ÁLGEBRA

Enfoque *Problem-solving*

Gerard Romo Garrido

TooMates
Cool·lección

Toomates Cool·lección

Los documentos de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho.
Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "**licencias digitales**" con las que las editoriales pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo libro, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.
Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de licencias digitales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf".

El conocimiento no es una mercancía.

El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las editoriales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de unos libros de texto que actualmente son muy mediocres, y no mediante retorcidas técnicas comerciales.

Este documento se comparte bajo una licencia "**Creative Commons**": Se permite, se promueve y se fomenta cualquier uso, reproducción y edición de todos estos materiales siempre que sea sin ánimo de lucro y se cite su procedencia. Todos los documentos se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas. Se agradecerá cualquier observación, comentario o colaboración a
toomates@gmail.com

Actualmente, **Toomates Cool·lección** consta de los siguientes libros:

Geometría axiomática:

GA	**Geometría Axiomática**	pdf	1 2 ... 23 portada
PG	**Problemas de Geometría**	pdf	1 2 3 4 5 6 7

Problem-solving:

AR	**Teoría de números**	pdf	1 2
PT	**Trigonometría**	pdf	doc
DE	**Desigualdades**	pdf	doc
PC	**Números complejos**	pdf	doc
PA	**Álgebra** (en preparación)	pdf	doc
PC	**Combinatoria** (en preparación)	pdf	doc
PR	**Probabilidad** (en preparación)	pdf	doc

Libros de texto (En catalán)

AG	**Àlgebra**	pdf	1 2
FU	**Funcions**	pdf	doc
GN	**Geometria analítica**	pdf	1 2
TR	**Trigonometria**	pdf	doc
CO	**Nombres complexos**	pdf	doc
AL	**Àlgebra Lineal** 2n batxillerat	pdf	doc
GL	**Geometria Lineal** 2n batxillerat	pdf	doc
CI	**Càlcul Infinitesimal** 2n batxillerat	pdf	1 2
PL	**Programació Lineal** 2n batxillerat	pdf	doc

Recopilaciones de problemas

SE	**Compendium OME 2005-2019**	pdf	
SA	**Compendium AIME 1983-2019**	pdf	
ST	**Compendium PAU TEC 1998-2019**	pdf	
SC	**Compendium PAU CCSS 1998-2019**	pdf	
PM	**Problemas de Matemáticas**	pdf	doc

Versión de este documento: 28/03/2020

www.toomates.net

Índice

Este documento está en proceso de desarrollo

1 El binomio de Newton.

El binomio de Newton.

Para cualquier par de números a,b (el binomio de Newton se cumple incluso con números complejos) y $n \geq 1$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + na^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + b^n$$

1.1 F

Para cada número real a y para cada entero positivo k, definimos

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)(a-2)\ldots\left(a-(k-1)\right)}{k(k-1)(k-2)\ldots\, 2 \cdot 1}$$

¿ Cuál es el valor de $\binom{-1/2}{100} \div \binom{1/2}{100}$?

(A) -199 (B) -197 (C) -1 (D) 197 (E) 199

ASHME 1988 #14

2 Las fórmulas de Vieta.

Las fórmulas de Vieta relacionan los coeficientes de un polinomio y sus raíces.

Fórmulas de Vieta para ecuaciones de segundo grado.

Supongamos que el polinomio mónico $x^2+ax+b=0$ tiene raíces p y q. Entonces:

$$x^2+ax+b=(x-p)(x-q)$$

Y desarrollando la parte de la derecha llegamos a:

$$x^2+ax+b=(x-p)(x-q)=x(x-q)-p(x-q)=x^2-qx-px+pq=x^2-(p+q)x+pq$$

Puesto que dos polinomios son iguales si y solo si tienen los mismos coeficientes, se deducen directamente las fórmulas de Vieta para ecuaciones de segundo grado:

$$\begin{cases} a=-(p+q) \\ b=pq \end{cases}$$

Ejemplo 1.

Supongamos que p y q son las raíces de $t^2-7t+5=0$. Encontrar p^2+q^2.

Solución.
Aplicando las fórmulas de Vieta, tenemos que:

$$\begin{cases} -7=-(p+q) \\ 5=pq \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7=p+q \\ 5=pq \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 49=7^2=(p+q)^2=p^2+q^2+2pq=p^2+q^2+2\cdot 5=p^2+q^2+10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 39=49-10=p^2+q^2$$

Ejemplo 2.

Supongamos que m y n son las raíces de la ecuación $2x^2+15x+16=0$.
Determinar $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$.

Solución.
En primer lugar, reescribimos la ecuación como un polinomio mónico:

$$2x^2+15x+16=0 \Leftrightarrow \frac{2x^2+15x+16}{2}=\frac{0}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{2}x^2+\frac{15}{2}x+\frac{16}{2}=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{15}{2}x+8=0$$

Y ahora aplicamos las fórmulas de Vieta:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{15}{2}=-(m+m) \\ 8=mn \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{m+n}{mn}=\frac{-15/2}{8}=\frac{-15}{16}$$

Las fórmulas de Vieta para ecuaciones de tercer grado.

Supongamos que el polinomio mónico $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ tiene soluciones p, q y r. Entonces:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x-p)(x-q)(x-r)$$

Y desarrollando la parte de la derecha llegamos a:

$$(x-p)(x-q)(x-r) = x^3 - (p+q+r)x^2 + (pq+pr+qr)x - pqr$$

De nuevo, igualando coeficientes, llegamos a las fórmulas de Vieta de tercer grado:

$$\begin{cases} a = -(p+q+r) \\ b = pq+pr+qr \\ c = -pqr \end{cases}$$

Ejemplo.

Supongamos que p, q y r son las raíces del polinomio $t^3 - 2t^2 + 3t - 4$. Determina $(p+1)(q+1)(r+1)$.

Solución.

Aplicando las fórmulas de Vieta para polinomios de tercer grado:

$$\begin{cases} -2 = -(p+q+r) \\ 3 = pq+pr+qr \\ -4 = -pqr \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = p+q+r \\ 3 = pq+pr+qr \\ 4 = pqr \end{cases}$$

$$(p+1)(q+1)(r+1) = (pq+p+q+1)(r+1) == pqr+pr+qr+r+pq+p+q+1 =$$
$$= pqr+pr+qr+pq+r+p+q+1 = 4+3+2+1 = 10$$

Fórmulas de Vieta generales.

Este mismo procedimiento es puede generalizar para cualquier polinomio de grado n:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Con raíces $r_1, r_2, \ldots, r_n$:

$$\begin{cases} a_n = a_n \\ a_{n-1} = -a_n(r_1 + r_2 + \ldots + r_n) \\ a_{n-2} = a_n(r_1 r_2 + r_2 r_3 + \ldots + r_{n-1} r_n) \\ \vdots \\ a_0 = (-1)^n a_n r_1 r_2 \ldots r_n \end{cases}$$

Observación:

De las fórmulas anteriores, la más útil es la última:

$$a_0 = (-1)^n a_n r_1 r_2 \ldots r_n$$

Nos dice que el producto de todas las raíces y a_n es igual al término independiente, con el signo correspondiente. Si los coeficientes del polinomio son enteros, entonces esta última relación demuestra que cualquier raíz entera del polinomio tiene que ser forzosamente uno de los divisores de a_n, con signo + o -.

2.1 F

Supongamos que las raíces de $x^3+3x^2+4x-11=0$ son a, b y c, y que las raíces de $x^3+rx^2+sx+t=0$ son $a+b$, $b+c$ y $c+a$. Encontrar t.

