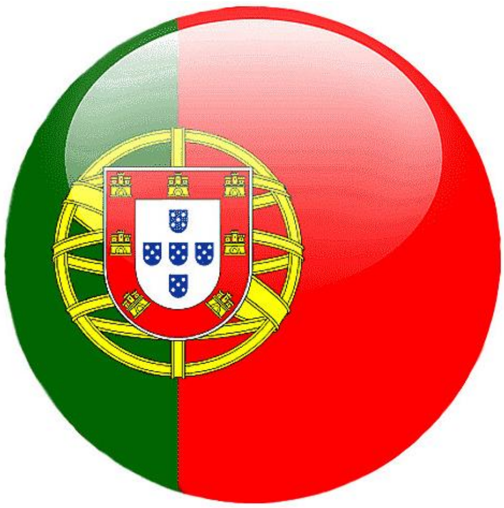
PAU PORTUGAL

Matematica A (635) Modelos



Gerard Romo Garrido

Toomates Coolección vol. 32.5

Toomates Coolección

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "**licencias digitales**" con las que las editoriales pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo libro, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.

Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de licencias digitales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf".

El conocimiento no es una mercancía.

El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las editoriales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de unos libros de texto que actualmente son muy mediocres, y no mediante retorcidas técnicas comerciales.

 Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas. **¡Libérate de la tiranía y mediocridad de las editoriales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos.**

Problem Solving (en español):

Geometría Axiomática Problemas de Geometría 1 Problemas de Geometría 2
Introducción a la Geometría Álgebra Teoría de números Combinatoria Probabilidad
Trigonometría Desigualdades Números complejos Calculus & Precalculus

Libros de texto (en catalán):

Nombres (Preàlgebra) Àlgebra Proporcionalitat Mesures geomètriques
Geometria analítica Combinatòria i Probabilitat Estadística Trigonometria Funcions
Nombres Complexos Àlgebra Lineal Geometria Lineal Càlcul Infinitesimal
Programació Lineal Mates amb Excel

PAU españolas:

Cataluña TEC Cataluña CCSS Valencia Galicia País Vasco Baleares

PAU y reválidas internacionales:

Portugal Italia Francia Rumanía Hungría Polonia Pearson Edexcel International A Level China Gaokao
Pearson Edexcel IGCSE Cambridge International A Level Cambridge IGCSE
AQA GCSE International Baccalaureate (IB)

Evaluación diagnóstica y pruebas de acceso:

ACM6EP ACM4 CFGS PAP

Competiciones matemáticas:

Canguro: España Cataluña Francia USA Reino Unido Austria
USA: Mathcounts AMC 8 10 12 AIME USAJMO USAMO TSTST TST ELMO Putnam
España: OME OMEFL OMEC OMEA OMEM CDP
Europa: OMI Arquimede HMMT BMO Balkan MO JBMO
Internacional: IMO IGO SMT INMO CMO HMMT EGMO
AHSME: Book 1 Book 2 Book 3 Book 4 Book 5 Book 6 Book 7 Book 8 Book 9

Otros materiales:

Pizzazz!: Book A Book B Book C Book D Book E Pre-Algebra Algebra , REOIM , Llibre3r

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales para facilitar su edición.

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a **toomates@gmail.com**
¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.

Consulta el **catálogo de libros** completo en **http://www.toomates.net**
Descarga toda la biblioteca Toomates en un solo archivo **Aquí** MEGA
Visita mi **Canal de Youtube**: **https://www.youtube.com/c/GerardRomo**
Visita mi **blog: https://toomatesbloc.blogspot.com/**

Versión de este documento: **25/05/2025**

Este documento forma parte del siguiente bloque:

Prueba Final 3.º Ciclo do Ensino Básico + Información general

http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal.pdf

A (635) 1997-2020: http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal635.pdf

A (635) 2021-2024: http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal635b.pdf

A (635) Modelos: http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal635c.pdf

B (735) 2006-2020: http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal735.pdf

B (735) 2021-2024: http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal735b.pdf

MACS (835) 2021-2024: http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal835.pdf

Otros compendiums de pruebas PAU internacionales:

Portugal: http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal.pdf

Italia: http://www.toomates.net/biblioteca/Italia.pdf

Francia: http://www.toomates.net/biblioteca/Francia.pdf

Rumanía: http://www.toomates.net/biblioteca/Rumania.pdf

Hungría: http://www.toomates.net/biblioteca/Hungria.pdf

Polonia: http://www.toomates.net/biblioteca/Polonia.pdf

China Gaokao: http://www.toomates.net/biblioteca/Gaokao.pdf

International Bccalaureate (IB): http://www.toomates.net/biblioteca/CompendiumIB.pdf

Pearson Edexcel International A Level: http://www.toomates.net/biblioteca/Edexcel.pdf

Pearson Edexcel IGCSE: http://www.toomates.net/biblioteca/EdexcelIGCSE.pdf

Cambridge International AS & A Level: http://www.toomates.net/biblioteca/Cambridge.pdf

Cambridge IGCSE: http://www.toomates.net/biblioteca/CambridgeIGCSE.pdf

AQA GCSE: http://www.toomates.net/biblioteca/AQAGCSE.pdf

Compendiums de pruebas PAU españolas:

Cataluña (TEC): http://www.toomates.net/biblioteca/Pautec.pdf

Cataluña (CCSS): http://www.toomates.net/biblioteca/Pauccss.pdf

Valencia: http://www.toomates.net/biblioteca/Valencia.pdf

Galicia: http://www.toomates.net/biblioteca/Galiciapau.pdf

País Vasco: http://www.toomates.net/biblioteca/Paisvascopau.pdf

Baleares: http://www.toomates.net/biblioteca/Balears.pdf

Índice.

Fuentes.

https://recursos-para-matematica.webnode.pt/ensino-secundario2/a12-%C2%BA-ano/propostas-de-prova-modelo-do-exame-nacional-de-matematica-a-grupo-recursos-para-matematica/

Grupo Recursos para Matemática

Prova Modelo de Exame Nacional de Matemática A
Prova 635 | Ensino Secundário | Junho de 2020
12º Ano de Escolaridade

Prova 635

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 9 Páginas

- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
- É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Apresente apenas uma resposta para cada item.
- As cotações dos itens encontram-se no final da prova.

- A prova inclui um formulário.
- Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
- Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

- Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

2.1, **2.2**, **5.2** e **6**

Estes itens estão assinalados no enunciado através de uma moldura que os rodeia.

- Dos restantes 14 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência
αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área de um polígono regular:
Semiperímetro $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:
$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área lateral de um cone:
$\pi r g$ (r - raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica:
$4\pi r^2$ (r - raio)

Volume de uma pirâmide:
$\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone:
$\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera:
$\frac{4}{3}\pi r^3$ (r - raio)

Progressões:

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética:
$\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica:
$u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, ..., n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

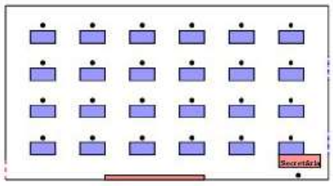
$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

1. (Inês Cruz)

Uma parte do ginásio da escola A foi transformado numa sala de aula para serem leccionadas matérias presenciais a turmas do 11.º e 12.º anos, de acordo com as indicações da DGS.

