PROBABILIDAD

Enfoque *Problem-solving*

Gerard Romo Garrido

TooMates
Cool·lección

Toomates Cool·lección

Los documentos de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho.
Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "**licencias digitales**" con las que las editoriales pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo libro, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.
Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de licencias digitales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf".

El conocimiento no es una mercancía.

El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las editoriales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de unos libros de texto que actualmente son muy mediocres, y no mediante retorcidas técnicas comerciales.

toomates@gmail.com

Actualmente, **Toomates Cool·lección** consta de los siguientes libros:

Geometría axiomática:

GA	**Geometría Axiomática**	pdf	1 2 ... 23 portada
PG	**Problemas de Geometría**	pdf	1 2 3 4 5 6 7

Problem-solving:

AR	**Teoría de números**	pdf	1 2
PT	**Trigonometría**	pdf	doc
DE	**Desigualdades**	pdf	doc
PC	**Números complejos**	pdf	doc
PA	**Álgebra** (en preparación)	pdf	doc
PC	**Combinatoria** (en preparación)	pdf	doc
PR	**Probabilidad** (en preparación)	pdf	doc

Libros de texto (En catalán)

AG	**Àlgebra**	pdf	1 2
FU	**Funcions**	pdf	doc
GN	**Geometria analítica**	pdf	1 2
TR	**Trigonometria**	pdf	doc
CO	**Nombres complexos**	pdf	doc
AL	**Àlgebra Lineal** 2n batxillerat	pdf	doc
GL	**Geometria Lineal** 2n batxillerat	pdf	doc
CI	**Càlcul Infinitesimal** 2n batxillerat	pdf	1 2
PL	**Programació Lineal** 2n batxillerat	pdf	doc

Recopilaciones de problemas

SE	**Compendium OME 2005-2019**	pdf	
SA	**Compendium AIME 1983-2019**	pdf	
ST	**Compendium PAU TEC 1998-2019**	pdf	
SC	**Compendium PAU CCSS 1998-2019**	pdf	
PM	**Problemas de Matemáticas**	pdf	doc

Versión de este documento: 28/03/2020

www.toomates.net

Índice

Este documento está en proceso de desarrollo

1 La Ley de LaPlace (Problemas de recuento).

La ley de LaPlace.

Los problemas más sencillos de probabilidad se reducen a una cuestión de recuento de casos equiprobables:

$$\Omega = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$$

Ley de LaPlace: $P(X) = \dfrac{\#(\mathrm{X})}{\#(\Omega)}$

donde $\#(\mathrm{X})$ indica "número de elementos de X".

1.1 MF

Lanzamos un dado al aire.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que salga un seis?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que salga par?

Una estrategia fundamental para resolver problemas de recuento es etiquetar bien los elementos implicados en el problema. Para ello nos podemos servir de letras iniciales, subíndices o cualquier otra técnica que nos sea cómoda. Veamos en el siguiente ejemplo el uso de letras iniciales y subíndices:

1.2 MF

Bob y Alicia tienen cada uno de ellos una bolsa con cinco bolas, de colores azul, verde, naranja, rojo y marrón. Alicia toma aleatoriamente una bola de su bolsa y la deja en la bolsa de Bob. Entonces Bob toma una bola de su bolsa y la deja en la bolsa de Alicia. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolsas tengan el mismo contenido?

AMC 10B 2006 #17

Solo en los problemas más fáciles se puede contar el número de casos de forma directa. Para resolver los problemas más difíciles es necesario aplicar las fórmulas de recuento de la combinatoria. Es decir, en este contexto, la mayoría de problemas de probabilidad se reducen resolver problemas de combinatoria, y por tanto es muy importante dominar las fórmulas y técnicas de combinatoria del **Tema 1** de PC.

1.3 M

Una caja contiene 11 bolas, numeradas $1, 2, 3, \ldots, 11$. Si tomamos aleatoriamente 6 de estas bolas simultáneamente, ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea un número impar?

(A) $\dfrac{100}{231}$ (B) $\dfrac{115}{231}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{118}{231}$ (E) $\dfrac{6}{11}$

ASHME 1984 #19

1.4 [F]

Jenn elige aleatoriamente un número J de entre $1, 2, 3, ..., 19, 20$, y después Bela elige aleatoriamente un número B de entre $1, 2, 3, ..., 19, 20$ distinto de J. Determina la probabilidad de que el valor de $B - J$ sea como mínimo 2.