AIME 1996 #5

3 Polinomios.

Algunas fórmulas interesantes.

Diferencia de cuadrados: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Cuadrados de sumas y restas: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Cuadrado de la suma de tres números: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$

Suma i diferencia de cubos: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

La fórmula sin nombre:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$$

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1)$$

Binomio de Newton:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

3.1

Sea $f(x)$ un polinomio cúbico con raíces r_1, r_2, r_3 tal que

$$\frac{f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right)}{f(0)} = 997$$

Encuentre $\dfrac{1}{r_1 r_2} + \dfrac{1}{r_2 r_3} + \dfrac{1}{r_3 r_1}$.

3.2 MF

Sea c la mayor solución de la ecuación $x^2 - 20x + 13 = 0$. Determina el área de la circunferencia de centro (c, c) y que pasa por el punto $(13,7)$

3.3 F

Uno de los factores de x^4+4 es:

(A) x^2+2 (B) $x+1$ (C) x^2-2x+2 (D) x^2-4
(E) ninguna de las anteriores

AHSME 1953 #18

3.4 F

Determina el número de enteros n entre 1 y 100 para los que x^2+x-n factoriza en el producto de dos factores lineales con coeficientes enteros.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 9 (E) 10

AHSME 1989 #8

4 Logaritmos y exponenciales.

4.1

Demostrar que

$$\log_a b \log_b c \log_c d \log_d a = 1$$

OME 1971-72 Primera fase (Cataluña) #10C4

4.2 MF

Los valores de a en la ecuación $\log_{10}\left(a^2 - 15a\right) = 2$ son:

(A) $\frac{15 \pm \sqrt{233}}{2}$ (B) $10, -5$ (C) $\frac{15 \pm \sqrt{305}}{2}$ (D) ± 20

(E) Ninguno de los anteriores.

AHSME 1951 #22

4.3 MF

Resuelve la ecuación $9^{x+2} = 240 + 9^x$

AHSME 1957 #33

5 Valor absoluto.

Definición de valor absoluto.

Se define el valor absoluto de un número real x como:

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Propiedades básicas.

El valor absoluto cumple las siguientes propiedades básicas:

a) $|x| \geq 0$, y $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

b) $|x| \geq x$ y $|x| = x \Leftrightarrow x \geq 0$

c) $|x| = |-x|$

d) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

e) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

f) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a\ o\ x \leq -a$

g) $|x^2| = |x|^2 = x^2$

Dominio de definición de una ecuación con valor absoluto.

Dada una ecuación del tipo $|x| = k$,

Si $k > 0$ tiene dos soluciones: $x = k$ y $x = -k$.
Si $k = 0$ tiene una única solución: $x = 0$.
Si $k < 0$ no tiene ninguna solución.

Esta condición se ve muy clara cuando k es un número, pero queda peligrosamente escondida cuando hay una expresión algebraica, y puede dar lugar a resultados equivocados si no somos rigurosos. Por ejemplo, en el siguiente problema, si no comprobamos el dominio de definición, pueden aparecer soluciones que, en realidad, no son aceptables.

Ejemplo.

Resuelve la ecuación

$$\left|x - |2x+1|\right| = 3$$

ASHME 1984 #20

Solución.

$$\left|x - |2x+1|\right| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - |2x+1| = 3 & (a) \\ x - |2x+1| = -3 & (b) \end{cases}$$

(a)

$x - |2x+1| = 3 \Leftrightarrow x - 3 = |2x+1|$

Si $x - 3 < 0 \Leftrightarrow x < 3 \Rightarrow$ la ecuación no tiene solución.

Si $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3 \Rightarrow$ la ecuación tiene dos soluciones:

$$x-3=|2x+1| \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=2x+1 \Leftrightarrow x=-4 \\ -(x-3)=2x+1 \Leftrightarrow x=2/3 \end{cases}$$

Sin embargo, estas dos soluciones no son aceptables porque contradicen la hipótesis $x \geq 3$.

(b)

$x-|2x+1|=-3 \Leftrightarrow x+3=|2x+1|$

Si $x+3<0 \Leftrightarrow x<-3 \Rightarrow$ la ecuación no tiene solución.

Si $x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3 \Rightarrow$ la ecuación tiene dos soluciones:

$$x+3=|2x+1| \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=2x+1 \Leftrightarrow x=2 \\ -(x+3)=2x+1 \Leftrightarrow x=-4/3 \end{cases}$$

Y en este caso ambas soluciones son aceptables pues ambas cumplen $x \geq -3$

Las soluciones son dos: $x=-4/3$, $x=2$

5.1 F

Si $|x|+x+y=10$ y $x+|y|-y=12$, determina $x+y$.

(A) -2 (B) 2 (C) 18/5 (D) 22/3 (E) 22

AHSME 1988 #17

5.2 F

Sea $f(x)=|x-p|+|x-15|+|x-p-15|$, con $0<p<15$. Determina el valor mínimo tomado por $f(x)$ para x en el intervalo $p \leq x \leq 15$.

AIME 1983 #2

6 Expresiones algebraicas.

6.1 MF

Supongamos que a,b,c son números reales tales que

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)=\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)$$

Si $abc=13$, determina $|a+b+c|$.

7 Función suelo o Parte entera.

Definición de función parte entera y función techo.

Definimos el "**suelo**" o "parte entera" de un número real x, y la denotaremos por $\lfloor x \rfloor$, como el mayor entero n menor o igual que x.

Por ejemplo, $\lfloor 2.4 \rfloor = 2$, $\lfloor 1.99 \rfloor = 1$, $\lfloor -3.15 \rfloor = -4$

Definimos la **parte fraccional** de x como $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Observación: Definida así, "parte fraccional" equivale a tomar los decimales del número y eliminar la parte entera solo cuando $x \geq 0$. Para números negativos ya no podemos mantener esta idea. Por ejemplo:

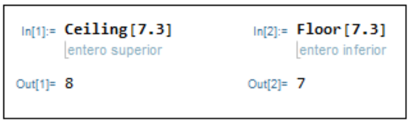
$$x = -3.7 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = -4 \Rightarrow \{x\} = x - \lfloor x \rfloor = -3.7 - (-4) = 0.3$$

De la misma forma, definimos el "**techo**" de un número real x, y lo denotaremos por $\lceil x \rceil$, como el menor entero n mayor o igual que x.

Por ejemplo, $\lceil 2.4 \rceil = 3$, $\lceil 1.99 \rceil = 2$, $\lceil -3.15 \rceil = -3$

Si x es un entero, $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil = x$ y $\{x\} = 0$. Si x no es un entero, $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$.

Con Mathematica:



7.1 F

Determina el conjunto de soluciones de la ecuación $\lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil = 5$.

ASHME 1986 #7

7.2 F

Sea x un número real seleccionado aleatoriamente uniformemente entre 100 y 200. Si $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 12$, determina la probabilidad que $\lfloor \sqrt{100x} \rfloor = 120$.

ASHME 1989 #20

7.3 M

¿Cuántos números enteros $0 < n \leq 1000$ se pueden expresar de la forma

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 6x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor,$$

donde x es un número real y $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero menor o igual que x?

AIME 1985 #10

7.4 F

Resuélvase la ecuación

$$\lfloor x^2 - x - 2 \rfloor = \lfloor x \rfloor$$

para $x \in IR$.