Desta forma colocaram-se 24 mesas, distribuídos por quatro filas de seis mesas, cumprindo o distanciamento obrigatório.



Na aula de matemática do 12.º A vão estar presentes dezoito alunos distribuídos pelas mesas, de modo que:

- todos os lugares livres situam-se nos extremos das filas
- o Rui e a Maria ficam sempre na fila da frente e em mesas consecutivas

Nestas condições, de quantas maneiras se podem sentar os alunos?

(A) ${}^8C_6 \times 18!$

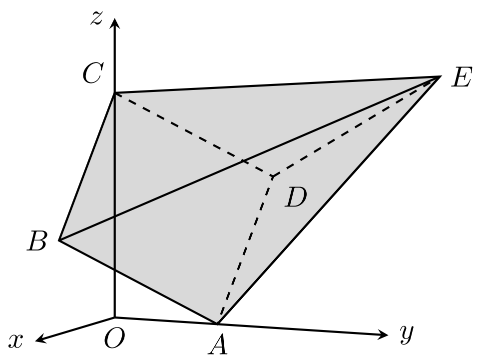
(B) ${}^8C_6 \times 3 \times 2!$

(C) $2 \times 2! \times {}^7C_6 \times 16! + 3 \times 2! \times {}^8C_6 \times 16!$

(D) $2! \times {}^7C_6 \times 16! + 3 \times 2! \times {}^8C_6 \times 16!$

2. (Carlos Frias)

Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDE]$.



Sabe-se que:

- o vértice A pertence ao eixo das ordenadas e o vértice C pertence ao eixo das cotas
- o plano α, que contém a base da pirâmide, é definido por $2y + z = 6$
- a equação $x^2 + y^2 + z^2 - 19y - 14z + \dfrac{237}{4} = 0$ define a superfície esférica centrada no vértice E e que é tangente ao plano α

2.1. Defina por uma equação vetorial a reta que contém a altura da pirâmide.

2.2. Determine o volume da pirâmide $[ABCDE]$.
Apresente o valor do volume na forma $a\sqrt{b}$ com $a, b \in \mathbb{N}$.

3. (Ricardo Ferreira)

Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $P\left(A \cup B\right) = 0,8$
- $P\left(A|B\right) = \dfrac{1}{3}$
- $P\left(A\right) = 2P\left(B\right)$

Qual é o valor de $P\left(B\right)$?

(A) $0,1$ **(B)** $0,2$ **(C)** $0,3$ **(D)** $0,4$

4. (Paulo Naves Pedro)

Num jogo de bilhar há 16 bolas, sendo quinze numeradas de 1 a 15 e mais uma bola branca sem número.

As bolas são guardadas numa caixa que está dividida em dezasseis espaços (4 linhas e 4 colunas), ficando uma e uma só bola em cada espaço.

4.1. Do conjunto das bolas numeradas, são escolhidas, ao acaso, cinco.

Qual é a probabilidade de obter cinco bolas com números consecutivos?

Apresente o valor pedido na forma de fração irredutível.

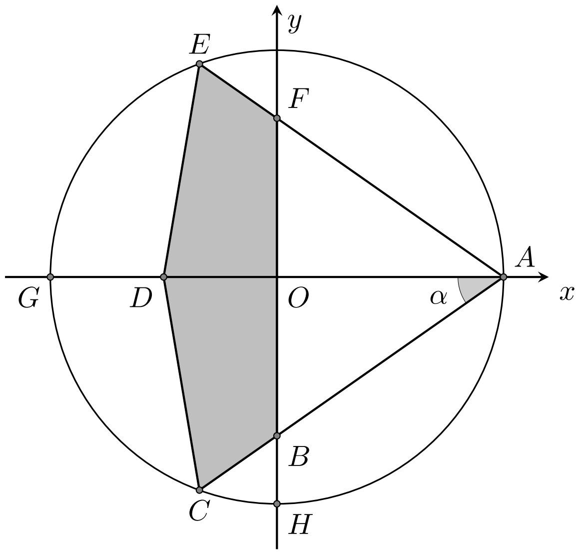
4.2. As bolas são distribuídas, ao acaso, pelos espaços da caixa.

Determine a probabilidade de pelo menos uma das duas diagonais ficar preenchida com bolas com número ímpar.

Apresente o valor pedido na forma de percentagem com aproximação às décimas.

5. (Manuel Gonçalves)

Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, uma circunferência com centro na origem e raio 4 e o pentágono $[BCDEF]$.



Sabe-se que:

- α é a amplitude, em radianos, do ângulo DAC
- A e G são os pontos de interseção da circunferência com o eixo das abcissas
- H é o ponto de interseção da circunferência com o semieixo negativo das ordenadas
- D é um ponto do eixo das abcissas tal que $\overline{AD} = 6$
- C desloca-se na circunferência, do ponto H para o ponto G, tal que $-\frac{\pi}{4} < \alpha < 0$
- B é o ponto de interseção da reta AC com o eixo das ordenadas
- os pontos E e F são, respetivamente, imagens de C e B por meio de uma reflexão em Ox

5.1. O comprimento do segmento $[AC]$ é dado, em função de α, por:

(A) $8\cos\alpha$ **(B)** $8\sin\alpha$ **(C)** $-8\cos\alpha$ **(D)** $-8\sin\alpha$

5.2.

Mostre que a área da região sombreada pode ser dada, em função de α, por

$$A(\alpha) = -16\tan\alpha\left(3\cos^2\alpha - 1\right)$$

Em seguida, com recurso à calculadora, determine o valor de α para o qual a área da região a sombreado da figura é igual à área do setor circular GOE.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema
- apresentar o(s) gráfico(s) que considerar necessário(s)
- apresentar o valor pedido, arredondado às centésimas

6. (Vitor Corveira)

Os três primeiros termos de uma progressão aritmética (u_n) são, respetivamente, -1, $\ln a$ e $\ln a^3$, com $a > 0$.

Determine a soma dos 20 primeiros termos da sucessão (u_n).

Mostre como chegou à sua resposta.

7. (José Manuel Santos Gabriel)

O número complexo $2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{15}\right) + i\sin\left(\frac{14\pi}{15}\right)\right]$ é uma das raízes quintas de:

(A) $16\sqrt{3}+16i$ **(B)** $32\sqrt{3}+32i$ **(C)** $8+8\sqrt{3}i$ **(D)** $16+16\sqrt{3}i$

8. (Carla Coelho e Idália Oliveira)

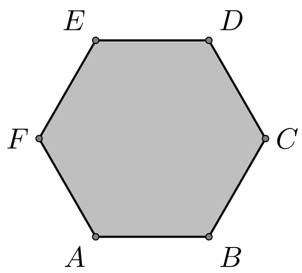
Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$, $z_2 = \sqrt{3}e^{i\frac{17\pi}{16}}$ e z_3 tal que:

$$\frac{(z_1)^3 \times (-\overline{z_2})^4}{z_3} \times i^{49} \in \mathbb{R}^-$$

Escreva z_3 na forma algébrica, sabendo que o seu afixo pertence à circunferência centrada na origem e que contém o afixo de z_1.