AIME I 2019 #2

1.5 [MF]

Tomamos aleatoriamente un conjunto de tres puntos del siguiente esquema:

Todos los conjuntos de tres puntos tienen la misma probabilidad de ser escogidos. ¿Cuál es la probabilidad de que estos tres puntos estén alineados?

AMC 10A 2004 #5

1.6 [MF]

Marcamos tres fichas con una X y otras dos con una O. Las cinco fichas se mezclan aleatoriamente en fila. ¿Cuál es la probabilidad de que obtengamos “XOXOX”?

AMC 10A 2005 #9

1.7 [MF]

Un sobre contiene ocho billetes: Dos de 1$, dos de 5$, dos de 10$ y dos de 20$. Se toman dos billetes sin reemplazo. ¿Cuál es la probabilidad de que sumen 20$ o más?

AMC 10B 2005 #15

1.8 [MF]

Sea S el conjunto de permutaciones de los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 en las que el primer elemento no es 1. Se toma una de estas permutaciones aleatoriamente. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo elemento sea 2?

AMC12B 2003 #19

El recuento no solo consiste en contar los casos diferentes, sino también tener en cuenta que estos tienen que ser equiprobables. Cuando tratamos con elementos “iguales”, por ejemplo cartas diferentes pero pintadas del mismo color, puede dar lugar a equivocaciones. Una buena táctica es numerar los elementos. El siguiente problema puede ser muy instructivo en este sentido.

1.9 ^{M}

Kathy tiene 5 cartas rojas y 5 cartas verdes. Las mezcla y toma 5 al azar, que coloca alineadas. Digamos que Kathy quedará contenta si y solo si todas las cartas rojas tomadas están han quedado adyacentes, y todas las cartas verdes han quedado igualmente adyacentes. Por ejemplo, si sale “RRVVV”, “VVVVR” o “RRRRR” quedará contenta, pero si sale “RRRVR” no lo será. ¿Cuál es la probabilidad de que quede contenta?

AIME I 2018 #3

2 Probabilidad con longitudes, áreas, volúmenes...

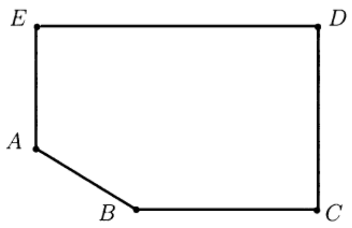
2.1 [F]

Se toma aleatoriamente un punto (x , y) del interior del rectángulo de vértices (0,0), (4,0), (4,1) y (0,1). ¿Cuál es la probabilidad de que x<y?

AMC 10A 2003 #12

2.2 [M]

Se elige aleatoriamente un punto P del interior del pentágono de vértices A=(0,2), B=(4,0), C=($2\pi+1$,0), D=($2\pi+1$,4) y E=(0,4).

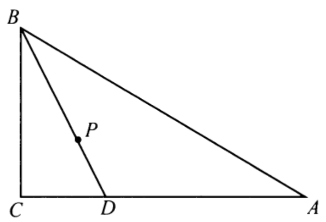


¿Cuál es la probabilidad de que $\angle APB$ sea obtuso?

AMC12 2001 #17

2.3

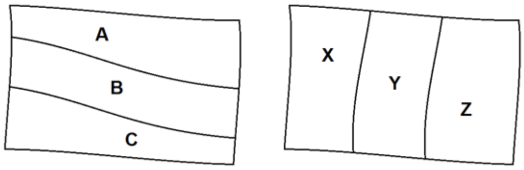
Sea un triángulo ΔABC rectángulo, con $\angle ACB$ ángulo recto, tal que $\angle ABC = 60º$ y $AB = 10$. Tomamos un punto P aleatoriamente en el interior de ΔABC, y extendemos $\overline{BP}$ hasta cortar $\overline{AC}$ en D. ¿Cuál es la probabilidad de que $BD > 5\sqrt{2}$?



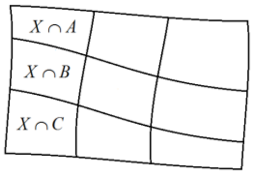
AMC 12A 2002 #22

3 Probabilidad condicional.

Ahora trabajaremos con dos particiones diferentes. Cada partición puede constar de cualquier número de elementos, pero para no sobrecargar la notación vamos a suponer que son de tres elementos: Por un lado, $\Omega = A \cup B \cup C$, y por otro lado, $\Omega = X \cup Y \cup Z$.



