(23)=f(22)-f(21)=20-36=-16$$

Y vemos que se va repitiendo un ciclo de seis valores:

16	17	18	19	20	21
20	-16	-36	-20	16	36

Queremos calcular el valor que se obtiene en la posición $2016-16=2000=333\cdot 6+2$, es decir, en la tercera posición, que será un -36.

5.1.10

$$x=0, y=1 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot f(1)=f(0+1)=f(0)\cdot f(1)=f(0)\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow f(0)=1$$

$$x=y=1 \Rightarrow f(1+1)=f(1)\cdot f(1) \Rightarrow f(2)=f(1)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$x=1, y=2 \Rightarrow f(3)=f(1+2)=f(1)\cdot f(2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

Así pues, $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{15}{8}$

5.1.11
Observamos que $2010=335\cdot 6$
Evaluando en $x=6$:

$$2f(6)+3f\left(\frac{2010}{6}\right)=5\cdot 6 \Leftrightarrow 2f(6)+3f(335)=30$$

Evaluando en $x=335$:

$$2f(335)+3f\left(\frac{2010}{335}\right)=5\cdot 335 \Leftrightarrow 2f(335)+3f(6)=1675$$

Con lo que obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 2f(6)+3f(335)=30 \\ 3f(6)+2f(335)=1675 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4f(6)+6f(335)=60 \\ 9f(6)+6f(335)=5025 \end{cases} \Rightarrow 5f(6)=5025-60=4965 \Rightarrow$$

$$f(6)=\frac{4965}{5}=993$$

5.2.1

Sustituyendo por $a=0 \to f(0)+2f(b)=f(f(b))$

Así pues, $f(f(x))=2f(x)+f(0)$

Luego

$$f(2a)+2f(b)=2f(a+b)+f(0) \Rightarrow$$

$$f(2a)-f(0)=2f(a+b)-2f(b)=2(f(a+b)-f(b))$$

En particular, para $a=1$,

$f(b+1)-f(b)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2}$ es una constante, luego la función es una función lineal, es decir, de la forma $f(x)=Ax+B$, con $A=\dfrac{f(2)-f(0)}{2}$ y $B=f(0)$.

Vamos a demostrar que A=2 o B=0. En efecto, sustituimos en la igualdad del enunciado:

$$A(2a)+B+2(Ab+B)=A(A(a+b)+B)+B \Leftrightarrow$$

$$2Aa+B+2Ab+2B=A^2(a+b)+AB+B \Leftrightarrow$$

$$2A(a+b)+3B=A^2(a+b)+AB+B$$

En particular, tomando valores tales que $a+b=0$, $3B=AB+B=B(A+1)$

Si $B\neq 0$ podemos simplificar en $2=A+1 \Rightarrow A=2$

Si $B=0 \Rightarrow 2A(a+b)=A^2(a+b)$, y tomando $a=1, b=0$,

$2A=A^2 \Leftrightarrow A^2-2A=0 \Leftrightarrow A(A-2)=0 \Leftrightarrow A=0, A=2$

Es decir, las funciones solución de esta función son $f(x)=2x+B$, para cualquier B, o $f(x)=0$.