9. (Ricardo Ferreira)

Na figura está representado um hexágono regular $[ABCDEF]$ de lado 2.



O valor de $\overrightarrow{DA} \cdot \left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{FA}\right)$ é:

(A) -8 **(B)** -4 **(C)** -2 **(D)** 8

10. (Manuel Gonçalves)

Considere $a, b \in \mathbb{R}$ com $a > 1$ e $b > 1$ tais que $\sqrt{b} = a^3$.

O valor numérico da expressão $\log_a b^3 + \log_b a$ é:

(A) $\frac{109}{6}$ **(B)** $\frac{37}{6}$ **(C)** $\frac{55}{3}$ **(D)** $\frac{19}{6}$

11. (Sofia Sousa)

Seja f uma função derivável em $\mathbb{R}$ e r a reta tangente ao gráfico de f no ponto de coordenadas $(1,3)$.

Sabe-se que a reta r é perpendicular à reta de equação $3y = x$.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - x}{3f(x) - 9}$?

(A) -1 **(B)** $-\dfrac{1}{9}$ **(C)** $\dfrac{1}{9}$ **(D)** 1

12. (José Carlos Pereira)

Sejam f , g e h três funções contínuas no seu domínio, tais que:

- o domínio de f é $\mathbb{R}$, o ponto de coordenadas $(-1,2)$ pertence ao seu gráfico e a reta de equação $y = 3 - 2x$ é assíntota do seu gráfico, quando $x \to \pm\infty$
- o domínio de g é $\mathbb{R}$ e a sua derivada, também de domínio $\mathbb{R}$, é definida por $g'(x) = \dfrac{x^2}{e^x + x^2}$
- o domínio de h é $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e é definida por $h(x) = \dfrac{x^2 f(x)}{x^3 + 1} + g'(x)$

12.1. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

Na sua resposta deve:

- indicar o(s) intervalo(s) onde o gráfico de g tem a concavidade voltada para cima
- indicar o(s) intervalo(s) onde o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo
- indicar as abcissas do(s) ponto(s) de inflexão

12.2. Estude a função h quanto à existência de assíntotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados.

Caso exista(m), indique a(s) sua(s) equação(ões).

13. (Eduardo Carvalho e José Carlos Pereira)

Para um certo valor real k, considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right)}{3x} & \text{se } x < 0 \\ k & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{\ln(2x-1)}{3x^2 - 3x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

13.1. Mostre que f pode ser contínua em $\mathbb{R}$.

13.2. Mostre que existe pelo menos um $c \in \left]2,3\right[$ tal que $f(c) = f'\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

FIM

Cotações

1. .... 16 pontos

2.

2.1. .... 20 pontos

2.2. .... 16 pontos

3. .... 16 pontos

4.

4.1. .... 16 pontos

4.2. .... 16 pontos

5.

5.1. .... 16 pontos

5.2. .... 16 pontos

6. .... 20 pontos

7. .... 16 pontos

8. .... 16 pontos

9. .... 16 pontos

10. .... 16 pontos

11. .... 16 pontos

12.

12.1. .... 16 pontos

12.2. .... 16 pontos

13.

13.1. .... 16 pontos

13.2. .... 16 pontos

Soluções

1. C

2.

2.1. $(x, y, z) = \left(0, \frac{19}{2}, 7\right) + k\,(0, 2, 1)\,,\ k \in \mathbb{R}$ (ou equivalente)

2.2. $30\sqrt{5}$

3. C

4.

4.1. $\frac{1}{273}$

4.2. 7.7%

5.

5.1. A

5.2. $\alpha \approx -0,67$

6. 360

7. D

8. $-1 - i$

9. A

10. A

11. B

12.

12.1. Conc. vol. p. cima $[0, 2]$
Conc. vol. p. baixo $]-\infty, 0]$ e $[2, +\infty[$
Abcissas dos pontos de inflexão $x = 0$ e $x = 2$

12.2. $x = -1$, $y = -1$ e $y = -2$ (ou equivalentes)

13.

13.1. A função f pode ser contínua e, nesse caso, k tem que ser igual a $\frac{2}{3}$

Coordenação: José Carlos Pereira

Paginação: Carlos Frias

Verificação de resultados:
Rafael Saraiva, Mafalda Costa, Nuno Godinho, Sofia Sousa, José Carlos Pereira e Carlos Frias

Proposta de resolução

1. Duas situações podem ocorrer:

- O Rui ou a Maria ficam num dos extremos da 1.ª fila;
- Nenhum dos dois fica num dos extremos da 1.ª fila.

No primeiro caso: $2 \times 2! \times^7 C_6 \times 16!$

- 2 representa o número de formas de colocar os dois alunos alinhados num dos extremos da 1.ª fila (à direita ou à esquerda);
- 2! representa o número de permutações entre o Rui e a Maria;
- Existem $^7C_6$ formas de escolher 6 dos 7 restantes lugares nos extremos para ficarem desocupados;
- 16! representa o número de formas de distribuir os restantes 16 alunos nos restastes 16 lugares.

No segundo caso: $3 \times 2! \times^8 C_6 \times 16!$

- 3 representa o número de formas de colocar os dois alunos (Rui e Maria) em mesas consecutivas na primeira fila sem nenhum deles estar num dos extremos (2.ª e 3.ª mesas ou 3.ª e 4.ª mesas ou 4.ª e 5.ª mesas);
- 2! representa o número de permutações entre o Rui e a Maria;
- Existem $^8C_6$ formas de escolher 6 dos 8 lugares nos extremos para ficarem desocupados;
- 16! representa o número de formas de distribuir os restantes 16 alunos nos restastes 16 lugares.

$\therefore\ 2 \times 2! \times^7 C_6 \times 16! + 3 \times 2! \times^8 C_6 \times 16!$

Opção **(C)**

2.

2.1.

$$x^2+y^2+z^2-19y-14z+\frac{237}{4}=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-19y+\left(\frac{19}{2}\right)^2+z^2-14z+49=-\frac{237}{4}+\left(\frac{19}{2}\right)^2+49 \Leftrightarrow$$

$$x^2+\left(y-\frac{19}{2}\right)^2+(z-7)^2=80$$

Assim, $E\left(0,\frac{19}{2},7\right)$

A reta que contém a altura da pirâmide é perpendicular ao plano α, assim o vetor $\overrightarrow{n}=(0,2,1)$ que é normal ao plano α é um seu vetor diretor.