La probabilidad de $P(X)$ la podemos representar mediante una unión:



$$P(X) = P(X \cap A) + P(X \cap B) + P(X \cap C)$$

3.1 F

Tenemos dos dados con caras numeradas del 1 al 6, pero cargados de forma que la probabilidad de obtener un número k es directamente proporcional a k. Determina la probabilidad de obtener un 7 lanzando los dos dados.

AIME I 2016 #2

Puede ocurrir que, sabiendo $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, las probabilidades de X, Y, Z solo las sepamos de forma condicional:

Definimos $P(X/A)$ como la **probabilidad de que suceda X sabiendo que ha sucedido A**, y es igual a:

$$P(X/A) = \frac{P(X \cap A)}{P(A)} \quad \text{si } P(A) \neq 0$$

Esta definición genera una probabilidad para la cual

$$P(A/A) = \frac{P(A \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

$$P(\neg A/A) = \frac{P(\neg A \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\varnothing)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0$$

Ahora podemos obtener una fórmula que nos permitirá calcular $P(X)$ en función de las probabilidades condicionales, también llamada **Fórmula de la Probabilidad Total**:

$$P(X) = P(X \cap A) + P(X \cap B) + P(X \cap C) =$$
$$P(X/A) \cdot P(A) + P(X/B) \cdot P(B) + P(X/C) \cdot P(C)$$

Y también podemos obtener la denominada **Teorema de Bayes**:

$$P(A/X) = \frac{P(A \cap X)}{P(X)} = \frac{P(X \cap A)}{P(X)} = \frac{P(X/A)\,P(A)}{P(X)}$$

3.2 MF

Sobre una mesa tengo tres cajas con botones; la primera caja tiene 3 botones, la segunda 5 y la tercera 4. Cada una de las cajas contiene un solo botón rojo. Si elijo al azar una caja y saco de ella un botón al azar:
a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un botón rojo?
b) Si he sacado un botón rojo, ¿Cuál es la probabilidad de que pertenezca a la primera caja?

PAU EUSKADI 2019 #A5

3.3 M

Supongamos que dos equipos, A y B, juegan una competición deportiva. Se declara vencedor el primer equipo que gana tres partidos. Los dos equipos tienen la misma probabilidad de ganar, y todos los partidos son independientes. Supongamos que el equipo B gana el segundo partido y que al final, el equipo A obtiene la victoria. ¿Cuál es la probabilidad que el equipo B ganara el primer partido?

AMC10A 2005 #18

3.4 M

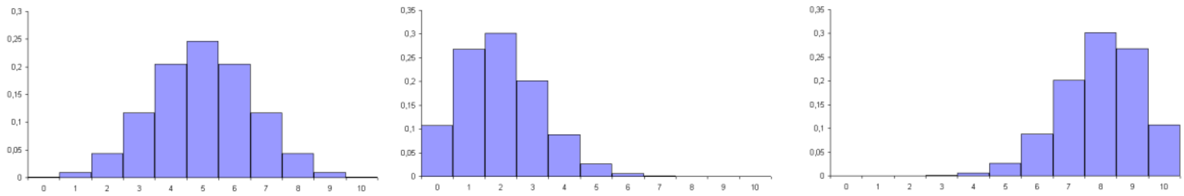
Los equipos T_1, T_2, T_3, T_4 llegan a los play-offs. En la semifinal juegan T_1 contra T_4, y T_2 contra T_3. Los ganadores de estos dos partidos jugarán la final, el uno contra el otro, para determinar el campeón. Cuando T_i juega contra T_j, la probabilidad que T_i gane es $\frac{i}{i+j}$, y los eventos son todos independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que T_4 quede campeón?