7.5 M

Resolver el sistema

$$\begin{cases} x + \lfloor y \rfloor + \{z\} = 200.0 \\ \{x\} + y + \lfloor z \rfloor = 190.1 \\ \lfloor x \rfloor + \{y\} + z = 178.8 \end{cases}$$

Australia 1999

7.6 M

Determina la cantidad de números distintos que existen en la sucesión

$$\left\lfloor \frac{1^2}{2005} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2^2}{2005} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{2005^2}{2005} \right\rfloor$$

7.7 M

Determina el entero positivo n para el cual $\frac{1}{n}$ se acerca más a $\left\{\sqrt{123456789}\right\}$.

ARML 2003

7.8 F

Supongamos que a es positivo, $\{a^{-1}\} = \{a^2\}$, y $2 < a^2 < 3$. Determina el valor de $a^{12} - 144a^{-1}$.

AIME 1997

7.9 F

Determina todas las soluciones reales de la ecuación $4x^2 - 40\lfloor x \rfloor + 51 = 0$

7.10 F

Dado un número real a, sea $\lfloor a \rfloor$ el mayor entero menor o igual que a. Determina la región del plano coordenado de los puntos (x, y) tales que $\lfloor x \rfloor^2 + \lfloor y \rfloor^2 = 25$.

Adaptado de AIME I 2010 #8

Soluciones.

1.1

$$100!\binom{-1/2}{100}=\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}-1\right)\left(\frac{-1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{-1}{2}-99\right)=$$

$$=\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1-2\cdot 1}{2}\right)\left(\frac{-1-2\cdot 2}{2}\right)\ldots\left(\frac{-1-2\cdot 99}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2^{100}}(-1)(-1-2\cdot 1)(-1-2\cdot 2)\ldots(-1-2\cdot 99)=$$

$$=\frac{1}{2^{100}}(-1)(-3)(-5)(-7)\ldots(-199)$$

$$100!\binom{1/2}{100}=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-99\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1-2\cdot 1}{2}\right)\left(\frac{1-2\cdot 2}{2}\right)\ldots\left(\frac{1-2\cdot 99}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2^{100}}(1)(1-2\cdot 1)(1-2\cdot 2)\ldots(1-2\cdot 99)=$$

$$=\frac{1}{2^{100}}(-1)(-3)(-5)\ldots(-197)$$

Y por tanto:

$$\binom{-1/2}{100}\div\binom{1/2}{100}=\frac{\frac{1}{100!\cdot 2^{100}}(-1)(-3)(-5)(-7)\ldots(-199)}{\frac{1}{100!\cdot 2^{100}}(-1)(-3)(-5)\ldots(-197)}=\frac{(-1)(-3)(-5)(-7)\ldots(-199)}{(-1)(-3)(-5)\ldots(-197)}=$$

$$=-199$$

2.1

$$x^3+3x^2+4x-11=0=(x-a)(x-b)(x-c)=$$

$$=(x^2-(a+b)x+ab)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ac)x-abc$$

Luego $\begin{cases}3=-(a+b+c)\Rightarrow -3=a+b+c\\ 4=ab+bc+ac\\ -11=-abc\Rightarrow 11=abc\end{cases}$

Por otro lado, aplicando de nuevo la fórmula de Vieta en la segunda ecuación,

$$-t=(a+b)(b+c)(c+a)=a^2b+ab^2+a^2c+2abc+b^2c+ac^2+bc^2=$$

$$=a^2b+ab^2+a^2c+2\cdot 11+b^2c+ac^2+bc^2\Rightarrow$$

$$-t-22=a^2b+ab^2+a^2c+b^2c+ac^2+bc^2$$

Por otro lado,

$$-12=-3\cdot 4=(a+b+c)(ab+bc+ac)=a^2b+ab^2+a^2c+3abc+b^2c+ac^2+bc^2=$$
$$=a^2b+ab^2+a^2c+33+b^2c+ac^2+bc^2\Rightarrow$$
$$-45=-12-33=a^2b+ab^2+a^2c+b^2c+ac^2+bc^2$$

y por tanto $-t-22=-45\Rightarrow t=45-22=23$

Nota: Estamos aplicando, indirectamente, la igualdad
$$(a+b)(b+c)(c+a)=(ab+bc+ca)(a+b+c)-abc$$

3.1
$$\frac{1}{r_1r_2}+\frac{1}{r_2r_3}+\frac{1}{r_3r_1}=\frac{r_3}{r_1r_2r_3}+\frac{r_1}{r_1r_2r_3}+\frac{r_2}{r_1r_2r_3}=\frac{r_1+r_2+r_3}{r_1r_2r_3}$$
$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}$$
Aplicando las fórmulas de Vieta:
$$\frac{d}{a}=-r_1r_2r_3$$
$$\frac{b}{a}=-(r_1+r_2+r_3)$$
Por lo tanto, $\dfrac{r_1+r_2+r_3}{r_1r_2r_3}=\dfrac{-b/a}{-d/a}=\dfrac{b}{d}$.
$$f(0)=a0^3+b0^2+c0+d=d$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right)=a\left(\frac{1}{2}\right)^3+b\left(\frac{1}{2}\right)^2+c\left(\frac{1}{2}\right)+d=\frac{a}{8}+\frac{b}{4}+\frac{c}{2}+d$$
$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=a\left(-\frac{1}{2}\right)^3+b\left(-\frac{1}{2}\right)^2+c\left(-\frac{1}{2}\right)+d=\frac{-a}{8}+\frac{b}{4}-\frac{c}{2}+d$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{a}{8}+\frac{b}{4}+\frac{c}{2}+d-\frac{a}{8}+\frac{b}{4}-\frac{c}{2}+d=2\frac{b}{4}+2d=\frac{b}{2}+2d$$
$$997=\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(-\frac{1}{2}\right)}{f(0)}=\frac{\frac{b}{2}+2d}{d}=\frac{\frac{b+4d}{2}}{d}=\frac{b+4d}{2d}=\frac{b}{2d}+\frac{4d}{2d}=\frac{b}{2d}+2\Rightarrow$$
$$995=997-2=\frac{b}{2d}\Rightarrow\frac{b}{d}=2\cdot 995=1990$$
Luego la solución es 1990.

3.2
La ecuación de la circunferencia con centro (c,c) será de la forma
$$(x-c)^2+(y-c)^2=r^2$$

y puesto que pasa por el punto $(13,7)$ tendremos que:

$$(13-c)^2 + (7-c)^2 = r^2 \Leftrightarrow$$
$$13^2 - 26c + c^2 + 7^2 - 14c + c^2 = r^2 \Leftrightarrow$$
$$218 - 40c + 2c^2 = r^2 \Leftrightarrow$$
$$2\left(109 - 20c + c^2\right) = r^2 \quad (*)$$

Por otro lado, c satisface la ecuación $x^2 - 20x + 13 = 0$, y por tanto

$$c^2 - 20c + 13 = 0 \Leftrightarrow$$
$$c^2 - 20c = -13$$

y sustituyendo en $(*)$

$$(*) \Leftrightarrow 2(109-13) = r^2 \Leftrightarrow$$
$$192 = r^2$$

Con lo que, finalmente, $A = \pi r^2 = 192\pi$

3.3

$$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x+2)^2 - 4x^2 = (x+2)^2 - (2x)^2 = (x+2-2x)(x+2+2x) =$$
$$= (x - 2x + 2)(x + 2x + 2)$$

3.4

Puesto que $-n$ es negativo, y el polinomio es mónico, tendremos que

$$x^2 + x - n = (x-a)(x+b)$$

para ciertos enteros $a, b \geq 0$

Luego

$$x^2 + x - n = (x-a)(x+b) = x^2 + (b-a)x - ab \Rightarrow \begin{cases} 1 = b - a \Rightarrow b = 1 + a \\ -n = -ab \Rightarrow n = ab \end{cases}$$

Luego $1 \leq ab = a(1+a) \leq 100$

$a = 1 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow ab = 2$

$a = 2 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow ab = 6$

$a = 3 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow ab = 12$

$a = 4 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow ab = 20$

$a = 5 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow ab = 30$

$a = 6 \Rightarrow b = 7 \Rightarrow ab = 42$

$a = 8 \Rightarrow b = 9 \Rightarrow ab = 72$

$a = 9 \Rightarrow b = 10 \Rightarrow ab = 90$

Para $a = 10 \Rightarrow b = 11 \Rightarrow ab = 110 > 100$ y el resultado no es válido, luego hay 9 números posibles.