Uma equação vetorial que defina a reta que contém a altura da pirâmide é, por exemplo:

$$\therefore (x,y,z)=\left(0,\frac{19}{2},7\right)+k\,(0,2,1)\,,\ k\in\mathbb{R}$$

2.2. Por 2.1 a altura da pirâmide é $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

$A(0, y, 0) \wedge A \in \alpha \Rightarrow 2y = 6 \Leftrightarrow y = 3$

$C(0, 0, z) \wedge C \in \alpha \Rightarrow z = 6$

Assim, $A(0, 3, 0)$ e $C(0, 0, 6)$

$[AC]$ é uma diagonal da base da pirâmide, assim, pelo teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \sqrt{0^2 + 3^2 + 6^2}^2 = 2\overline{AB}^2 \Leftrightarrow$$

$$\overline{AB}^2 = \frac{45}{2} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

$$\therefore V_{[ABCDE]} = \frac{1}{3}\overline{AB}^2 \times h = \frac{1}{3} \times \frac{45}{2} \times 4\sqrt{5} = 30\sqrt{5}$$

3.

$$P(A \cup B) = 0.8 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.8 \Leftrightarrow 3P(B) - P\left(A|B\right) \times P(B) = 0.8 \Leftrightarrow$$

$$\frac{8}{3}P(B) = 0.8 \Leftrightarrow P(B) = 0.3$$

Opção **(C)**

4.

4.1. $P = \dfrac{15 - 5 + 1}{^{15}C_5} = \dfrac{11}{^{15}C_5} = \dfrac{1}{273}$

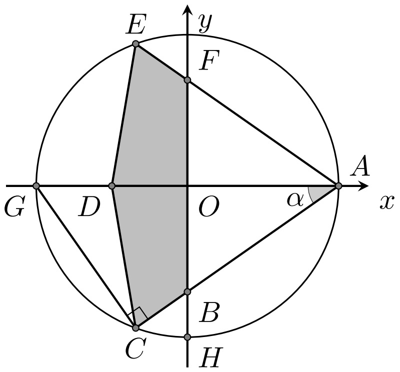
- Existem $^{15}C_5$ formas de escolher 5 bolas de entre as 15 bolas numeradas;
- Existem 11 formas de selecionar 5 bolas com números consecutivos (1 ao 5, 2 ao 6, 3 ao 7, 4 ao 8, 5 ao 9, 6 ao 10, 7 ao 11, 8 ao 12, 9 ao 13, 10 ao 14 e 11 ao 15).

4.2. $P = \dfrac{2 \times ^8 A_4 \times 12! - 8! \times 8!}{16!} \approx 7.7\%$

- 16! representa o número de formas de distribuir 16 bolas distintas por 16 posições;
- 2 representa o número de diagonais;
- $^8A_4$ representa o número de formas de distribuir 4 das 8 bolas com número ímpar pelos lugares de uma diagonal;
- 12! representa o número de formas de distribuir as restantes 12 bolas pelas restantes 12 posições;
- $8! \times 8!$ representa o número de formas de distribuir as 8 bolas com número ímpar pelas duas diagonais e as bolas com número par e a bola branca pelas restantes posições. Este valor tem que ser subtraído pois está a ser contabilizado em duplicado na primeira parcela.

5.

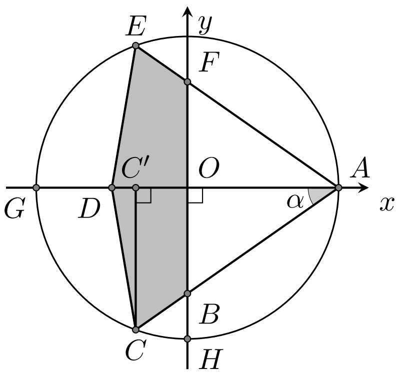
5.1.



$$\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AG}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{8} \Leftrightarrow \overline{AC} = 8\cos\alpha$$

Opção **(A)**

5.2. Seja C' a projeção ortogonal de C sobre o eixo das abcissas.



$$\alpha \in \left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[\Rightarrow -\tan\alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OB} = -4\tan\alpha \quad \text{e} \quad \cos\alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{4}{\cos\alpha}$$

Os triângulos $[AOB]$ e $\left[AC'C\right]$ são semelhantes pois possuem ambos um ângulo reto e possuem um ângulo em comum.
Assim,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \frac{8\cos\alpha}{\frac{4}{\cos\alpha}} = \frac{\overline{CC'}}{-4\tan\alpha} \Leftrightarrow \overline{CC'} = -8\tan\alpha\cos^2\alpha$$

$$A(\alpha) = 2\left(A_{[ACD]} - A_{[OAB]}\right) = 2\left[\frac{6\times\left(-8\tan\alpha\cos^2\alpha\right)}{2} - \frac{4\times(-4\tan\alpha)}{2}\right] =$$

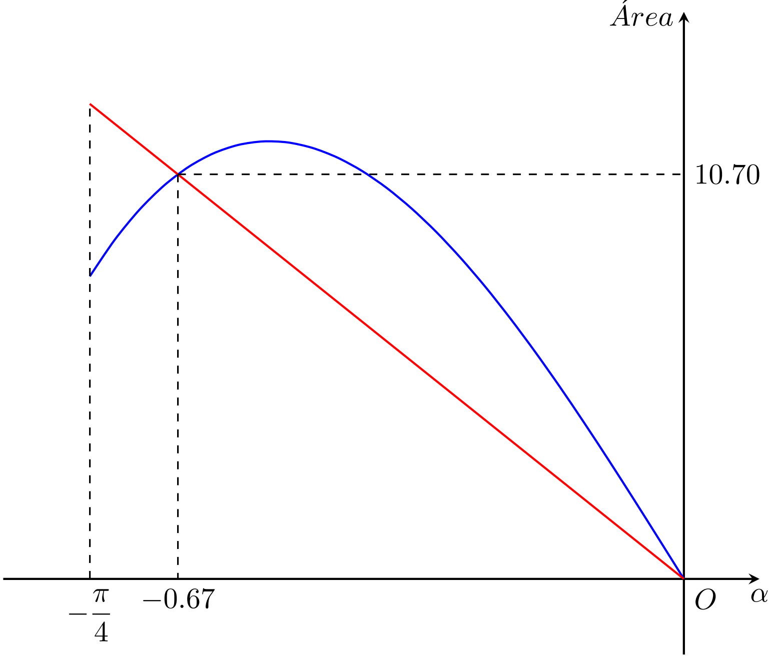
$$= -16\tan\alpha\left(3\cos^2\alpha - 1\right)$$

$G\hat{O}E = C\hat{O}G = -2\alpha$ pois COG é um ângulo ao centro de uma circunferência em cujo arco correspondente tem amplitude -2α (repare-se que CAG é um ângulo inscrito de amplitude $-\alpha$, portanto, o arco CG tem amplitude -2α).

Assim, a área do setor circular GOE é $A_S = \frac{-2\alpha}{2} \times 4^2 = -16\alpha$.

Pretende-se resolver, graficamente e em $\left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[$, a equação:

$$-16\tan\alpha\left(3\cos^2\alpha - 1\right) = -16\alpha$$



O valor de α para o qual a área da região sombreada é igual à área do sector circular GOE é, aproximadamente, -0.67.

