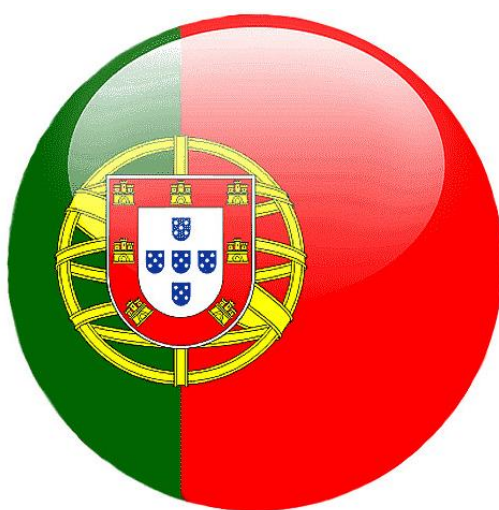


PORTUGAL SMP

SPM Testes de Matemática



Gerard Romo Garrido

Toomates Coolección vol. 32.8



Toomates Colección

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "**licencias digitales**" con las que las editoriales pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo libro, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.

Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de licencias digitales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf".

El conocimiento no es una mercancía.

El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las editoriales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de unos libros de texto que actualmente son muy mediocres, y no mediante retorcidas técnicas comerciales.

Estos libros se comparten bajo una licencia "**Creative Commons 4.0 (Atribution Non Commercial)**": Se permite, se promueve y se fomenta cualquier uso, reproducción y edición de todos estos materiales siempre que sea sin ánimo de lucro y se cite su procedencia. Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas. ¡**Libérate de la tiranía y mediocridad de las editoriales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos.**

Problem Solving (en español):

[Geometría Axiomática](#) [Problemas de Geometría 1](#) [Problemas de Geometría 2](#)
[Introducción a la Geometría](#) [Álgebra](#) [Teoría de números](#) [Combinatoria](#) [Probabilidad](#)
[Trigonometría](#) [Desigualdades](#) [Números complejos](#) [Calculus & Precalculus](#)

Libros de texto (en catalán):

[Nombres \(Preàlgebra\)](#) [Àlgebra](#) [Proporcionalitat](#) [Mesures geomètriques](#)
[Geometria analítica](#) [Combinatòria i Probabilitat](#) [Estadística](#) [Trigonometria](#) [Funcions](#)
[Nombres Complexos](#) [Àlgebra Lineal](#) [Geometria Lineal](#) [Càlcul Infinitesimal](#)
[Programació Lineal](#) [Mates amb Excel](#)

PAU españolas:

[Cataluña TEC](#) [Cataluña CCSS](#) [Valencia](#) [Galicia](#) [País Vasco](#) [Balears](#)

PAU y reválidas internacionales:

[Portugal](#) [Italia](#) [Francia](#) [Rumanía](#) [Hungría](#) [Polonia](#) [Pearson Edexcel International A Level](#) [China Gaokao](#)
[Pearson Edexcel IGCSE](#) [Cambridge International A Level](#) [Cambridge IGCSE](#)
[AQA GCSE](#) [International Baccalaureate \(IB\)](#)

Evaluación diagnóstica y pruebas de acceso:

[ACM6EP](#) [ACM4](#) [CFGS](#) [PAP](#)

Competiciones matemáticas:

Canguro: [España](#) [Cataluña](#) [Francia](#) [USA](#) [Reino Unido](#) [Austria](#)
USA: [Mathcounts](#) [AMC 8](#) [10](#) [12](#) [AIME](#) [USAJMO](#) [USAMO](#) [TSTST](#) [TST](#) [ELMO](#) [Putnam](#)
España: [OME](#) [OMEFL](#) [OMEC](#) [OMEA](#) [OMEM](#) [CDP](#)
Europa: [OMI](#) [Arquimede](#) [HMMT](#) [BMO](#) [Balkan MO](#) [JBMO](#)
Internacional: [IMO](#) [IGO](#) [SMT](#) [INMO](#) [CMO](#) [HMMT](#) [EGMO](#)
AHSME: [Book 1](#) [Book 2](#) [Book 3](#) [Book 4](#) [Book 5](#) [Book 6](#) [Book 7](#) [Book 8](#) [Book 9](#)

Otros materiales:

Pizzazz!: [Book A](#) [Book B](#) [Book C](#) [Book D](#) [Book E](#) [Pre-Algebra](#) [Algebra](#) , [REOIM](#) , [Llibre3r](#)

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales para facilitar su edición.

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a toomates@gmail.com

¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.

Consulta el **catálogo de libros** completo en <http://www.toomates.net>

Descarga toda la biblioteca Toomates en un solo archivo [Aquí](#)  MEGA

Visita mi **Canal de Youtube**: <https://www.youtube.com/c/GerardRomo> 

Visita mi **blog**: <https://toomatesbloc.blogspot.com/>

Versión de este documento: **02/06/2025**

Este documento forma parte del siguiente bloque:

Prueba Final 3.º Ciclo do Ensino Básico + Información general

<http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal.pdf>

A (635) 1997-2020: <http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal635.pdf>

A (635) 2021-2024: <http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal635b.pdf>

A (635) Modelos: <http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal635c.pdf>

B (735) 2006-2020: <http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal735.pdf>

B (735) 2021-2024: <http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal735b.pdf>

MACS (835) 21-24: <http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal835.pdf>

SPM Testes <http://www.toomates.net/biblioteca/PortugalSPM.pdf>

Otros compendiums de pruebas PAU internacionales:

Portugal: <http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal.pdf>

Italia: <http://www.toomates.net/biblioteca/Italia.pdf>

Francia: <http://www.toomates.net/biblioteca/Francia.pdf>

Rumanía: <http://www.toomates.net/biblioteca/Rumania.pdf>

Hungría: <http://www.toomates.net/biblioteca/Hungria.pdf>

Polonia: <http://www.toomates.net/biblioteca/Polonia.pdf>

China Gaokao: <http://www.toomates.net/biblioteca/Gaokao.pdf>

International Baccalaureate (IB): <http://www.toomates.net/biblioteca/CompendiumIB.pdf>

Pearson Edexcel International A Level: <http://www.toomates.net/biblioteca/Edexcel.pdf>

Pearson Edexcel IGCSE: <http://www.toomates.net/biblioteca/EdexcelIGCSE.pdf>

Cambridge International AS & A Level: <http://www.toomates.net/biblioteca/Cambridge.pdf>

Cambridge IGCSE: <http://www.toomates.net/biblioteca/CambridgeIGCSE.pdf>

AQA GCSE: <http://www.toomates.net/biblioteca/AQAGCSE.pdf>

Compendiums de pruebas PAU españolas:

Cataluña (TEC): <http://www.toomates.net/biblioteca/Pautec.pdf>

Cataluña (CCSS): <http://www.toomates.net/biblioteca/Pauccss.pdf>

Valencia: <http://www.toomates.net/biblioteca/Valencia.pdf>

Galicia: <http://www.toomates.net/biblioteca/Galiciapau.pdf>

País Vasco: <http://www.toomates.net/biblioteca/Paisvascopau.pdf>

Baleares: <http://www.toomates.net/biblioteca/Balears.pdf>

Presentación.

Desde hace años, la Sociedad Portuguesa de Matemáticas organiza las Pruebas de Matemáticas SPM, pruebas que permiten a cada escuela tener una opinión externa y contextualizada sobre el rendimiento de su alumnado. Estas pruebas están elaboradas por profesores experimentados y cuentan con el sello de calidad SPM.

A partir del año académico 2020/2021, con el apoyo de la Fundación Calouste Gulbenkian, esta oportunidad se puso a disposición de todos los colegios asociados al SPM, realizándose pruebas en los grados 2º, 4º, 6º, 9º, 10º, 11º y 12º con un amplio alcance nacional.

Este año, las pruebas suelen tener lugar en el mes de mayo.

Después del período de corrección de exámenes, cada escuela tiene acceso a información sobre el desempeño de sus estudiantes y cómo se compara a nivel nacional y regional. Sin embargo, ninguna escuela conocerá el lugar que ocupan las demás.

Esta es una contribución de la Sociedad Portuguesa de Matemáticas a un sistema basado en procesos de mejora continua en la disciplina de las Matemáticas. Esta es una herramienta útil para mejorar la eficacia y eficiencia de la enseñanza y su efecto.

link: <https://www.spm.pt/testesnacionais>

Índice.

Mock Test	4º	10
	6º	20
	9º	25
	10º	30
	11º	34
	12º	38
2021	6º	47
	9º	80
	10º	112
	11º	125
	12º	138
2022	6º	
	9º	158
	10º	194
	11º	210
	12º	226
2023	6º	247
	9º	277
	10º	317
	11º	330
	12º	348
2024	6º	370
	9º	396
	10º	436
	11º	447
	12º	459
2025	6º	481
	9º	
	10º	
	11º	496
	12º	507

PROGRAMA SPM@TESTES 2025

O que se propõe?

Oferecer às escolas associadas SPM, sejam públicas ou privadas, uma ferramenta de avaliação externa – Testes SPM – para o 2.º, 4.º, 6.º, 9.º, 10.º, 11.º, 12.º anos, com as mesmas características de provas nacionais de avaliação.

Quais os objetivos?

1. fornecer às escolas um instrumento de auditoria externa sem intervenção dos professores locais, na criação dos enunciados, matrizes e critérios de correção;
2. facilitar a identificação em cada escola dos seus pontos mais frágeis e dos mais fortes, permitindo intervenções focadas;
3. fornecer a cada escola um instrumento de referência para a concretização de práticas de melhoria contínua;
4. ceder às escolas informações sobre os resultados dos seus alunos em provas de avaliação externa nos anos terminais - 4.º e 6.º e 9.º anos -, informação que foi interrompida exatamente quando estas provas se mostravam fulcrais para:
 - a) monitorizar progressos e guiar intervenções;
 - b) melhorar a eficácia e eficiência no ensino e do seu efeito – a aprendizagem;
 - c) permitir a aferição internacional;
 - d) proporcionar referenciais de posicionamento a nível local, regional e nacional a cada escola participante.
5. consciencializar os alunos para a importância do trabalho metódico, diário, organizado e com propósito;
6. familiarizar os alunos com instrumentos de avaliação externa com que mais tarde ou mais cedo se vão confrontar, e, nos anos em que se mantém a prova final ou exame nacional, fornecer um instrumento formativo de preparação e diagnóstico que os anteceda.

Origem?

A Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) desenvolve há anos, a pedido de várias escolas, Testes de Matemática com as mesmas características de um exame nacional. A experiência passada aliada a um conhecimento curricular ímpar permitiu em 2021 lançar o **PROGRAMA TESTES SPM** com o apoio da Fundação Calouste Gulbenkian, alargando a todas as escolas interessadas esta possibilidade. A partir de 2021, deu-se continuidade a este projeto, hoje já em grande escala, atendendo ao impacto que estes têm tido nas escolas.

Quem pode participar?

Qualquer escola associada da SPM*.

Como participar?

Inscrevendo-se até dia **21 de fevereiro** na plataforma da SPM: <https://testesnacionais.spm.pt/>

Quando serão os Testes?

Entre dia 6 e dia 16 de maio de 2025 de acordo com o seguinte calendário:

Teste	Data/hora
2.º ano	8 de maio às 9:30
4.º ano	6 de maio às 9:30
6.º ano	7 de maio às 10:00
9.º ano	12 de maio às 10:00
10.º ano	16 de maio às 10:00
11.º ano	14 de maio às 10:00
12.º ano	13 de maio às 10:00

Haverá preparação?

Sim, haverá um *Mock Test* em março, disponibilizado em PDF na plataforma, para familiarizar os professores e as escolas ao processo. É também por isso que é importante cumprir o prazo de **21 de fevereiro** de inscrição no **PROGRAMA TESTES SPM**.

* Caso não seja Escola Associada SPM poderá aproveitar para o ser a partir de agora em <https://www.spm.pt/associates/enroll> (sócio escolar com quota de 80 euros/ano), obtendo ainda outras vantagens para além dos Testes SPM.

Que informação sobre os alunos tem a escola de enviar para a SPM?

Nenhuma. Apenas o número total de alunos em cada Teste. Depois a plataforma gera esse número de códigos, ficando na escola a responsabilidade de os associar a cada um dos alunos. Só a escola saberá essa correspondência entre a identificação do aluno e o código gerado pela plataforma.

Quem trata de toda a logística dos Testes?

A organização, vigilância, etc., é da responsabilidade de cada escola. Cada escola nomeia um professor responsável pelo projeto para ser interlocutor da SPM.

A SPM fornece o Teste através de uma plataforma informática, dando a possibilidade de resolução *online* no 9.º, 10.º, 11.º e 12.º anos.

- No caso da realização da prova em suporte informático, cada aluno acede à mesma com link individual atribuído pela SPM.
- No caso da realização da prova em papel, o professor responsável acede ao enunciado no dia da prova no horário indicado;

Depois da realização da prova, a escola fará a distribuição dos testes pelos professores corretores que atribuem a classificação de acordo com os critérios de correção fornecidos pela SPM.

E se a escola não dispõe de meios computacionais para realizar o Teste?

Não faz mal! Embora seja possível a realização *online* dos testes do 9.º, 10.º, 11.º e 12.º ano, a SPM também fornecerá cada um destes testes para que a escola os possa aplicar em formato papel.

Os professores têm ao seu dispor os critérios de correção e a plataforma que lhes facilita todas as tarefas da correção. Também será fornecida uma grelha Excel, para os professores que preferirem corrigir *offline*.

É da maior importância carregar os resultados na plataforma da SPM se desejar ver como se compara com as restantes escolas.

Qual o prazo para corrigir as provas?

Cerca de 10 dias úteis para cada prova.

Que tipo de informação sobre os resultados será fornecida às escolas?

Será fornecida a classificação de cada aluno, a média da escola, a sua posição global relativa a nível local e nacional, a sua posição, pergunta a pergunta, relativa a nível local e nacional entre as que realizaram o teste, e ainda quais os pontos da matéria em que esteve bem e em quais precisa recuperar, permitindo assim à escola perceber exatamente a situação.

A escola conhecerá a sua posição, mas não saberá quem ocupa as restantes posições.

Mais informação?

spm@spm.pt

(Mais informações brevemente para as Escolas Associadas SPM)

TESTE DE MATEMÁTICA – MOCK TEST

2021

4.º ano de Escolaridade

(10 páginas)

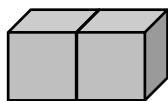
A prova é realizada no enunciado.

Apenas podes usar, como material de escrita, caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, exceto nas construções que envolvam a utilização de material de desenho, onde o uso de lápis é permitido.

Deves ser portador de material de desenho e de medição (lápis, borracha, régua graduada, compasso e esquadro).

Não é permitido o uso de corretor.

1. O Francisco juntou dois cubos e formou um paralelepípedo, conforme se ilustra na figura.



Qual é o número mínimo de cubos que o Francisco deverá juntar àqueles dois para formar um novo cubo?

Assinala com **X** a resposta correta.

☐ 2

☐ 4

☐ 6

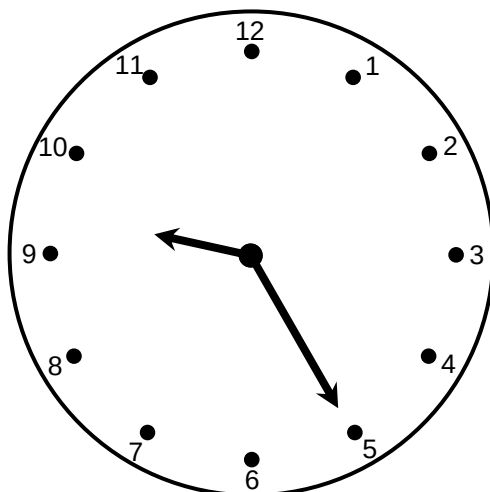
☐ 8

2. Na localidade onde vive o Sr. José residem 49 063 habitantes.

Escreve por extenso, sem utilizares algarismos, o número de habitantes que residem na localidade onde vive o Sr. José.

R: _____

3. Na figura está representado um relógio de ponteiros.



- 3.1. Que horas estão marcadas no relógio?

R: _____

- 3.2. Como se classifica o ângulo convexo formado pelos ponteiros do relógio?
Assinala com **X** a resposta correta.

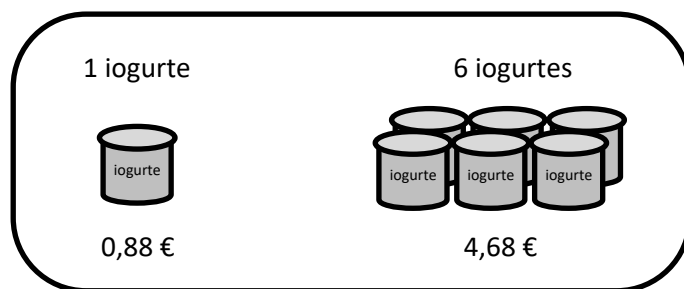
☐ Agudo

☐ Reto

☐ Obtuso

☐ Raso

4. Na mercearia onde a Maria costuma fazer compras, está um cartaz com indicação do preço dos iogurtes.



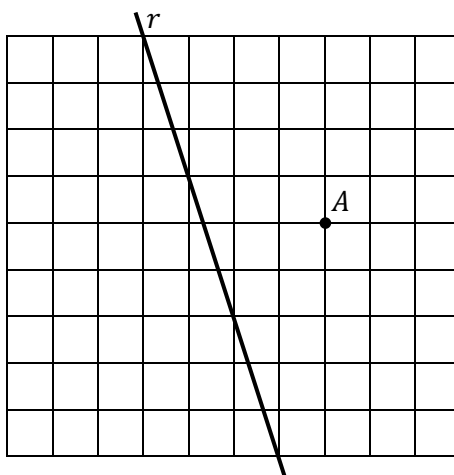
A Maria diz que é mais barato comprar um conjunto de 6 iogurtes do que comprar os 6 iogurtes separadamente.

A Maria tem razão?

Mostra como chegaste à tua resposta.

R: _____

5. No quadriculado está representada uma reta r e um ponto A .
Traça a reta paralela à reta r que passa pelo ponto A .
Utiliza a régua.



6. Na operação apresentada a seguir, o símbolo ★ representa um número.

$$\star : 12,4 = 4$$

Qual é o número representado pelo símbolo ★ ?

Assinala com X a resposta correta.

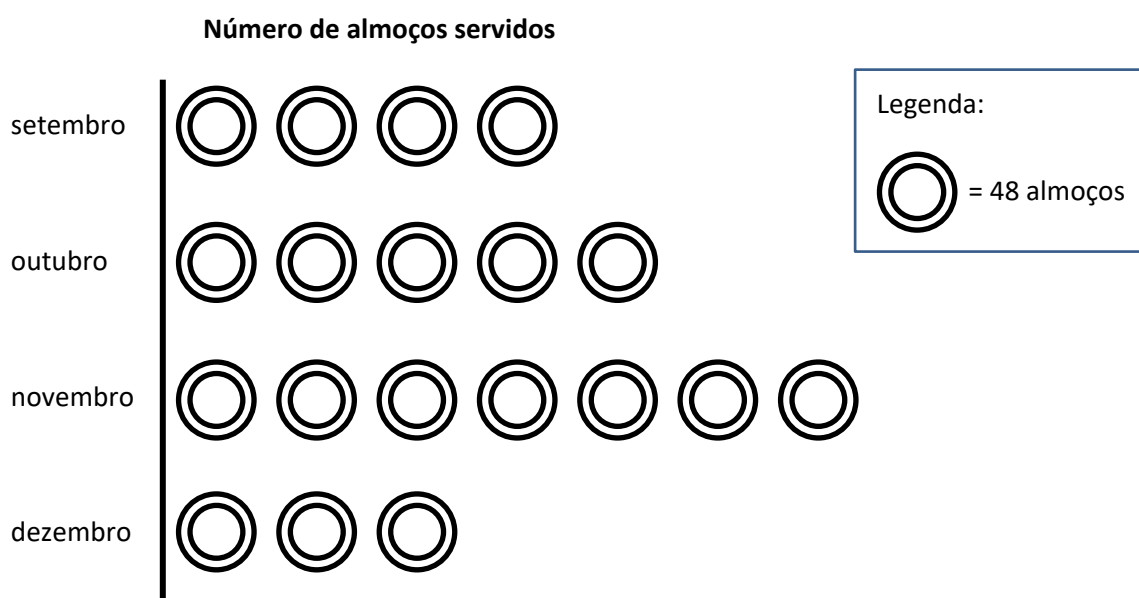
☐ 3,1

☐ 8,4

☐ 16,4

☐ 49,6

7. No pictograma seguinte está representado o número de almoços servidos no refeitório de uma escola, nos meses de setembro a dezembro.



- 7.1. Qual foi o mês em que se serviram menos almoços?

R: _____

- 7.2. Quantos almoços foram servidos no total, nos meses de setembro a dezembro?
Mostra como chegaste à tua resposta.

R: _____

8. O Mosteiro da Batalha foi mandado construir pelo rei D. João I e as obras tiveram início no ano de *MCCCLXXXVI*.

Escreve, em numeração indo-árabe, o ano de início das obras de construção do Mosteiro da Batalha.

R: _____



Mosteiro da Batalha

9. Na grelha quadriculada estão representados quatro tipos de animais: galinhas, coelhos, vacas e porcos.

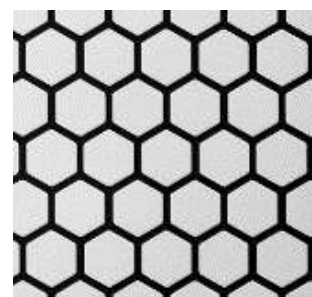
4				
3				
2				
1				
	A	B	C	D

Qual é o animal que se encontra nas coordenadas (B,3)?

R: _____

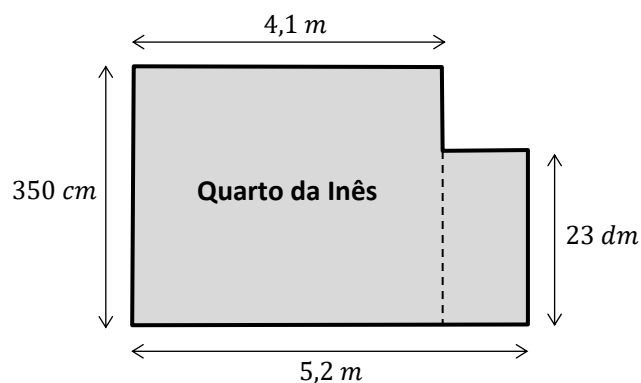
10. Na figura está representada uma parte do chão da cozinha da Mariana, coberto com mosaicos iguais. Que nome tem o polígono com a forma de cada mosaico?

R: _____



11. Na figura está representada a planta do quarto da Inês. O tracejado divide a planta do quarto da Inês em dois retângulos.

Determina, em m^2 , a área do quarto da Inês. Mostra como chegaste à tua resposta.



R: _____

12. A Joana e o seu irmão Pedro comeram parte de uma piza.
A Joana comeu um quarto da piza e o Pedro comeu dois oitavos da piza.
Pedro: – *Joana, reparaste que cada um de nós comeu a mesma quantidade de piza?*
Joana: – *Não. Tu comeste mais do que eu.*
Qual dos dois irmãos tem razão?
Mostra como chegaste à tua resposta.

R: _____

13. Traça, utilizando o compasso, uma circunferência com 5 *cm* de diâmetro, com o centro no ponto *O*.

•
O

14. Numa loja, todas as camisolas têm um preço fixo e todas as calças também.
A Joana e a Sofia compraram calças e camisolas nessa loja.
A Joana comprou duas camisolas e umas calças por 25 euros e a Sofia comprou três camisolas e duas calças por 44 euros.

Compras da Joana



25 €

Compras da Sofia



44 €

Qual foi o preço de uma camisola?
Assinala com **X** a resposta correta.

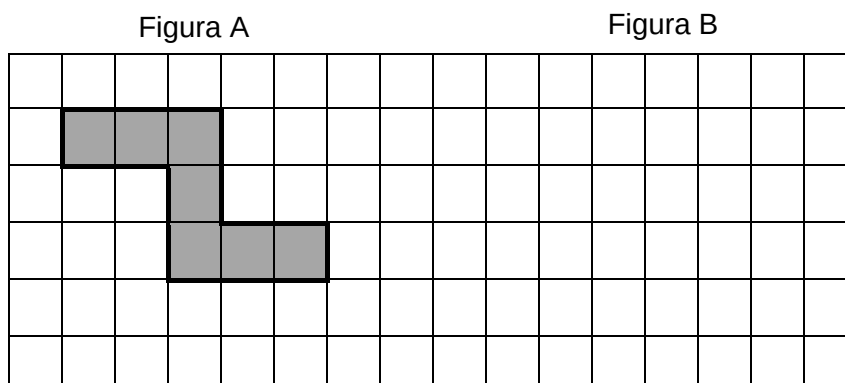
☐ 6 euros

☐ 7 euros

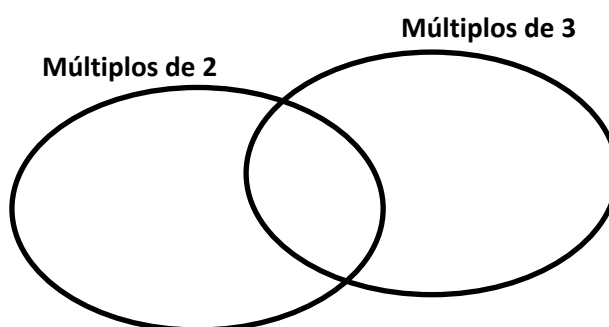
☐ 8 euros

☐ 9 euros

15. Desenha na grelha seguinte uma Figura B com área igual à da Figura A, mas com perímetro diferente.



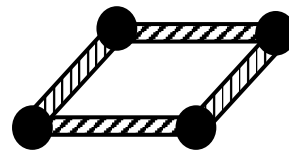
16. Preenche o diagrama de Venn, com os múltiplos de 2 e os múltiplos de 3 menores do que 10.



17. Pretende-se arrumar 3650 parafusos em embalagens com 24 parafusos cada uma. Quantos parafusos irão sobrar no final da operação?
Utiliza o algoritmo da divisão.
Mostra como chegaste à tua resposta.

R: _____

18. A Rita construiu um modelo de uma pirâmide, utilizando palhinhas e bolas de plasticina. Na figura ao lado está representada uma parte dessa construção. Quantas palhinhas e bolas de plasticina faltam na figura ao lado para completar o modelo da pirâmide que a Rita construiu?



Palhinhas:

Bolas de plasticina:

19. Pinta $\frac{3}{7}$ do conjunto de flores.



20. Numa aula de ginástica, o professor quer agrupar 24 alunos em vários conjuntos com o mesmo número de alunos. Qual é a opção que apresenta todas as possibilidades para o número de conjuntos que se podem formar? Assinala com X a resposta correta.

☐ 2, 3, 4, 6, 8, 12

☐ 2, 3, 4, 5, 6, 12

☐ 2, 3, 4, 6, 7, 12

☐ 2, 3, 4, 6, 9, 12

21. Numa padaria produziu-se um certo número de pães para serem vendidos no próprio dia. Durante a manhã foram vendidos $\frac{2}{3}$ dos pães produzidos. Durante a tarde venderam-se 30 pães e ficaram 9 pães por vender. Quantos pães foram produzidos nesse dia, naquela padaria? Mostra como chegaste à tua resposta.

R: _____

22. Calcula: $42574 - 5081,02$

R: _____

23. Considera os seguintes números: 16,5 ; 16,05 ; 16,005 ; 16,55
Qual destes números está, na reta numérica, mais próximo de 16?
Assinala com **X** a resposta correta.

☐ 16,5

☐ 16,005

☐ 16,05

☐ 16,55

24. Qual das seguintes igualdades é verdadeira?
Assinala com **X** a resposta correta.

☐ $1,52 \times 0,1 = 15,2$

☐ $\frac{2}{5} : \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$

☐ $1,52 : 0,01 = 15,2$

☐ $\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$

FIM DA PROVA

TESTE DE MATEMÁTICA – MOCK TEST

2021

6.º ano de Escolaridade

(cinco páginas)

1. Escreve por ordem crescente:

$$-8; \quad 7; \quad -\frac{17}{2}; \quad 0; \quad \frac{16}{3}; \quad 5,4$$

2. Na **Figura 1**, está representado o hexágono regular $[ABCDEF]$, de centro no ponto G .

2.1. O transformado do ponto C pela reflexão axial de eixo EB é o ponto:

(A) E	(B) F
(C) A	(D) D

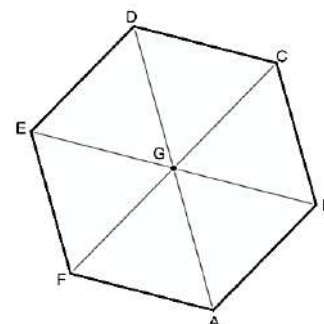


Figura 1

2.2. O transformado do segmento $[DE]$ pela rotação de centro no ponto G e amplitude 240° no sentido positivo é o segmento:

(A) $[AB]$	(B) $[BC]$
(C) $[CD]$	(D) $[FA]$

3. Calcula o valor numérico de cada uma das expressões seguintes.

3.1. $-\left(-1 + \frac{1}{3}\right) - \left|-3 - \frac{1}{2}\right|$

3.2. $3^3 \times \frac{1}{3} - (4^2 - 3)$

4. As grandezas x e y da tabela seguinte são diretamente proporcionais.

x	a	6	8
y	5	2	b

Determina os valores de a e b .

5. Sabe-se que um poliedro convexo tem 16 vértices e 24 arestas.
Quantas faces tem o poliedro?

6. Considera os números naturais a e b cujas decomposição em fatores primos se apresentam:

$$a = 2^4 \times 3 \times 5^2 \times 13$$

$$b = 2^3 \times 5$$

Determina o *m. m. c.* (a , b) decomposto em fatores primos.

7. Na **Figura 2**, está representada a planificação da superfície lateral de um prisma.

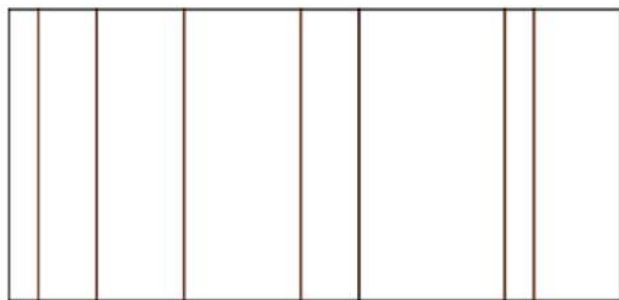


Figura 2

7.1. Indica o número de faces, arestas e vértices do prisma.

7.2. Como se designa o polígono da base do prisma?

8. Complete os espaços de forma a obter igualdades verdadeiras:

8.1. $\frac{7}{3} - \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = -\frac{11}{6}$

8.2. $\frac{1}{3} \div \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{2}{15}$

8.3. $9^2 \times \boxed{} = 3^8$

9. Sabe-se que $\frac{2}{3}$ de um número é 9. Qual é esse número?

10. Numa turma de 6.º ano, 20% dos alunos estão inscritos no desporto escolar. Sabendo que a turma tem 30 alunos, quantos alunos estão inscritos?

11. Numa sequência de números, obtém-se cada termo adicionando 5 ao termo anterior.

O quinto termo da sequência é 19.

Qual dos números seguintes não é termo da sequência?

Assinala com **X** a opção correta.

☐ -1

☐ 4

☐ 30

☐ 44

12. Observa a **Figura 3** onde está representada uma reta numérica.



Figura 3

Qual é a abcissa do ponto A?

Assinala com **X** a opção correta.

☐ $-5\frac{2}{5}$

☐ -4,3

☐ $-\frac{22}{5}$

☐ $-4\frac{3}{5}$

13. Na **Figura 4**, está representado o retângulo $[ABCD]$ e um círculo.

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 7\text{ cm}$
- $\overline{AD} = 3\text{ cm}$
- o círculo tem raio 1 cm
- as retas AB e AD são tangentes ao círculo

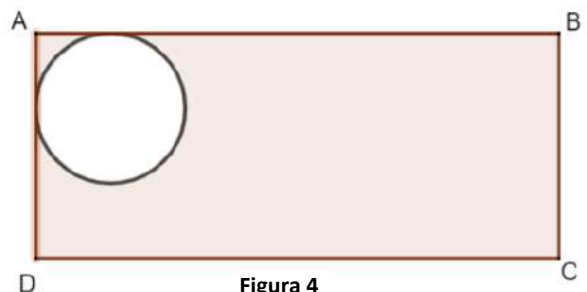


Figura 4

Determina a área da região sombreada da figura.

Apresenta o resultado, em cm^2 , arredondado às unidades.

Utiliza 3,14 para valor aproximado de π .

Mostra como chegaste à tua resposta.

14. Observa a **Figura 5**.

Sabe-se que:

- as retas BC e AE são paralelas
- $\hat{A}CB = 55^\circ$
- $\hat{CBA} = 84^\circ$

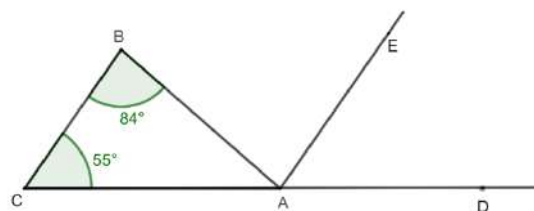


Figura 5

Qual é a amplitude do ângulo EAB ?

- (A) 139° (B) 55° (C) 84° (D) 90°

15. Na **Figura 6**, está representado o cubo $[ABCDEFGH]$ de aresta 3 cm e um cilindro inscrito no cubo.

Qual é o volume do cilindro?

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

Utiliza 3,14 para valor aproximado de π .

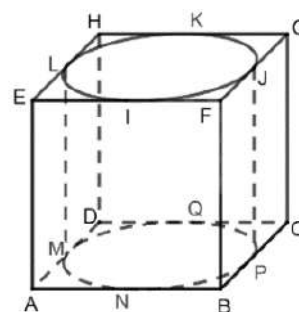


Figura 6

FIM

TESTE DE MATEMÁTICA – MOCK TEST

2021

9.º ano de Escolaridade

(cinco páginas)

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Não é permitido o uso de máquina de calcular.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Tabela trigonométrica

Graus	Seno	Cosseno	Tangente	Graus	Seno	Cosseno	Tangente
1	0,0175	0,9998	0,0175	46	0,7193	0,6947	1,0355
2	0,0349	0,9994	0,0349	47	0,7314	0,6820	1,0724
3	0,0523	0,9986	0,0524	48	0,7431	0,6691	1,1106
4	0,0698	0,9976	0,0699	49	0,7547	0,6561	1,1504
5	0,0872	0,9962	0,0875	50	0,7660	0,6428	1,1918
6	0,1045	0,9945	0,1051	51	0,7771	0,6293	1,2349
7	0,1219	0,9925	0,1228	52	0,7880	0,6157	1,2799
8	0,1392	0,9903	0,1405	53	0,7986	0,6018	1,3270
9	0,1564	0,9877	0,1584	54	0,8090	0,5878	1,3764
10	0,1736	0,9848	0,1763	55	0,8192	0,5736	1,4281
11	0,1908	0,9816	0,1944	56	0,8290	0,5592	1,4826
12	0,2079	0,9781	0,2126	57	0,8387	0,5446	1,5399
13	0,2250	0,9744	0,2309	58	0,8480	0,5299	1,6003
14	0,2419	0,9703	0,2493	59	0,8572	0,5150	1,6643
15	0,2588	0,9659	0,2679	60	0,8660	0,5000	1,7321
16	0,2756	0,9613	0,2867	61	0,8746	0,4848	1,8040
17	0,2924	0,9563	0,3057	62	0,8829	0,4695	1,8807
18	0,3090	0,9511	0,3249	63	0,8910	0,4540	1,9626
19	0,3256	0,9455	0,3443	64	0,8988	0,4384	2,0503
20	0,3420	0,9397	0,3640	65	0,9063	0,4226	2,1445
21	0,3584	0,9336	0,3839	66	0,9135	0,4067	2,2460
22	0,3746	0,9272	0,4040	67	0,9205	0,3907	2,3559
23	0,3907	0,9205	0,4245	68	0,9272	0,3746	2,4751
24	0,4067	0,9135	0,4452	69	0,9336	0,3584	2,6051
25	0,4226	0,9063	0,4663	70	0,9397	0,3420	2,7475
26	0,4384	0,8988	0,4877	71	0,9455	0,3256	2,9042
27	0,4540	0,8910	0,5095	72	0,9511	0,3090	3,0777
28	0,4695	0,8829	0,5317	73	0,9563	0,2924	3,2708
29	0,4848	0,8746	0,5543	74	0,9613	0,2756	3,4874
30	0,5000	0,8660	0,5774	75	0,9659	0,2588	3,7321
31	0,5150	0,8572	0,6009	76	0,9703	0,2419	4,0108
32	0,5299	0,8480	0,6249	77	0,9744	0,2250	4,3315
33	0,5446	0,8387	0,6494	78	0,9781	0,2079	4,7046
34	0,5592	0,8290	0,6745	79	0,9816	0,1908	5,1445
35	0,5736	0,8192	0,7002	80	0,9848	0,1736	5,6713
36	0,5878	0,8090	0,7265	81	0,9877	0,1564	6,3138
37	0,6018	0,7986	0,7536	82	0,9903	0,1392	7,1154
38	0,6157	0,7880	0,7813	83	0,9925	0,1219	8,1443
39	0,6293	0,7771	0,8098	84	0,9945	0,1045	9,5144
40	0,6428	0,7660	0,8391	85	0,9962	0,0872	11,4301
41	0,6561	0,7547	0,8693	86	0,9976	0,0698	14,3007
42	0,6691	0,7431	0,9004	87	0,9986	0,0523	19,0811
43	0,6820	0,7314	0,9325	88	0,9994	0,0349	28,6363
44	0,6947	0,7193	0,9657	89	0,9998	0,0175	57,2900
45	0,7071	0,7071	1,0000				

1. Calcule o valor da seguinte expressão e apresente o resultado em notação científica

$$\frac{40 \times 10^{-3} \times (10^{-2})^4}{0,0002 \times 10^{-12}}$$

2. Considere os conjuntos de números reais A e B definidos por:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x \leq 3\} \quad \text{e} \quad B = \left[\frac{\pi}{2}, \sqrt{10}\right]$$

Qual dos seguintes intervalos de números reais corresponde ao conjunto $A \cup B$?

- (A) $\left[\frac{\pi}{2}, \sqrt{10}\right]$ (B) $] -1, \sqrt{10}]$ (C) $\left[\frac{\pi}{2}, 3\right]$ (D) $[-1, \sqrt{10}[$
3. Selecione a afirmação verdadeira:
- (A) Se $3x > 6y$ então $-x > -2y$ (B) Se $b < 4$ então $4 + a < b + a$
- (C) Se $z > w$ então $-z > -w$ (D) Se $3 < a$ então $a > -3$
4. Resolva, em $\mathbb{R}$, a seguinte condição.

$$-(x - 1) \geq \frac{x}{2} - 6 + 2x$$

Apresente o conjunto-solução na forma de um intervalo de números reais.

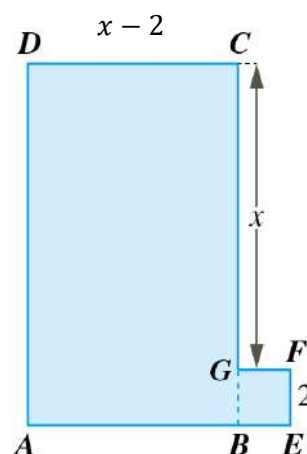
Apresente os cálculos que efetuar.

5. Relativamente à figura ao lado, sabe-se que para um certo valor de x , maior do que 3:

- $[BEFG]$ é um quadrado e $[ABCD]$ é um retângulo.
- $\overline{CG} = x$, $\overline{DC} = x - 2$ e $\overline{FE} = 2$

5.1. Determine, na forma de polinómio reduzido, a expressão que representa, a área da figura.

5.2. Determine o valor de x , em metros, para o qual a área é igual a 100 metros quadrados.



6. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação seguinte.

$$3x^2 + x - 2 = 0$$

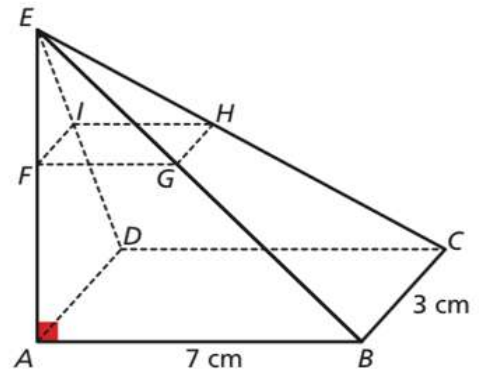
Apresente o conjunto-solução.

Apresente os cálculos que efetuar.

7. Na figura está representada uma pirâmide $[ABCDE]$ de altura $[AE]$.

Sabe-se que:

- a base da pirâmide é um retângulo e o triângulo $[BAE]$ é retângulo em A;
- $\overline{AE} = 6 \text{ cm}$, $\overline{FA} = 4 \text{ cm}$, $\overline{AB} = 7 \text{ cm}$ e $\overline{BC} = 3 \text{ cm}$;
- $[FGHI]$ é um retângulo;
- a reta FG é paralela à reta AB ;
- a reta GH é paralela à reta BC .



7.1. A medida da amplitude do ângulo ABE com erro inferior a uma unidade do grau é:

- (A) 59° (B) 31° (C) 41° (D) 42°

7.2. Determine o volume da pirâmide $[ABCDE]$.

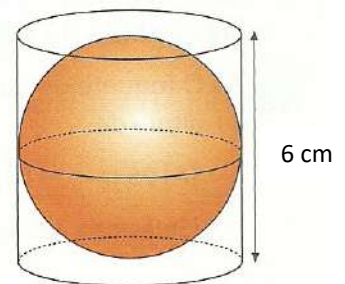
7.3. Determine a área do trapézio $[ABGF]$.

7.4. A medida do comprimento de $[EG]$ é:

- (A) $\sqrt{85} \text{ cm}$ (B) $\frac{\sqrt{85}}{3} \text{ cm}$ (C) $\frac{\sqrt{13}}{3} \text{ cm}$ (D) $\frac{\sqrt{85}}{9} \text{ cm}$

8. Uma esfera de vidro com 6 cm de diâmetro foi embalada numa caixa cilíndrica como mostra a figura, ou seja, a esfera está inscrita no cilindro.

O volume da parte da embalagem não ocupada pela esfera é dado pela expressão $V = \pi \times a$ em que a é um número real. Determine o valor de a .



9. A resistência R , em ohms, de um fio condutor é inversamente proporcional ao quadrado do seu raio r , em mm. Se a constante de proporcionalidade for 2000, então a relação entre a resistência R de um dado fio condutor o respetivo raio r pode ser expressa da seguinte forma:

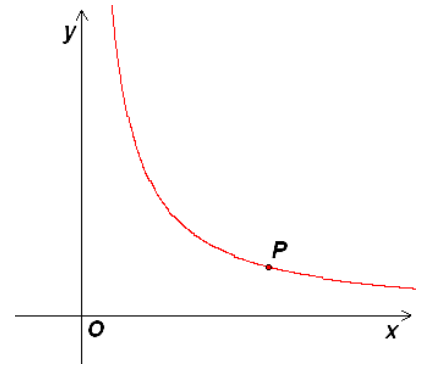
- (A) $\frac{R}{r^2} = 2000$ (B) $R = \frac{2000}{r^2}$ (C) $R^2 = \frac{2000}{r}$ (D) $R = 2000r^2$

10. Na figura, está representado, em referencial cartesiano, o gráfico de uma função de proporcionalidade inversa.

Sabe-se que o ponto P pertence ao gráfico da função e tem coordenadas $\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{5}\right)$.

Os pontos $Q(a, b)$ e $R\left(\frac{3}{5}, c\right)$ também pertencem ao gráfico da função representada.

Determine o valor numérico da expressão $ab + c$.



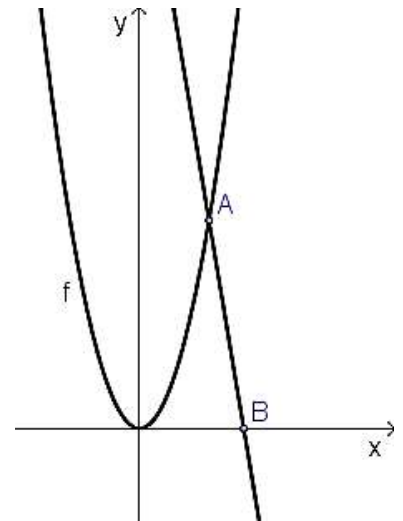
11. Na figura está representado, num referencial cartesiano de origem O , parte do gráfico da função f , definida por

$$f(x) = ax^2, \text{ com } a \neq 0, \text{ e a reta } AB.$$

Sabe-se que:

- O ponto A pertence ao gráfico de f ;
- O ponto A tem coordenadas $(2, 6)$;
- A reta AB interseca o eixo Ox no ponto B de abscissa $2a$.

Determine uma equação da reta AB .



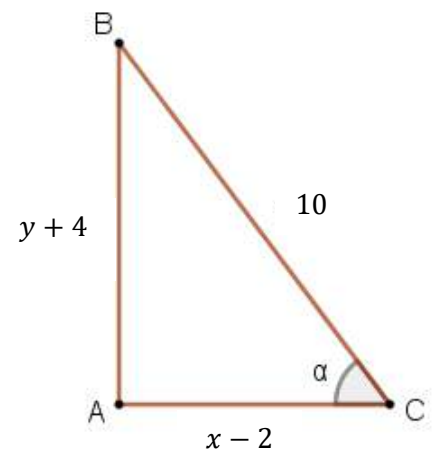
12. Considera o triângulo $[ABC]$, retângulo em A .

Sabe-se que, numa dada unidade;

- $\overline{AB} = y + 4$, $\overline{AC} = x - 2$ e $\overline{BC} = 10$
- $\text{sen}(\alpha) = \frac{x-4}{5}$
- $\text{cos}(\alpha) = \frac{y-1}{5}$

Determine os valores de x e y .

Sugestão: Comece por apresentar o sistema de equações que permite resolver o problema



FIM

TESTE DE MATEMÁTICA – MOCK TESTE

2021

10.º ano de Escolaridade

(quatro páginas)

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Não é permitido o uso de máquina de calcular.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. De uma função f , injetiva de domínio $\{-3, 1, 0\}$ e conjunto de chegada $\{7, 8, 9\}$, sabe-se que:

$$f(1) = 9$$

$$f(0) = f(1) - 2$$

Qual é a imagem de -3 por meio de f ?

- (A) 11 (B) 7 (C) 8 (D) 9

2. $\sqrt[6]{4} \div \sqrt[6]{2} \times \sqrt[3]{\sqrt{9}} \div \sqrt[6]{9}$ é igual a:

- (A) $\sqrt[6]{2}$ (B) $\sqrt[6]{9}$ (C) $\sqrt[6]{3}$ (D) $\sqrt[3]{2}$

3. O valor de $m \in \mathbb{N}$, tal que $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = m + \sqrt{2}$ é:

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

4. Considere, num referencial ortonormado xOy , os pontos $A(1, -5)$ e $B(4, -1)$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

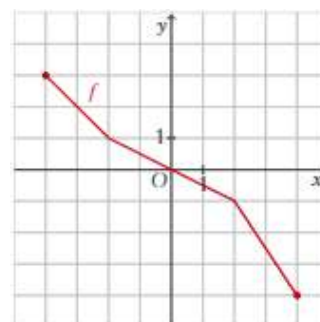
- (A) A distância entre os pontos A e B é 25 unidades.
(B) A reta de equação $y = \frac{4}{3}x + 5$ é paralela à reta AB .
(C) A equação reduzida da mediatriz de $[AB]$ é $y = -6x + 9$.
(D) O ponto médio de $[AB]$ tem coordenadas $(5, -3)$.

5. Das seguintes condições, qual a que define uma região do plano que contém o 3.º quadrante?

- (A) $x + y \leq 1$ (B) $1 \geq y - 2x$ (C) $x < 1 \wedge y > 2$ (D) $x > -1 \wedge y > -2$

6. Seja f a função bijetiva representada graficamente ao lado e seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = 2 - x$.

Determine $(f \circ g)(4)$ e $f(2) + f^{-1}(2)$.



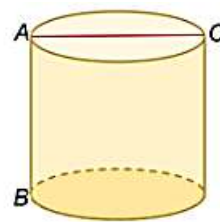
7. Considere, em $\mathbb{R}$ as condições:

$$p(x): 20 - 3x \geq 41; \quad q(x): |x| > 4 \wedge x^2 + 5 < 0$$

Justifique que a seguinte proposição é falsa: $\exists x \in \mathbb{N}: p(x) \vee q(x)$

8. Na figura ao lado está representado um cilindro. Sabe-se que:

- $[AB]$ é uma geratriz do cilindro
- $[AC]$ é um diâmetro de uma das bases do cilindro;
- As retas AB e AC são perpendiculares;
- $\overline{AB} = 2\sqrt[3]{9}$ e $\overline{BC} = \frac{5}{2} \times 3^{\frac{2}{3}}$.



Determine o perímetro da base do cilindro.

9. Seja k um número real e $A(x) = -x^3 + kx^2 - k + 1$ uma família de polinômios.

- 9.1. Resolva a equação $A(x) = 0$, sabendo que $A(x)$ é divisível por $x + 2$.
- 9.2. Mostre que o resto da divisão inteira de $A(x)$ por $x^2 - 1$ não depende de k .
- 9.3. Resolva a condição $A(x) > 0$, para $k = 1$.

10. Averigue se o polinômio $x^n + a^n$, $a \neq 0$ e n ímpar, é divisível por $x + a$.

11. Considere, num referencial ortonormado, as retas

$$m: (x, y) = (1, 2) + t(3, -2), t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad p: 3x + y - 8 = 0.$$

Determine a equação reduzida da reta n que verifica as seguintes condições:

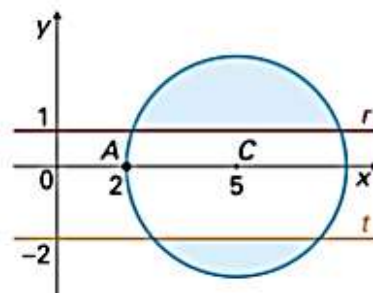
- n é paralela a m ;
- as retas n e p intersectam o eixo Ox no mesmo ponto.

12. Considere, num plano munido de um referencial ortonormado, a circunferência de centro $C(5, 0)$, o ponto $A(2, 0)$ pertencente à circunferência e as retas horizontais r e t .

12.1. Defina, por meio de uma condição, a região sombreada, incluindo a fronteira.

12.2. Sejam P e Q , pontos tais que:

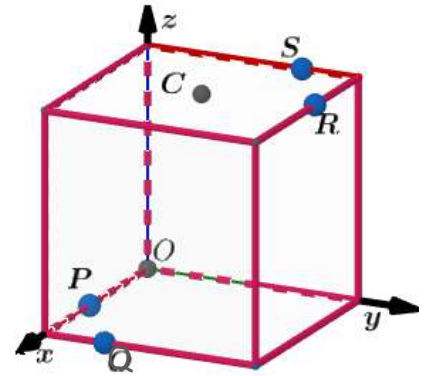
- P é o ponto de menor abscissa que pertence simultaneamente à reta r e à circunferência;
- Q é o ponto de maior abscissa que pertence simultaneamente à reta t e à circunferência.



Determine o valor da medida do comprimento do segmento de reta $[PQ]$.

- 13.** Na figura representa-se um cubo de aresta 1 no espaço munido do referencial ortonormado $Oxyz$. Os pontos $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$ são vértices do cubo e o ponto C é o centro da face superior do cubo.

Os pontos P, Q, R , e S pertencem a arestas do cubo.



- 13.1** Escreva as equações de dois planos perpendiculares à face superior do cubo que passam pelo ponto C e represente a reta de interseção desses dois planos por uma condição.
- 13.2** Escreva uma equação da superfície esférica de centro em C que passa por todos os vértices da base do cubo.
- 13.3** Supondo que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$, verifique que $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$.

Nestas condições, mostre que o ponto de interseção das diagonais do paralelogramo $[PSRQ]$ coincide com o centro do cubo.

Sugestão: Comece por identificar as coordenadas dos pontos P, Q, R e S . Exemplo: $P(p, 0, 0)$.

FIM

TESTE DE MATEMÁTICA – MOCK TESTE

2021

11.º ano de Escolaridade

(quatro páginas)

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As citações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Não é permitido o uso de máquina de calcular.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. No referencial ortonormado xOy da Figura 1 estão representados a circunferência trigonométrica e um trapézio retângulo $[ABCD]$.

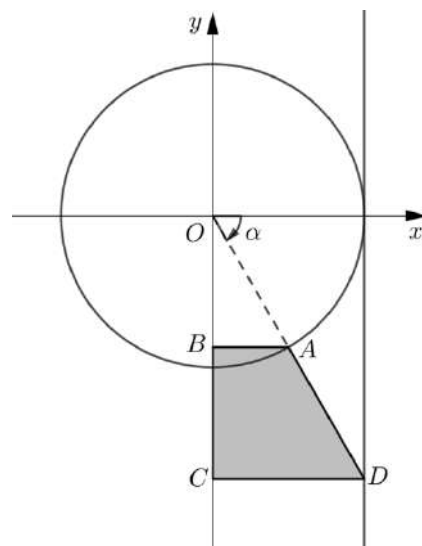


Figura 1

Sabe-se que:

- o ponto A pertence à circunferência trigonométrica;
- os pontos B e C pertencem ao eixo Oy ;
- a semirreta $\hat{OA}$ intersesta a reta $x = 1$ no ponto D ;
- $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[$.

1.1. Sabe-se que $\overline{OB} = \frac{2}{3}$ para uma posição do ponto A . Mostre que, nesse caso, $\overline{OC} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

1.2. Mostre que a área do trapézio, em função de α , é dada por $f(\alpha) = \frac{\sin^3(-\alpha)}{2 \cos \alpha}$

2. Sejam f e g duas funções reais de variável real definidas por:

$$f(x) = -4 \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{e} \quad g(x) = 4 \sin\left(\frac{x}{3}\right)$$

Admita que os gráficos das funções f e g estão representados num mesmo referencial ortonormado xOy . Determine uma expressão geral das abscissas dos pontos de interseção dos dois gráficos.

3. Considere num referencial ortonormado xOy , a reta r de equação $x + 2y = 10$ e a circunferência δ de centro C definida pela equação $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$.

3.1. Determine a equação reduzida da reta s que passa no ponto C e é perpendicular à reta r .

3.2. A circunferência δ intersesta o eixo Ox em dois pontos, e o eixo Oy em outros dois pontos.

Destes pontos, seja A o que tem abscissa negativa, e B o que tem ordenada negativa.

A inclinação, em graus, da reta AB é:

- (A) 135° (B) 120° (C) 60° (D) 45°

4. Na Figura 2 está representado, num referencial ortonormado $Oxyz$, a pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(12, 0, 8)$;
- o ponto B tem coordenadas $(0, -4, 14)$;
- o ponto V tem coordenadas $(-2, 7, 1)$;
- $3x - 6y + 2z - 52 = 0$ é uma equação do plano ABC .

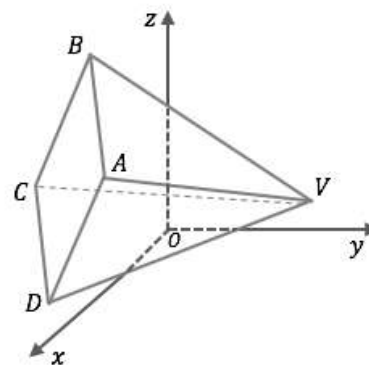


Figura 2

4.1. O plano ABV pode ser definido pela equação seguinte:

- (A) $6x + 2y - 3z + 1 = 0$ (B) $x + 12y + 10z - 92 = 0$
 (C) $-2x + 11y - 13z + 128 = 0$ (D) $x + y + z = 10$

4.2. Seja T o ponto de tangência da superfície esférica de centro V com o plano ABC .

Determine as coordenadas do ponto T .

5. Sabe-se que a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é igual a -360 , que a razão é -2 e que o quarto termo é igual a -5 . Determine o valor de n .

6. Considera a sucessão de termo geral $v_n = \frac{5 \times 3^{n+2}}{2^{n+1}}$. Prove que é uma progressão geométrica, indicando a respetiva razão.

7. Na Figura 3 estão representados, num referencial ortonormado xOy , parte do gráfico de uma função racional j de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$, bem como, a tracejado, as duas assíntotas do seu gráfico, as retas de equação $y = 2$ e $x = -3$

Considere a sucessão (u_n) tal que $\lim j(u_n) = +\infty$

Então o termo geral de (u_n) pode ser igual a

- (A) $2 + \frac{1}{n}$ (B) $-3 - \frac{2}{n}$ (C) $2 - \frac{1}{n}$ (D) $-3 + \frac{2}{n}$

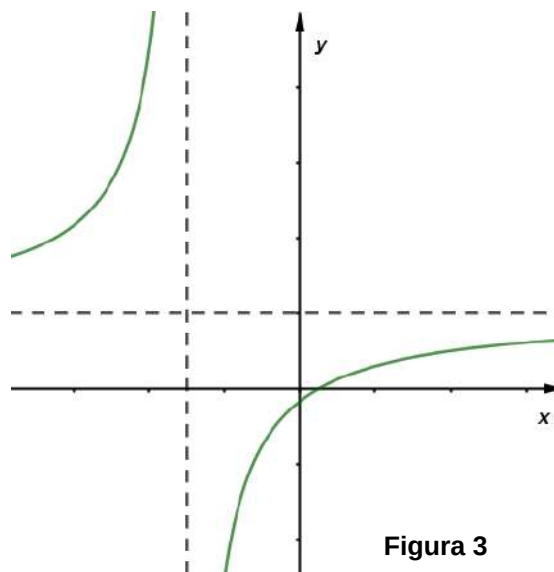


Figura 3

8. Considere a função h , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, definida por $h(x) = x - \frac{3}{x-2}$

8.1. Resolva a condição $h(x) \geq 0$.

8.2. Prove que $h(x) \times h(-x) = \frac{x^4 - 10x^2 + 9}{4 - x^2}$ em $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

9. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \frac{3}{2x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

Determine a abcissa do ponto de interseção do gráfico da função f com o eixo Ox .

10. O valor de $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{|2x-1|}{4x^2-4x+1}$ é igual a

(A) $+\infty$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) 0

(D) $-\infty$

11. Na Figura 4 está representada, num referencial ortonormado xOy , uma função polinomial f e a reta secante ao gráfico de f nos pontos A e B . Sabe-se que:

- o ponto B tem coordenadas $(3, 12)$;
- o ponto A de abcissa a tem ordenada 6;
- a taxa média de variação da função f no intervalo $[a, 3]$ é igual a 3.

A abcissa de A é igual a:

(A) 2

(B) $\frac{3}{2}$

(C) 1

(D) $\frac{1}{2}$

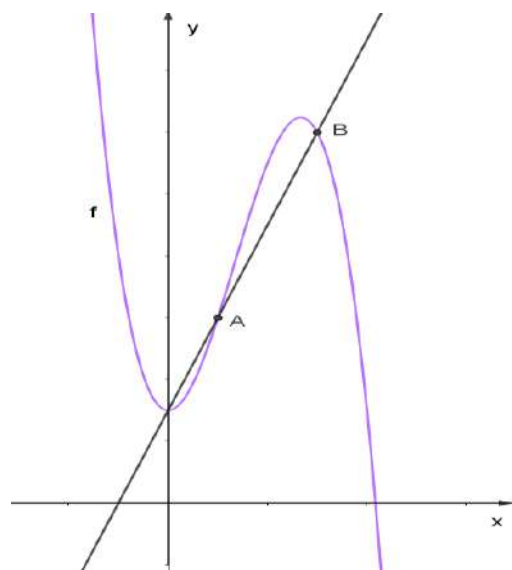


Figura 4

FIM

TESTE DE MATEMÁTICA – MOCK TESTE

2021

12.º ano de Escolaridade

(cinco páginas)

Caderno 1: É permitido o uso de calculadora.

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- **Caderno 1** – com recurso à calculadora
- **Caderno 2** – sem recurso à calculadora

Indica de forma legível a versão da prova.

Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risca aquilo que pretendes que não seja classificado.

Para cada resposta, identifica o grupo e o item.

Apresenta as suas respostas de forma legível.

Apresenta apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário. As citações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleciona a opção correta. Escreve, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfície

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base;
 g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 b c \cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis} (n\theta)$ ou $(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$ ou $\sqrt[n]{r e^{i\theta}} = \sqrt[n]{r} e^{i \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)}$

$(k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty (p \in \mathbb{R})$

1. Os cartões de um bingo são construídos distribuindo-se alguns dos inteiros de 1 a 75, sem repetição, numa tabela de cinco linhas por cinco colunas.

A primeira, segunda, terceira, quarta e quinta colunas são formadas por cinco inteiros, nos intervalos $[1,15]$, $[16,30]$, $[31,45]$, $[46,60]$ e $[61,75]$, respetivamente. Não será considerada a ordem em cada coluna. Por exemplo, os cartões seguintes são considerados **iguais**.

1	16	35	55	64
3	17	45	59	70
4	20	31	46	61
8	21	40	49	72
10	23	44	57	75

1	16	35	55	64
10	20	45	46	61
4	23	44	59	75
8	21	40	49	72
3	17	31	57	70

O total de cartões que se podem construir desta forma é:

- (A) 5×3003 (B) $5 \times 25!$ (C) $5! \times 25$ (D) 3003^5
2. Num referencial o.n. $Oxyz$, considera os pontos $P(-3, -1, 1)$ e $Q(7, 4, -4)$, e o ponto R tal que $3\overrightarrow{PR} = 2\overrightarrow{RQ}$.

Uma equação do plano que passa por R e é perpendicular à reta PQ é:

- (A) $2x + y - z = 6$ (B) $2x + y - z = 4$
(C) $10x + 5y - 5z = 4$ (D) $2x + y - z = 10$
3. Uma comissão de alunos finalistas, decidiu ir até à agência de viagens *EstudanTur*, especializada em viagens para alunos finalistas do 12ºano.

A comissão sugeriu as Ilhas Canárias como um bom destino, e ficaram a saber que a agência de viagens recorre a três hotéis (Hotel A, Hotel B e o Hotel C), para alojar os seus clientes nessas mesmas ilhas. Habitualmente, 30% dos clientes selecionam o hotel A, 45% o hotel B e os restantes o hotel C. Sabe-se ainda que 52% dos quartos do hotel A, 64% do hotel B e 40% do hotel C, são virados para o mar.

Um cliente, presente na agência, ouviu a conversa da comissão com o dono da agência e disse que também já tinha feito essa viagem no ano anterior e que tinha ficado num quarto com vista para o mar.

Qual a probabilidade desse cliente ter estado alojado no hotel A?

Apresenta o resultado na forma de dízima, arredondado às milésimas.

4. Seja f a função real de variável real definida por:

$$f(x) = x \ln \left(3 - \frac{1}{x} \right)$$

Sem recorrer à calculadora, a não ser para eventuais cálculos numéricos, resolve os itens seguintes:

4.1. Mostra que o domínio de f é $]-\infty, 0[\cup \left] \frac{1}{3}, +\infty \right[$.

4.2. Estuda a função f quanto à existência de assintotas oblíquas ao seu gráfico.

4.3. Mostra que existe pelo menos um ponto do gráfico de f cuja ordenada é o simétrico do quadrado da sua abcissa, no intervalo $]-2, -1[$.

5. Considera, num referencial o.n. xOy , a representação gráfica da função g , de domínio $[0, 5]$, definida em por $g(x) = \ln(e^x + 2) - 4x^3 e^{x-x^2}$.

Sabe-se que:

- A é ponto de coordenadas $(1, 0)$
- B é ponto de coordenadas $(4, 0)$
- P é um ponto que se desloca ao longo do gráfico da função g

Para cada posição do ponto P , considera o triângulo $[ABP]$.

Recorrendo às capacidades gráficas da tua calculadora determina as abcissas de, pelo menos, três pontos P para os quais a área do triângulo $[ABP]$ é $\frac{7}{2}$.

Não se pede para justificar a validade dos resultados observados na calculadora.

Na tua resposta debes:

- equacionar o problema
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiveres necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial
- indicar as abcissas dos pontos P com arredondamento às centésimas

6. Considera uma sucessão de cubos cujas arestas têm medidas em progressão geométrica de razão $k > 1$, sendo 2 a medida da primeira.

Seja (v_n) a sucessão dos respetivos volumes.

Então $u_n = \log v_n$ define uma progressão aritmética cujos primeiro termo e razão são, respetivamente:

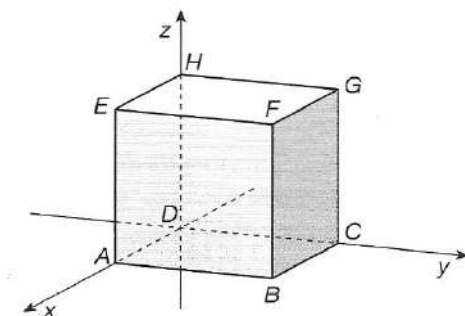
- (A) $u_1 = 3 \log 2$ e $r = 3 \log k$ (B) $u_1 = 8$ e $r = 3(n-1) \log k$
(C) $u_1 = \log 8$ e $r = 6 \log k$ (D) $u_1 = 2^3$ e $r = \log k^3$

7. Na figura ao lado está representado, num referencial o.n.

$Oxyz$, um cubo $[ABCDEFGH]$.

Os vértices A , C e H pertencem aos semieixos positivos Ox , Oy e Oz , respetivamente, e o vértice D coincide com a origem do referencial.

Considera que o vértice da F tem coordenadas $(4, 4, 4)$.



- 7.1. Determina o ponto de interseção da reta r definida vetorialmente por $(x, y, z) = (1, -1, -5) + \lambda(2, 3, 1), \lambda \in \mathbb{R}$, com o plano AFG .

Sugestão: Começa por determinar uma equação cartesiana do plano AFG .

- 7.2. Seja P o ponto de ordenada 1 do segmento de reta $[EF]$.

Seja α a amplitude do ângulo DPC .

Determina o valor de $\sin^2 \alpha$.

- 7.3. Escolhem-se, ao acaso, dois vértices do cubo.

Qual a probabilidade de ambos terem cota não nula, mas só um ter abcissa não nula?

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

Fim do Caderno 1

TESTE DE MATEMÁTICA – MOCK TESTE

2021

12.º ano de Escolaridade

(quatro páginas)

Caderno 2: Não é permitido o uso de calculadora.

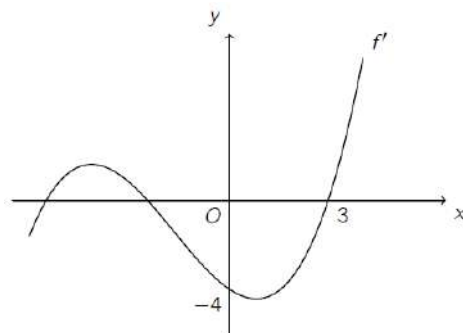
8. A elipse de centro na origem do referencial, cujo eixo maior mede 6 e que tem um foco no ponto $(-\sqrt{5}, 0)$ intersesta a reta de equação $x = 1$ em dois pontos, A e B . Então $\overline{AB}$ é igual a:

(A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (B) $3\sqrt{3}$ (C) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (D) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

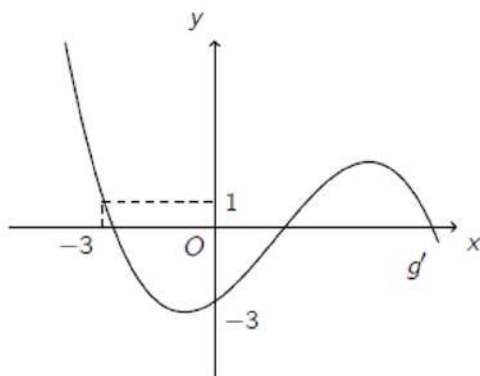
9. Na figura, está representada, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função f' , primeira derivada de f , contínua em todo o seu domínio.

Considera a função g , contínua em todo o seu domínio, definida por $g(x) = -f(-x) + x$.

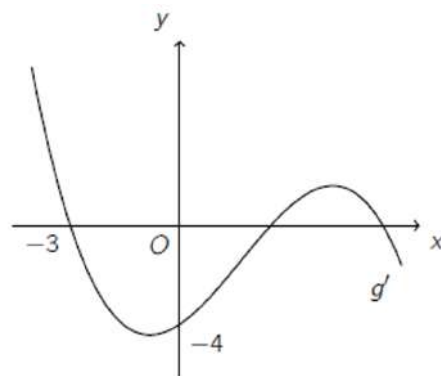
Qual dos seguintes gráficos pode ser parte do gráfico de g' , primeira derivada de g ?



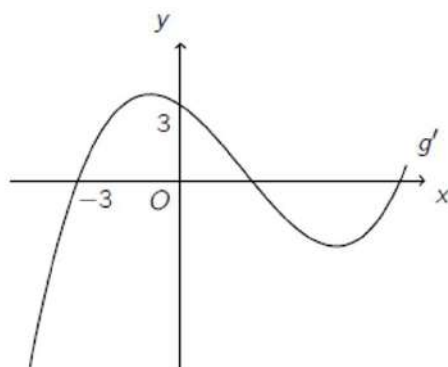
(A)



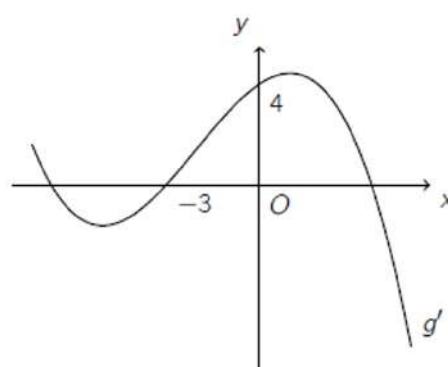
(B)



(C)



(D)



10. Calcula o valor de $\tan\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)$.

11. De uma função f , de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a sua segunda derivada é dada por:

$$f''(x) = e^{2x}(5 - x^2)(2x^2 + 1)(x - 2)^2.$$

Quantos pontos de inflexão tem o gráfico de f ?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

12. O valor de $5^{2+\log_5(w+1)}$ é:

- (A) $25w + 25$ (B) $5^2 + w + 1$
(C) $25 \log_5(w + 1)$ (D) $25 + \log_5(w + 1)$

13.

13.1. Mostra, usando o princípio de indução matemática, que

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

13.2. Utiliza o resultado da alínea anterior para determinar o limite da sucessão de termo geral

$$u_n = \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)} \right)^{2n}$$

14. De uma função f , de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- a sua **derivada**, f' , é dada por $f'(x) = 4e^{2x}(x - 1)^2$
- $f'(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

14.1. Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $\frac{1}{2}$.

14.2. Mostra que $f''(x) = 8e^{2x}(x^2 - x)$ e estuda f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico.

15. Para um certo valor de k , com $k \in \mathbb{N}$, tem-se que ${}^{2019}C_{132} = k + {}^{2017}C_{131}$.

Qual o valor de k ?

(A) ${}^{2017}C_{132}$

(B) ${}^{2017}C_{131} + {}^{2019}C_{132}$

(C) ${}^{2017}C_{130} + {}^{2018}C_{132}$

(D) ${}^{2018}C_{132}$

16. Resolva, em $\mathbb{R}$, a seguinte equação:

$$\ln(e^x + 2) = 2x$$

Fim do Caderno 2

Teste de Matemática

2021

2.º CICLO DO ENSINO BÁSICO – 6.º ANO

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

(14 páginas)

VERSÃO 1

A PREENCHER PELO ALUNO

Nome completo: _____

Não escrevas o teu nome em mais nenhum local da prova.

A PREENCHER PELA ESCOLA

Número convencional

A PREENCHER PELA ESCOLA

Número convencional

A PREENCHER PELO PROFESSOR CLASSIFICADOR

Classificação em percentagem: _____ (_____ por cento)

Correspondente ao nível: _____ (_____)

Data: ____ / ____ / 2021

Assinatura do Professor Classificador: _____



A prova é realizada no enunciado.

Apresenta as tuas respostas de forma legível.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, seleciona a opção correta (por exemplo, **(A)**).

Na resposta aos restantes, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova

Não é permitido o uso de máquina de calcular.

Não é permitido o uso de corretor.

Como material de escrita, apenas podes usar caneta ou esferográfica de tinta, azul ou preta, exceto nas construções que envolvam a utilização de material de desenho, onde o uso de lápis é permitido.

1. Identifica, de entre as tabelas seguintes, a que traduz uma situação de proporcionalidade direta.

(A)

x	1	2	8	40
y	4	2	0,5	0,1

(B)

x	1	2	8	40
y	1	4	64	1600

(C)

x	1	2	8	40
y	5	10	40	200

(D)

x	1	2	8	40
y	2	3	9	41

2. Considera os números naturais A e B cujas decomposições em fatores primos se apresentam:

$$A = 2^2 \times 5^7 \times 7^{10}$$

$$B = 3 \times 5^{13} \times 7^5$$

Sabe-se que $\text{m. d. c.}(A, B) = 5^x \times 7^y$

Os valores de x e y são, respetivamente:

(A) 13 e 10

(B) 7 e 10

(C) 7 e 5

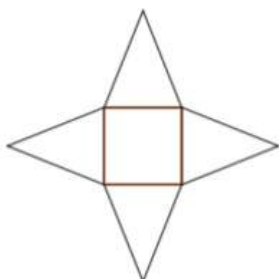
(D) 13 e 5

A transportar

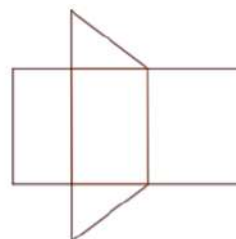
Transporte

3. Qual das figuras seguintes representa uma planificação de um poliedro com seis vértices?

(A)



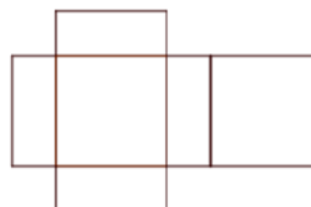
(B)



(C)



(D)



4. Um polígono regular com 1,2 cm de lado e 2,4 dm de perímetro tem quantos lados?

5. O Luís comprou uns ténis com um desconto de 30%. Quanto custavam os ténis, sabendo que o Luís pagou 35€?



A transportar

Transporte

6. Assinala o valor que deve aparecer no ■ de modo que:

$$\frac{4}{3} < \blacksquare < \frac{3}{2}$$

(A) $\frac{23}{15}$

(B) $\frac{41}{30}$

(C) $\frac{7}{6}$

(D) $\frac{4}{3}$

7. O Luís disse à Isabel que existia um poliedro convexo com oito faces, seis vértices e onze arestas. A Isabel disse que a afirmação do Luís é falsa. Concordas com a Isabel? Justifica a tua resposta.

8. Calcula o valor numérico das expressões seguintes.

8.1. $\frac{2}{3} + \frac{1}{25} \div \left(\frac{2}{5}\right)^2$

8.2. $3 - (-5) + (-12)$

A transportar

9. Completa as seguintes igualdades:

9.1. $\left(\frac{1}{3}\right)^6 \div \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^{\square}$

9.2. $2^3 \times 2^{\square} = 32$

10. Na **Figura 1**, estão representados dois triângulos equiláteros $[ABC]$ e $[ADE]$ e uma reta r .

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = \overline{AE}$
- a amplitude do ângulo CAD é 45°
- a reta r contém a bissetriz do ângulo CAD

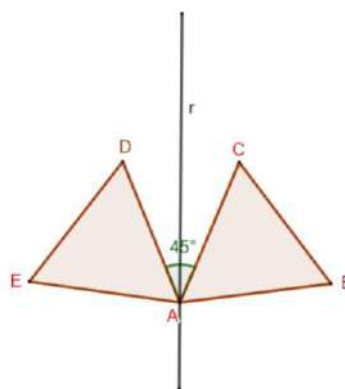


Figura 1

Completa de modo que cada uma das afirmações seguintes seja verdadeira.

10.1. O transformado do segmento de reta $[AB]$ pela reflexão axial de eixo r é o segmento de reta _____

10.2. O transformado do ponto C , pela rotação de centro A e amplitude 105° no sentido positivo, é o ponto _____

11. Observa a **Figura 2**, onde estão representados, numa reta numérica, cinco pontos, *A, B, C, D* e *E*.

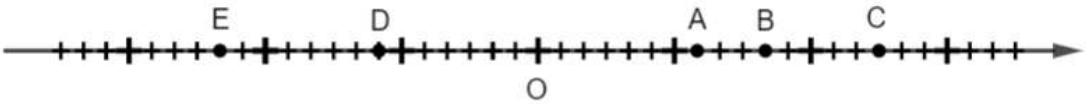


Figura 2

11.1. Completa a tabela seguinte.

Ponto	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
Abcissa		$\frac{5}{3}$			

11.2. Indica um par de pontos cujas abcissas sejam simétricas.

11.3. Indica os pontos cujas abcissas têm valor absoluto superior a 2.

12. Relativamente à **Figura 3**, sabe-se que:

- $[ABC]$ é um triângulo equilátero;
- $[ABC]$ está inscrito na circunferência de centro O
- $P \in [AB]$
- $OP \perp AB$

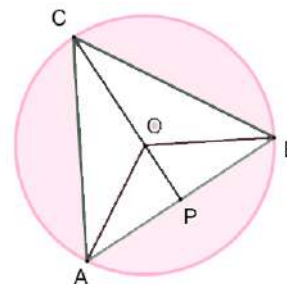


Figura 3

12.1. Justifica a seguinte afirmação:

“Os triângulos $[BCO]$ e $[CAO]$ são iguais.”

12.2. Qual dos seguintes segmentos de reta representa um apótema do triângulo $[ABC]$?

(A) $[CP]$

(B) $[OC]$

(C) $[OA]$

(D) $[OP]$

12.3. Considera os seguintes valores aproximados:

- lado do triângulo $[ABC]$, 3,4 cm;
- raio da circunferência, 2 cm;
- apótema do triângulo $[ABC]$, 1 cm.

Utilizando estes valores determina um valor aproximado da área da região sombreada da figura.

Utiliza 3,14 para valor aproximado de π .

Apresenta o resultado, em cm^2 , arredondado às unidades.

Mostra como chegaste à tua resposta.

13. Na **Figura 4**, está representado o cubo $[ABCDIKMP]$ de aresta 4 cm.

Sabe-se que os pontos E, F, G, H, J, L, N e Q são pontos médios das arestas do cubo.

Justifica que o volume do paralelepípedo $[EFGHJLNQ]$ é metade do volume do cubo $[ABCDIKMP]$ e determina quantos litros de água são necessários para encher o recipiente com a forma do paralelepípedo.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

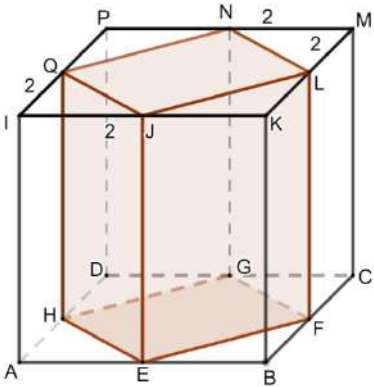
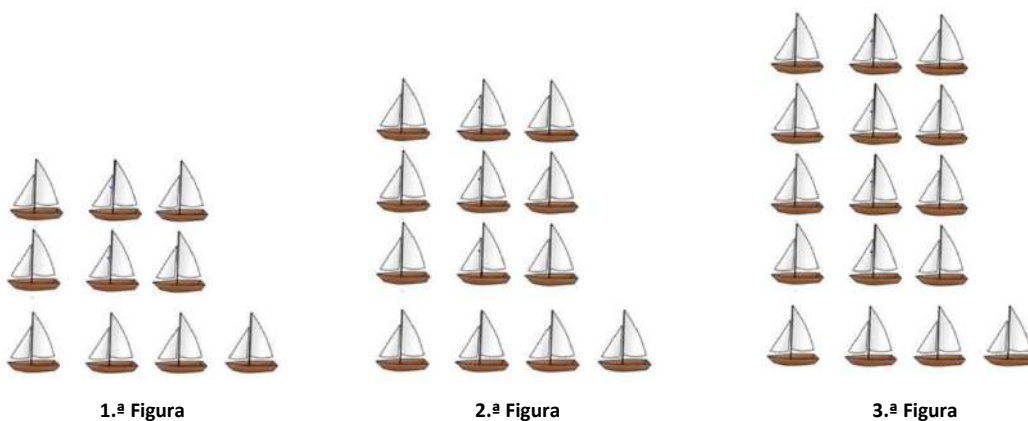


Figura 4

- 14.** Considera uma sequência em que cada termo é o número de barcos da figura correspondente. As três primeiras figuras são as seguintes onde se observa uma igualdade no número de barcos que é acrescentado a cada figura para se obter a seguinte.



- 14.1.** Se a regularidade se mantiver, quantos barcos terá a **6.ª Figura**? Explica o teu raciocínio.

- 14.2.** Qual das expressões pode ser geradora da sequência numérica?

Escolhe a opção correta.

- (A) $5n + 3$ (B) $5n + 5$ (C) $3n + 5$ (D) $3n + 7$

A viagem terá uma duração de dois dias.

Os Pereira farão uma paragem a cada 150 km e os Gomes a cada 200 km.

Sabe-se que uma das paragens é o hotel onde as duas famílias vão passar a noite.

Determina a distância que as duas famílias vão percorrer durante o segundo dia de viagem.

Mostra como chegaste à tua resposta.

A transporter

16. Na **Figura 5**, está representada a planificação de um prisma reto.

Relativamente ao prisma, sabe-se que:

- $[ABCD]$ é um trapézio retângulo
- $\overline{AB} = 7 \text{ cm}$
- $\overline{AD} = \overline{DC} = 4 \text{ cm}$
- $\overline{BC} = 5 \text{ cm}$

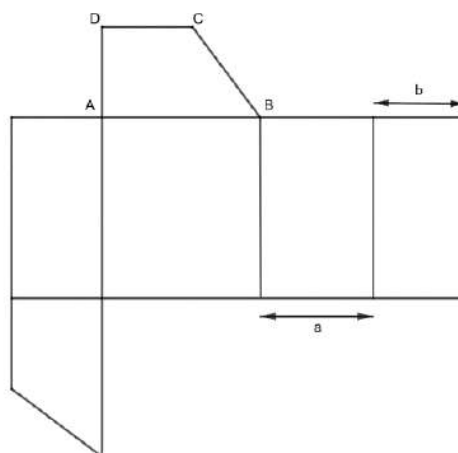


Figura 5

Indica o valor que representa cada uma das letras ***a*** e ***b***, sabendo que estas identificam os comprimentos de duas arestas do prisma.

17. Observa a **Figura 6**.

Sabe-se que:

- as retas PQ e UR são paralelas
- $T\hat{R}S = 80^\circ$
- $U\hat{R}Q = 40^\circ$

17.1. Justifica que $R\hat{P}Q = 60^\circ$.

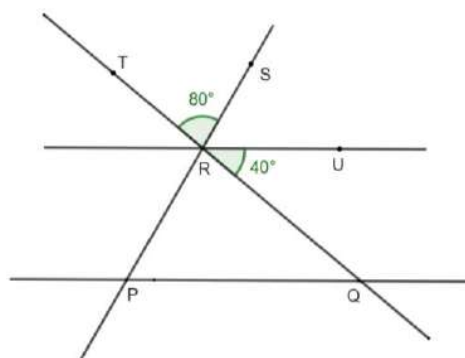


Figura 6

17.2. Classifica o triângulo $[PQR]$ quanto aos lados.
Justifica a tua resposta.

Esta página só deve ser utilizada se quiseres completar ou emendar qualquer resposta.
Caso a utilizes, não te esqueças de identificar claramente a questão a que se refere cada uma das respostas completadas ou emendadas.

FIM

COTAÇÕES

Item												
Cotação (em pontos)												
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.1.	8.2.	9.1.	9.2.	10.1.	10.2.
3	3	3	4	4	3	4	4	3	3	4	4	4
11.1.	11.2.	11.3.	12.1.	12.2.	12.3.	13.	14.1.	14.2.	15.	16.	17.1.	17.2.
4	3	3	4	3	6	6	4	3	6	4	4	4
TOTAL												100



Teste de Matemática

2021

2.º CICLO DO ENSINO BÁSICO – 6.º ANO

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

(14 páginas)

VERSÃO 2

A PREENCHER PELO ALUNO

Nome completo:

Não escrevas o teu nome em mais nenhum local da prova.

A PREENCHER PELA ESCOLA

Número convencional

A PREENCHER PELA ESCOLA

Número convencional

A PREENCHER PELO PROFESSOR CLASSIFICADOR

Classificação em percentagem: _____ (_____ por cento)

Correspondente ao nível: _____ (_____)

Data: ____ / ____ / 2021

Assinatura do Professor Classificador: _____



A prova é realizada no enunciado.

Apresenta as tuas respostas de forma legível.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, seleciona a opção correta (por exemplo, **(A)**) .

Na resposta aos restantes, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova

Não é permitido o uso de máquina de calcular.

Não é permitido o uso de corretor.

Como material de escrita, apenas podes usar caneta ou esferográfica de tinta, azul ou preta, exceto nas construções que envolvam a utilização de material de desenho, onde o uso de lápis é permitido.

1. Identifica, de entre as tabelas seguintes, a que traduz uma situação de proporcionalidade direta.

(A)

x	1	2	8	40
y	4	2	0,5	0,1

(B)

x	1	2	8	40
y	5	10	40	200

(C)

x	1	2	8	40
y	1	4	64	1600

(D)

x	1	2	8	40
y	2	3	9	41

2. Considera os números naturais A e B cujas decomposições em fatores primos se apresentam:

$$A = 2^2 \times 5^7 \times 7^{10}$$

$$B = 3 \times 5^{13} \times 7^5$$

Sabe-se que $\text{m. d. c.}(A, B) = 5^x \times 7^y$

Os valores de x e y são, respetivamente:

(A) 13 e 10

(B) 7 e 5

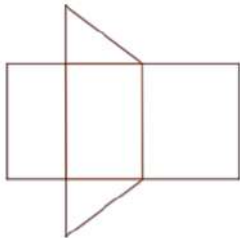
(C) 7 e 10

(D) 13 e 5

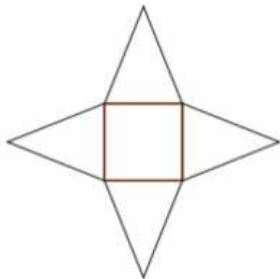
A transportar

3. Qual das figuras seguintes representa uma planificação de um poliedro com seis vértices?

(A)



(B)



(C)



(D)



4. Um polígono regular com 1,2 cm de lado e 2,4 dm de perímetro tem quantos lados?

5. O Luís comprou uns ténis com um desconto de 30%.
Quanto custavam os ténis, sabendo que o Luís pagou 35€?



Transporte

6. Assinala o valor que deve aparecer no ■ de modo que:

$$\frac{4}{3} < \blacksquare < \frac{3}{2}$$

(A) $\frac{23}{15}$

(B) $\frac{7}{6}$

(C) $\frac{41}{30}$

(D) $\frac{4}{3}$

7. O Luís disse à Isabel que existia um poliedro convexo com oito faces, seis vértices e onze arestas. A Isabel disse que a afirmação do Luís é falsa. Concordas com a Isabel? Justifica a tua resposta.

8. Calcula o valor numérico das expressões seguintes.

8.1. $\frac{2}{3} + \frac{1}{25} \div \left(\frac{2}{5}\right)^2$

8.2. $3 - (-5) + (-12)$

A transportar

9. Completa as seguintes igualdades:

9.1. $\left(\frac{1}{3}\right)^6 \div \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^{\square}$

9.2. $2^3 \times 2^{\square} = 32$

10. Na **Figura 1**, estão representados dois triângulos equiláteros $[ABC]$ e $[ADE]$ e uma reta r .

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = \overline{AE}$
- a amplitude do ângulo CAD é 45°
- a reta r contém a bissetriz do ângulo CAD

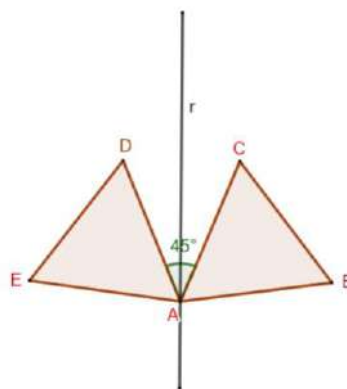


Figura 1

Completa de modo que cada uma das afirmações seguintes seja verdadeira.