4.1

Basta aplicar la fórmula del cambio de base:

$$\log_a b\,\log_b c\,\log_c d\,\log_d a = \frac{\log b}{\log a}\frac{\log c}{\log b}\frac{\log d}{\log c}\frac{\log a}{\log d} = 1$$

4.2

$$\log_{10}\left(a^2 - 15a\right) = 2 \Leftrightarrow$$

$$a^2 - 15a = 10^2 = 100 \Leftrightarrow$$

$$a^2 - 15a - 100 = 0 \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 100 = (-20)(+5) \\ -15 = -20 + 5 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (a-20)(a+5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 20 \\ a = -5 \end{cases}$$

Efectivamente,

$$a = 20 \Rightarrow a^2 - 15a = 20^2 - 15\cdot 20 = 400 - 300 = 100 = 10^2$$

$$a = -5 \Rightarrow a^2 - 15a = (-5)^2 - 15\cdot(-5) = 25 + 75 = 100 = 10^2$$

4.3

$$9^{x+2} = 240 + 9^x \Leftrightarrow 9^{x+2} - 9^x = 240 \Leftrightarrow 9^x\left(9^2 - 1\right) = 240 \Leftrightarrow$$

$$9^x \cdot 80 = 240 \Leftrightarrow 9^x = \frac{240}{80} = 3 \Rightarrow 3^{2x} = 3 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = 1/2$$

5.1

Si $x \geq 0,\ y \geq 0$

$$\begin{cases} |x| + x + y = 10 \\ x + |y| - y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + x + y = 10 \\ x + y - y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 10 \\ x = 12 \end{cases} \Rightarrow 2\cdot 12 + y = 10 \Rightarrow y = -14$$

y la solución no es aceptable pues contradice la hipótesis $y \geq 0$.

Si $x < 0,\ y < 0$

$$\begin{cases} |x| + x + y = 10 \\ x + |y| - y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + x + y = 10 \\ x - y - y = 12 \end{cases} \Rightarrow y = 10$$

y la solución no es aceptable pues contradice la hipótesis $y < 0$.

Si $x < 0,\ y \geq 0$

$$\begin{cases} |x| + x + y = 10 \\ x + |y| - y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + x + y = 10 \\ x - y - y = 12 \end{cases} \Rightarrow y = 10$$

y la solución no es aceptable pues contradice la hipótesis $y < 0$.

Si $x \geq 0,\ y < 0$

$$\begin{cases} |x| + x + y = 10 \\ x + |y| - y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + x + y = 10 \\ x - y - y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 10 \\ x - 2y = 12 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{-14}{5} \Rightarrow x = \frac{32}{5}$$

Y en este caso la solución sí es aceptable.

Luego $x+y=\frac{32}{5}-\frac{14}{5}=\frac{18}{5}$

5.2

$$p\le x\le 15\Rightarrow\begin{cases}|x-p|=x-p\\ |x-15|=15-x\end{cases}$$

$$p\le x\le 15\Leftrightarrow 0\le x-p\le 15-p\Leftrightarrow -15\le x-p-15\le -p\Rightarrow$$

$$|x-p-15|=-(x-p-15)=15+p-x$$

Luego , si $p\le x\le 15$,

$$f(x)=|x-p|+|x-15|+|x-p-15|=x-p+15-x+15+p-x=$$

$$=30-x$$

Una función decreciente, con un mínimo en $x=15$, $f(15)=30-15=15$

6.1

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)=\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{ab+1}{b}\right)\left(\frac{bc+1}{c}\right)\left(\frac{ac+1}{a}\right)=\left(\frac{a+1}{a}\right)\left(\frac{b+1}{b}\right)\left(\frac{c+1}{c}\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{(ab+1)(bc+1)(ac+1)}{abc}=\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abc}\Leftrightarrow$$

$$(ab+1)(bc+1)(ac+1)=(a+1)(b+1)(c+1)\Leftrightarrow$$

$$a^2b^2c^2+a^2bc+b^2ac+c^2bc+ac+ab+bc+1=abc+ac+bc+c+ab+a+b+1\Leftrightarrow$$

$$13^2+13(a+b+c)=13+a+b+c$$

Definiendo $s=a+b+c$, la ecuación $13^2+13s=13+s$ tiene como solución $s=-13$, y por tanto $|a+b+c|=13$.

7.1

Si x es un entero, $\lfloor x\rfloor=\lceil x\rceil$, y por tanto la ecuación queda $2\lfloor x\rfloor=5\Rightarrow\lfloor x\rfloor=\frac{5}{2}$, lo cual es absurdo pues $\lfloor x\rfloor$ es un número entero.

Si x no es un entero, $\lceil x\rceil=\lfloor x\rfloor+1$, y por lo tanto resolvemos el sistema

$$\begin{cases}\lfloor x\rfloor+\lceil x\rceil=5\\ \lceil x\rceil=\lfloor x\rfloor+1\end{cases}\Rightarrow\lfloor x\rfloor+\lfloor x\rfloor+1=5\Rightarrow 2\lfloor x\rfloor=4\Rightarrow\lfloor x\rfloor=\frac{4}{2}=2\Leftrightarrow 2\le x<3$$

Luego el conjunto solución es $2\le x<3$.

7.2

$$\lfloor\sqrt{x}\rfloor=12\Leftrightarrow 12\le\sqrt{x}<13\Leftrightarrow 12^2\le x<13^2\Leftrightarrow 144\le x<169$$

$$\left\lfloor \sqrt{100x} \right\rfloor = 120 \Leftrightarrow 120 \le \sqrt{100x} < 121 \Leftrightarrow 120^2 \le 100x < 121^2 \Leftrightarrow \frac{120^2}{100} \le x < \frac{121^2}{100} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{120}{10}\right)^2 \le x < \left(\frac{121}{10}\right)^2 \Leftrightarrow (12)^2 \le x < (12.1)^2$$

$$P\left(\left\lfloor \sqrt{100x} \right\rfloor\right) = \frac{(12.1)^2 - (12)^2}{169-144} = \frac{(12.1+12)(12.1-12)}{25} = \frac{(24.1)(0.1)}{25} = \frac{2.41}{25} = \frac{241}{2500}$$

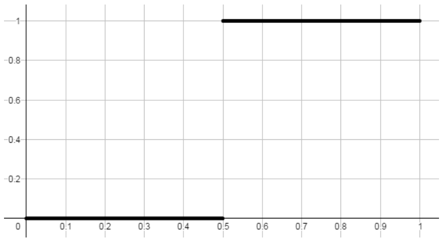
7.3

Sea $f(x) = \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 6x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor$. Nos piden determinar la imagen de esta función. La función es claramente creciente.