6. Se (u_n) é uma progressão aritmética, então $u_3 - u_2 = u_2 - u_1 = r$, onde r é a razão da progressão aritmética.

$$u_3 - u_2 = u_2 - u_1 \Leftrightarrow \ln a^3 - \ln a = \ln a + 1 \Leftrightarrow \ln a^2 - \ln a = 1 \Leftrightarrow \ln a = 1 \Leftrightarrow a = e$$

$$r = \ln a + 1 \Leftrightarrow r = \ln e + 1 \Leftrightarrow r = 2 \qquad u_{20} = u_1 + 19r = -1 + 19 \times 2 = 37$$

A soma dos 20 primeiros termos é dada por:

$$S_{20} = \frac{u_1 + u_{20}}{2} \times 20 = \frac{-1 + 37}{2} \times 20 = 360$$

7.

$$z = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{15}\right) + i\sin\left(\frac{14\pi}{15}\right)\right] = 2\left[\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{15}\right)\right] = 2\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{15}}$$

$$z^5 = \left[2e^{i\frac{\pi}{15}}\right]^5 = 32e^{i\frac{\pi}{3}} = 32\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 16 + 16\sqrt{3}i$$

Opção **(D)**

8.

$$z_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i \Rightarrow |z_1|=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$$

$$\operatorname{Arg}(z_1)=\pi-\arctan\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\pi-\arctan\sqrt{3}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

Se o afixo de z_3 pertence à circunferência centrada na origem e que contém o afixo de z_1, então $|z_3|=|z_1|=\sqrt{2}$.

Assim, $z_3=\sqrt{2}e^{i\theta}$, onde θ é um argumento de z_3.

$$z_2=\sqrt{3}e^{i\frac{17\pi}{16}} \Rightarrow -\overline{z_2}=\sqrt{3}e^{i\left(\pi-\frac{17\pi}{16}\right)}=\sqrt{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{16}\right)}$$

$$\begin{array}{rr|l} 4 & 9 & 4 \\ \cline{3-3} 0 & 9 & 1\ 2 \\ & 1 & \end{array}$$

$$i^{49}=i$$

$$\frac{(z_1)^3\times(-\overline{z_2})^4}{z_3}\times i^{49}=\frac{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3\times\left(\sqrt{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{16}\right)}\right)^4}{\sqrt{2}e^{i\theta}}\times i=\frac{2\sqrt{2}\times 9e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2}e^{i\theta}}\times e^{i\frac{\pi}{2}}=18e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$$

Se pertence a $\mathbb{R}^-$, então $\frac{\pi}{4}-\theta=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\theta=-\frac{3\pi}{4}-2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Assim, o argumento principal de z_3 será $-\frac{3\pi}{4}$.

$$\therefore z_3=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1-i$$

9.

$$\overrightarrow{DA}\cdot\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{FA}\right)=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}=4\times 2\times\cos 180^{\mathrm{o}}=-8$$

Opção **(A)**

10.

$$\sqrt{b}=a^3\Leftrightarrow b=a^6$$

$$\log_a b^3+\log_b a=\log_a\left(a^6\right)^3+\frac{\log_a a}{\log_a b}=18+\frac{1}{\log_a a^6}=18+\frac{1}{6}=\frac{109}{6}$$

Opção **(A)**

11. Se a reta r é perpendicular à reta de equação $3y = x \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x$, então o declive da reta r é -3. Assim $f'(1) = -3$ e $f(1) = 3$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{3f(x) - 9} = \frac{1}{3} \times \frac{\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{x-1}}{\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}} = \frac{1}{3} \times \frac{\displaystyle\lim_{x\to 1} x}{f'(1)} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{-3} = -\frac{1}{9}$$

Opção **(B)**

12.

12.1.

$$g''(x) = \left(\frac{x^2}{e^x + x^2}\right)' = \frac{2x\left(e^x + x^2\right) - x^2\left(e^x + 2x\right)}{\left(e^x + x^2\right)^2} = \frac{x\left(2e^x + 2x^2 - xe^x - 2x^2\right)}{\left(e^x + x^2\right)^2} = \frac{xe^x(2-x)}{\left(e^x + x^2\right)^2}$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ \underbrace{e^x = 0}_{\text{Eq. imp. em } \mathbb{R}} \ \vee 2 - x = 0 \ \wedge \ \underbrace{\left(e^x + x^2\right)^2 \neq 0}_{\text{Cond. universal em } \mathbb{R}} \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = 2$$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$g''(x)$	-	0	$+$	0	-
g	$\cap$	p.i	$\cup$	p.i	$\cap$

O gráfico de g apresenta concavidade voltada para cima em $[0, 2]$.
O gráfico de g apresenta concavidade voltada para baixo $]-\infty, 0]$ e em $[2, +\infty[$.
As abcissas dos pontos de inflexão do gráfico de g são $x = 0$ e $x = 2$.

12.2.

$$h(x) = \frac{x^2 f(x)}{x^3 + 1} + g'(x) \Leftrightarrow h(x) = \frac{x^2 f(x)}{x^3 + 1} + \frac{x^2}{e^x + x^2}$$

$$\lim_{x\to -1^{\pm}} h(x) = \lim_{x\to -1^{\pm}} \left(\frac{x^2 f(x)}{x^3 + 1} + \frac{x^2}{e^x + x^2}\right) = \frac{f(1)}{0^{\pm}} + \frac{1}{e^{-1} + 1} = \frac{2}{0^{\pm}} + \frac{1}{e^{-1} + 1} = \pm\infty$$

A reta de equação $x = -1$ é assintota vertical bilateral ao gráfico de h. Não existem outras assintotas verticais pois h é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\lim_{x\to +\infty} h(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2 f(x)}{x^3 + 1} + \frac{x^2}{e^x + x^2}\right) = \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)} + \frac{1}{\frac{e^x}{x^2} + 1}\right] =$$

$$\frac{\overbrace{\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}}^{\text{declive da assíntota}}}{\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)} + \frac{1}{1 + \underbrace{\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2}}_{\text{Limite notável}}} = \frac{-2}{1 + 0} + \frac{1}{1 + \infty} = -2$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2 f(x)}{x^3+1}+\frac{x^2}{e^x+x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{f(x)}{x\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)}+\frac{1}{\dfrac{e^x}{x^2}+1}\right] =$$

$$\frac{\overbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}}^{\text{declive da assíntota}}}{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)}+\frac{1}{\lim_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^x}{x^2}+1\right)} = \frac{-2}{1+0}+\frac{1}{0+1} = -2+1 = -1$$

A reta de equação $y=-2$ é assintota horizontal ao gráfico de h quando $x \to +\infty$. A reta de equação $y=-1$ é assintota horizontal ao gráfico de h quando $x \to -\infty$.

13.

13.1. Para $x<0$ a função f é continua pois é o quociente entre funções contínuas, uma é a composta entre uma função trigonométrica e uma função polinomial e a outra é polinomial.

Para $0<x<1$ a função f é contínua por ser uma função constante.

Para $x>1$ a função f é contínua pois é o quociente entre funções contínuas, uma é a composta entre uma função logarítmica e uma polinomial, a outra é polinomial.

Resta analisar a continuidade de f em $x=0$ e $x=1$.