- 10.1. O transformado do segmento de reta $[AB]$ pela reflexão axial de eixo r é o segmento de reta _____
- 10.2. O transformado do ponto C , pela rotação de centro A e amplitude 105° no sentido positivo, é o ponto _____

Transporte

11. Observa a **Figura 2**, onde estão representados, numa reta numérica, cinco pontos, A, B, C, D e E .

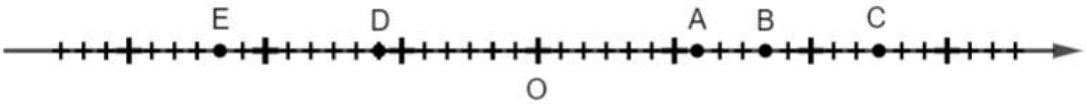


Figura 2

11.1. Completa a tabela seguinte.

Ponto	A	B	C	D	E
Abcissa		$\frac{5}{3}$			

11.2. Indica um par de pontos cujas abcissas sejam simétricas.

11.3. Indica os pontos cujas abcissas têm valor absoluto superior a 2.

A transportar

12. Relativamente à **Figura 3**, sabe-se que:

- $[ABC]$ é um triângulo equilátero;
- $[ABC]$ está inscrito na circunferência de centro O
- $P \in [AB]$
- $OP \perp AB$

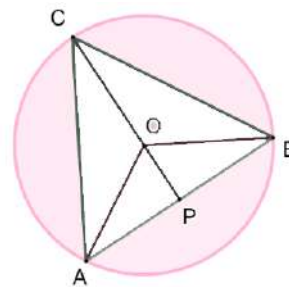


Figura 3

12.1. Justifica a seguinte afirmação:

“Os triângulos $[BCO]$ e $[CAO]$ são iguais.”

12.2. Qual dos seguintes segmentos de reta representa um apótema do triângulo $[ABC]$?

(A) $[CP]$

(B) $[OP]$

(C) $[OA]$

(D) $[OC]$

12.3. Considera os seguintes valores aproximados:

- lado do triângulo $[ABC]$, 3,4 cm;
- raio da circunferência, 2 cm;
- apótema do triângulo $[ABC]$, 1 cm.

Utilizando estes valores determina um valor aproximado da área da região sombreada da figura.

Utiliza 3,14 para valor aproximado de π .

Apresenta o resultado, em cm^2 , arredondado às unidades.

Mostra como chegaste à tua resposta.

13. Na **Figura 4**, está representado o cubo $[ABCDIKMP]$ de aresta 4 cm.

Sabe-se que os pontos E, F, G, H, J, L, N e Q são pontos médios das arestas do cubo.

Justifica que o volume do paralelepípedo $[EFGHJLNQ]$ é metade do volume do cubo $[ABCDIKMP]$ e determina quantos litros de água são necessários para encher o recipiente com a forma do paralelepípedo.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

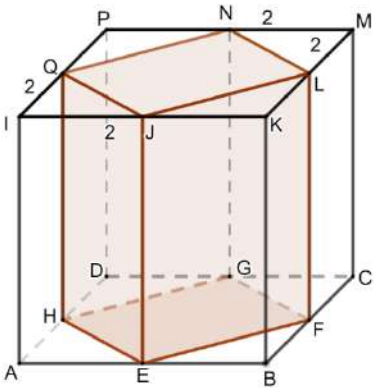
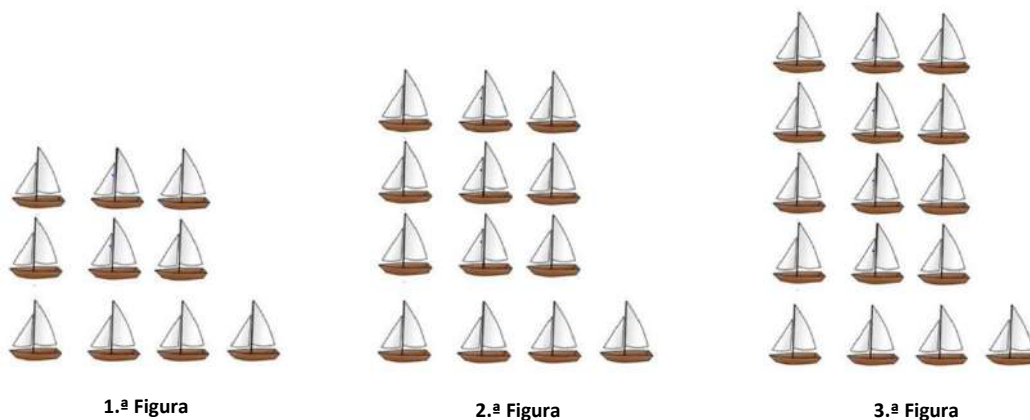


Figura 4

- 14.** Considera uma sequência em que cada termo é o número de barcos da figura correspondente. As três primeiras figuras são as seguintes onde se observa uma igualdade no número de barcos que é acrescentado a cada figura para se obter a seguinte.



- 14.1.** Se a regularidade se mantiver, quantos barcos terá a **6.ª Figura**? Explica o teu raciocínio.

- 14.2.** Qual das expressões pode ser geradora da sequência numérica?

Escolhe a opção correta.

- (A) $5n + 3$ (B) $5n + 5$ (C) $3n + 7$ (D) $3n + 5$

A viagem terá uma duração de dois dias.

Os Pereira farão uma paragem a cada 150 km e os Gomes a cada 200 km.

Sabe-se que uma das paragens é o hotel onde as duas famílias vão passar a noite.

Determina a distância que as duas famílias vão percorrer durante o segundo dia de viagem.

Mostra como chegaste à tua resposta.

A transporter

16. Na **Figura 5**, está representada a planificação de um prisma reto.

Relativamente ao prisma, sabe-se que:

- $[ABCD]$ é um trapézio retângulo
- $\overline{AB} = 7 \text{ cm}$
- $\overline{AD} = \overline{DC} = 4 \text{ cm}$
- $\overline{BC} = 5 \text{ cm}$

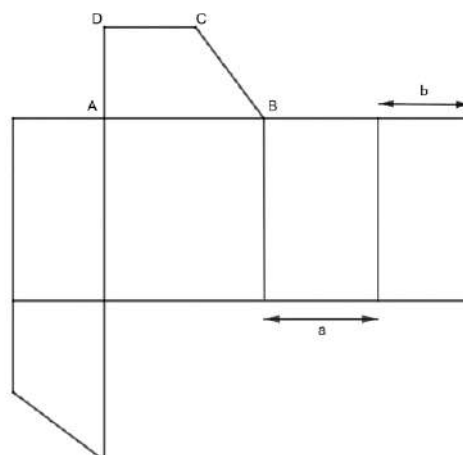


Figura 5

Indica o valor que representa cada uma das letras ***a*** e ***b***, sabendo que estas identificam os comprimentos de duas arestas do prisma.

17. Observa a **Figura 6**.

Sabe-se que:

- as retas PQ e UR são paralelas
- $\widehat{TRS} = 80^\circ$
- $\widehat{URQ} = 40^\circ$

17.1. Justifica que $\widehat{RPQ} = 60^\circ$.

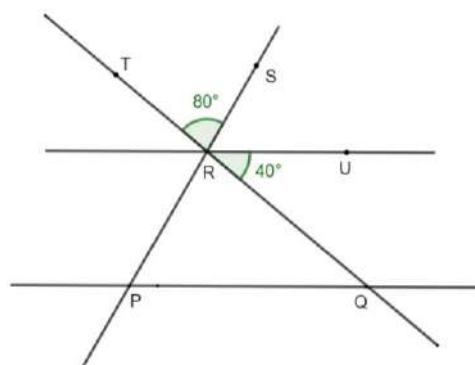


Figura 6

17.2. Classifica o triângulo $[PQR]$ quanto aos lados.
Justifica a tua resposta.

Esta página só deve ser utilizada se quiseres completar ou emendar qualquer resposta.
Caso a utilizes, não te esqueças de identificar claramente a questão a que se refere cada uma das respostas completadas ou emendadas.

IM

COTAÇÕES

Item												
Cotação (em pontos)												
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.1.	8.2.	9.1.	9.2.	10.1.	10.2.
3	3	3	4	4	3	4	4	3	3	4	4	4
11.1.	11.2.	11.3.	12.1.	12.2.	12.3.	13.	14.1.	14.2.	15.	16.	17.1.	17.2.
4	3	3	4	3	6	6	4	3	6	4	4	4
TOTAL												100



Teste de Matemática 6.º ANO

2021

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A prova é formada por itens de escolha múltipla, de resposta curta e de construção.

Itens de Escolha Múltipla

A cotação total do item é atribuída às respostas que apresentem, de forma inequívoca, a única opção correta.

Itens de Resposta Curta

A cotação total do item é atribuída quando é apresentada, de forma inequívoca, uma resposta correta. Neste tipo de itens admite-se a possibilidade de ser atribuída uma cotação intermédia para um nível intermédio de desempenho.

Itens de Construção

Nos itens cuja resposta envolve a apresentação de cálculos, de justificações, de composições ou de construções geométricas, os critérios de classificação das respostas apresentam-se organizados por etapas ou por níveis de desempenho.

Caso os alunos adotem um processo não previsto nos critérios específicos, cabe ao professor corretor adaptar a distribuição da cotação atribuída.

Deve ser atribuída a classificação de zero pontos nas seguintes situações:

- Caso um aluno apresente apenas o resultado final de um item, ou de uma etapa, quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações;
- Caso o aluno utilize de forma inequívoca a calculadora, uma vez que tal não é solicitado nesta prova.

Nas seguintes situações deve descontar-se um ponto às cotações estabelecidas para a etapa respetiva:

- Ocorrência de um erro de cálculo;
- Apresentação de uma resposta com o formato que não esteja de acordo com o que foi solicitado;
- Apresentação de expressões com erros do ponto de vista formal.

Caso ocorram erros que revelem desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades ou o aluno apresente uma resolução incompleta de uma etapa, deve descontar-se até metade da cotação dessa etapa.

Item												
Cotação (em pontos)												
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.1.	8.2.	9.1.	9.2.	10.1.	10.2.
3	3	3	4	4	3	4	4	3	3	4	4	4
11.1.	11.2.	11.3.	12.1.	12.2.	12.3.	13.	14.1.	14.2.	15.	16.	17.1.	17.2.
4	3	3	4	3	6	6	4	3	6	4	4	4

TOTAL 100

Critérios Específicos de Classificação

QUESTÃO

COTAÇÃO

1. _____ Versão 1 (C); versão 2 (B) _____ 3

2. _____ Versão 1 (C); Versão 2 (B) _____ 3

3. _____ Versão 1 (B); Versão 2 (A) _____ 3

4. (20 lados)..... 4

5. 4

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:		
Níveis	Descritores	Pontuação
Nível 1.	Apresenta uma estratégia adequada e completa, e responde corretamente (50 €)	4 pontos
Nível 2.	Apresenta uma estratégia adequada e completa, mas não responde corretamente OU Apresenta uma estratégia adequada, mas incompleta, e responde corretamente	2 pontos

6. _____ Versão 1 (B); Versão 2 (C) _____ 3

7. Justifica, usando a fórmula de Euler. 4

8. 7

8.1. 4

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:		
Níveis	Descritores	Pontuação
Nível 1.	Efetua corretamente todas as operações e apresenta a resposta $\frac{11}{12}$	4 pontos
Nível 2.	Respeita a prioridade das operações, efetua corretamente duas das três operações envolvidas na expressão numérica e apresenta a resposta.	2 pontos
Nível 3.	Respeita a prioridade das operações e efetua corretamente apenas uma das três operações envolvidas.	1 ponto

8.2..... 3

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:		
Níveis	Descritores	Pontuação
Nível 1.	Efetua corretamente todas as operações e apresenta a resposta (-4)	3 pontos
Nível 2.	Efetua corretamente apenas uma operação envolvida na expressão numérica e apresenta uma resposta.	1 ponto

9. 7**9.1. 3**

- Apresenta a resposta correta: $\boxed{2}$ **3 pontos**
- Apresenta outra resposta **0 pontos**

9.2. 4

- Apresenta a Resposta correta $\boxed{2}$ **4 pontos**
- Apresenta outra resposta **0 pontos**

10. 8**10.1 4**

- Resposta correta $[AE]$ **4 pontos**
- Apresenta outra resposta. **0 pontos**

10.2 4

- Resposta correta E **4 pontos**
- Apresenta outra resposta **0 pontos**

11. 10**11.1 4**

- $A \left(\frac{7}{6} \right)$ **1 ponto**
- $C \left(\frac{5}{2} \right)$ **1 ponto**
- $D \left(-\frac{7}{6} \right)$ **1 ponto**
- $E \left(-\frac{7}{3} \right)$ **1 ponto**

11.2 3

- A e D ou O e O **3 pontos**

11.3 3

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:		
Níveis	Descritores	Pontuação
Nível 1.	C e E	3 pontos
Nível 2.	Identifica apenas um dos pontos, C ou E	1 ponto

12. 13**12.1 4**

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:		
Níveis	Descritores	Pontuação
Nível 1.	Justifica a igualdade dos triângulos, referindo os pares de lados ou de ângulos homólogos.	4 pontos
Nível 2.	Justifica a igualdade dos triângulos, limitando-se a referir um dos critérios de igualdade de triângulos.	2 pontos

12.2	_____ Versão 1 (D); Versão 2 (B) _____	3									
12.3	_____	6									
	A classificação pode ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:										
	• Determina a área do círculo	2 pontos									
	• Determina a área do triângulo	2 pontos									
	• Calcula a diferença entre as áreas do círculo e do triângulo.	1 ponto									
	• Apresentar o resultado arredondado às unidades (7 cm^2).	1 ponto									
13.	_____	6									
	A classificação pode ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:										
	• Determina o volume do cubo	1 ponto									
	• Determina a área da base de um prisma triangular	1 ponto									
	• Calcula o volume do prisma triangular	1 ponto									
	• Calcula o volume dos quatro prismas triangulares	1 ponto									
	• Conclui que o volume do cubo é o dobro do volume do paralelepípedo	1 ponto									
	• Apresenta a resposta em litros (0,032 litros).	1 ponto									
14.	_____	7									
14.1	_____	4									
	A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:										
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Níveis</th><th>Descritores</th><th>Pontuação</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Nível 1.</td><td>25</td><td>4 pontos</td></tr> <tr> <td>Nível 2.</td><td>Conhece o procedimento para calcular o número de barcos, mas não responde, ou não responde corretamente.</td><td>2 ponto</td></tr> </tbody> </table>	Níveis	Descritores	Pontuação	Nível 1.	25	4 pontos	Nível 2.	Conhece o procedimento para calcular o número de barcos, mas não responde, ou não responde corretamente.	2 ponto	
Níveis	Descritores	Pontuação									
Nível 1.	25	4 pontos									
Nível 2.	Conhece o procedimento para calcular o número de barcos, mas não responde, ou não responde corretamente.	2 ponto									
14.2.	_____ Versão 1 (D); Versão 2 (C) _____	3									
15.	_____	6									
	A classificação pode ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:										
	• Indica os múltiplos de 150	1 ponto									
	• Indica os múltiplos de 200	1 ponto									
	• Indica o menor múltiplo comum	2 pontos									
	• Determina a distância pedida (400 km)	2 pontos									
16.	_____	4									
	$a = 5 \text{ cm}$	2 pontos									
	$b = 4 \text{ cm}$	2 pontos									
17.	_____	8									
17.1	_____	4									
	1.º processo										
	$U\hat{R}S = 180^\circ - S\hat{R}T - Q\hat{R}U$	2 pontos									
	$Q\hat{P}R = U\hat{R}S = 60^\circ$	2 pontos									
	2.º processo										
	$R\hat{Q}P = U\hat{R}Q = 40^\circ$	1 ponto									
	$Q\hat{R}P = S\hat{R}T = 80^\circ$	1 ponto									
	$Q\hat{P}R = 180^\circ - Q\hat{R}P - P\hat{Q}R = 60^\circ$	2 ponto									

17.2.**4**

$\widehat{PRQ} = 80^\circ$	1 ponto
$\widehat{RQP} = 40^\circ$	1 ponto
Justifica que, num triângulo, a ângulos diferentes opõem-se lados diferentes.	1 ponto
Triângulo escaleno	1 ponto

Teste de Matemática

2021

3.º CICLO DO ENSINO BÁSICO – 9.º ANO

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

(14 páginas)

VERSÃO 1

A PREENCHER PELO ALUNO

Nome completo:

Não escrevas o teu nome em mais nenhum local da prova.

A PREENCHER PELA ESCOLA

Número convencional

A PREENCHER PELA ESCOLA

Número convencional

A PREENCHER PELO PROFESSOR CLASSIFICADOR

Classificação em percentagem: _____ (_____ por cento)

Correspondente ao nível: _____ (_____)

Data: ____ / ____ / 2021

Assinatura do Professor Classificador: _____



A prova é realizada no enunciado.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta (por exemplo, **(A)**)

Na resposta aos restantes, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova

Não é permitido o uso de máquina de calcular.

Não é permitido o uso de corretor.

Como material de escrita, apenas pode usar caneta ou esferográfica de tinta, azul ou preta, exceto nas construções que envolvam a utilização de material de desenho, onde o uso de lápis é permitido.

Formulário

Geometria e Medida

Áreas

Polígono Regular: $\frac{\text{Perímetro}}{2} \times \text{Apótema}$

Trapézio: $\frac{\text{Base Maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Superfície esférica: $4\pi r^2$, sendo r o raio da esfera

Superfície lateral do cone: $\pi r g$, sendo r o raio da base do cone e g a geratriz do cone

Volumes

Prisma e cilindro: $\text{Área da Base} \times \text{Altura}$

Pirâmide e cone: $\frac{\text{Área da base} \times \text{Altura}}{3}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$, sendo r o raio da esfera

Trigonometria

Fórmula fundamental: $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$

Relação da tangente com o seno e o cosseno: $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$

Tabela trigonométrica

Graus	Senó	Cosseno	Tangente	Graus	Senó	Cosseno	Tangente
1	0,0175	0,9998	0,0175	46	0,7193	0,6947	1,0355
2	0,0349	0,9994	0,0349	47	0,7314	0,6820	1,0724
3	0,0523	0,9986	0,0524	48	0,7431	0,6691	1,1106
4	0,0698	0,9976	0,0699	49	0,7547	0,6561	1,1504
5	0,0872	0,9962	0,0875	50	0,7660	0,6428	1,1918
6	0,1045	0,9945	0,1051	51	0,7771	0,6293	1,2349
7	0,1219	0,9925	0,1228	52	0,7880	0,6157	1,2799
8	0,1392	0,9903	0,1405	53	0,7986	0,6018	1,3270
9	0,1564	0,9877	0,1584	54	0,8090	0,5878	1,3764
10	0,1736	0,9848	0,1763	55	0,8192	0,5736	1,4281
11	0,1908	0,9816	0,1944	56	0,8290	0,5592	1,4826
12	0,2079	0,9781	0,2126	57	0,8387	0,5446	1,5399
13	0,2250	0,9744	0,2309	58	0,8480	0,5299	1,6003
14	0,2419	0,9703	0,2493	59	0,8572	0,5150	1,6643
15	0,2588	0,9659	0,2679	60	0,8660	0,5000	1,7321
16	0,2756	0,9613	0,2867	61	0,8746	0,4848	1,8040
17	0,2924	0,9563	0,3057	62	0,8829	0,4695	1,8807
18	0,3090	0,9511	0,3249	63	0,8910	0,4540	1,9626
19	0,3256	0,9455	0,3443	64	0,8988	0,4384	2,0503
20	0,3420	0,9397	0,3640	65	0,9063	0,4226	2,1445
21	0,3584	0,9336	0,3839	66	0,9135	0,4067	2,2460
22	0,3746	0,9272	0,4040	67	0,9205	0,3907	2,3559
23	0,3907	0,9205	0,4245	68	0,9272	0,3746	2,4751
24	0,4067	0,9135	0,4452	69	0,9336	0,3584	2,6051
25	0,4226	0,9063	0,4663	70	0,9397	0,3420	2,7475
26	0,4384	0,8988	0,4877	71	0,9455	0,3256	2,9042
27	0,4540	0,8910	0,5095	72	0,9511	0,3090	3,0777
28	0,4695	0,8829	0,5317	73	0,9563	0,2924	3,2708
29	0,4848	0,8746	0,5543	74	0,9613	0,2756	3,4874
30	0,5000	0,8660	0,5774	75	0,9659	0,2588	3,7321
31	0,5150	0,8572	0,6009	76	0,9703	0,2419	4,0108
32	0,5299	0,8480	0,6249	77	0,9744	0,2250	4,3315
33	0,5446	0,8387	0,6494	78	0,9781	0,2079	4,7046
34	0,5592	0,8290	0,6745	79	0,9816	0,1908	5,1445
35	0,5736	0,8192	0,7002	80	0,9848	0,1736	5,6713
36	0,5878	0,8090	0,7265	81	0,9877	0,1564	6,3138
37	0,6018	0,7986	0,7536	82	0,9903	0,1392	7,1154
38	0,6157	0,7880	0,7813	83	0,9925	0,1219	8,1443
39	0,6293	0,7771	0,8098	84	0,9945	0,1045	9,5144
40	0,6428	0,7660	0,8391	85	0,9962	0,0872	11,4301
41	0,6561	0,7547	0,8693	86	0,9976	0,0698	14,3007
42	0,6691	0,7431	0,9004	87	0,9986	0,0523	19,0811
43	0,6820	0,7314	0,9325	88	0,9994	0,0349	28,6363
44	0,6947	0,7193	0,9657	89	0,9998	0,0175	57,2900
45	0,7071	0,7071	1,0000				

1. Qual é o valor do produto $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)$?

2. Considere a seguinte inequação

$$\frac{1}{3} - \frac{2x - 1}{3} < \frac{3(x + 2)}{2}$$

2.1 Resolva a inequação e apresente o seu conjunto solução na forma de intervalo de números reais.

Apresente todos os cálculos que efetuar.

2.2 Indique o menor número inteiro que é solução da inequação.

Nota: Caso não tenha resolvido a questão **2.1**, considere o intervalo $\left[-\frac{9}{5}, +\infty\right]$.

A transportar

3. Na Figura 1 estão representados, em referencial cartesiano, a função quadrática f e os triângulos $[OAB]$ e $[BCD]$.

Sabe-se que:

- a função f é definida por $f(x) = 3x^2$
- os pontos A e B pertencem ao gráfico de f
- os pontos E e B têm abscissa x , com $x > 0$
- os pontos E e D pertencem a Ox
- $\overline{EB} = \overline{BC} = \overline{ED}$
- os pontos A , B e C têm a mesma ordenada

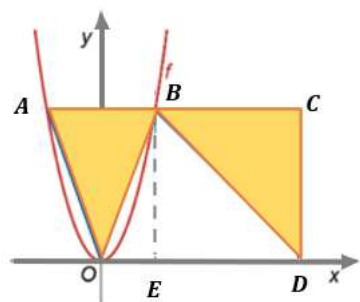


Figura 1

3.1 Calcule $f(1 + \sqrt{2})$.

3.2 Quando $x = 1$ as coordenadas dos pontos D e C são, respetivamente,

(A) $(3, 0)$ e $(3, 4)$

(B) $(4, 0)$ e $(4, 3)$

(C) $(4, 0)$ e $(4, 2)$

(D) $(3, 0)$ e $(3, 3)$

3.3 Mostre que a área da região sombreada é dada por $3x^3 + \frac{9}{2}x^4$.

3.4 Resolva a equação $3x^2 = (x + 1)^2 + 3$. Apresente todos os cálculos que efetuar.

4. A que número temos de elevar 4^6 para obter 8^{24} ?

5. Seja x um ângulo agudo.

Sabendo que $2\cos x = 3\sin x$, podemos concluir que $\operatorname{tg} x$ é igual a

(A) $\frac{3}{2}$

(B) $\frac{2}{3}$

(C) $\frac{4}{3}$

(D) $\frac{3}{4}$

6. Considere a seguinte Figura 2.

Sabe-se que:

- $\widehat{ABC} = 90^\circ$
- $\widehat{DEC} = 90^\circ$
- $\widehat{ACB} = 30^\circ$
- $\overline{EC} = 3$
- $\overline{CD} = \overline{EB}$

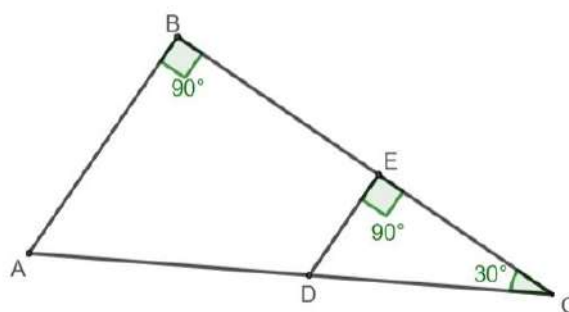


Figura 2

Determine o valor exato de $\overline{DA}$.

A transportar

7. Considere o cubo $[ABCDEFGH]$ representado na Figura 3.

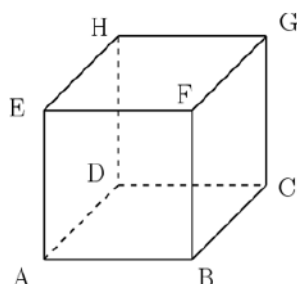


Figura 3

7.1 A seguinte afirmação é falsa.

“Se uma reta é paralela a um plano, então essa reta é paralela a todas as retas desse plano.”

Utilize letras do cubo representado na figura para dar um exemplo que mostre que a afirmação é falsa.

7.2 Uma caixa em forma de cubo tem 10 cm de aresta. Se aumentarmos a medida da aresta em 10% qual será o seu volume?

Apresente a resposta em cm^3 .

8. Na Figura 4 está representada uma circunferência de centro O e diâmetro $[AC]$.

Sabe-se que:

- o ponto B pertence à circunferência
- a amplitude do arco AC é o triplo da amplitude do arco AB
- $\overline{OC} = 2$

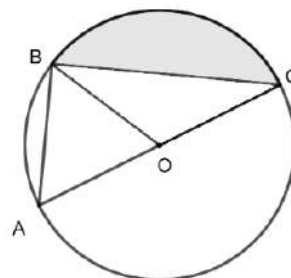


Figura 4

Mostre que:

8.1 a amplitude do arco AB , em graus, é 60° .

8.2 o triângulo $[AOB]$ é equilátero.

8.3 a área, em unidades quadradas, da região sombreada é $\frac{4}{3} \pi - \sqrt{3}$

9. O número 20^8 , em notação científica, tem a seguinte representação: $2,56 \times 10^{10}$.
Sabe-se que $20^7 = k \times 10^8$, com $k \in [a, b]$, sendo a e b dois números inteiros consecutivos.

Qual é o valor de a ?

- (A) 1 (B) 2 (C) 12 (D) 13

10. Considere o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} 4x - 4y = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

- 10.1 Resolva o sistema de equações.

Apresente todos os cálculos que efetuar.

- 10.2 Considere num referencial cartesiano as retas r e s .

- A retas r é definida pela equação: $y = x + 6$
- A reta s é definida pela equação: $y = -2x + 6$

Diga qual é a posição relativa das retas r e s .

11. Seja p um número inteiro.

Para qual dos seguintes valores de p o número $\frac{17}{2^5 \times 5^3 \times 3^p}$ pode ser representado por uma dízima finita?

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

12. Considere as afirmações seguintes:

I. Na Figura 5, a abcissa do ponto D é $2 + \sqrt{5}$
(O arco CD é um arco de circunferência de centro A)

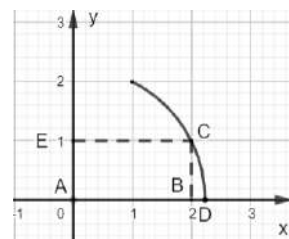


Figura 5

II. A equação $2x^2 - x + x = 5$ é uma equação do 2.º grau incompleta.

III. $\{x \in \mathbb{Z}: |x| < 4\} = \{0, 1, 2, 3\}$

Qual das opções seguintes é correta?

(A) II e III são verdadeiras

(B) I é falsa e II é verdadeira

(C) I é verdadeira e III é falsa

(D) II e III são falsas

13. Complete de modo a obter uma igualdade verdadeira

$$(x + 5)^2 - 9 = (x + 2)(x - \underline{\quad})$$

14. Na Figura 6 estão representados, em referencial cartesiano, parte dos gráficos de duas funções f e g .

Sabe-se que:

- a função f é definida por $f(x) = \frac{x^2}{3}$
- g é uma função de proporcionalidade inversa
- o ponto A de abcissa 3 pertence aos gráficos das funções f e g
- o ponto B de abcissa b , com $b > 0$, e ordenada 5 pertence ao gráfico de g

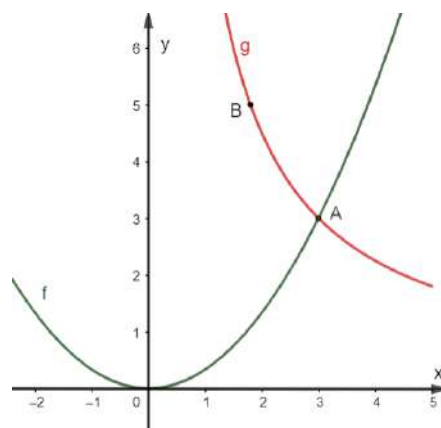


Figura 6

O valor de b é

(A) 45

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{5}{9}$

(D) $\frac{9}{5}$

Transporte

15. A Ana tem no seu quarto um aquário que se pode observar na Figura 7 abaixo, à esquerda.

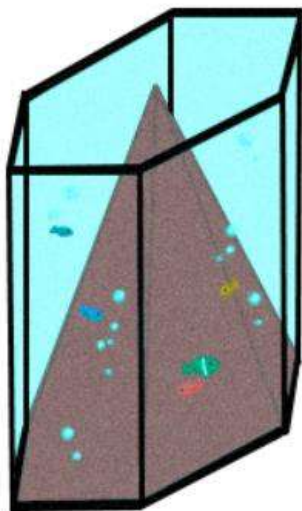


Figura 7

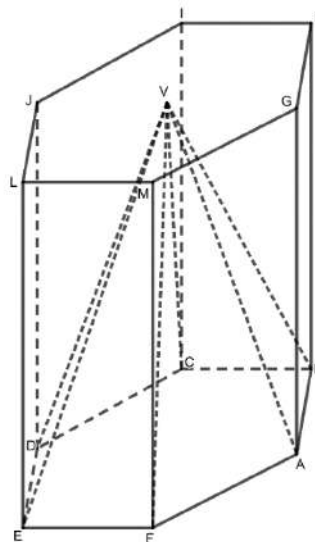


Figura 8

Na Figura 8, está representado um modelo geométrico desse aquário.

O modelo não está desenhado à escala.

O modelo do aquário é composto pelo prisma hexagonal $[ABCDEFGH IJLM]$, a que se retira a pirâmide hexagonal $[ABCDEFV]$.

Relativamente à figura da direita, sabe-se que:

- o prisma e a pirâmide têm a mesma base e a mesma altura
- o volume do prisma hexagonal é igual a $0,00936 \text{ m}^3$

A Ana necessita de quantos litros de água para encher o aquário?

Apresente todos os cálculos que efetuar.

TOTAL

Esta página só deve ser utilizada se quiser completar ou emendar qualquer resposta.
Caso a utilize, não se esqueça de identificar claramente a questão a que se refere cada uma das respostas completadas ou emendadas.

FIM

COTAÇÕES

Item												
Cotação (em pontos)												
1.	2.1.	2.2.	3.1.	3.2.	3.3.	3.4.	4.	5.	6.	7.1.	7.2.	8.1.
3	6	3	5	3	5	7	4	3	6	4	4	4
8.2.	8.3.	9.	10.1.	10.2.	11.	12.	13.	14.	15.			
6	6	3	6	3	3	3	4	3	6			
TOTAL												100

PROIBIDA A REPRODUÇÃO OU DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL POR QUALQUER MEIO. O PRESENTE ENUNCIADO É PROPRIEDADE DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA E A SUA DIVULGAÇÃO É SUSCEPTÍVEL DE CAUSAR GRAVES PREJUÍZOS À SPM E ÀS SUAS ESCOLAS ASSOCIADAS. OS RESPONSÁVEIS SERÃO PROCESSADOS CIVIL E CRIMINALMENTE PELOS PREJUÍZOS CAUSADOS

Teste de Matemática

2021

3.º CICLO DO ENSINO BÁSICO – 9.º ANO

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

(14 páginas)

VERSÃO 2

A PREENCHER PELO ALUNO

Nome completo:

Não escrevas o teu nome em mais nenhum local da prova.

A PREENCHER PELA ESCOLA

Número convencional

A PREENCHER PELA ESCOLA

Número convencional

A PREENCHER PELO PROFESSOR CLASSIFICADOR

Classificação em percentagem: _____ (_____ por cento)

Correspondente ao nível: _____ (_____)

Data: ____ / ____ / 2021

Assinatura do Professor Classificador: _____



A prova é realizada no enunciado.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta (por exemplo, **(A)**)

Na resposta aos restantes, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova

Não é permitido o uso de máquina de calcular.

Não é permitido o uso de corretor.

Como material de escrita, apenas pode usar caneta ou esferográfica de tinta, azul ou preta, exceto nas construções que envolvam a utilização de material de desenho, onde o uso de lápis é permitido.

Formulário

Geometria e Medida

Áreas

Polígono Regular: $\frac{\text{Perímetro}}{2} \times \text{Apótema}$

Trapézio: $\frac{\text{Base Maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Superfície esférica: $4\pi r^2$, sendo r o raio da esfera

Superfície lateral do cone: $\pi r g$, sendo r o raio da base do cone e g a geratriz do cone

Volumes

Prisma e cilindro: Área da Base $\times$ Altura

Pirâmide e cone: $\frac{\text{Área da base} \times \text{Altura}}{3}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$, sendo r o raio da esfera

Trigonometria

Fórmula fundamental: $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$

Relação da tangente com o seno e o cosseno: $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$

Tabela trigonométrica

Graus	Senó	Cosseno	Tangente	Graus	Senó	Cosseno	Tangente
1	0,0175	0,9998	0,0175	46	0,7193	0,6947	1,0355
2	0,0349	0,9994	0,0349	47	0,7314	0,6820	1,0724
3	0,0523	0,9986	0,0524	48	0,7431	0,6691	1,1106
4	0,0698	0,9976	0,0699	49	0,7547	0,6561	1,1504
5	0,0872	0,9962	0,0875	50	0,7660	0,6428	1,1918
6	0,1045	0,9945	0,1051	51	0,7771	0,6293	1,2349
7	0,1219	0,9925	0,1228	52	0,7880	0,6157	1,2799
8	0,1392	0,9903	0,1405	53	0,7986	0,6018	1,3270
9	0,1564	0,9877	0,1584	54	0,8090	0,5878	1,3764
10	0,1736	0,9848	0,1763	55	0,8192	0,5736	1,4281
11	0,1908	0,9816	0,1944	56	0,8290	0,5592	1,4826
12	0,2079	0,9781	0,2126	57	0,8387	0,5446	1,5399
13	0,2250	0,9744	0,2309	58	0,8480	0,5299	1,6003
14	0,2419	0,9703	0,2493	59	0,8572	0,5150	1,6643
15	0,2588	0,9659	0,2679	60	0,8660	0,5000	1,7321
16	0,2756	0,9613	0,2867	61	0,8746	0,4848	1,8040
17	0,2924	0,9563	0,3057	62	0,8829	0,4695	1,8807
18	0,3090	0,9511	0,3249	63	0,8910	0,4540	1,9626
19	0,3256	0,9455	0,3443	64	0,8988	0,4384	2,0503
20	0,3420	0,9397	0,3640	65	0,9063	0,4226	2,1445
21	0,3584	0,9336	0,3839	66	0,9135	0,4067	2,2460
22	0,3746	0,9272	0,4040	67	0,9205	0,3907	2,3559
23	0,3907	0,9205	0,4245	68	0,9272	0,3746	2,4751
24	0,4067	0,9135	0,4452	69	0,9336	0,3584	2,6051
25	0,4226	0,9063	0,4663	70	0,9397	0,3420	2,7475
26	0,4384	0,8988	0,4877	71	0,9455	0,3256	2,9042
27	0,4540	0,8910	0,5095	72	0,9511	0,3090	3,0777
28	0,4695	0,8829	0,5317	73	0,9563	0,2924	3,2708
29	0,4848	0,8746	0,5543	74	0,9613	0,2756	3,4874
30	0,5000	0,8660	0,5774	75	0,9659	0,2588	3,7321
31	0,5150	0,8572	0,6009	76	0,9703	0,2419	4,0108
32	0,5299	0,8480	0,6249	77	0,9744	0,2250	4,3315
33	0,5446	0,8387	0,6494	78	0,9781	0,2079	4,7046
34	0,5592	0,8290	0,6745	79	0,9816	0,1908	5,1445
35	0,5736	0,8192	0,7002	80	0,9848	0,1736	5,6713
36	0,5878	0,8090	0,7265	81	0,9877	0,1564	6,3138
37	0,6018	0,7986	0,7536	82	0,9903	0,1392	7,1154
38	0,6157	0,7880	0,7813	83	0,9925	0,1219	8,1443
39	0,6293	0,7771	0,8098	84	0,9945	0,1045	9,5144
40	0,6428	0,7660	0,8391	85	0,9962	0,0872	11,4301
41	0,6561	0,7547	0,8693	86	0,9976	0,0698	14,3007
42	0,6691	0,7431	0,9004	87	0,9986	0,0523	19,0811
43	0,6820	0,7314	0,9325	88	0,9994	0,0349	28,6363
44	0,6947	0,7193	0,9657	89	0,9998	0,0175	57,2900
45	0,7071	0,7071	1,0000				

1. Qual é o valor do produto $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)$?

2. Considere a seguinte inequação

$$\frac{1}{3} - \frac{2x - 1}{3} < \frac{3(x + 2)}{2}$$

2.1 Resolva a inequação e apresente o seu conjunto solução na forma de intervalo de números reais.

Apresente todos os cálculos que efetuar.

2.2 Indique o menor número inteiro que é solução da inequação.

Nota: Caso não tenha resolvido a questão **2.1**, considere o intervalo $\left[-\frac{9}{5}, +\infty\right)$.

A transportar

3. Na Figura 1 estão representados, em referencial cartesiano, a função quadrática f e os triângulos $[OAB]$ e $[BCD]$.

Sabe-se que:

- a função f é definida por $f(x) = 3x^2$
- os pontos A e B pertencem ao gráfico de f
- os pontos E e B têm abscissa x , com $x > 0$
- os pontos E e D pertencem a Ox
- $\overline{EB} = \overline{BC} = \overline{ED}$
- os pontos A , B e C têm a mesma ordenada

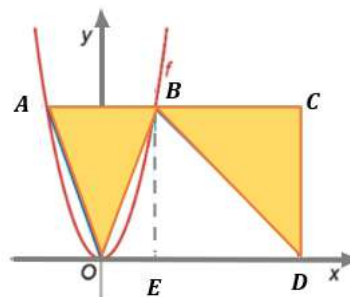


Figura 1

3.1 Calcule $f(1 + \sqrt{2})$.

3.2 Quando $x = 1$ as coordenadas dos pontos D e C são, respetivamente,

(A) (3,0) e (3,4)

(B) (4,0) e (4,2)

(C) (4, 0) e (4,3)

(D) (3, 0) e (3,3)

3.3 Mostre que a área da região sombreada é dada por $3x^3 + \frac{9}{2}x^4$.

3.4 Resolva a equação $3x^2 = (x + 1)^2 + 3$. Apresente todos os cálculos que efetuar.

A transportar

4. A que número temos de elevar 4^6 para obter 8^{24} ?

5. Seja x um ângulo agudo.

Sabendo que $2\cos x = 3\sin x$, podemos concluir que $\operatorname{tg} x$ é igual a

(A) $\frac{3}{2}$

(B) $\frac{3}{4}$

(C) $\frac{4}{3}$

(D) $\frac{2}{3}$

6. Considere a seguinte Figura 2.

Sabe-se que:

- $\widehat{ABC} = 90^\circ$
- $\widehat{DEC} = 90^\circ$
- $\widehat{ACB} = 30^\circ$
- $\overline{EC} = 3$
- $\overline{CD} = \overline{EB}$

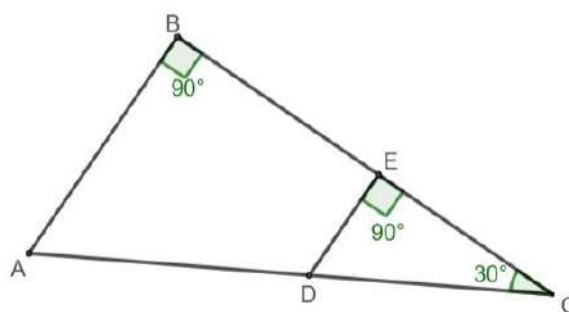


Figura 2

Determine o valor exato de $\overline{DA}$.

A transportar

7. Considere o cubo $[ABCDEFGH]$ representado na Figura 3.

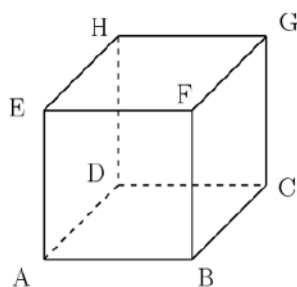


Figura 3

7.1 A seguinte afirmação é falsa.

“Se uma reta é paralela a um plano, então essa reta é paralela a todas as retas desse plano.”

Utilize letras do cubo representado na figura para dar um exemplo que mostre que a afirmação é falsa.

7.2 Uma caixa em forma de cubo tem 10 cm de aresta. Se aumentarmos a medida da aresta em 10% qual será o seu volume?

Apresente a resposta em cm^3 .

A transportar

8. Na Figura 4 está representada uma circunferência de centro O e diâmetro $[AC]$.

Sabe-se que:

- o ponto B pertence à circunferência
- a amplitude do arco AC é o triplo da amplitude do arco AB
- $\overline{OC} = 2$

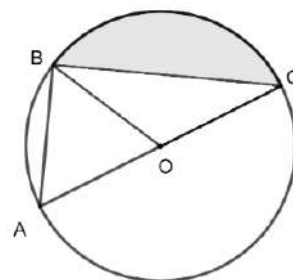


Figura 4

Mostre que:

8.1. a amplitude do arco AB , em graus, é 60° .

8.2. o triângulo $[AOB]$ é equilátero.

8.3. a área, em unidades quadradas, da região sombreada é $\frac{4}{3} \pi - \sqrt{3}$.

9. O número 20^8 , em notação científica, tem a seguinte representação: $2,56 \times 10^{10}$. Sabe-se que $20^7 = k \times 10^8$, com $k \in [a, b]$, sendo a e b dois números inteiros consecutivos.

Qual é o valor de a ?

- (A) 13 (B) 12 (C) 2 (D) 1

10. Considere o seguinte sistema de equações.

$$\begin{cases} 4x - 4y = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

- 10.1 Resolva o sistema de equações.

Apresente todos os cálculos que efetuar.

- 10.2 Considere num referencial cartesiano as retas r e s .

- A reta r é definida pela equação: $y = x + 6$
- A reta s é definida pela equação: $y = -2x + 6$

Diga qual é a posição relativa das retas r e s .

11. Seja p um número inteiro.

Para qual dos seguintes valores de p o número $\frac{17}{2^5 \times 5^3 \times 3^p}$ pode ser representado por uma dízima finita?

(A) 3

(B) 2

(C) 1

(D) 0

12. Considere as afirmações seguintes.

- I. Na Figura 5, a abcissa do ponto D é $2 + \sqrt{5}$.
(O arco CD é um arco de circunferência de centro A)

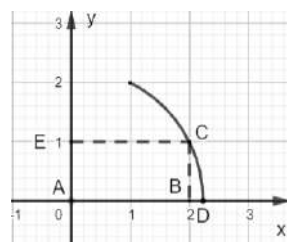


Figura 5

II. A equação $2x^2 - x + x = 5$ é uma equação do 2.º grau incompleta.

III. $\{x \in \mathbb{Z}: |x| < 4\} = \{0,1,2,3\}$

Qual das opções seguintes é correta?

(A) II e III são verdadeiras

(B) I é verdadeira e III é falsa

(C) I é falsa e II é verdadeira

(D) II e III são falsas

13. Complete de modo a obter uma igualdade verdadeira.

$$(x + 5)^2 - 9 = (x + 2)(x - \underline{\hspace{1cm}})$$

- 14.** Na Figura 6 estão representados, em referencial cartesiano, parte dos gráficos de duas funções f e g .

Sabe-se que:

- a função f é definida por $f(x) = \frac{x^2}{3}$
- g é uma função de proporcionalidade inversa
- o ponto A de abcissa 3 pertence aos gráficos das funções f e g
- o ponto B de abcissa b , com $b > 0$, e ordenada 5 pertence ao gráfico de g

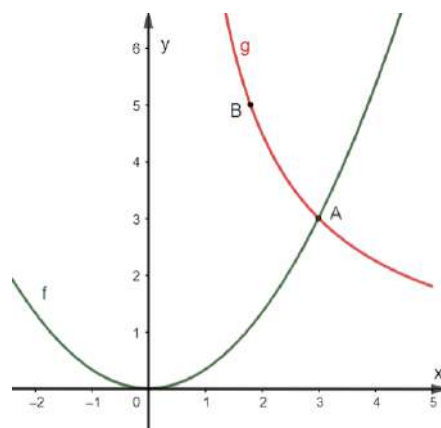


Figura 6

O valor de b é

- (A) $\frac{9}{5}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{5}{9}$ (D) 45

15. A Ana tem no seu quarto um aquário que se pode observar na Figura 7 abaixo, à esquerda.

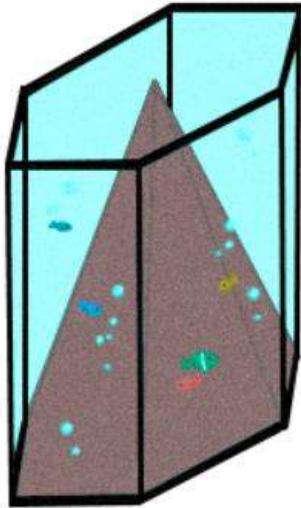


Figura 7

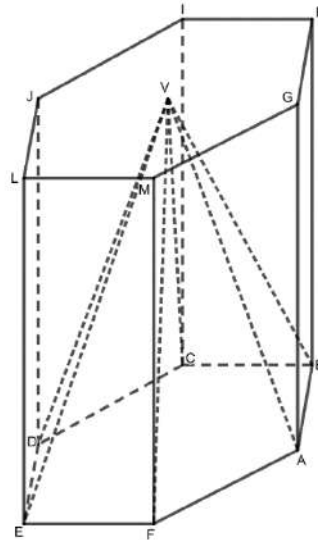


Figura 8

Na Figura 8, está representado um modelo geométrico desse aquário.

O modelo não está desenhado à escala.

O modelo do aquário é composto pelo prisma hexagonal $[ABCDEFGHILM]$, a que se retira a pirâmide hexagonal $[ABCDEFV]$.

Relativamente à figura da direita, sabe-se que:

- o prisma e a pirâmide têm a mesma base e a mesma altura
- o volume do prisma hexagonal é igual a $0,00936 \text{ m}^3$

A Ana necessita de quantos litros de água para encher o aquário?

Apresente todos os cálculos que efetuar.

Transporte

TOTAL

Esta página só deve ser utilizada se quiser completar ou emendar qualquer resposta.
Caso a utilize, não se esqueça de identificar claramente a questão a que se refere cada uma das respostas completadas ou emendadas.

FIM

COTAÇÕES

Item												
Cotação (em pontos)												
1.	2.1.	2.2.	3.1.	3.2.	3.3.	3.4.	4.	5.	6.	7.1.	7.2.	8.1.
3	6	3	5	3	5	7	4	3	6	4	4	4
8.2.	8.3.	9.	10.1.	10.2.	11.	12.	13.	14.	15.			
6	6	3	6	3	3	3	4	3	6			
TOTAL												100



Teste de Matemática 9.º ANO

2021

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A prova é formada por itens de escolha múltipla, de resposta curta e de construção.

Itens de Escolha Múltipla

A cotação total do item é atribuída às respostas que apresentem, de forma inequívoca, a única opção correta.

Itens de Resposta Curta

A cotação total do item é atribuída quando é apresentada, de forma inequívoca, uma resposta correta. Neste tipo de itens admite-se a possibilidade de ser atribuída uma cotação intermédia para um nível intermédio de desempenho.

Itens de Construção

Nos itens cuja resposta envolve a apresentação de cálculos, de justificações, de composições ou de construções geométricas, os critérios de classificação das respostas apresentam-se organizados por etapas ou por níveis de desempenho.

Caso os alunos adotem um processo não previsto nos critérios específicos, cabe ao professor corretor adaptar a distribuição da cotação atribuída.

Deve ser atribuída a classificação de zero pontos nas seguintes situações:

- Caso um aluno apresente apenas o resultado final de um item, ou de uma etapa, quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações;
- Caso o aluno utilize de forma inequívoca a calculadora, uma vez que tal não é solicitado nesta prova.

Nas seguintes situações deve descontar-se um ponto às cotações estabelecidas para a etapa respetiva:

- Ocorrência de um erro de cálculo;
- Apresentação de uma resposta com o formato que não esteja de acordo com o que foi solicitado;
- Apresentação de expressões com erros do ponto de vista formal.

Caso ocorram erros que revelem desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades ou o aluno apresente uma resolução incompleta de uma etapa, deve descontar-se até metade da cotação dessa etapa.

COTAÇÕES

Item												
Cotação (em pontos)												
1.	2.1.	2.2.	3.1.	3.2.	3.3.	3.4.	4.	5.	6.	7.1.	7.2.	8.1.
3	6	3	5	3	5	7	4	3	6	4	4	4
8.2.	8.3.	9.	10.1.	10.2.	11.	12.	13.	14.	15.			
6	6	3	6	3	3	3	4	3	6			

Critérios Específicos de Classificação

QUESTÃO

COTAÇÃO

1. _____ 3
- Apresenta a resposta ($\frac{1}{5}$)
2. _____ 9
- 2.1. _____ 6
- A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas.
- Desembaraçar a inequação de parêntesis..... 1 ponto
 - Reduzir ao mesmo denominador..... 1 ponto
 - Isolar os termos com incógnita num dos membros da inequação..... 1 ponto
 - Reduzir os termos semelhantes..... 1 ponto
 - Resolver a inequação obtida na etapa anterior..... 1 ponto
 - Apresentar o conjunto solução na forma de intervalo $(\left] -\frac{14}{13}, +\infty \right[)$ 1 ponto
- 2.2. Apresenta a resposta (-1)..... 3
- OU
- Um resultado compatível com a resposta da alínea anterior
3. _____ 20
- 3.1. _____ 5
- A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas.
- Substitui corretamente 1 ponto
 - Desenvolver o caso notável..... 2 pontos
 - Obter o resultado $(9 + 6\sqrt{2})$ 2 pontos
- 3.2. _____ Versão 1 (B); Versão 2 (C)..... 3
- 3.3. _____ 5
- A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas:
- Determinar a área do triângulo $[ABO]$ 2 pontos
 - Determinar a área do triângulo $[DCB]$ 1 ponto
 - Calcular a soma das áreas dos dois triângulos..... 1 ponto
 - Obter a expressão dada..... 1 ponto

3.4.		7									
	A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas:										
	• Escrever a condição na forma $ax^2 + bx + c = 0$	3 pontos									
	• Substituir, na fórmula resolvente, a , b e c pelos respectivos valores.....	1 ponto									
	• Determinar o valor do binómio discriminante.....	1 ponto									
	• Determinar as soluções da equação $(-1$ e $2)$	2 pontos									
4.		4									
	A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas:										
	• Escrever 4 e 8 como potência de base 2.....	2 pontos									
	• Aplicar corretamente as propriedades das operações com potências.....	1 ponto									
	• Apresentar a resposta correta (6).....	1 ponto									
5.	Versão 1 (B); Versão 2 (D)	3									
6.		6									
	A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas:										
	• Determinar $\overline{DC}$	2 pontos									
	• Determinar $\overline{AC}$	2 pontos									
	• Reconhecer que $\overline{DA} = \overline{AC} - \overline{DC} = 4$	2 pontos									
7.		8									
7.1.		4									
	A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:										
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Níveis</th><th>Descritores</th><th>Pontuação</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Nível 1.</td><td>Apresentar uma justificação correta</td><td>4 pontos</td></tr> <tr> <td>Nível 2.</td><td>Apresentar uma justificação incompleta ou com imprecisões.....</td><td>2 pontos</td></tr> </tbody> </table>	Níveis	Descritores	Pontuação	Nível 1.	Apresentar uma justificação correta	4 pontos	Nível 2.	Apresentar uma justificação incompleta ou com imprecisões.....	2 pontos	
Níveis	Descritores	Pontuação									
Nível 1.	Apresentar uma justificação correta	4 pontos									
Nível 2.	Apresentar uma justificação incompleta ou com imprecisões.....	2 pontos									
7.2.		4									
	A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas:										
	• Determinar a medida da aresta do cubo (11).....	2 pontos									
	• Determinar o volume do cubo obtido ($11^3 = 1331$).....	2 pontos									
8.		16									
8.1.		4									
	A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas:										
	• Reconhecer que a amplitude do arco AC é 180°	1 ponto									
	• Escrever a equação que permite calcular a amplitude do arco AB	2 pontos									
	• Obter o valor pedido.....	1 ponto									
8.2.		6									
	A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas:										
	• Reconhecer que $\widehat{AOB} = 60^\circ$	1 ponto									
	• Justificar que $\widehat{BAO} = \widehat{ABO}$	2 pontos									
	• Reconhecer que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180°	1 ponto									
	• Determinar $\widehat{BAO}$	1 ponto									
	• Concluir que o triângulo é equilátero.....	1 ponto									

- 8.3.** _____ **6**
- A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas:
- Determinar a área do setor circular..... **2 pontos**
 - Determinar a área do triângulo $[OCB]$ **3 pontos**
 - Determinar a área da região sombreada..... **1 ponto**
- 9.** _____ Versão 1 (C); Versão 2 (B) _____ **3**
- 10.** _____ **9**
- 10.1.** _____ **6**
- A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas:
- Resolver uma das equações em ordem a uma das incógnitas..... **1 ponto**
 - Substituir na outra equação essa incógnita pela expressão obtida..... **1 ponto**
 - Resolver a equação obtida..... **2 pontos**
 - Substituir na primeira equação o valor encontrado..... **1 ponto**
 - Obter a solução do sistema..... **1 ponto**
- 10.2.** _____ **3**
- Responde corretamente: As retas são concorrentes..... **3 pontos**
- Dá outra resposta **0 pontos**
- 11.** _____ Versão 1 (A); Versão 2 (D) _____ **3**
- 12.** _____ Versão 1 (B); Versão 2 (C) _____ **3**
- 13.** _____ **4**
- | | | |
|---|--------------------------------|-----------------|
| A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho: | | |
| Níveis | Descritores | Pontuação |
| Nível 1. | Apresenta o valor (-8) ----- | 4 pontos |
| Nível 2. | Apresenta o valor (8) ----- | 2 pontos |
- 14.** _____ Versão 1 (D); Versão 2 (A) _____ **3**
- 15.** _____ **6**
- A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas:
- Reconhecer que o volume da pirâmide é um terço do volume do prisma----- **3 pontos**
 - Calcular dois terços de 0,00936 ou equivalente----- **2 pontos**
 - Obter o valor pedido $(6,24\text{ l})$ ----- **1 ponto**



Teste de Matemática

2021

10.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

(cinco páginas)

VERSÃO 1

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Não é permitido o uso de máquina de calcular.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.



1. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$.

Qual das seguintes afirmações é falsa ?

- (A) $f(2 + \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3}$ (B) $g(x) = f(x - 1)$ é uma função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
 (C) $f(7^{-30}) = -7^{30}$ (D) $f(2) = \frac{1}{2}$

2. Na Figura 1 estão representadas, num referencial ortonormado do plano, as retas r , s e p , definidas respetivamente pelas equações

$$y = x + 1, \quad y = -5x + 18 \quad \text{e} \quad y = 2$$

Qual é a condição que define a região sombreada?

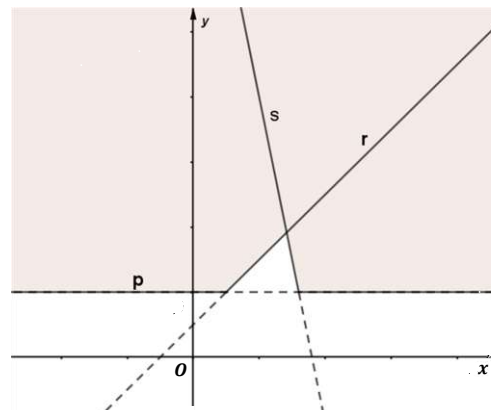


Figura 1

- (A) $y \geq 2 \vee (y \geq x + 1 \wedge y \geq -5x + 18)$ (B) $y \geq 2 \wedge (y \geq x + 1 \vee y \geq -5x + 18)$
 (C) $(y \geq 2 \vee y \geq x + 1) \wedge y \geq -5x + 18$ (D) $y \geq 2 \wedge y \geq x + 1 \wedge y \geq -5x + 18$

3. Considere o polinómio $P(x) = (x - 1)^2(x + 2)$.

3.1 Considere f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida pelo polinómio dado.

Construa para essa função, uma tabela de sinais e em seguida comente as seguintes afirmações:

- I) O gráfico de f intersesta o eixo Ox em três pontos distintos;
 II) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-2, +\infty[$;
 III) $f(1)$ é o mínimo absoluto.

3.2 Determine o resto da divisão inteira do polinómio $P(x + 1)$ por $x + 3$.

4. Considere, num plano munido de um referencial ortonormado, os pontos $A(1, -1)$, $B(3, -4)$ e $C(-1, 2)$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) Um vetor diretor da reta AB tem coordenadas $(2, 3)$.
 (B) O declive da reta AB é $-\frac{2}{3}$.
 (C) Uma equação vetorial da reta AB é $(x, y) = (1, -1) + k(2, 3), k \in \mathbb{R}$.
 (D) A equação reduzida da reta r , paralela à reta AB e que passa no ponto C é $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$.

5. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ e o respetivo gráfico num referencial ortonormado Oxy .

Sabe-se que

- O ponto V é o vértice da parábola que representa graficamente a função;
- O ponto B , distinto de V , pertence ao gráfico da função f ;
- Os vetores $\vec{v}$ e $\vec{b}$, vetores de posição dos pontos V e B , respetivamente, são colineares.

Determine as coordenadas do ponto B .

Sugestão: Note que $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$ e $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$

6. Na *Figura 2* está representada, num referencial ortonormado do plano, a reta BC de equação $y = -x + 1$

- O ponto C tem abcissa $\frac{1}{2} - a$ e o ponto B tem de abcissa $\frac{1}{2} + a$, em que $a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

Sabendo que a área do triângulo $[OCP]$ é m e a área triângulo $[OBP]$ é n , o valor de $m + n$ é:

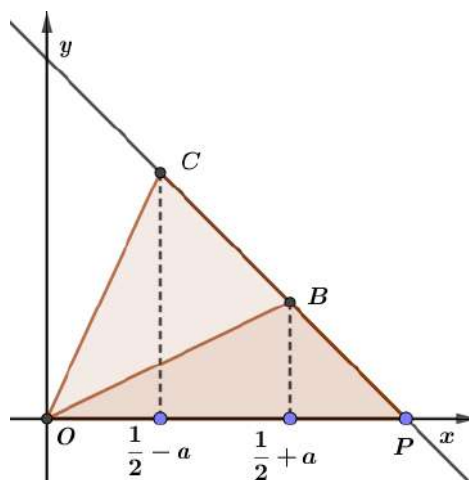


Figura 2

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $2a$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{4}$

7. No referencial ortonormado da *Figura 3* está representado:

- O gráfico da função f , definida em $\mathbb{R}$, por $f(x) = x^2$;
- O ponto $A\left(0, \frac{1}{4}\right)$;
- O ponto B de abcissa 1 que pertence ao gráfico da função.

7.1 Mostre que a circunferência de diâmetro $[AB]$ é tangente ao eixo das abcissas.

7.2 Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da condição

$$f(x) < 5x - 6$$

Apresente o conjunto na forma de intervalo.

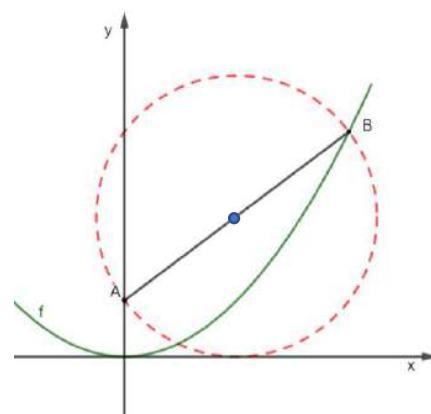
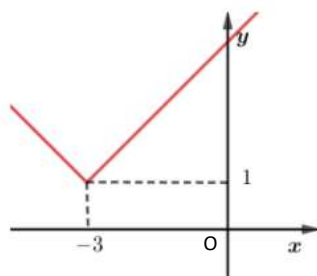


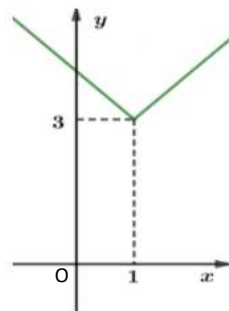
Figura 3

8. O gráfico da função f , definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = 1 + |x + 3|$ é:

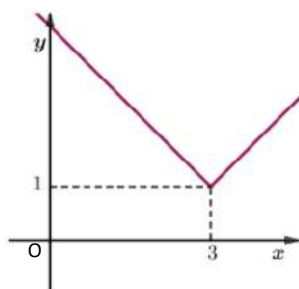
(A)



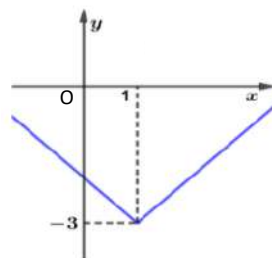
(B)



(C)



(D)



9. No referencial ortonormado do plano da *Figura 4* está representado o losango $[OABC]$.

Sabe-se que:

- O ponto A tem coordenadas $(3, 0)$;
- $y = \frac{1}{3}x$ é uma equação da reta OB .

Determine a área do losango $[OABC]$.

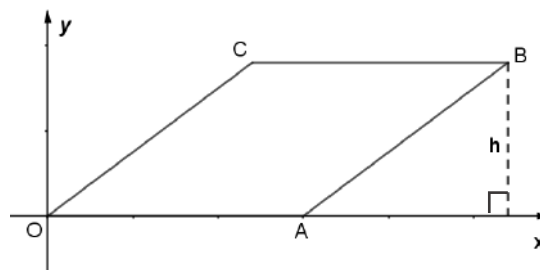


Figura 4

Sugestão: Comece por considerar as coordenadas do ponto B .

10. Considere, num referencial ortonormado do espaço,

- os pontos $A(1, 1, 3)$, $B(5, -3, 0)$, $C(3, -1, 4)$ e $D(-1, 3, 6)$
- As retas AB e CD de equações $(x, y, z) = (1, 1, 3) + k(4, -4, -3), k \in \mathbb{R}$ e $(x, y, z) = (3, -1, 4) + k(-4, 4, 2), k \in \mathbb{R}$, respetivamente.

10.1 Justifique que $(-7, 9, 9)$ são as coordenadas do ponto comum às duas retas.

Diga, justificando, se as duas retas são ou não complanares.

10.2 Admita que um *drone* parte do ponto A e segue no sentido de $\overrightarrow{AB} = (4, -4, -3)$ e outro *drone* parte do ponto C e segue no sentido de $\overrightarrow{CD} = (-4, 4, 2)$.

Averigue se há a possibilidade de os *drones* colidirem.

11. Considere na *Figura 5* um referencial $Oxyz$ e nele representado o paralelepípedo retângulo $[CBGIHFDA]$.

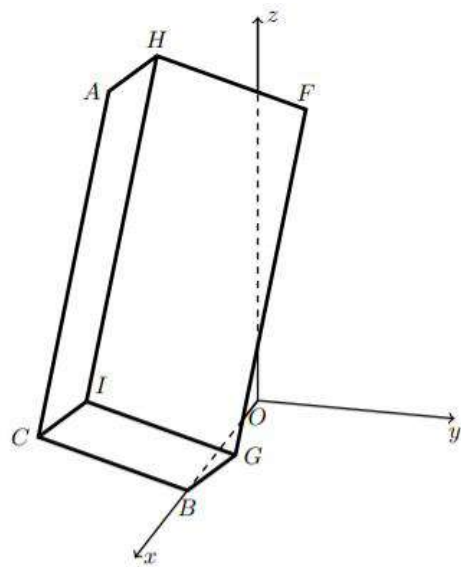


Figura 5

- $A(1, -2, 5)$, $C(5, -2, 1)$, $H(2, -1, 6)$ e $B(4, 0, 0)$ são vértices do paralelepípedo.
- 11.1 Determine as coordenadas do vértice D do paralelepípedo (ponto que não se visualiza na figura).
- 11.2 A reta AC está contida num plano paralelo a um dos planos coordenados.
Uma equação desse plano que contém AC é:

- (A) $x = 4$ (B) $y = 0$ (C) $z = -4$ (D) $y = -2$

FIM

Questão	1.	2.	3.1	3.2	4.	5.	6.	7.1	7.2	8.	9.	10.1	10.2	11.1	11.2	TOTAL
Cotação	8	8	19	18	8	18	8	19	19	8	10	16	16	17	8	200

PROIBIDA A REPRODUÇÃO OU DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL POR QUALQUER MEIO. O PRESENTE ENUNCIADO É PROPRIEDADE DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA E A SUA DIVULGAÇÃO É SUSCEPTÍVEL DE CAUSAR GRAVES PREJUÍZOS À SPM E ÀS SUAS ESCOLAS ASSOCIADAS. OS RESPONSÁVEIS SERÃO PROCESSADOS CIVIL E CRIMINALMENTE PELOS PREJUÍZOS CAUSADOS.

Teste de Matemática

2021

10.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

(cinco páginas)

VERSÃO 2

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As citações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Não é permitido o uso de máquina de calcular.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.



1. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$.

Qual das seguintes afirmações é falsa ?

- (A) $f(7^{-30}) = -7^{30}$ (B) $g(x) = f(x - 1)$ é uma função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
 (B) $f(2 + \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3}$ (D) $f(2) = \frac{1}{2}$

2. Na *Figura 1* estão representadas, num referencial ortonormado do plano, as retas r , s e p , definidas respetivamente pelas equações

$$y = x + 1, \quad y = -5x + 18 \quad \text{e} \quad y = 2$$

Qual é a condição que define a região sombreada?

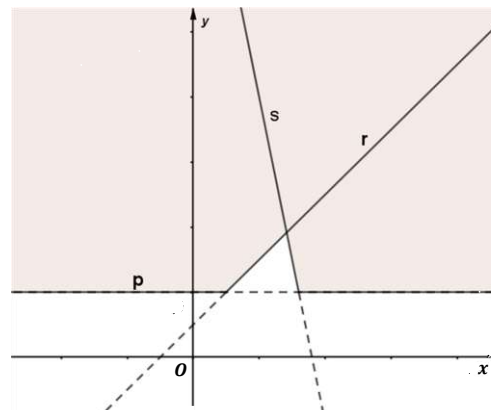


Figura 1

- (A) $y \geq 2 \vee (y \geq x + 1 \wedge y \geq -5x + 18)$ (B) $(y \geq 2 \vee y \geq x + 1) \wedge y \geq -5x + 18$
 (C) $y \geq 2 \wedge (y \geq x + 1 \vee y \geq -5x + 18)$ (D) $y \geq 2 \wedge y \geq x + 1 \wedge y \geq -5x + 18$
3. Considere o polinómio $P(x) = (x - 1)^2(x + 2)$.

- 3.1 Considere f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida pelo polinómio dado.

Construa para essa função, uma tabela de sinais e em seguida comente as seguintes afirmações:

- I) O gráfico de f intersesta o eixo Ox em três pontos distintos;
 II) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-2, +\infty[$;
 III) $f(1)$ é o mínimo absoluto.

- 3.2 Determine o resto da divisão inteira do polinómio $P(x + 1)$ por $x + 3$.

4. Considere, num plano munido de um referencial ortonormado, os pontos $A(1, -1)$, $B(3, -4)$ e $C(-1, 2)$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) Um vetor diretor da reta AB tem coordenadas $(2, 3)$.
 (B) O declive da reta AB é $-\frac{2}{3}$.
 (C) Uma equação vetorial da reta AB é $(x, y) = (1, -1) + k(2, 3), k \in \mathbb{R}$.
 (D) A equação reduzida da reta r , paralela à reta AB e que passa no ponto C é $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$.

5. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ e o respetivo gráfico num referencial ortonormado Oxy .

Sabe-se que

- O ponto V é o vértice da parábola que representa graficamente a função;
- O ponto B , distinto de V , pertence ao gráfico da função f ;
- Os vetores $\vec{v}$ e $\vec{b}$, vetores de posição dos pontos V e B respetivamente, são colineares.

Determine as coordenadas do ponto B .

Sugestão: Note que $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$ e $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$

6. Na *Figura 2* está representada, num referencial ortonormado do plano, a reta BC de equação $y = -x + 1$

- O ponto C tem abcissa $\frac{1}{2} - a$ e o ponto B tem de abcissa $\frac{1}{2} + a$, em que $a \in]0, \frac{1}{2}[$.

Sabendo que a área do triângulo $[OCP]$ é m e a área triângulo $[OBP]$ é n , o valor de $m + n$ é:

- (A) $2a$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{4}$

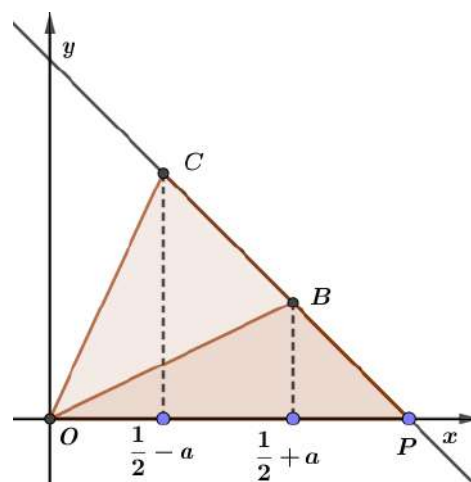


Figura 2

7. No referencial ortonormado da *Figura 3* está representado:

- O gráfico da função f , definida em $\mathbb{R}$, por $f(x) = x^2$;
- O ponto $A(0, \frac{1}{4})$;
- O ponto B de abcissa 1 que pertence ao gráfico da função.

7.1 Mostre que a circunferência de diâmetro $[AB]$ é tangente ao eixo das abcissas.

7.2 Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da condição

$$f(x) < 5x - 6$$

Apresente o conjunto na forma de intervalo.

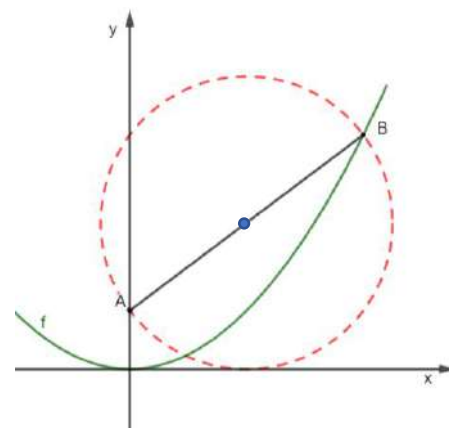
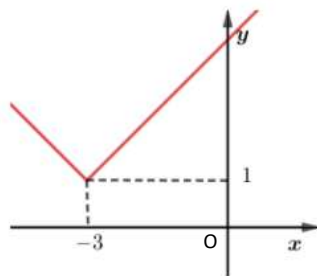


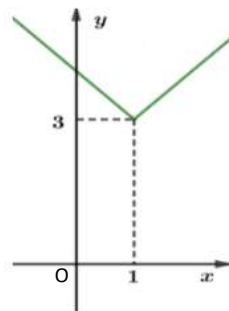
Figura 3

8. O gráfico da função f , definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = 1 + |x - 3|$ é:

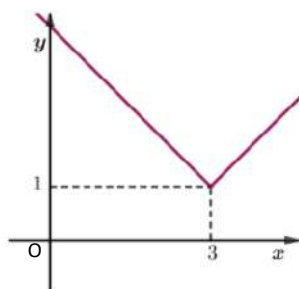
(A)



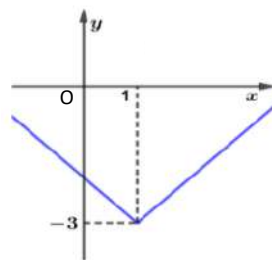
(B)



(C)



(D)



9. No referencial ortonormado do plano da *Figura 4* está representado o losango $[OABC]$.

Sabe-se que:

- O ponto A tem coordenadas $(3, 0)$;
- $y = \frac{1}{3}x$ é uma equação da reta OB .

Determine a área do losango $[OABC]$.

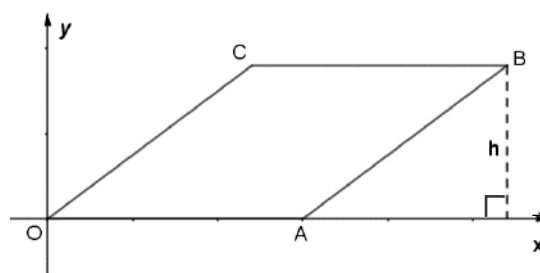


Figura 4

Sugestão: Comece por considerar as coordenadas do ponto B .

10. Considere, num referencial ortonormado do espaço,

- os pontos $A(1, 1, 3)$, $B(5, -3, 0)$, $C(3, -1, 4)$ e $D(-1, 3, 6)$
- As retas AB e CD de equações $(x, y, z) = (1, 1, 3) + k(4, -4, -3), k \in \mathbb{R}$ e $(x, y, z) = (3, -1, 4) + k(-4, 4, 2), k \in \mathbb{R}$, respetivamente.

10.1 Justifique que $(-7, 9, 9)$ são as coordenadas do ponto comum às duas retas.

Diga, justificando, se as duas retas são ou não coplanares.

10.2 Admita que um *drone* parte do ponto A e segue no sentido de $\overrightarrow{AB} = (4, -4, -3)$ e outro *drone* parte do ponto C e segue no sentido de $\overrightarrow{CD} = (-4, 4, 2)$.

Averigue se há a possibilidade de os drones colidirem.

11. Considere na *Figura 5* um referencial $Oxyz$ e nele representado o paralelepípedo retângulo $[CBGIHFDA]$.

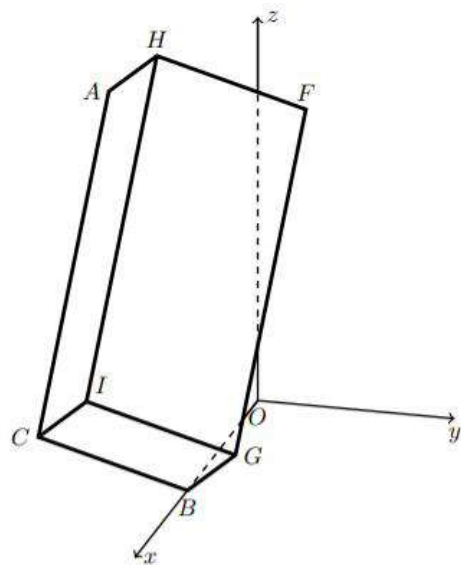


Figura 5

- $A(1, -2, 5)$, $C(5, -2, 1)$, $H(2, -1, 6)$ e $B(4, 0, 0)$ são vértices do paralelepípedo.
- 11.1 Determine as coordenadas do vértice D do paralelepípedo (ponto que não se visualiza na figura).
- 11.2 A reta AC está contida num plano paralelo a um dos planos coordenados. Uma equação desse plano que contém AC é:

- (A) $x = 4$ (B) $y = -2$ (C) $z = -4$ (D) $y = 0$

FIM

Questão	1.	2.	3.1	3.2	4.	5.	6.	7.1	7.2	8.	9.	10.1	10.2	11.1	11.2	TOTAL
Cotação	8	8	19	18	8	18	8	19	19	8	10	16	16	17	8	200

PROIBIDA A REPRODUÇÃO OU DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL POR QUALQUER MEIO. O PRESENTE ENUNCIADO É PROPRIEDADE DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA E A SUA DIVULGAÇÃO É SUSCEPTÍVEL DE CAUSAR GRAVES PREJUÍZOS À SPM E ÀS SUAS ESCOLAS ASSOCIADAS. OS RESPONSÁVEIS SERÃO PROCESSADOS CIVIL E CRIMINALMENTE PELOS PREJUÍZOS CAUSADOS.



Teste de Matemática 10.º ANO

2021

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A prova é formada por itens de escolha múltipla e de resposta restrita. Os critérios de classificação dos itens de resposta restrita estão organizados por etapas, atribuindo-se uma pontuação a cada uma delas.

Caso os alunos adotem um processo não previsto nos critérios específicos, cabe ao professor corretor adaptar a distribuição da cotação atribuída.

Deve ser atribuída a classificação de zero pontos nas seguintes situações:

- Caso um aluno apresente apenas o resultado final de um item ou de uma etapa, quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações;
- Caso o aluno utilize de forma inequívoca a calculadora, uma vez que tal não é solicitado nesta prova.

Nas seguintes situações deve descontar-se um ponto às cotações estabelecidas para a etapa respetiva:

- Ocorrência de um erro de cálculo;
- Apresentação de uma resposta com o formato que não esteja de acordo com o que foi solicitado;
- Apresentação de expressões com erros do ponto de vista formal.

Caso ocorram erros que revelem desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades ou o aluno apresente uma resolução incompleta de uma etapa, deve descontar-se até metade da cotação dessa etapa.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

QUESTÃO	1.	2.	3.1	3.2	4.	5.	6.	7.1	7.2	8.	9.	10.1	10.2	11.1	11.2	TOTAL
COTAÇÃO	8	8	19	18	8	18	8	19	19	8	10	16	16	17	8	200

QUESTÃO	DESCRIÇÃO	COTAÇÃO
1	Versão 1 (C); Versão 2 (A)	8
2	Versão 1 (B); Versão 2 (C)	8
3		37
3.1		19
	• Construir corretamente um quadro de estudo de sinal de um polinómio decomposto em fatores 12 pontos • Comentar as afirmações: - I: Falsa (Tem dois zeros distintos) 3 pontos - II: Falsa (Em $x = 1$ tem um zero) 2 pontos - III: Falsa (O contradomínio é $\mathbb{R}$ ou argumentação equivalente) 2 pontos	
3.2		18
	• Identificar o polinómio $P(x + 1)$ 9 pontos • Determinar o resto da divisão 9 pontos	
4	Versão 1 (D); Versão 2 (D)	8
5		18
	• Identificar o vértice da parábola ((1,2)) 4 pontos • Identificar um ponto genérico do gráfico da função 2 pontos • Escrever os vetores $\vec{v}$ e $\vec{b}$ 2 pontos • Indicar a condição de colinearidade entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{b}$ 4 pontos • Resolver a condição 4 pontos • Indicar as coordenadas do ponto B ((3,6)) 2 pontos	
6	Versão 1 (A); Versão 2 (B)	8

7		38
7.1		19
	• Escrever as coordenadas do ponto $B (1, 1)$ 4 pontos • Determinar o ponto médio do segmento $[AB]$..... 5 pontos • Determinar o diâmetro da circunferência 5 pontos • Verificar que a medida do raio é igual à ordenada do ponto médio de $[AB]$ $\left(\frac{5}{8}\right)$..... 5 pontos	
7.2		19
	• Transformar a condição dada noutra equivalente em que o 1.º membro é um polinómio do segundo grau e o segundo membro é zero 4 pontos • Determinar: • as raízes do polinómio 5 pontos • o sinal da função definida por este polinómio 5 pontos • Indicar o conjunto solução $(]2, 3[)$ 5 pontos	
8	Versão 1 (A); Versão 2 (C)	8
9		10
	• Escrever as coordenadas genéricas do • ponto $B \left(x, \frac{1}{3}x\right)$ 2 pontos • Reconhecer que $\ \vec{OA}\ = \ \vec{AB}\$..... 2 pontos • Estabelecer a condição $\ \vec{AB}\ = 3$..... 2 pontos • Determinar as soluções da condição 2 pontos • Determinar a Área $\left(\frac{27}{5}\right)$..... 2 pontos	
10		32
10.1		16
	• Substituir, na equação da reta AB, (x, y, z) por $(-7, 9, 9)$..... 3 pontos • Resolver a condição obtida e concluir que o ponto pertence à reta AB..... 4 pontos • Substituir, na equação da reta CD, (x, y, z) por $(-7, 9, 9)$..... 3 pontos • Resolver a condição obtida e concluir que o ponto pertence à reta CD..... 4 pontos • Concluir que as retas AB e CD são coplanares 2 pontos	
10.2	Fundamentar que o ponto $(-7, 9, 9)$ pertence à semirreta $\vec{CD}$ 16 mas não pertence à semirreta $\vec{AB}$, portanto não existe a possibilidade dos <i>drones</i> colidirem.	
11		25
11.1		17
	• Estabelecer que $D = A + \vec{CB}$, ou outra relação equivalente 7 pontos • Determinar $\vec{CB}$ ou outro vetor apropriado 5 pontos • Determinar $D (0, 0, 4)$ 5 pontos	
11.2	Versão 1 (D); Versão 2 (B)	8



SPM@TESTES

Teste de Matemática

2021

11.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

(cinco páginas)

VERSÃO 1

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Não é permitido o uso de máquina de calcular.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.



1. Na Figura 1 está representada, num referencial o.n. xOy , a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:

- o ponto D tem coordenadas $(1, 0)$;
- o ponto A pertence à circunferência;
- o ponto B pertence à circunferência e é tal que o segmento de reta $[AB]$ é paralelo ao eixo Oy ;
- o ponto C tem coordenadas $(-2, 0)$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo DOB , com $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$.

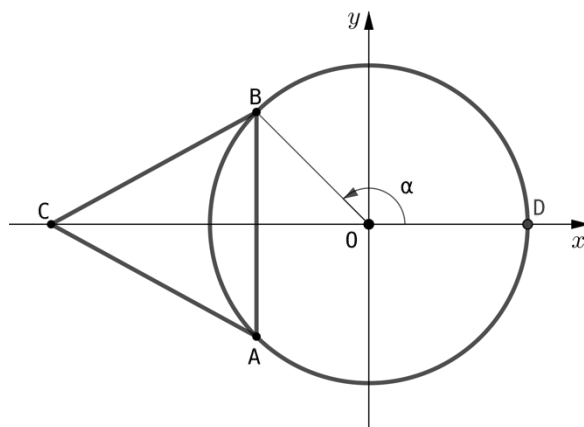


Figura 1

O perímetro do triângulo $[ABC]$ é dado, em função de α , por:

(A) $2\sin \alpha + 2\sqrt{5 + 4 \cos \alpha}$	(B) $-2\sin \alpha + 2\sqrt{5 + 4 \cos \alpha}$
(C) $2\sin \alpha + 2\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}$	(D) $-2\sin \alpha + 2\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}$

2. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1 - 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

2.1. Seja $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ tal que $f(2\alpha + \pi) = 1 - \sqrt{2}$. Determine o valor de $f(4\alpha)$.

2.2. Na Figura 2 está representada parte do gráfico da função f bem como o triângulo $[ABC]$.

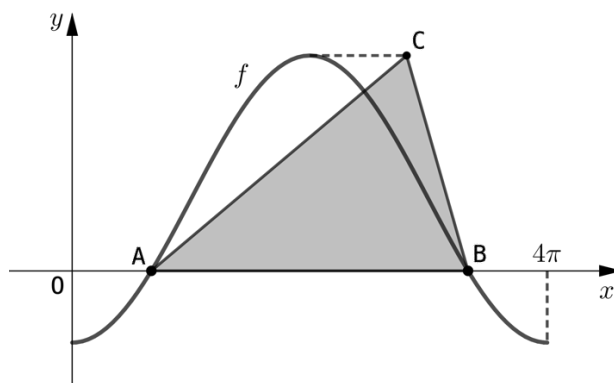


Figura 2

Sabe-se que:

- A e B são pontos de interseção do gráfico de f com o eixo das abcissas;
- a ordenada do ponto C é igual ao máximo de f .

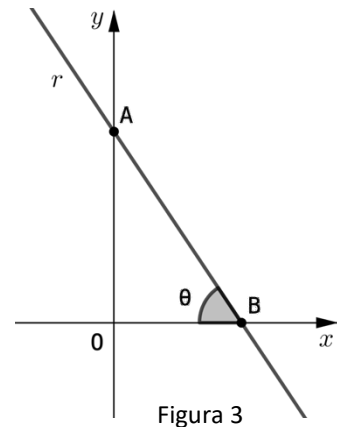
Determine o valor da área do triângulo $[ABC]$.

3. Na Figura 3 está representada, num referencial o.n. xOy , uma reta r que intersesta os eixos coordenados Oy e Ox nos pontos A e B , respetivamente.

A reta r é paralela à reta definida pela equação vetorial

$$(x, y) = (\sqrt{13}, 2) + k(2, -3), \quad k \in \mathbb{R}$$

Sendo $\widehat{ABO} = \theta$, determine o valor de $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$.



4. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os planos:

$$\alpha: 2x - 2y + z - 1 = 0 \quad \text{e} \quad \beta: x + 4ky - (k^2 + 2)z = 0, \quad \text{com } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- 4.1. Para um certo valor de k , os planos α e β são perpendiculares.

Determine esse valor de k .

- 4.2. Considere a reta r que passa pelo ponto $(1, 1, 1)$ e tem a direção do vetor $\vec{r}(-1, -1, 0)$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) A reta r é perpendicular ao plano α .
- (B) A reta r é concorrente com o plano α , mas não é perpendicular ao plano α .
- (C) A reta r é estritamente paralela ao plano α .
- (D) A reta r está contida no plano α .

- 4.3. Determine uma equação da superfície esférica de centro $C(3, -1, 2)$ que é tangente ao plano α .

5. De dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sabe-se que:

- $\|\vec{u}\| = 3$
- $\|\vec{v}\| = 5$
- $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 6$

Qual é o valor de $\vec{u} \cdot \vec{v}$?

(A) $\sqrt{2}$

(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(C) 1

(D) 2

6. Acerca de uma sucessão (u_n) , sabe-se que:

- $u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{(n+2)(2n+3)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$
- $\lim u_n = \lim v_n$ e $v_n = \frac{1-4n}{2n+3}$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) (u_n) não é monótona nem limitada.
 (B) (u_n) é monótona crescente e é limitada.
 (C) (u_n) é monótona decrescente e $u_1 > -2$.
 (D) (u_n) é monótona decrescente e não é minorada.

7. A sucessão (a_n) é uma progressão aritmética tal que $a_{10} = -25$ e $a_4 = -7$.
 Determine a soma dos primeiros 20 termos da sucessão.

8. Dado um certo valor natural de p , a sucessão (w_n) , de termos não nulos, verifica:

- $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(-1)^p}{2}$
- $w_2 = -16$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) Se $p = 1$ a sucessão (w_n) é uma progressão geométrica decrescente.
 (B) Se $p = 2$ a sucessão (w_n) é uma progressão geométrica de termos negativos e -16 é um dos minorantes do conjunto dos termos da sucessão.
 (C) Se $p = 3$ a sucessão (w_n) é uma progressão geométrica de razão $-\frac{1}{2}$ e $w_n = (-2)^{6-n}$.
 (D) Se $p = 2$ a sucessão (w_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e $w_n = -2^{6-n}$.