Si $x = n$ un número entero, $f(n) = \lfloor 2n \rfloor + \lfloor 4n \rfloor + \lfloor 6n \rfloor + \lfloor 8n \rfloor = 20n$

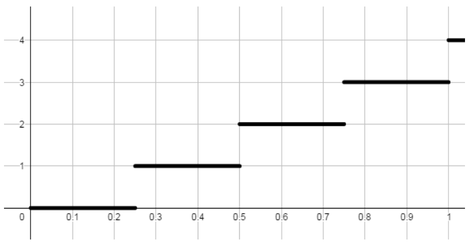
Por separado, las funciones $\lfloor 2x \rfloor, \lfloor 4x \rfloor, \lfloor 6x \rfloor, \lfloor 8x \rfloor$ son todas contracciones en el eje X de la función $\lfloor x \rfloor$,

En el dominio $0 \le x \le 1$, la función $\lfloor 2x \rfloor$ tiene como gráfica:



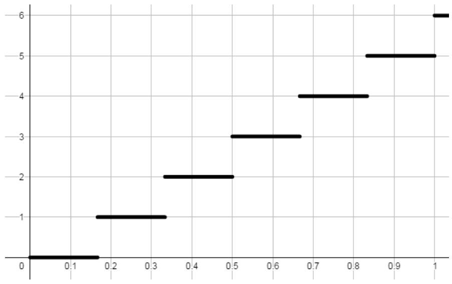
En donde el dominio salta en intervalos de longitud $1/2$

La función $\lfloor 4x \rfloor$ tiene como gráfica:



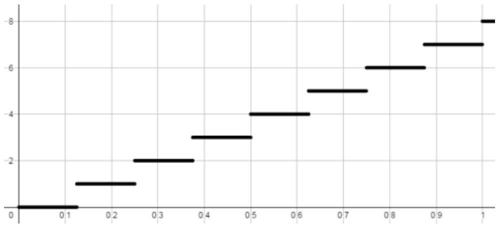
En donde el dominio salta en intervalos de longitud $1/4$

La función $\lfloor 6x \rfloor$ tiene como gráfica:



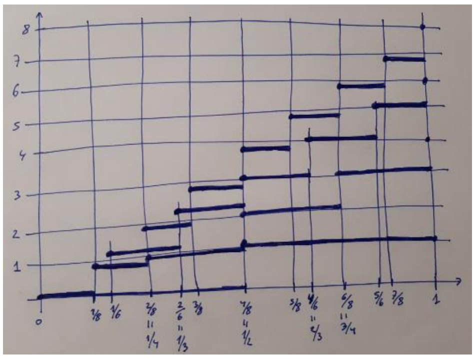
En donde el dominio salta en intervalos de longitud $1/6$

La función $\lfloor 8x \rfloor$ tiene como gráfica:



En donde el dominio salta en intervalos de longitud $1/8$

Teniendo en cuenta las gráficas anteriores, podemos determinar la imagen de $f(x)$ para $0 \le x \le 1$. Para ello es muy útil dibujarlas todas superpuestas:



$0 \le x < 1/8 \Rightarrow f(x) = 0+0+0+0 = 0$ $\quad$ $1/8 \le x < 1/6 \Rightarrow f(x) = 1+0+0+0 = 1$

$1/6 \le x < 1/4 \Rightarrow f(x) = 1+1+0+0 = 2$ $\quad$ $1/4 \le x < 1/3 \Rightarrow f(x) = 2+1+1+0 = 4$

$1/3 \le x < 3/8 \Rightarrow f(x) = 2+2+1+0 = 5$ $\quad$ $3/8 \le x < 1/2 \Rightarrow f(x) = 3+2+1+0 = 6$

$1/2 \le x < 5/8 \Rightarrow f(x) = 4+3+2+1 = 10$ $\quad$ $5/8 \le x < 2/3 \Rightarrow f(x) = 5+3+2+1 = 11$

$2/3 \le x < 3/4 \Rightarrow f(x) = 5+4+2+1 = 12$ $\quad$ $3/4 \le x < 5/6 \Rightarrow f(x) = 6+4+3+1 = 14$

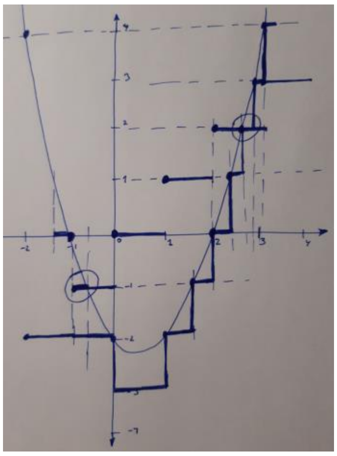
$5/6 \le x < 7/8 \Rightarrow f(x) = 6+5+3+1 = 15$ $\quad$ $7/8 \le x < 1 \Rightarrow f(x) = 7+5+3+1 = 16$

$f(1) = 20$

Luego la función recorre todos los números entre el 0 y el 20 excepto 3, 7, 8, 9, 13, 17, 18 y 19. Es decir, recorre 12 números de cada 20, y puesto que $1000 = 50 \cdot 20$, recorrerá $50 \cdot 12 = 600$ números del total de 1000.

7.4

Representar la gráfica de la función $f(x) = \lfloor x \rfloor$ no ofrece ningún problema, ni tampoco representar la función $f(x) = \lfloor x^2 - x - 2 \rfloor$ superponiéndola a la de la parábola $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$



Visualmente vemos que hay dos posibles intervalos solución:
El primero está en el intervalo $-1 \leq x < 0$

$$x^2 - x - 2 = -1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ y el intervalo es } \left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$$

Y el segundo se encuentra en $2 \leq x < 3$

$$x^2 - x - 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$$

$$x^2 - x - 2 = 3 \rightarrow x = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$$

Y el intervalo es $\left[\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$

La solución es $\left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$

7.5
Sumando las tres ecuaciones, y teniendo en cuenta la identidad $\lfloor x \rfloor + \{x\} = x$, tenemos:

$$x + \lfloor y \rfloor + \{z\} + \{x\} + y + \lfloor z \rfloor + \lfloor x \rfloor + \{y\} + z = 200.0 + 190.1 + 178.8 \Leftrightarrow$$

$$x + x + y + y + z + z = 568.9 \Leftrightarrow 2x + 2y + 2z = 568.9 \Leftrightarrow x + y + z = 568.9/2 = 284.45$$

Ahora, restando la primera ecuación a esta última, obtenemos:

$$\{y\} + \lfloor z \rfloor = 284.45 - 200.0 = 84.45 \Rightarrow \begin{cases} \{y\} = 0.45 \\ \lfloor z \rfloor = 84 \end{cases}$$

De la misma manera, restando la segunda obtenemos:

$$\{z\} + \lfloor x \rfloor = 94.35 \Rightarrow \begin{cases} \{z\} = 0.35 \\ \lfloor x \rfloor = 94 \end{cases}$$

Y, finalmente, restando la tercera:

$$\{x\}+\lfloor y\rfloor=105.65\Rightarrow\begin{cases}\{x\}=0.65\\ \lfloor y\rfloor=105\end{cases}$$

Así pues, $x=\lfloor x\rfloor+\{x\}=94+0.65=94.65$, $y=\lfloor y\rfloor+\{y\}=105+0.45=105.45$, $z=\lfloor z\rfloor+\{z\}=84+0.35=84.35$.

Fuente de la solución: 104 Number Theory Problems From the Training of the USA IMO Team (Andreescu, Andrica, Feng, 2007) pág. 52.

7.6

Sea $a_n=\left\lfloor\dfrac{n^2}{2005}\right\rfloor$. Está claro que la sucesión $a_1,a_2,...,a_{2005}$ es creciente.