$f(0)=f(1)=k$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)}{3x} = \lim_{x\to0^-}\frac{\sin(2x)}{3x} = \frac{2}{3}\underbrace{\lim_{2x\to0^-}\frac{\sin(2x)}{2x}}_{\text{Limite notável}} = \frac{2}{3}\times 1 = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\frac{\ln(2x-1)}{3x^2-3x} = \lim_{x\to1^+}\frac{\ln(2x-1)}{3x(x-1)} = \lim_{x\to1^+}\frac{\ln(2x-1)}{x-1}\times\lim_{x\to1^+}\frac{1}{3x} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to1^+}\frac{\ln(2x-1)}{x-1}$$

Mudança de variável: $y=\ln(2x-1) \Leftrightarrow x=\dfrac{e^y+1}{2}$ $\qquad x\to1^+ \Rightarrow y\to0^+$

Assim,

$$\frac{1}{3}\lim_{x\to1^+}\frac{\ln(2x+1)}{x-1} = \frac{1}{3}\lim_{y\to0^+}\frac{y}{\dfrac{e^y+1}{2}-1} = \frac{1}{3}\lim_{y\to0^+}\frac{2y}{e^y-1} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{\underbrace{\lim_{y\to0^+}\dfrac{e^y-1}{y}}_{\text{Limite notável}}} = \frac{2}{3}\times\frac{1}{1} = \frac{2}{3}$$

f pode ser contínua e, para tal, k tem que ser igual a $\frac{2}{3}$.

13.2. Para $x<0$:

$f'(x)=\left(\dfrac{\sin(2x)}{3x}\right)'=\dfrac{6x\cos(2x)-3\sin(2x)}{9x^2}$

Assim,

$$f'\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{-9\pi\cos(-3\pi)-3\sin(-3\pi)}{\frac{81}{4}\pi^2}=\frac{9\pi\times 4}{81\pi^2}=\frac{4}{9\pi}$$

$f(2)=\dfrac{\ln 3}{6}>\dfrac{4}{9\pi}$

$f(3)=\dfrac{\ln 5}{18}<\dfrac{4}{9\pi}$

f é contínua em $[2,3]$ pois é o quociente entre funções contínuas, uma é a composta entre uma função logarítmica e uma polinomial, a outra é polinomial.

Como $f(3)<f'\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right)<f(2)$ e f é contínua em $[2,3]$, então pelo teorema de Bolzano $\exists c\in\,]2,3[\,:f(c)=f'\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right)$, como queríamos mostrar.

GRUPO RECURSOS PARA MATEMÁTICA

Prova Modelo de Exame Nacional de Matemática A
Prova 635 | Ensino Secundário | Junho de 2020
12.º Ano de Escolaridade

Prova 635

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 9 Páginas

- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
- É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Apresente apenas uma resposta para cada item.
- As cotações dos itens encontram-se no final da prova.

- A prova inclui um formulário.
- Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
- Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

- Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

  2.1, **2.2**, **5** e **6**

  Estes itens estão assinalados no enunciado através de uma moldura que os rodeia.
- Dos restantes 14 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r- raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r- raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r- raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad \left(k \in \{0, \ldots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N}\right)$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$\left(u^n\right)' = n u^{n-1} u' \ (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$\left(e^u\right)' = u' e^u$

$\left(a^u\right)' = u' a^u \ln a \quad \left(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\right)$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$\left(\log_a u\right)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad \left(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\right)$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. (Carla Pacheco e Susana Freitas)

Sejam k e b números reais.

Relativamente ao desenvolvimento do binómio $\left(x^3+e^{k-b}\right)^n$, $x \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, sabe-se que:

- tem 8 termos;
- um dos termos do desenvolvimento é igual a $70\sqrt{e^{6k}} \times x^9$.

O valor de k é:

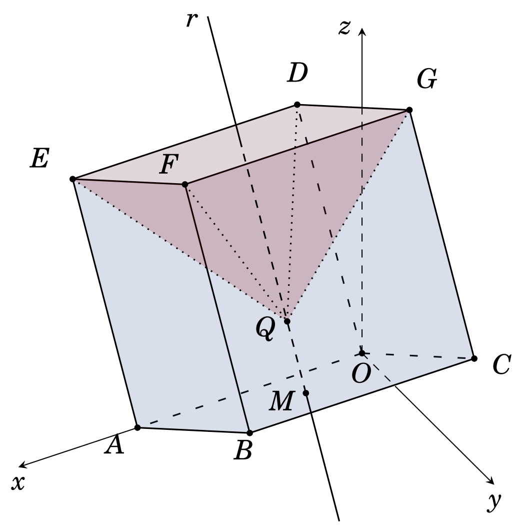
(A) $\ln\left(2e^{4b}\right)$ **(B)** $\ln\left(2 \times e^{5b}\right)$ **(C)** $\ln\left(\frac{10}{3}+5b\right)$ **(D)** $\ln\left(\sqrt[3]{10 \times e^{6b}}\right)$

2. (Antero Neves)

Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cubo $[ABCODEFG]$ de onde foi retirada uma pirâmide quadrangular regular $[DEFGQ]$.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $\left(4\sqrt{6},0,0\right)$;
- o ângulo formado pelo semieixo positivo das ordenadas e a semirreta $\dot{O}C$ tem 30° de amplitude;
- o ponto M é o ponto médio de $[AC]$;
- a face $[OCGD]$ está contida no plano yOz;
- a reta r contém a altura da pirâmide;



2.1. Mostre que uma equação da reta r pode ser:

$$r:(x,y,z)=\left(2\sqrt{6},3\sqrt{2},\sqrt{6}\right)+k\left(0,-\sqrt{3},3\right),\quad k \in \mathbb{R}$$

2.2. Determine as coordenadas de Q sabendo que o plano BQC é um plano paralelo a xOy.

3. (Manuel Gonçalves)

A combinação de um determinado modelo de cofre é formada por seis dígitos: dois pares de **algarismos** e, entre eles, um par de **letras** (considera-se o alfabeto com **26 letras**).

Uma combinação possível será 11AB34.

Quantas são as combinações que satisfazem simultaneamente as 3 condições:

- terminam em número ímpar superior a 15;
- contêm apenas uma das letras da palavra MATEMÁTICA;
- o seu primeiro dígito é um número primo.

(A) 403 200 **(B)** 201 600 **(C)** 302 400 **(D)** 384 000

4. (Paulo Conde e José Carlos Pereira)

Uma caixa tem bolas brancas, azuis e pretas, todas numeradas com números distintos.

4.1. Sabe-se que:

- 62,5% das bolas são pretas;
- entre as pretas, três em cada cinco estão numeradas com um número par;
- $\frac{1}{3}$ das pares não são pretas.

Escolhendo uma bola ao acaso, qual é a probabilidade de estar numerada com um número ímpar?

Apresente o resultado na forma de percentagem.

4.2. Considere que na caixa estão cinco bolas brancas, uma azul e algumas pretas e considere também a experiência aleatória que consiste em extrair, sucessivamente e sem reposição, todas as bolas da caixa.