9. Fixado um número real k , a expressão seguinte define, no respetivo domínio, uma função racional f .

$$f(x) = \frac{kx + 1}{2x + 3}$$

9.1. Sabe-se que o gráfico da função f admite duas assíntotas que se intersectam num ponto. Designe esse ponto por P . Determine para que valor negativo de k , a distância de P à origem O é igual a $\frac{5}{2}$.

9.2. Considere $k = 1$ nas próximas questões.

9.2.1. Resolva a inequação $f(x) \leq \frac{3}{5}$

Apresente o conjunto solução na forma de intervalo ou de reunião de intervalos.

9.2.2. Determine o valor de $\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(f(x) \times \frac{4x+6}{x^3-3x-2} \right)$

10. No referencial cartesiano da Figura 4 estão representados parte do gráfico de uma função g e a reta t tangente ao gráfico de g no ponto $A(1,1)$.

Sabe-se ainda que a reta t interseca o eixo Ox no ponto B de abscissa $-\frac{1}{2}$.

Qual o valor de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-1}{2-2x}$?

- (A) $-\frac{2}{3}$
- (B) $-\frac{1}{3}$
- (C) $\frac{1}{3}$
- (D) $\frac{2}{3}$

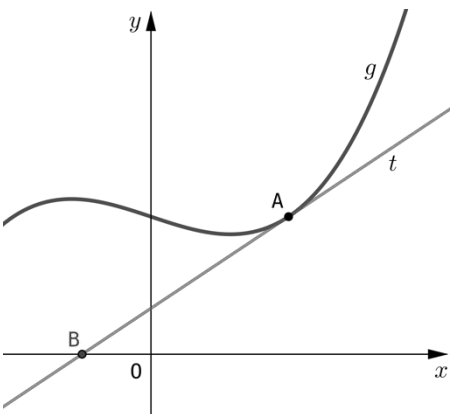


Figura 4

FIM

QUESTÃO	1.	2.1	2.2	3	4.1	4.2	4.3	5.	6.	7.	8.	9.1	9.2.1	9.2.2	10.	TOTAL
COTAÇÃO	8	18	20	16	12	8	20	8	8	18	8	16	16	16	8	200



SPM@TESTES

Teste de Matemática

2021

11.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

(cinco páginas)

VERSÃO 2

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Não é permitido o uso de máquina de calcular.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.



1. Na Figura 1 está representada, num referencial o.n. xOy , a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:

- o ponto D tem coordenadas $(1, 0)$;
- o ponto A pertence à circunferência;
- o ponto B pertence à circunferência e é tal que o segmento de reta $[AB]$ é paralelo ao eixo Oy ;
- o ponto C tem coordenadas $(-2, 0)$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo DOB , com $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$.

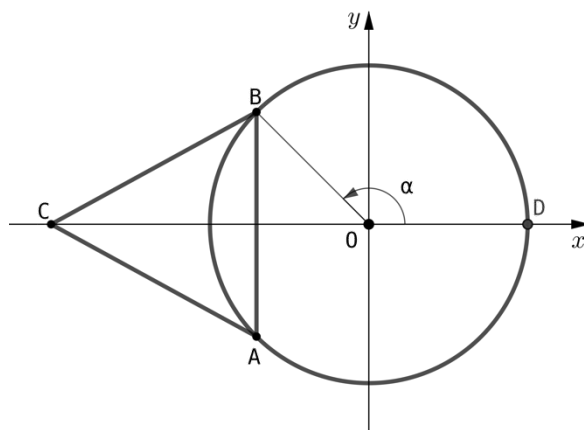


Figura 1

O perímetro do triângulo $[ABC]$ é dado, em função de α , por:

(A) $2\sin \alpha + 2\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}$	(B) $-2\sin \alpha + 2\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}$
(C) $2\sin \alpha + 2\sqrt{5 + 4 \cos \alpha}$	(D) $-2\sin \alpha + 2\sqrt{5 + 4 \cos \alpha}$

2. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1 - 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

2.1. Seja $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[$ tal que $f(2\alpha + \pi) = 1 - \sqrt{2}$. Determine o valor de $f(4\alpha)$.

2.2. Na Figura 2 está representada parte do gráfico da função f bem como o triângulo $[ABC]$.

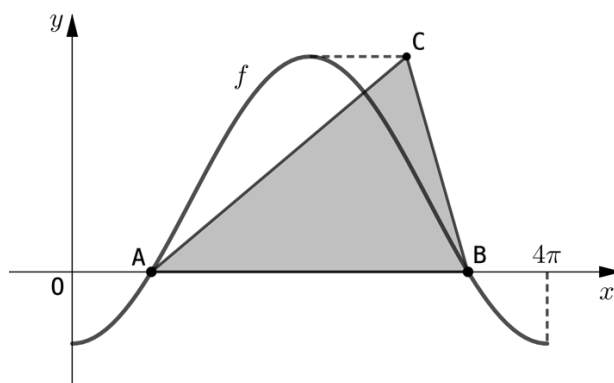


Figura 2

Sabe-se que:

- A e B são pontos de interseção do gráfico de f com o eixo das abcissas;
- a ordenada do ponto C é igual ao máximo de f .

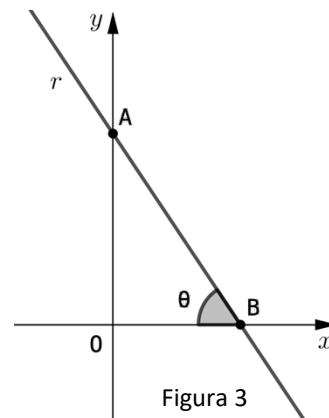
Determine o valor da área do triângulo $[ABC]$.

3. Na Figura 3 está representada, num referencial o.n. xOy , uma reta r que intersesta os eixos coordenados Oy e Ox nos pontos A e B , respetivamente.

A reta r é paralela à reta definida pela equação vetorial

$$(x, y) = (\sqrt{13}, 2) + k(2, -3), \quad k \in \mathbb{R}$$

Sendo $\widehat{ABO} = \theta$, determine o valor de $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$.



4. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os planos:

$$\alpha: 2x - 2y + z - 1 = 0 \quad \text{e} \quad \beta: x + 4ky - (k^2 + 2)z = 0, \quad \text{com } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- 4.1. Para um certo valor de k , os planos α e β são perpendiculares.

Determine esse valor de k .

- 4.2. Considere a reta r que passa pelo ponto $(1, 1, 1)$ e tem a direção do vetor $\vec{r}(-1, -1, 0)$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) A reta r é estritamente paralela ao plano α .

(B) A reta r está contida no plano α .

(C) A reta r é perpendicular ao plano α .

(D) A reta r é concorrente com o plano α , mas não é perpendicular ao plano α .

- 4.3. Determine uma equação da superfície esférica de centro $C(3, -1, 2)$ que é tangente ao plano α .

5. De dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sabe-se que:

- $\|\vec{u}\| = 3$
- $\|\vec{v}\| = 5$
- $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 6$

Qual é o valor de $\vec{u} \cdot \vec{v}$?

(A) 2

(B) $\sqrt{2}$

(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(D) 1

6. Acerca de uma sucessão (u_n) , sabe-se que:

- $u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{(n+2)(2n+3)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$
- $\lim u_n = \lim v_n$ e $v_n = \frac{1-4n}{2n+3}$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) (u_n) não é monótona nem limitada.
- (B) (u_n) é monótona decrescente e $u_1 > -2$.
- (C) (u_n) é monótona decrescente e não é minorada.
- (D) (u_n) é monótona crescente e é limitada.

7. A sucessão (a_n) é uma progressão aritmética tal que $a_{10} = -25$ e $a_4 = -7$.

Determine a soma dos primeiros 20 termos da sucessão.

8. Dado um certo valor natural de p , a sucessão (w_n) , de termos não nulos, verifica:

- $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(-1)^p}{2}$
- $w_2 = -16$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) Se $p = 1$ a sucessão (w_n) é uma progressão geométrica decrescente.
- (B) Se $p = 2$ a sucessão (w_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e $w_n = -2^{6-n}$.
- (C) Se $p = 2$ a sucessão (w_n) é uma progressão geométrica de termos negativos e -16 é um dos minorantes do conjunto dos termos da sucessão.
- (D) Se $p = 3$ a sucessão (w_n) é uma progressão geométrica de razão $-\frac{1}{2}$ e $w_n = (-2)^{6-n}$.

9. Fixado um número real k , a expressão seguinte define, no respetivo domínio, uma função racional f .

$$f(x) = \frac{kx + 1}{2x + 3}$$

9.1. Sabe-se que o gráfico da função f admite duas assíntotas que se intersectam num ponto. Designe esse ponto por P . Determine para que valor negativo de k , a distância de P à origem O é igual a $\frac{5}{2}$.

9.2. Considere $k = 1$ nas próximas questões.

9.2.1. Resolva a inequação $f(x) \leq \frac{3}{5}$

Apresente o conjunto solução na forma de intervalo ou de reunião de intervalos.

9.2.2. Determine o valor de $\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(f(x) \times \frac{4x+6}{x^3-3x-2} \right)$

10. No referencial cartesiano da Figura 4 estão representados parte do gráfico de uma função g e a reta t tangente ao gráfico de g no ponto $A(1,1)$.

Sabe-se ainda que a reta t interseca o eixo Ox no ponto B de abscissa $-\frac{1}{2}$.

Qual o valor de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-1}{2-2x}$?

- (A) $-\frac{2}{3}$
- (B) $\frac{2}{3}$
- (C) $-\frac{1}{3}$
- (D) $\frac{1}{3}$

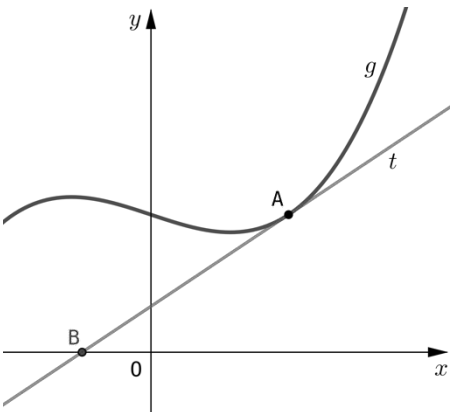


Figura 4

FIM

COTAÇÕES

QUESTÃO	1.	2.1	2.2	3	4.1	4.2	4.3	5.	6.	7.	8.	9.1	9.2.1	9.2.2	10.	TOTAL
COTAÇÃO	8	18	20	16	12	8	20	8	8	18	8	16	16	16	8	200



SPM@TESTES

Teste de Matemática

2021

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A prova é formada por itens de escolha múltipla e de resposta restrita. Os critérios de classificação dos itens de resposta restrita estão organizados por etapas, atribuindo-se, a cada uma delas, uma pontuação.

Caso os alunos adotem um processo não previsto nos critérios específicos, cabe ao professor corretor adaptar a distribuição da cotação atribuída.

Deve ser atribuída a classificação de zero pontos nas seguintes situações:

- Caso um aluno apresente apenas o resultado final de um item, ou de uma etapa, quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações;
- Caso o aluno utilize de forma inequívoca a calculadora, uma vez que tal não é solicitado nesta prova.

Nas seguintes situações deve descontar-se um ponto às cotações estabelecidas para a etapa respetiva:

- Ocorrência de um erro de cálculo;
- Apresentação de uma resposta com o formato que não esteja de acordo com o que foi solicitado;
- Apresentação de expressões com erros do ponto de vista formal.

Caso ocorram erros que revelem desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades ou o aluno apresente uma resolução incompleta de uma etapa, deve descontar-se até metade da cotação dessa etapa.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

QUESTÃO	1.	2.1	2.2	3	4.1	4.2	4.3	5.	6.	7.	8.	9.1	9.2.1	9.2.2	10.	TOTAL
COTAÇÃO	8	18	20	16	12	8	20	8	8	18	8	16	16	16	8	200

Item	Descrição	Cotação
1.	Versão A – (A); Versão B – (C)	8
2.		38
2.1.	- Concluir que $f(2\alpha + \pi) = 1 + 2 \sin \alpha$ 7 pontos - Resolver a equação $f(2\alpha + \pi) = 1 - \sqrt{2}$ no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ e obter $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ 7 pontos - Obter $f(4\alpha) = 1$ 4 pontos	18
2.2.	- Determinar os zeros de f no intervalo $]0, 4\pi[$ e obter as abscissas dos pontos A e B $\left(\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{10\pi}{3}$ respetivamente) 8 pontos - Determinar o contradomínio de f e concluir que a ordenada do ponto C é igual a 3 6 pontos - Calcular a área do triângulo $[ABC]$ (4π) 6 pontos	20
3.	- Concluir que o declive da reta r é dado por $\tan(\pi - \theta)$ e obter $-\frac{3}{2}$ para esse valor 4 pontos - Concluir que $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \theta$ 4 pontos - Relacionar $\tan \theta$ com $\cos \theta$ 6 pontos - Obter $-\frac{2\sqrt{13}}{13}$ como resposta ao problema 2 pontos	16
4.		40
4.1.	- Reconhecer as coordenadas dos vetores normais aos planos α e β como $(2, -2, 1)$ e $(1, 4k, -(k^2 + 2))$ 3 pontos - Reconhecer que $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow (2, -2, 1) \cdot (1, 4k, -(k^2 + 2)) = 0$ e obter $k = -8 \vee k = 0$ 7 pontos - Identificar a solução negativa (-8) 2 pontos	12
4.2.	Versão A – (D); Versão B – (B)	8
4.3.	Designemos por s a reta que passa no ponto C e é perpendicular ao plano α. - Escrever $s: (x, y, z) = (3, -1, 2) + k(2, -2, 1), k \in \mathbb{R}$ 4 pontos - Escrever as coordenadas de um ponto genérico da reta s, em função de k 2 pontos	20

	• Obter uma equação na variável k, substituindo x, y e z na equação do plano α pelas coordenadas de um ponto genérico da reta s e obter o valor de k (-1) 5 pontos • Obter as coordenadas do ponto de interseção da reta s com o plano α $((1, 1, 1))$..... 3 pontos • Determinar o raio da superfície esférica (3) 3 pontos • Escrever uma equação da superfície esférica de centro C que é tangente ao plano α $((x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$ ou equivalente) 3 pontos	
5.	Versão A – (C); Versão B – (D) _____	8
6.	Versão A – (C); Versão B – (B) _____	8
7.	_____	18
	• Relacionar corretamente os termos de ordem 4 e ordem 10 e determinar o valor da razão (-3) 7 pontos • Calcular o valor do termo de ordem 20 (-55) 5 pontos • Escrever a expressão que permite obter a soma dos 20 primeiros termos da sucessão 3 pontos • Obter o valor -530 para soma dos 20 primeiros termos da sucessão 3 pontos	
8.	Versão A – (D); Versão B – (B) _____	8
9.	_____	48
9.1.	_____	16
	• Identificar corretamente as equações das assíntotas vertical e horizontal do gráfico da função $(x = -\frac{3}{2}$ e $y = \frac{k}{2})$ 4 pontos • Identificar corretamente as coordenadas do ponto P 2 pontos • Escrever uma expressão da distância entre O e P 2 pontos • Escrever a equação que permite determinar k e resolver corretamente a equação. 6 pontos • Identificar a solução negativa (-4) 2 pontos	
9.2.1.	_____	16
	• Transformar a condição numa equivalente em que o 1.º membro é uma fração racional e o segundo membro é zero..... 8 pontos • Construir corretamente um quadro de estudo de sinal da fração racional..... 6 pontos • Indicar o conjunto solução $(]-\infty, -4] \cup]-\frac{3}{2}, +\infty[)$ 2 pontos	
9.2.2.	_____	16
	• Utilizar a Regra de <i>Ruffini</i> ou o algoritmo da divisão inteira de polinómios para decompor em fatores o polinómio $x^3 - x - 2$ da seguinte forma: $(x + 1)(x^2 - x - 2)$ 4 pontos • Simplificar a expressão, obtendo $\frac{2}{x^2 - x - 2}$ 7 pontos • Identificar $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - x - 2)$ como 0^- 3 pontos • Indicar que $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2}{x^2 - x - 2} = -\infty$ 2 pontos	
10.	Versão A – (B); Versão B – (C) _____	8



Prova de Matemática A

Ensino Secundário | maio de 2021

12.º Ano de Escolaridade

Duração da Prova: 120 minutos | Tolerância: 30 minutos

8 páginas

VERSÃO 1

Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risca aquilo que pretendes que não seja classificado.

Para cada resposta, identifica o grupo e o item.

Apresenta as suas respostas de forma legível.

Apresenta apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleciona a opção correta.

Escreve, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresenta **todos os cálculos** que tiveres de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresenta sempre o **valor exato**.



Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfície

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base;
 g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Complexos

$$(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

$$\sqrt[n]{r e^{i\theta}} = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad (k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

1. De uma progressão aritmética (u_n) , sabe-se que a soma do primeiro termo com o quarto termo é 16, e que a soma do terceiro termo com o quinto termo é 22. Averigua se 2021 é termo da sucessão (u_n) .

2. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$h(x) = \sin\left(\frac{x}{8}\right) \sin^2\left(\frac{x}{16}\right) - \sin\left(\frac{x}{8}\right) \cos^2\left(\frac{x}{16}\right)$$

Qual das expressões seguintes também define a função h ?

- (A) $-\frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{4}\right)$ (B) $\frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{32}\right)$ (C) $2 \sin\left(\frac{x}{32}\right)$ (D) $-2 \sin\left(\frac{x}{4}\right)$

3. Considera a função h definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por $h(x) = \frac{\sin x}{2x}$.

Seja (x_n) a sucessão tal que:

$$x_n = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right), \text{ com } n \in \mathbb{N}.$$

Qual o valor de $\lim h(x_n)$?

- (A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2

4. Fixado um referencial cartesiano do espaço, $Oxyz$, considera o cubo $[ABCDEFGH]$, representado na **Figura 1**.

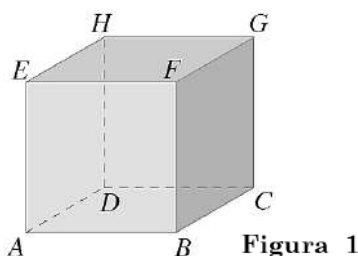


Figura 1

Sabe-se que:

- o vértice B tem coordenadas $(-1, 1, 2)$
- o plano EGH é definido pela equação $2x + y - 2z + 14 = 0$

4.1. Mostra que as coordenadas do ponto F são $(-3, 0, 4)$.

4.2. Seja β a amplitude, em radianos, do ângulo FBO .

Determina o **valor exato** de $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\beta\right)$.

5. Considera a função g , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por:

$$g(x) = -1 + xe^{\frac{1}{x}}$$

Sem recorrerres à calculadora, a não ser para eventuais cálculos numéricos, resolve os dois itens seguintes:

5.1. Mostra que a reta de equação $y = x$ é assíntota do gráfico de g .

5.2. Estuda a função g quanto à monotonia e à existência de extremos, e determina-o(s), caso exista(m).

6. De uma função g , real de variável real, sabe-se que:

- $g(1) = 1$
- $g'(1) = -3$
- $g''(1) = 2$

Qual é o valor de

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{g'(x) + 3} ?$$

(A) $\frac{1}{2}$

(B) 2

(C) 4

(D) 8

7. A **Figura 2** é formada por uma sucessão de semicírculos, sendo o diâmetro de cada um deles metade do diâmetro do anterior.

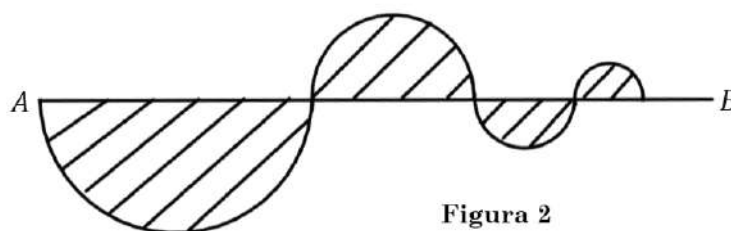


Figura 2

Sabendo que o diâmetro do primeiro semicírculo é d e designando por S_n a **área total** dos n primeiros semicírculos, o valor de $\lim S_n$ é:

(A) $\frac{\pi}{6}$

(B) $\frac{\pi}{12} d^2$

(C) $\frac{\pi}{6} d^2$

(D) $\frac{\pi}{3} d^2$

8. No intervalo $[0, \pi]$, a equação $8^{\sin^2 x} = 4^{\sin x - \frac{1}{8}}$ admite o seguinte número de soluções:

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

9. Seja f uma função, de domínio $] -1, +\infty[$, definida por $f(x) = x \ln(x + 1)$.

9.1. Determina o conjunto solução da condição $f(x) - x > 0$

Apresenta a tua resposta na forma de intervalo (ou união de intervalos) de números reais.

9.2. Seja g a função definida, em $\mathbb{R}$, por $g(x) = x^2 - 3$.

Qual dos seguintes conjuntos é o domínio da função $f \circ g$?

- (A) $] -1, +\infty[$ (B) $] -\infty, -\sqrt{2}[\cup] \sqrt{2}, +\infty[$
 (C) $] -1, \sqrt{2}[$ (D) $] \sqrt{2}, +\infty[$

9.3. No intervalo $] -1, +\infty[$, o gráfico de f' , primeira derivada da função f , tem dois pontos, A e B , cuja distância à origem é igual a $f(2)$.

Determina a abcissa de cada um desses pontos, apresentando os valores aproximados às décimas.

Sabe-se que a utilização das capacidades gráficas da tua calculadora te permite, neste caso, determinar estes valores aproximados, mas não se pede para justificar este facto.

Na tua resposta deves:

- equacionar o problema
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiveres necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial
- indicar as abcissas do pontos, A e B , com a aproximação pedida

10. Seja f uma função, de domínio $] -1, +\infty[$, com derivada finita em todos os pontos do seu domínio. Sabe-se que f' , a função derivada de f , é definida por $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2 - x$.

Quantos pontos de inflexão tem o gráfico da função f ?

- (A) Zero (B) Um (C) Dois (D) Três

Responde a um e um só dos grupos A ou B

Se responderes a mais do que um destes grupos deves indicar qual deles pretendes que seja classificado. Se não deres esta indicação será classificado o grupo a que responderes em primeiro lugar.

Grupo A

11. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera os números:

$$w_1 = -1 - i \quad \text{e} \quad w_2 = e^{i\beta}, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

11.1. Seja $w_3 = \frac{(w_1)^5}{1+w_1}$.

Mostra que o afixo de w_3 pertence ao conjunto definido pela condição

$$\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 0 \quad \wedge \quad 5 \leq |z| \leq 6$$

- 11.2. Determina os valores de β que verificam a condição

$$\overline{w_1 w_2} = \sqrt{2} w_2$$

12. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera os números:

$$z_1 = -2i \quad \text{e} \quad z_2 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$$

Sabe-se que z_1 e z_2 são raízes índice n do mesmo número complexo.

O valor de n pode ser:

- (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10

Grupo B

11. Na localidade Atrás de Sol Posto, existem **apenas** duas plataformas de entregas de refeições ao domicílio: a *Paparoca em Casa* e a *Lambreta_Eats*.

De um estudo feito em março de 2021, com todos os utilizadores destas plataformas (onde cada utilizador usa **apenas uma** das plataformas), concluiu-se que:

- 35% dos utilizadores comprava refeições pela *Paparoca em Casa*
- dos utilizadores que compravam refeições pela *Lambreta_Eats*, 20% comprava refeições vegetarianas
- 5% dos utilizadores não compra refeições vegetarianas nem compra pela plataforma *Lambreta_Eats*

11.1. Escolheu-se de forma aleatória um utilizador, e constatou-se que não comprava refeições vegetarianas.

Qual é a probabilidade de fazer as suas compras através da plataforma *Paparoca em Casa* ?

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

11.2. Sabe-se que existem na localidade Atrás de Sol Posto, um total de 600 utilizadores das duas plataformas.

Selecionaram-se cinco utilizadores, para receberem uma entrega grátis de uma refeição.

Qual a probabilidade de ser selecionado, no máximo, um utilizador da *Paparoca em Casa*?

Apresenta o resultado na forma dízima, arredondado às milésimas.

12. O número de palavras, com ou sem significado, que se podem formar com as letras da palavra *CONFINAMENTO*, que começam em *N* e terminam em *A*, é dado pela expressão:

(A) $\frac{3 \times 12!}{2!2!}$

(B) $3 \times {}^{10}C_2 \times {}^8C_2 \times 6!$

(C) $\frac{10!}{2!2!}$

(D) ${}^{12}C_2 \times {}^{10}C_2 \times 8!$

FIM

Item											
Cotação (em pontos)											
1	2	3	4.1.	4.2.	5.1.	5.2.	6	7	8	T O T A L	200 pontos
14	8	8	16	16	16	16	8	8	8		
9.1.	9.2.	9.3.	10	GRUPO A			GRUPO B				
				11.1	11.2.	12	11.1	11.2.	12		
14	8	16	8	14	14	8	14	14	8		



Prova de Matemática A

Ensino Secundário | maio de 2021

12.º Ano de Escolaridade

Duração da Prova: 120 minutos | Tolerância: 30 minutos

8 páginas

VERSÃO 2

Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risca aquilo que pretendes que não seja classificado.

Para cada resposta, identifica o grupo e o item.

Apresenta as suas respostas de forma legível.

Apresenta apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleciona a opção correta.

Escreve, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresenta **todos os cálculos** que tiveres de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresenta sempre o **valor exato**.



Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfície

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base;
 g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Complexos

$$(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

$$\sqrt[n]{r e^{i\theta}} = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad (k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

Trigonometria

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Regras de derivação

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

5. Considera a função g , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por:

$$g(x) = -1 + xe^{\frac{1}{x}}$$

Sem recorrerres à calculadora, a não ser para eventuais cálculos numéricos, resolve os dois itens seguintes:

5.1. Mostra que a reta de equação $y = x$ é assíntota do gráfico de g .

5.2. Estuda a função g quanto à monotonia e à existência de extremos, e determina-o(s), caso exista(m).

6. De uma função g , real de variável real, sabe-se que:

- $g(1) = 1$
- $g'(1) = -3$
- $g''(1) = 2$

Qual é o valor de

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{g'(x) + 3} \quad ?$$

(A) 8

(B) 4

(C) 2

(D) $\frac{1}{2}$

7. A **Figura 2** é formada por uma sucessão de semicírculos, sendo o diâmetro de cada um deles metade do diâmetro do anterior.

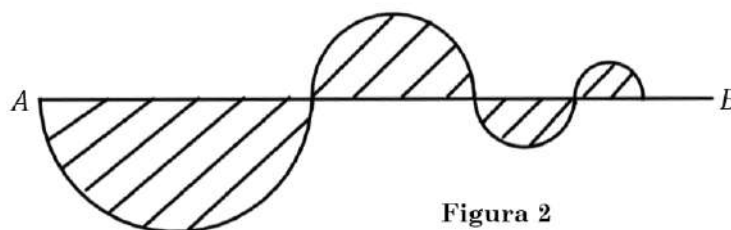


Figura 2

Sabendo que o diâmetro do primeiro semicírculo é d e designando por S_n a **área total** dos n primeiros semicírculos, o valor de $\lim S_n$ é:

(A) $\frac{\pi}{12}d^2$

(B) $\frac{\pi}{6}$

(C) $\frac{\pi}{3}d^2$

(D) $\frac{\pi}{6}d^2$

8. No intervalo $[0, \pi]$, a equação $8^{\sin^2 x} = 4^{\sin x - \frac{1}{8}}$ admite o seguinte número de soluções:

- (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

9. Seja f uma função, de domínio $] -1, +\infty[$, definida por $f(x) = x \ln(x + 1)$.

9.1. Determina o conjunto solução da condição $f(x) - x > 0$

Apresenta a tua resposta na forma de intervalo (ou união de intervalos) de números reais.

9.2. Seja g a função definida, em $\mathbb{R}$, por $g(x) = x^2 - 3$.

Qual dos seguintes conjuntos é o domínio da função $f \circ g$?

- (A) $] -1, \sqrt{2}[$ (B) $[\sqrt{2}, +\infty[$
 (C) $] -1, +\infty[$ (D) $] -\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$

9.3. No intervalo $] -1, +\infty[$, o gráfico de f' , primeira derivada da função f , tem dois pontos, A e B , cuja distância à origem é igual a $f(2)$.

Determina a abcissa de cada um desses pontos, apresentando os valores aproximados às décimas.

Sabe-se que a utilização das **capacidades gráficas da tua calculadora** te permite, neste caso, determinar estes valores aproximados, mas não se pede para justificar este facto.

Na tua resposta deves:

- equacionar o problema
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiveres necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial
- indicar as abcissas do pontos, A e B , com a aproximação pedida

10. Seja f uma função, de domínio $]-1, +\infty[$, com derivada finita em todos os pontos do seu domínio. Sabe-se que f' , a função derivada de f , é definida por $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2 - x$.

Quantos pontos de inflexão tem o gráfico da função f ?

- (A) Três (B) Dois (C) Um (D) Zero

Responde a um e um só dos grupos A ou B

Se responderes a mais do que um destes grupos deves indicar qual deles pretendes que seja classificado. Se não deres esta indicação será classificado o grupo a que responderes em primeiro lugar.

Grupo A

11. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera os números:

$$w_1 = -1 - i \quad \text{e} \quad w_2 = e^{i\beta}, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

11.1. Seja $w_3 = \frac{(w_1)^5}{1+w_1}$.

Mostra que o afixo de w_3 pertence ao conjunto definido pela condição

$$\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 0 \quad \wedge \quad 5 \leq |z| \leq 6$$

- 11.2. Determina os valores de β que verificam a condição

$$\overline{w_1 w_2} = \sqrt{2} w_2$$

12. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera os números:

$$z_1 = -2i \quad \text{e} \quad z_2 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$$

Sabe-se que z_1 e z_2 são raízes índice n do mesmo número complexo.

O valor de n pode ser:

- (A) 10 (B) 8 (C) 6 (D) 4

Grupo B

13. Na localidade Atrás de Sol Posto, existem **apenas** duas plataformas de entregas de refeições ao domicílio: a *Paparoca em Casa* e a *Lambreta_Eats*.

De um estudo feito em março de 2021, com todos os utilizadores destas plataformas (onde cada utilizador usa **apenas uma** das plataformas), concluiu-se que:

- 35% dos utilizadores comprava refeições pela *Paparoca em Casa*
- dos utilizadores que compravam refeições pela *Lambreta_Eats*, 20% comprava refeições vegetarianas
- 5% dos utilizadores não compra refeições vegetarianas nem compra pela plataforma *Lambreta_Eats*

11.3. Escolheu-se de forma aleatória um utilizador, e constatou-se que não comprava refeições vegetarianas.

Qual é a probabilidade de fazer as suas compras através da plataforma *Paparoca em Casa* ?

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

11.4. Sabe-se que existem na localidade Atrás de Sol Posto, um total de 600 utilizadores das duas plataformas.

Selecionaram-se cinco utilizadores, para receberem uma entrega grátis de uma refeição.

Qual a probabilidade de ser selecionado, no máximo, um utilizador da *Paparoca em Casa*?

Apresenta o resultado na forma dízima, arredondado às milésimas.

14. O número de palavras, com ou sem significado, que se podem formar com as letras da palavra *CONFINAMENTO*, que começam em *N* e terminam em *A*, é dado pela expressão:

(A) ${}^{12}C_2 \times {}^{10}C_2 \times 8!$

(B) $\frac{10!}{2!2!}$

(C) $3 \times {}^{10}C_2 \times {}^8C_2 \times 6!$

(D) $\frac{3 \times 12!}{2!2!}$

FIM

Item											
Cotação (em pontos)											
1	2	3	4.1.	4.2.	5.1.	5.2.	6	7	8	T O T A L	200 pontos
14	8	8	16	16	16	16	8	8	8		
9.1.	9.2.	9.3.	10	GRUPO A			GRUPO B				
				11.1	11.2.	12	11.1	11.2.	12		
14	8	16	8	14	14	8	14	14	8		



Teste de Matemática 12.º ANO

2021

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A prova é formada por itens de escolha múltipla e de resposta restrita. Os critérios de classificação dos itens de resposta restrita estão organizados por etapas, atribuindo-se, a cada uma delas, uma pontuação.

Caso os alunos adotem um processo não previsto nos critérios específicos, cabe ao professor corretor adaptar a distribuição da cotação atribuída.

Deve ser atribuída a classificação de zero quando um aluno apresente apenas o resultado final de um item, ou de uma etapa, quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações;

Nas seguintes situações deve descontar-se um ponto às cotações estabelecidas para a etapa respetiva:

- Ocorrência de um erro de cálculo;
- Apresentação de uma resposta com o formato que não esteja de acordo com o que foi solicitado;
- Apresentação de expressões com erros do ponto de vista formal.

Caso ocorram erros que revelem desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades ou o aluno apresente uma resolução incompleta de uma etapa, deve descontar-se até metade da cotação dessa etapa.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

Item	1	2	3	4.1	4.2	5.1	5.2	6	7	8	9.1	9.2	9.3	10	11.1	11.2	12	Total
Cotação	14	8	8	8	16	16	16	8	8	8	14	8	16	8	14	14	8	200

QUESTÃO		DESCRIÇÃO				COTAÇÃO	
1							14
		- Escrever o sistema $\begin{cases} u_1 + u_4 = 16 \\ u_3 + u_5 = 22 \end{cases}$ ou equivalente - Escrever $u_3 = u_1 + 2r$, $u_4 = u_1 + 3r$ e $u_5 = u_1 + 4r$, ou equivalente - Resolver o sistema em ordem ao primeiro termo (ou a outro escolhido anteriormente) e à razão - Escrever o termo geral de (u_n) - Verificar que 2021 é termo da sucessão	3	3	4	2	2
2		Versão 1 (A) Versão 2 (B)					8
3		Versão 1 (B) Versão 2 (C)					8
4							32
	4.1	- Escrever as coordenadas do ponto genérico da reta FB - Substituir na equação do plano as coordenadas do ponto genérico - Determinar o ponto	6	6	4	16	
	4.2	- Determinar $\overrightarrow{BO}$ $(1, -1, -2)$ - Determinar $\overrightarrow{BF}$ $(-2, -1, 2)$ - Calcular $\cos \hat{\beta} \left(\frac{-5\sqrt{6}}{18} \right)$ - Escrever $\sin \left(\frac{\pi}{2} - 2\beta \right) = \cos(2\beta)$ - Escrever $\cos(2\beta) = \cos^2(\beta) - \sin^2(\beta)$ - Calcular $\sin^2(\beta)$ - Determinar o valor pedido $\left(-\frac{2}{27} \right)$	1	1	5	2	16
5							32
	5.1	- Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + xe^{\frac{1}{x}}}{x}$ - Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + xe^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x}$ - Obter $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ - Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + xe^{\frac{1}{x}} - x \right)$ - Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + xe^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right)$	1	2	2	1	16

		• Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-1) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right) = (-1) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \right)$ • Efetuar a mudança de variável $y = \frac{1}{x}$ • Obter $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x]$ • Concluir que a reta de equação $y = x$ é assíntota do gráfico de g. 2º processo • Referir que $y = x$ ser assíntota do gráfico da função g é equivalente a afirmar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x] = 0$. • Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + x e^{\frac{1}{x}} - x \right)$ • Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + x e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right)$ • Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-1) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right) = (-1) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \right)$ • Efetuar a mudança de variável $y = \frac{1}{x}$ • Obter $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x]$ • Concluir que a reta de equação $y = x$ é assíntota do gráfico de g.	3 1 2 1 5 1 3 3 1 2 1		
	5.2	• Determinar $g'(x)$ • Resolver a equação $g'(x) = 0$ • Apresentar um quadro de sinal de g' e da monotonia de g (ou equivalente). • Escrever os intervalos de monotonia • Concluir que $g(1) = e$ é mínimo da função	3 3 5 3 2	16	
6		Versão 1 (B)	Versão 2 (C)		8
7		Versão 1 (C)	Versão 2 (D)		8
8		Versão 1 (D)	Versão 2 (A)		8
9					38
	9.1	• Escrever $x \ln(x + 1) - x > 0$ • Determinar os zeros de $x \ln(x + 1) - x$ • Apresentar um quadro de sinal de $x \ln(x + 1) - x$ • Apresentar a resposta $(]-1; 0[\cup]e - 1; +\infty[)$	1 4 6 3	14	
	9.2	Versão 1 (B)	Versão 2 (D)	8	

	9.3	- Apresentar uma equação que permita resolver o problema $(\sqrt{x^2 + (\ln(x+1) + \frac{x}{x+1})^2} = 2 \ln 3, \text{ ou equivalente})$ - Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação - Apresentar os valores pedidos ($x = -0,6$ e $x = 1,6$)	7 5 4	16	
10		Versão 1 (A) Versão 2 (D)		8	
Grupo A					
11				28	
	11.1	- Obter $(w_1)^5 = 4 + 4i$ - Obter $w_3 = -4 + 4i$ - Verificar que $Re(w_3) + Im(w_3) = 0$ - Verificar que $5 \leq w_3 \leq 6$	5 3 3 3	14	
	11.2	- Obter $w_1 w_2 = \sqrt{2} e^{i(-\frac{3\pi}{4} + \beta)}$ - Escrever $\overline{w_1 w_2} = \sqrt{2} e^{i(\frac{3\pi}{4} - \beta)}$ - Resolver a equação $\sqrt{2} e^{i(\frac{3\pi}{4} - \beta)} = \sqrt{2} e^{i\beta}$ - Obter $\beta = -\frac{5\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	6 1 5 2	14	
12		Versão 1 (B) Versão 2 (C)		8	
Grupo B					
11				28	
	11.1	Designemos por A o acontecimento “o utilizador escolhido compra refeições pela Paparoca em casa” e por V o acontecimento “o utilizador escolhido compra refeições vegetarianas” - Escrever $P(A \cap \bar{V}) = \frac{1}{20}$ - Determinar $P(\bar{V} A) = \frac{1}{7}$ - Determinar $P(\bar{V}) = \frac{57}{100}$ - Obter $P(A \bar{V}) = \frac{5}{57}$	2 4 4 4	14	
	11.2	- Calcular o número de utilizadores da <i>Paparoca em Casa</i> (210) - Escrever o número de casos possíveis (${}^{600}C_5$) - Escrever o número de casos favoráveis (${}^{390}C_5 + {}^{390}C_4 \times {}^{210}C_1$) - Apresentar a resposta (0,428)	3 3 6 2	14	
12		Versão 1 (C) Versão 2 (B)		8	

Nome completo: _____

Documento de identificação CC n.º |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|

Assinatura do aluno: _____

Teste de Matemática

3.º Ciclo do Ensino Básico | 2022

9.º Ano de Escolaridade

VERSÃO 1

A PREENCHER PELO PROFESSOR CLASSIFICADOR

Classificação em percentagem |__|__|__| (_____ por cento)

Correspondente ao nível |__| (_____)

Duração da Prova: 90 minutos | Tolerância: 30 minutos

16 Páginas

Todas as respostas são dadas no enunciado da prova.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.

Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor.

Risca aquilo que pretendes que não seja classificado.

Apresenta apenas uma resposta para cada item.

Apresenta as tuas respostas de forma legível.

Se o espaço reservado a uma resposta não for suficiente, podes utilizar o espaço que se encontra no final da prova. Neste caso, deves identificar claramente o item a que se refere a tua resposta.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, assinala com X a opção correta.

As cotações dos itens encontram-se no final da prova.



Formulário

Números e Operações

Valor aproximado de π (pi): 3,14159

Geometria e Medida

Áreas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Superfície esférica: $4\pi r^2$, sendo r o raio da esfera

Volumes

Prisma e cilindro: Área da base $\times$ Altura

Pirâmide e cone: $\frac{\text{Área da base} \times \text{Altura}}{3}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$, sendo r o raio da esfera

Trigonometria

Fórmula fundamental: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Relação da tangente com o seno e o cosseno: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

1. Considera o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{3}{4}(2y - x) = 6 \\ 2x - \frac{y}{3} = -5 \end{cases}$$

Qual dos seguintes pares ordenados (x, y) é solução deste sistema?

- A ☐ $(-1, -9)$ B ☐ $(0, 15)$ C ☐ $(-2, 3)$ D ☐ $(2, 4)$

2. Escreve o número $\frac{(2^2)^4 \times 3^8}{6^{-7}}$ na forma de potência de base $\frac{1}{6}$.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

3. Indica um número irracional que pertença, **simultaneamente**, aos intervalos $] -1, 3]$ e $] 0, 4[$.

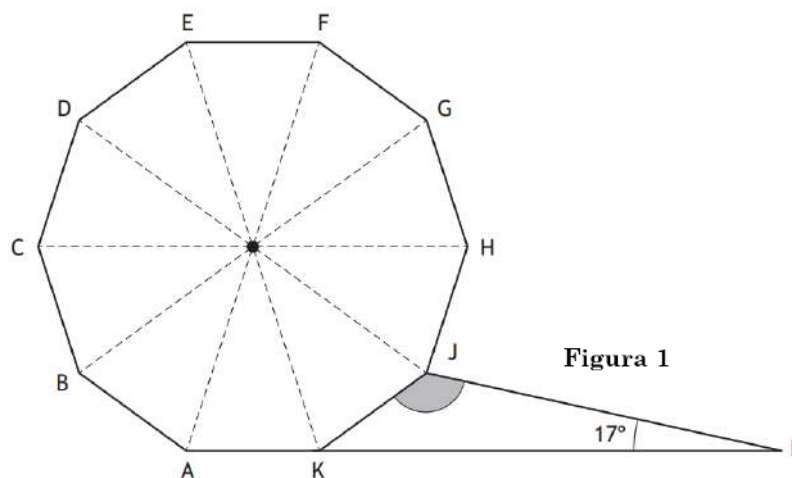
4. Numa sequência de números, com mais de quatrocentos termos, cada termo, com exceção do primeiro, obtém-se adicionando 3 ao termo anterior. O sexto termo da sequência é 17.

Qual dos números seguintes **não** é termo desta sequência?

- A ☐ 8 B ☐ 80 C ☐ 88 D ☐ 800

5. Considera a **Figura 1** seguinte onde estão representados o decágono regular $[ABCDEFGHIJK]$ e o triângulo $[JKL]$.

Sabe-se que o ângulo JLK é igual a 17°



Determina a amplitude do ângulo KJL .

Apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar.

6. Considera a inequação seguinte:

$$\frac{x}{2} \geq \frac{2-6x}{3} + \frac{1}{6}$$

O conjunto-solução da inequação pode ser representado por:

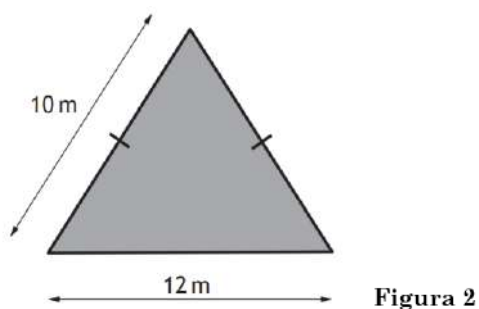
A ☐ $[\pi, +\infty[\cap \left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$

B ☐ $[\pi, +\infty[\cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$

C ☐ $] -\infty, \frac{1}{3}] \cap [\pi, +\infty[$

D ☐ $] -\infty, \pi] \cap \left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$

7. Os alunos finalistas do 9.º ano foram convidados a criar um jardim em forma de triângulo isósceles, como mostra a **Figura 2**.



Determina o valor da área do jardim.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

8. Seja f uma função de proporcionalidade inversa. Sabe-se que $f(2) = 6$.

Em qual das opções seguintes se apresenta uma expressão que define a função f ?

A ☐ $f(x) = \frac{3}{x}$

B ☐ $f(x) = \frac{12}{x}$

C ☐ $f(x) = 3x$

D ☐ $f(x) = 12x$

9. Considera o polinómio $9 - \frac{x^2}{25}$.

Escreve o polinómio dado num produto de dois polinómios de grau 1.

10. Resolve a equação seguinte.

$$5(x + 1)^2 = x + 7$$

Apresenta o conjunto-solução.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

11. Na **Figura 3** está representado um prisma quadrangular regular reto.

Qual das seguintes afirmações é **verdadeira**?

- A ☐ As retas AC e AG são perpendiculares
- B ☐ A reta EC é paralela ao plano EFB
- C ☐ Os planos ABC e EHB são concorrentes
- D ☐ Os planos ACG e BFH são paralelos

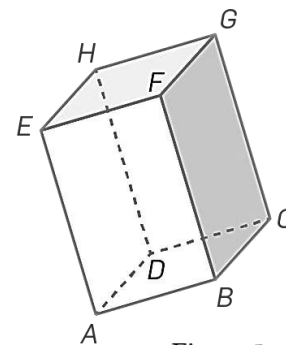


Figura 3

12. Escreve o valor de $\sqrt{13, (4)}$ na forma de fração irredutível.

Mostra como chegaste à tua resposta.

Sugestão: Começa por escrever o número $13, (4)$ na forma de uma fração irredutível.

13. No referencial da **Figura 4** estão representadas graficamente as funções f e g .

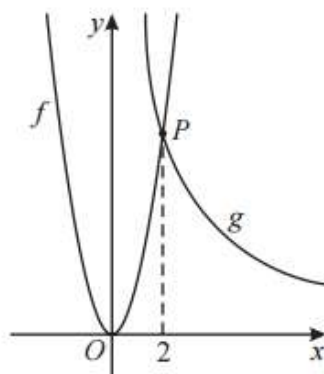


Figura 4

Sabe-se que:

- a função f é uma função quadrática cuja representação gráfica é uma parábola com vértice na origem no referencial
- a função g , função de proporcionalidade inversa, é definida por

$$g(x) = \frac{12}{x} \quad (x > 0)$$

- os gráficos das funções f e g interseitam-se no ponto P que tem abcissa 2

Determina $f(-4)$.

Mostra como chegaste à tua resposta.

14. Os alunos finalistas do 9.º ano resolveram no último dia de aulas passar a tarde na piscina municipal.

A piscina é formada pela união de um paralelepípedo com um prisma trapezoidal com as dimensões indicadas na **Figura 5**.

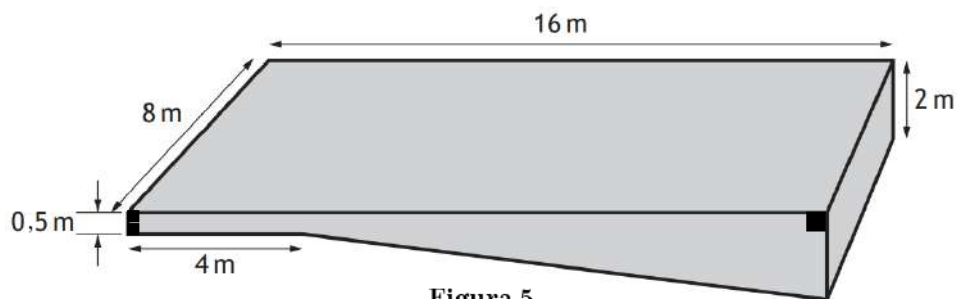


Figura 5

Determina o volume da piscina.

Apresenta o resultado, em litros, na forma de notação científica.

15. Considera o conjunto seguinte:

$$S = \left\{ \frac{6}{5}; 3,52; -6, (7); \sqrt{44} \right\}$$

Qual dos números do conjunto S corresponde a uma dízima infinita não periódica?

A ☐ $\frac{6}{5}$

B ☐ 3,52

C ☐ $-6, (7)$

D ☐ $\sqrt{44}$

16. Na **Figura 6** está representada parte de uma circunferência.

Determina, **utilizando apenas régua e compasso**, o centro da circunferência e acaba de a representar.

Explica como chegaste à tua resposta, apresentando a construção geométrica que efectuaste.

Nota: Esta questão deve ser resolvida a **lápiz** e não a tinta.

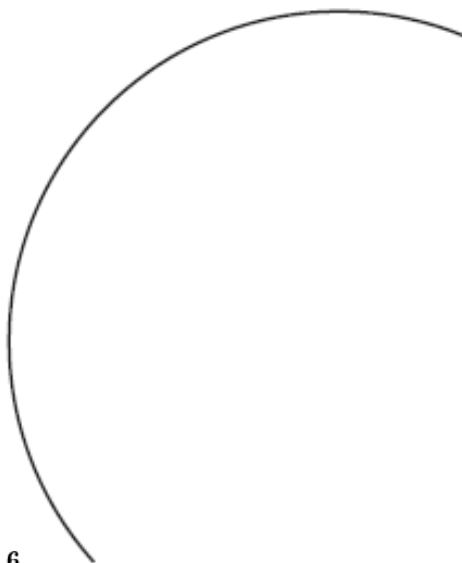


Figura 6

17. Na **Figura 7**, o triângulo $[ABC]$ é retângulo em A .

Sabe-se ainda que:

- $[ADEF]$ é um quadrado
- $\overline{AB} = 2$
- $\overline{AC} = 6$

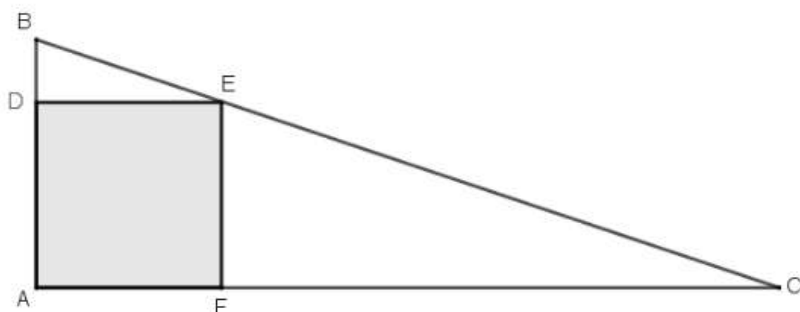


Figura 7

Calcula a medida da área do quadrado $[ADEF]$.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

Responde a um e um só dos grupos A ou B

Se responderes a mais do que um destes grupos deves indicar qual deles pretendes que seja classificado. Se não deres esta indicação será classificado o grupo a que responderes em primeiro lugar.

Grupo A

18. O António, aluno finalista do 9.º ano, lançou **dois** dados cúbicos equilibrados, com as faces numeradas de 1 a 6, e registou o **produto** dos números obtidos nas faces que ficaram voltadas para cima.



Sugestão: começa por construir uma tabela de dupla entrada que caracterize a situação.

- 18.1. O António resolveu lançar um desafio à sua colega Beatriz:

“Determina a probabilidade de o produto obtido ser um número inferior a 10.”

Qual a resposta correta ao desafio do António?

A ☐ $\frac{17}{36}$

B ☐ $\frac{1}{2}$

C ☐ $\frac{19}{36}$

D ☐ $\frac{5}{18}$

18.2. A Joana, que estava por perto, lançou um desafio ao António:

"Sabendo que o produto obtido é um múltiplo de 2, determina a probabilidade de os números saídos nos dados serem ambos pares."

O António resolveu o desafio, e respondeu corretamente ao mesmo.

Determina o valor da probabilidade a que António chegou.

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

Grupo B

18. Na **Figura 8** está representado um triângulo isósceles.

Sabe-se que $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\overline{AB} = 4$ e $\hat{ACB} = 40^\circ$.

Qual das afirmações seguintes é **verdadeira**?

A ☐ $\overline{AC} = \frac{2}{\cos 20^\circ}$

B ☐ $\overline{AC} = \frac{4}{\cos 70^\circ}$

C ☐ $\overline{BC} = \frac{2}{\sin 20^\circ}$

D ☐ $\overline{BC} = \frac{2}{\tan 70^\circ}$

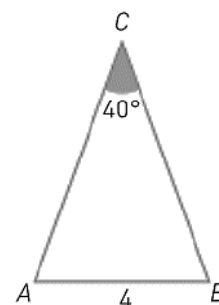


Figura 8

19. Seja β um ângulo agudo.

Sabe-se que $\cos \beta = \frac{1}{4}$.

Mostra que $4\sqrt{5} \sin \beta = 5\sqrt{3}$.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

FIM
COTAÇÕES

Item												
Cotação (em percentagem)												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	T O T A L	100%	
3	6	3	3	7	3	7	3	3	8			
11	12	13	14	15	16	17	GRUPO A		GRUPO B			
							18.1.	18.2.	18			19
3	7	8	10	3	6	8	3	6	3			6

***Esta página só deve ser utilizada se quiseres completar ou emendar qualquer resposta.
Caso a utilizes, não te esqueças de identificar claramente cada uma dessas respostas.***

Nome completo: _____

Documento de identificação CC n.º |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|

Assinatura do aluno: _____

Teste de Matemática

3.º Ciclo do Ensino Básico | 2022

9.º Ano de Escolaridade

VERSÃO 2

A PREENCHER PELO PROFESSOR CLASSIFICADOR

Classificação em percentagem |__|__|__| (_____ por cento)

Correspondente ao nível |__| (_____)

Duração da Prova: 90 minutos | Tolerância: 30 minutos

16 Páginas

Todas as respostas são dadas no enunciado da prova.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.

Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor.

Risca aquilo que pretendes que não seja classificado.

Apresenta apenas uma resposta para cada item.

Apresenta as tuas respostas de forma legível.

Se o espaço reservado a uma resposta não for suficiente, podes utilizar o espaço que se encontra no final da prova. Neste caso, deves identificar claramente o item a que se refere a tua resposta.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, assinala com X a opção correta.

As cotações dos itens encontram-se no final da prova.



Formulário

Números e Operações

Valor aproximado de π (pi): 3,14159

Geometria e Medida

Áreas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Superfície esférica: $4\pi r^2$, sendo r o raio da esfera

Volumes

Prisma e cilindro: Área da base $\times$ Altura

Pirâmide e cone: $\frac{\text{Área da base} \times \text{Altura}}{3}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$, sendo r o raio da esfera

Trigonometria

Fórmula fundamental: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Relação da tangente com o seno e o cosseno: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

1. Considera o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{3}{4}(2y - x) = 6 \\ 2x - \frac{y}{3} = -5 \end{cases}$$

Qual dos seguintes pares ordenados (x, y) é solução deste sistema?

A ☐ $(0, 15)$

B ☐ $(-2, 3)$

C ☐ $(2, 4)$

D ☐ $(-1, -9)$

2. Escreve o número $\frac{(2^2)^4 \times 3^8}{6^{-7}}$ na forma de potência de base $\frac{1}{6}$.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

3. Indica um número irracional que pertença, **simultaneamente**, aos intervalos $] -1, 3]$ e $] 0, 4[$.

4. Numa sequência de números, com mais de quatrocentos termos, cada termo, com exceção do primeiro, obtém-se adicionando 3 ao termo anterior. O sexto termo da sequência é 17.

Qual dos números seguintes **não** é termo desta sequência?

A ☐ 800

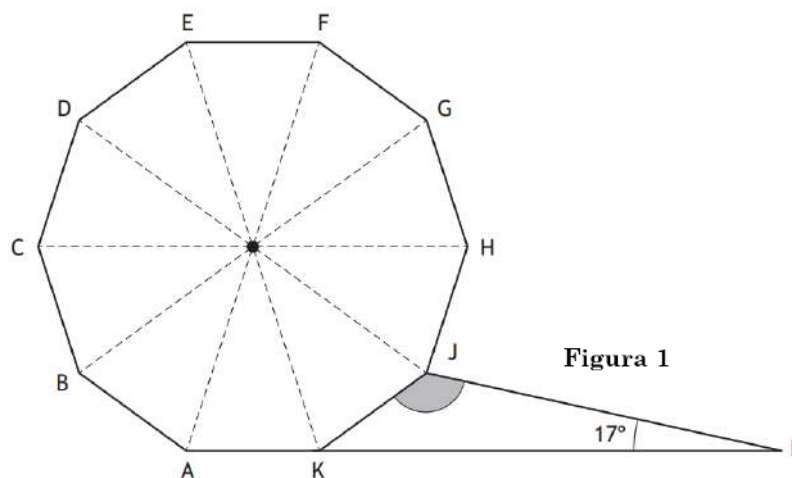
B ☐ 88

C ☐ 80

D ☐ 8

5. Considera a **Figura 1** seguinte onde estão representados o decágono regular $[ABCDEFGHIJK]$ e o triângulo $[JKL]$.

Sabe-se que o ângulo JLK é igual a 17°



Determina a amplitude do ângulo KJL .

Apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar.

6. Considera a inequação seguinte:

$$\frac{x}{2} \geq \frac{2-6x}{3} + \frac{1}{6}$$

O conjunto-solução da inequação pode ser representado por:

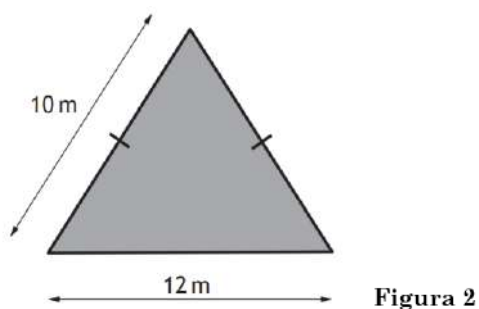
A ☐ $]-\infty, \frac{1}{3}] \cap [\pi, +\infty[$

B ☐ $]-\infty, \pi] \cap [\frac{1}{3}, +\infty[$

C ☐ $[\pi, +\infty[\cap [\frac{1}{3}, +\infty[$

D ☐ $[\pi, +\infty[\cup [\frac{1}{3}, +\infty[$

7. Os alunos finalistas do 9.º ano foram convidados a criar um jardim em forma de triângulo isósceles, como mostra a **Figura 2**.



Determina o valor da área do jardim.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

8. Seja f uma função de proporcionalidade inversa. Sabe-se que $f(2) = 6$.

Em qual das opções seguintes se apresenta uma expressão que define a função f ?

A ☐ $f(x) = \frac{12}{x}$

B ☐ $f(x) = \frac{3}{x}$

C ☐ $f(x) = 12x$

D ☐ $f(x) = 3x$

9. Considera o polinómio $9 - \frac{x^2}{25}$.

Escreve o polinómio dado num produto de dois polinómios de grau 1.

10. Resolve a equação seguinte.

$$5(x + 1)^2 = x + 7$$

Apresenta o conjunto-solução.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

11. Na **Figura 3** está representado um prisma quadrangular regular reto.

Qual das seguintes afirmações é **verdadeira**?

- A ☐ A reta EC é paralela ao plano EFB
- B ☐ Os planos ABC e EFB são concorrentes
- C ☐ Os planos ACG e BFH são paralelos
- D ☐ As retas AC e AG são perpendiculares

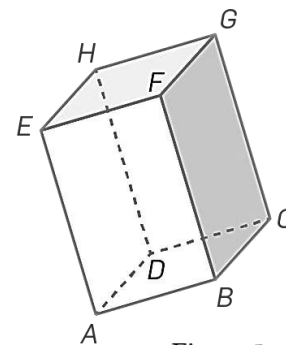


Figura 3

12. Escreve o valor de $\sqrt{13, (4)}$ na forma de fração irredutível.

Mostra como chegaste à tua resposta.

Sugestão: Começa por escrever o número $13, (4)$ na forma de uma fração irredutível.

13. No referencial da **Figura 4** estão representadas graficamente as funções f e g .

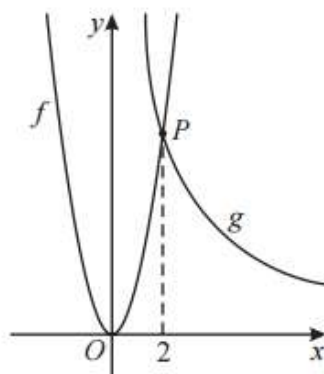


Figura 4

Sabe-se que:

- a função f é uma função quadrática cuja representação gráfica é uma parábola com vértice na origem no referencial
- a função g , função de proporcionalidade inversa, é definida por

$$g(x) = \frac{12}{x} \quad (x > 0)$$

- os gráficos das funções f e g interseitam-se no ponto P que tem abcissa 2

Determina $f(-4)$.

Mostra como chegaste à tua resposta.

14. Os alunos finalistas do 9.º ano, resolveram no último dia de aulas, passar a tarde na piscina municipal.

A piscina é formada pela união de um paralelepípedo com um prisma trapezoidal com as dimensões indicadas na **Figura 5**.

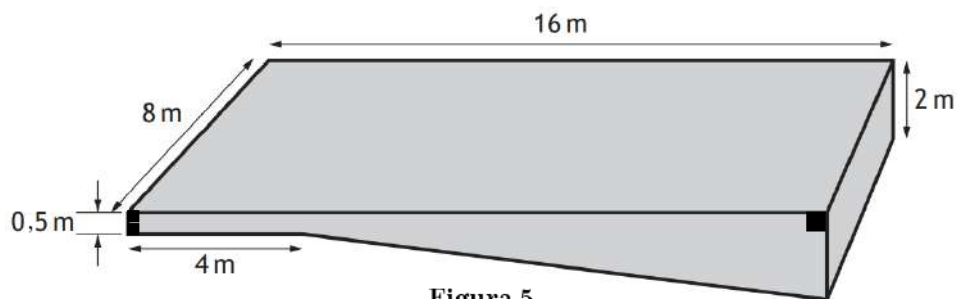


Figura 5

Determina o volume da piscina.

Apresenta o resultado, em litros, na forma de notação científica.

15. Considera o conjunto seguinte:

$$S = \left\{ \frac{6}{5}; 3,52; -6, (7); \sqrt{44} \right\}$$

Qual dos números do conjunto S corresponde a uma dízima infinita não periódica?

A ☐ 3,52

B ☐ $\sqrt{44}$

C ☐ $\frac{6}{5}$

D ☐ $-6, (7)$

16. Na **Figura 6** está representada parte de uma circunferência.

Determina, **utilizando apenas régua e compasso**, o centro da circunferência e acaba de a representar.

Explica como chegaste à tua resposta, apresentando a construção geométrica que efectuaste.

Nota: Esta questão deve ser resolvida a **lápiz** e não a tinta.

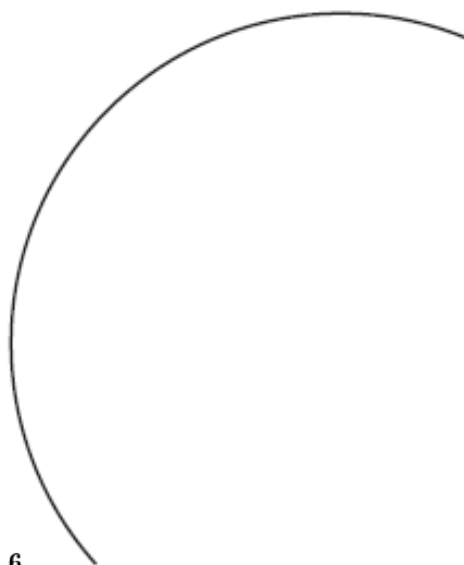


Figura 6

17. Na **Figura 7**, o triângulo $[ABC]$ é retângulo em A .

Sabe-se ainda que:

- $[ADEF]$ é um quadrado
- $\overline{AB} = 2$
- $\overline{AC} = 6$

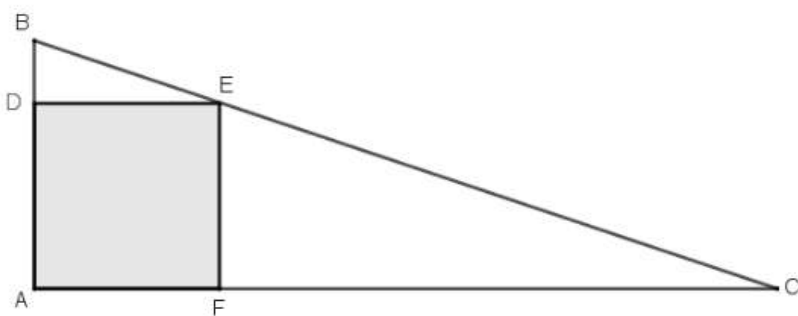


Figura 7

Calcula a medida da área do quadrado $[ADEF]$.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

Responde a um e um só dos grupos A ou B

Se responderes a mais do que um destes grupos deves indicar qual deles pretendes que seja classificado. Se não deres esta indicação será classificado o grupo a que responderes em primeiro lugar.

Grupo A

18. O António, aluno finalista do 9.º ano, lançou **dois** dados cúbicos equilibrados, com as faces numeradas de 1 a 6, e registou o **produto** dos números obtidos nas faces que ficaram voltadas para cima.



Sugestão: começa por construir uma tabela de dupla entrada que caracterize a situação.

- 18.1. O António resolveu lançar um desafio à sua colega Beatriz:

“Determina a probabilidade de o produto obtido ser um número inferior a 10.”

Qual a resposta correta ao desafio do António?

A ☐ $\frac{19}{36}$

B ☐ $\frac{5}{18}$

C ☐ $\frac{17}{36}$

D ☐ $\frac{1}{2}$

18.2. A Joana, que estava por perto, lançou um desafio ao António:

"Sabendo que o produto obtido é um múltiplo de 2, determina a probabilidade de os números saídos nos dados serem ambos pares."

O António resolveu o desafio, e respondeu corretamente ao mesmo.

Determina o valor da probabilidade a que António chegou.

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

Grupo B

18. Na **Figura 8** está representado um triângulo isósceles.

Sabe-se que $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\overline{AB} = 4$ e $\widehat{ACB} = 40^\circ$.

Qual das afirmações seguintes é **verdadeira**?

A ☐ $\overline{BC} = \frac{2}{\tan 70^\circ}$

B ☐ $\overline{AC} = \frac{2}{\cos 20^\circ}$

C ☐ $\overline{AC} = \frac{4}{\cos 70^\circ}$

D ☐ $\overline{BC} = \frac{2}{\sin 20^\circ}$

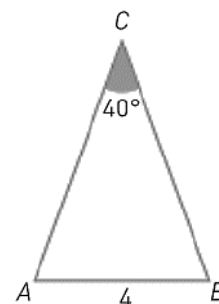


Figura 8

19. Seja β um ângulo agudo.

Sabe-se que $\cos \beta = \frac{1}{4}$.

Mostra que $4\sqrt{5} \sin \beta = 5\sqrt{3}$.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

FIM
COTAÇÕES

Item											
Cotação (em percentagem)											
1	2	3	4		5	6	7	8	9	10	TOTAL
3	6	3	3		7	3	7	3	3	8	
11	12	13	14	15	16	17	GRUPO A		GRUPO B		
							18.1.	18.2	18	19	
3	7	8	10	3	6	8	3	6	3	6	

***Esta página só deve ser utilizada se quiseres completar ou emendar qualquer resposta.
Caso a utilizes, não te esqueças de identificar claramente cada uma dessas respostas.***



Teste de Matemática 9.º ANO

2022

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A prova é formada por itens de escolha múltipla e de resposta restrita. Os critérios de classificação dos itens de resposta restrita estão organizados por etapas, atribuindo-se, a cada uma delas, uma pontuação.

Caso os alunos adotem um processo não previsto nos critérios específicos, cabe ao professor corretor adaptar a distribuição da cotação atribuída.

Deve ser atribuída a classificação de zero quando um aluno apresente apenas o resultado final de um item, ou de uma etapa, quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações;

Nas seguintes situações deve descontar-se um ponto às cotações estabelecidas para a etapa respetiva:

- Ocorrência de um erro de cálculo;
- Apresentação de uma resposta com o formato que não esteja de acordo com o que foi solicitado;
- Apresentação de expressões com erros do ponto de vista formal.

Caso ocorram erros que revelem desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades ou o aluno apresente uma resolução incompleta de uma etapa, deve descontar-se até metade da cotação dessa etapa.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

																	Grupo A		Grupo B			
Item	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18.1	18.2	18	19	Total
Cotação	3	6	3	3	7	3	7	3	3	8	3	7	8	10	3	6	8	3	6	3	6	100

QUESTÃO	DESCRIÇÃO		COTAÇÃO	
1.		Versão 1 (C) Versão 2 (B)		3
2.				6
		- Calcular a potência de potência $((2^2)^4 = 2^8)$ - Multiplicar as potências com o mesmo expoente $(2^8 \times 3^8 = 6^8)$ - Dividir as potências com a mesma base $(6^8 \div 6^{-7} = 6^{8-(-7)} = 6^{15})$ - Escrever na forma de potência de base $\frac{1}{6}$ $\left(\left(\frac{1}{6}\right)^{-15}\right)$	1 1 2 2	
3.				3
		Escrever um número irracional pertencente ao intervalo $]0; 3]$ (Exemplos: $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\frac{\pi}{2}$; etc..)	3	
4.		Versão 1 (C) Versão 2 (B)		3
5.				7
		- Referir que o ângulo $\widehat{JKA}$ é um ângulo externo do polígono - Determinar a amplitude do ângulo $\widehat{JKA}$ $\left(\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ\right)$ - Determinar $\widehat{LJK}$ (127°)	2 2 3	
6.		Versão 1 (B) Versão 2 (D)		3
7.				7
		- Determinar a altura do triângulo através do Teorema de Pitágoras $(h = 8)$ - Determinar a área do triângulo $(48 m^2)$ - Resposta	4 2 1	
8.		Versão 1 (B) Versão 2 (A)		3
9.				3
		Escrever, por exemplo, $\left(3 - \frac{x}{5}\right)\left(3 + \frac{x}{5}\right)$	3	
10.				8
		- Desenvolver o caso notável - Aplicar a propriedade distributiva - Escrever a equação na forma canónica - Identificar e substituir na fórmula resolvente os valores - Determinar o binómio discriminante - Determinar as soluções da equação - Escrever o conjunto solução $C.S. = \left\{-2; \frac{1}{5}\right\}$	1 1 1 2 1 1 1	

11.		Versão 1 (C)	Versão 2 (B)		3
12.					7
		- Escrever 13, (4) na forma de fração irredutível $\left(\frac{121}{9}\right)$ - Calcular $\sqrt{13, (4)} = \sqrt{\frac{121}{9}} = \frac{11}{3}$			4 3
13.					8
		- Determinar $g(2) = 6$ - Indicar que a expressão algébrica de f é da forma $f(x) = ax^2$ - Determinar a através das coordenadas de $P \left(f(x) = \frac{3}{2}x^2\right)$ - Determinar $f(-4)$ (24)			2 1 3 2
14.					10
		- Determinar o volume do paralelepípedo ($16 m^3$) - Determinar a área da base do prisma trapezoidal ($15 m^2$) - Determinar o volume do prisma trapezoidal ($120 m^3$) - Determinar o volume total do sólido ($136 m^3$) - Reduzir a litros ($136000 l$) - Escrever o resultado em notação científica ($1,36 \times 10^5$)			2 2 2 1 1 2
15.		Versão 1 (D)	Versão 2 (B)		3
16.					6
		- Marcar três (ou mais) pontos na curva - Marcar com esses pontos, pelo menos, 2 segmentos de reta - Construir, pelo menos, duas mediatrizes desses segmentos de reta - Marcar a interseção dessas mediatrizes - Completar a circunferência			1 1 2 1 1
17.					8
		- Referir que os triângulos $[ABC]$ e $[DBE]$ são semelhantes, identificando o critério usado - Indicar uma variável (por exemplo x) para o lado do quadrado e escrever uma proporção das medidas dos lados. Por exemplo: $\frac{6}{x} = \frac{2}{2-x}$ - Determinar x - Calcular o valor da Área $\left(\frac{9}{4}\right)$			2 3 2 1
Grupo A					
18.					9
	18.1.	Versão 1 (A)	Versão 2 (C)	3	
	18.2.	- Indicar o número de casos possíveis (27) - Indicar o número de casos favoráveis (9) - Escrever o valor da probabilidade $\left(\frac{9}{27}\right)$ - Apresentar o resultado na forma de fração irredutível $\left(\frac{1}{3}\right)$	1 2 2 1	6	

Grupo B				
18.		Versão 1 (C)	Versão 2 (D)	3
19.				6
		- Determinar $\sin \beta$ através da fórmula fundamental da trigonometria $\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$ - Substituir o valor de $\sin \beta$ na expressão e verificar a igualdade ou isolar o $\sin \beta$ na expressão e verificar que é igual a $\frac{\sqrt{15}}{4}$		3
				3



SPM@TESTES

Teste de Matemática

2022

10.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

(seis páginas)

VERSÃO 1

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.



1. Na *Figura 1* estão representadas, num referencial *o. n. Oxy*, a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 10$ e a reta CD de equação $y = 2x - 5$.

Os pontos C e D pertencem à circunferência.

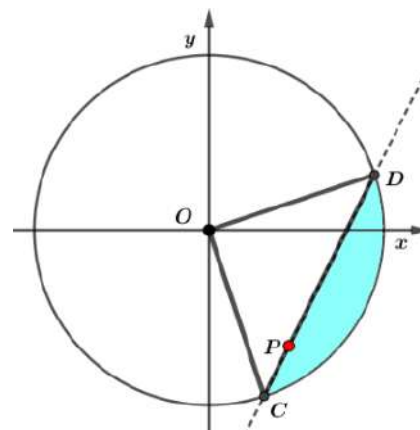


Figura 1

1.1. Represente por meio de uma condição a região sombreada, em que a fronteira está incluída.

1.2. O ponto P de coordenadas (x, y) , desloca-se sobre o segmento de reta $[CD]$.

Entre que valores varia a ordenada do ponto P ?

- (A) $y \in [-1, 3]$ (B) $y \in [-2, 3]$ (C) $y \in [-5, 3]$ (D) $y \in [-3, 1]$

2. Num referencial *o. n. Oxy*, considere a reta definida pela equação vetorial

$$(x, y) = (4, p) + k(2, 6), k \in \mathbb{R}$$

Se a ordenada na origem for -2 então p será igual a:

- (A) -2 (B) 2 (C) 10 (D) -10

3. Na *Figura 2* está representado o gráfico da função f , definida no intervalo $[-2,8]$, sendo constituído pelos segmentos de reta $[AB]$, $[BC]$ e $[CD]$.

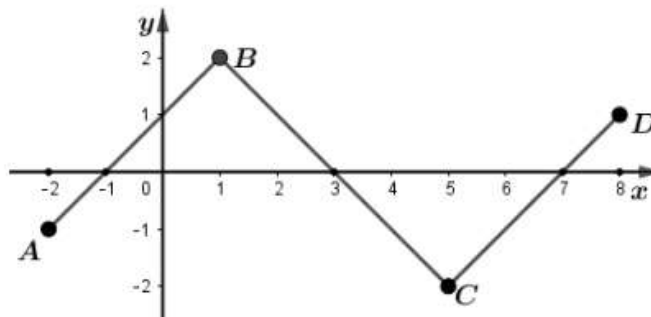


Figura 2

Sabe-se que

- os zeros de f são números inteiros.
- A $(-2, -1)$, B $(1, 2)$, C $(5, -2)$ e D $(8, 1)$ são pontos do gráfico de f .

3.1. Apresente uma tabela de variação da função que descreva a monotonia e os extremos da função f . Indique os intervalos de monotonia da função bem como os seus extremos relativos e absolutos.

3.2. Considere as funções a , b , c e d definidas por:

$$a(x) = 3f(x), \quad b(x) = f(x - 3), \quad c(x) = f(-2x) \quad \text{e} \quad d(x) = f(x) - 3$$

3.2.1. Averigue se as funções b e d têm zeros, identificando-os, em caso afirmativo, e justificando, caso não existam.

3.2.2. Qual das funções a , b , c ou d tem o menor mínimo absoluto?

(A) a (B) b (C) c (D) d

4. De uma função f , estritamente decrescente em $\mathbb{R}$, sabe-se que $f(2) = 3$.

Qual dos seguintes valores é negativo?

- (A) $3 - f(2,01)$ (B) $3 - f(1,99)$ (C) $3 - f(3)$ (D) $3 - f(4)$

5. Considere os polinómios $A(x) = x^3 - 9x$, $B(x) = 3x + 16$ e $C(x) = A(x) - B(x)$.

5.1. Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da condição $A(x) > 0$.

5.2. Mostre que $A(-2) = B(-2)$ e $A(4) = B(4)$ e daí justifique que $C(x) = 0$ é uma equação possível.

5.3. Fatorize $C(x)$ e indique a multiplicidade de cada uma das suas raízes.

6. O gráfico representado na *Figura 3* é uma parábola.

Qual das seguintes expressões a pode definir ?

- (A) $y = (x - 3) \times \left(x - \frac{1}{10}\right)$ (B) $y = x^2 - 3x + 6$
 (C) $y = x^2 + 6x + 10$ (D) $y = -x^2 + x + 6$

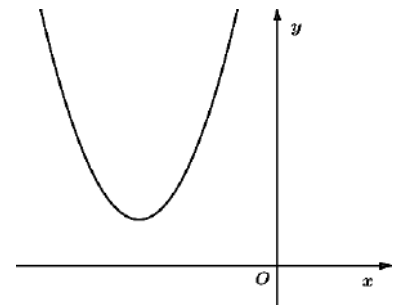


Figura 3

7. Seja f a função definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = x^2 - 4x + d$, sendo $d < 4$, e $[ABC]$ um triângulo.

Sabe-se que:

- A e B são os pontos de interseção de f com o eixo Ox ;
- C tem coordenadas $(2, 2)$.

Determine d sabendo que o triângulo $[ABC]$ tem área 2, assumindo que os pontos A e B são equidistantes da reta $x = 2$, eixo de simetria do gráfico de f .

8. Considere a função g definida, em $\mathbb{R}$, por $g(x) = 3|x - 2| - 1$, cujo gráfico está representado na *Figura 4*.

Determine a equação reduzida de cada uma das retas que contêm as semirretas do gráfico de g .

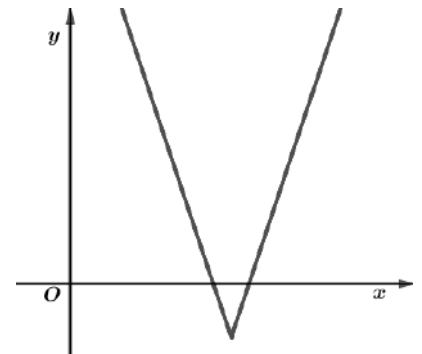


Figura 4

9. $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ é igual a:

- (A) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ (B) $-\sqrt{2} - \sqrt{3}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

10. Na *Figura 5*, está representado num referencial o.n. $Oxyz$, um paralelepípedo retângulo $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que:

- O vértice A pertence ao eixo Ox e o vértice B pertence ao eixo Oy ;
- As coordenadas dos vértices E e G são $(7, 2, 15)$ e $(6, 10, 13)$, respetivamente;
- A reta EF é definida pela equação vetorial

$$(x, y, z) = (1, -2, 19) + k(-3, -2, 2), k \in \mathbb{R}.$$

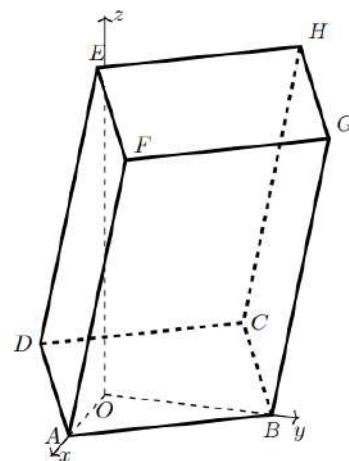


Figura 5

10.1. Considere a superfície esférica de centro em G e que passa em E .

Mostre que os pontos $P(6, 10, 13 + \sqrt{69})$ e $Q(6, 10, 13 - \sqrt{69})$ pertencem a essa superfície esférica e são os extremos de um seu diâmetro.

10.2. Justifique que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FG}$ e conclua que $\overrightarrow{FG} = (-a, b, 0)$, para certos valores numéricos de a e b , diferentes de zero.

10.3. Determine as coordenadas do ponto F .

Sugestão:

- Comece por justificar que as coordenadas de F podem ser obtidas através da expressão $(1, -2, 19) + k(-3, -2, 2)$, para certo valor de $k \in \mathbb{R}$;
- Utilize $\overrightarrow{FG} = G - F = (-a, b, 0)$, pela alínea 10.2.

FIM

Questão	1.1	1.2	2.	3.1	3.2.1	3.2.2	4	5.1.	5.2.	5.3.	6.	7.	8.	9.	10.1	10.2	10.3	TOTAL
Cotação	14	8	8	14	13	8	8	14	14	14	8	13	14	8	14	14	14	200



SPM@TESTES

Teste de Matemática

2022

10.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

(seis páginas)

VERSÃO 2

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.



1. Na *Figura 1* estão representadas, num referencial *o. n. Oxy*, a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 10$ e a reta CD de equação $y = 2x - 5$.

Os pontos C e D pertencem à circunferência.

1.1. Represente por meio de uma condição a região sombreada, em que a fronteira está incluída.

1.2. O ponto P de coordenadas (x, y) , desloca-se sobre o segmento de reta $[CD]$.

Entre que valores varia a ordenada do ponto P ?

- (A) $y \in [-1, 3]$ (B) $y \in [-2, 3]$ (C) $y \in [-3, 1]$ (D) $y \in [-5, 3]$

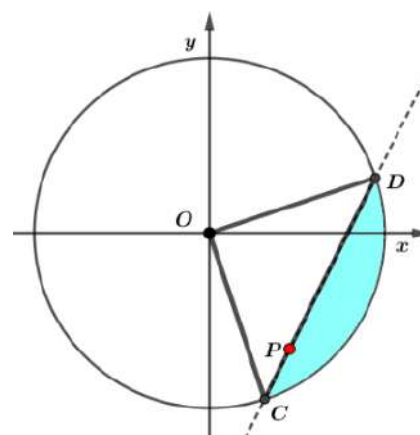


Figura 1

2. Num referencial *o. n. Oxy*, considere a reta definida pela equação vetorial

$$(x, y) = (4, p) + k(2, 6), k \in \mathbb{R}$$

Se a ordenada na origem for -2 então p será igual a:

- (A) -10 (B) -2 (C) 2 (D) 10

3. Na *Figura 2* está representado o gráfico da função f , definida no intervalo $[-2,8]$, sendo constituído pelos segmentos de reta $[AB]$, $[BC]$ e $[CD]$.

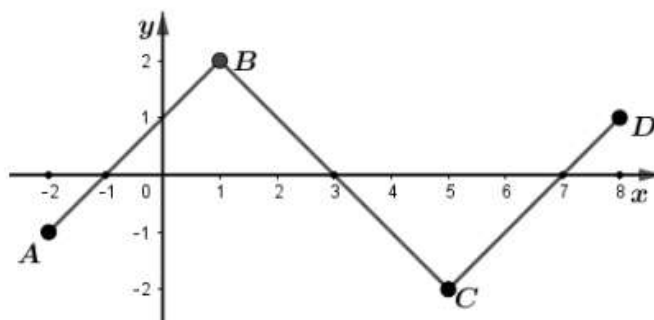


Figura 2

Sabe-se que:

- Os zeros de f são números inteiros;
- $A(-2, -1)$, $B(1, 2)$, $C(5, -2)$ e $D(8, 1)$ são pontos do gráfico de f .

3.1. Apresente uma tabela de variação da função que descreva a monotonia e os extremos da função f . Indique os intervalos de monotonia da função bem como os seus extremos relativos e absolutos.

3.2. Considere as funções a , b , c e d definidas por:

$$a(x) = 3f(x), \quad b(x) = f(x - 3), \quad c(x) = f(-2x) \quad \text{e} \quad d(x) = f(x) - 3$$

3.2.1. Averigue se as funções b e d têm zeros, identificando-os, em caso afirmativo, e justificando, caso não existam.

3.2.2. Qual das funções a , b , c ou d tem o menor mínimo absoluto?

- (A) d (B) c (C) b (D) a

4. De uma função f , estritamente decrescente em $\mathbb{R}$, sabe-se que $f(2) = 3$.

Qual dos seguintes valores é negativo?

- (A) $3 - f(2,01)$ (B) $3 - f(3)$ (C) $3 - f(1,99)$ (D) $3 - f(4)$

5. Considere os polinómios $A(x) = x^3 - 9x$, $B(x) = 3x + 16$ e $C(x) = A(x) - B(x)$.

5.1. Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da condição $A(x) > 0$.

5.2. Mostre que $A(-2) = B(-2)$ e $A(4) = B(4)$ e daí justifique que $C(x) = 0$ é uma equação possível.

5.3. Fatorize $C(x)$ e indique a multiplicidade de cada uma das suas raízes.

6. O gráfico representado na *Figura 3* é uma parábola.

Qual das seguintes expressões a pode definir ?

- (A) $y = -x^2 + x + 6$ (B) $y = x^2 + 6x + 10$
 (C) $y = (x - 3) \times \left(x - \frac{1}{10}\right)$ (D) $y = x^2 - 3x + 6$

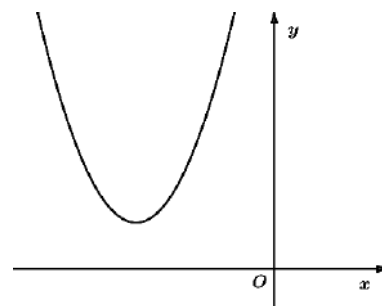


Figura 3

7. Seja f a função definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = x^2 - 4x + d$, sendo $d < 4$, e $[ABC]$ um triângulo.

Sabe-se que:

- A e B são os pontos de interseção de f com o eixo Ox ;
- C tem coordenadas $(2, 2)$.

Determine d sabendo que o triângulo $[ABC]$ tem área 2, assumindo que os pontos A e B são equidistantes da reta $x = 2$, eixo de simetria do gráfico de f .

8. Considere a função g definida, em $\mathbb{R}$, por $g(x) = 3|x - 2| - 1$, cujo gráfico está representado na *Figura 4*.

Determine a equação reduzida de cada uma das retas que contêm as semirretas do gráfico de g .

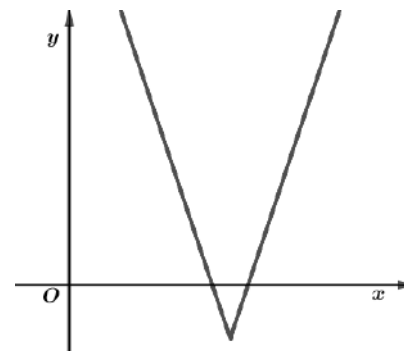


Figura 4

9. $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ é igual a:

(A) $-\sqrt{2} - \sqrt{3}$

(B) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

(C) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$

(D) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

10. Na *Figura 5*, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um paralelepípedo retângulo $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que:

- O vértice A pertence ao eixo Ox e o vértice B pertence ao eixo Oy ;
- As coordenadas dos vértices E e G são $(7, 2, 15)$ e $(6, 10, 13)$, respetivamente;
- A reta EF é definida pela equação vetorial

$$(x, y, z) = (1, -2, 19) + k(-3, -2, 2), k \in \mathbb{R}$$

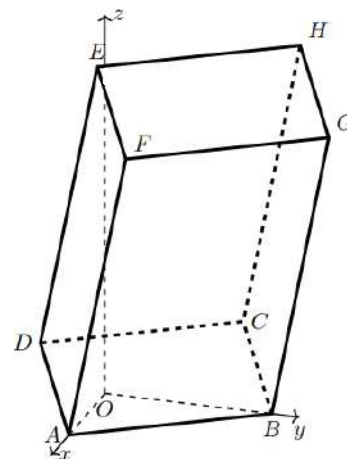


Figura 5

10.1. Considere a superfície esférica de centro em G e que passa em E .

Mostre que os pontos $P(6, 10, 13 + \sqrt{69})$ e $Q(6, 10, 13 - \sqrt{69})$ pertencem a essa superfície esférica e são os extremos de um seu diâmetro.

10.2. Justifique que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FG}$ e conclua que $\overrightarrow{FG} = (-a, b, 0)$, para certos valores numéricos de a e b , diferentes de zero.

10.3. Determine as coordenadas do ponto F .

Sugestão:

- Comece por justificar que as coordenadas de F podem ser obtidas através da expressão $(1, -2, 19) + k(-3, -2, 2)$, para certo valor de $k \in \mathbb{R}$;
- Utilize $\overrightarrow{FG} = G - F = (-a, b, 0)$, pela alínea **10.2**.

FIM

Questão	1.1	1.2	2.	3.1	3.2.1	3.2.2	4	5.1.	5.2.	5.3.	6.	7.	8.	9.	10.1	10.2	10.3	TOTAL
Cotação	14	8	8	14	13	8	8	14	14	14	8	13	14	8	14	14	14	200



Teste de Matemática 10.º ANO

2022

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A prova é formada por itens de escolha múltipla e de resposta restrita. Os critérios de classificação dos itens de resposta restrita estão organizados por etapas, atribuindo-se uma pontuação a cada uma delas.