Observamos que:

$$\frac{(n+1)^2}{2005}-\frac{n^2}{2005}=\frac{(n+1)^2-n^2}{2005}=\frac{(n+1+n)(n+1-n)}{2005}=\frac{2n+1}{2005}$$

Dividimos nuestra sucesión en dos partes:

$$\{a_1,a_2,...,a_{2005}\}=\{a_1,a_2,...,a_{1001}\}\cup\{a_{1002},a_{1003},...,a_{2005}\}$$

Si $n>1002\Rightarrow 2n>2004\Rightarrow 2n+1>2005\Rightarrow\dfrac{2n+1}{2005}>1$

Luego $n\geq 1002\Rightarrow a_{n+1}>a_n\Rightarrow a_{n+1}\neq a_n$ y por tanto el conjunto $\{a_{1002},a_{1003},...,a_{2005}\}$ consta de $2005-1002+1=1004$ números diferentes.

Si $n<1002\Rightarrow 2n<2004\Rightarrow 2n+1<2005\Rightarrow\dfrac{2n+1}{2005}<1$, y por tanto los elementos de $\{a_1,a_2,...,a_{1001}\}$ recorren todos los valores entre a_1 y a_{1001}.

$$a_1=\left\lfloor\frac{1^2}{2005}\right\rfloor=0,\quad a_{1001}=\left\lfloor\frac{1001^2}{2005}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{1002001}{2005}\right\rfloor=\lfloor 499.751\rfloor=499$$

$$a_{1002}=\left\lfloor\frac{1002^2}{2005}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{1004004}{2005}\right\rfloor=\lfloor 500.75\rfloor=500\neq a_{1001}$$

Luego en $\{a_1,a_2,...,a_{1001}\}$ hay 500 números diferentes, y en total hay $500+1004=1504$ números diferentes.

Fuente de la solución: 104 Number Theory Problems From the Training of the USA IMO Team (Andreescu, Andrica, Feng, 2007) pág. 53.

7.7

Primera versión.

La clave para resolver este problema está en observar la sucesión siguiente:

$$11^2 = 121$$
$$111^2 = 12321$$
$$1111^2 = 1234321$$
$$11111^2 = 123454321$$
$$\ldots$$

Luego $11111.11^2 = 123456765.4321 \approx 123456789$ y por tanto
$11111.11 = \sqrt{123456765.4321} \approx \sqrt{123456789}$
Y finalmente, $\left\{\sqrt{123456789}\right\} \approx \{11111.11\} = 0.11 \approx \dfrac{1}{9} \Rightarrow n = 9$

Segunda versión. El mismo procedimiento, utilizando desigualdades:
$11111.11^2 = 123456765.4321 < 123456789$
$11111.1111^2 = 123456789.87654321 > 123456789$

Luego
$11111.11 < \sqrt{123456789} < 11111.1111 \Rightarrow$
$\dfrac{1}{10} < 0.11 = \{11111.11\} < \left\{\sqrt{123456789}\right\} < \{11111.1111\} = 0.1111 < \dfrac{1}{9}$

Fuente de la segunda versión: 104 Number Theory Problems From the Training of the USA IMO Team (Andreescu, Andrica, Feng, 2007) pág. 52.

7.8
$2 < a^2 < 3 \Rightarrow 1 < \sqrt{2} < a < \sqrt{3} < 2 \Rightarrow 1 < a < 2 \Rightarrow \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{a} < 1 \Rightarrow \left\{a^{-1}\right\} = a^{-1}$.
$2 < a^2 < 3 \Rightarrow \left\{a^2\right\} = a^2 - 2$
$\left\{a^{-1}\right\} = \left\{a^2\right\} \Leftrightarrow a^{-1} = a^2 - 2 \Rightarrow 1 = a\left(a^2 - 2\right) \Rightarrow a^3 - 2a - 1 = 0$

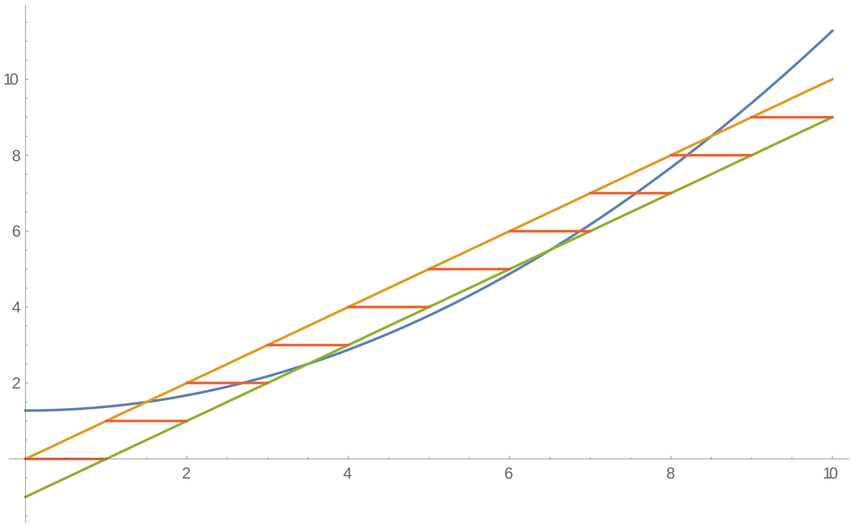
Por tanteo vemos que $a = -1$ es solución de la ecuación anterior y por tanto
$0 = a^3 - 2a - 1 = (a+1)\left(a^2 - a - 1\right)$
Puesto que $a = -1$ no es un resultado válido pues $a > 0$ por hipótesis, tenemos que
$a^2 - a - 1 = 0 \Leftrightarrow a^2 = a + 1 \Rightarrow$
$a^4 = (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 = a + 1 + 2a + 1 = 3a + 2$
$a^8 = (3a+2)^2 = 9a^2 + 12a + 4 = 9(a+1) + 12a + 4 = 9a + 9 + 12a + 4 = 21a + 13$
$a^{12} = a^4 a^{12} = (3a+2)(21a+13) = 63a^2 + 81a + 26 = 63(a+1) + 81a + 26 =$
$= 63a + 63 + 81a + 26 = 144a + 89$
Finalmente,
$a^2 = a + 1 \Rightarrow a^2 - 1 = a$
$a^{12} - 144a^{-1} = 144a + 89 - 144a^{-1} = 144\left(a - \dfrac{1}{a}\right) + 89 = 144\left(\dfrac{a^2 - 1}{a}\right) + 89 = 144\left(\dfrac{a}{a}\right) + 89 =$
$= 144 + 89 = 233$

7.9

$$4x^2-40\lfloor x\rfloor+51=0 \Leftrightarrow 4x^2+51=40\lfloor x\rfloor \Leftrightarrow \frac{4x^2+51}{40}=\lfloor x\rfloor \quad (*)$$

Observamos que $x-1\le\lfloor x\rfloor\le x$

Luego $x-1\le\dfrac{4x^2+51}{40}\le x$



Por la parte superior, $\dfrac{4x^2+51}{40}=x \Leftrightarrow 4x^2+51=40x \Leftrightarrow x=\begin{cases}1.5\\8.5\end{cases}$

Por la parte inferior, $\dfrac{4x^2+51}{40}=x-1 \Leftrightarrow x=\begin{cases}3.5\\6.5\end{cases}$

Así pues, los intervalos en los que puede haber solución son $1.5\le x\le 3.5$ y $6.5\le x\le 8.5$.
Vamos a ir comprobando los posibles valores:

$1.5\le x<2 \Rightarrow \lfloor x\rfloor=1 \Rightarrow \dfrac{4x^2+51}{40}=1 \Leftrightarrow 4x^2+51=40 \Leftrightarrow 4x^2=40-51$ imposible

$2\le x<3 \Rightarrow \lfloor x\rfloor=2 \Rightarrow \dfrac{4x^2+51}{40}=2 \Leftrightarrow 4x^2+51=80 \Leftrightarrow 4x^2=80-51=29 \Rightarrow$

$x^2=\dfrac{29}{4} \Rightarrow x\approx 2.69$ es válido

$3\le x<3.5 \Rightarrow \lfloor x\rfloor=3 \Rightarrow \dfrac{4x^2+51}{40}=3 \Leftrightarrow 4x^2+51=120 \Leftrightarrow 4x^2=69 \Rightarrow$

$x^2=\dfrac{69}{4} \Rightarrow x\approx 4.15$ no es válido.