Sejam X e Y os acontecimentos:

X : «as bolas brancas são extraídas consecutivamente»

Y : «as bolas da mesma cor são extraídas consecutivamente»

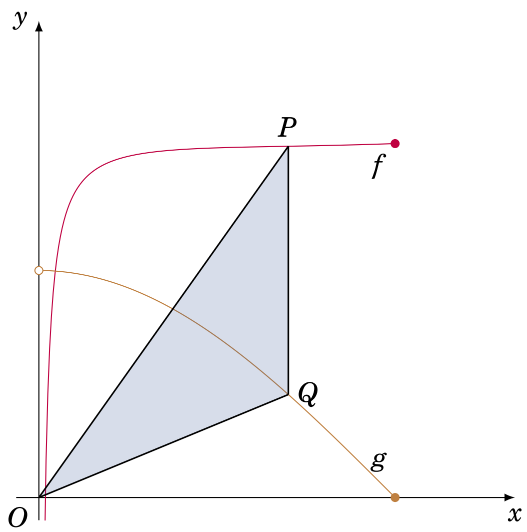
Sabendo que $P\left(Y \middle| X\right) = \frac{1}{22}$, determine o número de bolas que estão na caixa.

Resolva o problema sem recorrer à fórmula da probabilidade condicionada, começando por interpretar $P\left(Y \middle| X\right)$ no contexto da situação descrita.

5. (Roberto Oliveira)

Na figura ao lado estão representadas, em referencial o.n. xOy:

- parte do gráfico da função f de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, definida por $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x-3)}{3x - x^2} + 2$;
- parte do gráfico da função g de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, definida por $g(x) = \cos x$;
- o triângulo $[OPQ]$, sendo P um ponto do gráfico da função f e Q um ponto do gráfico da função g, ambos com a mesma abcissa.



Seja a a abcissa comum dos pontos P e Q, com $a > 0$.

Recorrendo à calculadora gráfica, determine o valor de a para o qual a área do triângulo $[OPQ]$ é igual a 0,4, sabendo que esse valor existe e é único.

Na sua resposta:

- apresente um equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) que lhe permitem resolver a equação;
- apresente o valor de a arredondado às centésimas; nas coordenadas de pontos, considere, pelo menos, duas casas decimais.

6. (Manuel Gonçalves e José Carlos Pereira)

Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões tais que:

- (u_n) é progressão aritmética, $u_8 - 1 = (u_7)^2$;
- a soma de todos os termos de (u_n) entre o terceiro e o décimo segundo, incluindo-os, é 35;
- (v_n) é uma progressão geométrica estritamente decrescente;
- u_7 e u_9 são os dois primeiros termos de (v_n).

Mostre que $v_n = 2^{5-2n}$.

7. (Ricardo Calinas)

No plano complexo, os afixos de $z_1 = e^{i\frac{\pi}{24}}$ e $z_2 = e^{i\frac{13\pi}{24}}$ são dois vértices não consecutivos de um polígono regular centrado na origem.

O número de lados desse polígono pode ser:

(A) 4 **(B)** 6 **(C)** 8 **(D)** 10

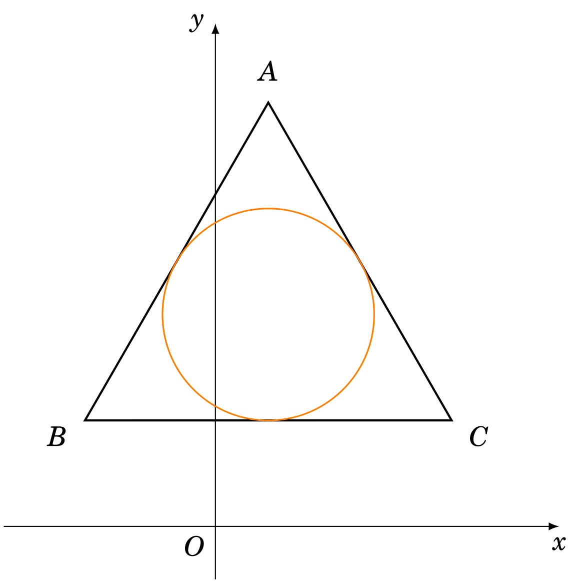
8. (Joana Machado e José Carlos Pereira)

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \dfrac{i^{3-4k} + 3 + 2i}{2 - i}$, com $k \in \mathbb{N}$, e $z_2 = \cos\left(\dfrac{9\pi}{8}\right) + \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)}{i}$.

Determine o menor valor natural para n de modo a que $\dfrac{(z_1)^n}{(\overline{z_2})^2}$ seja um número real positivo.

9. (José Carlos Pereira)

Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy, o triângulo equilátero $[ABC]$ e a circunferência inscrita nesse triângulo.



Sabe-se que:

- o lado $[BC]$ é paralelo ao eixo Ox;
- uma equação da circunferência é $x^2 - 2x + y^2 - 8y + 13 = 0$.

Qual das seguintes equações define a mediatriz do segmento de reta $[AB]$?

(A) $y + \sqrt{3}x = 6 + \sqrt{3}$

(B) $3y + \sqrt{3}x = 6 + \sqrt{3}$

(C) $3y + \sqrt{3}x = 12 + \sqrt{3}$

(D) $y + \sqrt{3}x = 2 + \sqrt{3}$

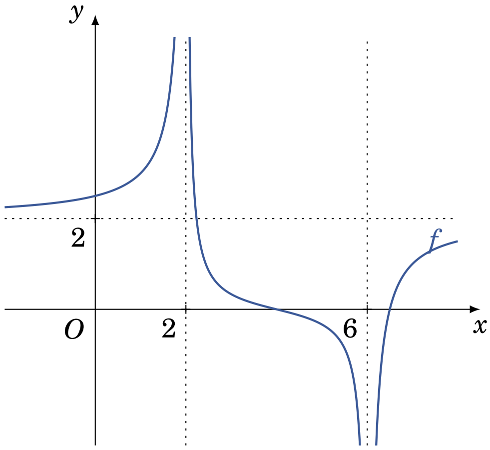
10. (João Ferreira)

Na figura está parte da representação gráfica de um função f, cujo domínio é $\mathbb{R}\setminus\{2,6\}$.

As retas de equações $x=2$ e $x=6$ são as únicas assíntotas verticais do gráfico de f.

Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = n\cdot\ln\left(\frac{n+4}{n+2}\right)$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?



(A) $\lim f(u_n) = -\infty$

(B) $\lim f(u_n) = +\infty$

(C) $\lim f(u_n) = 2$

(D) Não existe $\lim f(u_n)$

11. (Maria de Fátima Serrano)

Para um certo valor de a e para um certo valor de b, é contínua no ponto $x=-2$ a função g definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x+2}+x+1}{x+2} & \text{se } x<-2 \\[2ex] a & \text{se } x=-2 \\[2ex] b+\dfrac{\ln(x+3)}{x+2} & \text{se } x>-2 \end{cases}$$

Quais os valores de a e de b?