Caso os alunos adotem um processo não previsto nos critérios específicos, cabe ao professor corretor adaptar a distribuição da cotação atribuída.

Deve ser atribuída a classificação de zero pontos nas seguintes situações:

- Caso um aluno apresente apenas o resultado final de um item ou de uma etapa, quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações;
- Caso o aluno utilize de forma inequívoca a calculadora, uma vez que tal não é solicitado nesta prova.

Nas seguintes situações deve descontar-se um ponto às cotações estabelecidas para a etapa respetiva:

- Ocorrência de um erro de cálculo;
- Apresentação de uma resposta com o formato que não esteja de acordo com o que foi solicitado;
- Apresentação de expressões com erros do ponto de vista formal.

Caso ocorram erros que revelem desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades ou o aluno apresente uma resolução incompleta de uma etapa, deve descontar-se até metade da cotação dessa etapa.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

QUESTÃO	1.1	1.2	2	3.1	3.2.1	3.2.2	4.	5.1	5.2	5.3	6.	7.	8.	9.	10.1	10.2	10.3	TOTAL
COTAÇÃO	14	8	8	14	13	8	8	14	14	14	8	13	14	8	14	14	14	200

QUESTÃO		DESCRIÇÃO	COTAÇÃO
1			22
	1.1		14
		• Identifica as condições: • $x^2 + y^2 \leq 10$) 4 pontos • $y \leq 2x - 5$..... 6 pontos • Escreve a condição $x^2 + y^2 \leq 10 \wedge y \leq 2x - 5$..... 4 pontos	
	1.2	Versão 1 (D); Versão 2 (C)	8
2	Versão 1 (C); Versão 2 (D)		8
3			35
	3.1	• Constrói corretamente um quadro de estudo da monotonia e extremos, identificando: • As abcissas dos pontos A, B, C e D..... 4 pontos • A monotonia nos intervalos considerados..... 2 pontos • Indica corretamente: • Os intervalos de monotonia 3 pontos • Os máximos e os mínimos relativos 3 pontos • O máximo e o mínimo absolutos 2 pontos	14
	3.2		21
		3.2.1 13 pontos • Indica os zeros de b ($\{2,6,10\}$) 6 pontos • Justifica que d não tem zeros [o gráfico de d é a imagem do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u} = (0, -3)$, ficando assim este gráfico abaixo do eixo Ox. Ou referir que o máximo absoluto de d é -1]... 7 pontos 3.2.2 Versão 1 (A); Versão 2 (D) 8 pontos	
4	Versão 1 (B); Versão 2 (C)		8
5			42
	5.1		14
		• Coloca x em evidência 2 pontos • Determina: • as raízes do polinómio $A(x)$ 5 pontos • o sinal do polinómio $A(x)$ 5 pontos • Indica o conjunto solução $(] - 3,0[\cup] 3, +\infty[)$ 2 pontos	

	5.2		14	
		- Mostra que $A(-2) = B(-2)$ e $A(4) = B(4)$ 8 pontos - Justifica que como $C(-2) = A(-2) - B(-2) = 0$ (ou $C(4) = 0$), $C(x) = 0$ tem pelo menos uma solução 6 pontos		
	5.3		14	
		- Mostra que $C(x) = x^3 - 12x - 16$ 2 pontos - Mostra que -2 e 4 são as únicas raízes de $C(x)$ 5 pontos - Identifica a multiplicidade de cada uma das raízes 2 pontos - Apresenta a factorização 5 pontos		
6	Versão 1 (C); Versão 2 (B)			8
7				13
		Processo 1 - Indica que a altura do triângulo $[ABC]$ relativamente à base $[AB]$ é 2 2 pontos - Determina $\overline{AB} = 2$ 4 pontos - Justifica que como A e B são equidistantes da reta $x = 2$, eixo de simetria do gráfico de f, então as suas coordenadas são, respetivamente, $(1, 0)$ e $(3, 0)$ 3 pontos - Determina d ($f(1) = 0 \Leftrightarrow d = 3$ ou condição equivalente) 4 pontos Processo 2 - Determina os zeros de f em função de d 3 pontos - Determina a expressão que traduz a distância entre A e B 2 pontos - Identifica a altura do triângulo $[ABC]$ 2 pontos - Estabelece a condição $\overline{AB} = 2$ 4 pontos - Determina d 2 pontos		
8				14
		Processo 1 - Define a função g por ramos 8 pontos - Apresenta a equação reduzida de cada uma das retas que contêm as semirretas do gráfico de g 6 pontos Processo 2 - Indica o vértice do gráfico 2 pontos - Determina as coordenadas de dois pontos – um à esquerda do vértice e outro à direita 6 pontos - Determina a equação de cada uma das retas pedidas 6 pontos		
9	Versão 1 (B); Versão 2 (A)			8
10				42
	10.1		14	
		Processo 1 - Determina o raio da superfície esférica ($\overline{GE} = \sqrt{69}$) 4 pontos - Escreve a equação da superfície esférica 4 pontos - Mostra que $P(6, 10, 13 + \sqrt{69})$ e $Q(6, 10, 13 - \sqrt{69})$: - Verificam a condição que define a superfície esférica 2 pontos - Estão a uma distância de $2r = 2\sqrt{69}$ 4 pontos		

		Processo 2 - Determina o raio da superfície esférica ($\overline{GE} = \sqrt{69}$) 4 pontos - Mostra que G é o ponto médio do segmento de reta $[PQ]$ 4 pontos - Mostra que $\overline{PQ} = 2\sqrt{69}$..... 4 pontos - Conclui que o segmento $[PQ]$ é um diâmetro 2 pontos		
	10.2		14	
		- Mostra que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{FG}$ são iguais 6 pontos - Justifica que se o vértice A pertence ao eixo Ox e o vértice B pertence ao eixo Oy, então $\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0)$ 6 pontos - Conclui que $\overrightarrow{FG} = (-a, b, 0)$ 2 pontos		
	10.3		14	
		- Justifica que as coordenadas de F podem ser obtidas através da expressão $(1, -2, 19) + k(-3, -2, 2)$, para certo valor de $k \in \mathbb{R}$ 4 pontos - Determina k de modo que $\overrightarrow{FG} = (-a, b, 0)$ ($k = -3$) 5 pontos - Determina as coordenadas de F $((10, 4, 13))$ 5 pontos		



SPM@TESTES

Teste de Matemática 11.º ano

2022

11.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

(seis páginas)

VERSÃO 1

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.



1. Na Figura 1 está representada, num referencial o.n. xOy , a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:

- a reta r é definida pela equação $x = 1$;
- o ponto C pertence à circunferência;
- o ponto B é a interseção da semirreta $\vec{OC}$ com a reta r ;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo COD , com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;
- os pontos A e D são, respetivamente, as projeções ortogonais de B e C sobre o eixo Oy .

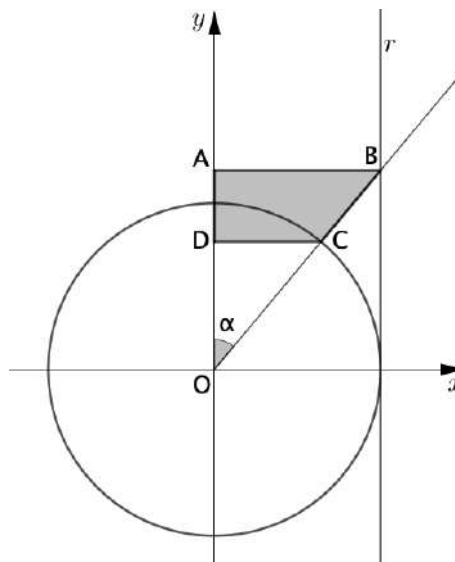


Figura 1

- 1.1. Mostre que a área do trapézio $[ABCD]$, representado a sombreado, é dada em função

$$\text{de } \alpha \text{ por } A(\alpha) = \frac{\cos^2 \alpha}{2 \tan \alpha}$$

- 1.2. Suponha que β é tal que $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ e $\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \beta\right) = -\frac{1}{3}$

Determine o valor exato de $A(\beta)$.

2. Na Figura 2 está parte da representação gráfica da função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \cos x + \cos(2x)$$

Na restrição ao domínio de f considerada na Figura 2, o gráfico de f , intersesta o eixo Ox precisamente nos três pontos A, B e C assinalados na figura.

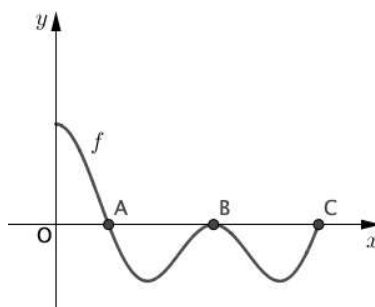


Figura 2

- 2.1. Determine, recorrendo a processos exclusivamente analíticos, as abcissas dos pontos A, B e C .

- 2.2. Para qualquer valor real de x , $f(\pi + x) - f(\pi - x)$ é igual a:

- (A) $\cos(2x)$ (B) $-\cos(2x)$ (C) $2 \cos x$ (D) 0

3. Na Figura 3, estão representados, num referencial o.n. xOy :

- o ponto C pertencente ao semieixo positivo Ox ;
- a circunferência de centro no ponto C e que passa no ponto T , de coordenadas $(2, -1)$;
- a reta t , definida pela equação $x + y - 1 = 0$ e tangente à circunferência no ponto T .

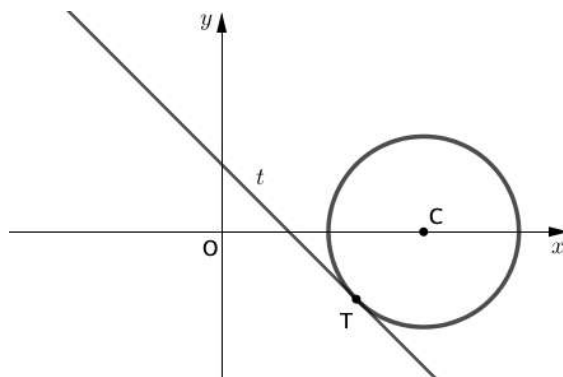


Figura 3

Determine a equação reduzida da circunferência representada na figura.

4. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$:

- a superfície esférica de equação $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 9$;
- o ponto A de coordenadas $(1, 2, 1)$ pertencente a essa superfície esférica.

Seja B o ponto de interseção da superfície esférica com o semieixo negativo das abcissas.

Determine uma equação cartesiana do plano AOB .

5. Considere, num referencial o.n. xOy os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tais que:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \sqrt{10}$
- $\vec{u}$ é um vetor diretor da reta r de declive positivo e que passa na origem do referencial;
- $\vec{v}$ é um vetor paralelo ao eixo Ox .

A equação reduzida da reta r é:

(A) $y = x$

(B) $y = 2x$

(C) $y = 3x$

(D) $y = 4x$

6. Acerca de uma sucessão (u_n) , sabe-se que $-3 \leq u_n \leq 5$ e que $u_n - u_{n+1} < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Então a sucessão (v_n) definida por $v_n = -\frac{2}{3}u_n$ é

- (A) monótona crescente e não é limitada.
- (B) monótona decrescente e 2 é um dos minorantes da sucessão.
- (C) monótona decrescente e 6 é um dos majorantes da sucessão.
- (D) monótona crescente e $-\frac{10}{3}$ é um dos minorantes da sucessão.

7. Sabe-se que:

- a sucessão (u_n) é estritamente crescente e tem todos os termos negativos;
- a sucessão (v_n) é uma progressão aritmética de razão positiva.

Considere a sucessão de termo geral $w_n = \frac{v_n}{u_n}$.

Prove que $\lim w_n = -\infty$

8. A Júlia comprou um automóvel a prestações, tendo pagado na primeira prestação, a 2 de janeiro de 2020, 120€. Depois, comprometeu-se a entregar mensalmente, uma quantia cujo montante se obtém efetuando um acréscimo de 2% à quantia paga no mês anterior, ou seja, por exemplo, em fevereiro de 2020, pagou 122,40€. Sabendo que a última prestação será paga a 2 de dezembro de 2023, indica, **justificando**, qual das expressões seguintes permitirá obter a quantia total que a Júlia pagará pelo automóvel.

$$(I) P = \frac{6000}{49} (1 - 0,02^{48}) \quad (II) P = -6000 (1 - 1,02^{48}) \quad (III) P = 120 \times 1,02^{47}$$

9. No referencial o.n. xOy da Figura 4 estão representadas graficamente a função f e a respetiva inversa, função g .

Sabe-se que:

- a função f é definida por $f(x) = x^3 - 1$
- o ponto P , de coordenadas (a, b) , pertence ao gráfico de f ;
- o ponto Q pertence ao gráfico da função g e tem abcissa b .

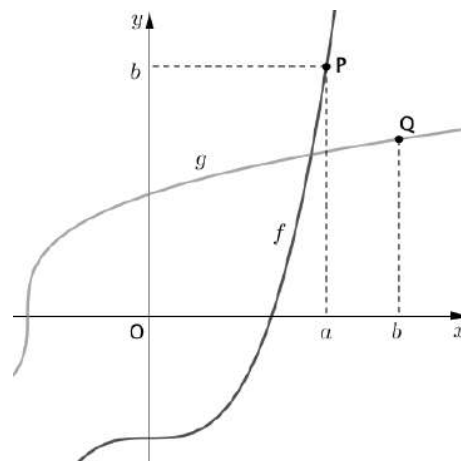


Figura 4

A ordenada do ponto Q é igual a:

- (A) $\sqrt[3]{b} + 1$ (B) $b^3 - 1$ (C) $\sqrt[3]{b+1}$ (D) $\sqrt[3]{b} - 1$
10. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{4x+1}{x-2}$
- 10.1. Escreva $f(x)$ na forma $a + \frac{b}{x-c}$, com a, b e c números reais e identifique as assíntotas ao gráfico da função f .

10.2. Resolva a inequação $f(x) \leq \frac{1}{x}$

10.3. Determine o valor de $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{\frac{x+3}{x^2-5x+6}}$

11. No referencial o.n. xOy da Figura 5 estão representadas duas funções polinomiais, g e h , cujos gráficos se interseitam no ponto do eixo Ox de abcissa 2 e no ponto do eixo Oy de ordenada 4. Sabe-se ainda que a função g é quadrática e a função h é afim.

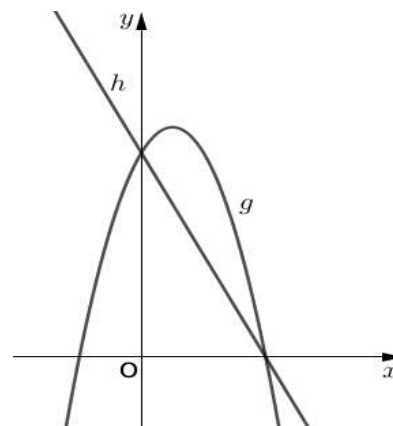


Figura 5

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{h(x)}$?

- (A) 0 (B) $-\infty$ (C) $+\infty$ (D) -2

12. No referencial o.n. xOy da Figura 6 está representada a função f definida, no seu domínio, por $f(x) = 2\sqrt{x+1} - 4$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao gráfico da função f ;
- o ponto B tem coordenadas $(0,4)$;
- o ponto C pertence ao eixo Ox ;
- a reta AB é paralela ao eixo Ox .

A área do triângulo $[ABC]$ é igual a:

- (A) 60 (B) 30 (C) 15 (D) 14

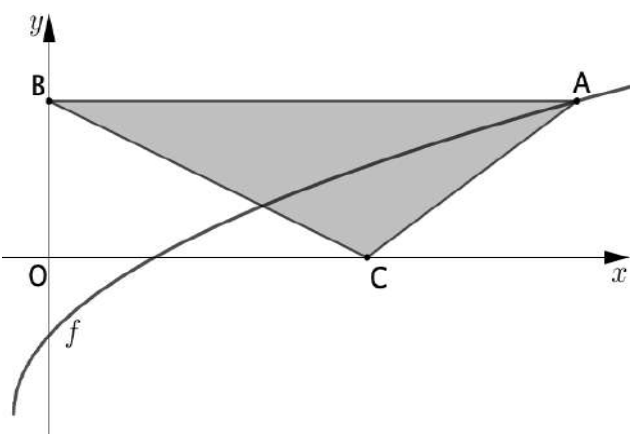


Figura 6

FIM

Questão	1.1	1.2	2.1	2.2	3	4	5	6	7	8	9	10.1	10.2	10.3	11	12	Total
Cotação	16	14	16	8	16	16	8	8	14	16	8	14	16	14	8	8	200



SPM@TESTES

Teste de Matemática 11.º ano

2022

11.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

(seis páginas)

VERSÃO 2

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.



1. Na Figura 1 está representada, num referencial o.n. xOy , a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:

- a reta r é definida pela equação $x = 1$;
- o ponto C pertence à circunferência;
- o ponto B é a interseção da semirreta $\vec{OC}$ com a reta r ;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo COD , com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;
- os pontos A e D são, respetivamente, as projeções ortogonais de B e C sobre o eixo Oy .

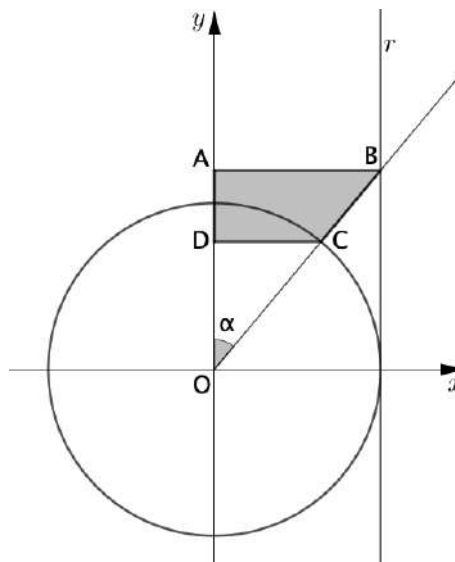


Figura 1

- 1.1. Mostre que a área do trapézio $[ABCD]$, representada a sombreado, é dada em função

de α por $A(\alpha) = \frac{\cos^2 \alpha}{2 \tan \alpha}$

- 1.2. Suponha que β é tal que $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ e $\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \beta\right) = -\frac{1}{3}$

Determine o valor exato de $A(\beta)$.

2. Na Figura 2 está parte da representação gráfica da função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \cos x + \cos(2x)$$

Na restrição ao domínio de f considerada na Figura 2, o gráfico de f , intersesta o eixo Ox precisamente nos três pontos A, B e C assinalados na figura.

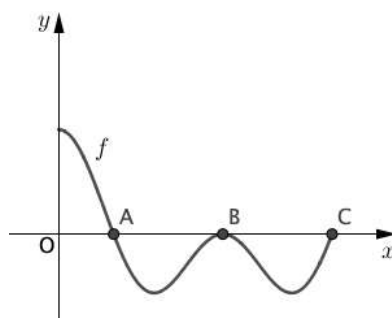


Figura 2

- 2.1. Determine, recorrendo a processos exclusivamente analíticos, as abcissas dos pontos A, B e C .

- 2.2. Para qualquer valor real de x , $f(-x) - f(\pi - x)$ é igual a:

- (A) $\cos(2x)$ (B) $-\cos(2x)$ (C) $2 \cos x$ (D) 0

3. Na Figura 3, estão representadas, num referencial o.n. xOy :

- o ponto C pertencente ao semieixo positivo Ox ;
- a circunferência de centro no ponto C e que passa no ponto T , de coordenadas $(2, -1)$;
- a reta t , definida pela equação $x + y - 1 = 0$ e tangente à circunferência no ponto T .

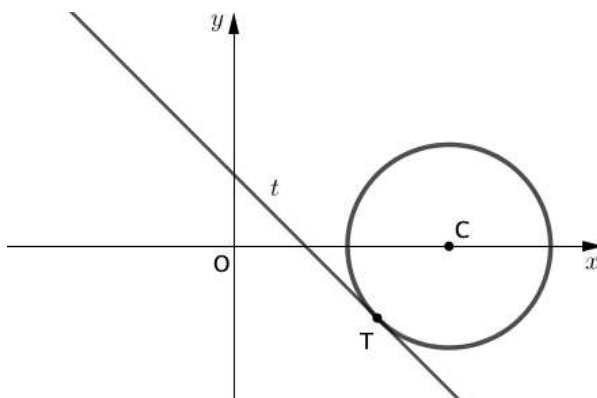


Figura 3

Determine a equação reduzida da circunferência representada na figura.

4. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$:

- a superfície esférica de equação $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 9$;
- o ponto A de coordenadas $(1, 2, 1)$ pertencente a essa superfície esférica.

Seja B o ponto de interseção da superfície esférica com o semieixo negativo das abcissas.

Determine uma equação cartesiana do plano AOB .

5. Considere, num referencial o.n. xOy os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tais que:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \sqrt{5}$;
- $\vec{u}$ é um vetor diretor da reta r de declive positivo e que passa na origem do referencial;
- $\vec{v}$ é um vetor paralelo ao eixo Ox .

A equação reduzida da reta r é:

(A) $y = x$

(B) $y = 2x$

(C) $y = 3x$

(D) $y = 4x$

6. Acerca de uma sucessão (u_n) , sabe-se que $-3 \leq u_n \leq 5$ e que $u_n - u_{n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Então a sucessão (v_n) definida por $v_n = -\frac{2}{3}u_n$ é

- (A) monótona crescente e não é limitada.
- (B) monótona decrescente e 2 é um dos minorantes da sucessão.
- (C) monótona decrescente e 6 é um dos majorantes da sucessão.
- (D) monótona crescente e $-\frac{10}{3}$ é um dos minorantes da sucessão.

7. Sabe-se que:

- a sucessão (u_n) é estritamente crescente e tem todos os termos negativos;
- a sucessão (v_n) é uma progressão aritmética de razão positiva.

Considere a sucessão de termo geral $w_n = \frac{v_n}{u_n}$.

Prove que $\lim w_n = -\infty$

8. A Júlia comprou um automóvel a prestações, tendo pagado na primeira prestação, a 2 de janeiro de 2020, 120€. Depois, comprometeu-se a entregar mensalmente, uma quantia cujo montante se obtém efetuando um acréscimo de 2% à quantia paga no mês anterior, ou seja, por exemplo, em fevereiro de 2020, pagou 122,40€. Sabendo que a última prestação será paga a 2 de dezembro de 2023, indica, **justificando**, qual das expressões seguintes permitirá obter a quantia total que a Júlia pagará pelo automóvel.

$$(I) P = 120 \times 1,02^{47} \quad (II) P = \frac{6000}{49} (1 - 0,02^{48}) \quad (III) P = -6000 (1 - 1,02^{48})$$

9. No referencial $o.n. xOy$ da Figura 4 estão representadas graficamente a função f e a respetiva inversa, função g . Sabe-se que:

- a função g é definida por $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$
- o ponto P de coordenadas (a, b) pertence ao gráfico de f ;
- o ponto Q pertence ao gráfico da função g e tem abcissa b .

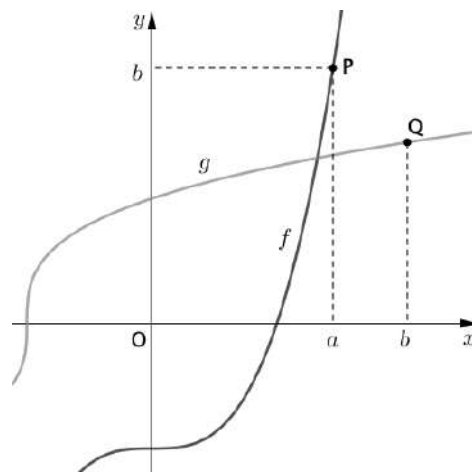


Figura 4

A ordenada do ponto P é igual a:

- (A) $(a+1)^3$ (B) $a^3 - 1$ (C) $\sqrt[3]{a+1}$ (D) $\sqrt[3]{a} - 1$
10. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{4x+1}{x-2}$

10.1. Escreva $f(x)$ na forma $a + \frac{b}{x-c}$, com a, b e c números reais e identifique as assíntotas ao gráfico da função f .

10.2. Resolva a inequação $f(x) \leq \frac{1}{x}$

10.3. Determine o valor de $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{\frac{x+3}{x^2-5x+6}}$

11. No referencial $o.n. xOy$ da Figura 5 estão representadas duas funções polinomiais g e h cujos gráficos se intersectam no ponto do eixo Ox de abcissa 2 e no ponto do eixo Oy de ordenada 4. Sabe-se ainda que a função g é quadrática e a função h é afim.

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{h(x)}$?

- (A) 0 (B) $-\infty$ (C) $+\infty$ (D) -2

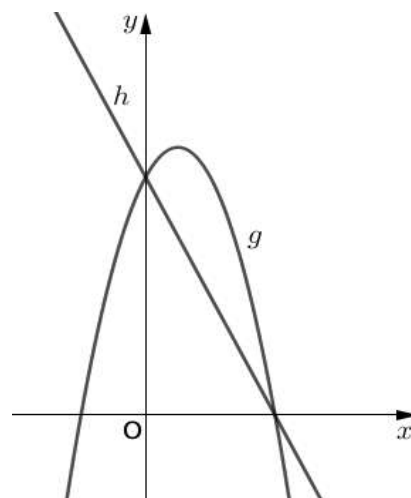


Figura 5

12. No referencial o.n. xOy da Figura 6 está representada a função f definida, no seu domínio, por $f(x) = 2\sqrt{x+1} - 3$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao gráfico da função f ;
- o ponto B tem coordenadas $(0,3)$;
- o ponto C pertence ao eixo Ox ;
- a reta AB é paralela a Ox .

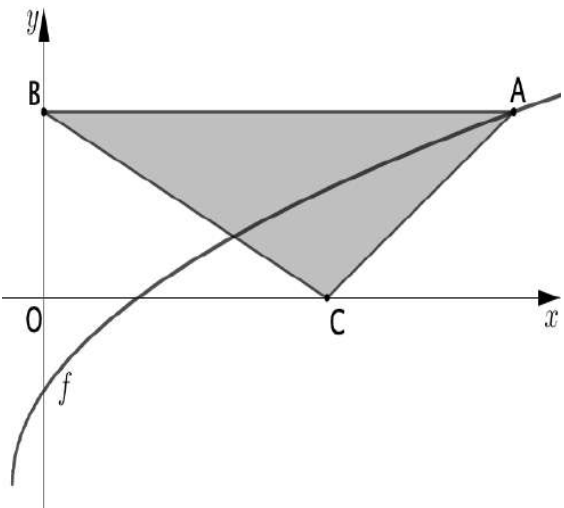


Figura 6

A área do triângulo $[ABC]$ é igual a:

- (A) 24 (B) 16 (C) 14 (D) 12

FIM

Questão	1.1	1.2	2.1	2.2	3	4	5	6	7	8	9	10.1	10.2	10.3	11	12	Total
Cotação	16	14	16	8	16	16	8	8	14	16	8	14	16	14	8	8	200



SPM@TESTES

Teste de Matemática 11.º ano

2022

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A prova é formada por itens de escolha múltipla e de resposta restrita. Os critérios de classificação dos itens de resposta restrita estão organizados por etapas, atribuindo-se, a cada uma delas, uma pontuação.

Caso os alunos adotem um processo não previsto nos critérios específicos, cabe ao professor corretor adaptar a distribuição da cotação atribuída.

Deve ser atribuída a classificação de zero pontos nas seguintes situações:

- Caso um aluno apresente apenas o resultado final de um item, ou de uma etapa, quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações;
- Caso o aluno utilize de forma inequívoca a calculadora, uma vez que tal não é solicitado nesta prova.

Nas seguintes situações deve descontar-se um ponto às cotações estabelecidas para a etapa respetiva:

- Ocorrência de um erro de cálculo;
- Apresentação de uma resposta com o formato que não esteja de acordo com o que foi solicitado;
- Apresentação de expressões com erros do ponto de vista formal.

Caso ocorram erros que revelem desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades ou o aluno apresente uma resolução incompleta de uma etapa, deve descontar-se até metade da cotação dessa etapa.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

Questão	1.1	1.2	2.1	2.2	3	4	5	6	7	8	9	10.1	10.2	10.3	11	12
Cotação	16	14	16	8	16	16	8	8	14	16	8	14	16	14	8	8

Item	Descrição	Cotação
1.		30
1.1.		16
	• Indicar as coordenadas do ponto A, em função de α 2 pontos • Indicar as coordenadas do ponto C, em função de α 2 pontos • Indicar as coordenadas do ponto D, em função de α 2 pontos • Escrever $\overline{AB} + \overline{DC}$, em função de α 2 pontos • Escrever $\overline{AD}$, em função de α 3 pontos • Obter a expressão pretendida 5 pontos	
1.2.		14
	• Concluir que $\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \beta\right) = -\cos \beta$ 3 pontos • Obter $\cos \beta = \frac{1}{3}$ 2 pontos • Relacionar $\tan \beta$ com $\cos \beta$ 4 pontos • Obter $\tan \beta = 2\sqrt{2}$ 2 pontos • Obter $\frac{\sqrt{2}}{72}$ (ou equivalente) como resposta ao problema 3 pontos	
2.		24
2.1.		16
	• Escrever $f(x) = 0$ 1 ponto • Escrever $\cos(2x) = -\cos x$ 1 ponto • Escrever $\cos(2x) = \cos(\pi - x)$ (ou equivalente) 4 pontos • Obter as abcissas dos pontos A, B e $C\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ e $\frac{5\pi}{3}$ 10 pontos	
2.2.	Versão 1 – (D); Versão 2 – (C) _____	8
3.		16
	• Reconhecer que as coordenadas do ponto C são do tipo $(x, 0)$, com $x \in \mathbb{R}^+$ 1 ponto • Reconhecer que um vetor diretor da reta t é, por exemplo, o vetor de coordenadas $\vec{t}(1, -1)$ 3 pontos • Escrever $\overrightarrow{CT} \cdot \vec{t} = 0$ 4 pontos • Obter $x = 3$ e portanto $C(3,0)$ 2 pontos • Determinar o raio da circunferência 3 pontos • Obter a equação da circunferência $((x - 3)^2 + y^2 = 2)$.. 3 pontos	

4.			16
		• Reconhecer que as coordenadas do ponto B são do tipo $(x, 0, 0)$, com $x \in \mathbb{R}^-$ 1 ponto • Obter $B(-4, 0, 0)$ 3 pontos • Sendo $\vec{n}$ um vetor normal ao plano AOB escrever $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \wedge \vec{n} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ 3 pontos • Obter $\vec{n}(0, b, -2b), b \in \mathbb{R}$ 4 pontos • Obter, por exemplo, $\vec{n}(0, 1, -2)$ 2 pontos • Obter a equação $y - 2z = 0$ (ou equivalente) 3 pontos	
5.		Versão 1 – (C); Versão 2 – (B) _____	8
6.		Versão 1 – (C); Versão 2 – (D) _____	8
7.			14
		A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas. • Referir que (u_n) é limitada, escrevendo $u_1 \leq u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$ 3 pontos • Referir que (u_n) é monótona e limitada e concluir que é convergente 3 pontos • Referir que o limite de u_n é um número negativo ou 0^- 3 pontos • Referir que a sucessão (v_n) é uma progressão aritmética de razão positiva e concluir que $\lim v_n = +\infty$ 3 pontos • Escrever que $\lim \frac{v_n}{u_n} = \frac{\lim v_n}{\lim u_n} = -\infty$ 2 pontos	
8.			16
		A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas. • Justificar a existência de progressão geométrica e indicar o valor da razão (1,02)..... 6 pontos • Justificar o valor de 48 meses e apresentar uma expressão da soma dos 48 primeiros termos da progressão geométrica 6 pontos • Escolher a resposta correta 4 pontos Versão 1 – (II); Versão 2 – (III)	
9.		Versão 1 – (C); Versão 2 – (B) _____	8
10.			44
	10.1.	_____ • Utilizar a Regra de <i>Ruffini</i> ou o algoritmo da divisão inteira de polinómios para escrever $f(x) = 4 + \frac{9}{x-2}$ 8 pontos	14

		• Identificar corretamente as equações das assíntotas vertical e horizontal do gráfico da função ($x = 2$ e $y = 4$) 6 pontos	
	10.2.	_____	16
		• Transformar a condição numa equivalente em que o 1º membro é uma fração racional e o segundo membro é zero..... 8 pontos	
		• Construir corretamente um quadro de estudo de sinal da fração racional..... 6 pontos	
		• Indicar o conjunto solução $(]0,2[)$ 2 pontos	
	10.3.	_____	14
		• Utilizar a Regra de <i>Ruffini</i> ou os zeros para decompor o polinómio $x^2 - 5x + 6$ da seguinte forma: $(x - 2)(x - 3)$ 4 pontos	
		• Simplificar a expressão, obtendo $\frac{(4x+1)(x-3)}{x+3}$ 7 pontos	
		• Indicar o valor do limite $\left(-\frac{9}{5}\right)$ 3 pontos	
11.		Versão 1 – (C); Versão 2 – (B) _____	8
12.		Versão 1 – (B); Versão 2 – (D) _____	8



Prova de Matemática A

Ensino Secundário | maio de 2022

12.º Ano de Escolaridade

Duração da Prova: 120 minutos | Tolerância: 30 minutos

8 páginas

VERSÃO 1

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.



Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfície

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base;
 g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Complexos

$$(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

As raízes índice n de $z = r e^{i\theta}$ são dadas por:

$$\sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} \quad (k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

1. Considere num referencial cartesiano do espaço, $Oxyz$, o plano β definido pela condição $x + 2y - z = -4$ e o ponto $P(2, 1, 3)$.

1.1. As coordenadas do ponto de interseção da reta OP com o plano β são:

- (A) $(-8, -4, -12)$ (B) $(8, -4, 12)$
 (C) $(12, -3, 10)$ (D) $(-12, 3, -2)$

1.2. Sejam Q e R os pontos do plano β que pertencem ao eixo Oz e ao eixo Oy , respetivamente.

Determine uma equação cartesiana do plano PQR .

2. Na **Figura 1** está representada, num referencial o.n. xOy , uma circunferência de centro O e raio 1.

Sabe-se que:

- os pontos A, B, C e D pertencem à circunferência
- os segmentos $[BA]$ e $[CD]$ são paralelos ao eixo das abcissas
- o triângulo $[AOD]$ é retângulo em O

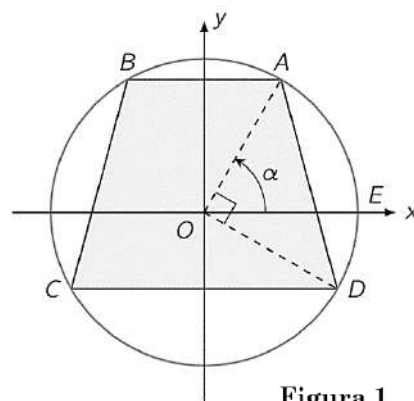


Figura 1

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo AOE ($\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$).

Mostre que a área do trapézio $[ABCD]$ é dada em função de α por:

$$1 + \sin(2\alpha)$$

3. De uma sucessão monótona (u_n) , sabe-se que:

- $u_1 = 3$
- $u_2 = 2$
- $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Qual é a proposição **necessariamente** verdadeira?

- (A) (u_n) não é limitada
 (B) (u_n) é decrescente e limitada
 (C) (u_n) converge para 0
 (D) (u_n) é crescente e limitada

4. De uma progressão geométrica (w_n) monótona, sabe-se que:

- o sétimo termo é igual a 8
- o nono termo é igual a 2

De uma progressão aritmética (v_n) , sabe-se que:

- o primeiro termo é igual w_4
- a sua razão é igual à razão da progressão geométrica, (w_n)

Sabe-se ainda que 213 é termo de (v_n) .

Determine a ordem do termo 213.

5. Considere a função definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = x \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

5.1. Seja (x_n) uma sucessão tal que $\lim f(x_n) = -\infty$.

Qual das seguintes, pode ser a sucessão (x_n) ?

- (A) $\frac{n}{n^2+2022}$ (B) $\frac{n^2}{n^2+2022}$ (C) $\frac{\sqrt{n}}{n+2022}$ (D) $\frac{n^2}{n+2022}$

Sem recorrer à calculadora, a não ser para eventuais cálculos numéricos, resolva os dois itens seguintes:

5.2. Determine as coordenadas do ponto do gráfico de f em que a ordenada é metade da abcissa.

5.3. Mostre que $\frac{1}{e}$ é extremo relativo da função f e indique, justificando, se se trata de um mínimo ou de um máximo.

6. Seja f uma função real, diferenciável em $\mathbb{R}$, tal que $f(1) = 1$ e $f'(1) = 2$.

Considere a função real de variável real definida, em $\mathbb{R}^+$, por $g(x) = xf(\ln(x))$.

O valor do declive da reta tangente ao gráfico de g , no ponto de abcissa e , é:

- (A) $1 + 2e$ (B) -1 (C) $\frac{2}{e}$ (D) 3

7. Considere a função h definida, em $\mathbb{R}$, por:

$$h(x) = \begin{cases} 1 - 3x + xe^{x-3} & \text{se } x < 3 \\ -5 & \text{se } x = 3 \\ \frac{x^2 - x - 6}{1 - e^{x-3}} & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

7.1. Averigue se a função h é contínua em $x = 3$.

7.2. O gráfico da função h admite uma assíntota oblíqua, quando $x \rightarrow -\infty$.

Determine a equação reduzida dessa assíntota.

7.3.

7.3.1. Admita que no intervalo $]0, 2[$ os gráficos de h e de h' , primeira derivada da função h , se intersejam, no **máximo**, num ponto.

Recorrendo ao *Teorema de Bolzano – Cauchy*, mostre que os gráficos se intersejam **num único ponto**, em $]0, 2[$.

7.3.2. Seja I o ponto de interseção, cuja a existência foi provada no item 7.3.1.

Considere a circunferência de centro em O e que passa em I .

Pretende-se determinar um valor aproximado às décimas da medida do raio da circunferência.

Sabe-se que a utilização das **capacidades gráficas da sua calculadora** lhe permite, neste caso, determinar valores aproximados das coordenadas do ponto I , mas não se pede para justificar este facto.

Para calcular o referido valor aproximado proceda da seguinte forma:

- equacione o problema
- reproduza o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial.
- indique as coordenadas do ponto I , com aproximação às **centésimas**.
- exprima o raio da circunferência através das coordenadas de I e calcule um valor aproximado da medida do raio usando as aproximações acima referidas dessas coordenadas, arredondando às **décimas** o resultado assim obtido.

8. Seja k um número real não nulo.

Considere a função g , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \cos(-kx) + \sin(-2kx)$

Mostre que a segunda derivada de g , g'' , pode ser dada por:

$$g''(x) = -k^2 \cos(kx) (1 - 8 \sin(kx))$$

Responda a um e um só dos grupos A ou B

Se responder a mais do que um destes grupos deve indicar qual deles pretende que seja classificado. Se não der esta indicação será classificado o grupo a que responder em primeiro lugar.

Grupo A

9. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Considere a equação $z^3 - 2z + 4 = 0$

Esta equação tem três soluções em $\mathbb{C}$, sendo uma delas o número real -2

As imagens geométricas, no plano complexo, dessas três soluções, são vértices de um triângulo.

Sem recorrer à calculadora, determine o perímetro desse triângulo.

Apresente o resultado na forma $a + b\sqrt{n}$, onde $a, b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$

10. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere os números w_1 e w_2 .

Sabe-se que:

- $w_2 = \frac{2e^{i(\frac{\pi}{4})} - \sqrt{2}i^{25}}{2 + 2\sqrt{3}i}$
- a imagem geométrica de w_1 pertence à bissetriz dos quadrantes pares
- $|w_1| = |w_2|$
- $Re(w_1) < 0$ e $Im(w_1) > 0$

Sem recorrer à calculadora, determine, na forma trigonométrica, o número complexo w_1 .

11. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere os números:

$$z_1 = -2 \cos \theta + 2i \sin \theta, \text{ com } \theta \in [0, 2\pi[\quad \text{e} \quad z_2 = -\frac{1}{2}i z_1$$

Uma representação do número complexo z_2 , na forma trigonométrica, é:

- (A) $-e^{i(\pi-\theta)}$ (B) $e^{i(\pi-\theta)}$ (C) $e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$ (D) $e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}$

Grupo B

9. No congresso *O Futuro da Educação em Portugal*, estiveram presentes Professores de Matemática e de outras áreas disciplinares.

Devido às medidas restritivas da COVID19, o uso de máscara foi **obrigatório** neste congresso.

Sabe-se que todos os Professores presentes cumpriram a medida restritiva.

Havia **apenas** dois tipos de máscaras permitidas no congresso: as *máscaras cirúrgicas* e as *máscaras respiratórias*.

Durante o congresso, foi possível concluir que:

- 65% dos congressistas não eram Professores de Matemática
- dos Professores de Matemática, 4 em cada 7, usaram máscara respiratória
- 45% dos congressistas eram Professores de Matemática ou usaram máscara cirúrgica

9.1. No final, foi realizado um sorteio aleatório de um congressista entre **todos** os congressistas presentes.

Constatou-se que o Professor selecionado usava uma máscara cirúrgica.

Qual é a probabilidade de não ser Professor de Matemática?

Apresente o resultado na forma de percentagem.

9.2. Sabe-se que estiveram presentes um total de 1200 professores no congresso e que o número de Professores de Matemática era o **triplo** do número de Professores de Português.

Foram escolhidos, ao acaso, de entre os presentes, **cinco** Professores, para formar uma comissão que organizará o congresso seguinte.

Quantas comissões podem ser constituídas com exatamente três Professores de Matemática e, pelo menos, um Professor de Português?

(A) $140 \times {}^{420}C_3 \times 640$

(B) ${}^{420}C_3(640 \times 140 + {}^{140}C_2)$

(C) ${}^{140}C_2 \times {}^{420}C_3$

(D) ${}^{640}C_2 \times {}^{420}C_3$

10. Seja $(E, \mathcal{P}(E), P)$ um espaço de probabilidades e $A, B \in \mathcal{P}(E)$ acontecimentos possíveis.

Mostre que:

$$1 + P(A|\bar{B}) \times \left(\frac{1}{P(B)} - 1 \right) = P(\bar{A}|B) + \frac{P(A)}{P(B)}$$

FIM

Item											
Cotação (em pontos)											
1.1.	1.2.	2	3	4	5.1.	5.2.	5.3.	6	7.1.	TOTAL	200 pontos
10	12	14	10	12	10	12	12	10	12		
7.2.	7.3.1.	7.3.2.	8	GRUPO A			GRUPO B				
				9	10	11	9.1.	9.2.	10		
12	14	14	12	12	12	10	12	10	12		



Prova de Matemática A

Ensino Secundário | maio de 2022

12.º Ano de Escolaridade

Duração da Prova: 120 minutos | Tolerância: 30 minutos

8 páginas

VERSÃO 2

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.



Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfície

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base;
 g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Complexos

$$(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

As raízes índice n de $z = r e^{i\theta}$ são dadas por:

$$\sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} \quad (k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

1. Considere num referencial cartesiano do espaço, $Oxyz$, o plano β definido pela condição $x + 2y - z = -4$ e o ponto $P(2, 1, 3)$.

1.1. As coordenadas do ponto de interseção da reta OP com o plano β são:

- (A) $(12, -3, 10)$ (B) $(-8, -4, -12)$
 (C) $(-12, 3, -2)$ (D) $(8, -4, 12)$

1.2. Sejam Q e R os pontos do plano β que pertencem ao eixo Oz e ao eixo Oy , respetivamente.

Determine uma equação cartesiana do plano PQR .

2. Na **Figura 1** está representada, num referencial o.n. xOy , uma circunferência de centro O e raio 1.

Sabe-se que:

- os pontos A, B, C e D pertencem à circunferência
- os segmentos $[BA]$ e $[CD]$ são paralelos ao eixo das abcissas
- o triângulo $[AOD]$ é retângulo em O

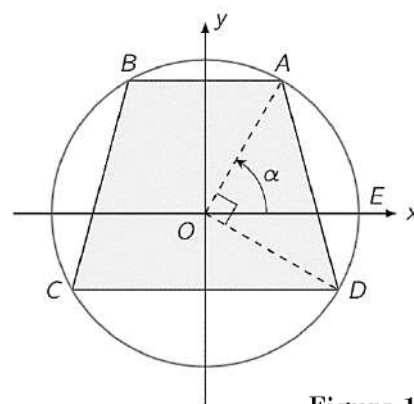


Figura 1

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo AOE ($\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$).

Mostre que a área do trapézio $[ABCD]$ é dada em função de α por:

$$1 + \sin(2\alpha)$$

3. De uma sucessão monótona (u_n) , sabe-se que:

- $u_1 = 3$
- $u_2 = 2$
- $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Qual é a proposição **necessariamente** verdadeira?

- (A) (u_n) é decrescente e limitada
 (B) (u_n) é crescente e limitada
 (C) (u_n) não é limitada
 (D) (u_n) converge para 0

4. De uma progressão geométrica (w_n) monótona, sabe-se que:

- o sétimo termo é igual a 8
- o nono termo é igual a 2

De uma progressão aritmética (v_n) , sabe-se que:

- o primeiro termo é igual w_4
- a sua razão é igual à razão da progressão geométrica, (w_n)

Sabe-se ainda que 213 é termo de (v_n) .

Determine a ordem do termo 213.

5. Considere a função definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = x \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

Seja (x_n) uma sucessão tal que $\lim f(x_n) = -\infty$.

5.1. Qual das seguintes, pode ser a sucessão (x_n) ?

(A) $\frac{n^2}{n+2022}$ (B) $\frac{\sqrt{n}}{n+2022}$ (C) $\frac{n}{n^2+2022}$ (D) $\frac{n^2}{n^2+2022}$

Sem recorrer à calculadora, a não ser para eventuais cálculos numéricos, resolva os dois itens seguintes:

5.2. Determine as coordenadas do ponto do gráfico de f em que a ordenada é metade da abcissa.

5.3. Mostre que $\frac{1}{e}$ é extremo relativo da função f e indique, justificando, se se trata de um mínimo ou de um máximo.

6. Seja f uma função real, diferenciável em $\mathbb{R}$, tal que $f(1) = 1$ e $f'(1) = 2$.

Considere a função real de variável real definida em $\mathbb{R}^+$ por $g(x) = xf(\ln(x))$.

O valor do declive da reta tangente ao gráfico de g , no ponto de abcissa e , é:

(A) -1 (B) $1 + 2e$ (C) 3 (D) $\frac{2}{e}$

7. Considere a função h definida, em $\mathbb{R}$, por:

$$h(x) = \begin{cases} 1 - 3x + xe^{x-3} & \text{se } x < 3 \\ -5 & \text{se } x = 3 \\ \frac{x^2 - x - 6}{1 - e^{x-3}} & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

7.1. Averigue se a função h é contínua em $x = 3$.

7.2. O gráfico da função h admite uma assíntota oblíqua, quando $x \rightarrow -\infty$.
Determine a equação reduzida dessa assíntota.

7.3.

7.3.1. Admita que no intervalo $]0, 2[$ os gráficos de h e de h' , primeira derivada da função h , se intersejam, no **máximo**, num ponto. Recorrendo ao *Teorema de Bolzano – Cauchy*, mostre que os gráficos se intersejam **num único ponto**, em $]0, 2[$.

7.3.2. Seja I o ponto de interseção, cuja a existência foi provada no item 7.3.1.

Considere a circunferência de centro em O e que passa em I .

Pretende-se determinar um valor aproximado às décimas da medida do raio da circunferência.

Sabe-se que a utilização das **capacidades gráficas da sua calculadora** lhe permite, neste caso, determinar valores aproximados das coordenadas do ponto I , mas não se pede para justificar este facto.

Para calcular o referido valor aproximado proceda da seguinte forma:

- equacione o problema
- reproduza o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial.
- indique as coordenadas do ponto I , com aproximação às **centésimas**.
- exprima o raio da circunferência através das coordenadas de I e calcule um valor aproximado da medida do raio usando as aproximações acima referidas dessas coordenadas, arredondando às **décimas** o resultado assim obtido

8. Seja k um número real não nulo.

Considere a função g , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \cos(-kx) + \sin(-2kx)$

Mostre que a segunda derivada de g , g'' , pode ser dada por:

$$g''(x) = -k^2 \cos(kx) (1 - 8 \sin(kx))$$

Responda a um e um só dos grupos A ou B

Se responder a mais do que um destes grupos deve indicar qual deles pretende que seja classificado. Se não der esta indicação será classificado o grupo a que responder em primeiro lugar.

Grupo A

9. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Considere a equação $z^3 - 2z + 4 = 0$

Esta equação tem três soluções em $\mathbb{C}$, sendo uma delas o número real -2

As imagens geométricas, no plano complexo, dessas três soluções, são vértices de um triângulo.

Sem recorrer à calculadora, determine o perímetro desse triângulo.

Apresente o resultado na forma $a + b\sqrt{n}$, onde $a, b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$

10. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere os números w_1 e w_2 .

Sabe-se que:

- $w_2 = \frac{2e^{i(\frac{\pi}{4})} - \sqrt{2}i^{25}}{2 + 2\sqrt{3}i}$
- a imagem geométrica de w_1 pertence à bissetriz dos quadrantes pares
- $|w_1| = |w_2|$
- $Re(w_1) < 0$ e $Im(w_1) > 0$

Sem recorrer à calculadora, determine, na forma trigonométrica, o número complexo w_1 .

11. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere os números:

$$z_1 = -2 \cos \theta + 2i \sin \theta, \text{ com } \theta \in [0, 2\pi[\quad \text{e} \quad z_2 = -\frac{1}{2}i z_1$$

Uma representação do número complexo z_2 , na forma trigonométrica, é:

- (A) $-e^{i(\pi-\theta)}$ (B) $e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$ (C) $e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}$ (D) $e^{i(\pi-\theta)}$

Grupo B

9. No congresso *O Futuro da Educação em Portugal*, estiveram presentes Professores de Matemática e de outras áreas disciplinares.

Devido às medidas restritivas da COVID19, o uso de máscara foi **obrigatório** neste congresso.

Sabe-se que todos os Professores presentes cumpriram a medida restritiva.

Havia **apenas** dois tipos de máscaras permitidas no congresso: as *máscaras cirúrgicas* e as *máscaras respiratórias*.

Durante o congresso, foi possível concluir que:

- 65% dos congressistas não eram Professores de Matemática
- dos Professores de Matemática, 4 em cada 7, usaram máscara respiratória
- 45% dos congressistas eram Professores de Matemática ou usaram máscara cirúrgica

9.1. No final, foi realizado um sorteio aleatório, de um congressista entre **todos** os presentes.

Constatou-se que o Professor selecionado usava uma máscara cirúrgica.

Qual é a probabilidade de não ser Professor de Matemática?

Apresente o resultado na forma de percentagem.

9.2. Sabe-se que estiveram presentes um total de 1200 professores no congresso e que o número de Professores de Matemática era o **triplo** do número de Professores de Português.

Foram escolhidos, ao acaso, de entre os presentes, **cinco** Professores para formar uma comissão que organizará o congresso seguinte.

Quantas comissões podem ser constituídas com exatamente três Professores de Matemática e, pelo menos, um Professor de Português?

(A) ${}^{140}C_2 \times {}^{420}C_3$

(B) ${}^{640}C_2 \times {}^{420}C_3$

(C) $140 \times {}^{420}C_3 \times 640$

(D) ${}^{420}C_3(640 \times 140 + {}^{140}C_2)$

10. Seja $(E, \mathcal{P}(E), P)$ um espaço de probabilidades e $A, B \in \mathcal{P}(E)$ acontecimentos possíveis.

Mostre que:

$$1 + P(A|\bar{B}) \times \left(\frac{1}{P(B)} - 1\right) = P(\bar{A}|B) + \frac{P(A)}{P(B)}$$

FIM

Item											
Cotação (em pontos)											
1.1.	1.2.	2	3	4	5.1.	5.2.	5.3.	6	7.1.	T O T A L	200 pontos
10	12	14	10	12	10	12	12	10	12		
7.2.	7.3.1.	7.3.2.	8	GRUPO A			GRUPO B				
				9	10	11	9.1.	9.2.	10		
12	14	14	12	12	12	10	12	10	12		



Teste de Matemática 12.º ANO

2022

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A prova é formada por itens de escolha múltipla e de resposta restrita. Os critérios de classificação dos itens de resposta restrita estão organizados por etapas, atribuindo-se, a cada uma delas, uma pontuação.

Caso os alunos adotem um processo não previsto nos critérios específicos, cabe ao professor corretor adaptar a distribuição da cotação atribuída.

Deve ser atribuída a classificação de zero quando um aluno apresente apenas o resultado final de um item, ou de uma etapa, quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações;

Nas seguintes situações deve descontar-se um ponto às cotações estabelecidas para a etapa respetiva:

- Ocorrência de um erro de cálculo;
- Apresentação de uma resposta com o formato que não esteja de acordo com o que foi solicitado;
- Apresentação de expressões com erros do ponto de vista formal.

Caso ocorram erros que revelem desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades ou o aluno apresente uma resolução incompleta de uma etapa, deve descontar-se até metade da cotação dessa etapa.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

															Grupo A			Grupo B			
Item	1.1	1.2	2	3	4	5.1	5.2	5.3	6	7.1	7.2	7.3.1	7.3.2	8	9	10	11	9.1	9.2	10	Total
Cotação	10	12	14	10	12	10	12	12	10	12	12	14	14	12	12	12	10	12	10	12	200

QUESTÃO		DESCRIÇÃO				COTAÇÃO	
1.							22
	1.1.	Versão 1 (A) Versão 2 (B)				10	
	1.2	- Determinar as coordenadas do ponto Q (0,0,4) - Determinar as coordenadas do ponto R (0, −2, 0) - Determinar $\overrightarrow{PQ}$ ou outro vetor qualquer do plano - Determinar $\overrightarrow{RQ}$ ou qualquer outro vetor do plano não colinear com $\overrightarrow{PQ}$ - Determinar um vetor normal ao plano - Escrever a equação do plano PQR ($3x - 4y + 2z - 8 = 0$) ou equivalente	1 1 1 1 5 3		12		
2.							14
		- Indicar que a base menor do trapézio é igual a $2 \cos \alpha$ - Indicar que a base maior do trapézio é igual a $2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ - Simplificar a expressão da base maior ($2 \sin \alpha$) - Indicar que a altura do trapézio é igual a $\sin \alpha + \left -\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right$ - Simplificar a expressão da altura ($\sin \alpha + \cos \alpha$) - Determinar a área do trapézio $\left(\frac{2 \cos \alpha + 2 \sin \alpha}{2} \times (\sin \alpha + \cos \alpha)\right)$ - Simplificar a expressão da área ($1 + \sin(2\alpha)$)	1 2 1 3 2 2 3				
3.		Versão 1 (B) Versão 2 (A)				10	
4.							12
		- Escrever $w_7 = 8 \wedge w_9 = 2$ - Determinar a razão de $w_n \left(\frac{1}{2}\right)$ - Escrever o termo geral de w_n - Determinar w_4 (64) - Escrever o termo geral de v_n - Determinar a ordem de 213 ($n = 299$)	2 3 2 1 1 3				
5.							34
	5.1.	Versão 1 (D) Versão 2 (A)				10	

	5.2.	- Escrever $f(x) = \frac{x}{2}$ ou equivalente - Reduzir ao mesmo denominador - Isolar as parcelas com a variável num dos membros - Colocar em evidência o fator comum - Aplicar a lei do anulamento do produto - obter $x = \frac{\sqrt{e}}{e}$ - Determinar as coordenadas do ponto pedido $\left(\frac{\sqrt{e}}{e}; \frac{\sqrt{e}}{2e}\right)$	3 1 1 1 2 2 2	12	
	5.3.	- Determinar a expressão da primeira derivada de f, f' $\left(f'(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right)$ - Resolver a equação $f'(x) = 0 \left(x = \frac{1}{e}\right)$ - Apresentar um quadro de sinal de f' e da monotonia de f (ou equivalente). - Concluir que $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$ é máximo (absoluto) da função f	4 3 3 2	12	
6.		Versão 1 (D)	Versão 2 (C)		10
7.					52
	7.1.	- Determinar $\lim_{x \rightarrow 3^-} h(x)$ ($-5 = h(3)$) - Escrever $\lim_{x \rightarrow 3^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - x - 6}{1 - e^{x-3}}$ - Decompor $x^2 - x - 6$ em fatores - Mudar a variável do limite - NOTA: os últimos dois subcritérios podem ser realizados por ordem inversa - Determinar o limite ($-5 = h(3)$) - Concluir que a função h é contínua em $x = 3$	2 1 2 2 3 2	12	
	7.2.	- Escrever $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 3x + xe^{x-3}}{x}$ - Escrever $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 3x + xe^{x-3}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^{x-3}}{x}$ - Obter $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = -3$ - Escrever $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) + 3x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - 3x + xe^{x-3} + 3x)$ - Escrever $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - 3x + xe^{x-3} + 3x) = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{x-3}$ - Escrever $1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{x-3} = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{3-x}}$ - Efetuar a mudança de variável $y = -x$ - Obter $1 - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^3 \times e^y}$ - Escrever $1 - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^3 \times e^y} = 1 - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^3} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}}$ - Obter $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) + 3x] = 1$ - Concluir que a reta de equação $y = -3x + 1$ é assíntota do gráfico de h	1 1 1 1 1 1 2 1 1 1 1	12	

	7.3.1.	- Determinar a expressão da primeira derivada de h, h' no intervalo $]0, 2[$ ($h'(x) = -3 + e^{x-3} + xe^{x-3}$) - Escrever $h'(x) = h(x) \Leftrightarrow h'(x) - h(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-3} + 3x - 4 = 0$ ou equivalente - Designando $m(x) = h'(x) - h(x)$ justificar que m é contínua no intervalo $[0; 2]$ - Determinar $m(0)$ e $m(2)$ - Concluir pelo (Corolário do) Teorema de Bolzano que $\exists c \in]0; 2[: m(c) = 0$, ou seja, que $\exists c \in]0; 2[: h(c) = h'(c)$ - Conclusão	2 2 3 3 3 1	14	
	7.3.2.	- Apresentar a equação $h'(x) = h(x)$ (ou equivalente) - Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) h e h' visualizado(s) na calculadora - Determinar através da calculadora as coordenadas do ponto I, arredondadas às centésimas (1,27; -2,60) ou (1,27; -2,59) - Determinar $\overline{OI} = \sqrt{(1,27 - 0)^2 + (-2,60 - 0)^2}$ (2,8935 ...) Ou $\overline{OI} = \sqrt{(1,27 - 0)^2 + (-2,59 - 0)^2}$ (2,884614 ...) - Apresentar o valor arredondado às décimas (2,9)	2 4 4 3 1	14	
8.					12
		- Calcular a primeira derivada de f, f' $(f'(x) = k \sin(-kx) - 2k \cos(-2kx))$ - Calcular a segunda derivada de f, f'' $(f''(x) = -k^2 \cos(-kx) - 4k^2 \sin(-2kx))$ - Simplificar a expressão $f''(x)$ $(f''(x) = -k^2 \cos(kx) + 4k^2 \sin(2kx))$ - Aplicar a fórmula da duplicação do seno $(f''(x) = -k^2 \cos(kx) + 8k^2 \sin(kx) \cos(kx))$ - Colocar o fator comum em evidência $(f''(x) = -k^2 \cos(kx)(1 - 8 \sin(kx)))$	2 2 3 3 2		
Grupo A					
9.					12
		- Decompor $z^3 - 2z + 4$ em fatores $((z + 2)(z^2 - 2z + 2))$ - Determinar as raízes de $z^2 - 2z + 2$ ($z = 1 + i \vee z = 1 - i$) - Calcular $z_1 - z_2 ; z_2 - z_3 ; z_3 - z_1$ - Determinar o perímetro do triângulo $(2 + 2\sqrt{10})$	2 2 6 2		

10				12
		- Simplificar $2e^{i\frac{\pi}{4}} (\sqrt{2} + i\sqrt{2})$ - Simplificar $\sqrt{2}i^{25} (\sqrt{2}i)$ - Escrever w_2 na forma algébrica (ou equivalente) $\left(\frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{6}}{8}i\right)$ - Calcular $w_2 = w_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ - Determinar o argumento de w_1 (Por exemplo, $\theta = \frac{3\pi}{4}$) - Escrever $w_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{i\frac{3\pi}{4}}$, por exemplo	2 2 2 1 4 1	
11		Versão 1 (C)	Versão 2 (B)	10
Grupo B				
9.				22
	9.1.	Designemos por M o acontecimento “o utilizador escolhido é professor de Matemática” e por R o acontecimento “o utilizador escolhido usa máscara respiratória” - Escrever $P(\bar{M}) = 0,65$ - Da condição $P(R M) = \frac{4}{7}$, obter $P(R \cap M) = 0,2$ - Da condição $P(M \cup \bar{R}) = 0,45$, obter $P(\bar{R}) = 0,25$ - Determinar $P(\bar{M} \bar{R}) = 0,4$ - Responder $P(\bar{M} \bar{R}) = 40\%$	1 3 3 4 1	12
	9.2.	Versão 1 (B)	Versão 2 (D)	10
10				12
	10	- Simplificar $P(A \bar{B})$ e $P(\bar{A} B)$ - Simplificar $P(\bar{A} \cap B) + P(A) = P(A \cup B)$ - Efetuar a propriedade distributiva - Reduzir ao mesmo denominador - Simplificar a expressão obtida e concluir	2 2 1 4 3	

Teste de Matemática

2023

2.º CICLO DO ENSINO BÁSICO – 6.º ANO

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos. (12 páginas)

VERSÃO 1

A PREENCHER PELO ALUNO

Nome completo:

Não escrevas o teu nome em mais nenhum local da prova.

A PREENCHER PELA ESCOLA

Número convencional

A PREENCHER PELA ESCOLA

Número convencional

A PREENCHER PELO PROFESSOR CLASSIFICADOR

Classificação em percentagem: _____ (_____ por cento)

Correspondente ao nível: _____ (_____) Data: ____ / ____ / 2023

Assinatura do Professor Classificador: _____



COTAÇÕES

1. A Carolina durante as férias começou a ler um livro. No primeiro dia leu $\frac{1}{3}$ do número total de páginas. No dia seguinte leu $\frac{1}{6}$, e no terceiro dia leu $\frac{2}{5}$. Em qual destes dias a Carolina leu mais páginas?

- (A) No primeiro dia (B) No segundo dia
(C) No terceiro dia (D) Leu sempre o mesmo número de páginas em todos os dias.

2. As grandezas x e y , representadas na tabela seguinte, são diretamente proporcionais.

x	25	100	b	275
y	1	a	6	11

2.1. Indica a constante de proporcionalidade. _____

2.2. Determina o valor de a e b .

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

3. Qual das seguintes expressões é igual a 11?

- (A) $15 - 2 \times 4 - 8 : 4$ (B) $15 - 2 \times (4 - 8 : 4)$
(C) $15 - (2 \times 4 - 8) : 4$ (D) $(15 - 2) \times (4 - 8 : 4)$

A transportar

Transporte

4. A Joana construiu um padrão usando partes de círculos e que está representado na figura 1.

O padrão é formado por três figuras:

- Um quarto de círculo de raio $[AB]$;
- Um quarto de círculo de raio $[BC]$;
- Um semicírculo de diâmetro $[AC]$.

Sabe-se ainda que B é um ponto de $[AC]$

e que, numa dada unidade,

- $\overline{AB} = 2 \times \overline{BC}$;
- $\overline{AB} = 4$

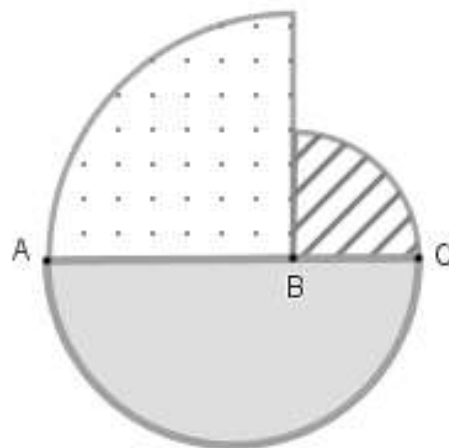


Figura 1

Determina, em unidades quadradas, a área da figura representada.

Apresenta o resultado arredondado às unidades.

Utiliza 3,14 para valor aproximado de π .

A transportar

Transporte

5. Considere os seguintes números $A = 0,2 \times 3^2$, $B = \frac{3}{5} : \frac{3}{4}$ e $C = 1,6^3 : 1,6^2$

Completa as seguintes afirmações colocando, em cada espaço, um dos seguintes sinais $<$, $>$ ou $=$, de modo a obteres afirmações verdadeiras.

5.1. A _____ B

5.2. B _____ C

5.3. A _____ C

6. O painel da figura 2 tem a forma de um pentágono regular. O perímetro do painel é igual a 62 cm. Qual é o comprimento de cada lado?

(A) 12,4 cm

(B) 1,24 cm

(C) 124 cm

(D) 0,124 cm

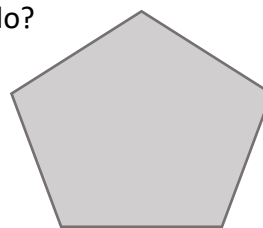


Figura 2

7. Determina o número representado pela expressão seguinte na forma de fração irredutível

$$\frac{1}{4} : 0,1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

A transportar

8. Uma loja, na época dos saldos, aplicou um desconto de 20% a todos os artigos. Qual será o preço de uma camisola que, antes da época de saldos, custava 21,3 euros?

Apresenta o resultado em euros e cêntimos.

Não efetues arredondamentos nos cálculos intermédios.



9. Observa a figura 3 em que estão representados os segmentos de reta $[AB]$, $[AD]$, $[BC]$ e $[DC]$.

Sabe-se que:

- $[AB]$ e $[CD]$ são paralelos;
- $\widehat{CDE} = 38^\circ$
- $\widehat{ABE} = 35^\circ$

Determina a amplitude dos ângulos:

9.1. a

9.2. b

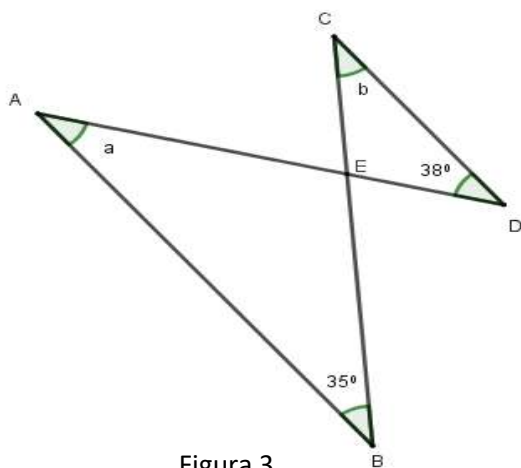


Figura 3

A transportar

10. Considera os números A e B que se decompõem em fatores primos da seguinte forma:

$$A = 2^3 \times 5^2 \times 7 \quad \text{e} \quad B = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11$$

10.1. Indica o número que não é divisor do número B

(A) 12

(B) 30

(C) 35

(D) 45

10.2. Determina o mínimo múltiplo comum entre A e B . Apresenta o resultado decomposto em fatores primos.

11. Observa a figura 4. Com oito palhinhas construiu-se um modelo de uma pirâmide quadrangular. Quantas palhinhas são necessárias para formar um modelo de:

11.1. Um prisma quadrangular?

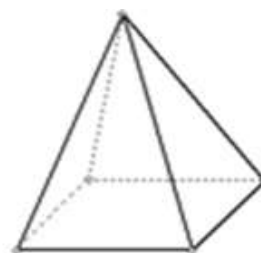


Figura 4

11.2. Uma pirâmide com seis faces?

11.3. Um prisma com 20 vértices?

12. A Isabel decidiu ajudar na decoração da festa de aniversário da irmã mais nova. Comprou 35 balões rosa e 84 balões azuis e decidiu formar grupos de balões de tal forma que:

- Todos os grupos tenham o mesmo número de balões;
- Em cada grupo, os balões sejam todos da mesma cor;
- Não sobre qualquer balão.

Quantos grupos de balões de cada cor vão ser formados pela Isabel?

13. Na figura 5 está representado o triângulo $[ACF]$ e a reta r . Os pontos C e F pertencem à reta r e sabe-se que $\widehat{CAF} = 60^\circ$ e $\widehat{ACF} = 30^\circ$

Justifica que o ângulo AFC é reto e constrói o transformado do triângulo $[ACF]$ pela reflexão axial de eixo r , designando o transformado de A por B .

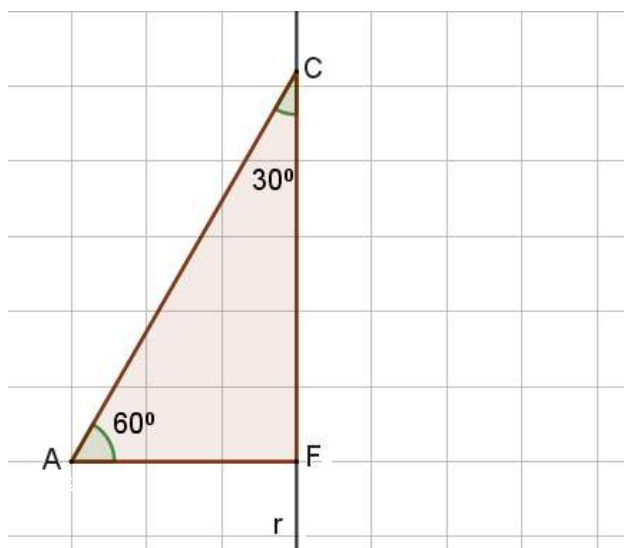
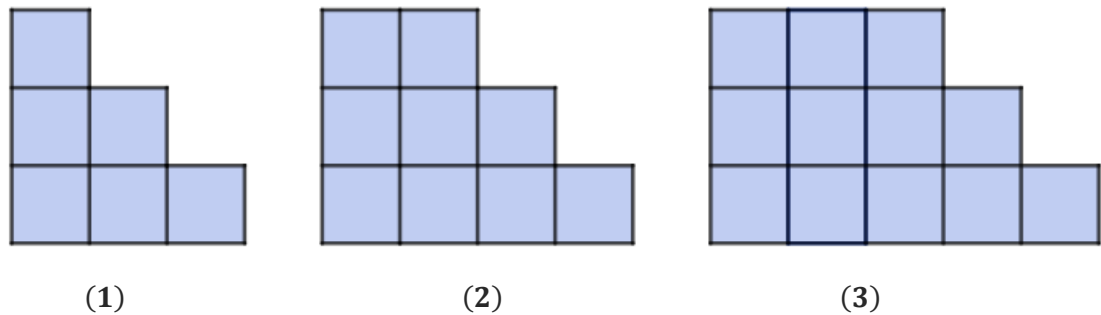


Figura 5

A transportar

14. Observa os três primeiros termos de uma sequência de figuras formadas por quadrados iguais, que segue a lei de formação sugerida, ou seja, em cada figura a partir da primeira, é acrescentado sempre o mesmo número de quadrados.

Sabe-se que a sequência tem 50 termos.



- 14.1. Indica o número de quadrados do termo de ordem 10 desta sequência.
- (A) 30 (B) 63 (C) 23 (D) 33
- 14.2. Será que 46 pode ser termo desta sequência? Justifica a tua resposta.

- 14.3. Qual das seguintes expressões pode ser geradora da sequência numérica?
- Escolhe a opção correta.
- (A) $3n$ (B) $3n - 1$ (C) $3n + 3$ (D) $3n + 1$

Transporte

15. O João foi ao supermercado e comprou leite com chocolate que estava em promoção.

O preço de cada embalagem de seis pacotes de leite tinha uma etiqueta que anunciava:

Preço Total: 2,40 €

Leve 6 mas pague 4

Calcula por quanto ficou o preço de cada pacote de leite e qual a percentagem de desconto aplicada. Apresenta o valor da percentagem arredondado às unidades.

A transportar

Estas páginas só devem ser utilizadas se quiseres completar ou emendar qualquer resposta. Caso as utilizes, não te esqueças de identificar claramente a questão a que se refere cada uma das respostas completadas ou emendadas.

FIM

COTAÇÕES

Cotações												
(em pontos)												
1.	2.1	2.2	3.	4.	5.1.	5.2.	5.3	6.	7.	8.	9.1	9.2
3	3	4	3	6	3	3	3	3	5	5	3	3
10.1	10.2.	11.1	11.2	11.3.	12.	13.	14.1	14.2	14.3.	15.	16.1	16.2
3	4	4	4	4	5	5	3	4	3	5	4	5
TOTAL												100

Teste de Matemática

2023

2.º CICLO DO ENSINO BÁSICO – 6.º ANO

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

(12 páginas)

VERSÃO 2

A PREENCHER PELO ALUNO

Nome completo:

Não escrevas o teu nome em mais nenhum local da prova.

A PREENCHER PELA ESCOLA

Número convencional

A PREENCHER PELA ESCOLA

Número convencional

A PREENCHER PELO PROFESSOR CLASSIFICADOR

Classificação em percentagem: _____ (_____ por cento)

Correspondente ao nível: _____ (_____)

Data: ____ / ____ / 2023

Assinatura do Professor Classificador: _____



COTAÇÕES

1. A Carolina durante as férias começou a ler um livro. No primeiro dia leu $\frac{1}{3}$ do número total de páginas. No dia seguinte leu $\frac{1}{6}$, e no terceiro dia leu $\frac{2}{5}$.

Em qual destes dias a Carolina leu mais páginas?

(A) No terceiro dia (B) Leu sempre o mesmo número de páginas em todos os dias.

(C) No segundo dia (D) No primeiro dia

2. As grandezas x e y , representadas na tabela seguinte, são diretamente proporcionais.

x	25	100	b	275
y	1	a	6	11

2.1. Indica a constante de proporcionalidade. _____

2.2. Determina o valor de a e b .

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

3. Qual das seguintes expressões é igual a 11?

(A) $(15 - 2) \times (4 - 8 : 4)$ (B) $15 - (2 \times 4 - 8) : 4$

(C) $15 - 2 \times (4 - 8 : 4)$ (D) $15 - 2 \times 4 - 8 : 4$

A transportar

4. A Joana construiu um padrão usando partes de círculos e que está representado na figura 1.

O padrão é formado por três figuras:

- Um quarto de círculo de raio $[AB]$;
- Um quarto de círculo de raio $[BC]$;
- Um semicírculo de diâmetro $[AC]$.

Sabe-se ainda que B é um ponto de $[AC]$

e que, numa dada unidade,

- $\overline{AB} = 2 \times \overline{BC}$;
- $\overline{AB} = 4$

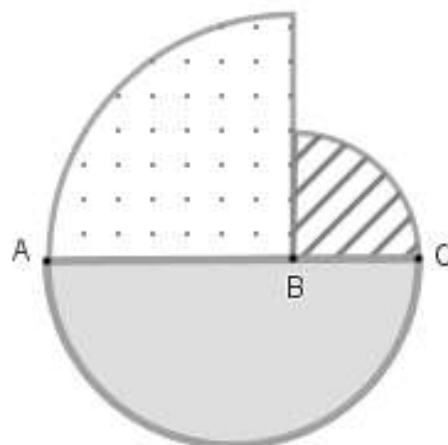


Figura 1

Determina, em unidades quadradas, a área da figura representada.

Apresenta o resultado arredondado às unidades.

Utiliza 3,14 para valor aproximado de π .

Transporte

5. Considere os seguintes números $A = 0,2 \times 3^2$, $B = \frac{3}{5} : \frac{3}{4}$ e $C = 1,6^3 : 1,6^2$

Completa as seguintes afirmações colocando, em cada espaço, um dos seguintes sinais $<$, $>$ ou $=$, de modo a obteres afirmações verdadeiras.

5.1. A _____ B

5.2. B _____ C

5.3. A _____ C

6. O painel da figura 2 tem a forma de um pentágono regular. O perímetro do painel é igual a 62 cm. Qual é o comprimento de cada lado?

(A) 124 cm

(B) 1,24 cm

(C) 12,4 cm

(D) 0,124 cm

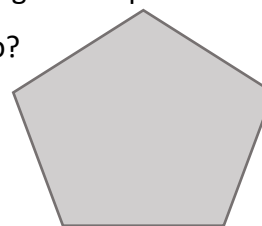


Figura 2

7. Determina o número representado pela expressão seguinte na forma de fração irredutível

$$\frac{1}{4} : 0,1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

A transportar

8. Uma loja, na época dos saldos, aplicou um desconto de 20% a todos os artigos.

Qual será o preço de uma camisola que, antes da época de saldos, custava 21,3 euros?

Apresenta o resultado em euros e cêntimos.

Não efetues arredondamentos nos cálculos intermédios.



9. Observa a figura 3 em que estão representados os segmentos de reta $[AB]$, $[AD]$, $[BC]$ e $[DC]$.

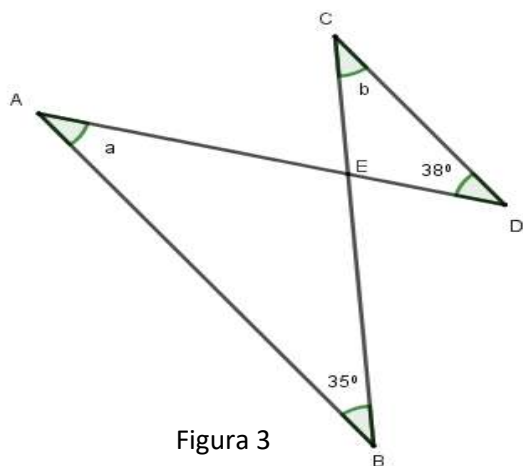


Figura 3

Sabe-se que:

- $[AB]$ e $[CD]$ são paralelos;
- $\widehat{CDE} = 38^\circ$
- $\widehat{ABE} = 35^\circ$

Determina a amplitude dos ângulos:

9.1. a

9.2. b

A transportar

Transporte

10. Considera os números A e B que se decompõem em fatores primos da seguinte forma:

$$A = 2^3 \times 5^2 \times 7 \quad \text{e} \quad B = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11$$

10.1. Indica o número que não é divisor do número B

(A) 45

(B) 35

(C) 30

(D) 12

10.2. Determina o mínimo múltiplo comum entre A e B . Apresenta o resultado decomposto em fatores primos.

11. Observa a figura 4. Com oito palhinhas construiu-se um modelo de uma pirâmide quadrangular. Quantas palhinhas são necessárias para formar um modelo de:

11.1. Um prisma quadrangular?

11.2. Uma pirâmide com seis faces?

11.3. Um prisma com 20 vértices?

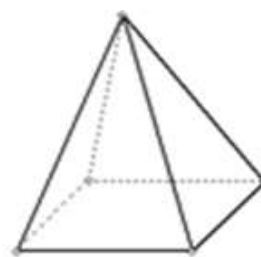


Figura 4

A transportar

12. A Isabel decidiu ajudar na decoração da festa de aniversário da irmã mais nova. Comprou 35 balões rosa e 84 balões azuis e decidiu formar grupos de balões de tal forma que:

- Todos os grupos tenham o mesmo número de balões;
- Em cada grupo, os balões sejam todos da mesma cor;
- Não sobre qualquer balão.

Quantos grupos de balões de cada cor vão ser formados pela Isabel?

13. Na figura 5 está representado o triângulo $[ACF]$ e a reta r . Os pontos C e F pertencem à reta r e sabe-se que $\widehat{CAF} = 60^\circ$ e $\widehat{ACF} = 30^\circ$.

Justifica que o ângulo AFC é reto e constrói o transformado do triângulo $[ACF]$ pela reflexão axial de eixo r , designando o transformado de A por B .

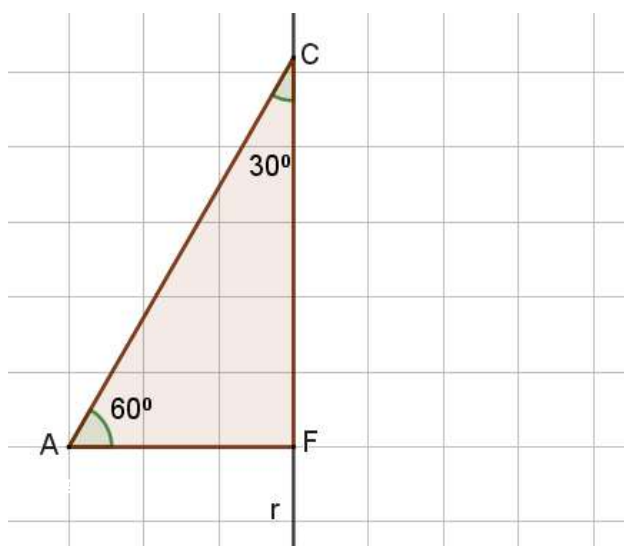
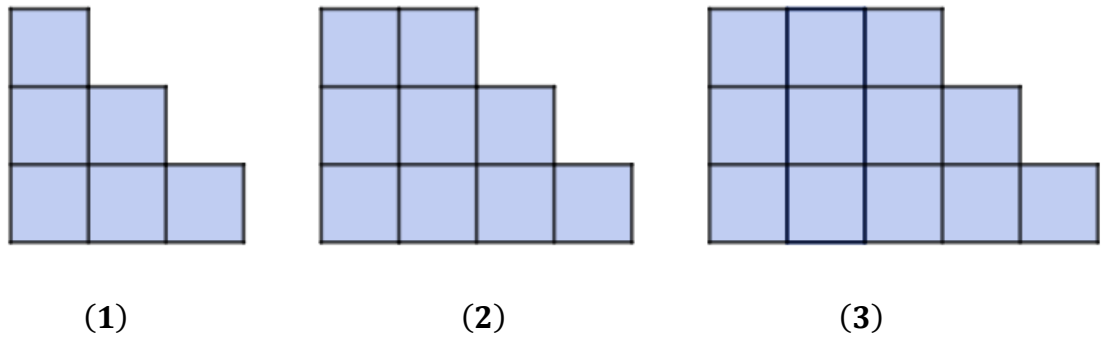


Figura 5

A transportar

14. Observa os três primeiros termos de uma sequência de figuras formadas por quadrados iguais, que segue a lei de formação sugerida, ou seja, em cada figura a partir da primeira, é acrescentado sempre o mesmo número de quadrados.

Sabe-se que a sequência tem 50 termos.



14.1. Indica o número de quadrados do termo de ordem 10 desta sequência.

- (A) 23
- (B) 33
- (C) 30
- (D) 63

14.2. Será que 46 pode ser termo desta sequência? Justifica a tua resposta.

14.3. Qual das seguintes expressões pode ser geradora da sequência numérica? Escolhe a opção correta.

- (A) $3n + 3$
- (B) $3n + 1$
- (C) $3n - 1$
- (D) $3n$

Transporte

15. O João foi ao supermercado e comprou leite com chocolate que estava em promoção.
O preço de cada embalagem de seis pacotes de leite tinha uma etiqueta que anunciava:

Preço Total: 2,40 €

Leve 6 mas pague 4

Calcula por quanto ficou o preço de cada pacote de leite e qual a percentagem de desconto aplicada. Apresenta o valor da percentagem arredondado às unidades.

A transportar

Estas páginas só devem ser utilizadas se quiseses completar ou emendar qualquer resposta. Caso as utilizes, não te esqueças de identificar claramente a questão a que se refere cada uma das respostas completadas ou emendadas.

FIM

COTAÇÕES

Cotações												
(em pontos)												
1.	2.1	2.2	3.	4.	5.1.	5.2.	5.3	6.	7.	8.	9.1	9.2
3	3	4	3	6	3	3	3	3	5	5	3	3
10.1	10.2.	11.1	11.2	11.3.	12.	13.	14.1	14.2	14.3.	15.	16.1	16.2
3	4	4	4	4	5	5	3	4	3	5	4	5
TOTAL												100



Teste de Matemática 6.º ANO

2023

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A prova é formada por itens de escolha múltipla, de resposta curta e de construção.

Itens de Escolha Múltipla

A cotação total do item é atribuída às respostas que apresentem, de forma inequívoca, a única opção correta.

Itens de Resposta Curta

A cotação total do item é atribuída quando é apresentada, de forma inequívoca, uma resposta correta. Neste tipo de itens admite-se a possibilidade de ser atribuída uma cotação intermédia para um nível intermédio de desempenho.

Itens de Construção

Nos itens cuja resposta envolve a apresentação de cálculos, de justificações, de composições ou de construções geométricas, os critérios de classificação das respostas apresentam-se organizados por etapas ou por níveis de desempenho.

Caso os alunos adotem um processo não previsto nos critérios específicos, cabe ao professor corretor adaptar a distribuição da cotação atribuída.

Deve ser atribuída a classificação de zero pontos nas seguintes situações:

- Caso um aluno apresente apenas o resultado final de um item, ou de uma etapa, quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações;
- Caso o aluno utilize de forma inequívoca a calculadora, uma vez que tal não é solicitado nesta prova.

Nas seguintes situações deve descontar-se um ponto às cotações estabelecidas para a etapa respetiva:

- Ocorrência de um erro de cálculo;
- Apresentação de uma resposta com o formato que não esteja de acordo com o que foi solicitado;
- Apresentação de expressões com erros do ponto de vista formal.

Caso ocorram erros que revelem desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades ou o aluno apresente uma resolução incompleta de uma etapa, deve descontar-se até metade da cotação dessa etapa.

COTAÇÕES

Cotações												
(em pontos)												
1.	2.1	2.2	3.	4.	5.1.	5.2.	5.3	6.	7.	8.	9.1	9.2
3	3	4	3	6	3	3	3	3	5	5	3	3
10.1	10.2.	11.1	11.2	11.3.	12.	13.	14.1	14.2	14.3.	15.	16.1	16.2
3	4	4	4	4	5	5	3	4	3	5	4	5
TOTAL												100

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

QUESTÃO					COTAÇÃO	
1.		Versão 1 C	Versão 2 A			3
2.						7
	2.1	0,04 ou $\frac{1}{25}$			3	
	2.2	a = 4 b = 150			4	
		A classificação deve ser atribuída de acordo com os níveis de desempenho:				
	Níveis	Descritores		Pontuação		
	3	Apresenta uma estratégia adequada e completa e responde corretamente os dois valores.		4		
	2	Apresenta uma estratégia adequada, mas incompleta, e responde corretamente apenas um dos valores.		2		
	1	Apresenta uma estratégia adequada, mas não respondeu ou respondeu incorretamente.		1		
3.		Versão 1 B	Versão 2 C			3
4.		30 cm ³				6
		A classificação pode ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:				
		Determinar a área do semicírculo.		2		
		Determinar a área do $\frac{1}{4}$ de círculo de diâmetro [AB]		2		

		Determinar a área do outro $\frac{1}{4}$ de círculo de diâmetro $[BC]$	1		
		Determinar a área total da figura e apresenta o resultado arredondado às décimas.	1		
5.					9
	5.1.	Apresenta a resposta correta: $>$	3	3	
		Apresenta outra resposta.	0		
	5.2.	Apresenta a resposta correta: $<$	3	3	
		Apresenta outra resposta.	0		
	5.3.	Apresenta a resposta correta: $>$	3	3	
		Apresenta outra resposta.	0		
6.		Versão 1 A	Versão 2 C		3
7.		$\frac{9}{4}$			5
		A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:			
		Respeita a prioridade das operações.	2		
		Efetua corretamente a divisão.	1		
		Efetua corretamente a regra do produto de potências com o mesmo expoente ou efetua o produto do valor das potências.	1		
		Efetua a subtração e apresenta o resultado na forma de fração irredutível.	1		
8.		17 Euros e 4 cêntimos			5
		A classificação deve ser atribuída de acordo com os níveis de desempenho:			
	Níveis	Descritores	Pontuação		
	3	Apresenta uma estratégia adequada e completa e responde corretamente.	5		
	2	Apresenta uma estratégia adequada, mas incompleta, e responde corretamente.	3		

	1	Apresenta uma estratégia adequada, mas não respondeu ou respondeu incorrectamente.	1		
9.					6
	9.1.	a = 38°		3	
	9.2.	b = 35°		3	
10.					7
	10.1.	Versão 1 C	Versão 2 B	3	
	10.2.	$2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11$		4	
11.					12
	11.1.	12 palhinhas.		4	
	11.2.	10 palhinhas.		4	
	11.3.	30 palhinhas.		4	
12.					5
		5 grupos de balões rosa e 12 grupos de balões azuis			
		A classificação deve ser atribuída de acordo com os níveis de desempenho:			
	Níveis	Descritores	Pontuação		
	3	Apresenta uma estratégia adequada e completa e responde corretamente.	5		
	2	Apresenta uma estratégia adequada, mas incompleta, e responde corretamente.	3		

	1	Apresenta uma estratégia adequada, mas não respondeu ou respondeu incorretamente.	2		
	13.	A classificação pode ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:			5
		Justifica que o ângulo <i>AFC</i> é reto, referindo que a soma das amplitudes dos ângulos internos é igual a 180 graus	3		
		Efetua corretamente a construção do transformado do triângulo pela reflexão.	2		
	14.				10
	14.1.	Versão 1 D Versão 2 B		3	
	14.2.	O número 46 não é um termo desta sequência.		4	
		A classificação pode ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:			
		Apresenta a resposta correta.	2		
		Justifica corretamente a resposta dada.	2		
	14.3.	Versão 1 C Versão 2 A		3	
	15.	Cada pacote 0,40 euros e 33% de desconto			5
		A classificação pode ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:			
		Determinar o valor do preço de cada pacote.	2		
		Determinar o valor da percentagem do desconto aplicado.	3		
	16.				9
	16.1.	57,6 dm³		4	
		A classificação pode ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:			
		Determinar o volume da água contida no aquário.	3		

		Apresentar o resultado em dm^3 .	1		
	16.2.	2 cm		5	
		A classificação pode ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:			
		Determinar o volume da água para altura de 30 cm.	2		
		Determinar a altura da água para o volume de 3600 cm^3 .	3		

Nome completo: _____

Documento de identificação CC n.º |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|

Assinatura do aluno: _____

Prova Final de Matemática

3.º Ciclo do Ensino Básico | 2023

9.º Ano de Escolaridade

VERSÃO 1

A PREENCHER PELO PROFESSOR CLASSIFICADOR

Classificação em percentagem |__|__|__| (_____ por cento)

Correspondente ao nível |__| (_____)

Duração da Prova: 90 minutos | Tolerância: 30 minutos

18 Páginas

Não é permitido o uso de calculadora

Todas as respostas são dadas no enunciado da prova.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.

Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor.

Risca aquilo que pretendes que não seja classificado.

Apresenta apenas uma resposta para cada item.

Apresenta as tuas respostas de forma legível.

Se o espaço reservado a uma resposta não for suficiente, podes utilizar o espaço que se encontra no final da prova. Nesse caso, deves identificar claramente o item a que se refere a tua resposta.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, assinala com X a opção correta.

As cotações dos itens encontram-se no final da prova.



Formulário

Números e Operações

Valor aproximado de π (pi): 3,14159

Geometria e Medida

Áreas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Superfície esférica: $4\pi r^2$, sendo r o raio da esfera

Volumes

Prisma e cilindro: Área da base $\times$ Altura

Pirâmide e cone: $\frac{\text{Área da base} \times \text{Altura}}{3}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$, sendo r o raio da esfera

Trigonometria

Fórmula fundamental: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Relação da tangente com o seno e o cosseno: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

1. Considera a **Figura 1** onde estão representados o triângulo $[ABC]$ e uma das suas medianas.

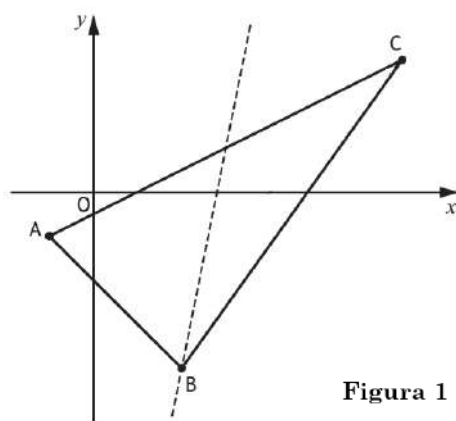


Figura 1

Sabe-se que:

- as coordenadas dos pontos A e C , são respetivamente, $(-1, -1)$ e $(7, 3)$
- a reta BC pode ser definida pela equação $y = \frac{7}{5}x - \frac{34}{5}$
- a reta AB pode ser definida pela equação $y = -x - 2$

1.1. Determina o declive da reta AC .

1.2. Determina as coordenadas do ponto B .

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

- 1.3. Se fossem traçadas as restantes medianas do triângulo $[ABC]$, as mesmas intersectariam a mediana representada na **Figura 1**, num ponto.

Como se designa esse ponto?

A ☐ Circuncentro

B ☐ Incentro

C ☐ Baricentro

D ☐ Ortocentro

2. Escreve o número $\frac{(4^2)^3 \times 4^5}{8^{-3}}$ na forma de potência de base $\frac{1}{2}$.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

3. Considera a equação literal:

$$A = \frac{B + 4}{C^2}, \text{ com } C \neq 0$$

Resolve a equação anterior em ordem a B .

4. Considera a sucessão cujo primeiro termo é 2 e cada termo seguinte se obtém multiplicando o anterior por 10.

O termo geral da sucessão é:

A ☐ 2^{n-1}

B ☐ $2 \times 10^{n-1}$

C ☐ 2×10^n

D ☐ 2^n

5. Na **Figura 2** estão representados dois quadrados $[ABCD]$ e $[HILK]$ e um retângulo $[BEFG]$.

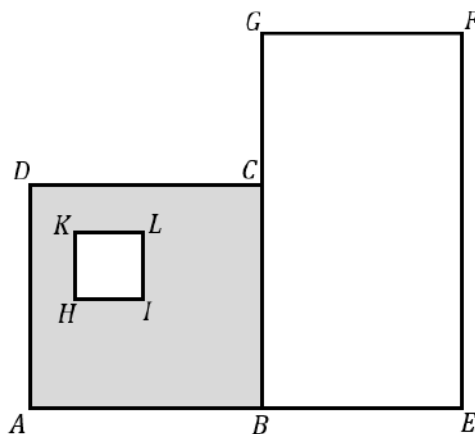


Figura 2

Nota: A **Figura 2** não está à escala.

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = x$
- $\overline{BE} = \frac{4}{5}x$
- $\overline{CG} = 2$
- a área do quadrado $[ABCD]$ é igual à área do retângulo $[BEFG]$

5.1. Determina o **valor numérico** das dimensões do retângulo $[BEFG]$.

Apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar.

Sugestão: Começa por mostrar que a área do retângulo $[BEFG]$ é dada por $\frac{4}{5}x^2 + \frac{8}{5}x$

5.2. Seja l a medida do lado do quadrado $[HILK]$.

Qual das expressões seguintes representa a medida da **área** sombreada, em função de x ?

A ☐ $l - x^2$

B ☐ $(x - l)(x - l)$

C ☐ $x^2 - l$

D ☐ $(x - l)(x + l)$

6. Acerca da **Figura 3** sabe-se que:

- o segmento de reta $[PM]$ é tangente à circunferência, em M
- a reta PN contém o ponto O
- o ângulo OPM tem a amplitude de 14°
- o ponto N pertence à circunferência

Seja α a amplitude do ângulo ONM e β a amplitude do arco menor MN .

Qual das opções seguintes é **verdadeira**?

A ☐ $\alpha = 52^\circ$ e $\beta = 152^\circ$

B ☐ $\alpha = 38^\circ$ e $\beta = 152^\circ$

C ☐ $\alpha = 52^\circ$ e $\beta = 104^\circ$

D ☐ $\alpha = 38^\circ$ e $\beta = 104^\circ$

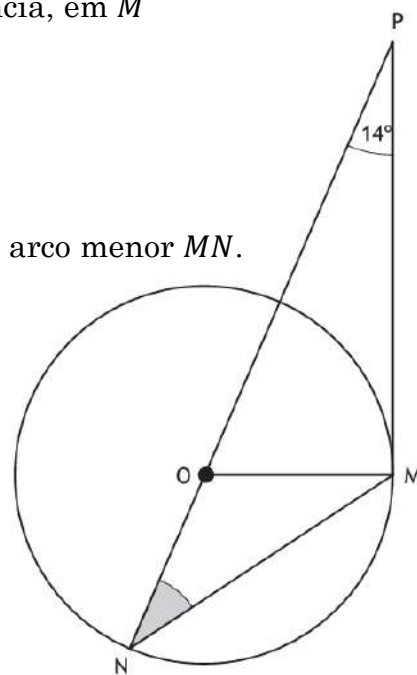


Figura 3

7. Considera a equação na variável x , dada por $2x^2 - 8x + (4 - p) = 0$, $p \in \mathbb{R}$.

Sabendo que a equação anterior, tem duas soluções reais distintas, determina os valores possíveis de p .

Apresenta a tua resposta na forma de intervalo de números reais.

8. A **Figura 4** mostra parte do gráfico da função f , definida por $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$

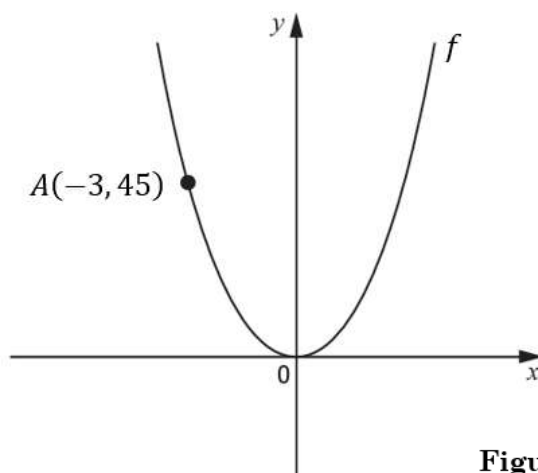


Figura 4

8.1. Determina $f(2)$.

Mostra como chegaste à tua resposta.

8.2. Seja B o ponto do gráfico de f , simétrico do ponto A , relativamente ao eixo Oy .

Considera a função g de proporcionalidade inversa, definida por $g(x) = \frac{k}{x}$,

com $k > 0$.

Sabe-se que o ponto B pertence ao gráfico de g .

Determina o valor de k .

9. Resolve, em $\mathbb{R}$, a equação seguinte:

$$3x^2 + 4x - 4 = 0$$

Apresenta o conjunto-solução e todos os cálculos que efetuares.

10. Na **Figura 5** estão representados o cubo $[ABCDEFGH]$ e a pirâmide $[ABCDP]$, cuja base $[ABCD]$ coincide com uma das faces do cubo.

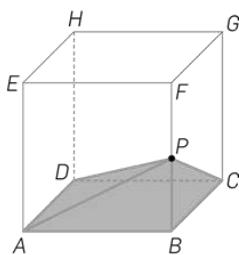


Figura 5

Sabe-se que P é o ponto médio da aresta $[BF]$ do cubo.

- 10.1. Acerca do volume da pirâmide pode afirmar-se que é:

A ☐ $\frac{1}{3}$ do volume do cubo

B ☐ $\frac{1}{4}$ do volume do cubo

C ☐ $\frac{1}{6}$ do volume do cubo

D ☐ $\frac{1}{2}$ do volume do cubo

- 10.2. Tendo em conta a **Figura 5**, qual das seguintes afirmações é **falsa**?

A ☐ As retas AC e CG são perpendiculares

B ☐ A reta AP é paralela ao plano CDH

C ☐ Os planos ADP e BCG são concorrentes

D ☐ Os planos ABP e CDP são paralelos

11. A Joana tem um tanque de peixes.

O tanque de peixes tem a forma de um paralelepípedo retângulo com dimensões de 30 cm por 30 cm por 42 cm .

No interior do tanque existe uma caixa de luz cilíndrica na parte inferior, como se pode observar na **Figura 6**.

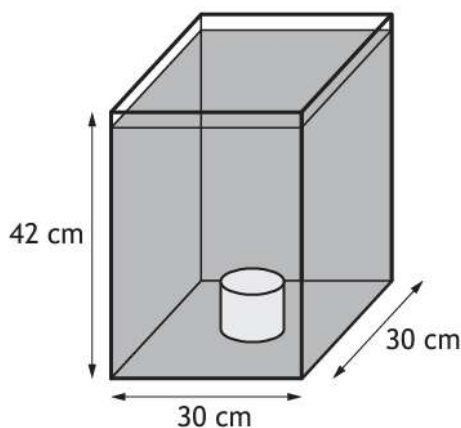


Figura 6

A caixa de luz cilíndrica tem um diâmetro de 10 cm e uma altura de 8 cm .

Há uma diferença de 2 cm entre o topo do tanque e o nível da água.

A caixa de luz **não retém** água.

Escreve uma expressão **simplificada** do volume de água no tanque, em cm^3 .

12. Resolve, em $\mathbb{R}$, a inequação seguinte:

$$\frac{-5(x-2)}{3} + \frac{5}{2} \leq \frac{2x-5}{6}$$

Apresenta o conjunto-solução na forma de intervalo de números reais e todos os cálculos que efetuares.

13. As duas fotografias retangulares representadas nas **Figuras 7** e **8** são semelhantes. **Nota:** As figuras não estão desenhadas à escala.



12 cm **Figura 7**



? cm **Figura 8**

A fotografia pequena tem uma área de 80 cm^2 e tem 12 cm de largura.

A fotografia grande tem uma área de 500 cm^2 .

Calcula a largura da fotografia grande.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

Responde a um e um só dos grupos A ou B

Se responderes a mais do que um destes grupos deves indicar qual deles pretendes que seja classificado. Se não deres esta indicação será classificado o grupo a que responderes em primeiro lugar.

Grupo A

14. Na **Figura 9** está a planificação de um dado cúbico equilibrado, com as faces numeradas com: -5 , (6) , $\sqrt{16}$, $\frac{5}{2}$, -7 , 2π e $\sqrt{3}$.

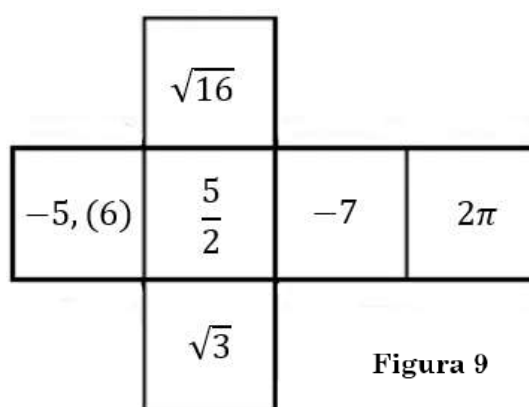


Figura 9

- 14.1. Considera a experiência aleatória que consiste em lançar **uma vez** o dado apresentado e observar o número da face que fica voltada para cima.

Qual das afirmações seguintes é **falsa**?

- A ☐ É impossível sair uma face com um número do intervalo $]-\infty, -8]$
- B ☐ É tão provável sair um número inteiro como um número irracional
- C ☐ É menos provável sair um número racional do que um irracional
- D ☐ A probabilidade de não obter um número natural é igual a $\frac{5}{6}$

14.2. Considera agora a experiência aleatória que consiste em lançar **duas vezes** o dado apresentado, observar o número da face que fica voltada para cima e de seguida, registar o **produto** dos números obtidos.

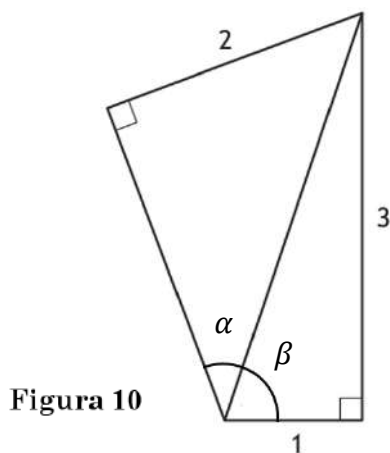
Qual a probabilidade do produto dos dois números obtidos, ser positivo?

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

Sugestão: começa por construir uma tabela de dupla entrada que caracterize a situação.

Grupo B

14. Na **Figura 10**, estão representados dois triângulos retângulos, e assinalados dois ângulos agudos, α e β .



Atendendo aos dados da **Figura 10**, determina o valor exato de $\cos \alpha + \sin \beta$

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

15. Relativamente à **Figura 11**, sabe-se que:

- o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B
- os pontos E e D pertencem, respetivamente, aos segmentos de reta $[AC]$ e $[AB]$, de tal modo que $[ED]$ é paralelo a $[BC]$

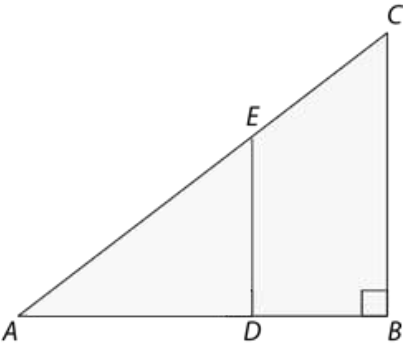


Figura 11

Qual das afirmações seguintes é **verdadeira**?

A ☐ $\sin (A\hat{C}B) = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}$

B ☐ $\sin (A\hat{C}B) = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}$

C ☐ $\cos (A\hat{C}B) = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}$

D ☐ $\cos (A\hat{C}B) = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}$

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação													
1.1.	1.2.	1.3.	2.	3.	4.	5.1.	5.2.	6.	7.	8.1.	8.2.	T O T A L	100
6	6	3	6	4	3	7	3	3	6	6	6		
9.	10.1.	10.2.		11.	12.	13.	GRUPO A		GRUPO B				
							14.1.	14.2.	14.	15.			
7	3	3		6	7	6	3	6	3	6			

Estas páginas só devem ser utilizadas se quiseres completar ou emendar qualquer resposta. Caso as utilizes, não te esqueças de identificar claramente a questão a que se refere cada uma das respostas completadas ou emendadas.

Nome completo: _____

Documento de identificação CC n.º |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|

Assinatura do aluno: _____

Prova Final de Matemática

3.º Ciclo do Ensino Básico | 2023

9.º Ano de Escolaridade

VERSÃO 2

A PREENCHER PELO PROFESSOR CLASSIFICADOR

Classificação em percentagem |__|__|__| (_____ por cento)

Correspondente ao nível |__| (_____)

Duração da Prova: 90 minutos | Tolerância: 30 minutos

18 Páginas

Não é permitido o uso de calculadora

Todas as respostas são dadas no enunciado da prova.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.

Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor.

Risca aquilo que pretendes que não seja classificado.

Apresenta apenas uma resposta para cada item.

Apresenta as tuas respostas de forma legível.

Se o espaço reservado a uma resposta não for suficiente, podes utilizar o espaço que se encontra no final da prova. Nesse caso, deves identificar claramente o item a que se refere a tua resposta.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, assinala com X a opção correta.

As cotações dos itens encontram-se no final da prova.



Formulário

Números e Operações

Valor aproximado de π (pi): 3,14159

Geometria e Medida

Áreas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Superfície esférica: $4\pi r^2$, sendo r o raio da esfera

Volumes

Prisma e cilindro: Área da base $\times$ Altura

Pirâmide e cone: $\frac{\text{Área da base} \times \text{Altura}}{3}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$, sendo r o raio da esfera

Trigonometria

Fórmula fundamental: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Relação da tangente com o seno e o cosseno: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

1. Considera a **Figura 1** onde estão representados o triângulo $[ABC]$ e uma das suas medianas.

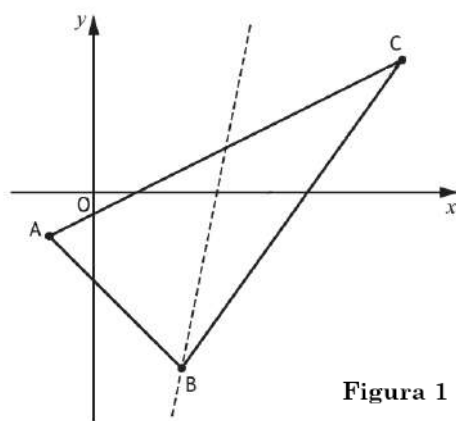


Figura 1

Sabe-se que:

- as coordenadas dos pontos A e C , são respetivamente, $(-1, -1)$ e $(7, 3)$
- a reta BC pode ser definida pela equação $y = \frac{7}{5}x - \frac{34}{5}$
- a reta AB pode ser definida pela equação $y = -x - 2$

1.1. Determina o declive da reta AC .

1.2. Determina as coordenadas do ponto B .

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

1.3. Se fossem traçadas as restantes medianas do triângulo $[ABC]$, as mesmas intersectariam a mediana representada na **Figura 1**, num ponto.

Como se designa esse ponto?

A ☐ Incentro

B ☐ Circuncentro

C ☐ Ortocentro

D ☐ Baricentro

2. Escreve o número $\frac{(4^2)^3 \times 4^5}{8^{-3}}$ na forma de potência de base $\frac{1}{2}$.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

3. Considera a equação literal:

$$A = \frac{B + 4}{C^2}, \text{ com } C \neq 0$$

Resolve a equação anterior em ordem a B .

4. Considera a sucessão cujo primeiro termo é 2 e cada termo seguinte se obtém multiplicando o anterior por 10.

O termo geral da sucessão é:

A ☐ 2^n

B ☐ 2×10^n

C ☐ $2 \times 10^{n-1}$

D ☐ 2^{n-1}

5. Na **Figura 2** estão representados dois quadrados $[ABCD]$ e $[HILK]$ e um retângulo $[BEFG]$.

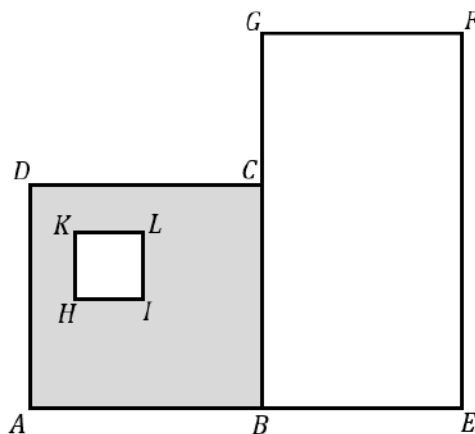


Figura 2

Nota: A **Figura 2** não está à escala.

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = x$
- $\overline{BE} = \frac{4}{5}x$
- $\overline{CG} = 2$
- a área do quadrado $[ABCD]$ é igual à área do retângulo $[BEFG]$

5.1. Determina o **valor numérico** das dimensões do retângulo $[BEFG]$.

Apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar.

Sugestão: Começa por mostrar que a área do retângulo $[BEFG]$ é dada por $\frac{4}{5}x^2 + \frac{8}{5}x$

5.2. Seja l a medida do lado do quadrado $[HILK]$.

Qual das expressões seguintes representa a medida da **área** sombreada, em função de x ?

A ☐ $l - x^2$

B ☐ $(x - l)(x + l)$

C ☐ $x^2 - l$

D ☐ $(x - l)(x - l)$

6. Acerca da **Figura 3** sabe-se que:

- o segmento de reta $[PM]$ é tangente à circunferência, em M
- a reta PN contém o ponto O
- o ângulo OPM tem a amplitude de 14°
- o ponto N pertence à circunferência

Seja α a amplitude do ângulo ONM e β a amplitude do arco menor MN .

Qual das opções seguintes é **verdadeira**?

A ☐ $\alpha = 38^\circ$ e $\beta = 104^\circ$

B ☐ $\alpha = 52^\circ$ e $\beta = 104^\circ$

C ☐ $\alpha = 52^\circ$ e $\beta = 152^\circ$

D ☐ $\alpha = 38^\circ$ e $\beta = 152^\circ$

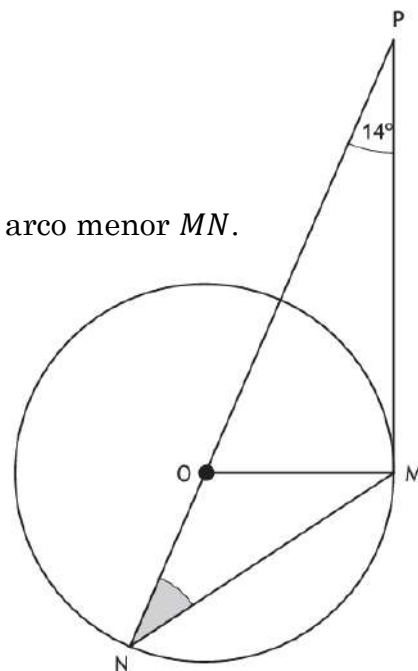


Figura 3

7. Considera a equação na variável x , dada por $2x^2 - 8x + (4 - p) = 0$, $p \in \mathbb{R}$.

Sabendo que a equação anterior, tem duas soluções reais distintas, determina os valores possíveis de p .

Apresenta a tua resposta na forma de intervalo de números reais.

8. A **Figura 4** mostra parte do gráfico da função f , definida por $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$

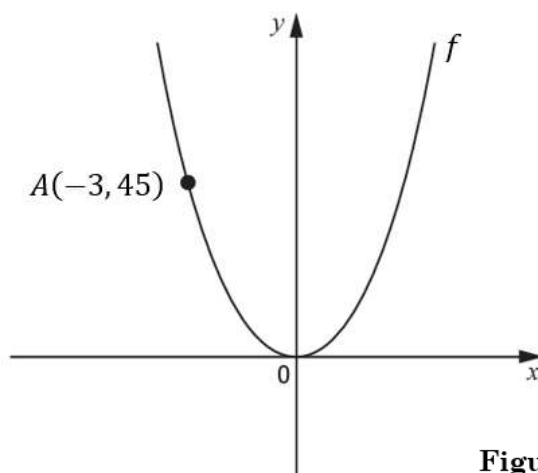


Figura 4

8.1. Determina $f(2)$.

Mostra como chegaste à tua resposta.

8.2. Seja B o ponto do gráfico de f , simétrico do ponto A , relativamente ao eixo Oy .

Considera a função g de proporcionalidade inversa, definida por $g(x) = \frac{k}{x}$, com $k > 0$.

Sabe-se que o ponto B pertence ao gráfico de g .

Determina o valor de k .

9. Resolve, em $\mathbb{R}$, a equação seguinte:

$$3x^2 + 4x - 4 = 0$$

Apresenta o conjunto-solução e todos os cálculos que efetuares.

10. Na **Figura 5** estão representados o cubo $[ABCDEFGH]$ e a pirâmide $[ABCDP]$, cuja base $[ABCD]$ coincide com uma das faces do cubo.

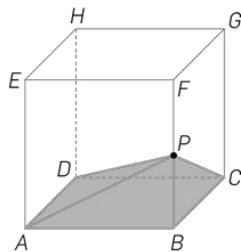


Figura 5

Sabe-se que P é o ponto médio da aresta $[BF]$ do cubo.

- 10.1. Acerca do volume da pirâmide pode afirmar-se que é:

A ☐ $\frac{1}{2}$ do volume do cubo

B ☐ $\frac{1}{3}$ do volume do cubo

C ☐ $\frac{1}{4}$ do volume do cubo

D ☐ $\frac{1}{6}$ do volume do cubo

- 10.2. Tendo em conta a **Figura 5**, qual das seguintes afirmações é **falsa**?

A ☐ As retas AC e CG são perpendiculares

B ☐ Os planos ABP e CDP são paralelos

C ☐ Os planos ADP e BCG são concorrentes

D ☐ A reta AP é paralela ao plano CDH

11. A Joana tem um tanque de peixes.

O tanque de peixes tem a forma de um paralelepípedo retângulo com dimensões de 30 cm por 30 cm por 42 cm .

No interior do tanque existe uma caixa de luz cilíndrica na parte inferior, como se pode observar na **Figura 6**.

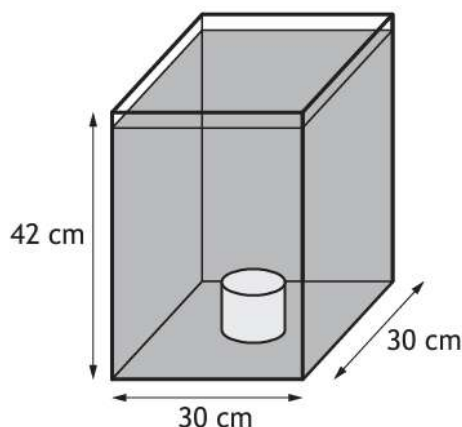


Figura 6

A caixa de luz cilíndrica tem um diâmetro de 10 cm e uma altura de 8 cm .

Há uma diferença de 2 cm entre o topo do tanque e o nível da água.

A caixa de luz **não retém** água.

Escreve uma expressão **simplificada** do volume de água no tanque, em cm^3 .

12. Resolve, em $\mathbb{R}$, a inequação seguinte:

$$\frac{-5(x-2)}{3} + \frac{5}{2} \leq \frac{2x-5}{6}$$

Apresenta o conjunto-solução na forma de intervalo de números reais e todos os cálculos que efetuares.

13. As duas fotografias retangulares representadas nas **Figuras 7 e 8** são semelhantes. **Nota:** As figuras não estão desenhadas à escala.



12 cm

Figura 7



? cm

Figura 8

A fotografia pequena tem uma área de 80 cm^2 e tem 12 cm de largura.

A fotografia grande tem uma área de 500 cm^2 .

Calcula a largura da fotografia grande.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

Responde a um e um só dos grupos A ou B

Se responderes a mais do que um destes grupos deves indicar qual deles pretendes que seja classificado. Se não deres esta indicação será classificado o grupo a que responderes em primeiro lugar.

Grupo A

14. Na **Figura 9** está a planificação de um dado cúbico equilibrado, com as faces numeradas com: -5 , (6) , $\sqrt{16}$, $\frac{5}{2}$, -7 , 2π e $\sqrt{3}$.

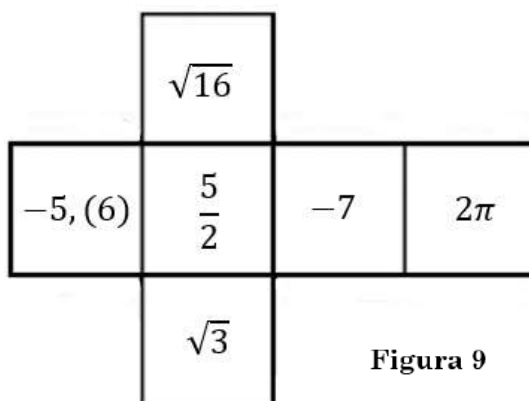


Figura 9

- 14.1. Considera a experiência aleatória que consiste em lançar **uma vez** o dado apresentado e observar o número da face que fica voltada para cima.

Qual das afirmações seguintes é **falsa**?

- A ☐ É menos provável sair um número racional do que um irracional
- B ☐ É tão provável sair um número inteiro como um número irracional
- C ☐ É impossível sair uma face com um número do intervalo $]-\infty, -8]$
- D ☐ A probabilidade de não obter um número natural é igual a $\frac{5}{6}$

14.2. Considera agora a experiência aleatória que consiste em lançar **duas vezes** o dado apresentado, observar o número da face que fica voltada para cima e de seguida, registar o **produto** dos números obtidos.

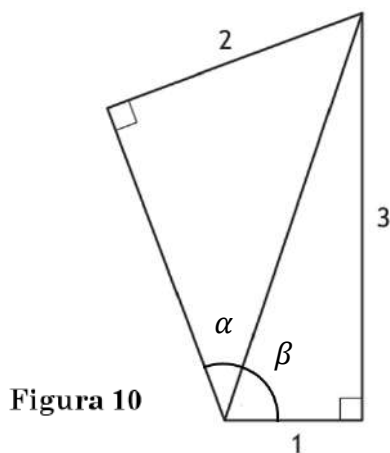
Qual a probabilidade do produto dos dois números obtidos, ser positivo?

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

Sugestão: começa por construir uma tabela de dupla entrada que caracterize a situação.

Grupo B

14. Na **Figura 10**, estão representados dois triângulos retângulos, e assinalados dois ângulos agudos, α e β .



Atendendo aos dados da **Figura 10**, determina o valor exato de $\cos \alpha + \sin \beta$

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

15. Relativamente à **Figura 11**, sabe-se que:

- o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B
- os pontos E e D pertencem, respetivamente, aos segmentos de reta $[AC]$ e $[AB]$, de tal modo que $[ED]$ é paralelo a $[BC]$

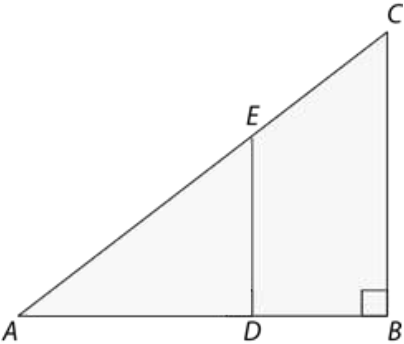


Figura 11

Qual das afirmações seguintes é **verdadeira**?

A ☐ $\sin (A\hat{C}B) = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}$

B ☐ $\sin (A\hat{C}B) = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}$

C ☐ $\cos (A\hat{C}B) = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}$

D ☐ $\cos (A\hat{C}B) = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}$

FIM

COTAÇÕES

Item												
Cotação												
1.1.	1.2.	1.3.	2.	3.	4.	5.1.	5.2.	6.	7.	8.1.	8.2.	T O T A L
6	6	3	6	4	3	7	3	3	6	6	6	
9.	10.1.	10.2.		11.	12.	13.	GRUPO A			GRUPO B		
							14.1.	14.2.		14.	15.	
7	3	3		6	7	6	3	6		3	6	

Estas páginas só devem ser utilizadas se quiseres completar ou emendar qualquer resposta. Caso as utilizes, não te esqueças de identificar claramente a questão a que se refere cada uma das respostas completadas ou emendadas.



Teste de Matemática 9.º ANO

2023

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A prova é formada por itens de escolha múltipla e de resposta restrita. Os critérios de classificação dos itens de resposta restrita estão organizados por etapas, atribuindo-se, a cada uma delas, uma pontuação.

Caso os alunos adotem um processo não previsto nos critérios específicos, cabe ao professor corretor adaptar a distribuição da cotação atribuída.

Deve ser atribuída a classificação de zero quando um aluno apresente apenas o resultado final de um item, ou de uma etapa, quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações;

Nas seguintes situações deve descontar-se um ponto às cotações estabelecidas para a etapa respetiva:

- Ocorrência de um erro de cálculo;
- Apresentação de uma resposta com o formato que não esteja de acordo com o que foi solicitado;
- Apresentação de expressões com erros do ponto de vista formal.

Caso ocorram erros que revelem desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades ou o aluno apresente uma resolução incompleta de uma etapa, deve descontar-se até metade da cotação dessa etapa.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

																			Grupo A		Grupo B		Total
Item	1.1	1.2	1.3	2	3	4	5.1	5.2	6	7	8.1	8.2	9.	10.1	10.2	11	12	13	14.1	14.2	14	15	Total
Cotação	6	6	3	6	4	3	7	3	3	6	6	6	7	3	3	6	7	6	3	6	6	3	100

QUESTÃO	DESCRIÇÃO		COTAÇÃO	
1.			15	
	1.1.	- Escrever $m_{AC} = \frac{-1-3}{-1-7}$ ou equivalente - Responder $m_{AC} = \frac{1}{2}$	3 3	6
	1.2.	- Escrever $\begin{cases} y = \frac{7}{5}x - \frac{34}{5} \\ y = -x - 2 \end{cases}$ - Resolver o sistema - Responder $B(2, -4)$	2 3 1	6
	1.3.	Versão 1 (C) Versão 2 (D)	3	
2.			6	
		- Calcular o valor da potência de potência $((4^2)^3 = 4^6)$ - Multiplicar as potências com o mesmo expoente $(4^6 \times 4^5 = 4^{11})$ - Escrever ambas as potências em base 2 $\left(\frac{2^{22}}{2^9}\right)$ - Dividir as potências com a mesma base $\left(\frac{2^{22}}{2^9}\right) = 2^{22+9} = 2^{31}$ - Escrever na forma de potência de base $\frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-31}\right)$	1 1 2 1 1	
3.			4	
		Escrever $B = AC^2 - 4$	4	
4.			3	
		Versão 1 (B) Versão 2 (C)		
5.			10	
	5.1.	- Mostrar que $A_{[BEFG]} = \frac{4}{5}x^2 + \frac{8}{5}x$ - Igualar as duas áreas $\left(x^2 = \frac{4}{5}x^2 + \frac{8}{5}x\right)$ - Resolver a equação - Concluir que $x = 8$ (Porque $x > 0$, uma vez que é uma medida) - Calcular o valor numérico de $A_{[BEFG]}$ ($A_{[BEFG]} = 64$)	2 1 2 1 1	7
	5.2.	Versão 1 (D) Versão 2 (B)	3	
6.			3	
		Versão 1 (D) Versão 2 (A)		

7.					6
		- Referir que, para que a equação tenha duas soluções, $\Delta > 0$ - Escrever $(-8)^2 - 4 \times 2 \times (4 - p) > 0$ - Resolver a inequação - Apresentar a resposta na forma de intervalo de números reais $]-4; +\infty[$	2 1 2 1		
8.					12
	8.1.	- Determinar a ($a = 5$) - Calcular $f(2)$ ($f(2) = 20$)	3 3	6	
	8.2.	- Escrever as coordenadas do ponto B ($B(3, 45)$) - Determinar k ($k = 135$)	3 3	6	
9.					7
		- Identificar os valores de $a, b, e c$ - Substituir, na fórmula resolvente, $a, b, e c$ pelos respetivos valores - Determinar o binómio discriminante - Determinar as soluções - Escrever o conjunto solução $C.S. = \left\{-2, \frac{2}{3}\right\}$	1 1 2 1 2		
10.					6
	10.1.	Versão 1 (C)	Versão 2 (D)	3	
	10.2.	Versão 1 (D)	Versão 2 (B)	3	
11.					6
		- Determinar o nível da água ($h = 42 - 2 = 40$) - Calcular o volume do paralelepípedo que representa o tanque até ao nível da água ($V = 30 \times 30 \times 40 = 36000 \text{ cm}^3$) - Indicar o raio da base do cilindro (5) - Determinar o volume do cilindro $V = \pi \times 5^2 \times 8 = 200\pi \text{ cm}^3$ - Escrever a diferença dos dois volumes ($36000 - 200\pi$) ou equivalente	2 1 1 1 1		
12.					7
		- Desembaraçar de parênteses - Desembaraçar de denominadores - Isolar os termos semelhantes - Escrever $x \geq \frac{10}{3}$ - Responder $C.S. = \left[\frac{10}{3}; +\infty\right[$	1 2 1 2 1		
13.					6
		- Calcular a razão de semelhança entre as duas figuras ($r = \frac{5}{2}$) - Determinar a largura da figura grande ($l = 30$)	4 2		

Grupo A					
14.					9
	14.1.	Versão 1 (C)	Versão 2 (A)	3	
	14.2.	• Apresentar uma tabela de dupla entrada que identifique todos os casos possíveis • Indicar o número de casos possíveis • Indicar o número de casos favoráveis • Calcular a probabilidade do acontecimento pedido • Apresentar o resultado na forma de fração irredutível $\left(\frac{5}{9}\right)$	2 1 1 1 1	6	
Grupo B					
14.					6
		• Determinar, através do teorema de Pitágoras, a hipotenusa do triângulo de β ($h = \sqrt{10}$) • Determinar $\sin \beta$ ($\sin \beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$) • Determinar, através do teorema de Pitágoras, o cateto adjacente a α ($c = \sqrt{6}$) • Determinar $\cos \alpha$ ($\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}$) • Determinar o valor de $\cos \alpha + \sin \beta$ ($\cos \alpha + \sin \beta = \frac{\sqrt{6}+3}{\sqrt{10}}$)			1 1 1 1 2
15.		Versão 1 (B)	Versão 2 (A)		3



SPM@TESTES

Teste de Matemática

2023

10.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

(cinco páginas)

VERSÃO 1

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.



1. Seja f a função definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$.

1.1. Represente $f(x)$ na forma $a(x - b)^2 + c$.

1.2. Determine a equação reduzida da reta que intersesta o gráfico de f no ponto de abscissa $\sqrt{2}$ e no ponto de abscissa $-\sqrt{2}$.

2. Seja h a função definida, no intervalo $[-2, 4]$, por $h(x) = x^2 - 4x - 5$.

Os valores do maximizante e do minimizante de h , correspondentes ao máximo e ao mínimo absolutos são, respetivamente:

- (A) $x = 4$ e $x = -2$ (B) $x = 4$ e $x = 0$ (C) $x = -2$ e $x = 2$ (D) $x = -2$ e $x = 1$

3. Na Figura 1 estão representadas duas circunferências concêntricas, num referencial ortonormado Oxy .

Sabe-se que:

- $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ é uma equação da circunferência menor;
- A reta AB é tangente à circunferência menor no ponto que tem a mesma ordenada que o respetivo centro;
- Os pontos A e B pertencem à circunferência maior e $\overline{AB} = 8$.

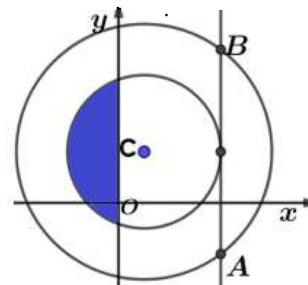


Figura 1

3.1. Determine as abscissas dos pontos da circunferência menor cuja ordenada é $2 + 2\sqrt{2}$.

3.2. Determine uma equação cartesiana da circunferência maior.

3.3. Qual das seguintes equações define uma reta que tem pontos em comum com a região sombreada na figura?

- (A) $x = 1$ (B) $x = -1$ (C) $y = -2$ (D) $y = 5$

4. No referencial ortonormado Oxy da Figura 2 estão representados os gráficos das funções reais de variável real f , g e h .

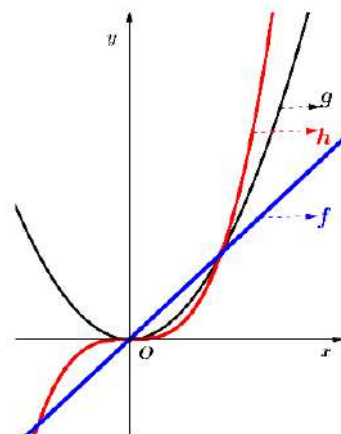


Figura 2

(A) $f(x) = x^2$, $g(x) = x$, $h(x) = x^3$

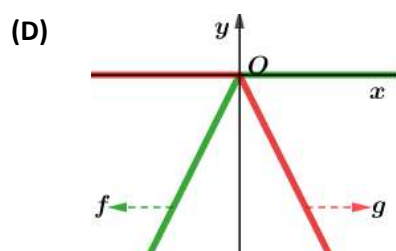
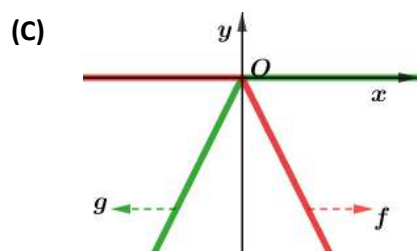
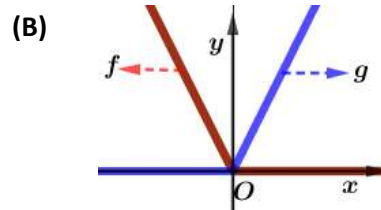
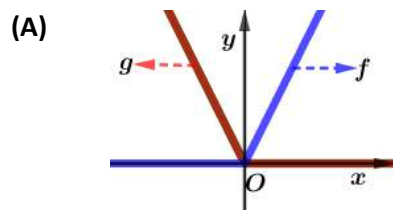
(B) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x$

(C) $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x^3$

(D) $f(x) = x$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^2$

5. Sejam f e g as funções definidas, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = |x| + x$ e $g(x) = |x| - x$.

Qual dos referenciais Oxy , ortonormados, pode representar os gráficos das funções f e g ?



6. No referencial ortonormado Oxy da *Figura 3* está representado parte do gráfico de uma função quadrática que traduz o problema seguinte:

A partir de um determinado ponto A da parede de um lago, situado a 2 metros de altura, pretende-se lançar um jacto de água que descreva um arco de parábola e que atinja uma altura máxima de 3 metros a uma distância de 1 metro da parede $[OA]$.

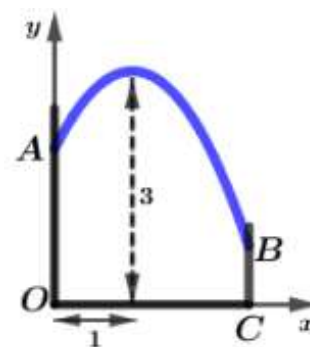


Figura 3

Para que a água caia dentro do lago construiu-se um muro $[CB]$, com C a uma distância de 2,5 metros do ponto O . Mostre que fazendo $\overline{BC} = 1$ metro é possível atingir esse objetivo.

7. Num referencial ortonormado Oxy considere-se a reta s de equação $y = 3x + 2$ e a reta t de equação $y = 2x + 1$.

Considere ainda os pontos $P(0,4)$ e $A(3,11)$.

7.1. Mostre que o ponto P não pertence a nenhuma das retas, mas o ponto A pertence à reta s .

7.2. Para um determinado ponto B da reta t , $\overrightarrow{PB} = k \overrightarrow{PA}$, $k \in \mathbb{R}$.

Determine as coordenadas do ponto B e o valor de k .

8. Na *Figura 4*, está representado num referencial o.n. $Oxyz$, um cubo $[ABCDEFGO]$.

Sabe-se que:

- A face $[OABE]$ está contida no plano xOy ;
- As coordenadas dos vértices G e A são $(0,0,5)$ e $(3,4,0)$, respetivamente;
- O ponto B pertence à reta de equação vetorial $(x,y,z) = (1,4,1) + k(2,-3,1)$, $k \in \mathbb{R}$

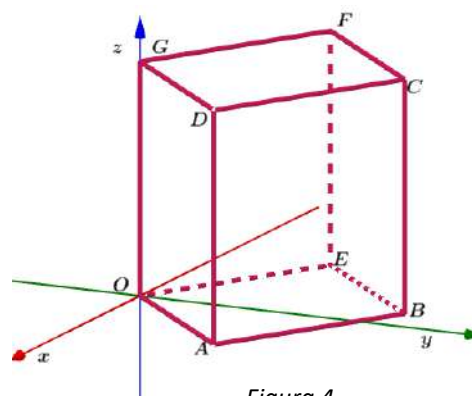


Figura 4

8.1. Qual das equações seguintes define um plano que contém a aresta $[DA]$?

- (A) $x = 1$ (B) $x = 2$ (C) $x = 3$ (D) $x = 4$

8.2. Determine as coordenadas do centro da face $[ABCD]$.

9. Considere o polinómio $P(x) = (x - 2)^2(x^2 + 1)$.

9.1. Seja f a função definida, em $\mathbb{R}$, pelo polinómio dado.

Elabore um quadro de sinais para a função f .

Com base no quadro, poderá concluir que existe pelo menos um extremo para f ? Justifique e, caso exista, identifique-o.

9.2. O polinómio $P(x)$ é divisível pelo polinómio:

(A) $x^2 - 4x + 4$

(B) $x + 2$

(C) $x + 1$

(D) x

10. Na Figura 5, encontra-se representado, num referencial Oxy , parte do gráfico da função h definida, em $\mathbb{R}$, por $h(x) = |x + 2| - 2$.

A abscissa do ponto B é o minimizante da função.

10.1. Resolva a equação $h(x) = 0$.

10.2. Determine a área do triângulo $[ABO]$.

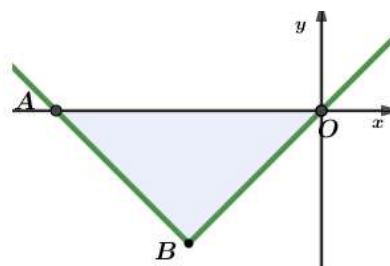


Figura 5

FIM

Questão	1.1	1.2	2.	3.1	3.2	3.3	4.	5.	6.	7.1	7.2	8.1	8.2	9.1	9.2	10.1	10.2	TOTAL
Cotação	14	13	8	14	13	8	8	8	14	14	14	8	14	14	8	14	14	200



SPM@TESTES

Teste de Matemática

2023

10.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

(cinco páginas)

VERSÃO 2

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As citações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.



1. Seja f a função definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$.

1.1. Represente $f(x)$ na forma $a(x - b)^2 + c$.

1.2. Determine a equação reduzida da reta que intersesta o gráfico de f no ponto de abscissa $\sqrt{2}$ e no ponto de abscissa $-\sqrt{2}$.

2. Seja h a função definida, no intervalo $[-2, 4]$, por $h(x) = x^2 - 4x - 5$.

Os valores do maximizante e do minimizante de h , correspondentes ao máximo e ao mínimo absolutos são, respetivamente:

(A) $x = 4$ e $x = -2$ (B) $x = 4$ e $x = 0$ (C) $x = -2$ e $x = 1$ (D) $x = -2$ e $x = 2$

3. Na Figura 1 estão representadas duas circunferências concêntricas, num referencial ortonormado Oxy .

Sabe-se que:

- $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ é uma equação da circunferência menor;
- A reta AB é tangente à circunferência menor no ponto que tem a mesma ordenada que o respetivo centro;
- Os pontos A e B pertencem à circunferência maior e $\overline{AB} = 8$.

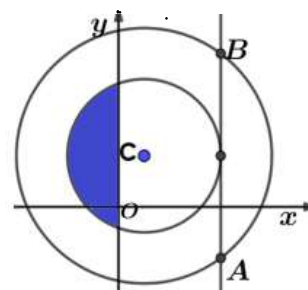


Figura 1

3.1. Determine as abscissas dos pontos da circunferência menor cuja ordenada é $2 + 2\sqrt{2}$.

3.2. Determine uma equação cartesiana da circunferência maior.

3.3. Qual das seguintes equações define uma reta que tem pontos em comum com a região sombreada na figura?

(A) $x = -1$ (B) $x = 1$ (C) $y = -2$ (D) $y = 5$

4. No referencial ortonormado Oxy da Figura 2 estão representados os gráficos das funções reais de variável real f , g e h .

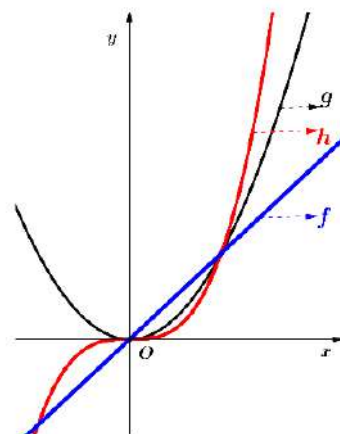


Figura 2

(A) $f(x) = x^2$, $g(x) = x$, $h(x) = x^3$

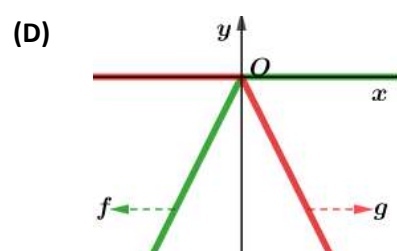
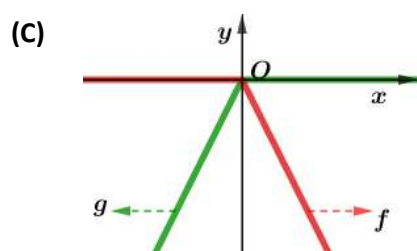
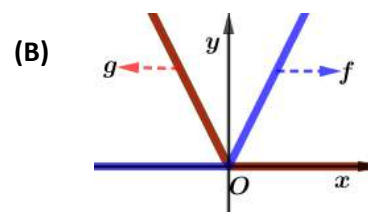
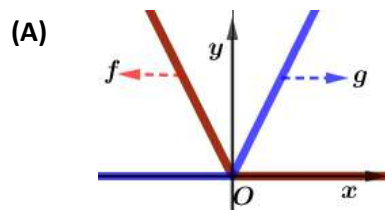
(B) $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x^3$

(C) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x$

(D) $f(x) = x$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^2$

5. Sejam f e g as funções definidas, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = |x| + x$ e $g(x) = |x| - x$.

Qual dos referenciais Oxy , ortonormados, pode representar os gráficos das funções f e g ?



6. No referencial ortonormado Oxy da *Figura 3* está representado parte do gráfico de uma função quadrática que traduz o problema seguinte:

A partir de um determinado ponto A da parede de um lago, situado a 2 metros de altura, pretende-se lançar um jacto de água que descreva um arco de parábola e que atinja uma altura máxima de 3 metros a uma distância de 1 metro da parede $[OA]$.

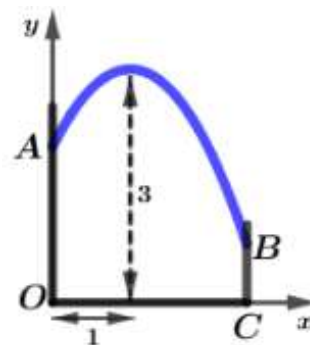


Figura 3

Para que a água caia dentro do lago construiu-se um muro $[CB]$, com C a uma distância de 2,5 metros do ponto O . Mostre que fazendo $\overline{BC} = 1$ metro é possível atingir esse objetivo.

7. Num referencial ortonormado Oxy considere-se a reta s de equação $y = 3x + 2$ e a reta t de equação $y = 2x + 1$.

Considere ainda os pontos $P(0,4)$ e $A(3,11)$.

7.1. Mostre que o ponto P não pertence a nenhuma das retas, mas o ponto A pertence à reta s .

7.2. Para um determinado ponto B da reta t , $\overrightarrow{PB} = k \overrightarrow{PA}$, $k \in \mathbb{R}$.

Determine as coordenadas do ponto B e o valor de k .

8. Na *Figura 4*, está representado num referencial o.n. $Oxyz$, um cubo $[ABCDEFGO]$.

Sabe-se que:

- A face $[OABE]$ está contida no plano xOy ;
- As coordenadas dos vértices G e A são $(0,0,5)$ e $(3,4,0)$, respetivamente;
- O ponto B pertence à reta de equação vetorial $(x,y,z) = (1,4,1) + k(2,-3,1)$, $k \in \mathbb{R}$

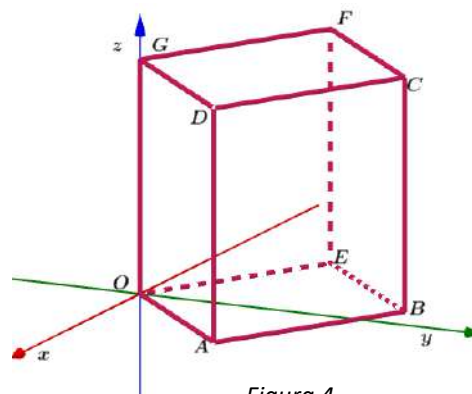


Figura 4

8.1. Qual das equações seguintes define um plano que contém a aresta $[DA]$?

- (A) $x = 4$ (B) $x = 3$ (C) $x = 2$ (D) $x = 1$

8.2. Determine as coordenadas do centro da face $[ABCD]$.

9. Considere o polinómio $P(x) = (x - 2)^2(x^2 + 1)$.

9.1. Seja f a função definida, em $\mathbb{R}$, pelo polinómio dado.

Elabore um quadro de sinais para a função f .

Com base no quadro, poderá concluir que existe pelo menos um extremo para f ? Justifique e, caso exista, identifique-o.

9.2. O polinómio $P(x)$ é divisível pelo polinómio:

(A) x

(B) $x + 1$

(C) $x + 2$

(D) $x^2 - 4x + 4$

10. Na Figura 5, encontra-se representado, num referencial Oxy , parte do gráfico da função h definida, em $\mathbb{R}$, por $h(x) = |x + 2| - 2$.

A abscissa do ponto B é o minimizante da função.

10.1. Resolva a equação $h(x) = 0$.

10.2. Determine a área do triângulo $[ABO]$.

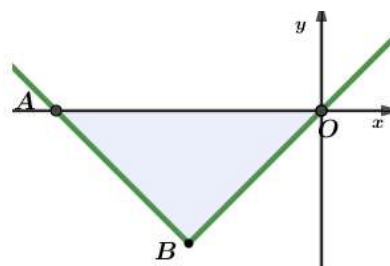


Figura 5

FIM

Questão	1.1	1.2	2.	3.1	3.2	3.3	4.	5.	6.	7.1	7.2	8.1	8.2	9.1	9.2	10.1	10.2	TOTAL
Cotação	14	13	8	14	13	8	8	8	14	14	14	8	14	14	8	14	14	200



Teste de Matemática 10.º ANO

2023

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A prova é formada por itens de escolha múltipla e de resposta restrita. Os critérios de classificação dos itens de resposta restrita estão organizados por etapas, atribuindo-se uma pontuação a cada uma delas.

Caso os alunos adotem um processo não previsto nos critérios específicos, cabe ao professor corretor adaptar a distribuição da cotação atribuída.

Deve ser atribuída a classificação de zero pontos nas seguintes situações:

- Caso um aluno apresente apenas o resultado final de um item ou de uma etapa, quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações;
- Caso o aluno utilize de forma inequívoca a calculadora, uma vez que tal não é solicitado nesta prova.

Nas seguintes situações deve descontar-se um ponto às cotações estabelecidas para a etapa respetiva:

- Ocorrência de um erro de cálculo;
- Apresentação de uma resposta com o formato que não esteja de acordo com o que foi solicitado;
- Apresentação de expressões com erros do ponto de vista formal.

Caso ocorram erros que revelem desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades ou o aluno apresente uma resolução incompleta de uma etapa, deve descontar-se até metade da cotação dessa etapa.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

Questão	1.1	1.2	2.	3.1	3.2	3.3	4.	5.	6.	7.1	7.2	8.1	8.2	9.1	9.2	10.1	10.2	TOTAL
Cotação	14	13	8	14	13	8	8	8	14	14	14	8	14	14	8	14	14	200

QUESTÃO	DESCRIÇÃO	COTAÇÃO
1		27
1.1		14
	• Escrever $3x^2 - 6x + 4 = 3(x^2 - 2x) + 4$ 4 pontos • Escrever $3(x^2 - 2x) + 4 = 3(x^2 - 2x + 1) - 3 + 4$..... 6 pontos • Escrever $3(x^2 - 2x + 1) - 3 + 4 = 3(x - 1)^2 + 1$..... 4 pontos	
1.2		13
	• Calcular $f(\sqrt{2})$ e concluir que $A(\sqrt{2}, 10 - 6\sqrt{2})$ 3 pontos • Calcular $f(-\sqrt{2})$ e concluir que $B(-\sqrt{2}, 10 + 6\sqrt{2})$ 3 pontos • Determinar o declive da reta AB 4 pontos • Obter a equação reduzida $y = -6x + 10$ 3 pontos	
2	Versão 1 (C); Versão 2 (D)	8
3		35
3.1.		14
	• Substituir, na equação $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$, y por $2 + 2\sqrt{2}$ 2 pontos • Resolver a equação $(x - 1)^2 + (2 + 2\sqrt{2} - 2)^2 = 9$ 10 pontos • Resposta ($x = 0 \vee x = 2$)..... 2 pontos	
3.2		13
	• Obter as coordenadas do ponto T de tangência da reta AB, $T(4,2)$..3 pontos • Identificar T como ponto médio de $[AB]$..... 2 pontos • Obter $\overline{CT}$ e $\overline{TA}$ ou $\overline{TB}$..... 4 pontos • Determinar $\overline{CA}$ ou $\overline{CB}$ (5) 2 pontos • Escrever uma equação cartesiana da circunferência 2 pontos	
3.3	Versão 1 (B); Versão 2 (A)	8
4	Versão 1 (C); Versão 2 (B)	8
5	Versão 1 (A); Versão 2 (B)	8
6		14
	• Identificar as coordenadas do vértice da parábola $V(1,3)$ 2 pontos • Escrever a expressão analítica da função como $f(x) = a(x - 1)^2 + 3$ 2 pontos • Usar $f(0) = 2$ para obter o valor de $a(-1)$ 5 pontos • Verificar que $f(2,5) = 0,75$ e concluir que $f(2,5)$ é inferior a 1. 5 pontos	
7		28
7.1.		14

		• Verificar que as coordenadas do ponto $P(0,4)$ não satisfazem a equação da reta s nem a equação da reta t 8 pontos • Verificar que as coordenadas do ponto $A(3,11)$ satisfazem a equação da reta s 6 pontos		
	7.2.		14	
		• Identificar as coordenadas de B como $(x, 2x + 1)$ 3 pontos • Exprimir as coordenadas de $\overrightarrow{PB}$ e de $\overrightarrow{PA}$, ou seja, $\overrightarrow{PB} = (x, 2x - 3)$ e $\overrightarrow{PA} = (3, 7)$ 3 pontos • Escrever $(x, 2x - 3) = k(3, 7) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k \\ 2x - 3 = 7k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$ 3 pontos • Obter as coordenadas do ponto $B(-9, -17)$ 3 pontos • Indicar o valor de $k(-3)$ 2 pontos		
8				22
	8.1.	Versão 1 (C); Versão 2 (B)	8	
	8.2.		14	
		• Escrever $(x, y, 0) = (1, 4, 1) + k(2, -3, 1)$, $k \in \mathbb{R}$ e obter as coordenadas do ponto $B(-1, 7, 0)$ 8 pontos • Indicar as coordenadas do ponto $C(-1, 7, 5)$ 2 pontos • Determinar as coordenadas do ponto médio de $[AC]$ $\left(1, \frac{11}{2}, \frac{5}{2}\right)$ e identificá-lo como o centro da face $[ABCD]$ 4 pontos		
9				22
	9.1.		14	
		• Verificar que $x^2 + 1$ não tem zeros e concluir que $x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ 3 pontos • Verificar que $(x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ 1 ponto • Verificar que $(x - 2)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ 3 pontos • Construir o quadro de estudo de sinal de f 3 pontos • Identificar $f(2) = 0$ como o mínimo absoluto da função 4 pontos		
	9.2.	Versão 1 (A); Versão 2 (D)	8	
10				28
	10.1		14	
		• Substituir $h(x) = 0$ por $x + 2 - 2 = 0$ 1 ponto • Resolver a equação $x + 2 = 2$ 11 pontos • Indicar as soluções ($x = 0 \vee x = -4$) 2 pontos		
	10.2		14	
		• Identificar as coordenadas do ponto $B(-2, -2)$ 6 pontos • Identificar base do triângulo como $\overline{AO} = 4$ 3 pontos • Identificar a altura do triângulo como $y_B = 2$ 3 pontos • Obter a área do triângulo $[AOB]$ (4 u.a.) 2 pontos		



SPM@TESTES

Teste de Matemática 11.º ano

2023

11.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

(seis páginas)

VERSÃO 1

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Não é necessário o uso de máquina de calcular.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.



1. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy , uma circunferência de raio 4.

Sabe-se que:

- a reta CB é definida pela equação $x = 4$;
- o ponto C tem coordenadas $(4,0)$;
- a circunferência tem centro na origem;
- o ponto A pertence à circunferência;
- α é a inclinação da reta AB $\left(\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right)$

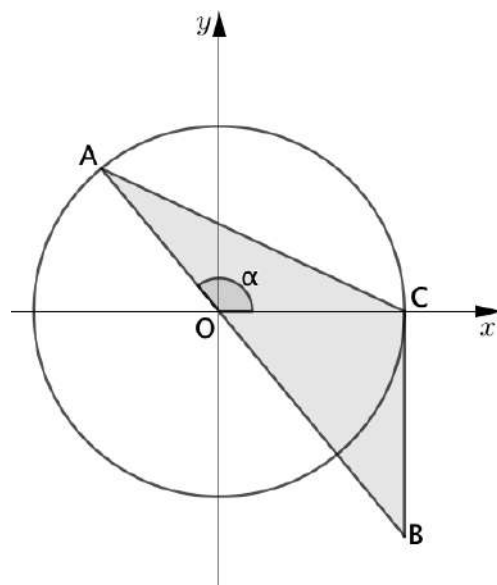


Figura 1

- 1.1. Mostre que a área do triângulo $[ABC]$, representado a sombreado, é dada em função de α por $A(\alpha) = 8(\sin \alpha - \tan \alpha)$

- 1.2. Para um determinado valor de α o declive da reta AC é igual a $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Determine as coordenadas do ponto A para esse valor de α .

2. Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = k - 2a \sin(ax)$, com $a, k \in \mathbb{N}$.

Sendo $D_f' = [-1, 15]$ o contradomínio da função f , então o período positivo mínimo de f é:

- (A) 8π (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) 4π

3. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sin x \cos x$

- 3.1. Mostre que f é uma função periódica de período π

- 3.2. Determine os valores de $x \in [-\pi, \pi[$ tais que $f(x) = \sin^2 x$

4. Considere, num referencial o.n. xOy , uma reta r definida pela equação $y = \sqrt{5}x - 1$.

Seja t uma reta perpendicular à reta r .

Se a inclinação da reta t for α , qual é o valor de $\sin \alpha$?

(A) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

(B) $\frac{\sqrt{30}}{6}$

(C) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$

(D) $-\frac{\sqrt{30}}{6}$

5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α de equação $2x - y + z - 1 = 0$ e o ponto $A(2, -1, 8)$.

5.1. Determine o raio da superfície esférica de centro em A e tangente ao plano α

5.2. Para certos valores reais de m e n , a seguinte equação vetorial define uma reta r :

$$(x, y, z) = (n, -1, -4m) + k(3m, m, m - 6), \quad k \in \mathbb{R}$$

Determine os valores de m e n sabendo que a reta r está contida no plano α

6. Sabe-se que a sucessão (v_n) tem todos os termos positivos e $v_n \times (3 - v_n) \geq 0$, para todo o valor natural de n .

Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

(A) (v_n) não é monótona

(B) (v_n) é limitada

(C) (v_n) é crescente

(D) Existe um valor natural de n para o qual $\frac{v_n}{4-v_n} < 0$

7. Considere duas sucessões (a_n) e (b_n) que têm as seguintes características:

- (a_n) é uma progressão geométrica;
- (b_n) é uma progressão aritmética;
- Em ambas as sucessões o primeiro termo é igual a 3;
- $a_2 = b_4$ e $a_3 = b_8$.

Determine a razão de cada uma das progressões.

8. Considere a sucessão (u_n) definida por
$$\begin{cases} u_1 = 10 \\ u_n = u_{n+1} + 2, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Qual o valor de $\lim u_n$?

- (A) 0 (B) -10 (C) $+\infty$ (D) $-\infty$

9. Na Figura 2, estão representados, num referencial o.n. xOy , parte dos gráficos das funções f e g bem como o triângulo $[OAB]$.

- O ponto A é o ponto de interseção dos gráficos de f e g com abcissa positiva;
- O ponto B é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Ox ;
- A função f define-se, no respetivo domínio, por

$$f(x) = \frac{3x-4}{x-2}$$

- A função g define-se, em $\mathbb{R}$, por $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$

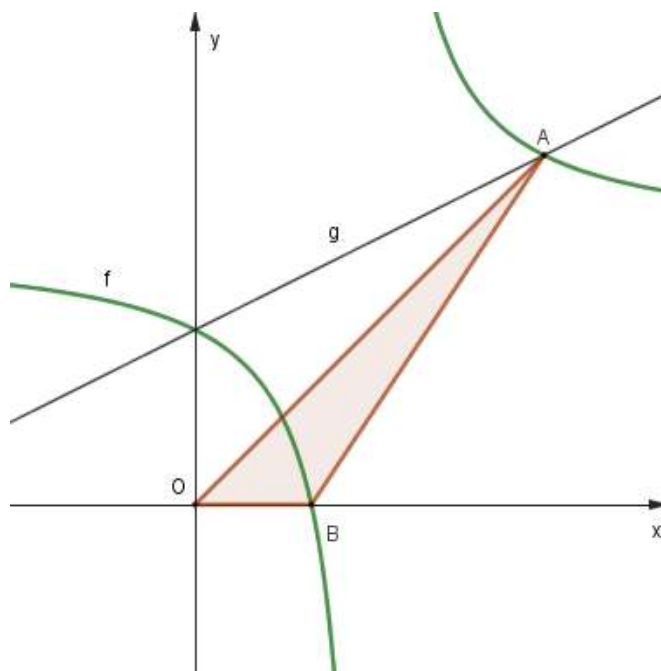


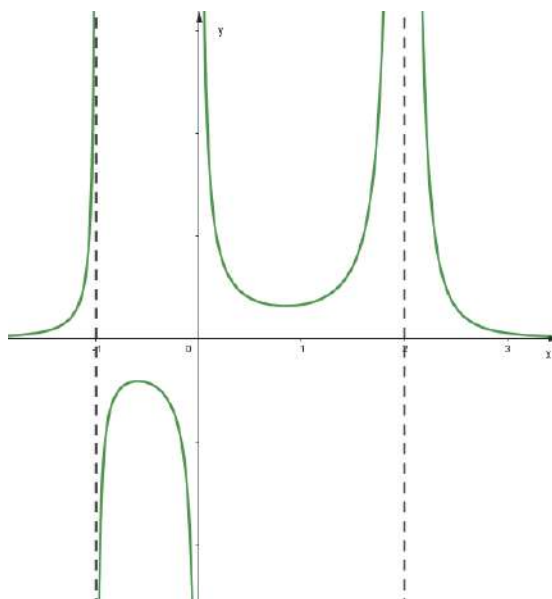
Figura 2

- 9.1. Determine as coordenadas dos pontos A e B e a área do triângulo $[OAB]$.
- 9.2. Determine o domínio da função h definida por $h(x) = \sqrt{-f(x)}$.
- 9.3. Para cada valor de a e de b tem-se a função j definida por $j(x) = f(x - a) + b$.

Os valores de a e de b para os quais as assíntotas vertical e horizontal do gráfico da função j coincidem, respetivamente, com os eixos Oy e Ox , são:

- (A) $a = 3$ e $b = -2$ (B) $a = 2$ e $b = 3$
(C) $a = -2$ e $b = -3$ (D) $a = 2$ e $b = -3$

10. Na Figura 3, está representada, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função h , bem como as respectivas assíntotas verticais, de equações $x = -1$, $x = 0$ e $x = 2$ e a assíntota horizontal $y = 0$. Sabe-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} h(u_n) = +\infty$.



Então a sucessão (u_n) pode ser definida por:

(A) $u_n = -\frac{1}{n+2}$ (B) $u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n+2}$

(C) $u_n = -1 + \frac{1}{n+2}$ (D) $u_n = 2n + 5$

Figura 3

Responda a um e um só dos grupos A ou B

Se responder a mais do que um destes grupos deve indicar qual deles pretende que seja classificado.

Se não der esta indicação será classificado o grupo a que responder em primeiro lugar.

GRUPO A

11. Considere as sucessões (a_n) , (b_n) e (c_n) definidas por:

$$a_n = 4n^3 - 2n^2 \qquad b_n = (1 + 2n)(5n - 2n^2 + 1) \qquad c_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1}}$$

- 11.1. Calcule o valor de $\lim (a_n \times c_n)$

- 11.2. Indique, justificando, qual o valor lógico da afirmação: $\lim a_n \neq \lim b_n$, mas $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{b_n}{a_n}$

GRUPO B

11. Considere as funções reais de variável real f , g e h definidas por:

$f(x) = 2x^2 - 8$

$g(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$

$h(x) = x^2 - 4$

11.1. Calcule, caso exista, o valor de $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{f(x)} - \frac{1}{h(x)} \right)$

11.2. Indique, justificando, qual o valor lógico da afirmação:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{g(x)} \neq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{g(x)}$$

FIM

Questão	1.1	1.2	2.	3.1	3.2	4.	5.1	5.2	6.	7.	8.	9.1	9.2	9.3	10.	Grupo A		Grupo B	
																11.1	11.2	11.1	11.2
Cotação	16	12	8	12	16	8	16	12	8	16	8	16	12	8	8	12	12	12	12



SPM@TESTES

Teste de Matemática 11.º ano

2023

11.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

(seis páginas)

VERSÃO 2

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Não é necessário o uso de máquina de calcular.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.



1. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy , uma circunferência de raio 4.

Sabe-se que:

- a reta CB é definida pela equação $x = 4$;
- o ponto C tem coordenadas $(4,0)$;
- a circunferência tem centro na origem;
- o ponto A pertence à circunferência;
- α é a inclinação da reta AB ($\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$)

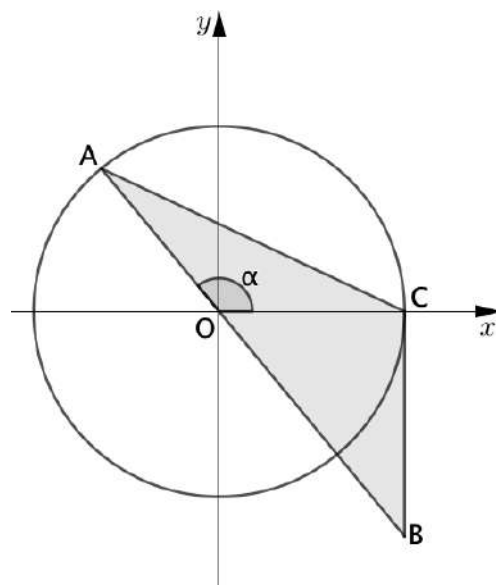


Figura 1

- 1.1. Mostre que a área do triângulo $[ABC]$, representado a sombreado, é dada em função de α por $A(\alpha) = 8(\sin \alpha - \tan \alpha)$.

- 1.2. Para um determinado valor de α o declive da reta AC é igual a $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Determine as coordenadas do ponto A para esse valor de α .

2. Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = k - 2a \sin(ax)$, com $a, k \in \mathbb{N}$.

Sendo $D'_f = [-1, 15]$ o contradomínio da função f , então o período positivo mínimo de f é:

- (A) 4π (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) 8π

3. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sin x \cos x$

3.1. Mostre que f é uma função periódica de período π

3.2. Determine os valores de $x \in [-\pi, \pi[$ tais que $f(x) = \sin^2 x$

4. Considere, num referencial o.n. xOy , uma reta r definida pela equação $y = \sqrt{5}x - 1$.

Seja t uma reta perpendicular à reta r .

Se a inclinação da reta t for α , qual é o valor de $\sin \alpha$?

(A) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$

(B) $-\frac{\sqrt{30}}{6}$

(C) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

(D) $\frac{\sqrt{30}}{6}$

5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α de equação $2x - y + z - 1 = 0$ e o ponto $A(2, -1, 8)$.

5.1. Determine o raio da superfície esférica de centro em A e tangente ao plano α

5.2. Para certos valores reais de m e n , a seguinte equação vetorial define uma reta r :

$$(x, y, z) = (n, -1, -4m) + k(3m, m, m - 6), \quad k \in \mathbb{R}$$

Determine os valores de m e n sabendo que a reta r está contida em α

6. Sabe-se que a sucessão (v_n) tem todos os termos positivos e $v_n \times (3 - v_n) \geq 0$, para todo o valor natural de n .

Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

(A) (v_n) é crescente

(B) Existe um valor natural de n para o qual $\frac{v_n}{4-v_n} < 0$

(C) (v_n) não é monótona

(D) (v_n) é limitada

7. Considere duas sucessões (a_n) e (b_n) que têm as seguintes características:

- (a_n) é uma progressão geométrica;
- (b_n) é uma progressão aritmética;
- Em ambas as sucessões o primeiro termo é igual a 3;
- $a_2 = b_4$ e $a_3 = b_8$.

Determine a razão de cada uma das progressões.

8. Considere a sucessão (u_n) definida por $u_n = \begin{cases} u_1 = 10 \\ u_n = u_{n+1} + 2, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Qual o valor de $\lim u_n$?

- (A) $-\infty$ (B) -10 (C) 0 (D) $+\infty$

9. Na Figura 2, estão representados, num referencial o.n. xOy , parte dos gráficos das funções f e g bem como o triângulo $[OAB]$.

- O ponto A é o ponto de interseção dos gráficos de f e g com abcissa positiva;
- O ponto B é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Ox ;
- A função f define-se, no respetivo domínio, por

$$f(x) = \frac{3x-4}{x-2}$$

- A função g define-se, em $\mathbb{R}$, por $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$

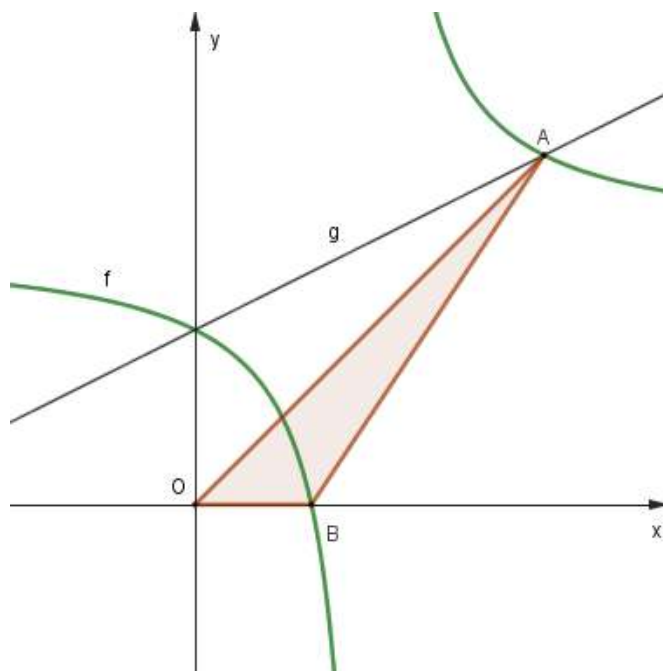


Figura 2

- 9.1. Determine as coordenadas dos pontos A e B e a área do triângulo $[OAB]$.
- 9.2. Determine o domínio da função h definida por $h(x) = \sqrt{-f(x)}$.
- 9.3. Para cada valor de a e de b tem-se a função j definida por $j(x) = f(x - a) + b$.

Os valores de a e de b para os quais as assíntotas vertical e horizontal do gráfico da função j coincidem, respetivamente, com os eixos Oy e Ox , são:

- (A) $a = 2$ e $b = 3$ (B) $a = 3$ e $b = -2$
- (C) $a = 2$ e $b = -3$ (D) $a = -2$ e $b = -3$

10. Na Figura 3, está representada, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função h , bem como as respectivas assíntotas verticais, de equações $x = -1$, $x = 0$ e $x = 2$ e a assíntota horizontal $y = 0$.

Sabe-se que $\lim h(u_n) = +\infty$.

Então a sucessão (u_n) pode ser definida por:

(A) $u_n = 2n + 5$ (B) $u_n = -1 + \frac{1}{n+2}$

(C) $u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n+2}$ (D) $u_n = -\frac{1}{n+2}$

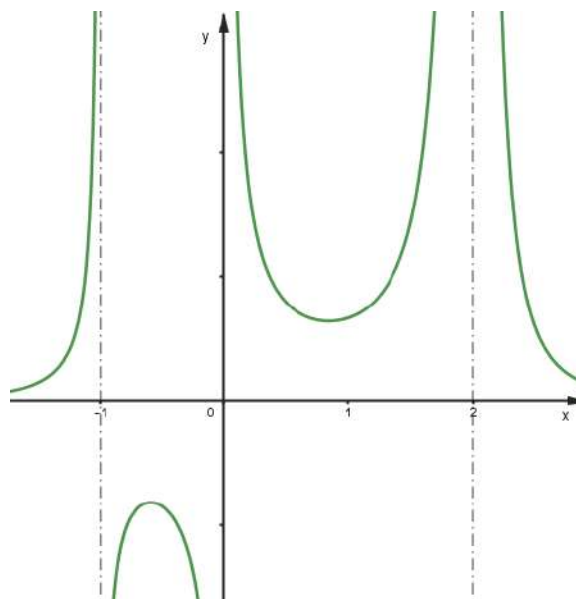


Figura 3

Responda a um e um só dos grupos A ou B

Se responder a mais do que um destes grupos deve indicar qual deles pretende que seja classificado.

Se não der esta indicação será classificado o grupo a que responder em primeiro lugar.

GRUPO A

11. Considere as sucessões (a_n) , (b_n) e (c_n) definidas por:

$$a_n = 4n^3 - 2n^2 \qquad b_n = (1 + 2n)(5n - 2n^2 + 1) \qquad c_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1}}$$

- 11.1. Calcule o valor de $\lim (a_n \times c_n)$

- 11.2. Indique, justificando, qual o valor lógico da afirmação: $\lim a_n \neq \lim b_n$, mas $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{b_n}{a_n}$

GRUPO B

11. Considere as funções reais de variável real f, g e h definidas por:

$f(x) = 2x^2 - 8$

$g(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$

$h(x) = x^2 - 4$

11.1. Calcule, caso exista, o valor de $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{f(x)} - \frac{1}{h(x)} \right)$

11.2. Indique, justificando, qual o valor lógico da afirmação:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{g(x)} \neq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{g(x)}$$

FIM

Questão	1.1	1.2	2.	3.1	3.2	4.	5.1	5.2	6.	7.	8.	9.1	9.2	9.3	10.	Grupo A		Grupo B	
																11.1	11.2	11.1	11.2
Cotação	16	12	8	12	16	8	16	12	8	16	8	16	12	8	8	12	12	12	12

**SPM@TESTES****Teste de Matemática 11.º ano****2023**

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A prova é formada por itens de escolha múltipla e de resposta restrita. Os critérios de classificação dos itens de resposta restrita estão organizados por etapas, atribuindo-se, a cada uma delas, uma pontuação.

Caso os alunos adotem um processo não previsto nos critérios específicos, cabe ao professor corretor adaptar a distribuição da cotação atribuída.

Deve ser atribuída a classificação de zero pontos nas seguintes situações:

- Caso um aluno apresente apenas o resultado final de um item, ou de uma etapa, quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações;
- Caso o aluno utilize de forma inequívoca a calculadora, uma vez que tal não é solicitado nesta prova.

Nas seguintes situações deve descontar-se um ponto às cotações estabelecidas para a etapa respetiva:

- Ocorrência de um erro de cálculo;
- Apresentação de uma resposta com o formato que não esteja de acordo com o que foi solicitado;
- Apresentação de expressões com erros do ponto de vista formal.

Caso ocorram erros que revelem desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades ou o aluno apresente uma resolução incompleta de uma etapa, deve descontar-se até metade da cotação dessa etapa.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

Questão	1.1	1.2	2.	3.1	3.2	4.	5.1	5.2	6.	7.	8.	9.1	9.2	9.3	10.	Grupo A		Grupo B	
																11.1	11.2	11.1	11.2
Cotação	16	12	8	12	16	8	16	12	8	16	8	16	12	8	8	12	12	12	12

Item	Descrição	Cotação
1.		28
1.1.		16
	Processo 1 - Indicar as coordenadas do ponto A, em função de α 2 pontos - Indicar as coordenadas do ponto B, em função de α 2 pontos - Escrever $\overline{BC}$, em função de α 3 pontos - Obter a altura do triângulo $[ABC]$, em função de α 3 pontos - Obter a expressão pretendida 6 pontos Processo 2 - Indicar as coordenadas do ponto A, em função de α 2 pontos - Indicar as coordenadas do ponto B, em função de α 2 pontos - Escrever $\overline{BC}$, em função de α 3 pontos - Obter a área do triângulo $[OBC]$, em função de α 3 pontos - Obter a área do triângulo $[AOC]$, em função de α 3 pontos - Obter a expressão pretendida 3 pontos	
1.2.		12
	Processo 1 - Determinar a inclinação da reta $AC \left(\frac{5\pi}{6} \right)$ 3 pontos - Justificar que o triângulo $[AOC]$ é isósceles 3 pontos - Concluir que $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ 3 pontos - Determinar as coordenadas do ponto $A(-2, 2\sqrt{3})$ 3 pontos Processo 2 - Determinar a equação da reta $AC \left(y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{3} \right)$ 4 pontos - Determinar a interseção da reta AC com a circunferência..... 3 pontos - Obter a abcissa do ponto $A (x_A = -2)$ 2 pontos - Determinar as coordenadas do ponto $A(-2, 2\sqrt{3})$ 3 pontos	
2.	Versão 1 – (B); Versão 2 – (C) _____	8
3.		28
3.1.		12
	- Referir a noção de função periódica de período π 2 pontos - Determinar $f(x + \pi)$ 8 pontos	

		• Concluir que $f(x + \pi) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$..... 1 ponto • Concluir que f é uma função periódica de período π 1 ponto	
	3.2.		16
		• Resolver a equação $f(x) = \sin^2 x$ 12 pontos • Escrever $\sin x \cos x - \sin^2 x = 0$ 1 ponto • Escrever $\sin x (\cos x - \sin x) = 0$ 1 ponto • Escrever $\sin x = 0 \vee \cos x - \sin x = 0$ 1 ponto • Escrever $\sin x = 0 \vee \cos x = \sin x$ 1 ponto • Obter $x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (ou equivalente) . 8 pontos • Concluir que os valores de $x \in [-\pi, \pi[$ que satisfazem a equação são $-\pi, -\frac{3\pi}{4}, 0$ e $\frac{\pi}{4}$ 4 pontos	
4.		Versão 1 – (A); Versão 2 – (C)	8
5.			
	5.1		16
		Designemos por s a reta que passa no ponto A e é perpendicular ao plano α. • Escrever $s: (x, y, z) = (2, -1, 8) + k(2, -1, 1), k \in \mathbb{R}$ 4 pontos • Escrever as coordenadas de um ponto genérico da reta s, em função de k..... 1 ponto • Obter uma equação na variável k, substituindo x, y e z na equação do plano α pelas coordenadas de um ponto genérico da reta s e obter o valor de k (-2) 5 pontos • Obter as coordenadas do ponto de interseção da reta s com o plano α ($(-2, 1, 6)$)..... 3 pontos • Determinar o raio da superfície esférica ($2\sqrt{6}$) 3 pontos	
	5.2		12
		Seja $\vec{r}(3m, m, m - 6)$ um vetor diretor da reta r e $\vec{n}(2, -1, 1)$ um vetor normal ao plano α. • Concluir que como a reta r está contida no plano α então $\vec{r} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{r} \cdot \vec{n} = 0$ e qualquer ponto da reta r pertence ao plano α 2 pontos • Determinar $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$ e obter $m = 1$ 5 pontos • Substituir o ponto $(n, -1, -4m)$ no plano α e obter $n = 2$.. 5 pontos	
6.		Versão 1 – (B); Versão 2 – (D) _____	8
7.		_____	16
		A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas: • Exprimir a_2 e a_3 em função da razão r da progressão geométrica 3 pontos • Exprimir b_4 e b_8 em função da razão s da progressão aritmética 3 pontos	

		• Escrever o sistema de equações que traduz o problema $\begin{cases} r = 1 + s \\ 3r^2 = 3 + 7s \end{cases}$ ou equivalente 2 pontos • Resolver o sistema 6 pontos • Responder razão da progressão geométrica $= \frac{4}{3}$ e razão da progressão aritmética $= \frac{1}{3}$ 2 pontos	
8.		Versão 1 – (D); Versão 2 (A) _____	8
9.			36
9.1			16
		• Escrever e resolver a equação $f(x) = 0$ 4 pontos • Indicar as coordenadas do ponto $B\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ 1 ponto • Escrever e resolver a equação $f(x) = g(x)$ 6 pontos • Indicar as coordenadas do ponto $A(4,4)$ 2 pontos • Calcular a área do triângulo $[OBA]$ $\left(\frac{8}{3}\right)$ 3 pontos	
9.2		• Definir o domínio da função h por uma condição 2 pontos • Resolver a condição $-f(x) \geq 0$ no domínio de h 8 pontos • Escrever o domínio na forma de intervalo $\left(\left[\frac{4}{3}, 2\right]\right)$ 2 pontos	12
9.3		Versão 1 – (C); Versão 2 – (D)	8
10.		Versão 1 – (B); Versão 2 – (C)	8
		GRUPO A	
11.			24
11.1		• Escrever $\lim(a_n \times c_n) = \lim \frac{4n^3 - 2n^2}{\sqrt{4n^2 - 1}}$ 1 ponto • Reconhecer a existência de uma indeterminação 2 pontos • Levantar a indeterminação por um dos dois processos possíveis ○ Processo 1 _____ • Escrever $\lim \frac{4n^3 - 2n^2}{\sqrt{4n^2 - 1}} = \lim \frac{\sqrt{(4n^3 - 2n^2)^2}}{\sqrt{4n^2 - 1}}$ 2 pontos • Escrever $\lim \frac{\sqrt{(4n^3 - 2n^2)^2}}{\sqrt{4n^2 - 1}} = \lim \sqrt{\frac{16n^6 - 16n^5 + 4n^4}{4n^2 - 1}}$ 2 pontos • Escrever $\lim \sqrt{\frac{16n^6 - 16n^5 + 4n^4}{4n^2 - 1}} = \sqrt{\lim \frac{16n^6}{4n^2}}$ 2 pontos • Escrever $\sqrt{\lim \frac{16n^6}{4n^2}} = \sqrt{\lim(4n^4)} = \sqrt{+\infty} = +\infty$..1 ponto ○ Processo 2 _____ • Escrever $\lim \frac{4n^3 - 2n^2}{\sqrt{4n^2 - 1}} = \lim \frac{n^2(4n - 2)}{\sqrt{n^2(4 - \frac{1}{n^2})}}$ 2 pontos	12

		• Escrever $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(4n-2)}{\sqrt{n^2(4-\frac{1}{n^2})}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(4n-2)}{n\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}} \dots\dots\dots 2 \text{ pontos}$ • Escrever $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(4n-2)}{n\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(4n-2)}{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}} \dots\dots\dots 1 \text{ ponto}$ • Escrever $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(4n-2)}{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}} = \frac{+\infty}{2} \dots\dots\dots 2 \text{ pontos}$ • Obter o valor $\lim(a_n \times c_n) = +\infty \dots\dots\dots 2 \text{ pontos}$	
	11.2	• Escrever $\lim(a_n) = \lim(4n^3) = +\infty \dots\dots\dots 2 \text{ pontos}$ • Escrever $\lim(b_n) = \lim(2n) \times \lim(-2n^2) \dots\dots\dots 2 \text{ pontos}$ • Concluir que $\lim(b_n) = -\infty \dots\dots\dots 1 \text{ ponto}$ • Indicar o valor lógico da afirmação $\lim a_n \neq \lim b_n \dots\dots\dots 1 \text{ ponto}$ • Indicar que $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{4n^3}{-4n^3} \dots\dots\dots 2 \text{ pontos}$ • Concluir que $\lim \frac{a_n}{b_n} = -1 \dots\dots\dots 1 \text{ ponto}$ • Concluir que $\lim \frac{b_n}{a_n} = -1 \dots\dots\dots 2 \text{ pontos}$ • Indicar o valor lógico da afirmação: $\lim a_n \neq \lim b_n$ mas $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{b_n}{a_n}$ (verdadeiro)..... 1 ponto	12
		GRUPO B	
	11.		
	11.1	• Escrever $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{f(x)} - \frac{1}{h(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{2x^2-8} - \frac{1}{x^2-4} \right) \dots\dots\dots 1 \text{ ponto}$ • Reconhecer a existência de uma indeterminação 2 pontos • Escrever $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{2x^2-8} - \frac{1}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2}{2x^2-8} \right) \dots\dots\dots 3 \text{ pontos}$ • Escrever $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{2x^2-8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{2(x-2)(x+2)} \dots\dots\dots 3 \text{ pontos}$ • Escrever $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{2(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2(x+2)} = \frac{1}{8} \dots\dots\dots 3 \text{ pontos}$	12
	11.2	Processo 1 • Escrever $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-4}{\sqrt{4x^2-1}}$ e reconhecer a existência de uma indeterminação 1 ponto • Escrever $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-4}{\sqrt{4x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x-\frac{4}{x})}{\sqrt{x^2(4-\frac{1}{x^2})}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x-\frac{4}{x})}{-x\sqrt{(4-\frac{1}{x^2})}} \dots\dots\dots 3 \text{ pontos}$ • Escrever $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x-\frac{4}{x})}{-x\sqrt{(4-\frac{1}{x^2})}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-\frac{4}{x}}{-\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}} = \frac{-\infty}{-2} = +\infty \dots\dots\dots 2 \text{ pontos}$ • Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-4}{\sqrt{4x^2-1}}$ e reconhecer a existência de uma indeterminação 1 ponto • Escrever	12

	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-4}{\sqrt{4x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x-\frac{4}{x})}{\sqrt{x^2(4-\frac{1}{x^2})}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x-\frac{4}{x})}{x\sqrt{(4-\frac{1}{x^2})}} \dots\dots\dots 2 \text{ pontos}$ • Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x-\frac{4}{x})}{x\sqrt{(4-\frac{1}{x^2})}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-\frac{4}{x})}{\sqrt{(4-\frac{1}{x^2})}} = \frac{+\infty}{2} = +\infty \dots\dots\dots 2 \text{ pontos}$ • Indicar o valor lógico da afirmação (falso) 1 ponto Processo 2 • Escrever $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-4}{\sqrt{4x^2-1}}$ e reconhecer a existência de uma indeterminação 1 ponto • Escrever $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-4}{\sqrt{4x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{(x^2-4)^2}}{\sqrt{4x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{(x^2-4)^2}{4x^2-1}} \dots\dots\dots 3 \text{ pontos}$ • Escrever $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{(x^2-4)^2}{4x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^4-8x^2+16}{4x^2-1}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4-8x^2+16}{4x^2-1}} \dots\dots\dots 2 \text{ pontos}$ • Escrever $\sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4-8x^2+16}{4x^2-1}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{4x^2}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{4}} = +\infty \dots\dots\dots 2 \text{ pontos}$ • Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-4}{\sqrt{4x^2-1}}$ e reconhecer a existência de uma indeterminação 1 ponto • Escrever e concluir $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-4}{\sqrt{4x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{(x^2-4)^2}}{\sqrt{4x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{(x^2-4)^2}}{\sqrt{4x^2-1}} = +\infty \dots\dots\dots 2 \text{ pontos}$ • Indicar o valor lógico da afirmação (falso) 1 ponto Nota: Se o aluno começar por calcular o limite quando x tende para $+\infty$, adapta-se a distribuição da cotação.	