AIME II 2017 #2

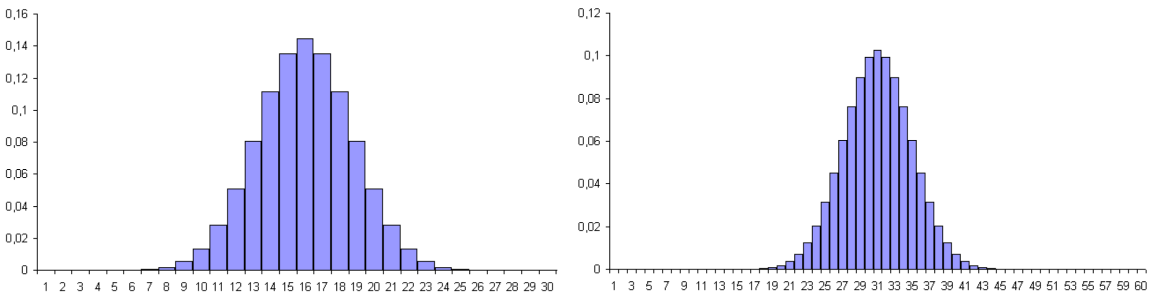
4 Distribución binomial.

La distribución binomial modeliza el problema de determinar la probabilidad de ganar k veces un juego de n partidas, si la probabilidad de ganar cada partida individual es p.

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \ , \ k=0,1,2,\ldots,n$$



Gráficas de la distribución binomial con $n=10$ y $p=0.5$, 0.2 y 0.8.



Gráficas de la distribución binomial con $p=0.5$ y $n=30$ y 60.

4.1 F

Pintamos cada una de las caras de un cubo de rojo o azul, cada una con probabilidad 1/2. El color de cada cara se determina independientemente. Dejamos el cubo sobre una superficie horizontal. ¿Cuál es la probabilidad de que las cuatro caras que quedan en vertical tengan el mismo color?

AMC 10B 2004 #23

5 Problemas en general.

5.1 D

Para cada subconjunto T de $U = \{1, 2, 3, ..., 18\}$, sea $s(T)$ la suma de los elementos de T, y definiendo $s(\emptyset) = 0$. Si tomamos un subconjunto T aleatoriamente, ¿Cuál es la probabilidad de que $s(T)$ sea divisible entre 3?

AIME 1 2016 #2

Soluciones.

1.1

a) $X = \{6\} \Rightarrow P(X) = \frac{\#(X)}{\#(\Omega)} = \frac{1}{6}$

b) $X = \{2,4,6\} \Rightarrow P(X) = \frac{\#(X)}{\#(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

1.2

Denotamos las bolas por A_1, V_1, N_1, R_1 , M_1 las de Alicia y A_2, V_2, N_2, R_2 , M_2 las de Bob.

Supongamos, por ejemplo, que Alicia toma la bola A_1. Entonces la bolsa de Bob contendrá A_1, A_2, V_2, N_2, R_2 , M_2, y para que las dos bolsas tengan después el mismo contenido, Bob debe tomar A_1 o A_2, es decir, 2 de los 6 casos posibles.

En total esto mismo pasa con las 5 bolas de Alicia, por lo tanto hay un total de $5 \cdot 6 = 30$ casos posibles de los cuales son favorables $5 \cdot 2 = 10$, y por tanto

$$P = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

1.3

Los impares se cancelan por parejas: Impar+Impar=Par, luego decir que el total sea impar es equivalente a decir que el número de bolas impares sea 1, 3 o 5.

Tomamos las bolas simultáneamente, luego no puede haber repeticiones.

Casos totales: $C_{11}^{6} = \frac{11!}{6!(11-6)!} = 462$

Casos en que aparezca un impar: $C_6^1 \cdot C_5^5 = 6 \cdot \frac{5!}{5!(5-5)!} = 6$

Casos en que aparecen tres impartes: $C_6^3 \cdot C_5^3 = \frac{6!}{3!\,3!} \cdot \frac{5!}{3!\,2!} = 200$

Casos en que aparecen cinco impares: $C_6^5 \cdot C_5^1 = \frac{6!}{5!\,1!} \cdot \frac{5!}{1!\,4!} = 30$

Total de casos: $6 + 200 + 30 = 236$, probabilidad: $\frac{236}{462} = \frac{118}{231}$

1.4

Está claro que el número de casos posibles es $V_{20}^2 = 20 \cdot 19 = 380$.

El suceso $B - J \geq 2$ consta de todos los casos para los que $B \geq J + 2$

Si $J = 1 \rightarrow B = 3,4,5,...,20$: 17 casos.

Si $J = 2 \rightarrow B = 4,5,6,...,20$: 16 casos.

...

Si $J = 18 \rightarrow B = 20$: 1 caso.