$6.5\le x<7 \Rightarrow \lfloor x\rfloor=6 \Rightarrow \dfrac{4x^2+51}{40}=6 \Leftrightarrow 4x^2+51=240 \Leftrightarrow 4x^2=189 \Rightarrow$

$x^2=\dfrac{189}{4} \Rightarrow x\approx 6.87$ es válido.

$7\le x<8 \Rightarrow \lfloor x\rfloor=7 \Rightarrow \dfrac{4x^2+51}{40}=7 \Leftrightarrow 4x^2+51=280 \Leftrightarrow 4x^2=229 \Rightarrow$

$x^2 = \dfrac{229}{4} \Rightarrow x \approx 7.56$ es válido.

$8 \le x < 8.5 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 8 \Rightarrow \dfrac{4x^2+51}{40} = 8 \Leftrightarrow 4x^2+51 = 320 \Leftrightarrow 4x^2 = 269 \Rightarrow$

$x^2 = \dfrac{269}{4} \Rightarrow x \approx 8.20$ es válido.

Las soluciones son $x = \dfrac{\sqrt{29}}{2}, \dfrac{\sqrt{189}}{2}, \dfrac{\sqrt{229}}{2}, \dfrac{\sqrt{269}}{2}$

7.10

$$\lfloor x \rfloor^2 + \lfloor y \rfloor^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} \lfloor x \rfloor = 0, \lfloor y \rfloor = \pm 5 & (a) \\ \lfloor x \rfloor = \pm 5, \lfloor y \rfloor = 0 & (b) \\ \lfloor x \rfloor = \pm 3, \lfloor y \rfloor = \pm 4 & (c) \\ \lfloor x \rfloor = \pm 4, \lfloor y \rfloor = \pm 3 & (d) \end{cases}$$

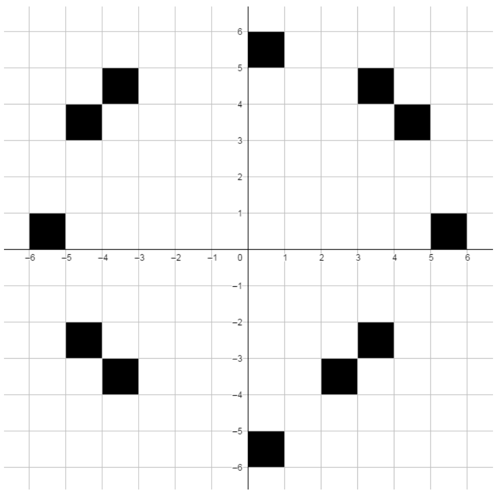
a) $\lfloor x \rfloor = 0, \lfloor y \rfloor = \pm 5 \Leftrightarrow \begin{cases} \lfloor x \rfloor = 0, \lfloor y \rfloor = 5 \Leftrightarrow 0 \le x < 1, 5 \le y < 6 & (a_1) \\ \lfloor x \rfloor = 0, \lfloor y \rfloor = -5 \Leftrightarrow 0 \le x < 1, -5 \le y < -4 & (a_2) \end{cases}$

b) $\lfloor x \rfloor = \pm 5, \lfloor y \rfloor = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lfloor x \rfloor = 5, \lfloor y \rfloor = 0 \Leftrightarrow 5 \le x < 6, 0 \le y < 1 & (b_1) \\ \lfloor x \rfloor = -5, \lfloor y \rfloor = 0 \Leftrightarrow -5 \le x < -4, 0 \le y < 1 & (b_1) \end{cases}$

c) $\lfloor x \rfloor = \pm 3, \lfloor y \rfloor = \pm 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \lfloor x \rfloor = 3, \lfloor y \rfloor = 4 \Leftrightarrow 3 \le x < 4 \ , \ 4 \le y < 5 & (c_1) \\ \lfloor x \rfloor = 3, \lfloor y \rfloor = -4 \Leftrightarrow 3 \le x < 4 \ , \ -4 \le y < -3 & (c_2) \\ \lfloor x \rfloor = -3, \lfloor y \rfloor = 4 \Leftrightarrow -3 \le x < -2 \ , \ 4 \le y < 5 & (c_3) \\ \lfloor x \rfloor = -3, \lfloor y \rfloor = -4 \Leftrightarrow -3 \le x < -2 \ , \ -4 \le y < -3 & (c_4) \end{cases}$

d) $\lfloor x \rfloor = \pm 4, \lfloor y \rfloor = \pm 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \lfloor x \rfloor = 4, \lfloor y \rfloor = 3 \Leftrightarrow 4 \le x < 5 \ , \ 3 \le y < 4 & (d_1) \\ \lfloor x \rfloor = 4, \lfloor y \rfloor = -3 \Leftrightarrow 4 \le x < 5 \ , \ -3 \le y < -2 & (d_2) \\ \lfloor x \rfloor = -4, \lfloor y \rfloor = 3 \Leftrightarrow -4 \le x < -3, \ 3 \le y < 4 & (d_3) \\ \lfloor x \rfloor = -4, \lfloor y \rfloor = -3 \Leftrightarrow -4 \le x < -3 \ , \ -3 \le y < -2 & (d_4) \end{cases}$

La región R está formada por 12 cuadritos de lado unidad:



Fuentes.

2.1 https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/1996_AIME_Problems/Problem_5
3.2 pdf "AIME Solution Set 2015 David Altizio January 12, 2018"
5.1 pdf "AIME Solution Set 2015 David Altizio January 12, 2018"
3.3 THE CONTEST PROBLEM BOOK vol I compiled and with solutions by Charles T. Salkind
3.4 THE CONTEST PROBLEM BOOK vol IV
7.5 104 Number Theory Problems From the Training of the USA IMO Team (Andreescu, Andrica, Feng, 2007) pág. 52
7.6 104 Number Theory Problems From the Training of the USA IMO Team (Andreescu, Andrica, Feng, 2007) pág. 53
7.7 104 Number Theory Problems From the Training of the USA IMO Team (Andreescu, Andrica, Feng, 2007) pág. 53
7.8 104 Number Theory Problems From the Training of the USA IMO Team (Andreescu, Andrica, Feng, 2007) pág. 53
7.9 104 Number Theory Problems From the Training of the USA IMO Team (Andreescu, Andrica, Feng, 2007) pág. 53

Apéndice.

El "problem-solving", tal y como yo lo entiendo.

La resolución de poblemas, el llamado "**problem-solving**" es la experiencia más apasionante de las matemáticas. Los "ejercicios", tan repetitivos propios de los libros de texto, pasan ahora a ser "problemas", y cada problema es una aventura única, es un enemigo desconocido al que el estudiante es llamado a enfrentarse con valentía. **La resolución de problemas no es muy importante ni poco importante, es lo único importante en matemáticas**. Pero el problem-solving no es para pusilánimes. Dejemos algunas cosas claras:

1. El problem-solving requiere tiempo: Cada problema exige tiempo para pensarlo, tiempo para resolverlo, y en la mayoría de las veces, tiempo, mucho tiempo para estudiar detenidamente la solución propuesta cuando hemos fracasado en su resolución. Solo así se aprende, día tras día, semana tras semana, año tras año. Solo después de muchos fracasos llegan los primeros éxitos.
Todos los problemas de los libros de "Toomates Cool·lección" se ofrecen siempre con las soluciones totalmente desarrolladas, pero no mires nunca la solución, no te rindas, hasta haber dedicado al problema todo el tiempo necesario... y un poco más.