Prova de Matemática A

Ensino Secundário | maio de 2023

12.º Ano de Escolaridade

Duração da Prova: 120 minutos | Tolerância: 30 minutos

8 páginas

VERSÃO 1

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.



Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos,

do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfície

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base;
 g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Complexos

$$(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

As raízes índice n de $z = r e^{i\theta}$ são dadas por:

$$\sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} \quad (k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

3. Na **Figura 2**, está representada a circunferência trigonométrica e o retângulo $[OABC]$.

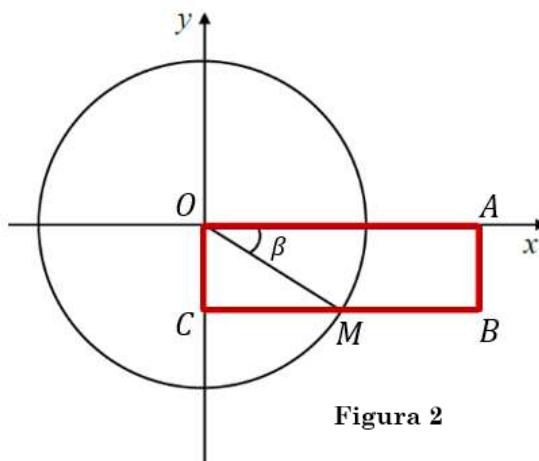


Figura 2

Considere um ponto M que se desloca ao longo da circunferência, no quarto quadrante.

O ponto A desloca-se ao longo do eixo Ox , de tal modo que M é sempre o ponto médio do segmento $[CB]$.

Seja β a amplitude, em radianos, do ângulo orientado AOM .

Mostre que a **área** do quadrilátero $[OABM]$, é dada, em função de β , por:

$$-\frac{3}{4}\sin(2\beta)$$

4. Considere os vetores $\vec{u}(\sin(2x), \cos(2x))$ e $\vec{v}(2\cos(2x), 4\sin(2x))$, $x \in \mathbb{R}$.

Seja g uma função real, definida em $\mathbb{R}$, por:

$$g(x) = 3\sin(4x)$$

Sem recorrer à calculadora, a não ser para eventuais cálculos numéricos, resolva os três itens seguintes:

- 4.1. Mostre que $g(x) = \vec{u} \cdot \vec{v}$ e determine, em $\left]-\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{6}\right[$, o conjunto solução da equação $g(x) = \frac{3}{2}$.

- 4.2. Seja t a reta tangente ao gráfico de g , no ponto P de abscissa $\frac{\pi}{12}$

Escreva uma equação vetorial da reta r , perpendicular à reta t , e que contém o ponto P

- 4.3. Mostre, recorrendo ao *Teorema de Bolzano – Cauchy*, que os gráficos de g e de g' se interseçam, em pelo menos, um ponto de abscissa compreendida entre 0 e $\frac{\pi}{6}$

5. Considere as seguintes igualdades:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(kx)}{5x} \quad \text{e} \quad B = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\ln 3}{n}\right)^{2n}, \quad \text{onde } k \in \mathbb{R}$$

Sabendo que $A = B$, o valor de k é:

- (A) 40 (B) $5 \ln 3$ (C) $10 \ln 3$ (D) 45

6. Considere a função h , definida por:

$$h(x) = \ln(e^{4x} - 2) - 2x$$

- 6.1. Determine, caso exista(m), o(s) zero(s) de h .
- 6.2. O gráfico da função h admite uma assíntota oblíqua, quando $x \rightarrow +\infty$.
Determine a equação reduzida dessa assíntota.
- 6.3. O gráfico de h' tem um ponto P cuja ordenada é cubo da abcissa.

Determine, com aproximação às décimas, o valor da medida da distância do ponto P à origem do referencial.

Sabe-se que a utilização das **capacidades gráficas da sua calculadora** lhe permite, neste caso, determinar valores aproximados das coordenadas do ponto P , mas não se pede para justificar este facto.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial
- indicar as coordenadas do ponto P , com aproximação às **milésimas**
- indicar o valor da medida da distância do ponto P à origem do referencial, com aproximação às **décimas**

7. Considere a função g , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{8\sqrt{x+3} - 16}{x-1}, & 0 < x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ \frac{4x - 4x^2}{1 - e^{2x-2}}, & x > 1 \end{cases}$$

Averigue, **sem recorrer à calculadora**, se a função g é contínua em $x = 1$.

8. Seja f uma função derivável em $D =]-\infty, -4[\cup]2, +\infty[$ e tal que

$$\forall x \in D, f'(x) > 0$$

Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?

- (A) f é crescente em D
- (B) f não tem extremos relativos em D
- (C) a reta de equação $y = -2x$ é tangente ao gráfico de f num ponto de abcissa $a \in D$
- (D) o gráfico de f tem duas retas tangentes horizontais

9. Seja (u_n) a sucessão definida por:

$$u_n = \log 2 + \log 4 + \log 8 + \dots + \log 2^{n-1} + \log 2^n$$

Mostre que:

$$u_n = \frac{n^2 + n}{2} \times \log 2$$

Responda a um e um só dos grupos A ou B

Se responder a mais do que um destes grupos deve indicar qual deles pretende que seja classificado. Se não der esta indicação será classificado o grupo a que responder em primeiro lugar.

Grupo A

10. Seja $(E, \mathcal{P}(E), P)$ um espaço de probabilidades e A e $B \in \mathcal{P}(E)$ acontecimentos possíveis, tais que:

- $P(A \cap \bar{B}) = 0,25$
- $P(\overline{A \cup B}) = k$
- $P(B|A) = 0,4$

Determine o valor de $P(A) + P(B)$ em função de k .

11. De uma linha do *Triângulo de Pascal* sabe-se que tem m elementos ($m > 1$).

Escolhem-se, ao acaso, dois elementos.

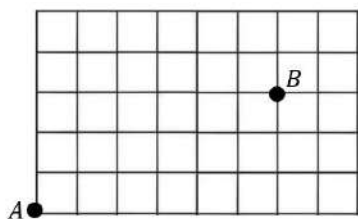
Sabe-se que a probabilidade do produto dos dois elementos ser $m - 1$, é igual a $\frac{1}{75}$

Determine o valor de m .

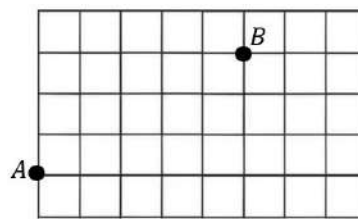
12. Sabe-se que o número de caminhos possíveis de A para B (deslocando-se apenas da esquerda para a direita e de baixo para cima) é 165.

Em qual das seguintes figuras está representada uma grelha que ilustre esta situação?

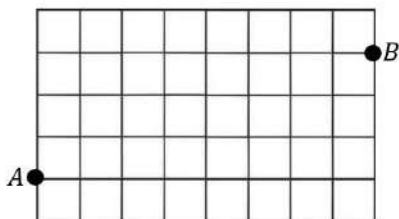
(A)



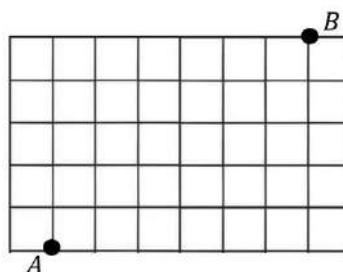
(B)



(C)



(D)



Grupo B

10. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Considere os números $z_1 = 1 - 2i$ e $z_2 = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$

10.1. Determine os valores reais de a e b de modo que $z_1 \times z_2$ seja um número real e $1 + \frac{z_2}{z_1}$ seja um imaginário puro.

10.2. Seja $w = z_1 - 3$.

Calcule as raízes quadradas de w , apresentando-as na forma trigonométrica.

11. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere os números:

$$z = e^{i\theta} \quad \text{e} \quad w = 2 \sin^2 \theta \times e^{i\theta}$$

Qual das seguintes expressões representa o número $w - z$?

(A) $\sin(2\theta) e^{i(-\theta)}$

(B) $\cos(2\theta) e^{i(-\theta)}$

(C) $\cos(2\theta) e^{i(\theta+\pi)}$

(D) $\sin(2\theta) e^{i(\theta+\pi)}$

Item											
Cotação (em pontos)											
1.1.	1.2.	2	3	4.1.	4.2.	4.3.	5	6.1.	6.2.	T O T A L	200 pontos
10	14	10	12	14	12	12	10	12	12		
6.3.	7	8	9	GRUPO A			GRUPO B				
				10	11	12	10.1.	10.2.	11		
12	14	10	12	12	12	10	12	12	10		

Prova de Matemática A

Ensino Secundário | maio de 2023

12.º Ano de Escolaridade

Duração da Prova: 120 minutos | Tolerância: 30 minutos

8 páginas

VERSÃO 2

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.



Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos,

do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfície

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base;
 g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Complexos

$$(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

As raízes índice n de $z = r e^{i\theta}$ são dadas por:

$$\sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} \quad (k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

1. Na **Figura 1** está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[OABCDEFG]$.

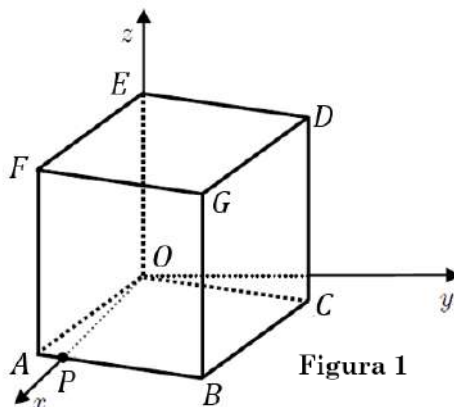


Figura 1

Sabe-se que:

- a base $[OABC]$ está contida no plano xOy
- o ponto P pertence ao eixo Ox e à aresta $[AB]$
- o ponto C tem coordenadas $(1, 4, 0)$
- o vetor $\overrightarrow{PC}$ tem coordenadas $\left(-\frac{10}{3}, 4, 0\right)$

- 1.1. Qual das equações seguintes, define o plano perpendicular à reta AB e que contém o ponto $Q(-4, 1, 2)$?

(A) $x + 4y + 2 = 0$

(B) $x - 4y + 4z = 0$

(C) $x + 4y = 0$

(D) $x - 4y + 4 = 0$

- 1.2. Determine a amplitude do ângulo POD .

Apresente a amplitude arredondada à décima de grau.

2. Seja f uma função real, ímpar e diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2f(x) + 2f(3)}{x^2 + 3x} = \frac{1}{6}$$

Qual o valor de $f'(-3)$?

(A) 4

(B) $\frac{1}{4}$

(C) $-\frac{1}{4}$

(D) -4

3. Na **Figura 2**, está representada a circunferência trigonométrica e o retângulo $[OABC]$.

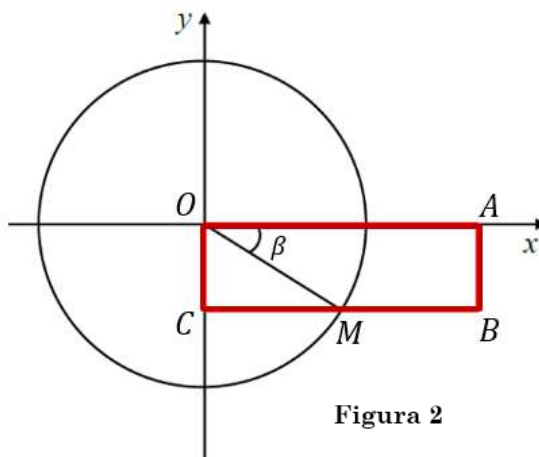


Figura 2

Considere um ponto M que se desloca ao longo da circunferência, no quarto quadrante.

O ponto A desloca-se ao longo do eixo Ox , de tal modo que M é sempre o ponto médio do segmento $[CB]$.

Seja β a amplitude, em radianos, do ângulo orientado AOM .

Mostre que a **área** do quadrilátero $[OABM]$, é dado, em função de β , por:

$$-\frac{3}{4}\sin(2\beta)$$

4. Considere os vetores $\vec{u}(\sin(2x), \cos(2x))$ e $\vec{v}(2\cos(2x), 4\sin(2x))$, $x \in \mathbb{R}$.

Seja g uma função real, definida em $\mathbb{R}$, por:

$$g(x) = 3\sin(4x)$$

Sem recorrer à calculadora, a não ser para eventuais cálculos numéricos, resolva os três itens seguintes:

- 4.1. Mostre que $g(x) = \vec{u} \cdot \vec{v}$ e determine, em $\left]-\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{6}\right[$, o conjunto solução da equação $g(x) = \frac{3}{2}$.

- 4.2. Seja t a reta tangente ao gráfico de g , no ponto P de abscissa $\frac{\pi}{12}$

Escreva uma equação vetorial da reta r , perpendicular à reta t , e que contém o ponto P

- 4.3. Mostre, recorrendo ao *Teorema de Bolzano – Cauchy*, que os gráficos de g e de g' se interseitam, em pelo menos, um ponto de abscissa compreendida entre 0 e $\frac{\pi}{6}$

5. Considere as seguintes igualdades:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(kx)}{5x} \quad \text{e} \quad B = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\ln 3}{n}\right)^{2n}, \quad \text{onde } k \in \mathbb{R}$$

Sabendo que $A = B$, o valor de k é:

- (A) 40 (B) 45 (C) $10 \ln 3$ (D) $5 \ln 3$

6. Considere a função h , definida por:

$$h(x) = \ln(e^{4x} - 2) - 2x$$

- 6.1. Determine, caso exista(m), o(s) zero(s) de h .
- 6.2. O gráfico da função h admite uma assíntota oblíqua, quando $x \rightarrow +\infty$.
Determine a equação reduzida dessa assíntota.
- 6.3. O gráfico de h' tem um ponto P cuja ordenada é cubo da abcissa.

Determine, com aproximação às décimas, o valor da medida da distância do ponto P à origem do referencial.

Sabe-se que a utilização das **capacidades gráficas da sua calculadora** lhe permite, neste caso, determinar valores aproximados das coordenadas do ponto P , mas não se pede para justificar este facto.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial
- indicar as coordenadas do ponto P , com aproximação às **milésimas**
- indicar o valor da medida da distância do ponto P à origem do referencial, com aproximação às **décimas**

7. Considere a função g , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{8\sqrt{x+3} - 16}{x-1}, & 0 < x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ \frac{4x - 4x^2}{1 - e^{2x-2}}, & x > 1 \end{cases}$$

Averigue, **sem recorrer à calculadora**, se a função g é contínua em $x = 1$.

8. Seja f uma função derivável em $D =]-\infty, -4[\cup]2, +\infty[$ e tal que

$$\forall x \in D, f'(x) > 0$$

Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?

- (A) f não tem extremos relativos em D
- (B) f é crescente em D
- (C) o gráfico de f tem duas retas tangentes horizontais
- (D) a reta de equação $y = -2x$ é tangente ao gráfico de f num ponto de abcissa $a \in D$

9. Seja (u_n) a sucessão definida por:

$$u_n = \log 2 + \log 4 + \log 8 + \dots + \log 2^{n-1} + \log 2^n$$

Mostre que:

$$u_n = \frac{n^2 + n}{2} \times \log 2$$

Responda a um e um só dos grupos A ou B

Se responder a mais do que um destes grupos deve indicar qual deles pretende que seja classificado. Se não der esta indicação será classificado o grupo a que responder em primeiro lugar.

Grupo A

10. Seja $(E, \mathcal{P}(E), P)$ um espaço de probabilidades e A e $B \in \mathcal{P}(E)$ acontecimentos possíveis, tais que:

- $P(A \cap \bar{B}) = 0,25$
- $P(\overline{A \cup B}) = k$
- $P(B|A) = 0,4$

Determine o valor de $P(A) + P(B)$ em função de k .

11. De uma linha do *Triângulo de Pascal* sabe-se que tem m elementos ($m > 1$).

Escolhem-se, ao acaso, dois elementos.

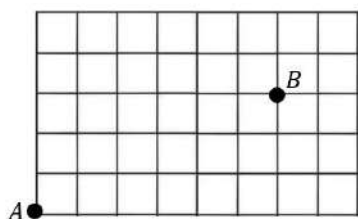
Sabe-se que a probabilidade do produto dos dois elementos ser $m - 1$, é igual a $\frac{1}{75}$

Determine o valor de m .

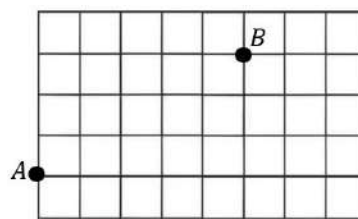
12. Sabe-se que o número de caminhos possíveis de A para B (deslocando-se apenas da esquerda para a direita e de baixo para cima) é 165.

Em qual das seguintes figuras está representada uma grelha que ilustre esta situação?

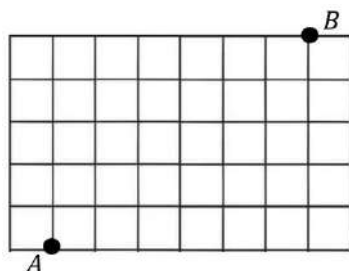
(A)



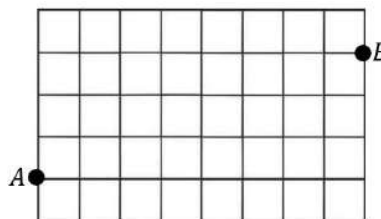
(B)



(C)



(D)



Grupo B

10. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Considere os números $z_1 = 1 - 2i$ e $z_2 = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$

10.1. Determine os valores reais de a e b de modo que $z_1 \times z_2$ seja um número real e $1 + \frac{z_2}{z_1}$ seja um imaginário puro.

10.2. Seja $w = z_1 - 3$.

Calcule as raízes quadradas de w , apresentando-as na forma trigonométrica.

11. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere os números:

$$z = e^{i\theta} \quad \text{e} \quad w = 2 \sin^2 \theta \times e^{i\theta}$$

Qual das seguintes expressões representa o número $w - z$?

(A) $\sin(2\theta) e^{i(-\theta)}$

(B) $\cos(2\theta) e^{i(-\theta)}$

(C) $\sin(2\theta) e^{i(\theta+\pi)}$

(D) $\cos(2\theta) e^{i(\theta+\pi)}$

Item											
Cotação (em pontos)											
1.1.	1.2.	2	3	4.1.	4.2.	4.3.	5	6.1.	6.2.	T O T A L	200 pontos
10	14	10	12	14	12	12	10	12	12		
6.3.	7	8	9	GRUPO A			GRUPO B				
				10	11	12	10.1.	10.2.	11		
12	14	10	12	12	12	10	12	12	10		



Teste de Matemática 12.º ANO

2023

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A prova é formada por itens de escolha múltipla e de resposta restrita. Os critérios de classificação dos itens de resposta restrita estão organizados por etapas, atribuindo-se, a cada uma delas, uma pontuação.

Caso os alunos adotem um processo não previsto nos critérios específicos, cabe ao professor corretor adaptar a distribuição da cotação atribuída.

Deve ser atribuída a classificação de zero quando um aluno apresente apenas o resultado final de um item, ou de uma etapa, quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações;

Nas seguintes situações deve descontar-se um ponto às cotações estabelecidas para a etapa respetiva:

- Ocorrência de um erro de cálculo;
- Apresentação de uma resposta com o formato que não esteja de acordo com o que foi solicitado;
- Apresentação de expressões com erros do ponto de vista formal.

Caso ocorram erros que revelem desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades ou o aluno apresente uma resolução incompleta de uma etapa, deve descontar-se até metade da cotação dessa etapa.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

															Grupo A			Grupo B			
Item	1.1	1.2	2	3	4.1	4.2	4.3	5	6.1	6.2	6.3	7	8	9	10	11	12	10.1	10.2	11	Total
Cotação	10	14	10	12	14	12	12	10	12	12	14	12	10	12	12	12	10	12	12	10	200

QUESTÃO	DESCRIÇÃO		COTAÇÃO
1.			24
1.1.	Versão 1 (A)	Versão 2 (C)	10
1.2	- Determinar as coordenadas do ponto $P(\frac{13}{3}, 0, 0)$ - Determinar as coordenadas do ponto $D(1, 4, \sqrt{17})$ - Determinar $\overrightarrow{OP}$ - Determinar $\overrightarrow{OD}$ - Determinar $\ \overrightarrow{OP}\$ e $\ \overrightarrow{OD}\$ - Calcular $\widehat{POD}$ ($80,1^\circ$)	3 3 1 1 2 4	14
2.	Versão 1 (B)	Versão 2 (C)	10
3.			12
	- Identificar $\overline{CB} = 2 \cos \beta$ ou $\overline{OA} = 2 \cos \beta$ - Identificar $\overline{AB} = -\sin \beta$ ou $\overline{OC} = -\sin \beta$ - Identificar $\overline{CM} = \cos \beta$ ou $\overline{MB} = \cos \beta$ 1.º Processo - Escrever $A_{[OABM]} = \frac{2 \cos \beta + \cos \beta}{2} \times (-\sin \beta)$ ou equivalente - Simplificar a expressão - Usar a fórmula da duplicação do seno - Concluir que $A_{[OABM]} = -\frac{3}{4} \sin(2\beta)$ 2.º Processo - Escrever $A_{[OABC]} = 2 \cos \beta \times (-\sin \beta)$ ou equivalente - Escrever $A_{[OMC]} = \frac{\cos \beta \times (-\sin \beta)}{2}$ ou equivalente - Fazer a diferença das duas áreas - Simplificar a expressão - Usar a fórmula da duplicação do seno - Concluir que $A = -\frac{3}{4} \sin(2\beta)$	1 1 1 2 2 3 2 1 1 1 1 3 2	
4.			38
4.1	- Escrever $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\sin(2x); \cos(2x)) \cdot (2 \cos(2x); 4 \sin(2x))$ - Escrever $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot \sin(2x) \cdot \cos(2x) + 4 \cdot \cos(2x) \cdot \sin(2x)$ - Escrever $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sin(4x) + 2 \sin(4x)$ - Concluir que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \sin(4x)$ - Escrever $3 \sin(4x) = \frac{3}{2}$	1 1 3 1 1	14

		- Simplificar a expressão escrevendo $\sin(4x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ou equivalente - Resolver a equação em $\mathbb{R}$ - Determinar as soluções no intervalo pedido - Concluir que as soluções são $\frac{-7\pi}{24}$ e $\frac{\pi}{24}$	2 3 1 1		
	4.2.	- Determinar $g'(x)$ - Calcular $m_r = g'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 6$ - Determinar as coordenadas do ponto $P\left(\frac{\pi}{12}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ - Compreender que a reta pedida tem declive igual a $-\frac{1}{6}$ e escrever a equação pedida $(x, y) = \left(\frac{\pi}{12}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + k(-6, 1), \quad k \in \mathbb{R}$, por exemplo	3 3 2 4	12	
	4.3.	- Escrever $g(x) = g'(x) \Leftrightarrow g(x) - g'(x) = 0$ ou equivalente - Identificar $g(x) - g'(x)$ como uma outra função, digamos h - Provar que h é contínua em $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ - Calcular $h(0)$ e $h\left(\frac{\pi}{6}\right)$ e concluir que $h(0) \times h\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0$ - Concluir através do Teorema de Bolzano-Cauchy que $\exists c \in \left]0; \frac{\pi}{6}\right[: h(c) = 0$ - Concluir o pretendido $\exists c \in \left]0; \frac{\pi}{6}\right[: g(c) = g'(c)$	1 1 4 4 1 1	12	
5.		Versão 1 (D)	Versão 2 (B)		10
6.					38
	6.1	- Determinar o domínio de $h\left(D_h = \left[\frac{\ln 2}{4}; +\infty\right)\right)$ 1.º Processo - Escrever $h(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(e^{4x} - 2) - 2x = 0$ - Escrever $\ln(e^{4x} - 2) - 2x = 0 \Leftrightarrow \ln(e^{4x} - 2) - \ln(e^{2x}) = 0$ - Escrever $\ln(e^{4x} - 2) - \ln(2x) = 0 \Leftrightarrow \ln(e^{4x} - 2) = \ln(e^{2x})$ - Escrever $e^{4x} - 2 = e^{2x}$ ou equivalente - Escrever $y = e^{2x}$ e resolver a equação de 2.º grau $y^2 - y - 2 = 0$ ($y = 2 \vee y = -1$) - Resolver $e^{2x} = 2 \vee e^{2x} = -1$, indicando que $e^{2x} = -1$ é impossível pois $e^{2x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ - Verificar que a única solução $\left(\frac{\ln 2}{2}\right)$ pertence ao domínio e concluir que o único zero de h é $\frac{\ln 2}{2}$	2 1 2 1 1 2 2 1	12	

		2.º Processo - Escrever $h(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(e^{4x} - 2) - 2x = 0$ - Escrever $\ln(e^{4x} - 2) - 2x = 0 \Leftrightarrow \ln(e^{4x} - 2) - \ln(e^{2x}) = 0$ - Escrever $\ln\left(\frac{e^{4x}-2}{e^{2x}}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{4x}-2}{e^{2x}} = 1$ - Escrever $\frac{e^{4x}-2}{e^{2x}} = 1 \Leftrightarrow e^{4x} - 2 = e^{2x}$ ou equivalente, pois $e^{2x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ - Escrever $y = e^{2x}$ e resolver a equação de 2.º grau $y^2 - y - 2 = 0$ ($y = 2 \vee y = -1$) - Resolver $e^{2x} = 2 \vee e^{2x} = -1$, indicando que $e^{2x} = -1$ é impossível pois $e^{2x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ - Verificar que a única solução $\left(\frac{\ln 2}{2}\right)$ pertence ao domínio e concluir que o único zero de h é $\frac{\ln 2}{2}$ 3.º Processo - Escrever $h(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(e^{4x} - 2) - 2x = 0$ - Escrever $\ln(e^{4x} - 2) - 2x = 0 \Leftrightarrow \ln(e^{4x} - 2) - \ln(e^{2x}) = 0$ - Escrever $\ln\left(\frac{e^{4x}-2}{e^{2x}}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{4x}-2}{e^{2x}} = 1$ - Escrever $\frac{e^{4x}-2}{e^{2x}} = 1 \Leftrightarrow \frac{e^{4x}-2}{e^{2x}} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{4x}-2-e^{2x}}{e^{2x}} = 0$ ou equivalente - Escrever $e^{4x} - 2 - e^{2x} = 0 \wedge e^{2x} \neq 0$ (Condição universal pois $e^{2x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$) - Escrever $y = e^{2x}$ e resolver a equação de 2.º grau $y^2 - y - 2 = 0$ ($y = 2 \vee y = -1$) - Resolver $e^{2x} = 2 \vee e^{2x} = -1$, indicando que $e^{2x} = -1$ é impossível pois $e^{2x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ - Verificar que a única solução $\left(\frac{\ln 2}{2}\right)$ pertence ao domínio e concluir que o único zero de h é $\frac{\ln 2}{2}$	1 1 2 2 1 1 2 1 1 2		
	6.2.	- Escrever $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{4x}-2)-2x}{x}$ - Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{4x}-2)-2x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{4x}-2)}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x}$ - Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{4x}-2)}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{4x}(1-\frac{2}{e^{4x}}))}{x} - 2$ - Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{4x}(1-\frac{2}{e^{4x}}))}{x} - 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{4x}) + \ln(1-\frac{2}{e^{4x}})}{x} - 2$ - Concluir que $m = 4 + 0 - 2 = 2$ - Escrever $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln[(e^{4x} - 2) - 4x]$ - Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^{4x} - 2) - 4x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{e^{4x}-2}{e^{4x}}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 - \frac{2}{e^{4x}}\right)$ - Concluir que $b = \ln 1 = 0$ - Escrever que a assíntota oblíqua ao gráfico de h é dada pela reta de equação $y = 2x$	1 1 2 2 1 1 2 1 1	12	

	6.3.	- Determinar $h'(x)$ ($h'(x) = \frac{4e^{4x}}{e^{4x}-2} - 2$) - Escrever a equação $h'(x) = x^3 \Leftrightarrow \frac{4e^{4x}}{e^{4x}-2} - 2 = x^3$ ou equivalente - Desenhar o gráfico das duas funções e determinar a sua interseção NOTA: Se o domínio não estiver explícito no gráfico, esta etapa terá no máximo 2 pontos - Escrever as coordenadas do ponto P com aproximação às milésimas [$P(1,270; 2,050)$] - Calcular a distância de P à origem do referencial (2,4)	3 3 3 1 2	12	
7.					14
		- Escrever $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{8(\sqrt{x+3}-2)}{x-1}$ ou equivalente - Escrever $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{8(\sqrt{x+3}-2)}{x-1} = 8 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$ ou equivalente - Escrever $8 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = 8 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(\sqrt{x+3}+2)}$ ou equivalente - Concluir que $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 2$ - Escrever $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x(1-x)}{1-e^{2(x-1)}}$ ou equivalente - Escrever $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x(1-x)}{1-e^{2(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-4x(x-1)}{-(e^{2(x-1)}-1)}$ ou equivalente - Mudar a variável e escrever $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-4x(x-1)}{-(e^{2(x-1)}-1)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{4y(y+1)}{(e^{2y}-1)}$ ou equivalente - Escrever $\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{4y(y+1)}{(e^{2y}-1)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{2y}{(e^{2y}-1)} \times \lim_{y \rightarrow 0^+} 2(y+1)$ ou equivalente - Mudar novamente a variável e escrever $\frac{1}{\lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{(e^z-1)}{z}} \times 2$ ou equivalente - Concluir que $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 2$ - Concluir que, uma vez que $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 2$, então g é contínua em $x = 1$	1 2 1 1 1 1 1 2 1 1 2		
8.		Versão 1 (B)	Versão 2 (A)		10
9.					12
		- Mostrar que $v_n = \log 2^n$ é uma progressão aritmética de razão $\log 2$ - Referir que u_n é a soma dos n primeiros termos de v_n - Calcular a soma dos n primeiros termos de v_n	4 2 6		
Grupo A					
10.					12
		- Concluir que $P(A \cap \bar{B}) = 0,25 \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) - 0,25$ - Concluir que $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = k \Leftrightarrow P(A \cup B) = 1 - k$ - Concluir que $P(B A) = 0,4 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,4 P(A)$	2 1 2		

		- Concluir de $P(A \cap B) = P(A) - 0,25$ e de $P(A \cap B) = 0,4 P(A)$ que $P(A) = \frac{5}{12}$ ou equivalente - Concluir que $P(A \cup B) = 1 - k \Leftrightarrow P(A) + P(B) = 1 - k + P(A \cap B)$ - Escrever $P(A) + P(B) = 1 - k + P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A) + P(B) = 1 - k + P(A) - 0,25$ - Concluir que $P(A) + P(B) = \frac{7-6k}{6}$ ou equivalente	2 2 2 1	
11.				12
		- Concluir que se a linha tem m elementos então estamos na linha $m - 1$ - Indicar os casos possíveis ($m(m - 1)$ ou ${}^m C_2$) - Indicar os casos favoráveis ($2 \times 2 \times 2!$ ou ${}^2 C_1 \times {}^2 C_1$) - Escrever $\frac{2}{m} \times \frac{2}{(m-1)} \times 2! = \frac{1}{75}$ ou $\frac{{}^2 C_1 \times {}^2 C_1}{{}^m C_2} = \frac{1}{75}$ ou equivalente - Resolver a equação de 2.º grau - Responder $m = 25$ porque $m > 1$	2 2 4 1 2 1	
12.		Versão 1 Versão 2 (C) (D)		10
Grupo B				
10.				24
	10.1.	- Determinar $Z_1 \times Z_2 \quad ((a + 2b) + (b - 2a)i)$ - Concluir que se $Z_1 \times Z_2$ é um número real então $b = 2a$ ou equivalente - Determinar $1 + \frac{z_1}{z_2} \left(\left(\frac{5+a-2b}{5} \right) + \left(\frac{b+2a}{5} \right) i \right)$ - Concluir que se $1 + \frac{z_1}{z_2}$ é um imaginário puro então $a - 2b = -5$ ou equivalente - Resolver o sistema $\begin{cases} b = 2a \\ a - 2b = -5 \end{cases}$ ou equivalente - Concluir que $a = \frac{5}{3}$ e $b = \frac{10}{3}$	2 1 4 1 3 1	12
	10.2	- Determinar $w \quad (w = -2 - 2i)$ - Escrever w na forma trigonométrica $(w = \sqrt{8} \cdot e^{i\frac{5\pi}{4}})$ ou equivalente - Calcular as raízes quadradas de w $(Z_0 = \sqrt[4]{8}e^{i\frac{5\pi}{8}} \text{ e } Z_0 = \sqrt[4]{8}e^{i\frac{13\pi}{8}})$ ou equivalente	2 4 6	12
11.		Versão 1 Versão 2 (C) (D)		10

Teste de Matemática

2024

2.º CICLO DO ENSINO BÁSICO – 6.º ANO

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

(10 páginas)

VERSÃO 1

A PREENCHER PELO ALUNO

Nome completo:

Não escrevas o teu nome em mais nenhum local da prova.

A PREENCHER PELA ESCOLA

Número convencional

A PREENCHER PELA ESCOLA

Número convencional

A PREENCHER PELO PROFESSOR CLASSIFICADOR

Classificação em percentagem: _____ (_____ por cento)

Correspondente ao nível: _____ (_____)

Data: ____ / ____ / 2024

Assinatura do Professor Classificador: _____



1. Calcula o valor numérico de cada uma das seguintes expressões.

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

1.1. $\frac{1}{5} + \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \frac{4}{5}$

1.2. $\frac{11}{2} + 4^2 \times 3^2 : 6^2 - 1$

2. Observa a reta numérica representada onde estão identificados os pontos A e B .



2.1. Indica a abcissa do ponto A . _____

2.2. A distância entre A e B é igual a:

(A) 1,3

(B) $1\frac{2}{5}$

(C) 1,6

(D) 2,1

3. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $75\% = \frac{4}{5}$

(B) $\frac{15}{60} = 25\%$

(C) $0,04 = \frac{2}{25}$

(D) $0,15 = \frac{5}{20}$

A transportar

4. Considera um triângulo $[ABC]$ tal que $\overline{AB} = 7 \text{ cm}$, $\overline{BC} = 7 \text{ cm}$ e $\hat{A}BC = 55^\circ$

4.1. Constrói uma representação do triângulo $[ABC]$ com as medidas indicadas.
Utiliza a régua, o compasso e o transferidor.

4.2. Classifica o triângulo $[ABC]$ quanto aos lados e aos ângulos.

Quanto aos lados: _____

Quanto aos ângulos: _____

4.3. O triângulo $[ABC]$ é um polígono regular? Justifica a tua resposta.

5. Para se obter uma igualdade verdadeira qual é o número que falta no espaço representado pelo $\square$?

$$12^3 : 6^{\square} \times 5^3 = 1000$$

Resposta: _____

6. Na tabela seguinte podemos observar valores de duas grandezas X e Y que são diretamente proporcionais.

X	4	8	10	14
Y	6		15	21

6.1. O valor em falta na tabela é igual a:

(A) 10

(B) 12

(C) 13

(D) 14

6.2. Indica o valor da constante de proporcionalidade de x para y na forma de fração irredutível. _____

7. O círculo da figura 1 foi dividido em oito partes iguais. Sabendo que o círculo tem 4 cm de raio, determina o valor da área da parte colorida em centímetros quadrados e arredondado às unidades. (Utiliza 3,14 como aproximação de π)

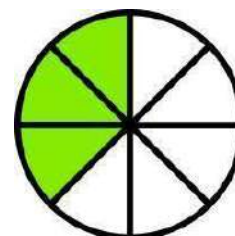


Figura 1

8. Observa os primeiros três termos de uma sequência em que a expressão representada em cada termo se obtém da anterior multiplicando sempre pelo mesmo número.

$\frac{1}{2} \times 3^2$	$2 \times 3^2 \times 5$	$2^3 \times 3^2 \times 5^2$	
1º termo	2º termo	3º termo	

Indica qual é o quinto termo, decomposto em fatores primos, e explica como chegaste a esse resultado.

9. A Bárbara pretende comprar um blusão que viu em duas lojas.

- Na primeira loja o blusão tem o preço de 50€, mas fazem um desconto de 20% a metade do preço.
- Na segunda loja o blusão tem o preço de 52€ e fazem um desconto de 15% à totalidade do preço.

Em qual das lojas a Bárbara pagará menos? Apresenta todos os cálculos efetuados.

10. Na costa portuguesa existem muitos faróis e cada um emite um feixe de luz em intervalos de tempo constantes. Um farol A emite um feixe de luz de 40 em 40 segundos e outro farol B emite um feixe de 30 em 30 segundos.



Observou-se, num certo dia, que às 8:00 h da manhã os dois faróis emitiram um feixe em simultâneo.

A que horas os dois faróis irão emitir o seguinte feixe de luz em simultâneo? Apresenta todos os cálculos efetuados.

A transportar

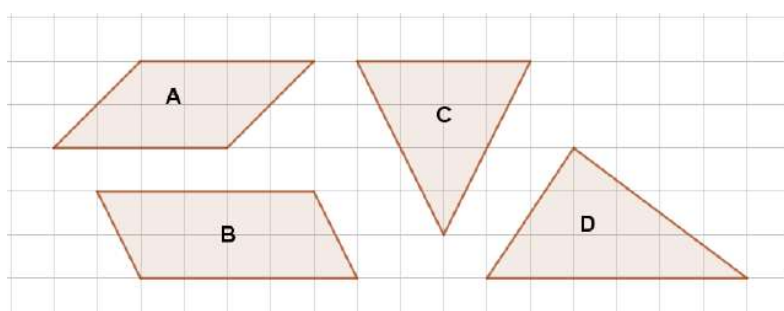
11. Considera as quatro expressões numéricas em que os seus valores estão identificados pelas letras A, B, C e D.

$$A = 54 \times 0,1 \quad B = 0,96 : 0,2 \quad C = \frac{66}{10} : \frac{11}{5} \quad D = 4 + 1,1^2$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $C < D < B < A$ **(B)** $C < B < A < D$ **(C)** $D < C < B < A$ **(D)** $C < B < D < A$

12. Na seguinte malha quadriculada estão representados dois triângulos e dois paralelogramos, sendo cada um identificado por uma letra.



12.1. Identifica um par de figuras com a mesma área. *Sugestão: Podes tomar para unidade de medida de comprimento o lado de uma quadricula e para unidade de medida de área a correspondente unidade quadrada.*

(A) A e B

(B) B e C

(C) C e D

(D) A e C

12.2. Considera o triângulo da figura 2. Sabe-se que $\overline{EG} = \overline{FG}$ e que a amplitude do ângulo FGE mede 53° .
Determina a amplitude dos ângulos EFG e FEG .

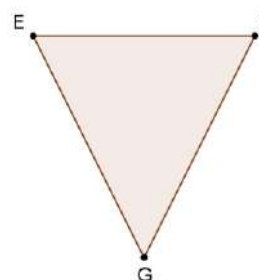


Figura 2

13. Considera uma embalagem de uma bebida com a forma de um cilindro com 15 cm de altura e 6 cm de diâmetro da base. Sabendo que a embalagem está cheia, qual é o volume de bebida que contém? *Apresenta o resultado em litros, arredondado à centésima. (Utiliza 3,14 como valor aproximado de π)*

14. A Clara desenhou um prisma regular com 10 vértices e a Júlia desenhou uma pirâmide exatamente com o mesmo número de vértices. Identifica o número de lados das bases do prisma e da base da pirâmide.

15. A caixa de cereais representada na figura 3 tem a forma de um paralelepípedo retângulo. A base tem 14 cm de comprimento e $9,5\text{ cm}$ de largura.

Sabendo que o volume da caixa é igual a 3059 cm^3 , será possível arrumar a caixa numa prateleira que tem 20 cm de altura exatamente na posição vertical tal como está na imagem? Apresenta todos os cálculos efetuados.

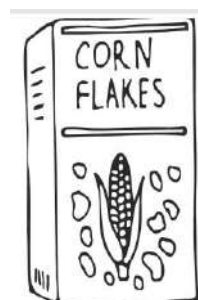


Figura 3

A transportar

16. Na tabela ao lado foi registado o tempo médio diário (horas) que os alunos de uma turma do 6.º ano passam a jogar *em rede*.

tempo médio diário (horas)	1	2	3
nº de alunos	7	11	7

16.1. Qual dos seguintes gráficos circulares representa os dados da tabela?

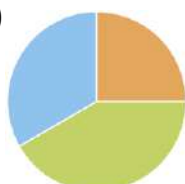
(A)



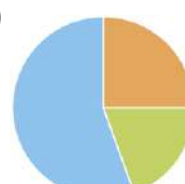
(B)



(C)



(D)



16.2. Quantos alunos tem esta turma do 6.º ano? _____

17. A turma da Joana realizou um estudo acerca das idades dos alunos. A frequência absoluta de cada uma das idades foi registada na tabela seguinte.

Idade	10	11	12	13
Nº de alunos	7	7	5	1

Determina a média de idades dos alunos da turma da Joana.

Esta página só deve ser utilizada se quiseses completar ou emendar qualquer resposta. Caso a utilizes, não te esqueças de identificar claramente a questão a que se refere cada uma das respostas completadas ou emendadas.

FIM

Cotações											
(em pontos)											
1.1.	1.2.	2.1.	2.2.	3.	4.1.	4.2.	4.3.	5.	6.1.	6.2.	7.
5	5	3	3	3	6	4	4	3	3	3	6
8.	9.	10.	11.	12.1.	12.2.	13.	14.	15.	16.1.	16.2.	17.
5	5	6	3	3	5	5	4	6	3	3	4
TOTAL											100

Teste de Matemática

2.º CICLO DO ENSINO BÁSICO – 6.º ANO

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

(10 páginas)

VERSÃO 2

A PREENCHER PELO ALUNO

Nome completo:

Não escrevas o teu nome em mais nenhum local da prova.

A PREENCHER PELA ESCOLA

Número convencional

A PREENCHER PELA ESCOLA

Número convencional

A PREENCHER PELO PROFESSOR CLASSIFICADOR

Classificação em percentagem: _____ (_____ por cento)

Correspondente ao nível: _____ (_____)

Data: ____ / ____ / 2024

Assinatura do Professor Classificador: _____



1. Calcula o valor numérico das seguintes expressões.

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

1.1. $\frac{1}{5} + \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \frac{4}{5}$

1.2. $\frac{11}{2} + 4^2 \times 3^2 : 6^2 - 1$

2. Observa a reta numérica representada onde estão identificados dois pontos, A e B.



2.1. Indica a abcissa do ponto A. _____

2.2. A distância entre A e B é igual a

(A) 1,6

(B) 2,1

(C) 1,3

(D) $1\frac{2}{5}$

3. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $75\% = \frac{4}{5}$

(B) $0,04 = \frac{2}{25}$

(C) $\frac{15}{60} = 25\%$

(D) $0,15 = \frac{5}{20}$

A transportar

4. Considera o triângulo $[ABC]$ tal que $\overline{AB} = 7 \text{ cm}$, $\overline{BC} = 7 \text{ cm}$ e $\widehat{ABC} = 55^\circ$

4.1. Constrói um triângulo $[ABC]$ com as medidas indicadas.

4.2. Classifica o triângulo $[ABC]$ quanto aos lados e aos ângulos.

Quanto aos lados: _____

Quanto aos ângulos: _____

4.3. O triângulo $[ABC]$ é um polígono regular? Justifica a tua resposta.

5. Para se obter uma igualdade verdadeira qual é o número que falta no espaço representado pelo $\square$?

$$12^3 : 6^{\square} \times 5^3 = 1000$$

Resposta: _____

6. Na tabela seguinte podemos observar valores de duas grandezas X e Y que são diretamente proporcionais.

X	4	8	10	14
Y	6		15	21

6.1. O valor em falta na tabela é igual a:

(A) 14

(B) 13

(C) 12

(D) 10

6.2. Indica o valor da constante de proporcionalidade de x para y na forma de fração irredutível. _____

7. O círculo da figura 1 foi dividido em oito partes iguais. Sabendo que o círculo tem 4 cm de raio, determina o valor da área da parte colorida em centímetros quadrados e arredondado às unidades. (Utiliza 3,14 como aproximação de π).

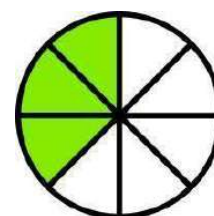


Figura 1

8. Observa os primeiros três termos de uma sequência em que a expressão representada em cada termo se obtém da anterior multiplicando sempre pelo mesmo número.

$\frac{1}{2} \times 3^2$	$2 \times 3^2 \times 5$	$2^3 \times 3^2 \times 5^2$	
1º termo	2º termo	3º termo	

Indica qual é o quinto termo, decomposto em fatores primos, e explica como chegaste a esse resultado.

9. A Bárbara pretende comprar um blusão que viu em duas lojas.

- Na primeira loja o blusão tem o preço de 50€, mas fazem um desconto de 20% a metade do preço.
- Na segunda loja o blusão tem o preço de 52€ e fazem um desconto de 15% à totalidade do preço.

Em qual das lojas a Bárbara pagará menos? Apresenta todos os cálculos efetuados.

10. Na costa portuguesa existem muitos faróis e cada um emite um feixe de luz em intervalos de tempo constantes.

Um farol A emite um feixe de luz de 40 em 40 segundos e outro farol B emite um feixe de 30 em 30 segundos.



Observou-se, num certo dia, que às 8:00 h da manhã os dois faróis emitiram um feixe em simultâneo.

A que horas os dois faróis irão emitir o seguinte feixe de luz em simultâneo? Apresenta todos os cálculos efetuados.

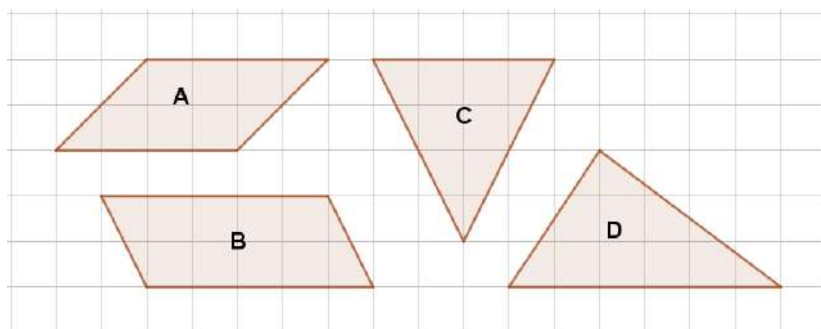
11. Considera as quatro expressões numéricas em que os seus valores estão identificados pelas letras A, B, C e D.

$$A = 54 \times 0,1 \quad B = 0,96 : 0,2 \quad C = \frac{66}{10} : \frac{11}{5} \quad D = 4 + 1,1^2$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $D < C < B < A$ **(B)** $C < B < D < A$ **(C)** $C < D < B < A$ **(D)** $C < B < A < D$

12. Na seguinte malha quadriculada estão representados dois triângulos e dois paralelogramos, sendo cada um identificado por uma letra.



12.1. Identifica um par de figuras com a mesma área. *Sugestão: Podes tomar para unidade de medida de comprimento o lado de uma quadrícula e para unidade de medida de área a correspondente unidade quadrada.*

(A) A e C

(B) C e D

(C) B e D

(D) A e B

12.2. Considera o triângulo da figura 2. Sabe-se que $\overline{EG} = \overline{FG}$ e que a amplitude do ângulo FGE mede 53° .
Determina a amplitude dos ângulos EFG e FEG .

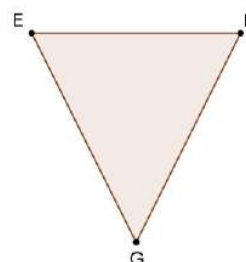


Figura 2

13. A embalagem de uma bebida tem a forma de um cilindro com 15 cm de altura e 6 cm de diâmetro da base. Sabendo que a embalagem está cheia, qual é o volume de bebida que contém? Apresenta o resultado em litros, arredondado à centésima. (Utiliza 3,14 como aproximação de π).

14. A Clara desenhou um prisma regular com 10 vértices e a Júlia desenhou uma pirâmide exatamente com o mesmo número de vértices. Identifica o número de lados das bases do prisma e da base da pirâmide.

15. A caixa de cereais representada na figura 3 tem a forma de um paralelepípedo retângulo. A base tem 14 cm de comprimento e 9,5 cm de largura.

Sabendo que o volume da caixa é igual a 3059 cm^3 , será possível arrumar a caixa numa prateleira que tem 20 cm de altura exatamente na posição vertical tal como está na imagem? Apresenta todos os cálculos efetuados

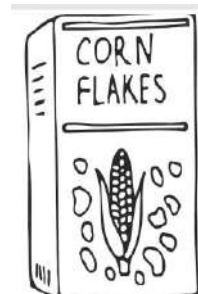


Figura 3

16. Na tabela ao lado foi registado o tempo médio diário (horas) que os alunos de uma turma do 6.º ano passam a jogar *em rede*.

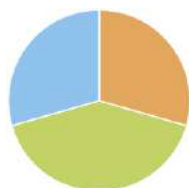
tempo médio diário (horas)	1	2	3
nº de alunos	7	11	7

16.1. Qual dos gráficos seguintes corresponde aos dados representados na tabela?

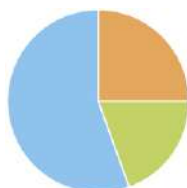
(A)



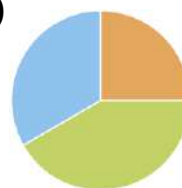
(B)



(C)



(D)



16.2. Quantos alunos fazem parte desta turma do 6º ano? _____

17. A turma da Joana realizou um estudo acerca das idades dos alunos. A frequência absoluta de cada uma das idades foi registada na tabela seguinte.

Idade	10	11	12	13
Nº de alunos	7	7	5	1

Determina a média de idades dos alunos da turma da Joana.

Esta página só deve ser utilizada se quiseres completar ou emendar qualquer resposta. Caso a utilizes, não te esqueças de identificar claramente a questão a que se refere cada uma das respostas completadas ou emendadas.

FIM

Cotações											
(em pontos)											
1.1.	1.2.	2.1.	2.2.	3.	4.1.	4.2.	4.3.	5.	6.1.	6.2.	7.
5	5	3	3	3	6	4	4	3	3	3	6
8.	9.	10.	11.	12.1.	12.2.	13.	14.	15.	16.1.	16.2.	17.
5	5	6	3	3	5	5	4	6	3	3	4
TOTAL											100

Teste de Matemática 6.º ANO

2024

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A prova é formada por itens de escolha múltipla, de resposta curta e de construção.

Itens de Escolha Múltipla

A cotação total do item é atribuída às respostas que apresentem, de forma inequívoca, a única opção correta.

Itens de Resposta Curta

A cotação total do item é atribuída quando é apresentada, de forma inequívoca, uma resposta correta. Neste tipo de itens admite-se a possibilidade de ser atribuída uma cotação intermédia para um nível intermédio de desempenho.

Itens de Construção

Nos itens cuja resposta envolve a apresentação de cálculos, de justificações, de composições ou de construções geométricas, os critérios de classificação das respostas apresentam-se organizados por etapas ou por níveis de desempenho.

Caso os alunos adotem um processo não previsto nos critérios específicos, cabe ao professor corretor adaptar a distribuição da cotação atribuída.

Deve ser atribuída a classificação de zero pontos nas seguintes situações:

- Caso um aluno apresente apenas o resultado final de um item, ou de uma etapa, quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações;
- Caso o aluno utilize de forma inequívoca a calculadora, uma vez que tal não é solicitado nesta prova.

Nas seguintes situações deve descontar-se um ponto às cotações estabelecidas para a etapa respetiva:

- Ocorrência de um erro de cálculo;
- Apresentação de uma resposta com o formato que não esteja de acordo com o que foi solicitado;
- Apresentação de expressões com erros do ponto de vista formal. Caso ocorram erros que revelem desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades ou o aluno apresente uma resolução incompleta de uma etapa, deve descontar-se até metade da cotação dessa etapa.

Cotações											
(em pontos)											
1.1.	1.2.	2.1.	2.2.	3.	4.1.	4.2.	4.3.	5.	6.1.	6.2.	7.
5	5	3	3	3	6	4	4	3	3	3	6
8.	9.	10.	11.	12.1.	12.2.	13.	14.	15.	16.1.	16.2.	17.
5	5	6	3	3	5	5	4	6	3	3	4
TOTAL											100

QUESTÃO					COTAÇÃO	
1.		_____				10
	1.1.	$\frac{4}{5}$			5	
		A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:				
		Respeita a prioridade das operações.	2			
		Efetua corretamente a subtração.	1			
		Efetua corretamente a multiplicação.	1			
		Efetua a adição e apresenta o resultado na forma de fração irredutível.	1			
	1.2.	$\frac{17}{2}$			5	
		A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:				
		Respeita a prioridade das operações.	1			
		Determina corretamente o produto das potências.	1			
		Determina corretamente o quociente das potências.	1			
		Efetua corretamente as restantes operações	2			
2.		_____				6
	2.1.	0,6 ou $\frac{3}{5}$			3	
	2.2.	Versão 1 C	Versão 2 A		3	

3.		Versão 1 B	Versão 2 C			3
4.						14
	4.1.				6	
		A classificação pode ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:				
		Traçar um segmento de reta $[AB]$ (ou $[BC]$) com o comprimento dado - 7 cm (ver nota 1).			1	
		Traçar um arco de circunferência com centro em B e raio igual ao comprimento 7 cm (ver nota 1).			2	
		Usando o transferidor, traçar um segmento de reta com origem em B e que forme um ângulo de 55° com $[AB]$ (ou $[BC]$) (ver nota 2).			2	
		Completa a construção do triângulo.			1	
		Nota 1: Considera-se que os segmentos de reta estão corretamente traçados se o erro de medição não for superior a 2 mm. Nota 2: Considera-se que a amplitude do ângulo está corretamente marcada se o erro de medição for inferior a 1 grau.				
	4.2.				4	
		Isósceles.			2	
		Acutângulo.			2	
	4.3.	O triângulo $[ABC]$ não é um polígono regular.				4
		A classificação pode ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:				
		Apresenta a resposta correta.			2	
		Justifica corretamente a resposta dada.			2	
5.		Apresenta a resposta correta: 3				3
6.						6
	6.1.	Versão 1 B	Versão 2 C		3	

	6.2.	$\frac{3}{2}$		3	
		A classificação pode ser atribuída de acordo com níveis de desempenho:			
	Níveis	Descritores	Pontuação		
	2	Apresenta a resposta correta na forma de fração irredutível.	3		
	1	Escreve uma fração correta mas não a apresenta na forma irredutível.	1		
7.		19 cm^2			6
		A classificação pode ser atribuída de acordo com as seguintes etapas :			
		Determina a área do círculo.	3		
		Determina a área de $\frac{3}{8}$ do círculo.	2		
		Apresenta o resultado arredondado às unidades.	1		
8.		$2^7 \times 3^2 \times 5^4$			5
		A classificação pode ser atribuída de acordo com as seguintes etapas :			
		Apresenta a resposta correta.	2		
		Justifica corretamente a resposta dada, explicitando por quanto se multiplica para obter o termo seguinte e efetuando as operações envolvidas.	3		
9.		A Bárbara paga menos na 2.ª loja (44,2€)			5
		A classificação pode ser atribuída de acordo com as seguintes etapas :			
		Calcula o preço na 1ª loja (45€)	2		
		Calcula o preço na 2ª loja (44,2€)	2		
		Apresenta a resposta correta	1		
10.		8h 02 m			6

		A classificação deve ser atribuída de acordo com os níveis de desempenho:			
	Níveis	Descritores	Pontuação		
	3	Apresenta uma estratégia adequada e completa e responde corretamente.	6		
	2	Apresenta uma estratégia adequada, mas incompleta, e responde corretamente.	3		
	1	Apresenta uma estratégia adequada, mas não respondeu ou respondeu incorretamente.	2		
11.		Versão 1 D	Versão 2 B		3
12.					8
	12.1.	Versão 1 D	Versão 2 A	3	
	12.2.	63, 5°		5	
		A classificação deve ser atribuída de acordo com os níveis de desempenho:			
	Níveis	Descritores	Pontuação		
	3	Apresenta uma estratégia adequada e completa e responde corretamente.	5		
	2	Apresenta uma estratégia adequada, mas incompleta, e responde corretamente.	3		
	1	Apresenta uma estratégia adequada, mas não respondeu ou respondeu incorrectamente.	2		
13.		0,42 Litros			5
		A classificação pode ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:			
		Determina a capacidade da embalagem.	3		
		Apresenta o resultado em litros.	1		
		Apresenta o resultado arredondado às centésimas de litro.	1		
14.					4
		As bases do prisma são polígonos com 5 lados	2		

		A base da pirâmide é um polígono com 9 lados.	2		
15.		A altura da caixa na posição vertical é 23 cm, portanto excede a altura da prateleira, não sendo possível colocar a caixa na posição vertical.			6
		A classificação pode ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:			
		Determina a área da base da caixa de cereais.	1		
		Determina a altura da caixa de cereais.	3		
		Responde corretamente e justifica adequadamente.	2		
16.					6
	16.1.	Versão 1 A	Versão 2 B	3	
	16.2.	25 alunos.		3	
17.		11 anos			4
		A classificação deve ser atribuída de acordo com os níveis de desempenho:			
	Níveis	Descritores	Pontuação		
	3	Apresenta uma estratégia adequada e completa e responde corretamente.	4		
	2	Apresenta uma estratégia adequada, mas incompleta, e responde corretamente.	3		
	1	Apresenta uma estratégia adequada, mas não respondeu ou respondeu incorretamente.	2		

Nome completo: _____

Documento de identificação CC n.º |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|

Assinatura do aluno: _____

Prova Final de Matemática

3.º Ciclo do Ensino Básico | 2024

9.º Ano de Escolaridade

VERSÃO 1

A PREENCHER PELO PROFESSOR CLASSIFICADOR

Classificação em percentagem |__|__|__| (_____ por cento)

Correspondente ao nível |__| (_____)

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 90 minutos | Tolerância: 30 minutos

Caderno 1 – 9 Páginas

Caderno 1: 35 minutos. Tolerância: 10 minutos.

É permitido o uso de calculadora.

Todas as respostas são dadas no enunciado da prova. É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor. Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risca aquilo que pretendes que não seja classificado.

Apresenta apenas uma resposta para cada item. Apresenta as tuas respostas de forma legível.

Se o espaço reservado a uma resposta não for suficiente, podes utilizar o espaço que se encontra no final da prova. Neste caso, deves identificar claramente o item a que se refere a tua resposta.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, assinala com × a opção correta.

As cotações dos itens encontram-se no final da prova.



Formulário

Números e Operações

Valor aproximado de π (pi): 3,14159

Geometria e Medida

Áreas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Superfície esférica: $4\pi r^2$, sendo r o raio da esfera

Volumes

Prisma e cilindro: Área da base $\times$ Altura

Pirâmide e cone: $\frac{\text{Área da base} \times \text{Altura}}{3}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$, sendo r o raio da esfera

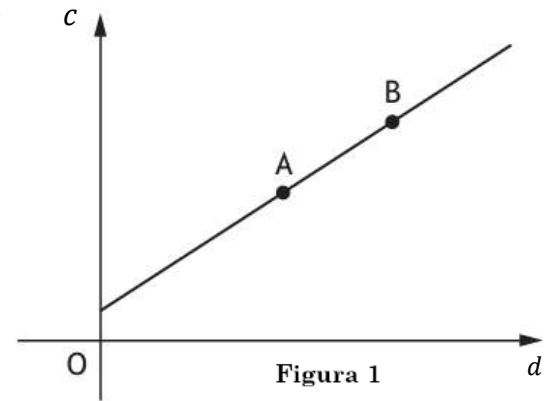
Trigonometria

Fórmula fundamental: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Relação da tangente com o seno e o cosseno: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

1. O custo de uma viagem com a empresa *Suber* depende da distância percorrida.

Na **Figura 1**, está representada a reta AB , gráfico de uma função f , tal que $f(d)$ representa o custo, em euros, de uma viagem de d quilómetros com a *Suber*.



O ponto A representa uma viagem de 12 km que custa 21 euros.

O ponto B representa uma viagem de 18 km que custa 30 euros.

- 1.1. Mostra que a função f pode ser definida por

$$f(d) = \frac{3}{2}d + 3$$

- 1.2. A Maria foi almoçar a casa da sua avó que mora a 10 km da sua casa.

Na viagem para casa da avó e na de regresso a sua casa, a Maria utilizou os serviços da *Suber*.

Calcula qual o valor que a Maria pagou à *Suber* pelas duas viagens.

2. Numa empresa de material para escritório, há 120 pilhas de folhas A4 com 1 metro de altura cada. Na embalagem, o fornecedor indica que a espessura de uma folha é $0,4\text{ mm}$.

O gerente da distribuidora fez um levantamento e identificou que o número total de folhas é:

A ☐ 3×10^5 folhas

B ☐ 3×10^2 folhas

C ☐ $4,8 \times 10^4$ folhas

D ☐ $4,8 \times 10^1$ folhas

3. Na **Figura 2** está representada a reta r , um segmento de reta perpendicular à reta r e um decágono regular.

Como se pode observar na **Figura 2**, um dos lados do decágono está contido na reta r e um dos vértices coincide com o ponto de interseção da reta r e do segmento de reta.

Determina a amplitude do ângulo representado a sombreado.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

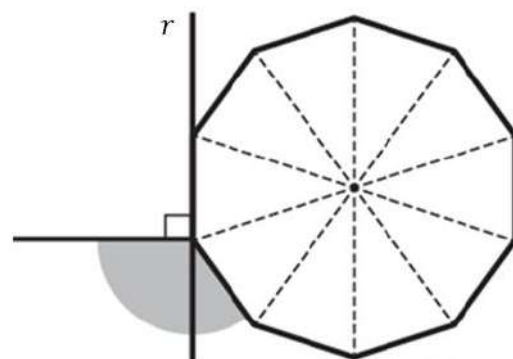
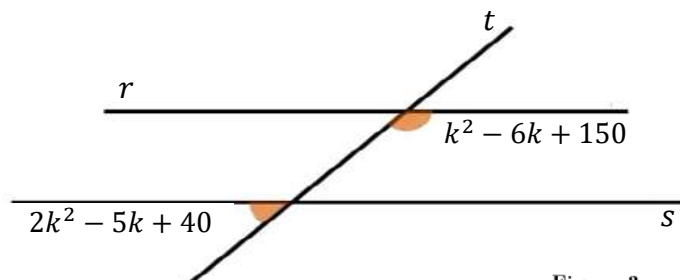


Figura 2

4. Na **Figura 3** estão representadas três retas, r , s e t .

Sabe-se que as retas r e s são paralelas.

Assinalam-se dois dos ângulos determinados nessas retas pela secante t e as respectivas medidas de amplitude, em graus, em função de um número real k .



Determina o(s) possível(eis) valor(es) de k .

Apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar.

5. Nos passeios junto à escola da Maria, estão a ser colocados marcos de forma composta por um cilindro com uma semiesfera no topo, como mostra a **Figura 4**.

Sabe-se que:

- a semiesfera tem raio igual ao da base do cilindro
- o diâmetro da base do cilindro mede 24 cm
- o volume de um marco é de $8784\pi\text{ cm}^3$

Determina a altura, h , do cilindro.

Apresenta o resultado em centímetros.

Não procedas a arredondamentos nos cálculos intermédios.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

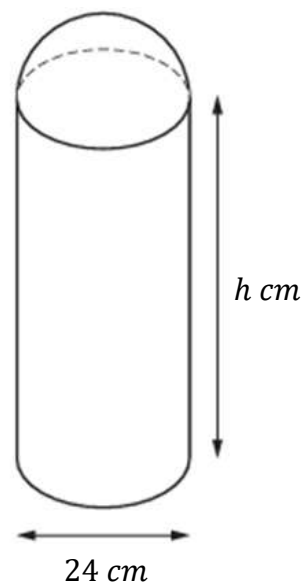


Figura 4

Responde a um e um só dos grupos A ou B

Se responderes a mais do que um destes grupos deves indicar qual deles pretendes que seja classificado. Se não deres esta indicação será classificado o grupo a que responderes em primeiro lugar.

Grupo A

6. A Maria está responsável por uma barraca na festa de final de ano da sua escola e tem um jogo que requer dois piões (**Figura 5**) para serem girados, sendo que a cor ou o número obtido em cada pião, é a correspondente ao lado do pião que fica em contacto com a superfície onde giraram.

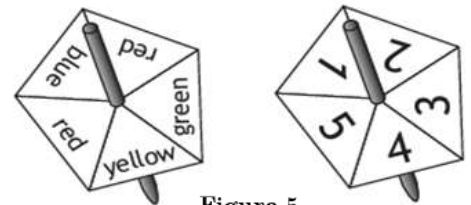


Figura 5

O Rodrigo passou na barraca da Maria e resolveu tentar a sua sorte.

Para ganhar o prémio, tem de obter num pião, *yellow* ou *green* e no outro um número par.

Calcula a probabilidade de o Rodrigo não ganhar o prémio supondo que os piões são equilibrados, e, portanto, as cores e os números obtidos quando se faz rodar os piões são todos equiprováveis.

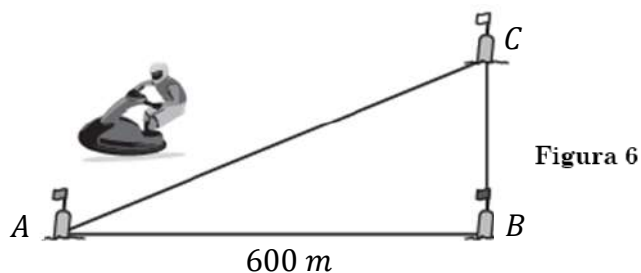
Apresenta o resultado na forma de percentagem.

Nota: Podes começar por construir uma tabela de dupla entrada

Grupo B

6. Considera na **Figura 6** um esquema de um percurso de *Jet Ski*.

As bandeiras A, B e C , estão alinhadas de tal forma que o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B .



Sabe-se que a distância da bandeira A à bandeira B é de 600 metros.

A amplitude do ângulo BAC é de 35°

Determina o comprimento total do percurso de *Jet Ski*.

Apresenta o resultado em metros, arredondado às unidades.

Se procederes a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserva, pelo menos, três casas decimais.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

*Esta página só deve ser utilizada se quiseres completar ou emendar qualquer resposta.
Caso a utilizes, não te esqueças de identificar claramente cada uma dessas respostas.*

FIM do Caderno 1

Cotações (Caderno 1)

Item							
Cotação (em percentagem)							
1.1.	1.2.	2	3	4	5	6	Total (Caderno 1)
7	4	3	5	7	8	6	40

Nome completo: _____

Documento de identificação CC n.º |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|

Assinatura do aluno: _____

Prova Final de Matemática

3.º Ciclo do Ensino Básico | 2024

9.º Ano de Escolaridade

VERSÃO 1

A PREENCHER PELO PROFESSOR CLASSIFICADOR

Classificação em percentagem |__|__|__| (_____ por cento)

Correspondente ao nível |__| (_____)

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 90 minutos | Tolerância: 30 minutos

Caderno 2 – 9 Páginas

Caderno 2: 55 minutos. Tolerância: 20 minutos.

Não é permitido o uso de calculadora.



7. Seja b um número real diferente de 0.

Escreve o número $\frac{(b^{-3})^2}{b^4 \times b^5}$ na forma b^k , com $k \in \mathbb{Z}$

Apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar.

8. Considera, em $\mathbb{R}$, a equação literal

$$P = \frac{1}{3}m \cdot n - r \quad (n \neq 0)$$

Resolve a equação anterior em ordem a m

9. Uma pessoa tinha no bolso x notas de y euros e y notas de x euros.

Se esta pessoa colocar neste bolso mais x notas de x euros e mais y notas de y euros, então esta pessoa terá no bolso:

A ☐ $(x^2 + y^2)$ euros

B ☐ $(x - y)^2$ euros

C ☐ $(x + y)^2$ euros

D ☐ $(x^2 - y^2)$ euros

10. Qual dos seguintes sistemas de equações é **impossível**?

A ☐
$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ y - 4x = 2 \end{cases}$$

B ☐
$$\begin{cases} y - 2x = 1 \\ 2y - 4x = -2 \end{cases}$$

C ☐
$$\begin{cases} y - 2x = 1 \\ 4y - x = 1 \end{cases}$$

D ☐
$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 2y - 4x = 2 \end{cases}$$

11. Na **Figura 7**, estão representados os três primeiros termos de uma sucessão de retângulos decompostos em quadrados brancos e quadrados cinzentos geometricamente iguais, de maneira que:

- em cada termo os quadrados brancos formam um quadrado a que se acrescenta uma coluna de quadrados cinzentos
- em cada passo aumenta-se a figura mantendo as características descritas, mas de maneira a acrescentar um quadrado à coluna dos cinzentos.

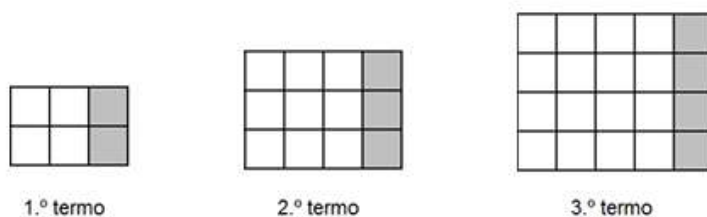


Figura 7

Considera o termo da sucessão com 10 quadrados cinzentos.

Determina o número **total** de quadrados desse termo.

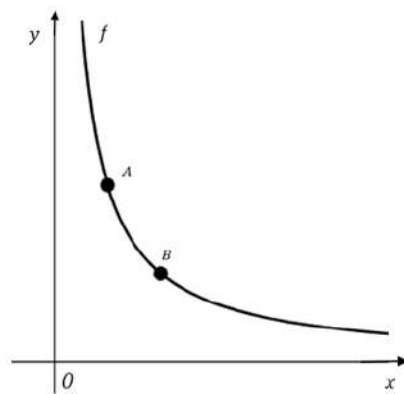
Apresenta todos os cálculos que efetuares.

12. Na **Figura 8** está representada uma função f de proporcionalidade inversa.

Sabe-se $A\left(\frac{1}{2}m, 5\right)$ e $B(m - 2, 3)$ são dois pontos do gráfico de f , com $m \in \mathbb{R}$

Determina o valor de m .

Mostra como chegaste à tua resposta.



13. Resolve, em $\mathbb{R}$, a inequação seguinte:

$$2x - \frac{4x - 5}{2} \leq \frac{2x - 1}{3}$$

Apresenta o conjunto-solução na forma de intervalo de números reais e todos os cálculos que efetuares.

14. A **Figura 9** mostra parte do gráfico da função g , definida por $g(x) = ax^2$.
Sabe-se que o ponto P de coordenadas $(-2, 10)$ pertence ao gráfico de g .

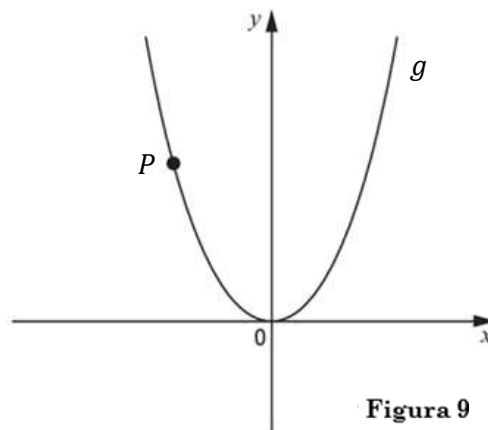


Figura 9

Determina $2g(-1) - g(2)$.

Mostra como chegaste à tua resposta.

15. Qual dos seguintes conjuntos é constituído apenas por números racionais?

A ☐ $\left\{\frac{2}{3}; \sqrt{2}; \pi; \sqrt[3]{7}\right\}$

B ☐ $\left\{\frac{2}{3}; 1,4142; 3,1416; (\sqrt[3]{7})^3\right\}$

C ☐ $\left\{\frac{2}{3}; 1,4142; \pi^3; (\sqrt[3]{7})^3\right\}$

D ☐ $\{0, (6); 1,4142; \pi^3; (\sqrt[3]{7})^3\}$

16. Uma viga de madeira é usada para suportar uma parede construída em solo horizontal, como representado na **Figura 10**.

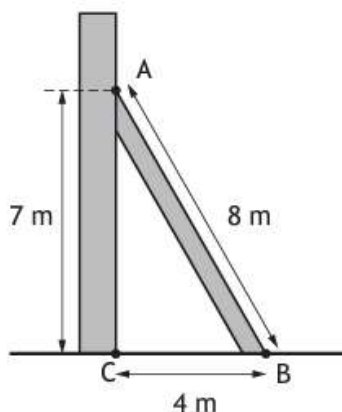


Figura 10

Como a **Figura 10** sugere, sabe-se que:

- a viga $[AB]$, tem 8 metros de comprimento
- o ponto A fica a 7 metros do ponto C
- o ponto B fica a 4 metros do ponto C

Determina se a parede é perpendicular ao solo.

Apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar.

17. Na **Figura 11** está representado um sólido que pode ser decomposto num cubo e numa pirâmide quadrangular regular. Os vértices da base da pirâmide são os pontos médios dos lados do quadrado $[OPQR]$.

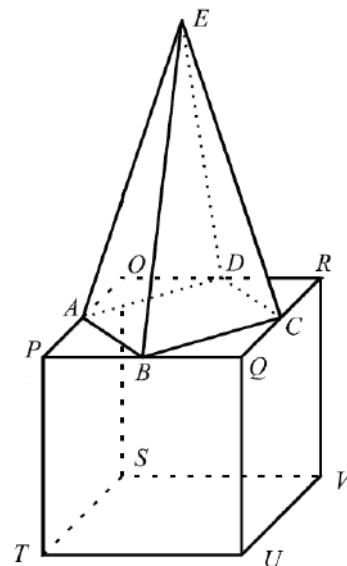


Figura 11

17.1. Qual das afirmações seguintes é **falsa**?

- A ☐ As retas EC e QR são concorrentes
- B ☐ As retas AO e TU são não coplanares
- C ☐ Os planos UVO e APU são coincidentes
- D ☐ Os planos ABE e ADC são estritamente paralelos

17.2. Sabe-se que a medida da área do triângulo $[STU]$ é igual a K .

Determina, em função de K , a medida da área do triângulo $[APB]$, na mesma unidade.

Responde a um e um só dos grupos C ou D

Se responderes a mais do que um destes grupos deves indicar qual deles pretendes que seja classificado. Se não deres esta indicação será classificado o grupo a que responderes em primeiro lugar.

Grupo C

18. A Rita faz e vende velas.

Essas velas devem ter 22,5 *cm* de altura.

A Rita rejeita qualquer vela que tenha uma diferença **superior** a 2 *mm* dessa altura.

A Rita fez 10 velas, tendo as mesmas as seguintes alturas (em centímetros):

22,3 22,6 22,5 22,9 22,3 23,1 22,6 22,4 22,7 22,8

O Pedro, amigo da Rita, vai retirar, aleatoriamente, uma das dez velas que a Rita fez.

Qual o valor da probabilidade de a Rita rejeitar a vela retirada pelo Pedro?

A ☐ 20%

B ☐ 30%

C ☐ 40%

D ☐ 50%

Grupo D

18. Seja β um ângulo agudo.

Considera a seguinte expressão:

$$\cos \beta \times \sin \beta \times \tan \beta$$

Qual das expressões seguintes é equivalente à expressão anterior?

A ☐ $\sin \beta$

B ☐ $1 - \cos^2 \beta$

C ☐ $\cos \beta$

D ☐ $1 - \sin^2 \beta$

*Esta página só deve ser utilizada se quiseres completar ou emendar qualquer resposta.
Caso a utilizes, não te esqueças de identificar claramente cada uma dessas respostas.*

FIM do Caderno 2

Cotações (Caderno 2)

Item							
Cotação (em percentagem)							
7	8	9	10	11	12	13	Total (Caderno 2)
4	3	3	3	5	5	8	60
14	15	16	17.1.	17.2.	18		
7	3	7	3	6	3		

Nome completo: _____

Documento de identificação CC n.º |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|

Assinatura do aluno: _____

Prova Final de Matemática

3.º Ciclo do Ensino Básico | 2024

9.º Ano de Escolaridade

VERSÃO 2

A PREENCHER PELO PROFESSOR CLASSIFICADOR

Classificação em percentagem |__|__|__| (_____ por cento)

Correspondente ao nível |__| (_____)

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 90 minutos | Tolerância: 30 minutos

Caderno 1 – 9 Páginas

Caderno 1: 35 minutos. Tolerância: 10 minutos.

É permitido o uso de calculadora.

Todas as respostas são dadas no enunciado da prova. É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor. Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risca aquilo que pretendes que não seja classificado.

Apresenta apenas uma resposta para cada item. Apresenta as tuas respostas de forma legível.

Se o espaço reservado a uma resposta não for suficiente, podes utilizar o espaço que se encontra no final da prova. Neste caso, deves identificar claramente o item a que se refere a tua resposta.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, assinala com × a opção correta.

As cotações dos itens encontram-se no final da prova.



Formulário

Números e Operações

Valor aproximado de π (pi): 3,14159

Geometria e Medida

Áreas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Superfície esférica: $4\pi r^2$, sendo r o raio da esfera

Volumes

Prisma e cilindro: Área da base $\times$ Altura

Pirâmide e cone: $\frac{\text{Área da base} \times \text{Altura}}{3}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$, sendo r o raio da esfera

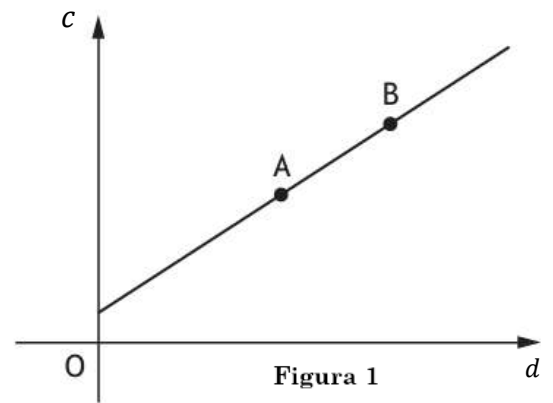
Trigonometria

Fórmula fundamental: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Relação da tangente com o seno e o cosseno: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

1. O custo de uma viagem com a empresa *Suber* depende da distância percorrida.

Na **Figura 1**, está representada a reta AB , gráfico de uma função f , tal que $f(d)$ representa o custo, em euros, de uma viagem de d quilómetros com a *Suber*.



O ponto A representa uma viagem de 12 km que custa 21 euros.

O ponto B representa uma viagem de 18 km que custa 30 euros.

- 1.1. Mostra que a função f pode ser definida por

$$f(d) = \frac{3}{2}d + 3$$

- 1.2. A Maria foi almoçar a casa da sua avó que mora a 10 km da sua casa.

Na viagem para casa da avó e na de regresso a sua casa, a Maria utilizou os serviços da *Suber*.

Calcula qual o valor que a Maria pagou à *Suber* pelas duas viagens.

2. Numa empresa de material para escritório, há 120 pilhas de folhas A4 com 1 metro de altura cada. Na embalagem, o fornecedor indica que a espessura de uma folha é $0,4\text{ mm}$.

O gerente da distribuidora fez um levantamento e identificou que o número total de folhas é:

A ☐ $4,8 \times 10^4$ folhas

B ☐ $4,8 \times 10^1$ folhas

C ☐ 3×10^5 folhas

D ☐ 3×10^2 folhas

3. Na **Figura 2** está representada a reta r , um segmento de reta perpendicular à reta r e um decágono regular.

Como se pode observar na **Figura 2**, um dos lados do decágono está contido na reta r e um dos vértices coincide com o ponto de interseção da reta r e do segmento de reta.

Determina a amplitude do ângulo representado a sombreado.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

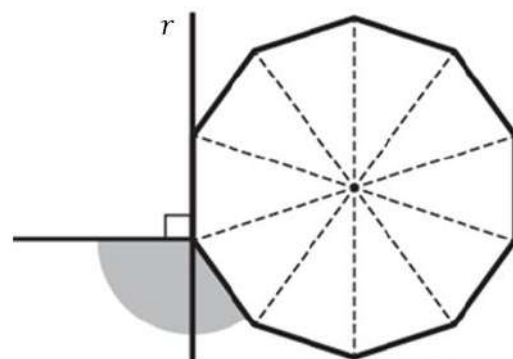
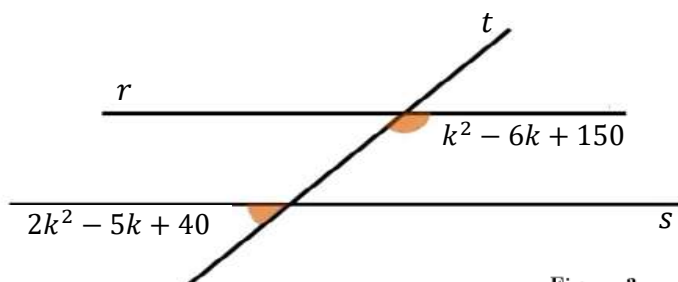


Figura 2

4. Na **Figura 3** estão representadas três retas, r , s e t .

Sabe-se que as retas r e s são paralelas.

Assinalam-se dois dos ângulos determinados nessas retas pela secante t e as respectivas medidas de amplitude, em graus, em função de um número real k .



Determina o(s) possível(eis) valor(es) de k .

Apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar.

5. Nos passeios junto à escola da Maria, estão a ser colocados marcos de forma composta por um cilindro com uma semiesfera no topo, como mostra a **Figura 4**.

Sabe-se que:

- a semiesfera tem raio igual ao da base do cilindro
- o diâmetro da base do cilindro mede 24 cm
- o volume de um marco é de $8784\pi\text{ cm}^3$

Determina a altura, h , do cilindro.

Apresenta o resultado em centímetros.

Não procedas a arredondamentos nos cálculos intermédios.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

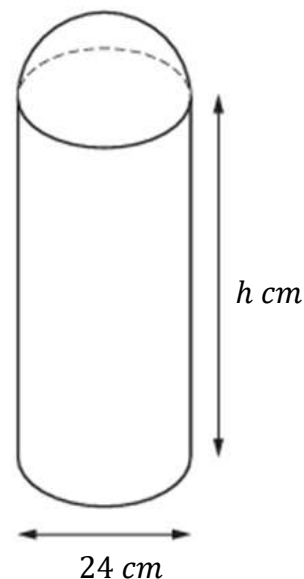


Figura 4

Responde a um e um só dos grupos A ou B

Se responderes a mais do que um destes grupos deves indicar qual deles pretendes que seja classificado. Se não deres esta indicação será classificado o grupo a que responderes em primeiro lugar.