Si $J = 19$: 0 casos.

Si $J = 20$: 0 casos.

Luego consta de $1+2+3+4+...+17=\frac{17\cdot 18}{2}=17\cdot 9=153$ casos.

Las probabilidades son: $P(B-J)=\frac{153}{380}$, y la solución es $153+380=533$

1.5

El conjunto Ω de casos posibles consta de todos los conjuntos de tres puntos que podemos tomar, en total:

$$\#(\Omega)=\binom{9}{3}=\frac{9!}{3!6!}=84$$

El conjunto X de casos favorables son todas las alineaciones de tres puntos: 3 horizontales, 3 verticales y 2 diagonales. $\#(X)=3+3+2=8$

Luego $P(X)=\frac{\#(X)}{\#(\Omega)}=\frac{8}{84}=\frac{2}{21}$

1.6

El total de posibles combinaciones es $P_5=5!=120$.

De estas, las combinaciones favorables son una: XOXOX, multiplicada por 2 pues los dos elementos "O" son intercambiables, y multiplicada por $P_3=3!=6$ pues los tres elementos "X" son intercambiables. En total: $\#(X)=2\cdot 6=12$

La probabilidad es $P(X)=\frac{\#(X)}{\#(\Omega)}=\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$

1.7

La posibilidades totales son $C_8^2=\binom{8}{2}=\frac{8!}{2!6!}=28$. De todos estos casos, los favorables son: 20+20, 10+10 y 20+10, 20+5, 20+1. Estos tres últimos hay que multiplicarlos por 4 pues hay dos de cada uno, en total:

$1+1+3\cdot 4=14$ casos favorables, y por tanto $P(X)=\frac{\#(X)}{\#(\Omega)}=\frac{14}{28}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$

1.8

Las permutaciones de 5 elementos son P_5=5!=120 elementos, de las cuales, que empiecen por 1 son P_4=4!=24 elementos. Por lo tanto, S consta de 120-24=96 elementos.

X="Segundo elemento es 2" pueden empezar por "32***", "42***" y "52***", en total 3*P_3=18 elementos,

Luego $P(X)=\frac{\#(X)}{\#(\Omega)}=\frac{18}{96}=\frac{3}{16}$

1.9

El número total de casos posibles, puesto que hay diez cartas, y las tomamos de 5 en 5, será $V_{10}^5=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6$. (Y no de $2^5=32$ como se podría suponer).

Para contabilizar los casos favorables, los vamos a ordenar en función del número de cartas rojas que aparezcan.

a) 0 cartas rojas: “VVVVV”.
Hay $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ casos diferentes.

b) 1 carta roja: “RVVVV”.
Hay $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 600$ casos, y puesto que la carta roja puede estar al principio o al final, hay $600 \cdot 2 = 1200$ casos diferentes.

c) 2 cartas rojas: “RRVVV”.
Hay $5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1200$ casos, y puesto que las dos “RR” pueden estar al principio o al final, hay $1200 \cdot 2 = 2400$ casos diferentes.

d) 3 cartas rojas: “RRRVV”
Hay $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 1200$ casos, y puesto que las dos “RRR” pueden estar al principio o al final, hay $1200 \cdot 2 = 2400$ casos diferentes.

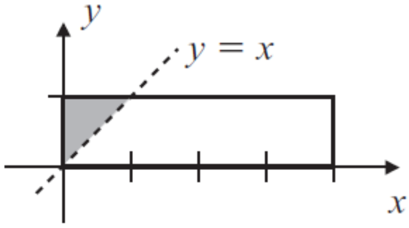
e) 4 cartas rojas: “RRRRV”.
Hay $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 600$ casos, y puesto que la carta verde puede estar al principio o al final, hay $600 \cdot 2 = 1200$ casos diferentes.

f) 5 cartas rojas: “RRRRR”.
Hay $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ casos diferentes.

En total: $120 + 1200 + 2400 + 2400 + 1200 + 120 = 7440$ casos favorables.

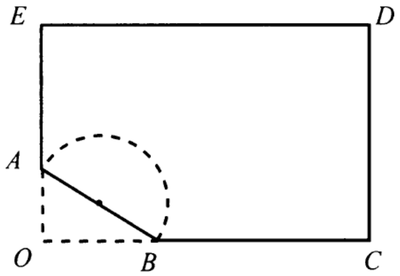
La probabilidad es, por tanto, $P = \dfrac{7440}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \dfrac{31}{126}$

2.1
La probabilidad es proporcional al área sombreada



que es un 1/8 del área total. Por lo tanto, la probabilidad es 1/8.