2. La frustración es inevitable, pero la impotencia que uno siente al fracasar intentando resolver problemas demasiado difíciles puede llegar a quemar al estudiante de matemáticas, por ello es fundamental **seleccionar problemas de dificultad adecuada**.

Todos los problemas de los libros de "Toomates Cool·lección" se presentan siempre indicando su dificultad: **MF**: Muy fácil, **F**: Fácil, **M**: Dificultad media, **D**: Difícil, **MD**: Muy difícil.

Aunque hay que dejar claro que el grado de dificultad de un problema es algo muy subjetivo: Aquello que alguien puede considerar difícil puede ser muy fácil para otro.

3. Todo juego exige unas reglas, reglas que deben estar claras. Es muy frustrante (aunque muy enriquecedor) enfrentarse durante horas a un problema para finalmente descubrir que se están utilizando técnicas o conceptos que uno desconoce. La sensación de haber perdido el tiempo miserablemente puede ser muy desoladora. **Las técnicas y conceptos teóricos que se utilizan en la resolución de los problemas deben estar claros**.

Los libros de problemas de "Toomates Cool·lección" se acompañan con los "libros de teoría" en donde se recopilan de una forma ordenada todos los contenidos teóricos utilizados en las resolución de los problemas.

4. La resolución de problemas supone en el estudiante **un nivel importante de iniciativa y autonomía**. Los libros de "Toomates Cool·lección" son un recurso más que el estudiante tiene a su disposición en su biblioteca personal, biblioteca que deberá enriquecer con la adquisición de infinidad de otros recursos encontrados en Internet, y muchos libros, gratuitos y comprados, digitales y en papel.

5. El problem-solving requiere la máxima concentración. Cuando nos enfrentamos a un problema, ¡el cerebro encendido y el móvil apagado!

Las competinciones AMC, un excelente sendero hacia las IMO detrás de un mar de siglas.

AMC (American Mathematics Competitions)
Es el programa de competiciones matemáticas organizado por la MAA (Mathematical Association of America) para la selección del equipo que representará a USA en la IMO. Organiza el sistema de pruebas selectivas AMC10/12, AIME y USAMO.

El sistema escolar USA consta de 12 cursos ("grades") divididos en 3 niveles, que corresponden a las siguientes edades: **Elementary school (**Preschool: 4-5, Kindergarten: 5-6, 1st Grade: 6-7, 2nd Grade: 7-8, 3rd Grade: 8-9, 4th Grade: 9-10, 5th Grade: 10-11) **Middle school** (6th Grade: 11-12, 7th Grade: 12-13, 8th Grade: 13-14), **High school** (9th Grade "Freshman":14-15, 10th Grade "Sophomore": 15-16, 11th Grade "Junior": 16-17, 12th Grade "Senior": 17-18)

AHSME (American High School Mathematics Examination) (1949-2000)
Es la antigua competición matemática para los grados 9 a 12. A partir del año 2000 desaparece al bifurcarse en AMC10 (Grado 10) y AMC12 (Grado 12).
Consta de 30 preguntas "tipo test" con 5 posibles respuestas, para resolver en 90 minutos.
Los estudiantes que alcanzan los 100 puntos o más de los 150 posibles obtienen el "**AHSME Honor Roll**", y son invitados a participar en la AIME (American Invitational Mathematics Examination). Se suelen clasificar unos 4000 estudiantes anualmente.
Para alcanzar estos 100 puntos, los estudiantes deben contestar correctamente aproximadamente la mitad de las 30 preguntas y dejar en blanco el resto, pues las respuestas equivocadas conllevan severas penalizaciones.
Las calculadoras se permiten a partir de 1994, aunque no son necesarias.

AMC8 (American Mathematics Competition Grade 8)
Prueba de 25 preguntas "tipo test" en 40 minutos, para estudiantes de Grado 8 (13-14 años, el 2º ESO en España).
Cubre (aunque no está limitado a ellos) los temas propios del currículum de la "Middle School": Combinatoria, probabilidad, estimación, razonamiento de proporcionalidad, geometría elemental incluyendo teorema de Pitágoras, visión espacial, aplicaciones en la vida cotidiana, lectura e interpretación de gráficos y tablas.
Además, en las últimas preguntas pueden aparecer funciones y ecuaciones lineales y cuadráticas, geometria cartesiana y algunos elementos de álgebra básica.

AMC10/12 (American Mathematics Competition Grades 10 & 12)
Prueba de 25 preguntas "tipo test" en 75 minutos.
La AMC10 está pensada para estudiantes hasta el grado 10 (el 4º de ESO en España), y 17.5 años de edad como máximo, y cubre el currículum hasta dicho grado.
La AMC12 está pensada para estudiantes hasta el grado 12 (el 2º de Bachillerato en España), y cubre todo el currículum de la "high school", incluyendo trigonometría, álgebra avanzada, geometría avanzada, pero excluyendo el calculus.

Existen dos versiones de dichas pruebas: A y B, con la misma estructura y el mismo nivel de dificultad. Las preguntas son diferentes porque se presentan en fechas diferentes. Los estudiantes se pueden presentar a ambas pruebas.

AIME (American Invitational Mathematics Examination)
Prueba de 15 preguntas en 3 horas. Las respuestas son siempre números positivos de tres dígitos. Son convocados los mejores estudiantes en AMC10 y/o AMC12. Su primera edición fue en el año 1983.

USAMO y USAJMO (USA Mathematical Olympiad y USA Junior Mathematical Olympiad)
Prueba de 6 preguntas en dos días, 9 horas de duración.
A la USAMO son convocados los mejores estudiantes en AMC12 y AIME (alrededor del 5% superior). A la USAJMO son convocados los mejores estudiantes en AMC10 y AIME (alrededor del 2.5% superior). Solo pueden presentarse estudiantes americanos y estudiantes en escuelas americanas o en Canadá.
Los 6 estudiantes con mejores puntuaciones en el combinado AMC10/12, AIME y USAMO forman el equipo que representa a USA en la Annual International Mathematical Olympiad (IMO)

IMO (International Mathematical Olympiad)
Es una competición anual para estudiantes preuniversitarios y es la más antigua de las Olimpiadas Internacionales de Ciencias.1 La primera IMO se celebró en Rumania en 1959. Desde entonces se ha celebrado cada año. Cerca de cien países de todo el mundo envían equipos de un máximo de seis estudiantes junto con un líder de equipo, un tutor - o colíder - y observadores. La competición consta de dos cuestionarios con tres problemas cada uno. Cada pregunta da una puntuación máxima de 7 puntos, con una puntuación máxima total de 42 puntos. La prueba se desarrolla en dos días, en cada uno de los cuales el concursante dispone de cuatro horas y media para resolver tres problemas. Estos se escogen entre varias áreas de la matemática vista en secundaria, los cuales pueden clasificarse *grosso modo* en geometría, teoría de números, álgebra y combinatoria. No se requieren conocimientos de matemáticas superiores y de las soluciones se espera que sean cortas y elegantes. Encontrarlas requiere, sin embargo, ingenio excepcional y habilidad matemática.