Grupo A

6. A Maria está responsável por uma barraca na festa de final de ano da sua escola e tem um jogo que requer dois piões (**Figura 5**) para serem girados, sendo que a cor ou o número obtido em cada pião, é a correspondente ao lado do pião que fica em contacto com a superfície onde giraram.

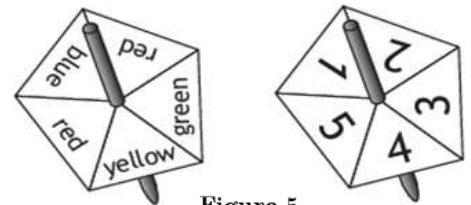


Figura 5

O Rodrigo passou na barraca da Maria e resolveu tentar a sua sorte.

Para ganhar o prémio, tem de obter num pião, *yellow* ou *green* e no outro um número par.

Calcula a probabilidade de o Rodrigo não ganhar o prémio supondo que os piões são equilibrados, e, portanto, as cores e os números obtidos quando se faz rodar os piões são todos equiprováveis.

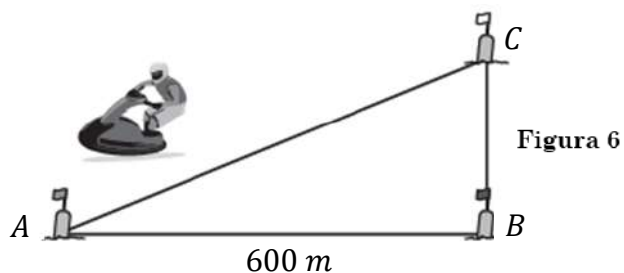
Apresenta o resultado na forma de percentagem.

Nota: Podes começar por construir uma tabela de dupla entrada

Grupo B

6. Considera na **Figura 6** um esquema de um percurso de *Jet Ski*.

As bandeiras A, B e C , estão alinhadas de tal forma que o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B .



Sabe-se que a distância da bandeira A à bandeira B é de 600 metros.

A amplitude do ângulo BAC é de 35°

Determina o comprimento total do percurso de *Jet Ski*.

Apresenta o resultado em metros, arredondado às unidades.

Se procederes a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserva, pelo menos, três casas decimais.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

*Esta página só deve ser utilizada se quiseres completar ou emendar qualquer resposta.
Caso a utilizes, não te esqueças de identificar claramente cada uma dessas respostas.*

FIM do Caderno 1

Cotações (Caderno 1)

Item							
Cotação (em percentagem)							
1.1.	1.2.	2	3	4	5	6	Total (Caderno 1)
7	4	3	5	7	8	6	40

Nome completo: _____

Documento de identificação CC n.º |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|

Assinatura do aluno: _____

Prova Final de Matemática

3.º Ciclo do Ensino Básico | 2024

9.º Ano de Escolaridade

VERSÃO 2

A PREENCHER PELO PROFESSOR CLASSIFICADOR

Classificação em percentagem |__|__|__| (_____ por cento)

Correspondente ao nível |__| (_____)

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 90 minutos | Tolerância: 30 minutos

Caderno 2 – 9 Páginas

Caderno 2: 55 minutos. Tolerância: 20 minutos.

Não é permitido o uso de calculadora.



7. Seja b um número real diferente de 0.

Escreve o número $\frac{(b^{-3})^2}{b^4 \times b^5}$ na forma b^k , com $k \in \mathbb{Z}$

Apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar.

8. Considera, em $\mathbb{R}$, a equação literal

$$P = \frac{1}{3}m \cdot n - r \quad (n \neq 0)$$

Resolve a equação anterior em ordem a m

9. Uma pessoa tinha no bolso x notas de y euros e y notas de x euros.

Se esta pessoa colocar neste bolso mais x notas de x euros e mais y notas de y euros, então esta pessoa terá no bolso:

A ☐ $(x^2 - y^2)$ euros

B ☐ $(x + y)^2$ euros

C ☐ $(x - y)^2$ euros

D ☐ $(x^2 + y^2)$ euros

10. Qual dos seguintes sistemas de equações é **impossível**?

A ☐
$$\begin{cases} y - 2x = 1 \\ \square \\ 4y - x = 1 \end{cases}$$

B ☐
$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ \square \\ 2y - 4x = 2 \end{cases}$$

C ☐
$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ \square \\ y - 4x = 2 \end{cases}$$

D ☐
$$\begin{cases} y - 2x = 1 \\ \square \\ 2y - 4x = -2 \end{cases}$$

11. Na **Figura 7**, estão representados os três primeiros termos de uma sucessão de retângulos decompostos em quadrados (uns brancos e outros cinzentos) geometricamente iguais, de maneira que:

- em cada termo os quadrados brancos formam um quadrado a que se acrescenta uma coluna de quadrados cinzentos
- em cada passo aumenta-se a figura mantendo as características descritas, mas de maneira a acrescentar um quadrado à coluna dos cinzentos.

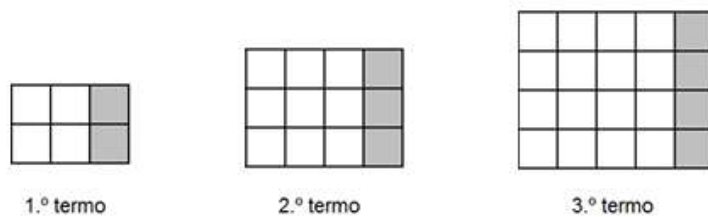


Figura 7

Considera o termo da sucessão com 10 quadrados cinzentos.

Determina o número **total** de quadrados desse termo.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

12. Na **Figura 8** está representada uma função f de proporcionalidade inversa.

Sabe-se $A\left(\frac{1}{2}m, 5\right)$ e $B(m - 2, 3)$ são dois pontos do gráfico de f , com $m \in \mathbb{R}$

Determina o valor de m .

Mostra como chegaste à tua resposta.

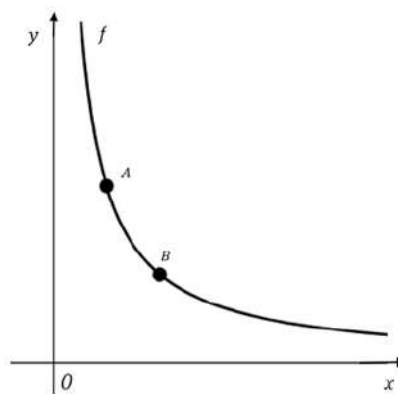


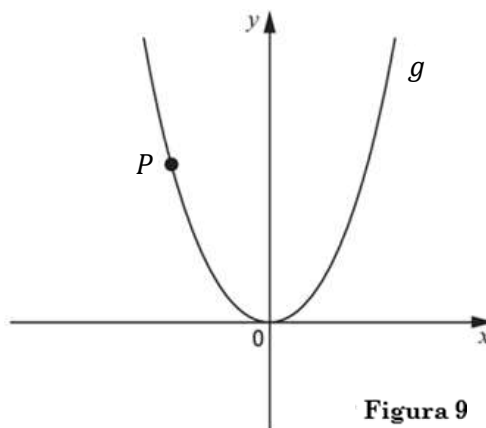
Figura 8

13. Resolve, em $\mathbb{R}$, a inequação seguinte:

$$2x - \frac{4x - 5}{2} \leq \frac{2x - 1}{3}$$

Apresenta o conjunto-solução na forma de intervalo de números reais e todos os cálculos que efetuares.

14. A **Figura 9** mostra parte do gráfico da função g , definida por $g(x) = ax^2$.
Sabe-se que o ponto P de coordenadas $(-2, 10)$ pertence ao gráfico de g .



Determina $2g(-1) - g(2)$.

Mostra como chegaste à tua resposta.

15. Qual dos seguintes conjuntos é constituído apenas por números racionais?

A ☐ $\left\{\frac{2}{3}; 1,4142; 3,1416; (\sqrt[3]{7})^3\right\}$ B ☐ $\left\{\frac{2}{3}; \sqrt{2}; \pi; \sqrt[3]{7}\right\}$

C ☐ $\left\{\frac{2}{3}; 1,4142; \pi^3; (\sqrt[3]{7})^3\right\}$ D ☐ $\{0, (6); 1,4142; \pi^3; (\sqrt[3]{7})^3\}$

16. Uma viga de madeira é usada para suportar uma parede construída em solo horizontal, como representado na **Figura 10**.

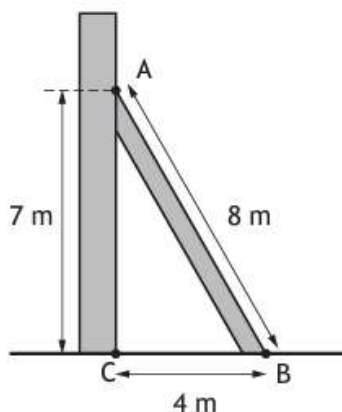


Figura 10

Como a **Figura 10** sugere, sabe-se que:

- a viga $[AB]$, tem 8 metros de comprimento
- o ponto A fica a 7 metros do ponto C
- o ponto B fica a 4 metros do ponto C

Determina se a parede é perpendicular ao solo.

Apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar.

17. Na **Figura 11** está representado um sólido que pode ser decomposto num cubo e numa pirâmide quadrangular regular. Os vértices da base da pirâmide são os pontos médios dos lados do quadrado $[OPQR]$.

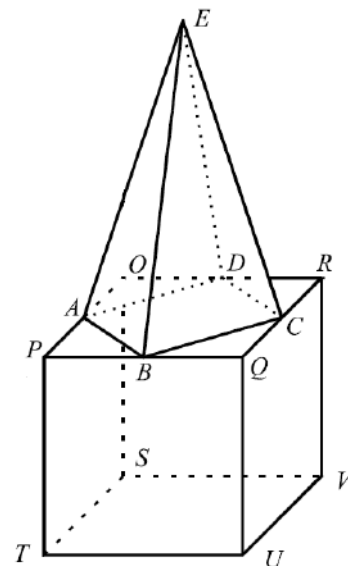


Figura 11

17.1. Qual das afirmações seguintes é **falsa**?

- A ☐ As retas AO e TU são não coplanares
- B ☐ As retas EC e QR são concorrentes
- C ☐ Os planos ABE e ADC são estritamente paralelos
- D ☐ Os planos UVO e APU são coincidentes

17.2. Sabe-se que a medida da área do triângulo $[STU]$ é igual a K .

Determina, em função de K , a medida da área do triângulo $[APB]$, na mesma unidade.

Responde a um e um só dos grupos C ou D

Se responderes a mais do que um destes grupos deves indicar qual deles pretendes que seja classificado. Se não deres esta indicação será classificado o grupo a que responderes em primeiro lugar.

Grupo C

18. A Rita faz e vende velas.

Essas velas devem ter 22,5 *cm* de altura.

A Rita rejeita qualquer vela que tenha uma diferença **superior** a 2 *mm* dessa altura.

A Rita fez 10 velas, tendo as mesmas as seguintes alturas (em centímetros):

22,3 22,6 22,5 22,9 22,3 23,1 22,6 22,4 22,7 22,8

O Pedro, amigo da Rita, vai retirar, aleatoriamente, uma das dez velas que a Rita fez.

Qual o valor da probabilidade de a Rita rejeitar a vela retirada pelo Pedro?

A ☐ 50%

B ☐ 40%

C ☐ 30%

D ☐ 20%

Grupo D

18. Seja β um ângulo agudo.

Considera a seguinte expressão:

$$\cos \beta \times \sin \beta \times \tan \beta$$

Qual das expressões seguintes é equivalente à expressão anterior?

A ☐ $\cos \beta$

B ☐ $1 - \sin^2 \beta$

C ☐ $\sin \beta$

D ☐ $1 - \cos^2 \beta$

*Esta página só deve ser utilizada se quiseres completar ou emendar qualquer resposta.
Caso a utilizes, não te esqueças de identificar claramente cada uma dessas respostas.*

FIM do Caderno 2

Cotações (Caderno 2)

Item							
Cotação (em percentagem)							
7	8	9	10	11	12	13	Total (Caderno 2)
4	3	3	3	5	5	8	60
14	15	16	17.1.	17.2.	18		
7	3	7	3	6	3		

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A prova é formada por itens de escolha múltipla e de resposta restrita. Os critérios de classificação dos itens de resposta restrita estão organizados por etapas, atribuindo-se, a cada uma delas, uma pontuação.

Caso os alunos adotem um processo não previsto nos critérios específicos, cabe ao professor corretor adaptar a distribuição da cotação atribuída.

Deve ser atribuída a classificação de zero quando um aluno apresente apenas o resultado final de um item, ou de uma etapa, quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações;

Nas seguintes situações deve descontar-se um ponto às cotações estabelecidas para a etapa respetiva:

- Ocorrência de um erro de cálculo;
- Apresentação de uma resposta com o formato que não esteja de acordo com o que foi solicitado;
- Apresentação de expressões com erros do ponto de vista formal.

Caso ocorram erros que revelem desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades ou o aluno apresente uma resolução incompleta de uma etapa, deve descontar-se até metade da cotação dessa etapa.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

	Caderno 1								Caderno 2														
	Grupo						A	B	Grupo														C
Item	1.1	1.2	2	3	4	5	6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17.1	17.2	18	18	Total
Cotação	7	4	3	5	7	8	6	6	4	3	3	3	5	5	8	7	3	7	3	6	3	3	100

CADERNO 1					
QUESTÃO	DESCRIÇÃO				COTAÇÃO
1.					11
	1.1.	(1.º Processo) - Indicar as coordenadas dos pontos $A(12, 21)$ e $B(18, 30)$ - Escrever $m_{AB} = \frac{30-21}{18-12} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ ou equivalente - Determinar a ordenada na origem (3) - Responder $f(d) = \frac{3}{2}d + 3$ (2.º Processo) - Mostrar que $f(12) = 21$ - Mostrar que $f(18) = 30$ - Referir que dois pontos definem uma reta - Concluir como A e B pertencem ao gráfico da função então a função f é definida por $f(d) = \frac{3}{2}d + 3$	2 2 2 1 1 1 2 3	7	
	1.2.	- Determinar o custo da viagem de ida $f(10) = 18€$ (Ver Nota) - Determinar o custo total da viagem ($18 \times 2 = 36€$) Nota: Caso o aluno responda $f(20) = 33€$, o aluno terá no máximo 2 pontos	2 2	4	
2.		Versão 1 Versão 2 (A) (C)			3
3.					5
		- Determinar a amplitude do ângulo externo do polígono regular (36°) - Determinar a amplitude do ângulo pedido (126°)		3 2	
4.					7
		Escrever a equação $k^2 - 6k + 150 + 2k^2 - 5k + 40 = 180$ ou equivalente		2	

		- Escrever a equação na forma canónica - Resolver a equação quadrática - Responder que os possíveis valores de k pertencem ao conjunto $\left\{\frac{5}{3}, 2\right\}$	2 2 1	
5.				8
		- Determinar o volume do cilindro ($144\pi h \text{ cm}^3$) - Determinar o volume da semiesfera ($1152\pi \text{ cm}^3$) - Escrever a equação $8784\pi = 1152\pi + 144\pi h$ ou equivalente - Resolver a equação em ordem a h e responder ($h = 53 \text{ cm}$)	2 2 1 3	
Grupo A				
6.				6
		- Construir um esquema auxiliar de contagem (por exemplo, tabela de dupla entrada) - Determinar o número de casos possíveis (25) - Determinar o número de casos favoráveis (21) - Calcular a probabilidade pedida e responder (84%)	2 1 1 2	
Grupo B				
6.				6
		- Determinar $\overline{BC}$ ($\overline{BC} = 420,125 \text{ m}$) - Determinar $\overline{AC}$ ($\overline{AC} = 732,465 \text{ m}$) - Calcular o comprimento total do percurso	2 2 2	
CADERNO 2				
7.				4
		- Calcular o valor da potência de potência $((b^{-3})^2 = b^{-6})$ - Multiplicar as potências com o mesmo expoente $(b^4 \times b^5 = b^9)$ - Dividir as potências com a mesma base $\left(\frac{b^{-6}}{b^9}\right) = b^{-6-9} = b^{-15}$	1 1 2	
8.				3
		Escrever $m = \frac{3p+3r}{n}$ ou equivalente	3	
9.		Versão 1 (C)	Versão 2 (B)	3
10.		Versão 1 (B)	Versão 2 (D)	3
11.				5
		- Indicar que o termo com 10 quadrados cinzentos (termo de ordem 9) tem $10^2 = 100$ quadrados brancos - Indicar o número total de quadrados ($100 + 10 = 110$)	3 2	
12.				5
		- Escrever a equação $\frac{1}{2}m \times 5 = (m - 2) \times 3$ ou equivalente - Resolve a equação e apresenta o valor de m	2 3	
13.				8
		- Reduzir todos os termos ao mesmo denominador - Isolar os termos semelhantes	1 2	

		- Escrever $x \geq \frac{17}{4}$ - Responder $C.S. = \left[\frac{17}{4}; +\infty\right[$	3 2	
14.				7
		- Determinar o valor de $a \left(\frac{5}{2}\right)$ - Determinar $g(-1) \left(\frac{5}{2}\right)$ e $g(2) \quad (10)$ - Calcular o valor de $2g(-1) - g(2) \quad (-5)$	3 2 2	
15.		Versão 1 (B) Versão 2 (A)		3
16.				7
		- Escrever a proposição $8^2 = 4^2 + 7^2$ ou equivalente - Verificar que a proposição é falsa - Concluir que a parede não é perpendicular ao solo	2 2 3	
17.				10
	17.1.	Versão 1 (D) Versão 2 (C)	3	
	17.2.	(1.º Processo) - Justificar que os triângulos $[STU]$ e $[APB]$ são semelhantes de razão $\frac{1}{2}$ - Escrever que a razão entre as áreas dos dois triângulos é da forma $r^2 = \frac{A_{[APB]}}{A_{[STU]}}$ ou equivalente - Calcular a medida da área do triângulo $[APB] \left(\frac{k}{4}\right)$ (2.º Processo) - Escrever $\frac{\overline{ST} \times \overline{TU}}{2} = k \Leftrightarrow \overline{ST}^2 = 2k$ ou equivalente - Escrever $\overline{AP} = \frac{\overline{ST}}{2}$ - Escrever $A_{[APB]} = \frac{\overline{AP}^2}{2} = \frac{\left(\frac{\overline{ST}}{2}\right)^2}{2} = \frac{\overline{ST}^2}{8} = \frac{2k}{8} = \frac{k}{4}$	2 2 2 2 2 2	6
Grupo C				
18.		Versão 1 (B) Versão 2 (C)		3
Grupo D				
18.		Versão 1 (B) Versão 2 (D)		3

SPM TESTES

Teste de Matemática

2024

10.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos | Tolerância: 30 minutos

(quatro páginas)

VERSÃO 1

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.



1. Sejam f e g as funções definidas, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = ax + b$ e $g(x) = -3x + 4$.

Sabe-se que $f(x) - g(x) > 0$, qualquer que seja o valor de x .

Nestas condições, os valores de a e de b são:

(A) $a = -3$ e $b > 4$

(B) $a > -3$ e $b > 4$

(C) $a = 4$ e $b > -3$

(D) $a > 4$ e $b > -3$

2. Seja g uma função quadrática.

Sabe-se que $g(0) = 4$, $g(4) = 0$ e que g não tem dois zeros.

Relativamente ao gráfico da função g , qual das afirmações seguintes é a verdadeira?

(A) Tem a concavidade voltada para cima e $x = 0$ é eixo de simetria.

(B) Tem a concavidade voltada para cima e $x = 4$ é eixo de simetria.

(C) Tem a concavidade voltada para baixo e $x = 2$ é eixo de simetria.

(D) Tem a concavidade voltada para baixo e $x = 4$ é eixo de simetria.

3. Na Figura 1, estão representados, num referencial *o.n.* Oxy , os pontos $A(1,4)$ e $B(5,1)$.

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores de coordenadas, respetivamente, $(0,2)$ e $(-1,0)$ e C o ponto de coordenadas $(1,1)$.

3.1 Assinale no gráfico o trajeto percorrido por um ponto

quando se desloca do ponto A para B , sucessivamente segundo as direções dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é, parte do ponto A segundo a direção do vetor $\vec{u}$ e, depois, segundo a direção do vetor $\vec{v}$, até chegar a B .

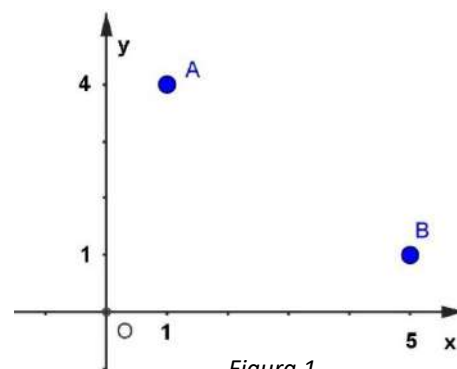


Figura 1

Para dar a sua resposta siga os seguintes procedimentos:

- 1) Represente na sua folha de respostas o referencial *o.n.* Oxy da figura e os pontos A e B ;
- 2) Trace a reta que passa pelo ponto A e tem a direção do vetor $\vec{u}$;
- 3) Trace a reta que passa pelo ponto B e tem a direção do vetor $\vec{v}$;
- 4) Identifique o ponto de interseção das duas retas;
- 5) Assinale na figura os segmentos de reta orientados (com setas), correspondentes aos vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{CB}$.

3.2 Se $\|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{CB}\| = k\|\overrightarrow{AB}\|$, então o valor de k é

(A) $\frac{25}{49}$

(B) $\frac{49}{25}$

(C) $\frac{7}{5}$

(D) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

4. Seja f a função definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 4$.

4.1 Verifique que -1 é um zero de f .

4.2 Construa um quadro de sinais para a função f .

5. Na Figura 2, estão representados, num referencial ortonormado Oxy , parte da circunferência de equação $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$, de centro C e um segmento de reta $[AB]$.

Os pontos A e B pertencem à circunferência, sendo que A tem abscissa -1 e B tem ordenada 0 .

5.1 Qual é a condição que define a região sombreada?

(A) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4 \vee y \geq x + 3$

(B) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 \leq 4 \vee y \geq x + 3$

(C) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4 \wedge y = x + 3$

(D) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 \leq 4 \wedge y \geq x + 3$

5.2 Calcule a área da figura sombreada.

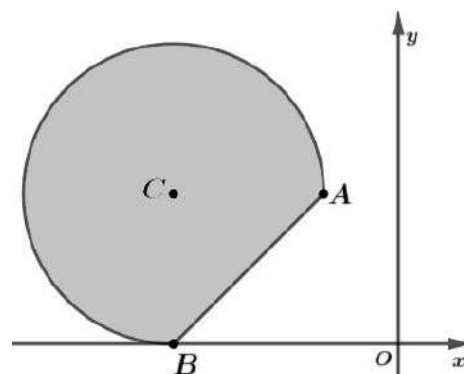


Figura 2

6. Na Figura 3, está representada, num referencial o. n. $Oxyz$, uma pirâmide triangular regular $[OABV]$.

Sabe-se que:

- A base da pirâmide, o triângulo equilátero $[OAB]$, está contida no plano xOy ;
- O eixo Oy é um eixo de simetria da base;
- O ponto $M(0, 6, 0)$ pertence à aresta $[AB]$;
- O ponto C é o centro da base (sendo, neste caso, o pé da perpendicular traçada do vértice V para o plano da base);
- As retas PO e VM são perpendiculares e interseam-se no ponto P ;
- O vértice V está no plano $z = 6$.

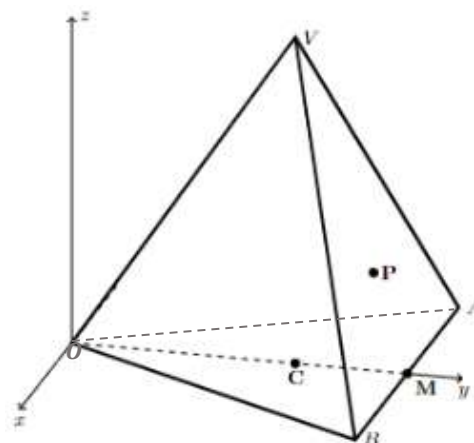


Figura 3

6.1 Recordando que, sendo C o baricentro da base, $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OM}$, mostre que a ordenada de C é 4 .

6.2 Determine uma equação vetorial da reta VM .

6.3 Determine o valor de $\overline{OP}$.

(Sugestão: Comece por calcular a área do triângulo $[OVM]$ usando bases diferentes)

7. Seja g a função definida, em $\mathbb{R}$, por $g(x) = x^2 - 3x + 4$.

7.1 Resolva a condição $g(x) \leq -3x + 5$.

7.2 Considere a função h definida por $h(x) = g(x + a)$, com $a \neq 0$.

Determine a sabendo que $h(0) = g(0)$.

8. Sejam f , g e h as funções definidas, em $\mathbb{R}$, por

$$f(x) = (2x - 1)(x - 2)(x + 1), \quad g(x) = x^3 \quad \text{e} \quad h(x) = 3x^2 + 3x - 2.$$

8.1 Resolva a equação $h(x) = -\frac{11}{4}$ e, utilizando informações retiradas da resolução desta equação ou recorrendo a outro processo, determine a , b e c de modo que $h(x) = a(x - b)^2 + c$.

8.2 Mostre que $f(x) = 2g(x) - h(x)$.

8.3 O número de soluções da equação $2x^3 = 3x^2 + 3x - 2$ é

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

9. Num referencial *o. n.* Oxy , considere os pontos $A(a, 0)$, com $a \neq 0$, $B\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{4}a\right)$ e o ponto C tal que $\overrightarrow{CB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$.

Qual das seguintes equações define a equação reduzida da reta OC ?

(A) $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

(B) $y = \frac{1}{4}x$

(C) $y = x$

(D) $y = x + \frac{1}{2}$

FIM

Questão	1.	2.	3.1	3.2	4.1	4.2	5.1	5.2	6.1	6.2	6.3	7.1	7.2	8.1	8.2	8.3	9.	TOTAL
Cotação	8	8	14	8	14	14	8	13	14	14	14	14	14	13	14	8	8	200

SPM TESTES

Teste de Matemática

2024

10.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

(quatro páginas)

VERSÃO 2

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.



1. Sejam f e g as funções definidas, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = ax + b$ e $g(x) = -3x + 4$.

Sabe-se que $f(x) - g(x) > 0$, qualquer que seja o valor de x .

Nestas condições, os valores de a e de b são:

(A) $a > -3$ e $b > 4$

(B) $a = -3$ e $b > 4$

(C) $a = 4$ e $b > -3$

(D) $a > 4$ e $b > -3$

2. Seja g uma função quadrática.

Sabe-se que $g(0) = 4$, $g(4) = 0$ e que g não tem dois zeros.

Relativamente ao gráfico da função g , qual das afirmações seguintes é a verdadeira?

(A) Tem a concavidade voltada para cima e $x = 4$ é eixo de simetria.

(B) Tem a concavidade voltada para cima e $x = 0$ é eixo de simetria.

(C) Tem a concavidade voltada para baixo e $x = 2$ é eixo de simetria.

(D) Tem a concavidade voltada para baixo e $x = 4$ é eixo de simetria.

3. Na Figura 1, estão representados, num referencial *o.n.* Oxy , os pontos $A(1,4)$ e $B(5,1)$.

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores de coordenadas, respetivamente, $(0,2)$ e $(-1,0)$ e C o ponto de coordenadas $(1,1)$.

3.1 Assinale no gráfico o trajeto percorrido por um ponto

quando se desloca do ponto A para B , sucessivamente segundo as direções dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é, parte do ponto A segundo a direção do vetor $\vec{u}$ e, depois, segundo a direção do vetor $\vec{v}$, até chegar a B .

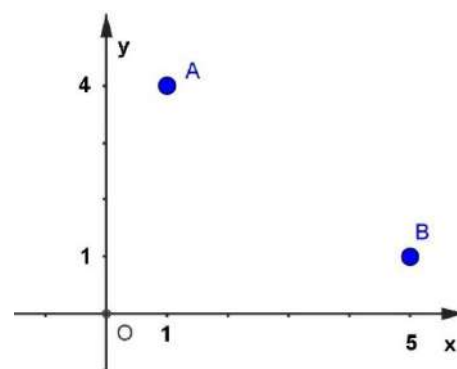


Figura 1

Para dar a sua resposta siga os seguintes procedimentos:

- 1) Represente na sua folha de respostas o referencial *o.n.* Oxy da figura e os pontos A e B ;
- 2) Trace a reta que passa pelo ponto A e tem a direção do vetor $\vec{u}$;
- 3) Trace a reta que passa pelo ponto B e tem a direção do vetor $\vec{v}$;
- 4) Identifique o ponto de interseção das duas retas;
- 5) Assinale na figura os segmentos de reta orientados (com setas), correspondentes aos vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{CB}$.

3.2 Se $\|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{CB}\| = k\|\overrightarrow{AB}\|$, então o valor de k é

(A) $\frac{25}{49}$

(B) $\frac{49}{25}$

(C) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

(D) $\frac{7}{5}$

4. Seja f a função definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 4$.

4.1 Verifique que -1 é um zero de f .

4.2 Construa um quadro de sinais para a função f .

5. Na *Figura 2*, estão representados, num referencial ortonormado Oxy , parte da circunferência de equação $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$, de centro C e um segmento de reta $[AB]$.

Os pontos A e B pertencem à circunferência, sendo que A tem abscissa -1 e B tem ordenada 0 .

5.1 Qual é a condição que define a região sombreada?

(A) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4 \vee y \geq x + 3$

(B) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 \leq 4 \vee y \geq x + 3$

(C) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 \leq 4 \wedge y \geq x + 3$

(D) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4 \wedge y = x + 3$

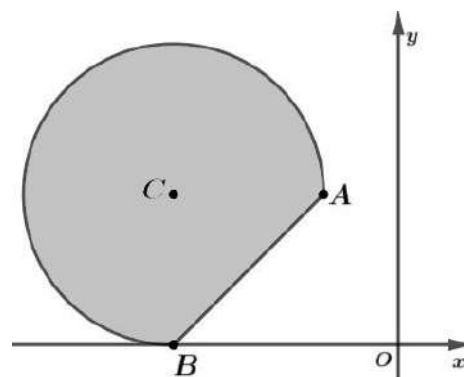


Figura 2

5.2 Calcule a área da figura sombreada.

6. Na *Figura 3*, está representada, num referencial o. n. $Oxyz$, uma pirâmide triangular regular $[OABV]$.

Sabe-se que:

- A base da pirâmide, o triângulo equilátero $[OAB]$, está contida no plano xOy ;
- O eixo Oy é um eixo de simetria da base;
- O ponto $M(0, 6, 0)$ pertence à aresta $[AB]$;
- O ponto C é o centro da base (sendo, neste caso, o pé da perpendicular traçada do vértice V para o plano da base);
- As retas PO e VM são perpendiculares e intersectam-se no ponto P ;
- O vértice V está no plano $z = 6$.

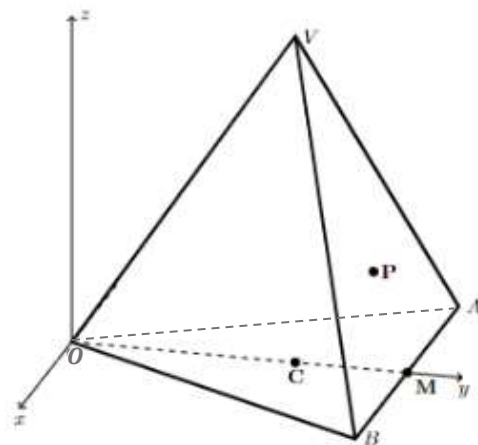


Figura 3

6.1 Recordando que, sendo C o baricentro da base, $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OM}$, mostre que a ordenada de C é 4 .

6.2 Determine uma equação vetorial da reta VM .

6.3 Determine o valor de $\overline{OP}$.

(Sugestão: Comece por calcular a área do triângulo $[OVM]$ usando bases diferentes)

7. Seja g a função definida, em $\mathbb{R}$, por $g(x) = x^2 - 3x + 4$.

7.1 Resolva a condição $g(x) \leq -3x + 5$.

7.2 Considere a função h definida por $h(x) = g(x + a)$, com $a \neq 0$.

Determine a sabendo que $h(0) = g(0)$.

8. Sejam f , g e h as funções definidas, em $\mathbb{R}$, por

$$f(x) = (2x - 1)(x - 2)(x + 1), \quad g(x) = x^3 \quad \text{e} \quad h(x) = 3x^2 + 3x - 2.$$

8.1 Resolva a equação $h(x) = -\frac{11}{4}$ e, utilizando informações retiradas da resolução desta equação ou recorrendo a outro processo, determine a , b e c de modo que $h(x) = a(x - b)^2 + c$.

8.2 Mostre que $f(x) = 2g(x) - h(x)$.

8.3 O número de soluções da equação $2x^3 = 3x^2 + 3x - 2$ é

(A) 3

(B) 2

(C) 1

(D) 0

9. Num referencial *o. n.* Oxy , considere os pontos $A(a, 0)$, com $a \neq 0$, $B\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{4}a\right)$ e o ponto C tal que $\overrightarrow{CB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$.

Qual das seguintes equações define a equação reduzida da reta OC ?

(A) $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

(B) $y = \frac{1}{4}x$

(C) $y = x + \frac{1}{2}$

(D) $y = x$

FIM

Questão	1.	2.	3.1	3.2	4.1	4.2	5.1	5.2	6.1	6.2	6.3	7.1	7.2	8.1	8.2	8.3	9.	TOTAL
Cotação	8	8	14	8	14	14	8	13	14	14	14	14	14	13	14	8	8	200

Teste de Matemática 10.º ANO

2024

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A prova é formada por itens de escolha múltipla e de resposta restrita. Os critérios de classificação dos itens de resposta restrita estão organizados por etapas, atribuindo-se uma pontuação a cada uma delas.

Caso os alunos adotem um processo não previsto nos critérios específicos, cabe ao professor corretor adaptar a distribuição da cotação atribuída.

Deve ser atribuída a classificação de zero pontos nas seguintes situações:

- Caso um aluno apresente apenas o resultado final de um item ou de uma etapa, quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações;
- Caso o aluno utilize de forma inequívoca a calculadora, uma vez que tal não é solicitado nesta prova.

Nas seguintes situações deve descontar-se um ponto às cotações estabelecidas para a etapa respetiva:

- Ocorrência de um erro de cálculo;
- Apresentação de uma resposta com o formato que não esteja de acordo com o que foi solicitado;
- Apresentação de expressões com erros do ponto de vista formal.

Caso ocorram erros que revelem desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades ou o aluno apresente uma resolução incompleta de uma etapa, deve descontar-se até metade da cotação dessa etapa.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

Questão	1	2	3.1	3.2	4.1	4.2	5.1	5.2	6.1	6.2	6.3	7.1	7.2	8.1	8.2	8.3	9	TOTAL
Cotação	8	8	14	8	14	14	8	13	14	14	14	14	14	13	14	8	8	200

QUESTÃO		DESCRIÇÃO	COTAÇÃO
1.	Versão 1 (A); Versão 2 (B)		8
2.	Versão 1 (B); Versão 2 (A)		8
3.			22
3.1	- Representar na sua folha de respostas o referencial <i>o. n. Oxy</i> da figura e os pontos <i>A</i> e <i>B</i>..... 3 pontos - Traçar a reta que passa pelo ponto <i>A</i> e tem a direção do vetor $\vec{u}$..... 4 pontos - Traçar a reta que passa pelo ponto <i>B</i> e tem a direção do vetor $\vec{v}$ 4 pontos - Identificar o ponto de interseção das duas retas - <i>C</i> 1 ponto - Assinalar na figura os segmentos de reta orientados (com setas), correspondentes aos vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{CB}$ 2 pontos	14	
3.2	Versão 1 (C); Versão 2 (D)	8	
4.		28	
4.1	- Calcular $f(-1)$ 10 pontos - Concluir que -1 é zero de f porque $f(-1) = 0$ 4 pontos	14	
4.2	- Utilizar a regra de Ruffini para dividir o polinómio $f(x)$ por $x + 1$ e decompor em fatores $(x + 1)(2x^2 - 4x + 4)$ 4 pontos - Verificar que $2x^2 - 4x + 4$ não tem zeros reais 2 pontos - Construir o quadro de sinais, assinalando corretamente os sinais dos polinómios $x + 1$ e $2x^2 - 4x + 4$ 5 pontos - Preencher corretamente a linha do sinal de $f(x)$ 3 pontos	14	
5.		21	
5.1	Versão 1 (D); Versão 2 (C)	8	
5.2	- Calcular a área do triângulo $[ACB]$ 5 pontos - Calcular $\frac{3}{4}$ da área do círculo de centro <i>C</i> 6 pontos - Obter a área da região sombreada 2 pontos	13	
6.		42	
6.1	- Concluir que $\overline{OM} = 6$ 6 pontos - Concluir que $\overline{CM} = 2$ e que $y_C = 4$ 8 pontos	14	
6.2	- Concluir que $V(0, 4, 6)$ 4 pontos - Obter as coordenadas de $\overrightarrow{VM} = M - V = (0, 2, -6)$ 4 pontos - Escrever uma equação vetorial da reta VM 6 pontos	14	
6.3	Calcular a área do triângulo $[OVM]$ de base $[OM]$ e altura $[CV]$	14	

		$(A_{[OVM]} = 18)$ 5 pontos • Obter a medida $\overline{VM} = 2\sqrt{10}$ 4 pontos • Obter a expressão da área do triângulo $[OVM]$ considerando a base $[VM]$ e altura $[OP]$, igualar ao valor obtido antes e resolver a equação para obter $\overline{OP} = \frac{9}{5}\sqrt{10}$ 5 pontos		
7.				28
	7.1		14	
		• Verificar que $g(x) \leq -3x + 5$ é equivalente a $x^2 - 1 \leq 0$ 4 pontos • Identificar corretamente os zeros de $x^2 - 1$ 3 pontos • Indicar o conjunto-solução $[-1,1]$ 7 pontos		
	7.2	• Verificar que $h(0) = g(0)$ é equivalente a $4 = g(a)$ 5 pontos • Concluir que $4 = g(a) \Leftrightarrow a = 3$ 9 pontos	14	
8.				35
	8.1	1.º processo • Resolver a equação $h(x) = -\frac{11}{4}$ 5 pontos • Concluir que o vértice da parábola tem coordenadas $(-\frac{1}{2}, -\frac{11}{4})$.. 3 pontos • Concluir que $h(x) = 3(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{11}{4}$ 2 pontos • Concluir que $a = 3, b = -\frac{1}{2}$ e $c = -\frac{11}{4}$ 3 pontos 2.º processo • Resolver a equação $h(x) = -\frac{11}{4}$ 5 pontos • Escrever $h(x)$ na forma $3(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{11}{4}$ 5 pontos • Concluir que $a = 3, b = -\frac{1}{2}$ e $c = -\frac{11}{4}$ 3 pontos	13	
	8.2	• Obter a expressão simplificada de $2g(x) - h(x)$ 2 pontos • Obter a expressão simplificada de $f(x)$ 11 pontos • Concluir que $2g(x) - h(x) = f(x)$ 1 ponto	14	
	8.3	_____ Versão 1 (D); Versão 2 (A) _____	8	
9.		_____ Versão 1 (C); Versão 2 (D) _____		8

SPM TESTES

Teste de Matemática 11.º ano

2024

11.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos. (quatro páginas)

VERSÃO 1

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Não é necessário o uso de máquina de calcular.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.



1. Na Figura 1, estão representados, num referencial o.n. xOy , a circunferência trigonométrica e um trapézio $[EBCD]$.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(1, 0)$;
- o ponto B pertence ao primeiro quadrante e à circunferência trigonométrica;
- o ponto C é a interseção da semirreta $\vec{OB}$ com a reta definida por $x = 1$;
- os pontos D e E pertencem ao eixo Oy .

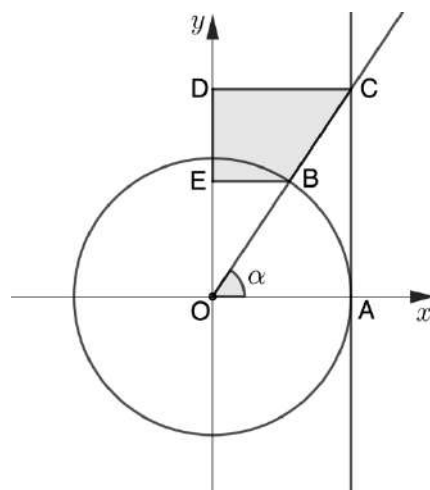


Figura 1

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo AOB $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

- 1.1. Mostre que a área do trapézio $[EB CD]$, representada a sombreado, é dada em função

$$\text{de } \alpha \text{ por } A(\alpha) = \frac{\sin^3 \alpha}{2 \cos \alpha}$$

- 1.2. Determine a área do trapézio $[EB CD]$ quando o ponto C tem coordenadas $(1, 2)$

- 1.3. Qual das expressões seguintes representa a distância de B a A ?

(A) $\sqrt{2 + 2 \cos \alpha}$

(B) $\sqrt{2 + 2 \sin \alpha}$

(C) $\sqrt{2(1 - \sin \alpha)}$

(D) $\sqrt{2(1 - \cos \alpha)}$

2. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2 - 2 \cos\left(6x - \frac{4\pi}{3}\right)$

- 2.1. Prove que $\frac{\pi}{3}$ é o período positivo mínimo da função f

- 2.2. Determine os zeros da função f que pertencem ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}\right]$

3. Seja g a função de domínio D e contradomínio $] -\infty, 1]$ definida por $g(x) = 1 + \tan x$

Qual dos conjuntos seguintes pode ser o conjunto D ?

(A) $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$

(B) $\left]-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right]$

(C) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

(D) $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$

4. Considere, num referencial o.n. xOy , a circunferência definida por $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$
A reta r é tangente à circunferência no ponto de coordenadas $T(1, 0)$

Qual é o declive da reta r ?

- (A) $-\frac{1}{2}$ (B) 2 (C) -2 (D) $\frac{1}{2}$

5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α paralelo ao eixo Ox que passa nos pontos de coordenadas $A(0, 0, \frac{1}{2})$ e $B(0, 1, 0)$

5.1. Mostre que uma equação do plano α é $y + 2z = 1$

5.2. Determine o ponto de interseção do plano α com a reta r de equação vetorial

$$(x, y, z) = (-1, -5, 1) + k(1, 4, -1), \quad k \in \mathbb{R}$$

6. Identifique qual das seguintes sucessões, definidas pelo respetivo termo geral, é monótona.

(A) $u_n = \cos(n\pi)$

(B) $v_n = 2n^2 - 5n$

(C) $w_n = \frac{n+1}{2n-5}$

(D) $z_n = (-1)^{n+1} + n$

7. Considere uma progressão geométrica (b_n) de razão $\frac{1}{2}$

7.1. Supondo que $b_3 + b_6 = \frac{27}{16}$, determine uma expressão do termo geral da sucessão (b_n)

7.2. Considere a sucessão (c_n) definida por $c_n = b_n^2$

Prove que (c_n) é uma progressão geométrica e indique o valor da respetiva razão.

8. Considere a sucessão (a_n) definida por $a_n = \frac{1-2n}{n^2}$

Sabe-se, acerca de uma função g , de domínio $\mathbb{R}$, que $\lim g(a_n) = -\infty$

Qual das seguintes expressões pode definir $g(x)$?

(A) $\begin{cases} x^2 - 3 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{x+2}{3x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} x^3 + x & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{2x-5}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} \frac{x-2}{x} & \text{se } x < 0 \\ x^3 + 2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} \frac{x+3}{x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{5x}{x+1} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

9. Considere as funções reais de variável real, f e g definidas por

- $f(x) = \frac{3x+1}{x+1}$ em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- $g(x) = 2x^2 + x - 1$ em $\mathbb{R}$

e que estão representadas em parte no referencial xOy da Figura 2.

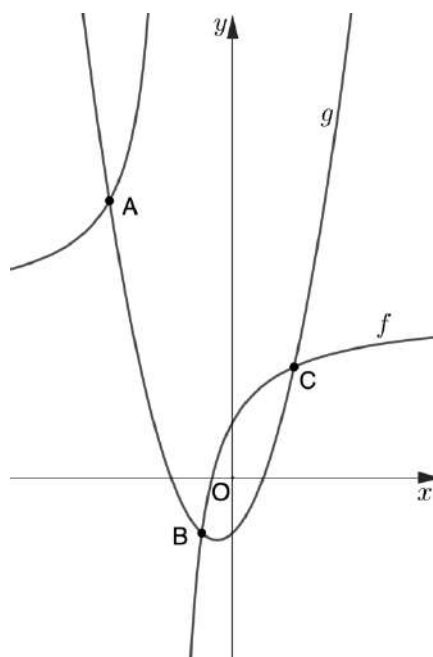


Figura 2

9.1. Escreva a expressão analítica da função f na forma $a + \frac{b}{x+c}$ e identifique as duas assíntotas do gráfico de f através das respetivas equações.

9.2. Os gráficos das funções f e g interseitam-se nos pontos A, B e C .

Sabe-se que C tem coordenadas $(1, 2)$.

Determine as coordenadas dos pontos A e B .

9.3. Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left(\frac{g(x)}{1-4x^2} \right)$

9.4. Considere a função h definida por $h(x) = \sqrt{f(x) - 1}$

O domínio da função h é o conjunto

- (A) $[0, +\infty[$ (B) $]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$ (C) $]-\infty, -1[\cup [0, +\infty[$ (D) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

10. Calcule o valor do seguinte limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+2x}}$

FIM

Questão	1.1.	1.2.	1.3.	2.1.	2.2.	3.	4.	5.1.	5.2.	6.	7.1.	7.2.	8.	9.1.	9.2.	9.3.	9.4.	10.	Total
Cotação	14	14	8	10	14	8	8	12	12	8	14	10	8	12	16	12	8	12	200

SPM TESTES

Teste de Matemática 11.º ano

2024

11.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos. (quatro páginas)

VERSÃO 2

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Não é necessário o uso de máquina de calcular.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. Na Figura 1, estão representados, num referencial o.n. xOy , a circunferência trigonométrica e um trapézio $[EBCD]$.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(1, 0)$;
- o ponto B pertence ao primeiro quadrante e à circunferência trigonométrica;
- o ponto C é a interseção da semirreta $\hat{OB}$ com a reta definida por $x = 1$;
- os pontos D e E pertencem ao eixo Oy .

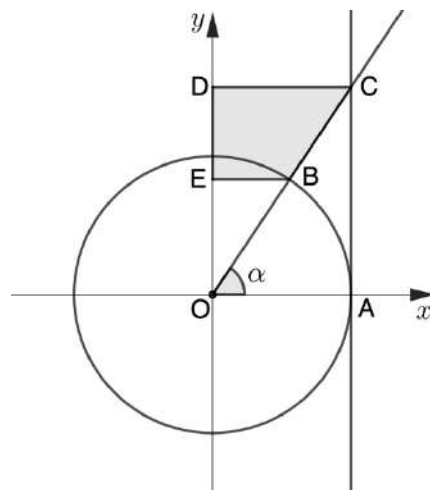


Figura 1

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo AOB $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

- 1.1. Mostre que a área do trapézio $[EB CD]$, representada a sombreado, é dada em função

de α por $A(\alpha) = \frac{\sin^3 \alpha}{2 \cos \alpha}$

- 1.2. Determine a área do trapézio $[EB CD]$ quando o ponto C tem coordenadas $(1, 2)$

- 1.3. Qual das expressões seguintes representa a distância de B a A ?

(A) $\sqrt{2(1 - \sin \alpha)}$

(B) $\sqrt{2(1 - \cos \alpha)}$

(C) $\sqrt{2 + 2 \sin \alpha}$

(D) $\sqrt{2 + 2 \cos \alpha}$

2. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2 - 2 \cos\left(6x - \frac{4\pi}{3}\right)$

- 2.1. Prove que $\frac{\pi}{3}$ é o período positivo mínimo da função f

- 2.2. Determine os zeros da função f que pertencem ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}\right]$

3. Seja g a função de domínio D e contradomínio $]-\infty, 1]$ definida por $g(x) = 1 + \tan x$

Qual dos conjuntos seguintes pode ser o conjunto D ?

(A) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

(B) $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$

(C) $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$

(D) $\left]-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right]$

4. Considere, num referencial o.n. xOy , a circunferência definida por $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$
A reta r é tangente à circunferência no ponto de coordenadas $T(1, 0)$

Qual é o declive da reta r ?

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) -2 (C) 2 (D) $-\frac{1}{2}$

5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α paralelo ao eixo Ox que passa nos pontos de coordenadas $A(0, 0, \frac{1}{2})$ e $B(0, 1, 0)$

5.1. Mostre que uma equação do plano α é $y + 2z = 1$

5.2. Determine o ponto de interseção do plano α com a reta r de equação vetorial

$$(x, y, z) = (-1, -5, 1) + k(1, 4, -1), k \in \mathbb{R}$$

6. Identifique qual das seguintes sucessões, definidas pelo respetivo termo geral, é monótona.

- (A) $z_n = (-1)^{n+1} + n$ (B) $w_n = \frac{n+1}{2n-5}$
(C) $v_n = 2n^2 - 5n$ (D) $u_n = \cos(n\pi)$

7. Considere uma progressão geométrica (b_n) de razão $\frac{1}{2}$

7.1. Supondo que $b_3 + b_6 = \frac{27}{16}$, determine uma expressão do termo geral da sucessão (b_n)

7.2. Considere a sucessão (c_n) definida por $c_n = b_n^2$

Prove que (c_n) é uma progressão geométrica e indique o valor da respetiva razão.

8. Considere a sucessão (a_n) definida por $a_n = \frac{1-2n}{n^2}$

Sabe-se, acerca de uma função g , de domínio $\mathbb{R}$, que $\lim g(a_n) = -\infty$

Qual das seguintes expressões pode definir $g(x)$?

- (A) $\begin{cases} x^3 + x & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{2x-5}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x^2 - 3 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{x+2}{3x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$
(C) $\begin{cases} \frac{x+3}{x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{5x}{x+1} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} \frac{x-2}{x} & \text{se } x < 0 \\ x^3 + 2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

9. Considere as funções reais de variável real, f e g definidas por

- $f(x) = \frac{3x+1}{x+1}$ em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- $g(x) = 2x^2 + x - 1$ em $\mathbb{R}$

e que estão representadas em parte no referencial xOy da Figura 2.

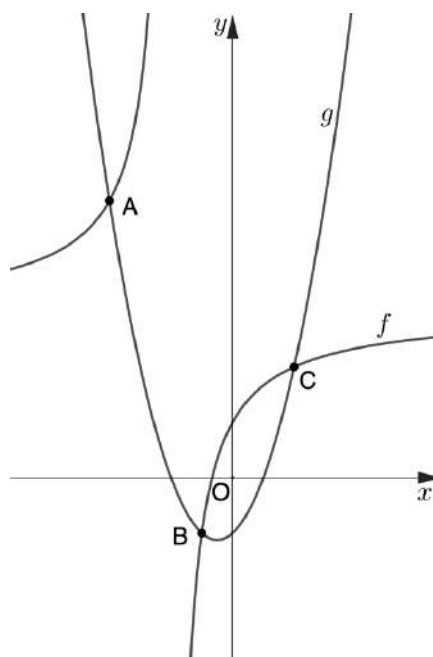


Figura 2

9.1. Escreva a expressão analítica da função f na forma $a + \frac{b}{x+c}$ e identifique as duas assíntotas do gráfico de f através das respetivas equações.

9.2. Os gráficos das funções f e g interseitam-se nos pontos A, B e C .

Sabe-se que C tem coordenadas $(1, 2)$.

Determine as coordenadas dos pontos A e B .

9.3. Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left(\frac{g(x)}{1-4x^2} \right)$

9.4. Considere a função h definida por $h(x) = \sqrt{f(x) - 1}$

O domínio da função h é o conjunto

- (A) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (B) $[0, +\infty[$ (C) $] -\infty, -1] \cup [0, +\infty[$ (D) $] -\infty, -1[\cup [0, +\infty[$

10. Calcule o valor do seguinte limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+2x}}$

FIM

Questão	1.1	1.2	1.3	2.1.	2.2.	3.	4.	5.1.	5.2	6.	7.1	7.2.	8.	9.1.	9.2.	9.3.	9.4.	10.	Total
Cotação	14	14	8	10	14	8	8	12	12	8	14	10	8	12	16	12	8	12	200

SPMTESTES

Teste de Matemática 11.º ano

2024

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A prova é formada por itens de escolha múltipla e de resposta restrita. Os critérios de classificação dos itens de resposta restrita estão organizados por etapas, atribuindo-se, a cada uma delas, uma pontuação.

Caso os alunos adotem um processo não previsto nos critérios específicos, cabe ao professor corretor adaptar a distribuição da cotação atribuída.

Deve ser atribuída a classificação de zero pontos nas seguintes situações:

- Caso um aluno apresente apenas o resultado final de um item, ou de uma etapa, quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações;
- Caso o aluno utilize de forma inequívoca a calculadora, uma vez que tal não é solicitado nesta prova.

Nas seguintes situações deve descontar-se um ponto às cotações estabelecidas para a etapa respetiva:

- Ocorrência de um erro de cálculo;
- Apresentação de uma resposta com o formato que não esteja de acordo com o que foi solicitado;
- Apresentação de expressões com erros do ponto de vista formal.

Caso ocorram erros que revelem desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades ou o aluno apresente uma resolução incompleta de uma etapa, deve descontar-se até metade da cotação dessa etapa.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

Questão	1.1.	1.2.	1.3.	2.1.	2.2.	3.	4.	5.1.	5.2.	6.	7.1.	7.2.	8.	9.1.	9.2.	9.3.	9.4.	10.	Total
Cotação	14	14	8	10	14	8	8	12	12	8	14	10	8	12	16	12	8	12	200

Item	Descrição	Cotação
1.		36
1.1.		14
	A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas: • Indicar as coordenadas do ponto B, em função de α 1 ponto • Indicar as coordenadas do ponto C, em função de α 1 ponto • Indicar as coordenadas do ponto D, em função de α 1 ponto • Indicar as coordenadas do ponto E, em função de α 1 ponto • Escrever $\overline{DC} + \overline{EB}$, em função de α 1 ponto • Escrever $\overline{DE}$, em função de α 3 pontos • Obter a expressão pretendida 6 pontos Nota – Se o aluno resolver corretamente as etapas 5 e 6, considerar que as primeiras etapas foram cumpridas.	
1.2.		14
	A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas: • Concluir que $\tan \alpha = 2$ 2 pontos • Relacionar $\tan \alpha$ com $\cos \alpha$ 5 pontos • Obter $\sin \alpha$ 4 pontos • Obter $\frac{4}{5}$ (ou equivalente) como resposta ao problema 3 pontos	
1.3.	Versão 1 – (D); Versão 2 – (B) _____	8
2.		24
2.1.		10
	A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas: Seja P o período positivo mínimo da função f. • Escrever $f(x + P) = f(x)$ 2 pontos • Obter $\cos\left(6x - \frac{4\pi}{3} + 6P\right) = \cos\left(6x - \frac{4\pi}{3}\right)$ 4 pontos • Concluir que como 2π é o período positivo mínimo da função cosseno então $6P = 2\pi$ e portanto $P = \frac{\pi}{3}$ 4 pontos	
2.2.		14
	A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas: • Resolver a equação $f(x) = 0$ 10 pontos • Escrever $2 - 2\cos\left(6x - \frac{4\pi}{3}\right) = 0$ 1 ponto • Escrever $\cos\left(6x - \frac{4\pi}{3}\right) = 1$ 1 ponto • Obter $x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ (ou equivalente) 8 pontos • Concluir que os valores de $x \in \left[-\frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}\right]$ que satisfazem a equação são $-\frac{\pi}{9}$ e $\frac{2\pi}{9}$ 4 pontos	
3.	Versão 1 – (B); Versão 2 – (D) _____	8
4.	Versão 1 – (B); Versão 2 – (C) _____	8

PROIBIDA A REPRODUÇÃO OU DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL POR QUALQUER MEIO. O PRESENTE ENUNCIADO É PROPRIEDADE DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA E A SUA DIVULGAÇÃO É SUSCEPTÍVEL DE CAUSAR GRAVES PREJUÍZOS À SPM E ÀS SUAS ESCOLAS ASSOCIADAS. OS RESPONSÁVEIS SERÃO PROCESSADOS CIVIL E CRIMINALMENTE PELOS PREJUÍZOS CAUSADOS.

5.			24
	5.1.		12
		A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas: Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor normal ao plano α. • Concluir que como o plano α é paralelo ao eixo Ox então o vetor $\vec{n}$ é perpendicular ao vetor $(1, 0, 0)$ (por exemplo) 2 pontos • Escrever $\vec{AB} = \left(0, 1, -\frac{1}{2}\right)$ 2 pontos • Escrever $\vec{n} \cdot (1, 0, 0) = 0 \wedge \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$ 2 pontos • Obter $\vec{n}(0, b, 2b), b \in \mathbb{R}$ (ou equivalente) 3 pontos • Obter, por exemplo, $\vec{n}(0, 1, 2)$ 1 pontos • Obter a equação $y + 2z = 1$ 2 pontos	
	5.2.		12
		A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas: • Escrever as coordenadas de um ponto genérico da reta r, em função de k 2 pontos • Obter uma equação na variável k, substituindo x, y e z na equação do plano α pelas coordenadas de um ponto genérico da reta r e obter o valor de k (2) 7 pontos • Obter as coordenadas do ponto de interseção do plano α com a reta r $((1, 3, -1))$ 3 pontos	
6.		Versão 1 – (B); Versão 2 – (C) _____	8
7.			24
	7.1.		14
		A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas: 1º processo • Exprimir b_6 em função da razão $\frac{1}{2}$ e de b_3 4 pontos • Escrever $b_3 + b_6 = \frac{27}{16}$ na forma $b_3 \times \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3\right) = \frac{27}{16}$ 3 pontos • Obter o valor de $b_3 \left(\frac{3}{2}\right)$ 3 pontos • Escrever uma expressão do termo geral $b_n = \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ 4 pontos 2º processo • Exprimir b_6 e b_3 em função da razão $\frac{1}{2}$ e de b_1 5 pontos • Escrever $b_3 + b_6 = \frac{27}{16} \Leftrightarrow b_1 \times \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^5\right) = \frac{27}{16}$ 2 pontos • Obter o valor de b_1 (6) 3 pontos • Escrever uma expressão do termo geral $b_n = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 4 pontos	
	7.2.		10
		A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas: • Escrever $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{b_{n+1}^2}{b_n^2}$ 4 pontos • Escrever $\frac{b_{n+1}^2}{b_n^2} = \frac{\left(b_n \times \frac{1}{2}\right)^2}{b_n^2}$ 2 pontos • Escrever $\frac{\left(b_n \times \frac{1}{2}\right)^2}{b_n^2} = \frac{b_n^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}{b_n^2} = \frac{1}{4}$ 2 pontos • Concluir que a sucessão é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$ 2 pontos	
8.		Versão 1 – (D); Versão 2 - (C) _____	8

9.			48
9.1.			12
		A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas: • Escrever $f(x)$ na forma $3 - \frac{2}{x+1}$ 6 pontos • Identificar a assíntota horizontal pela equação $y = 3$ 3 pontos • Identificar a assíntota vertical pela equação $x = -1$ 3 pontos	
9.2.			16
		A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas: • Escrever a equação $f(x) = g(x)$ 1 ponto • Concluir que $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{-2x^3 - 3x^2 + 3x + 2}{x+1} = 0$ 5 pontos • Identificar 1 como uma das soluções da equação 1 ponto • Utilizar a regra de Ruffini para obter os restantes zeros do polinómio $-2x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ (-2 e $-\frac{1}{2}$) 5 pontos • Identificar as coordenadas de $A(-2,5)$ e de $B(-\frac{1}{2}, -1)$... 4 pontos	.
9.3.			12
		A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas: • Escrever $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{g(x)}{1-4x^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2+x-1}{1-4x^2}$ 1 ponto • Efetuar a decomposição $2x^2 + x - 1 = 2(x+1)(x-\frac{1}{2})$..... 3 pontos • Efetuar a decomposição $1 - 4x^2 = -4(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$ 3 pontos • Escrever $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2+x-1}{1-4x^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2(x+1)(x-\frac{1}{2})}{-4(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x+1}{-2(x+\frac{1}{2})}$... 3 pontos • Concluir que $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x+1}{-2(x+\frac{1}{2})} = -\frac{3}{4}$ 2 pontos	
9.4.		Versão 1 – (C); Versão 2 – (D)	8
10.			12
		A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas: • Reconhecer a existência de uma indeterminação 1 ponto • Levantar a indeterminação: - Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1+2\frac{\sqrt{x}}{x})}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x})}}$ 3 pontos - Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1+2\frac{\sqrt{x}}{x})}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x})}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+2\frac{\sqrt{x}}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}}$ 3 pontos - Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+2\frac{\sqrt{x}}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+2\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}}$ 4 pontos - Concluir o valor do limite (1) 1 ponto	
		TOTAL	200

Prova de Matemática A

Ensino Secundário | maio de 2024

12.º Ano de Escolaridade

Duração da Prova: 120 minutos | Tolerância: 30 minutos

8 páginas

VERSÃO 1

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.



Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfície

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base;
 g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Complexos

$$(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

As raízes índice n de $z = r e^{i\theta}$ são dadas por:

$$\sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} \quad (k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

1. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere um plano α , tangente a uma superfície esférica S

Sabe-se que:

- o plano α é definido por $2x - 3y + 3z - 6 = 0$
- o ponto C , centro da superfície esférica S tem coordenadas $(1, 1, -1)$
- o ponto T é o ponto de tangência do plano α com a superfície esférica S

1.1. Qual das equações seguintes, define uma reta contida no plano α ?

- (A) $(x, y, z) = (3, 1, 1) + k(2, -3, 3), k \in \mathbb{R}$
(B) $(x, y, z) = (3, 1, 1) + k(3, 1, -1), k \in \mathbb{R}$
(C) $(x, y, z) = (0, 0, -2) + k(3, 2, 1), k \in \mathbb{R}$
(D) $(x, y, z) = (0, 0, -2) + k(0, 3, -3), k \in \mathbb{R}$

1.2. Determine as coordenadas do ponto T .

2. Considere a função f definida em $[0, 2\pi]$ por:

$$f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x + \cos x$$

Sabe-se que o gráfico de f intersesta o eixo das abcissas em três pontos distintos, de abcissas a, b e c , onde $a < b < c$

O valor de $c - b$ é igual a:

- (A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{5\pi}{6}$

3. Considere uma função f diferenciável em $\mathbb{R}$.

Sabe-se que para um determinado $a \in D_f$, $f(a) \times f'(a) = 2$

Qual o valor de

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2 - x^2}{(f(x))^2 - (f(a))^2} ?$$

- (A) $-2a$ (B) $-\frac{1}{2}a$ (C) $\frac{1}{2}a$ (D) $2a$

4. Num referencial o.n. xOy considere a reta r definida por $3x + 2y - 1 = 0$.
Seja β a medida da inclinação (em radianos) da reta r .
Sem recorrer à calculadora, determine o valor de

$$2 \sin(\pi - \beta) + 3 \sin\left(\frac{5\pi}{2} + \beta\right)$$

5. Considere a função h , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{e^{2-x} - e^{x-2}}{12 - 6x}, & x < 2 \\ \frac{1}{3}, & x = 2 \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{\sin(3x - 6)}, & x > 2 \end{cases}$$

Resolva os dois itens seguintes, **sem recorrer à calculadora**.

- 5.1. Averigue, se a função h é contínua em $x = 2$

- 5.2. Mostre que o gráfico de h não admite assíntota horizontal, quando $x \rightarrow -\infty$

6. Considere a soma:

$$S = \log\left(\frac{3}{2}\right) + \log\left(\frac{4}{3}\right) + \log\left(\frac{5}{4}\right) + \cdots + \log\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

em que n é um número natural superior a 2.

O menor valor de n para o qual $S > 1$ é:

- (A) 20 (B) 21 (C) 25 (D) 29

7. De uma função g duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$, sabe-se que:

$$g''(x) = 2xe^x(x^2 - 2024)(x^2 + 2024)(x - 2024)^2$$

Quantos pontos de inflexão tem o gráfico de g ?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

8. Um modelo de epidemiologia, que mede o número de pessoas infetadas numa população, em milhares, é descrito pela função

$$I(t) = \frac{1000}{1 + 10^4 \times e^{-0,02t}}, \quad t \geq 0$$

e t é o tempo medido em dias desde o início da epidemia.

Para um certo instante t_1 (com $t_1 \in [0, 500]$) através do número de infetados previsto pelo modelo em t_1 e cinco dias depois obteve-se o valor 2 para a taxa de variação média da função I calculada entre esses dois instantes.

Determine, **recorrendo às capacidades gráficas da calculadora**, o número de infetados no instante t_1 , sabendo que esse valor existe e é único.

Não se pede para justificar a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas
- apresente o valor pedido arredondado às unidades

9. Considere a sucessão (v_n) de termo geral $v_n = \frac{1}{n!}$

Qual o valor do limite

$$\lim \left(1 - \frac{v_n}{2} \right)^{\frac{1}{v_n}} ?$$

(A) 0

(B) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

(C) $\sqrt{e}$

(D) $+\infty$

10. Determine, **sem recorrer à calculadora**, os números reais que são solução da equação:

$$(e^x - e^{-x}) \ln(x + 2) = 4 \ln(x + 2)$$

11. Considere a função g definida em $\mathbb{R} \setminus \{-\ln a\}$, com $a \in]1, +\infty[$ por:

$$g(x) = \frac{(2 \ln a)x + 1}{x + \ln a}$$

Num referencial o.n. xOy , considere P o ponto de interseção das assíntotas ao gráfico de g .

Mostre que $\overline{OP} = \sqrt{5} \ln a$

Responda a um e um só dos grupos A ou B

Se responder a mais do que um destes grupos deve indicar qual deles pretende que seja classificado. Se não der esta indicação será classificado o grupo a que responder em primeiro lugar.

Grupo A

12. Relativamente a uma amostra (x, y) , sabe-se que $\bar{y} = 12$ e que a respetiva reta de mínimos quadrados tem equação $y = -1,32x + 1,28$.

Qual o valor, aproximado às centésimas, de $\bar{x}$?

- (A) $-14,56$ (B) $-8,12$ (C) $1,32$ (D) $17,12$

13. Considere um baralho de cartas completo, composto por 52 cartas, 13 de cada um dos quatro naipes: copas, espadas, paus e ouros.

Considere ainda, a experiência que consiste em retirar, simultaneamente e ao acaso, três cartas do baralho completo.

Qual é a probabilidade de se selecionarem cartas de **apenas** dois naipes?

Apresente a sua resposta na forma de percentagem, arredondada às unidades.

14. Seja $(E, \mathcal{P}(E), P)$ um espaço de probabilidades e A e $B \in \mathcal{P}(E)$ acontecimentos possíveis, tais que:

- $P(\bar{A} \cap B) = 0,6$
- $P(\overline{A \cup B}) = 0,1$
- $P(\bar{B}) = 0,3$

Determine o valor de $P[A | (\bar{A} \cup B)]$.

Apresente a sua resposta na forma de fração irredutível.

Grupo B

12. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Considere, em $\mathbb{C}$, os números $z = 2 + i$ e $w = ai^{2024} - 2i^9$, $a \in \mathbb{R}$

Sabe-se que o afixo de $z \times \bar{w}$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Qual o valor de a ?

- (A) -6 (B) $-\frac{2}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) 6

13. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Considere, em $\mathbb{C}$, os números $z_1 = e^{i\alpha}$ e $z_2 = e^{i\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Sabe-se que $\cos(\beta - \alpha) = -\frac{1}{2}$

Mostre que $|z_2 - z_1| = \sqrt{3}$

14. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Sejam w_1 e w_2 soluções, em $\mathbb{C}$, da equação $z^2 - 2i = 0$ e A e B os afixos de w_1 e w_2 , respetivamente.

Verifique que A e B pertencem à região definida pela condição

$$|z| = \sqrt{2} \wedge \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z = 0$$

e determine $\overline{AB}$.

Item											
Cotação (em pontos)											
1.1.	1.2.	2	3	4	5.1.	5.2.	6	7	T O T A L	200 pontos	
10	14	10	10	14	16	14	10	10			
8	9	10	11	GRUPO A			GRUPO B				
				12	13	14	12	13			14
16	10	14	14	10	14	14	10	14			14

Prova de Matemática A

Ensino Secundário | maio de 2024

12.º Ano de Escolaridade

Duração da Prova: 120 minutos | Tolerância: 30 minutos

8 páginas

VERSÃO 2

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.



Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos,

do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfície

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base;
 g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Complexos

$$(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

As raízes índice n de $z = r e^{i\theta}$ são dadas por:

$$\sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} \quad (k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

1. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere um plano α , tangente a uma superfície esférica S

Sabe-se que:

- o plano α é definido por $2x - 3y + 3z - 6 = 0$
- o ponto C , centro da superfície esférica S tem coordenadas $(1, 1, -1)$
- o ponto T é o ponto de tangência do plano α com a superfície esférica S

1.1. Qual das equações seguintes, define uma reta contida no plano α ?

(A) $(x, y, z) = (0, 0, -2) + k(0, 3, -3), k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y, z) = (3, 1, 1) + k(2, -3, 3), k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y, z) = (3, 1, 1) + k(3, 1, -1), k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y, z) = (0, 0, -2) + k(3, 2, 1), k \in \mathbb{R}$

1.2. Determine as coordenadas do ponto T .

2. Considere a função f definida em $[0, 2\pi]$ por:

$$f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x + \cos x$$

Sabe-se que o gráfico de f intersesta o eixo das abcissas em três pontos distintos, de abcissas a, b e c , onde $a < b < c$

O valor de $c - b$ é igual a:

(A) $\frac{2\pi}{3}$

(B) $\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{5\pi}{6}$

(D) $\frac{\pi}{6}$

3. Considere uma função f diferenciável em $\mathbb{R}$.

Sabe-se que para um determinado $a \in D_f$, $f(a) \times f'(a) = 2$

Qual o valor de

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2 - x^2}{(f(x))^2 - (f(a))^2} ?$$

(A) $2a$

(B) $\frac{1}{2} a$

(C) $-\frac{1}{2} a$

(D) $-2a$

4. Num referencial o.n. xOy considere a reta r definida por $3x + 2y - 1 = 0$.
Seja β a medida da inclinação (em radianos) da reta r .
Sem recorrer à calculadora, determine o valor de

$$2 \sin(\pi - \beta) + 3 \sin\left(\frac{5\pi}{2} + \beta\right)$$

5. Considere a função h , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{e^{2-x} - e^{x-2}}{12 - 6x}, & x < 2 \\ \frac{1}{3}, & x = 2 \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{\sin(3x - 6)}, & x > 2 \end{cases}$$

Resolva os dois itens seguintes, **sem recorrer à calculadora**.

- 5.1. Averigue, se a função h é contínua em $x = 2$

- 5.2. Mostre que o gráfico de h não admite assíntota horizontal, quando $x \rightarrow -\infty$

6. Considere a soma:

$$S = \log\left(\frac{3}{2}\right) + \log\left(\frac{4}{3}\right) + \log\left(\frac{5}{4}\right) + \cdots + \log\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

em que n é um número natural superior a 2.

O menor valor de n para o qual $S > 1$ é:

- (A) 29 (B) 25 (C) 21 (D) 20

7. De uma função g duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$, sabe-se que:

$$g''(x) = 2xe^x(x^2 - 2024)(x^2 + 2024)(x - 2024)^2$$

Quantos pontos de inflexão tem o gráfico de g ?

- (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

8. Um modelo de epidemiologia, que mede o número de pessoas infectadas numa população, em milhares, é descrito pela função

$$I(t) = \frac{1000}{1 + 10^4 \times e^{-0,02t}}, \quad t \geq 0$$

e t é o tempo medido em dias desde o início da epidemia.

Para um certo instante t_1 (com $t_1 \in [0, 500]$) através do número de infectados previsto pelo modelo em t_1 e cinco dias depois obteve-se o valor 2 para a taxa de variação média da função I calculada entre esses dois instantes.

Determine, **recorrendo às capacidades gráficas da calculadora**, o número de infectados no instante t_1 , sabendo que esse valor existe e é único.

Não se pede para justificar a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas
- apresente o valor pedido arredondado às unidades

9. Considere a sucessão (v_n) de termo geral $v_n = \frac{1}{n!}$

Qual o valor do limite

$$\lim \left(1 - \frac{v_n}{2} \right)^{\frac{1}{v_n}} ?$$

- (A) $+\infty$ (B) $\sqrt{e}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

10. Determine, **sem recorrer à calculadora**, os números reais que são solução da equação:

$$(e^x - e^{-x}) \ln(x + 2) = 4 \ln(x + 2)$$

11. Considere a função g definida em $\mathbb{R} \setminus \{-\ln a\}$, com $a \in]1, +\infty[$ por:

$$g(x) = \frac{(2 \ln a)x + 1}{x + \ln a}$$

Num referencial o.n. xOy , considere P o ponto de interseção das assíntotas ao gráfico de g .

Mostre que $\overline{OP} = \sqrt{5} \ln a$

Responda a um e um só dos grupos A ou B

Se responder a mais do que um destes grupos deve indicar qual deles pretende que seja classificado. Se não der esta indicação será classificado o grupo a que responder em primeiro lugar.

Grupo A

12. Relativamente a uma amostra (x, y) , sabe-se que $\bar{y} = 12$ e que a respetiva reta de mínimos quadrados tem equação $y = -1,32x + 1,28$.

Qual o valor, aproximado às centésimas, de $\bar{x}$?

- (A) $-8,12$ (B) $-14,56$ (C) $17,12$ (D) $1,32$

13. Considere um baralho de cartas completo, composto por 52 cartas, 13 de cada um dos quatro naipes: copas, espadas, paus e ouros.

Considere ainda, a experiência que consiste em retirar, simultaneamente e ao acaso, três cartas do baralho completo.

Qual é a probabilidade de se selecionarem cartas de **apenas** dois naipes?

Apresente a sua resposta na forma de percentagem, arredondada às unidades.

14. Seja $(E, \mathcal{P}(E), P)$ um espaço de probabilidades e A e $B \in \mathcal{P}(E)$ acontecimentos possíveis, tais que:

- $P(\bar{A} \cap B) = 0,6$
- $P(\overline{A \cup B}) = 0,1$
- $P(\bar{B}) = 0,3$

Determine o valor de $P[A | (\bar{A} \cup B)]$.

Apresente a sua resposta na forma de fração irredutível.

Grupo B

12. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Considere, em $\mathbb{C}$, os números $z = 2 + i$ e $w = ai^{2024} - 2i^9$, $a \in \mathbb{R}$

Sabe-se que o afixo de $z \times \bar{w}$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Qual o valor de a ?

- (A) 6 (B) $\frac{2}{3}$ (C) $-\frac{2}{3}$ (D) -6

13. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Considere, em $\mathbb{C}$, os números $z_1 = e^{i\alpha}$ e $z_2 = e^{i\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Sabe-se que $\cos(\beta - \alpha) = -\frac{1}{2}$

Mostre que $|z_2 - z_1| = \sqrt{3}$

14. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Sejam w_1 e w_2 soluções, em $\mathbb{C}$, da equação $z^2 - 2i = 0$ e A e B os afixos de w_1 e w_2 , respetivamente.

Verifique que A e B pertencem à região definida pela condição

$$|z| = \sqrt{2} \wedge \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z = 0$$

e determine $\overline{AB}$.

Item											
Cotação (em pontos)											
1.1.	1.2.	2	3	4	5.1.	5.2.	6	7	T O T A L	200 pontos	
10	14	10	10	14	16	14	10	10			
8	9	10	11	GRUPO A			GRUPO B				
				12	13	14	12	13			14
16	10	14	14	10	14	14	10	14			14

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A prova é formada por itens de escolha múltipla e de resposta restrita. Os critérios de classificação dos itens de resposta restrita estão organizados por etapas, atribuindo-se, a cada uma delas, uma pontuação.

Caso os alunos adotem um processo não previsto nos critérios específicos, cabe ao professor corretor adaptar a distribuição da cotação atribuída.

Deve ser atribuída a classificação de zero quando um aluno apresente apenas o resultado final de um item, ou de uma etapa, quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações;

Nas seguintes situações deve descontar-se um ponto às cotações estabelecidas para a etapa respetiva:

- Ocorrência de um erro de cálculo;
- Apresentação de uma resposta com o formato que não esteja de acordo com o que foi solicitado;
- Apresentação de expressões com erros do ponto de vista formal.

Caso ocorram erros que revelem desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades ou o aluno apresente uma resolução incompleta de uma etapa, deve descontar-se até metade da cotação dessa etapa.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

														Grupo A			Grupo B			Total
Item	1.1	1.2	2	3	4	5.1	5.2	6	7	8	9	10	11	12	13	14	12	13	14	
Cotação	10	14	10	10	14	16	14	10	10	16	10	14	14	10	14	14	10	14	14	200

QUESTÃO		DESCRIÇÃO														COTAÇÃO	
1.																	24
	1.1.	Versão 1 (B) Versão 2 (C)														10	
	1.2	- Escrever a equação da reta CT 4 - Escrever um ponto genérico de CT 1 - Substituir o ponto genérico de CT na equação do plano α 1 - Determinar o valor de $k \left(\frac{5}{11}\right)$ 4 - Substituir o valor de k no ponto genérico de CT 3 - Indicar as coordenadas do ponto $T \left(\frac{21}{11}; -\frac{4}{11}; \frac{4}{11}\right)$ 1														14	
2.		Versão 1 (B) Versão 2 (A)														10	
3.		Versão 1 (B) Versão 2 (C)														10	
4.																	14
		- Determinar o declive da reta $r \left(m = -\frac{3}{2}\right)$ 1 - Indicar $m = \tan \alpha$ 3 - Escrever $\beta \in 2.^\circ Q$ 1 - Determinar o valor de $\cos \alpha \left(\cos \alpha = \frac{-2\sqrt{13}}{13}\right)$ 3 - Determinar o valor de $\sin \alpha \left(\sin \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$ 2 - Escrever $\sin(\pi - \beta) = \sin \beta$ 1 - Escrever $\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \beta\right) = \cos \beta$ 1 - Calcular $2 \sin \beta + 3 \cos \beta (0)$ 2															
5.																	30
	5.1	- Mudar a variável e escrever $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{2-x} - e^{x-2}}{12-6x} =$ $\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^{-y} - e^y}{-6y}$ ou equivalente 1 - Escrever $\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^{-y} - e^y}{-6y} = \frac{2}{6} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y(e^{-2y}-1)}{-2y}$ ou equivalente 2 - Escrever $\frac{2}{6} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y(e^{-2y}-1)}{-2y} = \frac{2}{6} \lim_{y \rightarrow 0^-} e^y \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^{-2y}-1}{-2y}$ ou equivalente 2														16	

		Fazer nova mudança de variável, usar o limite notável e escrever $\frac{2}{6} \lim_{y \rightarrow 0^-} e^y \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^{-2y}-1}{-2y} = \frac{1}{3} \times 1 \times \lim_{z \rightarrow 0^-} \frac{e^z-1}{z} = \frac{1}{3} \times 1 \times 1 = \frac{1}{3}$ ou equivalente	2		
		Decompor $x^2 - 3x + 2$ em fatores $(x - 2)(x - 1)$	1		
		Escrever $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-3x+2}{\sin(3x-6)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x-1)}{\sin(3x-6)}$ ou equivalente	1		
		Mudar a variável e escrever $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x-1)}{\sin(3x-6)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y(y+1)}{\sin(3y)}$ ou equivalente	2		
		Escrever $\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y(y+1)}{\sin(3y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} (y+1) \times \frac{1}{3 \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin(3y)}{3y}}$ ou equivalente	2		
		Fazer nova mudança de variável, usar o limite notável e escrever $\lim_{y \rightarrow 0^+} (y+1) \times \frac{1}{3 \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin(3y)}{3y}} = 1 \times \frac{1}{1 \times 3} = \frac{1}{3}$ ou equivalente	2		
		Concluir que, uma vez que $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = h(1) = \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \frac{1}{3}$, então h é contínua em $x = 2$	1		
	5.2	- Escrever $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2-x}-e^{x-2}}{12-6x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2-x}-e^{x-2}}{x(\frac{12}{x}-6)}$ ou equivalente - Escrever $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2-x}-e^{x-2}}{x(\frac{12}{x}-6)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(\frac{12}{x}-6)} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2-x}-e^{x-2}}{x}$ ou equivalente - Escrever $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(\frac{12}{x}-6)} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2-x}-e^{x-2}}{x} = -\frac{1}{6} \times \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2-x}}{x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x-2}}{x} \right)$ ou equivalente - Escrever $-\frac{1}{6} \times \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2-x}}{x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x-2}}{x} \right) = -\frac{1}{6} \times \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^2 \times e^{-x}}{x} - 0 \right)$ ou equivalente - Escrever $-\frac{1}{6} \times \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^2 \times e^{-x}}{x} - 0 \right) = -\frac{e^2}{6} \times \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x} \right)$ ou equivalente - Escrever $-\frac{e^2}{6} \times \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x} \right) = \frac{e^2}{6} \times \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{-x} \right)$ ou equivalente - Mudar a variável, usar o limite notável e escrever $\frac{e^2}{6} \times \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{-x} \right) = \frac{e^2}{6} \times \left(\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} \right) = \frac{e^2}{6} \times (+\infty) = +\infty$ ou equivalente	1 2 2 1 2 2 2	14	

		Concluir que não existe assíntota horizontal quando $x \rightarrow -\infty$	2		
6.		Versão 1 (B) Versão 2 (C)			10
7.		Versão 1 (C) Versão 2 (B)			10
8.					16
		- Apresentar a equação $\frac{l(t_1+5)-l(t_1)}{(t_1+5)-t_1} = 2$, ou equivalente - Apresentar gráfico correspondente à equação apresentada Nota: Se o aluno não apresentar os eixos ou não identificar a(s) função(ões) deverá ser descontado 1 pontos em cada situação - Apresentar a abcissa do ponto pedido (354,83) - Determinar o valor de $l(354,83)$ arredondado às unidades e responder, por exemplo: "O número de infetados no instante t_1 era 107768."	5		
			5		
			2		
			4		
9.		Versão 1 (B) Versão 2 (D)			10
10.					14
		- Determinar o domínio da expressão $D =]-2; +\infty[$ - Escrever $(e^x - e^{-x}) \ln(x+2) = 4 \ln(x+2) \Leftrightarrow (e^x - e^{-x}) \ln(x+2) - 4 \ln(x+2) = 0$ - Escrever $(e^x - e^{-x}) \ln(x+2) - 4 \ln(x+2) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+2)[(e^x - e^{-x}) - 4] = 0$ - Escrever $\ln(x+2)[(e^x - e^{-x}) - 4] = 0 \Leftrightarrow \ln(x+2) = 0 \vee e^x - e^{-x} - 4 = 0$ - Escrever $x = -1 \vee e^x - e^{-x} - 4 = 0$ - Escrever $x = -1 \vee e^x = 2 + \sqrt{5} \vee e^x = 2 - \sqrt{5}$ - Escrever $x = -1 \vee x = \ln(2 + \sqrt{5})$ - Escrever $C.S. = \{-1; \ln(2 + \sqrt{5})\} \cap D = \{-1; \ln(2 + \sqrt{5})\}$	3		
			1		
			4		
			1		
			1		
			2		
			1		
			1		
11					14
		(1.º processo) - Efetuar a divisão inteira de $g(x)$ por $x + \ln(a)$ - Escrever $g(x) = 2 \ln a + \frac{1-2 \ln^2 a}{x+\ln a}$ - Concluir que a equação da assíntota horizontal é $y = 2 \ln a$ e que a equação da assíntota vertical é $x = -\ln a$ - Escrever o ponto de interseção das assíntotas $P(-\ln a; 2 \ln a)$ - Calcular $\overline{OP}$ e concluir que $\overline{OP} = \sqrt{5} \ln a$ (2.º processo) - Verificar que existe assíntota vertical em $x = -\ln a$, calculando por exemplo, $\lim_{x \rightarrow (-\ln a)^-} g(x)$ - Escrever a equação da assíntota vertical: $x = -\ln a$	3		
			2		
			3		
			3		
			3		
			2		
			1		

		- Verificar que existe assíntota horizontal calculando, por exemplo, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 \ln a)x+1}{x+\ln a}$ - Identificar a indeterminação $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ e escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 \ln a)x+1}{x+\ln a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 \ln a)x}{x} = 2 \ln a$ - Concluir que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2 \ln a$ e escrever a equação da assíntota horizontal $y = 2 \ln a$ - Escrever o ponto de interseção das assíntotas $P(-\ln a; 2 \ln a)$ - Calcular $\overline{OP}$ e concluir que $\overline{OP} = \sqrt{5} \ln a$	2 2 1 3 3	
Grupo A				
12.		Versão 1 (B)	Versão 2 (A)	10
13.				14
		- Indicar o número de casos possíveis $\left({}^{52}_3 C_3\right)$ ou equivalente - Indicar o número de casos favoráveis ${}^4 A_2 \times {}^{13}_1 C_1 \times {}^{13}_2 C_2$, ou equivalente (ver notas) - Calcular a probabilidade (55%) Notas: - Caso o aluno responda ${}^4 C_2 \times {}^{13}_1 C_1 \times {}^{13}_2 C_2$ (5 pontos) - Caso o aluno responda ${}^{13}_1 C_1 \times {}^{13}_2 C_2$ (3 pontos)	3 8 3	
14.				14
		- Concluir que $P(\bar{A} \cap B) = 0,6 \Leftrightarrow P(B) - P(A \cap B) = 0,6$ - Concluir que $P(\overline{A \cup B}) = 0,1 \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0,9$ - Concluir que $P(\bar{B}) = 0,3 \Leftrightarrow P(B) = 0,7$ - Determinar $P(A \cap B)$ (0,1) - Determinar $P(A)$ (0,3) - Escrever $P[A (\bar{A} \cup B)] = \frac{P[A \cap (\bar{A} \cup B)]}{P(\bar{A} \cup B)}$ - Escrever $P[A \cap (\bar{A} \cup B)] = P(A \cap B)$ - Escrever $P(\bar{A} \cup B) = 1 - P(A) + P(A \cap B)$ - Calcular a probabilidade pedida $\left(\frac{0,1}{0,8} = \frac{1}{8}\right)$	1 1 1 1 2 2 2 2	
Grupo B				
12.		Versão 1 (D)	Versão 2 (A)	10
13.				14
		- Escrever $z_2 - z_1 = (cos\beta + isen\beta) - (cosa + isena)$ - Escrever $(cos\beta + isen\beta) - (cosa + isena) = (cos\beta - cosa) - (sen\beta - sena)i$ - Escrever $(cos\beta - cosa) - (sen\beta - sena)i = \sqrt{(cos\beta - cosa)^2 + (sen\beta - sena)^2}$	1 1 2	

		- Desenvolver $\sqrt{(\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\sin\beta - \sin\alpha)^2}$ obtendo $\sqrt{2 - 2\cos\beta\cos\alpha - 2\sin\beta\sin\alpha}$ - Escrever $\sqrt{2 - 2\cos\beta\cos\alpha - 2\sin\beta\sin\alpha} = \sqrt{2 - 2(\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha)}$ - Concluir que $\sqrt{2 - 2(\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha)} = \sqrt{2 - 2(\cos(\beta - \alpha))}$ - Substituir na expressão $\cos(\beta - \alpha) = -\frac{1}{2}$ - Obter o resultado pretendido ($\sqrt{3}$)	3 2 2 1 2	
14.				14
		- Determinar w_1 e w_2 (p.e. $w_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $w_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$) - Escrever $w_1 = 1 + i$ e $w_2 = -1 - i$ - Verificar que w_1 e w_2 pertencem à região dada - Escrever os afijos de w_1 e w_2 ($A(1, 1)$ e $B(-1, -1)$) - Determinar $\overline{AB}$ ($2\sqrt{2}$ ou equivalente)	4 2 4 2 2	

SPM TESTES

Teste de Matemática

2025

10.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos | Tolerância: 30 minutos

(cinco páginas)

VERSÃO 1

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.