2.2
Independientemente de si P está o no en el interior del pentágono, dado un punto P=(x,y), $\angle APB$ será obtuso si y solo si P pertenece al interior de la circunferencia de diámetro AB. Esta circunferencia tiene por centro O el punto medio del segmento AB y radio $r = OB = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ y por tanto su área es $\pi r^2 = 5\pi$.
Dentro del pentágono, la zona favorable es la mitad, luego su área será $5\pi / 2$.



El área total del pentágono se determina calculando el área del rectángulo y restándole el triángulo de la esquina inferior izquierda:

$4\cdot(2\pi+1)-4\cdot 2/2=4\cdot(2\pi+1)-4=8\pi$

Y la probabilidad será $P=\dfrac{5\pi/2}{8\pi}=\dfrac{5}{16}$.

2.3

Un triángulo rectángulo con $\angle ABC=60^{\circ}$ mantiene una proporción $1:\sqrt{3}:2$ en sus lados, luego

$\dfrac{AC}{10}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AC=5\sqrt{3}$

$\dfrac{BC}{10}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow BC=5$

Mediante Pitágoras vamos a determinar el punto D en $\overline{AC}$ tal que $\overline{CD}=5\sqrt{2}$:

$CD=\sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2-5^2}=5\Rightarrow AD=AC-CD=5\sqrt{3}-5=5\left(\sqrt{3}-1\right)$

Luego el área del triángulo ΔBDA para el cual $BD>5\sqrt{2}$ es

$\dfrac{5\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot 5}{2}=\dfrac{25\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$

El área total del triángulo ΔABC es $\dfrac{5\sqrt{3}\cdot 5}{2}=\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$

Y por lo tanto $P=\dfrac{[\Delta BDA]}{[\Delta ABC]}=\dfrac{25\left(\sqrt{3}-1\right)/2}{25\sqrt{3}/2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$.

3.1

Primera versión.

Si el dado sigue una probabilidad directamente proporcional al número, entonces $P(k)=k\,P(1)$, y por tanto:

$1=P(1)+P(2)+...+P(6)=P(1)+2P(1)+3P(1)+...+6P(1)=$

$P(1)(1+2+3+4+5+6)=21P(1)\Rightarrow P(1)=\dfrac{1}{21}\Rightarrow P(k)=\dfrac{k}{21}$

Sean $1_1, 2_{1,}, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1, 7_1$ los casos sacar un 1, un 2, un tres... con el primer dado.

Sean $1_2, 2_{2,}, 3_2, 4_2, 5_2, 6_2, 7_2$ los casos sacar un 1, un 2, un tres... con el segund/o dado.

$$P(7)=P(1_1)P(6_2)+P(2_1)P(5_2)+P(3_1)P(4_2)+...+P(6_1)P(1_2)=$$
$$=\frac{1}{21}\cdot\frac{6}{21}+\frac{2}{21}\cdot\frac{5}{21}+\frac{3}{21}\cdot\frac{4}{21}+\frac{4}{21}\cdot\frac{3}{21}+\frac{5}{21}\cdot\frac{2}{21}+\frac{6}{21}\cdot\frac{1}{21}=$$
$$=\frac{1}{21^2}(1\cdot 6+2\cdot 5+3\cdot 4+4\cdot 3+5\cdot 2+6\cdot 1)=\frac{2}{21^2}(1\cdot 6+2\cdot 5+3\cdot 4)=$$
$$=\frac{2}{21^2}28=\frac{56}{441}=\frac{8}{63}$$

Segunda versión.
Se puede considerar que tenemos un dado con 21 caras: 6 "seis", 5 "cinco", 4 "cuatro"...,
con un total de $21^2=441$ casos.
Hay $2(1\cdot 6+2\cdot 5+3\cdot 4)=56$ casos favorables.
Luego $P=\frac{56}{441}=\frac{8}{63}$.