1. Considere, num referencial *o. n.* Oxy , a reta de equação $(x, y) = (2, 3) + k(0, -2), k \in \mathbb{R}$, e um ponto de abscissa 1.

Relativamente à informação dada podemos afirmar que:

- (A) O ponto pode pertencer à reta e terá ordenada $\frac{3}{2}$
 (B) O ponto pode pertencer à reta e terá ordenada $-\frac{3}{2}$
 (C) O ponto pode pertencer à reta e terá ordenada indeterminada.
 (D) O ponto não pertence à reta.

2. Considere as funções f e g , ambas definidas em $\mathbb{R}$, por

$$f(x) = 2(x + 3)(5 - x) \text{ e } g(x) = x + 3, \text{ respetivamente.}$$

- 2.1. A equação $f(x) = g(x)$ é equivalente a:

- (A) $(x + 3) [2(5 - x) - 1] = 0$ (B) $(x + 3) [1 + 2(5 - x)] = 0$
 (C) $(x + 3) [2(x - 5) - 1] = 0$ (D) $(x + 3) [-1 + 2(x - 5)] = 0$

- 2.2. Determine o conjunto solução da condição $f(x) < g(x)$.

3. Na figura 1 estão representados, num referencial *o. n.* $Oxyz$, o triângulo $[ABO]$ e os pontos $A(2, 0, 2)$, $B(2, 2, 0)$ e M , ponto médio de $[AB]$.

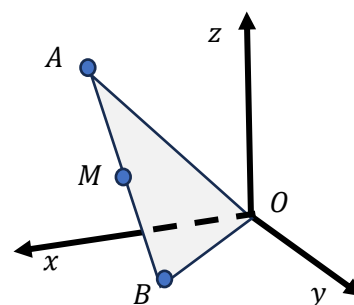


Figura 1

- 3.1. Mostre que o triângulo $[ABO]$ é equilátero.
 3.2. Qual das seguintes equações define uma equação vetorial da reta AO ?

- (A) $(x, y, z) = (0, 0, 0) + k(0, 0, -2), k \in \mathbb{R}$ (B) $(x, y, z) = (3, 0, 3) + k(1, 0, 1), k \in \mathbb{R}$
 (C) $(x, y, z) = (0, 0, 0) + k(-2, 0, 0), k \in \mathbb{R}$ (D) $(x, y, z) = (3, 0, 3) + k(-1, 0, 1), k \in \mathbb{R}$

- 3.3. Justifique que as coordenadas de M são $(2, 1, 1)$.

- 3.4. Sabe-se que existe uma única superfície esférica que passa pelos pontos A, B e O e que tem centro no plano determinado por estes três pontos (não se pede para justificar este facto).

Mostre que uma das equações cartesianas dessa superfície esférica é

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{3}$$

Sugestão: Comece por provar que o ponto $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ pertence à reta OM .

4. Considere a função f definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ e um ponto $A(a, \frac{1}{4}a^2)$, $a \neq 0$, pertencente ao gráfico de f .

4.1. Mostre que a reta que passa no ponto A e que tem declive $-\frac{2}{a}$, $a \neq 0$, também passa no ponto $B(0, 2 + \frac{1}{4}a^2)$.

4.2. Mostre que a área do triângulo $[ABC]$, sendo $C(0, \frac{1}{4}a^2)$, é igual ao módulo da abscissa do ponto A .

5. Na figura 2 estão representados, num referencial Oxy , o quadrado $[OABC]$ com vértices em $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(4,4)$ e $C(0,4)$ e um dos possíveis retângulos, $[DEFG]$, que se conseguem construir considerando como vértices os pontos de coordenadas $D(x, 1)$, $E(x+4, 1)$, $F(x+4, 4)$ e $G(x, 4)$, onde $x \in]-\infty, +\infty[$.

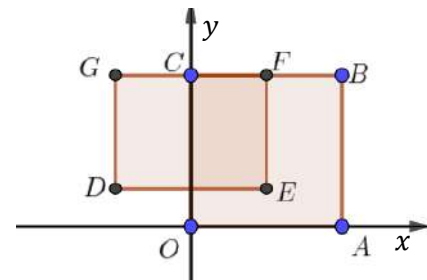


Figura 2

Para certos valores de x , tal como a figura sugere, há sobreposição do retângulo que se obtém e do quadrado dado.

A função f , definida por $f(x) = \begin{cases} 3(x+4) & \text{se } -4 < x \leq 0 \\ 3(4-x) & \text{se } 0 < x < 4 \\ 0 & \text{se } x \leq -4 \text{ ou } x \geq 4 \end{cases}$ dá a área da interseção das duas figuras geométricas.

5.1. Determine $f(1)$ e desenhe num referencial o quadrado e o retângulo correspondentes e assinale a região da interseção.

5.2. Complete a tabela seguinte de variação de f e indique o máximo absoluto da função.

x	$-\infty$	-4		4	$+\infty$
f	$\longrightarrow$				$\longrightarrow$

6. Durante as festividades de uma aldeia, realizou-se uma corrida de 7 km com a participação de 60 corredores.

No final, a organização recolheu os tempos dos participantes e apresentou os seguintes dados estatísticos acerca da distribuição dos tempos dos 60 participantes:

- Tempo mínimo: 36 minutos;
- 1.º Quartil: 42 minutos; Mediana: 51 minutos; 3.º Quartil: 58 minutos;
- Tempo máximo: 70 minutos.

Em que intervalo de tempo houve a maior concentração de chegadas por minuto:

- (A) Entre o mínimo e o 1.º Quartil. (B) Entre o 1.º Quartil e a Mediana.
(C) Entre a Mediana e o 3.º Quartil. (D) Entre o 3.º Quartil e o máximo.

7. Considere três pontos, do espaço, A , B e P , em que $-\frac{3}{2}\overrightarrow{AP} = -3\overrightarrow{PB}$.

7.1. Mostre que $\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PB}$ e que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{PB}$.

7.2. Qual a afirmação verdadeira?

- (A) B está entre A e P (B) A está entre B e P
(C) P está entre A e B (D) Os três pontos não são colineares.

8. Na Figura 3 está representado parte do gráfico da função f ,

definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = |x - 1| - 1$.

Considere que:

- A é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Ox , de abscissa positiva;
- A ordenada do ponto B é o mínimo de f .

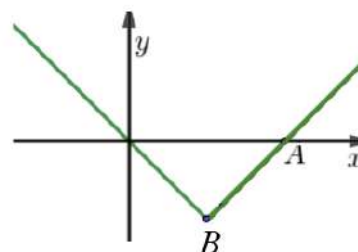


Figura 3

Considere ainda a função g , definida em $\mathbb{R}$, por

$g(x) = a(x - b)^2 + c$, $a \neq 0$, cujo gráfico tem como vértice o ponto A e passa no ponto B .

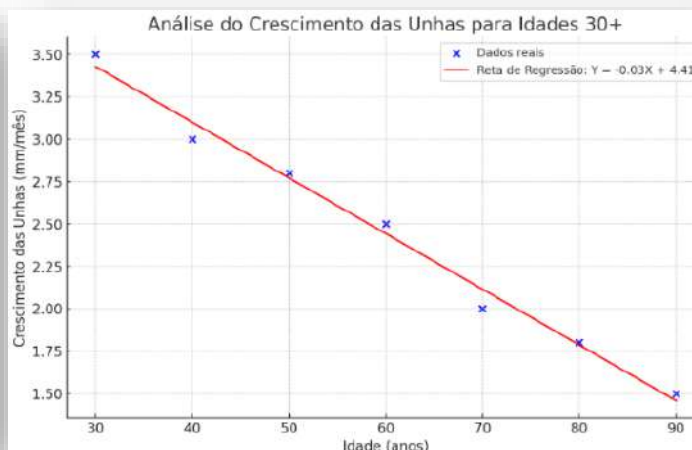
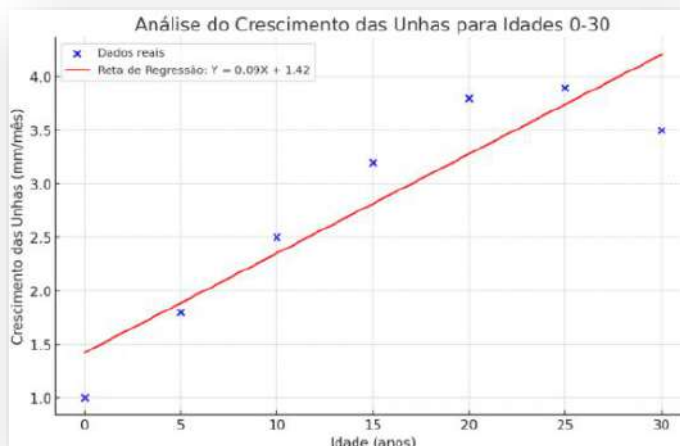
Determine os valores de a , b e c .

9. Estudos recentes indicam que a taxa de crescimento das nossas unhas varia ao longo da vida. Na *Figura 4*, apresentam-se os diagramas de dispersão e as retas de regressão lineares correspondentes, com base em dados que, embora fictícios, refletem essa situação.

Considera-se o crescimento mensal das unhas em milímetros.

Figura 4

- Diagramas de Dispersão



- As retas de regressão são as seguintes: $y = 0,0929x + 1,42$ e $y = -0,0329x + 4,41$.

9.1. Estime o crescimento mensal das unhas aos 10 anos e aos 100 anos, considerando a evolução do crescimento ao longo da vida e conclua que o crescimento mensal estimado aos 10 anos é superior ao dobro do crescimento mensal estimado aos 100.

9.2. O valor do coeficiente de correlação, entre a idade e o crescimento mensal das unhas, em pessoas com mais de 30 anos pode ser:

- (A) $-0,0329$ e a correlação é muito forte (B) $-0,99$ e a correlação é muito forte
(C) $-0,99$ e a correlação é muito fraca (D) $-0,0329$ e a correlação é muito fraca

FIM

Questão	1.	2.1	2.2	3.1	3.2	3.3	3.4	4.1	4.2	5.1	5.2	6.	7.1	7.2	8.	9.1	9.2	TOTAL
Cotação	8	8	14	14	8	14	12	14	14	14	14	8	14	8	14	14	8	200

SPM TESTES

Teste de Matemática

2025

10.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

(cinco páginas)

VERSÃO 2

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.



1. Considere, num referencial *o. n.* Oxy , a reta de equação $(x, y) = (2, 3) + k(0, -2), k \in \mathbb{R}$, e um ponto de abscissa 1.

Relativamente à informação dada podemos afirmar que:

- (A) O ponto não pertence à reta.
 (B) O ponto pode pertencer à reta e terá ordenada $\frac{3}{2}$
 (C) O ponto pode pertencer à reta e terá ordenada $-\frac{3}{2}$
 (D) O ponto pode pertencer à reta e terá ordenada indeterminada.

2. Considere as funções f e g , ambas definidas em $\mathbb{R}$, por

$$f(x) = 2(x + 3)(5 - x) \text{ e } g(x) = x + 3, \text{ respetivamente.}$$

- 2.1. A equação $f(x) = g(x)$ é equivalente a:

- (A) $(x + 3)[-1 + 2(x - 5)] = 0$ (B) $(x + 3)[1 + 2(5 - x)] = 0$
 (C) $(x + 3)[2(x - 5) - 1] = 0$ (D) $(x + 3)[2(5 - x) - 1] = 0$

- 2.2. Determine o conjunto solução da condição $f(x) < g(x)$.

3. Na figura 1 estão representados, num referencial *o. n.* $Oxyz$, o triângulo $[ABO]$ e os pontos $A(2, 0, 2)$, $B(2, 2, 0)$ e M , ponto médio de $[AB]$.

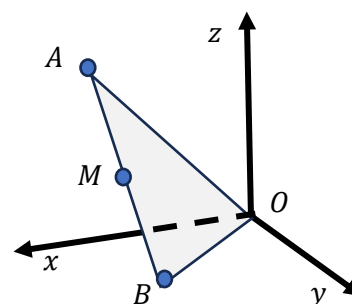


Figura 1

- 3.1. Mostre que o triângulo $[ABO]$ é equilátero.
 3.2. Qual das seguintes equações define uma equação vetorial da reta AO ?

- (A) $(x, y, z) = (0, 0, 0) + k(0, 0, -2), k \in \mathbb{R}$ (B) $(x, y, z) = (0, 0, 0) + k(-2, 0, 0), k \in \mathbb{R}$
 (C) $(x, y, z) = (3, 0, 3) + k(1, 0, 1), k \in \mathbb{R}$ (D) $(x, y, z) = (3, 0, 3) + k(-1, 0, 1), k \in \mathbb{R}$

- 3.3. Justifique que as coordenadas de M são $(2, 1, 1)$.

- 3.4. Sabe-se que existe uma única superfície esférica que passa pelos pontos A, B e O e que tem centro no plano determinado por estes três pontos (não se pede para justificar este facto).

Mostre que uma das equações cartesianas dessa superfície esférica é

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{3}$$

Sugestão: Comece por provar que o ponto $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ pertence à reta OM .

4. Considere a função f definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = \frac{1}{4} x^2$ e um ponto $A(a, \frac{1}{4} a^2)$, $a \neq 0$, pertencente ao gráfico de f .

4.1. Mostre que a reta que passa no ponto A e que tem declive $-\frac{2}{a}$, $a \neq 0$, também passa no ponto $B(0, 2 + \frac{1}{4} a^2)$.

4.2. Mostre que a área do triângulo $[ABC]$, sendo $C(0, \frac{1}{4} a^2)$, é igual ao módulo da abscissa do ponto A .

5. Na figura 2 estão representados, num referencial *o.n. Oxy*, o quadrado $[OABC]$ com vértices em $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(4,4)$ e $C(0,4)$ e um dos possíveis retângulos, $[DEFG]$, que se conseguem construir considerando como vértices os pontos de coordenadas $D(x, 1)$, $E(x + 4, 1)$, $F(x + 4, 4)$ e $G(x, 4)$, onde $x \in]-\infty, +\infty[$.

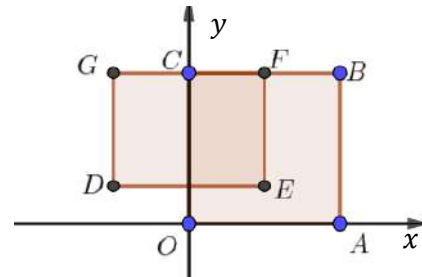


Figura 2

Para certos valores de x , tal como a figura sugere, há sobreposição do retângulo que se obtém e do quadrado dado.

A função f , definida por $f(x) = \begin{cases} 3(x+4) & \text{se } -4 < x \leq 0 \\ 3(4-x) & \text{se } 0 < x < 4 \\ 0 & \text{se } x \leq -4 \text{ ou } x \geq 4 \end{cases}$ dá a área da interseção das duas figuras geométricas.

5.1. Determine $f(1)$ e desenhe num referencial o quadrado e o retângulo correspondentes e assinale a região da interseção.

5.2. Complete a tabela seguinte de variação de f e indique o máximo da função.

x	$-\infty$	-4		4	$+\infty$
f	$\longrightarrow$				$\longrightarrow$

6. Durante as festividades de uma aldeia, realizou-se uma corrida de 7 km com a participação de 60 corredores.

No final, a organização recolheu os tempos dos participantes e apresentou os seguintes dados estatísticos acerca da distribuição dos tempos dos 60 participantes:

- Tempo mínimo: 36 minutos;
- 1.º Quartil: 42 minutos; Mediana: 51 minutos; 3.º Quartil: 58 minutos;
- Tempo máximo: 70 minutos.

Em que intervalo de tempo houve a maior concentração de chegadas por minuto:

- (A) Entre o 1.º Quartil e a Mediana. (B) Entre o mínimo e o 1.º Quartil.
(C) Entre o 3.º Quartil e o máximo. (D) Entre a Mediana e o 3.º Quartil.

7. Considere três pontos, do espaço, A , B e P , em que $-\frac{3}{2}\overrightarrow{AP} = -3\overrightarrow{PB}$.

7.1. Mostre que $\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PB}$ e que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{PB}$.

7.2. Qual a afirmação verdadeira?

- (A) B está entre A e P (B) P está entre A e B
(C) A está entre B e P (D) Os três pontos não são colineares

8. Na Figura 3 está representado parte do gráfico da função f , definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = |x - 1| - 1$.

Considere que:

- A é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Ox , de abscissa positiva;
- A ordenada do ponto B é o mínimo de f .

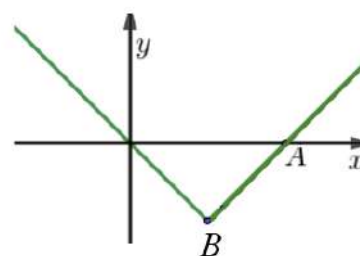


Figura 3

Considere ainda a função g , definida em $\mathbb{R}$, por

$g(x) = a(x - b)^2 + c$, $a \neq 0$, cujo gráfico tem como vértice o ponto A e passa no ponto B .

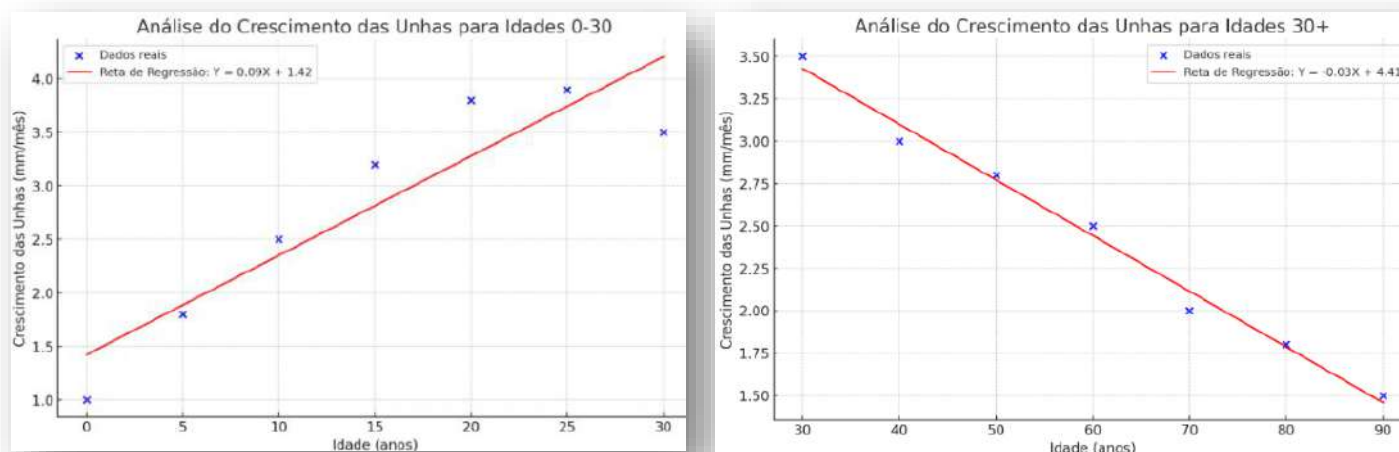
Determine os valores de a , b e c .

9. Estudos recentes indicam que a taxa de crescimento das nossas unhas varia ao longo da vida. Na *Figura 4*, apresentam-se os diagramas de dispersão e as retas de regressão lineares correspondentes, com base em dados que, embora fictícios, refletem essa situação.

Considera-se o crescimento mensal das unhas em milímetros.

Figura 4

- Diagramas de Dispersão



- As retas de regressão são as seguintes: $y = 0,0929x + 1,42$ e $y = -0,0329x + 4,41$.

9.1. Estime o crescimento mensal das unhas aos 10 anos e aos 100 anos, considerando a evolução do crescimento ao longo da vida e conclua que o crescimento mensal estimado aos 10 anos é superior ao dobro do crescimento mensal estimado aos 100.

9.2. O valor do coeficiente de correlação, entre a idade e o crescimento mensal das unhas, em pessoas com mais de 30 anos pode ser:

- (A) $-0,0329$ e a correlação é muito forte (B) $-0,99$ e a correlação é muito fraca
(C) $-0,99$ e a correlação é muito forte (D) $-0,0329$ e a correlação é muito fraca

FIM

Questão	1.	2.1	2.2	3.1	3.2	3.3	3.4	4.1	4.2	5.1	5.2	6.	7.1	7.2	8.	9.1	9.2	TOTAL
Cotação	8	8	14	14	8	14	12	14	14	14	14	8	14	8	14	14	8	200

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A prova é formada por itens de escolha múltipla e de resposta restrita. Os critérios de classificação dos itens de resposta restrita estão organizados por etapas, atribuindo-se uma pontuação a cada uma delas.

Caso os alunos adotem um processo não previsto nos critérios específicos, cabe ao professor corretor adaptar a distribuição da cotação atribuída.

Deve ser atribuída a classificação de zero pontos nas seguintes situações:

- Caso um aluno apresente apenas o resultado final de um item ou de uma etapa, quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações;
- Caso o aluno utilize de forma inequívoca a calculadora, uma vez que tal não é solicitado nesta prova.

Nas seguintes situações deve descontar-se um ponto às cotações estabelecidas para a etapa respetiva:

- Ocorrência de um erro de cálculo;
- Apresentação de uma resposta com o formato que não esteja de acordo com o que foi solicitado;
- Apresentação de expressões com erros do ponto de vista formal.

Caso ocorram erros que revelem desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades ou o aluno apresente uma resolução incompleta de uma etapa, deve descontar-se até metade da cotação dessa etapa.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

Questão	1.	2.1	2.2	3.1	3.2	3.3	3.4	4.1	4.2	5.1	5.2	6.	7.1	7.2	8.	9.1	9.2	TOTAL
Cotação	8	8	14	14	8	14	12	14	14	14	14	8	14	8	14	14	8	200

QUESTÃO		DESCRIÇÃO		COTAÇÃO
1.	Versão 1 (D); Versão 2 (A)			8
2.				22
	2.1	Versão 1 (A); Versão 2 (D)	8	
	2.2	• Verificar que $f(x) < g(x)$ é equivalente a $(x + 3)(9 - 2x) < 0$ 4 pontos • Identificar os zeros de $(x + 3)(9 - 2x)$..... 4 pontos • Identificar o sinal de $(x + 3)(9 - 2x)$ 4 pontos • Indicar o conjunto-solução $]-\infty, -3[\cup]\frac{9}{2}, +\infty[$ 2 pontos	14	
3.				48
	3.1	• Obter $\overline{AB}$, $\overline{AO}$ e $\overline{OB}$..... 12 pontos • Justificar que o triângulo $[ABO]$ é equilátero 2 pontos	14	
	3.2	Versão 1 (B); Versão 2 (C)	8	
	3.3	• Verificar que as coordenadas do ponto médio de $[AB]$ são $(2,1,1)$	14	
	3.4	1.º processo • Verificar que $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ pertence à reta OM e concluir que pertence ao plano ABO, já que esta reta está contida nesse plano..... 4 pontos • Verificar que $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ está à mesma distância dos três pontos A, B e O 3 pontos • Justificar que o circuncentro do triângulo $[ABO]$, único ponto do plano ABO à mesma distância de A, B e O, neste caso, tem de ser também o centro da superfície esférica pretendida..... 2 pontos • Concluir que a equação dada é de facto uma das equações dessa superfície esférica. 3 pontos 2.º processo • Justificar que o baricentro C do triângulo $[ABO]$ tem coordenadas $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, usando, por exemplo, o facto de estar no segmento de reta $[OM]$ e a distância de O a C ser igual a $\frac{2}{3}$ de $\overline{OM}$ 4 pontos • Justificar que, neste caso, o baricentro C coincide com o circuncentro, porque o triângulo $[ABO]$ é equilátero, e, portanto, C é o único ponto do plano do triângulo $[ABO]$ à mesma distância dos pontos A, B e O. 3 pontos • Concluir que C é também o centro da superfície esférica que passa pelos três pontos e tem centro no plano ABO.....2 pontos	12	

		Verificar que as coordenadas de um dos pontos A, B, O satisfazem à equação e concluir que esta equação é da única superfície esférica de centro em C e passando pelos pontos A, B e O. 3 pontos		
4.				28
	4.1	- Escrever uma equação da reta que passa no ponto A e que tem declive $-\frac{2}{a}$, $a \neq 0$ (por exemplo, $y = -\frac{2}{a}x + \frac{1}{4}a^2 + 2, a \neq 0$) 10 pontos - Justificar que o ponto B também pertence à reta 4 pontos	14	
	4.2	- Determinar $\overline{CB}$ (2) e $\overline{CA}$ (a) 10 pontos - Calcular a área do triângulo $[ABC]$ de base $[CA]$ e altura $[CB]$ ($A_{[ABC]} = a$, em que a é abcissa do ponto A)..... 4 pontos	14	
5.				28
	5.1	- Determinar $f(1) = 9$ 4 pontos - Determinar as coordenadas dos vértices do retângulo 4 pontos - Desenhar o retângulo 2 pontos - Desenhar o quadrado 2 pontos - Assinalar a região da interseção das duas figuras 2 pontos	14	
	5.2	- Verificar que para $-4 < x \leq 0$ a função é crescente..... 4 pontos - Verificar que para $0 < x < 4$ a função é decrescente..... 4 pontos - Completar o quadro de variação de f 2 pontos - Identificar $f(0) = 12$ como o máximo da função 4 pontos	14	
6.		Versão 1 (A); Versão 2 (B)		8
7.				22
	7.1	- Mostrar que $\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PB}$ 7 pontos - Mostrar que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{PB}$ 7 pontos	14	
	7.2	Versão 1 (C); Versão 2 (B)	8	
8.				14
		- Resolver a equação $f(x) = 0$ 3 pontos - Concluir que A, vértice da parábola, tem coordenadas $(2, 0)$..... 2 pontos - Determinar o mínimo de f, ordenada do ponto B ($f(1) = -1$) 3 pontos - Escrever a expressão analítica da função como $g(x) = a(x - 2)^2$ 3 pontos - Usar $g(1) = -1$ para obter o valor de a (-1) 2 pontos - Apresentar os valores pedidos ($a = -1; b = 2; c = 0$) 1 ponto		
9.				22
	9.1	- Estimar o crescimento mensal das unhas aos 10 anos ($\approx 2,349$ mm/mês) 6 pontos - Estimar o crescimento mensal das unhas aos 100 anos ($\approx 1,12$ mm/mês) 6 pontos - Concluir que o crescimento mensal estimado aos 10 anos é superior ao dobro do crescimento mensal estimado aos 100 ($2,394 > 2,24$) 2 pontos	14	
	9.2	Versão 1 (B); Versão 2 (C)	8	

SPM TESTES

Teste de Matemática 11.º ano

2025

11.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos. (quatro páginas)

VERSÃO 1

Para cada resposta, identifique o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Não é necessário o uso de máquina de calcular.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.



1. Na Figura 1 está representada, num referencial o.n. xOy , a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao segundo quadrante e à circunferência trigonométrica;
- o ponto B pertence ao primeiro quadrante e à circunferência trigonométrica, e é tal que AB é perpendicular a Oy ;
- o ângulo orientado de amplitude α tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\vec{OA}$;
- $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$

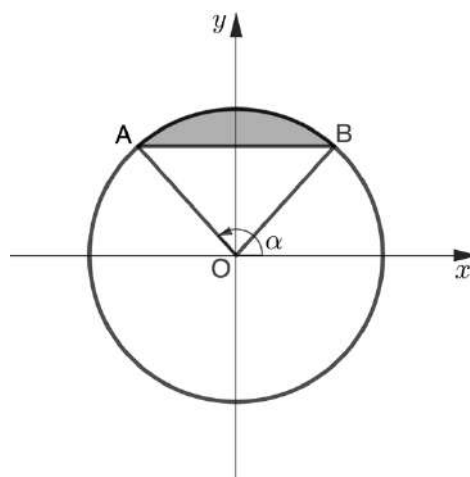


Figura 1

1.1. Mostre que a área da região representada a sombreado é dada em função de α por:

$$A(\alpha) = \alpha - \frac{\pi}{2} + \sin \alpha \cos \alpha$$

1.2. Para um certo valor de α sabe-se que $5 \sin(2025\pi + \alpha) + 4 = 0$

Determine, para esse valor de α , o valor exato das coordenadas do ponto A .

1.3. O valor de α para o qual $\overline{AB} = \sqrt{2}$ é:

(A) $-\frac{\pi}{4}$

(B) $\frac{3\pi}{4}$

(C) $\frac{11\pi}{4}$

(D) $-\frac{5\pi}{4}$

2. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 1$

2.1. Determine o período positivo mínimo da função f .

2.2. Na Figura 2 está representada parte do gráfico da função f bem como o triângulo $[ABC]$

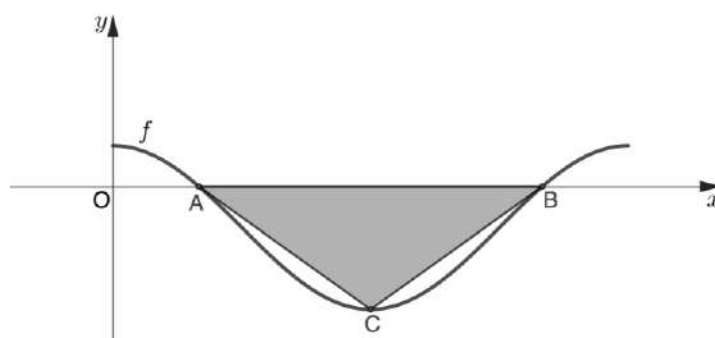


Figura 2

Sabe-se que:

- na restrição ao domínio de f considerada, o gráfico de f intersesta o eixo Ox nos pontos A e B assinalados na figura;
- a ordenada do ponto C é igual ao mínimo de f .

Determine a área do triângulo $[ABC]$.

3. Em relação a um ângulo α sabe-se que $\tan(\pi - \alpha) = a$ e $\cos(-\alpha) = b$, com $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Então pode concluir-se que $\sin(-\alpha)$ é igual a:

- (A) ab (B) $-ab$ (C) $\frac{a}{b}$ (D) $\frac{b}{a}$

4. Considere num referencial o.n. xOy :

- uma reta r de inclinação 120°
- uma reta s de inclinação θ

Sabe-se que o quociente entre o declive da reta r e o declive da reta s é igual a 3.

O valor de θ é:

- (A) 30° (B) 60° (C) -30° (D) 150°

5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$:

- o plano α definido pela equação $2x - y - 3z + 2 = 0$;
- a reta r definida pela equação $(x, y, z) = (1, -2, -1) + k(3, -1, 2), k \in \mathbb{R}$;
- os pontos de coordenadas $A(0, 2, -3)$ e $B(1, -2, 2)$

5.1. A reta r intersesta o plano α num ponto T . Determine as coordenadas do ponto T .

5.2. O plano α é tangente à superfície esférica de diâmetro $[AB]$ no ponto B ? Justifique.

6. Sabe-se que uma sucessão (a_n) é uma progressão aritmética em que a soma dos dez primeiros termos é igual a -10 e a diferença entre o quarto e o décimo termo é igual a 12. Identifique a razão da progressão e escreva uma expressão do termo geral.

7. Qual das expressões seguintes representa o termo geral de uma sucessão não monótona, mas limitada?

- (A) $n^2 - 6n + 9$ (B) $\frac{5-n}{2n+1}$
- (C) $\begin{cases} 1 + \frac{2}{n^2} & \text{se } n < 5 \\ 2 - \frac{3}{n} & \text{se } n \geq 6 \end{cases}$ (D) $\frac{(-1)^n \times n^2}{n+5}$

8. Considere as sucessões (u_n) e (v_n) definidas, respetivamente, por:

$$\begin{cases} u_1 = 64 \\ 2u_{n+1} = -u_n + 6, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{e} \quad v_n = u_n - 2$$

8.1. O valor de u_3 é

- (A) $-\frac{23}{2}$ (B) 16 (C) 64 (D) $\frac{35}{2}$

8.2. Sabendo que $u_n \neq 2, \forall n \in \mathbb{N}$, prove que (v_n) é uma progressão geométrica.

9. Para cada valor real de m , a função racional f define-se, no respetivo domínio, por

$$f(x) = \frac{mx+1}{2x+3}.$$

9.1. Sabe-se que o gráfico da função f admite duas assíntotas que se interseçam num ponto.

Designe esse ponto por P .

Determine para que valor real de m , P pertence ao eixo Ox , começando por identificar as assíntotas do gráfico de f .

9.2. Considere $m = 1$. Resolva a inequação $f(x) < -\frac{2}{4x^2-9}$

9.3. Se $m = 6$ então o valor de $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^+} f(x)$ é igual a:

(A) $-\infty$

(B) -7

(C) 3

(D) $+\infty$

10. Na Figura 3 está representado, num referencial o.n. xOy , o ponto $A(4,0)$, a reta r de equação $y = 2x + 3$ e um ponto P pertencente à reta r .

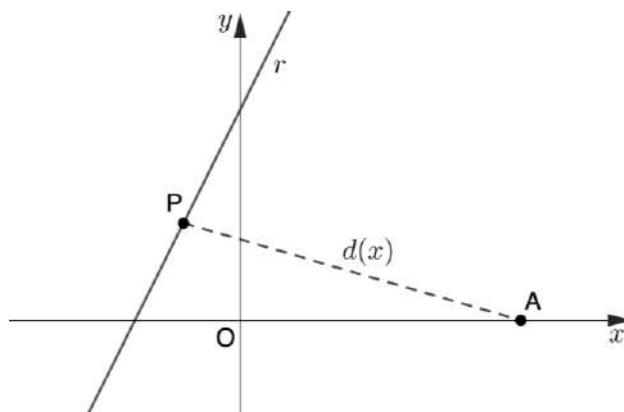


Figura 3

10.1. Existem dois pontos da reta r que distam 5 unidades de A .

Sendo x a abcissa de P , prove que a distância d entre A e P é dada, para cada valor de x , por $d(x) = \sqrt{5x^2 + 4x + 25}$ e determine a abcissa de cada um desses pontos.

10.2. Seja g a função definida, em $\mathbb{R}$, por $g(x) = \frac{d(x)}{2x+3}$

Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

FIM

Questão	1.1.	1.2.	1.3.	2.1.	2.2.	3.	4.	5.1.	5.2.	6.	7.	8.1	8.2	9.1.	9.2.	9.3	10.1	10.2	Total
Cotação	14	12	8	10	16	8	8	10	14	12	8	8	12	10	16	8	16	10	200

SPM TESTES

Teste de Matemática 11.º ano

2025

11.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos. (quatro páginas)

VERSÃO 2

Para cada resposta, identifique o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Não é necessário o uso de máquina de calcular.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.



1. Na Figura 1 está representada, num referencial o.n. xOy , a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao segundo quadrante e à circunferência trigonométrica;
- o ponto B pertence ao primeiro quadrante e à circunferência trigonométrica, e é tal que AB é perpendicular a Oy ;
- o ângulo orientado de amplitude α tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\hat{OA}$;
- $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$

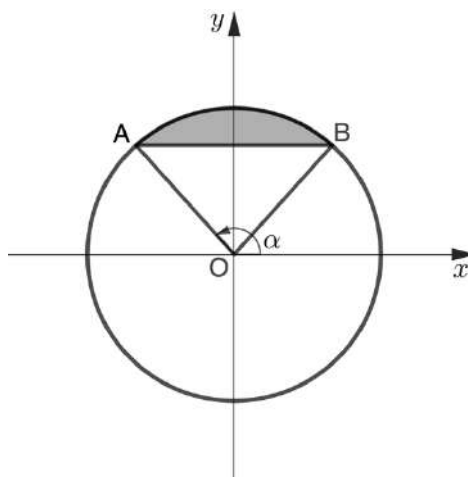


Figura 1

- 1.1. Mostre que a área da região representada a sombreado é dada em função de α por:

$$A(\alpha) = \alpha - \frac{\pi}{2} + \sin \alpha \cos \alpha$$

- 1.2. Para um certo valor de α sabe-se que $5 \sin(2025\pi + \alpha) + 4 = 0$

Determine, para esse valor de α , o valor exato das coordenadas do ponto A .

- 1.3. O valor de α para o qual $\overline{AB} = \sqrt{2}$ é:

- (A) $-\frac{5\pi}{4}$ (B) $-\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{3\pi}{4}$ (D) $\frac{11\pi}{4}$

2. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 1$

- 2.1. Determine o período positivo mínimo da função f .

- 2.2. Na Figura 2 está representada parte do gráfico da função f bem como o triângulo $[ABC]$

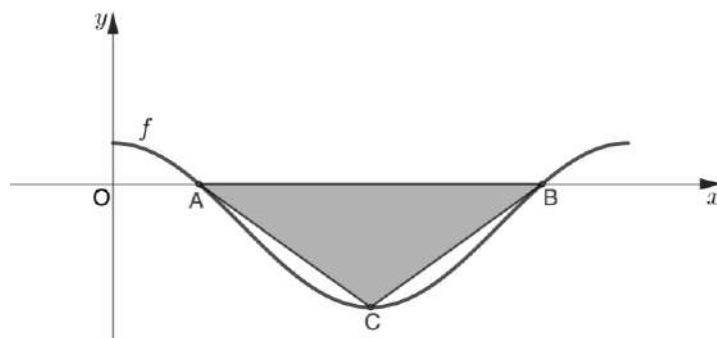


Figura 2

Sabe-se que:

- na restrição ao domínio de f considerada, o gráfico de f intersecta o eixo Ox nos pontos A e B assinalados na figura;
- a ordenada do ponto C é igual ao mínimo de f .

Determine a área do triângulo $[ABC]$.

3. Em relação a um ângulo α sabe-se que $\tan(\pi - \alpha) = a$ e $\cos(-\alpha) = b$, com $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Então pode concluir-se que $\sin(-\alpha)$ é igual a:

- (A) $-ab$ (B) ab (C) $\frac{b}{a}$ (D) $\frac{a}{b}$

4. Considere num referencial o.n. xOy :

- uma reta r de inclinação 120°
- uma reta s de inclinação θ

Sabe-se que o quociente entre o declive da reta r e o declive da reta s é igual a 3.

O valor de θ é:

- (A) 150° (B) 60° (C) 30° (D) -30°

5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$:

- o plano α definido pela equação $2x - y - 3z + 2 = 0$;
- a reta r definida pela equação $(x, y, z) = (1, -2, -1) + k(3, -1, 2), k \in \mathbb{R}$;
- os pontos de coordenadas $A(0, 2, -3)$ e $B(1, -2, 2)$

5.1. A reta r intersesta o plano α num ponto T . Determine as coordenadas do ponto T .

5.2. O plano α é tangente à superfície esférica de diâmetro $[AB]$ no ponto B ? Justifique.

6. Sabe-se que uma sucessão (a_n) é uma progressão aritmética em que a soma dos dez primeiros termos é igual a -10 e a diferença entre o quarto e o décimo termo é igual a 12. Identifique a razão da progressão e escreva uma expressão do termo geral.

7. Qual das expressões seguintes representa o termo geral de uma sucessão não monótona, mas limitada?

- (A) $\frac{(-1)^n \times n^2}{n+5}$ (B) $\begin{cases} 1 + \frac{2}{n^2} & \text{se } n < 5 \\ 2 - \frac{3}{n} & \text{se } n \geq 6 \end{cases}$
- (C) $\frac{5-n}{2n+1}$ (D) $n^2 - 6n + 9$

8. Considere as sucessões (u_n) e (v_n) definidas, respetivamente, por:

$$\begin{cases} u_1 = 64 \\ 2u_{n+1} = -u_n + 6, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{e} \quad v_n = u_n - 2$$

8.1. O valor de u_3 é

- (A) 64 (B) 16 (C) $\frac{35}{2}$ (D) $-\frac{23}{2}$

8.2. Sabendo que $u_n \neq 2, \forall n \in \mathbb{N}$, prove que (v_n) é uma progressão geométrica.

9. Para cada valor real de m , a função racional f define-se, no respetivo domínio, por

$$f(x) = \frac{mx+1}{2x+3}.$$

9.1. Sabe-se que o gráfico da função f admite duas assíntotas que se interseçam num ponto.

Designe esse ponto por P .

Determine para que valor real de m , P pertence ao eixo Ox , começando por identificar as assíntotas do gráfico de f .

9.2. Considere $m = 1$. Resolva a inequação $f(x) < -\frac{2}{4x^2-9}$

9.3. Se $m = 6$ então o valor de $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^+} f(x)$ é igual a:

(A) $+\infty$

(B) 3

(C) -7

(D) $-\infty$

10. Na Figura 3 está representado, num referencial o.n. xOy , o ponto $A(4,0)$, a reta r de equação $y = 2x + 3$ e um ponto P pertencente à reta r .

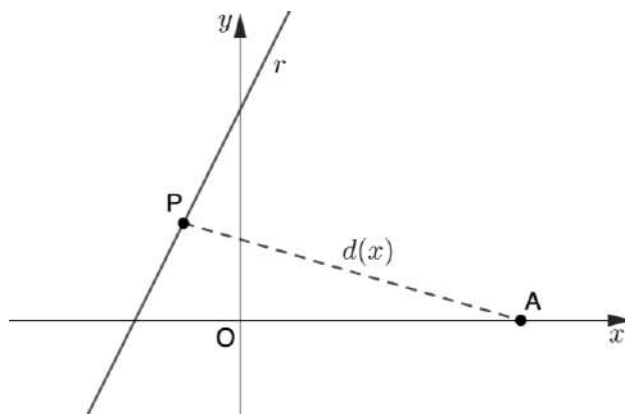


Figura 3

10.1. Existem dois pontos da reta r que distam 5 unidades de A .

Sendo x a abcissa de P , prove que a distância d entre A e P é dada, para cada valor de x , por $d(x) = \sqrt{5x^2 + 4x + 25}$ e determine a abcissa de cada um desses pontos.

10.2. Seja g a função definida, em $\mathbb{R}$, por $g(x) = \frac{d(x)}{2x+3}$

Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

FIM

Questão	1.1.	1.2.	1.3.	2.1.	2.2.	3.	4.	5.1.	5.2.	6.	7.	8.1	8.2	9.1.	9.2.	9.3	10.1	10.2	Total
Cotação	14	12	8	10	16	8	8	10	14	12	8	8	12	10	16	8	16	10	200

SPMTESTES

Teste de Matemática 11.º ano

2025

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A prova é formada por itens de escolha múltipla e de resposta restrita. Os critérios de classificação dos itens de resposta restrita estão organizados por etapas, atribuindo-se, a cada uma delas, uma pontuação.

Caso os alunos adotem um processo não previsto nos critérios específicos, cabe ao professor corretor adaptar a distribuição da cotação atribuída.

Deve ser atribuída a classificação de zero pontos nas seguintes situações:

- Caso um aluno apresente apenas o resultado final de um item, ou de uma etapa, quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações;
- Caso o aluno utilize de forma inequívoca a calculadora, uma vez que tal não é solicitado nesta prova.

Nas seguintes situações deve descontar-se um ponto às cotações estabelecidas para a etapa respetiva:

- Ocorrência de um erro de cálculo;
- Apresentação de uma resposta com o formato que não esteja de acordo com o que foi solicitado;
- Apresentação de expressões com erros do ponto de vista formal.

Caso ocorram erros que revelem desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades ou o aluno apresente uma resolução incompleta de uma etapa, deve descontar-se até metade da cotação dessa etapa.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

Questão	1.1.	1.2.	1.3.	2.1.	2.2.	3.	4.	5.1.	5.2.	6.	7.	8.1.	8.2.	9.1.	9.2.	9.3.	10.1.	10.2.	Total
Cotação	14	12	8	10	16	8	8	10	14	12	8	8	12	10	16	8	16	10	200

Item	Descrição	Cotação
1.		34
1.1.		14
	- Indicar as coordenadas do ponto A, em função de α 1 ponto - Indicar as coordenadas do ponto B, em função de α 1 ponto - Escrever $\overline{AB}$, em função de α 2 pontos - Determinar a área do triângulo $[ABO]$, em função de α 4 pontos - Determinar a área do setor circular AOB, em função de α 4 pontos - Obter a expressão pretendida 2 pontos	
1.2.		12
	- Concluir que $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ 5 pontos - Relacionar $\sin \alpha$ com $\cos \alpha$ 5 pontos - Obter $A\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ como resposta ao problema 2 pontos	
1.3.	Versão 1 – (B); Versão 2 – (C) _____	8
2.		26
2.1.		10
	Seja P o período positivo mínimo da função f . - Escrever $f(x + P) = f(x)$ 2 pontos - Obter $\cos\left(\frac{x+P}{2}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ 4 pontos - Concluir que como 2π é o período positivo mínimo da função cosseno então $\frac{P}{2} = 2\pi$ e portanto $P = 4\pi$ 4 pontos	
2.2.		16
	- Determinar os zeros de f na restrição apresentada e obter as abcissas dos pontos A e $B\left(\frac{2\pi}{3} \text{ e } \frac{10\pi}{3} \text{ respetivamente}\right)$ 8 pontos - Determinar o contradomínio de f e concluir que a ordenada do ponto C é igual a -3 4 pontos - Calcular a área do triângulo $[ABC]$ (4π) 4 pontos	
3.	Versão 1 – (A); Versão 2 – (B) _____	8
4.	Versão 1 – (D); Versão 2 – (A) _____	8
5.		24
5.1.		10
	- Escrever as coordenadas de um ponto genérico da reta r, em função de k 2 pontos - Obter uma equação na variável k, substituindo x, y e z na equação do plano α pelas coordenadas de um ponto genérico da reta r e obter o valor de k (-9) 6 pontos	

		Obter as coordenadas do ponto de interseção do plano α com a reta r ($T(-26, 7, -19)$) 2 pontos	
	5.2.		14
		- Concluir que para que o plano α seja tangente à superfície esférica no ponto B é necessário que: $B \in \alpha$ e $\overrightarrow{AB}$ seja normal ao plano α 3 pontos - Determinar $\overrightarrow{AB}$ 1 ponto $\overrightarrow{AB}$ é normal ao plano α, se e só se, $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{n}_\alpha$ são colineares, sendo $\vec{n}_\alpha = (2, -1, -3)$. Averiguar se $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{n}_\alpha$ são colineares 6 pontos - Concluir que $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{n}_\alpha$ não são colineares 2 pontos - Concluir que o plano α não pode ser tangente à superfície esférica no ponto B 2 pontos	
6.			12
		A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas: 1.º processo - Escrever a equação $u_4 - u_{10} = 12$ 1 ponto - Exprimir u_4 e u_{10} em função de u_1 e da razão r 2 pontos - Resolver a equação e concluir que $r = -2$ 2 pontos - Escrever $\frac{u_1 + u_{10}}{2} \times 10 = -10$ 2 pontos - Exprimir u_{10} em função de u_1 e da razão r 1 ponto - Resolver a equação e concluir que $u_1 = 8$ 2 pontos - Escrever uma expressão do termo geral $u_n = 10 - 2n$ 2 pontos 2.º processo - Escrever o sistema $\begin{cases} u_4 - u_{10} = 12 \\ \frac{u_1 + u_{10}}{2} \times 10 = -10 \end{cases}$ 3 pontos - Exprimir u_4 e u_{10} em função de u_1 e da razão r 2 pontos - Exprimir u_{10} em função de u_1 e da razão r 1 ponto - Resolver o sistema 4 pontos - Escrever uma expressão do termo geral $u_n = 10 - 2n$ 2 pontos	
7.		Versão 1 – (C); Versão 2 – (B) _____	8
8.			20
	8.1.	Versão 1 – (D); Versão 2 – (C) _____	8
	8.2.		12
		A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas: - Escrever $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}-2}{u_n-2}$ 3 pontos - Escrever $\frac{u_{n+1}-2}{u_n-2} = \frac{-\frac{u_n}{2}+3-2}{u_n-2}$ 2 pontos - Concluir que $\frac{-\frac{u_n}{2}+3-2}{u_n-2} = \frac{-(u_n-2)}{2(u_n-2)}$ 4 pontos - Concluir que $\frac{-(u_n-2)}{2(u_n-2)} = -\frac{1}{2}$ para $n \in \mathbb{N}$ pois $u_n \neq 2, \forall n \in \mathbb{N}$ 2 pontos - Concluir que (v_n) é uma progressão geométrica 1 ponto	
9.			34
	9.1.		10
		A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas:	

	1º processo • Escrever $\frac{mx+1}{2x+3} = \frac{m}{2} + \frac{1-\frac{3}{2}m}{2x+3}$ 3 pontos • Identificar a assíntota vertical: $x = -\frac{3}{2}$ 1 ponto • Identificar a assíntota horizontal: $y = \frac{m}{2}$, para $m \in \mathbb{R}$ 1 ponto • Identificar as coordenadas do ponto $P\left(-\frac{3}{2}, \frac{m}{2}\right)$, para $m \in \mathbb{R}$ 2 pontos • Escrever a equação $\frac{m}{2} = 0$ 2 pontos • Concluir que $m = 0$ 1 ponto 2º processo • Identificar $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ e a assíntota vertical: $x = -\frac{3}{2}$ 2 pontos • Calcular o $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e obter $\frac{m}{2}$ 2 pontos • Identificar a assíntota horizontal: $y = \frac{m}{2}$, para $m \in \mathbb{R}$ 1 ponto • Identificar as coordenadas do ponto $P\left(-\frac{3}{2}, \frac{m}{2}\right)$, para $m \in \mathbb{R}$ 2 pontos • Escrever a equação $\frac{m}{2} = 0$ 2 pontos • Concluir que $m = 0$ 1 ponto	
9.2.		16
	A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas: • Escrever $f(x) < -\frac{2}{4x^2-9} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2x+3} < -\frac{2}{4x^2-9}$ 1 ponto • Concluir que $\frac{x+1}{2x+3} < -\frac{2}{4x^2-9} \Leftrightarrow \frac{2x^2-x-1}{(2x+3)(2x-3)} < 0$ 4 pontos • Calcular os zeros de $2x^2 - x - 1$ 2 pontos • Calcular os zeros de $(2x + 3)(2x - 3) = 0$ 2 pontos • Construir o quadro de estudo de sinal 6 pontos • Indicar o conjunto- solução $\left]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]1, \frac{3}{2}\right[$ 1 ponto	
9.3.	Versão 1 – (A); Versão 2 – (D)	8
10.		26
10.1.		16
	A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas: • Identificar as coordenadas de $P(x, 2x + 3)$ 2 pontos • Escrever $\overline{AP} = \sqrt{(x-4)^2 + (2x+3)^2}$ 3 pontos • Simplificar $\sqrt{(x-4)^2 + (2x+3)^2} = \sqrt{5x^2 + 4x + 25}$ 4 pontos • Escrever $\overline{AP} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{5x^2 + 4x + 25} = 5$ 2 pontos • Resolver a equação e obter $x = 0 \vee x = -\frac{4}{5}$ 4 pontos • Apresentar a resposta 1 ponto	
10.2.		10
	A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas: 1º processo • Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x^2+4x+25}}{2x+3}$ 1 ponto • Reconhecer a existência de uma indeterminação 1 ponto • Levantar a indeterminação: - Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x^2+4x+25}}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x^2+4x+25}}{\sqrt{(2x+3)^2}}$ 2 pontos - Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x^2+4x+25}}{\sqrt{(2x+3)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{5x^2+4x+25}{4x^2+12x+9}}$ 2 pontos	

		- Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{5x^2+4x+25}{4x^2+12x+9}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2+4x+25}{4x^2+12x+9}}$ 1 ponto - Concluir que $\sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2+4x+25}{4x^2+12x+9}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 3 pontos 2º processo • Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x^2+4x+25}}{2x+3}$ 1 ponto • Reconhecer a existência de uma indeterminação 1 ponto • Levantar a indeterminação: - Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x^2+4x+25}}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2(5+\frac{4}{x}+\frac{25}{x^2})}}{2x+3}$ 2 pontos - Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2(5+\frac{4}{x}+\frac{25}{x^2})}}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{5+\frac{4}{x}+\frac{25}{x^2}}}{x(2+\frac{3}{x})}$ 3 pontos - Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{5+\frac{4}{x}+\frac{25}{x^2}}}{x(2+\frac{3}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5+\frac{4}{x}+\frac{25}{x^2}}}{2+\frac{3}{x}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 3 pontos	
		TOTAL	200

Prova de Matemática A

Ensino Secundário | maio de 2025

12.º Ano de Escolaridade

Duração da Prova: 120 minutos | Tolerância: 30 minutos

8 páginas

VERSÃO 1

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As citações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.



Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos,

do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfície

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base;
 g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Complexos

$(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$

As raízes índice n de $z = r e^{i\theta}$ são dadas por:

$$\sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} \quad (k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

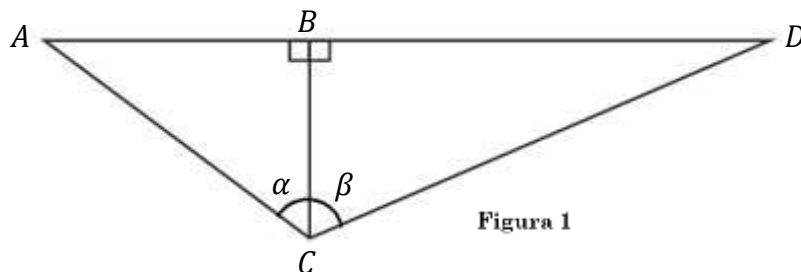
1. De dois números reais não negativos a e b , sabe-se que $a \neq b$ e que $\log(a^2 + b^2) = 2 \log(a + b)$.
O valor de $a^b + b^a$ é:

(A) 0 (B) 1 (C) 4 (D) 8

2. Na **Figura 1**, estão representados os triângulos retângulos $[ABC]$ e $[BCD]$.

Considerando-se uma certa unidade de medida, sabe-se que:

- $\overline{AB} = 4$
- $\overline{BD} = 6$
- $\overline{AC} = 5$
- a amplitude de $\widehat{ACB}$ é α e a amplitude de $\widehat{BCD}$ é β



Determine o valor **exato** de $\cos(\alpha + \beta)$

3. Considere a sucessão (u_n) de termos positivos, crescente e não majorada.

Qual o valor do limite

$$\lim \left(1 - \frac{e}{2u_n} \right)^{u_n} ?$$

(A) $e^{-\frac{e}{2}}$ (B) $2e^{-e}$ (C) e^{-2e} (D) $-e^{\frac{e}{2}}$

4. Considere a função g , de domínio $[0, \pi[$, definida por:

$$g(x) = \sin x - e^{\sin x}$$

Estude a função g quanto à monotonia em $[0, \pi[$ e determine, caso existam, os extremos relativos.

Na sua resposta, apresente os intervalos de monotonia.

5. Seja (w_n) uma progressão aritmética de razão 10.

Sabe-se que w_1 , w_2 e w_8 são três termos consecutivos de uma progressão geométrica.

Averigue se 2025 é termo de (w_n)

6. Considere a função f , de domínio $[-2, +\infty[$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{\sin(ex+e)} & \text{se } -2 \leq x < -1 \\ \frac{1}{e} & \text{se } x = -1 \\ \frac{x^2+3x+2}{e^{x+2}-e} & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

O argumento da função seno está expressos em radianos.

6.1. Averigue se a função f é contínua em $x = -1$

6.2. Mostre que o eixo Ox é assíntota horizontal ao gráfico de f .

7. Seja g uma função de domínio $\mathbb{R}$, diferenciável, tal que:

- o ponto de coordenadas $(3, -6)$ pertence ao gráfico da função g
- g é par
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - g(x)) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(g(x))^2 + 6g(x)}{x^2 - 9} = -1$

Considere as proposições:

I. A reta de equação $y = 3x + 3$ é tangente ao gráfico de g em $x = 3$

II. A reta de equação $y = 3x - 1$ é assíntota ao gráfico de g quando $x \rightarrow +\infty$

Justifique que as proposições I e II são **falsas**.

Na sua resposta apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

8. Na **Figura 2**, estão representados, num referencial o.n. $Oxyz$, dois cubos com 4 unidades de aresta.

Sabe-se que:

- no cubo $[MOZRNLDP]$ a aresta $[OM]$ está contida no semieixo positivo Ox , a aresta $[OZ]$ está contida no semieixo negativo Oy e a aresta $[OD]$ está contida no semieixo positivo Oz
- o cubo $[ABCDEFGH]$ tem a aresta $[DG]$ contida no semieixo positivo Oz e a face $[DCFG]$ contida no plano xOz

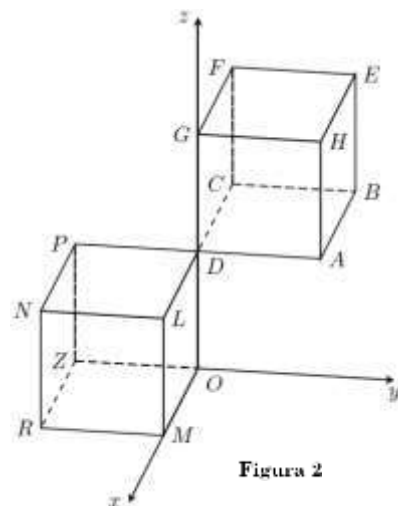


Figura 2

8.1. Qual das seguintes equações define o plano mediador do segmento de reta $[ER]$?

(A) $-x + y + z + 4 = 0$

(B) $x + y - z + 4 = 0$

(C) $x - y + z = 4$

(D) $-x + y + z = 4$

8.2. Seja S um ponto do plano $z = k$, com ordenada igual a e^k , e abcissa igual ao cubo da cota, onde $k \in]1, 3[$

Sabe-se que $\overrightarrow{OS}$ é perpendicular a $\overrightarrow{BR}$ e que existe um único ponto S nestas condições para k no referido intervalo.

Determine o valor arredondado às décimas da cota do ponto S

Sabe-se que a utilização das **capacidades gráficas da sua calculadora** lhe permite, neste caso, determinar valores aproximados adequados da cota do ponto S , mas não se pede para justificar este facto.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora,

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema
- reproduzir, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na sua calculadora e que lhe permite(m) resolver a equação
- apresentar a cota do ponto S , arredondada às décimas

8.3. Seja ϕ a amplitude, em graus, do ângulo *EPR*.

Determine, o valor de ϕ , arredondado à décima de grau.

9. Determine os números reais que são solução da equação:

$$2e^x \ln(5 - e^x) - 8 \ln(5 - e^x) = x(2e^x - 8)$$

10. No ano passado, numa determinada escola secundária, foram realizados diversos exames nacionais a diferentes disciplinas, entre as quais *Matemática A* e *Física e Química A*.

Na **Tabela 1**, apresentam-se os pontos (de 0 a 200) obtidos por oito alunos que realizaram ambos os exames na referida escola, sendo x a classificação obtida no exame de *Matemática A*, em pontos, e y a classificação obtida no exame de *Física e Química A*, em pontos.

Classificação obtida a <i>Matemática A</i> em pontos (x)	Classificação obtida a <i>Física e Química A</i> em pontos (y)
140	113
111	100
161	122
198	155
175	132
179	108
170	140
185	180

Tabela 1

Admita como válido o modelo de regressão linear de y sobre x obtido a partir dos dados apresentados na **Tabela 1**.

A Mafalda, aluna dessa escola, realizou no ano passado, os exames de *Matemática A* e de *Física e Química A*, tendo obtido no primeiro, a classificação de 150 pontos.

A classificação da Mafalda, em pontos, no exame nacional de *Física e Química A*, prevista por esse modelo de regressão linear, seria de, aproximadamente:

(A) 192

(B) 121

(C) 185

(D) 125

Responda a um e um só dos grupos A ou B

Se responder a mais do que um destes grupos deve indicar qual deles pretende que seja classificado. Se não der esta indicação será classificado o grupo a que responder em primeiro lugar.

Grupo A

11. Considere os dois números naturais, A e B definidos por:

$$\bullet A = {}^{2024}C_{100} - {}^{2023}C_{101}$$

$$\bullet B = {}^{2023}C_{100} - {}^{2024}C_{1923}$$

O valor de $A - B$ é dado por:

(A) ${}^{2024}C_{100}$

(B) ${}^{2025}C_{100}$

(C) ${}^{2024}C_{101}$

(D) ${}^{2025}C_{101}$

12. Os alunos de uma turma do 12.º ano estão a preparar a semana de vendas, tendo em vista angariação de fundos para o baile de finalistas.

Estarão envolvidos nesta venda, 16 alunos, sete rapazes e nove raparigas.

O Diretor de Turma resolveu tirar uma fotografia aos 16 alunos envolvidos e sugeriu que se dispusessem em duas filas, uma de nove elementos (a de trás) e uma de sete elementos (a da frente).

Supondo que a constituição das filas é feita de forma aleatória, qual a probabilidade de uma das filas ser formada apenas por raparigas?

Apresenta o resultado na forma de fração de irredutível.

13. Seja $(E, \mathcal{P}(E), P)$ um espaço de probabilidades e $A, B \in \mathcal{P}(E)$, tal que $P(B) \neq 0$.

Prove que:

$$\frac{P(B) - P(\overline{B} \cup A)}{P(B)} = 1 - \frac{1 - P(B)}{P(B)} - P(A|B)$$

Grupo B

11. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Considere, em $\mathbb{C}$, os números $z_1 = 1 - 2\sqrt{3}i$ e $z_2 = 2a - i$, $a \in \mathbb{R}$

O valor de a para o qual o número $\bar{z}_1 \times z_2$ é um imaginário puro é:

- (A) $-\sqrt{3}$ (B) $-\frac{\sqrt{3}}{12}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ (D) $\sqrt{3}$

12. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Considere, em $\mathbb{C}$, os números $w_1 = 1 - i$ e $w_2 = 2e^{i(\frac{2\pi}{5})}$

Seja $z = \frac{(w_2)^n}{w_1}$, com $n \in \mathbb{N}$

Mostra que não existe n natural, tal que o afixo de z pertence à bissetriz do segundo quadrante.

13. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Considere a equação $z^4 + 2z^3 + z^2 + 32z - 240 = 0$

Esta equação tem quatro soluções em $\mathbb{C}$, sendo duas delas os números -5 e 3 .

As imagens geométricas, no plano complexo, dessas quatro soluções são vértices de um quadrilátero.

Determine a área desse quadrilátero.

FIM

Item											
Cotação (em pontos)											
1	2	3	4	5	6.1.	6.2.	7	8.1.	8.2.	TOTAL	200 pontos
10	12	10	14	14	14	14	14	10	14		
8.3.	9	10	GRUPO A			GRUPO B					
			11	12	13	11	12	13			
14	14	10	10	14	12	10	14	12			

Prova de Matemática A

Ensino Secundário | maio de 2025

12.º Ano de Escolaridade

Duração da Prova: 120 minutos | Tolerância: 30 minutos

8 páginas

VERSÃO 2

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As citações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.



Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos,

do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfície

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base;
 g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Complexos

$$(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

As raízes índice n de $z = r e^{i\theta}$ são dadas por:

$$\sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} \quad (k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

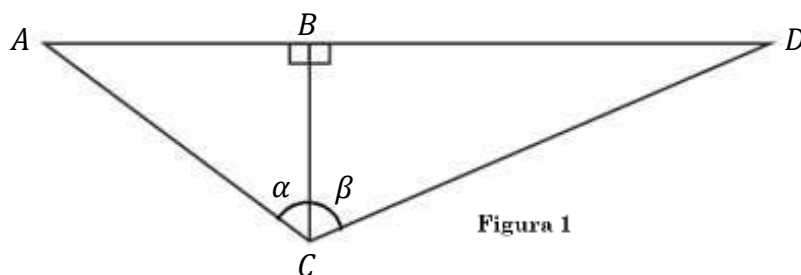
1. De dois números reais não negativos a e b , sabe-se que $a \neq b$ e que $\log(a^2 + b^2) = 2 \log(a + b)$.
O valor de $a^b + b^a$ é:

(A) 8 (B) 4 (C) 1 (D) 0

2. Na **Figura 1**, estão representados os triângulos retângulos $[ABC]$ e $[BCD]$.

Considerando-se uma certa unidade de medida, sabe-se que:

- $\overline{AB} = 4$
- $\overline{BD} = 6$
- $\overline{AC} = 5$
- a amplitude de $\widehat{ACB}$ é α e a amplitude de $\widehat{BCD}$ é β



Determine o valor **exato** de $\cos(\alpha + \beta)$

3. Considere a sucessão (u_n) de termos positivos, crescente e não majorada.

Qual o valor do limite

$$\lim \left(1 - \frac{e}{2u_n} \right)^{u_n} ?$$

(A) $-e^{\frac{e}{2}}$ (B) e^{-2e} (C) $2e^{-e}$ (D) $e^{-\frac{e}{2}}$

4. Considere a função g , de domínio $[0, \pi[$, definida por:

$$g(x) = \sin x - e^{\sin x}$$

Estude a função g quanto à monotonia em $[0, \pi[$ e determine, caso existam, os extremos relativos.

Na sua resposta, apresente os intervalos de monotonia.

5. Seja (w_n) uma progressão aritmética de razão 10.

Sabe-se que w_1 , w_2 e w_8 são três termos consecutivos de uma progressão geométrica.

Averigue se 2025 é termo de (w_n)

6. Considere a função f , de domínio $[-2, +\infty[$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{\sin(ex+e)} & \text{se } -2 \leq x < -1 \\ \frac{1}{e} & \text{se } x = -1 \\ \frac{x^2+3x+2}{e^{x+2}-e} & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

O argumento da função seno está expressos em radianos.

6.1. Averigue, se a função f é contínua em $x = -1$

6.2. Mostre que o eixo Ox é assíntota horizontal ao gráfico de f .

7. Seja g uma função de domínio $\mathbb{R}$, diferenciável, tal que:

- o ponto de coordenadas $(3, -6)$ pertence ao gráfico da função g
- g é par
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - g(x)) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(g(x))^2 + 6g(x)}{x^2 - 9} = -1$

Considere as proposições:

III. A reta de equação $y = 3x + 3$ é tangente ao gráfico de g em $x = 3$

IV. A reta de equação $y = 3x - 1$ é assíntota ao gráfico de g quando $x \rightarrow +\infty$

Justifique que as proposições I e II são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

8. Na **Figura 2**, estão representados, num referencial o.n. $Oxyz$, dois cubos com 4 unidades de aresta.

Sabe-se que:

- no cubo $[MOZRNLDP]$ a aresta $[OM]$ está contida no semieixo positivo Ox , a aresta $[OZ]$ está contida no semieixo negativo Oy e a aresta $[OD]$ está contida no semieixo positivo Oz
- o cubo $[ABCDEFGH]$ tem a aresta $[DG]$ contida no semieixo positivo Oz e a face $[DCFG]$ contida no plano xOz

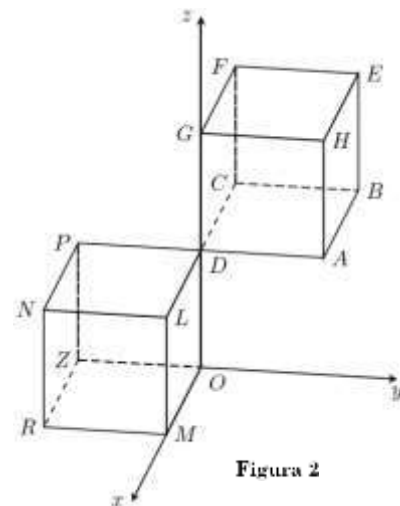


Figura 2

8.1. Qual das seguintes equações define o plano mediador do segmento de reta $[ER]$?

(A) $x - y + z = 4$

(B) $-x + y + z = 4$

(C) $-x + y + z + 4 = 0$

(D) $x + y - z + 4 = 0$

8.2. Seja S um ponto do plano $z = k$, com ordenada igual a e^k , e abcissa igual ao cubo da cota, onde $k \in]1, 3[$

Sabe-se que $\overrightarrow{OS}$ é perpendicular a $\overrightarrow{BR}$ e que existe um único ponto S nestas condições para k no referido intervalo.

Determine o valor arredondado às décimas da cota do ponto S

Sabe-se que a utilização das **capacidades gráficas da sua calculadora** lhe permite, neste caso, determinar valores aproximados adequados da cota do ponto S , mas não se pede para justificar este facto.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora,

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema
- reproduzir, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na sua calculadora e que lhe permite(m) resolver a equação
- apresentar a cota do ponto S , arredondada às décimas

8.3. Seja ϕ a amplitude, em graus, do ângulo EPR .

Determine, o valor de ϕ , arredondado à décima de grau.

9. Determine os números reais que são solução da equação:

$$2e^x \ln(5 - e^x) - 8 \ln(5 - e^x) = x(2e^x - 8)$$

10. No ano passado, numa determinada escola secundária, foram realizados diversos exames nacionais a diferentes disciplinas, entre as quais *Matemática A* e *Física e Química A*.

Na **Tabela 1**, apresentam-se os pontos (de 0 a 200) obtidos por oito alunos que realizaram ambos os exames na referida escola, sendo x a classificação obtida no exame de *Matemática A*, em pontos, e y a classificação obtida no exame de *Física e Química A*, em pontos.

Classificação obtida a <i>Matemática A</i> em pontos (x)	Classificação obtida a <i>Física e Química A</i> em pontos (y)
140	113
111	100
161	122
198	155
175	132
179	108
170	140
185	180

Tabela 1

Admita como válido o modelo de regressão linear de y sobre x obtido a partir dos dados apresentados na **Tabela 1**.

A Mafalda, aluna dessa escola, realizou no ano passado, os exames de *Matemática A* e de *Física e Química A*, tendo obtido no primeiro, a classificação de 150 pontos.

A classificação da Mafalda, em pontos, no exame nacional de *Física e Química A*, prevista por esse modelo de regressão linear, seria de, aproximadamente:

(A) 125

(B) 185

(C) 121

(D) 192

Responda a um e um só dos grupos A ou B

Se responder a mais do que um destes grupos deve indicar qual deles pretende que seja classificado. Se não der esta indicação será classificado o grupo a que responder em primeiro lugar.

Grupo A

11. Considere os dois números naturais, A e B definidos por:

- $A = {}^{2024}C_{100} - {}^{2023}C_{101}$
- $B = {}^{2023}C_{100} - {}^{2024}C_{1923}$

O valor de $A - B$ é dado por:

- (A) ${}^{2025}C_{101}$ (B) ${}^{2024}C_{101}$ (C) ${}^{2025}C_{100}$ (D) ${}^{2024}C_{100}$

12. Os alunos de uma turma do 12.º ano estão a preparar a semana de vendas, tendo em vista angariação de fundos para o baile de finalistas.

Estarão envolvidos nesta venda, 16 alunos, sete rapazes e nove raparigas.

O Diretor de Turma resolveu tirar uma fotografia aos 16 alunos envolvidos e sugeriu que se dispusessem em duas filas, uma de nove elementos (a de trás) e uma de sete elementos (a da frente).

Supondo que a constituição das filas é feita de forma aleatória, qual a probabilidade de uma das filas ser formada apenas por raparigas?

Apresenta o resultado na forma de fração de irredutível.

13. Seja $(E, \mathcal{P}(E), P)$ um espaço de probabilidades e $A, B \in \mathcal{P}(E)$, tal que $P(B) \neq 0$.

Prove que:

$$\frac{P(B) - P(\overline{B} \cup A)}{P(B)} = 1 - \frac{1 - P(B)}{P(B)} - P(A|B)$$

Grupo B

11. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Considere, em $\mathbb{C}$, os números $z_1 = 1 - 2\sqrt{3}i$ e $z_2 = 2a - i$, $a \in \mathbb{R}$

O valor de a para o qual o número $\bar{z}_1 \times z_2$ é um imaginário puro é:

- (A) $\sqrt{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ (C) $-\frac{\sqrt{3}}{12}$ (D) $-\sqrt{3}$

12. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Considere, em $\mathbb{C}$, os números $w_1 = 1 - i$ e $w_2 = 2e^{i(\frac{2\pi}{5})}$

Seja $z = \frac{(w_2)^n}{w_1}$, com $n \in \mathbb{N}$

Mostra que não existe n natural, tal que o afixo de z pertence à bissetriz do segundo quadrante.

13. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Considere a equação $z^4 + 2z^3 + z^2 + 32z - 240 = 0$

Esta equação tem quatro soluções em $\mathbb{C}$, sendo duas delas os números -5 e 3 .

As imagens geométricas, no plano complexo, dessas quatro soluções são vértices de um quadrilátero.

Determine a área desse quadrilátero.

FIM

Item											
Cotação (em pontos)											
1	2	3	4	5	6.1.	6.2.	7	8.1.	8.2.	T O T A L	200 pontos
10	12	10	14	14	14	14	14	10	14		
8.3.	9	10	GRUPO A			GRUPO B					
			11	12	13	11	12	13			
14	14	10	10	14	12	10	14	12			

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A prova é formada por itens de escolha múltipla e de resposta restrita. Os critérios de classificação dos itens de resposta restrita estão organizados por etapas, atribuindo-se, a cada uma delas, uma pontuação.

Caso os alunos adotem um processo não previsto nos critérios específicos, cabe ao professor corretor adaptar a distribuição da cotação atribuída.

Deve ser atribuída a classificação de zero quando um aluno apresente apenas o resultado final de um item, ou de uma etapa, quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações;

Nas seguintes situações deve descontar-se um ponto às cotações estabelecidas para a etapa respetiva:

- Ocorrência de um erro de cálculo;
- Apresentação de uma resposta com o formato que não esteja de acordo com o que foi solicitado;
- Apresentação de expressões com erros do ponto de vista formal.

Caso ocorram erros que revelem desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades ou o aluno apresente uma resolução incompleta de uma etapa, deve descontar-se até metade da cotação dessa etapa.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

														Grupo A			Grupo B			Total
Item	1.	2.	3.	4.	5	6.1.	6.2.	7.	8.1	8.2	8.3	9	10	11	12	13	11	12	13	
Cotação	10	12	10	14	14	14	14	14	10	14	14	14	10	10	14	12	10	14	12	200

QUESTÃO		DESCRIÇÃO		COTAÇÃO	
1.		Versão 1 (B)	Versão 2 (C)	10	
2.					12
		(1.º processo) - Determinar $\sin \alpha \left(\frac{4}{5}\right)$ 1 - Determinar $\overline{BC}$ (3) 3 - Determinar $\cos \alpha \left(\frac{3}{5}\right)$ 1 - Determinar $\overline{CD}$ ($3\sqrt{5}$) 3 - Calcular $\cos \beta \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ 1 - Calcular $\sin \beta \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ 1 - Calcular $\cos(\alpha + \beta)$ e concluir que $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ 2 (2.º processo) - Determinar $\sin \alpha \left(\frac{4}{5}\right)$ 1 - Determinar $\cos \alpha \left(\frac{3}{5}\right)$ 2 - Determinar $\overline{BC}$ (3) 2 - Determinar $\tan \beta$ (2) 1 - Calcular $\cos \beta \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ 2 - Calcular $\sin \beta \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ 2 - Calcular $\cos(\alpha + \beta)$ e concluir que $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ 2			
3.		Versão 1 (A)	Versão 2 (D)	10	

4.				14
		- Determinar a expressão da primeira derivada de g, g' ($g'(x) = \cos x (1 - e^{\sin x})$) ou equivalente - Resolver a equação $g'(x) = 0$ ($x = 0 \vee x = \frac{\pi}{2}$) - Apresentar um quadro de sinal de g' e da monotonia de g ou equivalente - Concluir que g é decrescente em $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ - Concluir que g é crescente em $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ - Concluir que $g(0) = -1$ é máximo de g - Concluir que $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - e$ é mínimo de g	3 4 3 1 1 1 1	
5.				14
		- Escrever $\frac{w_2}{w_1} = \frac{w_8}{w_2}$ (ou equivalente) - Substituir w_2 por $w_1 + 10$ - Substituir w_8 por $w_1 + 70$ - Determinar o valor de w_1 (2) - Escrever o termo geral de w_n ($w_n = 10n - 8$) - Verificar e justificar que 2025 não é termo de w_n NOTA: Caso não justifique que 2025 não é termo da sucessão, atribuir 1 ponto à última etapa.	3 2 2 3 2 2	
6.				28
	6.1	(1.º processo) - Escrever $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+1}{\sin(ex+e)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+1}{\sin(e(x+1))}$ ou equivalente - Mudar a variável e escrever $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+1}{\sin(e(x+1))} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y}{\sin(ey)}$ ou equivalente - Escrever $\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y}{\sin(ey)} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e \sin(ey)}{e y}}$ ou equivalente - Fazer nova mudança de variável, usar o limite notável e escrever $\frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e \sin(ey)}{e y}} = \frac{1}{e} \times \frac{1}{\lim_{z \rightarrow 0^-} \frac{\sin(z)}{z}} = \frac{1}{e} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{e}$ ou equivalente e concluir que $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1}{e}$ - Decompor $x^2 + 3x + 2$ em fatores $(x + 2)(x + 1)$ - Escrever $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 3x + 2}{e^{x+2} - e} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+2)(x+1)}{e^{x+2} - e}$ ou equivalente	2 1 1 1 3 1	14

		• Escrever $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+2)(x+1)}{e^{x+2}-e} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+2)(x+1)}{e(e^{x+1}-1)}$ ou equivalente	1	
		• Mudar a variável e escrever $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+2)(x+1)}{e(e^{x+1}-1)} = \frac{1}{e} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y(y+1)}{(e^y-1)}$ ou equivalente	1	
		• Escrever $\frac{1}{e} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y(y+1)}{(e^y-1)} = \frac{1}{e} \lim_{y \rightarrow 0^+} (y+1) \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{(e^y-1)}{y}}$ ou equivalente	1	
		• Escrever $\frac{1}{e} \lim_{y \rightarrow 0^+} (y+1) \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{(e^y-1)}{y}} = \frac{1}{e} \times 1 \times \frac{1}{1} = \frac{1}{e}$ e concluir que $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{e}$	1	
		• Concluir que, uma vez que $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{e}$, então f é contínua em $x = -1$ (2.º processo)	1	
		• Escrever $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+1}{\sin(ex+e)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{ex+e}{\sin(ex+e)} \times \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+1}{ex+e}$ ou equivalente	2	
		• Escrever $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{ex+e}{\sin(ex+e)} \times \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+1}{ex+e} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{ex+e}{\sin(ex+e)} \times \frac{1}{e}$ ou equivalente	1	
		• Mudar a variável e escrever $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{ex+e}{\sin(ex+e)} \times \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y}{\sin(y)}$ ou equivalente	1	
		• Escrever $\frac{1}{e} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y}{\sin(y)} = \frac{1}{e} \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\sin(y)}{y}}$ ou equivalente	1	
		• Escrever $\frac{1}{e} \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\sin(y)}{y}} = \frac{1}{e} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{e}$ e concluir que $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1}{e}$	1	
		• Decompor $x^2 + 3x + 2$ em fatores $(x+2)(x+1)$	2	
		• Escrever $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2+3x+2}{e^{x+2}-e} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+2)(x+1)}{e^{x+2}-e}$ ou equivalente	1	
		• Escrever $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+2)(x+1)}{e^{x+2}-e} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+2)(x+1)}{e(e^{x+1}-1)}$ ou equivalente	1	
		• Mudar a variável e escrever $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+2)(x+1)}{e(e^{x+1}-1)} = \frac{1}{e} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y(y+1)}{(e^y-1)}$ ou equivalente	1	
		• Escrever $\frac{1}{e} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y(y+1)}{(e^y-1)} = \frac{1}{e} \lim_{y \rightarrow 0^+} (y+1) \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{(e^y-1)}{y}}$ ou equivalente	1	

		• Escrever $\frac{1}{e} \lim_{y \rightarrow 0^+} (y + 1) \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{(e^y - 1)}{y}} = \frac{1}{e} \times 1 \times \frac{1}{1} = \frac{1}{e}$ e concluir que $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{e}$ • Concluir que, uma vez que $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{e}$, então f é contínua em $x = -1$	1		
	6.2	• Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x + 2}{e^{x+2} - e} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{e^x(e^2 - \frac{e}{x})}$ ou equivalente • Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{e^x(e^2 - \frac{e}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{e^2 - \frac{e}{x}}$ ou equivalente • Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{e^2 - \frac{e}{x}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x^2}\right)} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{e^2 - \frac{e}{x}}$ ou equivalente • Escrever $\frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x^2}\right)} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{e^2 - \frac{e}{x}} = \frac{1}{+\infty} \times \frac{1}{e^2} = 0$ • Concluir que $y = 0$ é assíntota horizontal quando $x \rightarrow +\infty$, ou seja, que o eixo O_x é assíntota horizontal ao gráfico de f	4 4 2 2 2	14	
7.					14
	Tópicos de resposta Justificação da falsidade da proposição I Exemplo 1: Como $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(g(x))^2 + 6g(x)}{x^2 - 9} = -1$ então podemos afirmar que $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{g(x)}{x+3} \times \frac{g(x)+6}{x-3} \right) = -1$, ou seja, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)}{x+3} \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)+6}{x-3} = -1$, portanto $\frac{-6}{6} \times g'(3) = -1$, isto é, $g'(3) = 1$. Desta forma, o declive da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 3 terá de ser igual a 1. Logo a reta de equação $y = 3x + 3$ não pode ser equação dessa mesma reta. Exemplo 2: A reta de equação $y = 3x + 3$ não pode ser tangente ao gráfico de g em $x = 3$, uma vez que o ponto de coordenadas $(3, -6)$ não pertence à reta. Justificação da falsidade da proposição II Exemplo: Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - g(x)) = 1$, podemos concluir que $\lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - 3x) = -1$, ou seja, que a reta de equação $y = 3x - 1$ é assíntota ao gráfico de g quando $x \rightarrow -\infty$.				

		Portanto, uma vez que g é uma função par concluímos que a reta de equação $y = -3x - 1$ é assíntota ao gráfico de g quando $x \rightarrow +\infty$. Descritores de desempenho • Apresenta, de forma completa, as duas justificações solicitadas. • Apresenta, de forma completa, uma das justificações solicitadas, e de forma incompleta, a outra justificação. • Apresenta, de forma completa, apenas uma das justificações solicitadas ou apresenta, de forma incompleta, as duas justificações solicitadas. • Apresenta, de forma incompleta, apenas uma das justificações solicitadas. NOTA: Caso o aluno utilize o vocabulário específico da Matemática com uma ou mais falhas, deverá ser descontado um ponto.	14 11 8 5	
8.				38
	8.1	Versão 1 (D) Versão 2 (B)	10	
	8.2	• Determinar $\overrightarrow{OS} (k^3, e^k, k)$ • Determinar $\overrightarrow{BR} (8, -8, -4)$ • Justificar que $\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{BR} = 0$ • Obter a equação $8k^3 - 8e^k - 4k = 0$, ou equivalente • Representar o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite resolver a equação Nota: Se o aluno não apresentar os eixos ou não identificar a(s) função(ões) deverá ser descontado 1 pontos em cada situação • Assinalar o(s) ponto(s) relevante(s) • Apresentar o valor pedido (2,1)	2 2 3 2 2 1 2	14
	8.3	• Determinar $\overrightarrow{PE} ((-4, 8, 4))$ • Determinar $\overrightarrow{PR} ((4, 0, -4))$ • Calcular $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PR} (-32)$	3 3 2	14

		- Determinar $\ \overrightarrow{PE}\$ e $\ \overrightarrow{PR}\$ ($\ \overrightarrow{PE}\ = 4\sqrt{6}$ e $\ \overrightarrow{PR}\ = 4\sqrt{2}$) - Calcular $E\hat{P}R$ ($125,3^\circ$)	2 4		
9.					14
		- Determinar o domínio da condição $(]-\infty; \ln 5])$ - Escrever $2e^x \ln(5 - e^x) - 8 \ln(5 - e^x) - x(2e^x - 8) = 0$ ou equivalente - Escrever $\ln(5 - e^x) (2e^x - 8) - x(2e^x - 8) = 0$ ou equivalente - Escrever $(2e^x - 8)[\ln(5 - e^x) - x] = 0$ ou equivalente - Resolver a condição $(2e^x - 8) = 0 \vee \ln(5 - e^x) - x = 0$ - Obter $x = \ln 4 \vee x = \ln \frac{5}{2}$ - Apresentar os valores pedidos $(\ln 4; \ln \frac{5}{2})$	2 1 2 2 2 3 2		
10.		Versão 1 (B) Versão 2 (C)			10
Grupo A					
11.		Versão 1 (A) Versão 2 (D)			10
12.					14
		(1.º processo) - Indicar o número de casos possíveis (16!) ou equivalente - Indicar o número de casos favoráveis $9! \times 7! + {}^9A_7 \times 9!$, ou equivalente NOTA: Caso o aluno apenas escreva uma das duas parcelas terá no máximo 3 pontos nesta etapa - Calcular a probabilidade na forma de fração irredutível $(\frac{37}{11440})$ (2.º processo) - Indicar o número de casos possíveis $({}^{16}C_9)$ ou equivalente - Indicar o número de casos favoráveis $1 + {}^9C_2$, ou equivalente NOTA: Caso o aluno apenas escreva uma das duas parcelas terá no máximo 3 pontos nesta etapa - Calcular a probabilidade na forma de fração irredutível $(\frac{37}{11440})$	4 7 3 4 7 3		
13.					12
		(1.º processo) Escrever $P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$	1		

		• Reduzir a expressão ao mesmo denominador	2	
		• Substituir $P(\bar{B} \cup A)$ por $P(\bar{B}) + P(A) - P(A \cap \bar{B})$ ou equivalente	2	
		• Escrever $P(B) - (P(\bar{B}) + P(A) - P(\bar{B} \cap A)) = P(B) - 1 + P(B) - P(A \cap B)$	2	
		• Escrever $P(B) - 1 + P(B) - P(A) + P(\bar{B} \cap A) = 2P(B) - 1 - P(A \cap B)$	2	
		• Escrever $-P(A) + P(A) - P(A \cap B) = -P(A \cap B)$	2	
		• Concluir que $P(A \cap B) = P(A \cap B)$ ou equivalente.	1	
		(2.º processo)		
		• Desenvolver o primeiro membro, escrevendo $\frac{P(B) - P(\bar{B} \cup A)}{P(B)} = \frac{P(B) - (P(\bar{B}) + P(A) - P(\bar{B} \cap A))}{P(B)}$	2	
		• Escrever $\frac{P(B) - (P(\bar{B}) + P(A) - P(\bar{B} \cap A))}{P(B)} = \frac{P(B) - 1 + P(B) - P(A) + P(\bar{B} \cap A)}{P(B)}$	2	
		• Escrever $\frac{P(B) - 1 + P(B) - P(A) + P(\bar{B} \cap A)}{P(B)} = \frac{2P(B) - 1 - P(A) + P(A) - P(B \cap A)}{P(B)}$	2	
		• Obter $\frac{2P(B) - 1 - P(A) + P(A) - P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{2P(B) - 1 - P(B \cap A)}{P(B)}$ (1)	2	
		• Desenvolver o segundo membro, escrevendo $1 - \frac{1 - P(B)}{P(B)} - P(A B) = \frac{P(B) - 1 + P(B)}{P(B)} - \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$	1	
		• Escrever $\frac{P(B) - 1 + P(B)}{P(B)} - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2P(B) - 1 - P(A \cap B)}{P(B)}$ (2)	2	
		• Concluir de (1) e (2) que a igualdade é verdadeira	1	
Grupo B				
11.		Versão 1 (A)	Versão 2 (D)	10
12.				14
		• Determinar w_1 na forma trigonométrica (p.e. $w_1 = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}$)	3	
		• Simplificar z e obter $z = \frac{2^n}{\sqrt{2}}e^{i(-\frac{n\pi}{5} + \frac{\pi}{4})}$	3	

		• Escrever que uma vez que z pertence à bissetriz do segundo quadrante, então $\frac{-n\pi}{5} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, por exemplo • Resolver a equação anterior em ordem a n e escrever $n = -\frac{5}{2} + 10k, k \in \mathbb{Z}$ ou equivalente • Concluir que a equação é impossível uma vez que $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{Z}$ e afirmar que não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que o afixo de z pertença à bissetriz do segundo quadrante	4 3 1	
13.				12
		• Decompor o polinómio escrevendo $(z - 3)(z + 5)(z^2 + 16) = 0$ • Determinar as 4 soluções da equação $(z_1 = 3 \vee z_2 = -5 \vee z_3 = -4i \vee z_4 = 4i)$ Considerando P_{z_k} o afixo de z_k, com $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ • Determinar $\overline{P_{z_1} P_{z_2}}$ (8) • Determinar $\overline{P_{z_3} P_{z_4}}$ (8) • Calcular a área do quadrilátero pedido (32)	4 2 2 2 2	