3.2

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$$
$$P(R/A)=\frac{1}{3},\ P(R/B)=\frac{1}{5},\ P(R/C)=\frac{1}{4}$$

a) Aplicamos el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(R)=P(A)\cdot P(R/A)+P(B)\cdot P(R/B)+P(C)\cdot P(R/C)=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{47}{180}$$

b) Aplicamos el Teorema de Bayes:
$$P(A/R)=\frac{P(R/A)P(A)}{P(R)}=\frac{(1/3)(1/3)}{47/180}=\frac{20}{47}$$

3.3
Denotamos con A_1 el caso “El equipo A gana el partido 1”, notamos con B_1 el caso “El equipo B gana el partido 1”, A_2 es “El equipo A gana el segundo partido”, etc…
Para poder trabajar con casos equiprobables, vamos a suponer que los dos equipos juegan los cinco partidos, aunque uno de los dos ya haya ganado tres y sea por tanto vencedor de la competición, y que los juegan con igual esfuerzo (¿Realmente podemos suponer esto? ????)
Los resultados posibles de la competición son:

$A_1A_2A_3A_4A_5$, $A_1A_2A_3A_4B_5$, $A_1A_2A_3B_4A_5$, $A_1A_2A_3B_4B_5$,… , $B_1B_2B_3B_4B_5$

En total: $2^5=32$
Los resultados asociados a “A y B_2” son

$B_1B_2A_3A_4A_5$, $A_1B_2A_3A_4A_5$, $A_1B_2A_3A_4B_5$, $A_1B_2A_3B_4A_5$, $A_1B_2B_3A_4A_5$

que son 5 en total.
De los cuales solo en uno de ellos el equipo B gana el primer partido.

$$P(B_1/A\,y\,B_2)=\frac{P(B_1\,y\,A\,y\,B_2)}{P(A\,y\,B_2)}=\frac{1/32}{5/32}=\frac{1}{5}$$

3.4
En primer lugar veamos el cuadro de las diferentes posibilidades para las semifinales:

Equipo A	Equipo B	Probabilidad
1	2	$\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{25}$
1	3	$\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{25}$
4	2	$\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{8}{25}$
4	3	$\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{12}{25}$

Y ahora:

$$P(T_4\ campeón)=P(T_4\ gane\ a\ T_2)P(T_4\ T_2\ semifinal)+$$

$$P(T_4\ gane\ a\ T_3)P(T_4\ T_3\ semifinal)==\frac{4}{6}\cdot\frac{8}{25}+\frac{4}{7}\cdot\frac{12}{25}=\frac{256}{535}$$

4.1
La probabilidad depende del número de caras que pintemos,
a) Si hay 6 caras pintadas, cualquier posición es buena, luego la probabilidad es 1.
b) Si hay 5 caras pintadas, colocando el cubo de forma que la cara no pintada quede arriba o abajo, las otras cuatro en vertical serán del mismo color, por lo tanto la probabilidad es 1.
c) Si hay 4 caras pintadas, solo hay una posibilidad aceptable, y es que las dos caras no pintadas no se toquen, de forma que una quede arriba y la otra abajo.
El número de combinaciones posibles es $\binom{6}{2}=\frac{6!}{2!4!}=15$, de las cuales 3 son aceptables. Luego la probabilidad es $3/15$.
d) Si hay 3 caras pintadas, es imposible, luego la probabilidad es 0.
e) Si hay 2 caras pintadas, es igual al de 4 caras pintadas: 3/15
f) Si hay 1 cara pintada, la probabilidad es 1.
g) Si no hay ninguna cara pintada, la probabilidad es 0.

El número de caras pintadas sigue una probabilidad binomial:

$$P(n=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\binom{6}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$P=P(n=6)\cdot 1+P(n=5)\cdot 1+P(n=4)\cdot\frac{3}{15}+P(n=3)\cdot 0+$$

$$+P(n=2)\cdot\frac{3}{15}+P(n=1)\cdot 1+P(n=0)\cdot 1=$$

$$=\frac{1}{2^6}\cdot 1+\frac{6}{2^6}\cdot 1+\frac{15}{2^6}\cdot\frac{3}{15}+0+\frac{15}{2^6}\cdot\frac{3}{15}+\frac{6}{2^6}\cdot 1+\frac{6}{2^6}\cdot 1+\frac{1}{2^6}\cdot 1=\frac{5}{16}$$

5.1
Veamos qué pasa con conjuntos pequeños. Sea $U_3=\{1,2,3\}$
Hay 4 casos favorables: $\varnothing,\{3\},\{1,2\},\{1,2,3\}$, de un total de $2^3=8$ casos posibles, luego

$P(U_3) = 4/8 = 1/2$ y por tanto $P(\neg U_3) = 1 - 1/2 = 1/2$

Sea $U_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
De un subconjunto de U_3 a un subconjunto de U_6 se pasa añadiendo un subconjunto de $\{4, 5, 6\}$. El resultado será favorable o no en función de si lo era antes o no:

$T \subset U_3$	$T \equiv 0 \pmod 3$	$T \equiv 1 \pmod 3$	$T \equiv 2 \pmod 3$
$T \to T \cup \varnothing$	Sí	No	No
$T \to T \cup \{4\}$	No	No	Sí
$T \to T \cup \{5\}$	No	Sí	No
$T \to T \cup \{6\}$	Sí	No	No
$T \to T \cup \{4,5\}$	Sí	No	No
$T \to T \cup \{5,6\}$	No	Sí	No
$T \to T \cup \{4,6\}$	No	No	Sí
$T \to T \cup \{4,5,6\}$	Sí	No	No

$P(U_6 / U_3) = 4/8 = 1/2$
$P(U_6 / \neg U_3) = 4/16 = 1/4$
$$P(U_6) = P(U_6 / U_3)P(U_3) + P(U_6 / \neg U_3)P(\neg U_3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$
$$P(\neg U_6) = 1 - P(U_6) = \frac{5}{8}$$

Pero este proceso se repite de la misma forma de U_6 a U_9, puesto que los números $\{7, 8, 9\}$ actúan de la misma forma que $\{4, 5, 6\}$. Luego
$$P(U_9) = P(U_9 / U_6)P(U_6) + P(U_9 / \neg U_6)P(\neg U_6) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{8} = \frac{11}{32}$$

Y en general de U_k a U_{k+3} sigue el mismo proceso:
$$P(U_{12}) = P(U_{12} / U_9)P(U_9) + P(U_{12} / \neg U_9)P(\neg U_9) = \frac{1}{2}\cdot\frac{11}{32} + \frac{1}{4}\cdot\frac{21}{32} = \frac{43}{128}$$
$$P(U_{15}) = P(U_{15} / U_{12})P(U_{12}) + P(U_{15} / \neg U_{12})P(\neg U_{12}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{43}{128} + \frac{1}{4}\cdot\frac{85}{128} = \frac{171}{512}$$
$$P(U_{18}) = P(U_{18} / U_{15})P(U_{15}) + P(U_{18} / \neg U_{15})P(\neg U_{15}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{171}{512} + \frac{1}{4}\cdot\frac{341}{512} = \frac{683}{2048}$$

Segunda versión.
Teniendo en cuenta que hay muchos cálculos involucrados, y que hay que hacerlos a mano, tal vez sea mejor pensar en número de casos. Sea ω_n el número de casos favorables para U_n.
El número de casos posibles para U_n es 2^n.

Ya hemos visto que $\omega_3 = 4$.
De U_3 a U_6:

Para todos y cada uno de los elementos de U_3, se puede pasar a un elemento de ω_6 añadiendo $\varnothing, \{4\}, \{5\}$, y también pasamos a un elemento de ω_6 añadiendo $\{4,5\}, \{5,6\}, \{4,6\}$,
Por otro lado, si $T \in \omega_3$, $T \cup \varnothing$ y $T \cup \{4,5,6\}$ pertenecerán a ω_6.

Luego $\omega_6 = 2 \cdot 2^3 + 2 \cdot \omega_3 = 2\left(2^3 + \omega_3\right) = 24$.

Y vemos que esta misma fórmula sirve para pasar de ω_6 a ω_9, y sucesivamente:

$$\omega_9 = 2\left(2^6 + \omega_6\right) = 176$$
$$\omega_{12} = 2\left(2^9 + \omega_9\right) = 1376$$
$$\omega_{15} = 2\left(2^{12} + \omega_{12}\right) = 10944$$
$$\omega_{18} = 2\left(2^{15} + \omega_{15}\right) = 87424$$

Finalmente:

$$P(U_{18}) = \frac{\varpi_{18}}{U_{18}} = \frac{87424}{2^{18}} = \frac{683}{2048}$$

Fuente de estas dos versiones:
www.artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AIME_I_Problems/Problem_12