(A) $a=2$ e $b=2$ **(B)** $a=2$ e $b=1$ **(C)** $a=1$ e $b=2$ **(D)** $a=1$ e $b=1$

12. (José Carlos Pereira)

Seja g uma função de domínio $\mathbb{R}^+$ tal que a reta de equação $y=-3x+2$ é assíntota do seu gráfico.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(g(x))^2+3xg(x)}{\ln x - g(x)}$?

(A) -3 **(B)** -2 **(C)** 2 **(D)** 3

13. (Márcia Eiras e José Carlos Pereira)

Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a sua derivada f', também de domínio $\mathbb{R}$, é definida por:

$$f'(x) = (x+1)^2\, e^{2x+1}$$

13.1. Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-\sqrt{x}}$?

(A) $2e^2$ **(B)** $2e^3$ **(C)** $8e^2$ **(D)** $8e^3$

13.2. Seja r a reta tangente ao gráfico de f com declive máximo no intervalo $]-\infty,-1]$.

Determine o declive da reta r.

Item extra: Determine o conjunto solução da inequação $\ln(f'(x))-1 \geq \ln\left(3x^2+x\right)+2x$.

14. (Paulo Conde e José Carlos Pereira)

Considere a função g, de domínio $\left[-\pi, +\infty\right[\setminus \{0\}$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x\,(1-\cos x)}{x^3} & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ \\ x e^{\frac{2}{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

14.1. Verifique se existe $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$.

14.2. Considere a função f, de domínio $\left[-\pi, +\infty\right[\setminus \{0\}$, definida por $f(x) = x^3 g(x)$.
Estude a função f quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

FIM

Cotações

1. .... 16 pontos

2.

- **2.1.** .... 20 pontos
- **2.2.** .... 16 pontos

3. .... 16 pontos

4.

- **4.1.** .... 16 pontos
- **4.2.** .... 16 pontos

5. .... 16 pontos

6. .... 20 pontos

7. .... 16 pontos

8. .... 16 pontos

9. .... 16 pontos

10. .... 16 pontos

11. .... 16 pontos

12. .... 16 pontos

13.

- **13.1.** .... 16 pontos
- **13.2.** .... 16 pontos

14.

- **14.1.** .... 16 pontos
- **14.2.** .... 16 pontos

Soluções

1. A

2.

2.2. $Q\left(2\sqrt{6}, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{6}\right)$

3. A

4.

4.1. 43,75%

4.2. Estão 16 bolas dentro da caixa.

5. $a \approx 0{,}88$.

7. C

8. $n = 7$.

9. C

10. B

11. B

12. B

13.

13.1. D

13.2. O declive é e^{-3}.

Item Extra: $S = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right[\cup \left]0, 1\right]$

14.

14.1. Não existe $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$.

14.2. f é decrescente em $\left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right]$ e em $\left]0, \frac{1}{2}\right]$, é crescente em $\left[-\frac{2\pi}{3}, 0\right[$ e em $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Tem mínimo relativo em $x = -\frac{2\pi}{3}$ e em $x = \frac{1}{2}$ e tem máximo relativo em $x = -\pi$.

Coordenação
José Carlos Pereira

Paginação
Antero Neves

Verificação de resultados
Ana Paula Jardim, Antero Neves, Carlos Frias, José Carlos Pereira, José Sacramento, Manuel Gonçalves, Márcia Eiras, Nuno Godinho, Patrícia Oliveira, Rafael Saraiva, Sandra Rodrigues.

1. Se temos 8 termos no desenvolvimento então $n = 7$.

Todos os termos do desenvolvimento de $(a+b)^n$ têm a seguinte forma:

$$ {}^{n}C_p a^{n-p} b^p $$

Logo, neste caso, ficamos com:

$$ {}^{7}C_{7-p} \left(x^3\right)^{7-p} \left(e^{k-b}\right)^p = {}^{7}C_p x^{21-3p} e^{kp-bp} $$

Como sabemos que um dos termos é $70\sqrt{e^{6k}} \times x^9$ então

$$ 21 - 3p = 9 \Leftrightarrow p = 4 $$

Substituindo na expressão anterior:

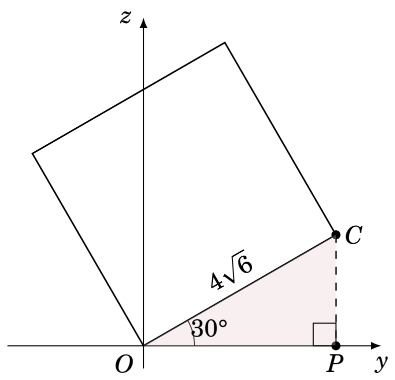
$$
\begin{aligned}
& {}^{7}C_4 \cancel{x^9} e^{4k-4b} && = 70\sqrt{e^{6k}} \times \cancel{x^9} \\
\Leftrightarrow \quad & 35e^{4k-4b} && = 70e^{3k} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{e^{4k-4b}}{e^{3k}} && = 2 \\
\Leftrightarrow \quad & e^{k-4b} && = 2 \\
\Leftrightarrow \quad & k - 4b && = \ln 2 \\
\Leftrightarrow \quad & k && = \ln 2 + 4b \\
\Leftrightarrow \quad & k && = \ln 2 + \ln\left(e^{4b}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & k && = \ln\left(2e^{4b}\right)
\end{aligned}
$$

Opção: $\boxed{\text{A}}$

2.

2.1 Como sabemos que o ponto A tem coordenadas $\left(4\sqrt{6}, 0, 0\right)$ então $\overline{OA} = 4\sqrt{6}$. Sendo $[ABCODEFG]$ um cubo então sabemos também que todas as arestas têm o mesmo comprimento, e por conseguinte, $\overline{OC} = 4\sqrt{6}$.

Considerando o plano yOz temos:



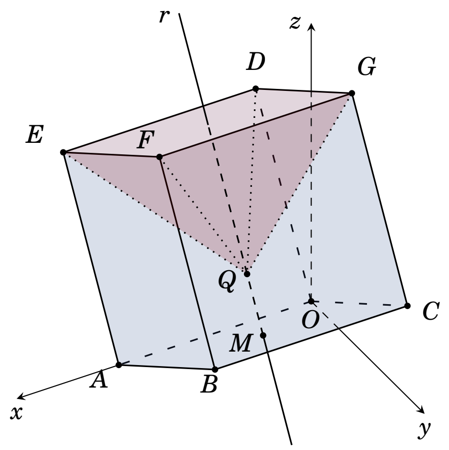
$$ \sin 30° = \frac{\overline{CP}}{4\sqrt{6}} \Leftrightarrow \overline{CP} = 4\sqrt{6} \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{CP} = 2\sqrt{6} $$

$$ \cos 30° = \frac{\overline{OP}}{4\sqrt{6}} \Leftrightarrow \overline{OP} = 4\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow $$
$$ \overline{OP} = 2\sqrt{18} \Leftrightarrow \overline{OP} = 6\sqrt{2} $$

Assim sendo, $C\left(0, 6\sqrt{2}, 2\sqrt{6}\right)$.

Agora, com os pontos A e C, podemos determinar as coordenadas do ponto $M\left(x_M, y_M, z_M\right)$, uma vez que é o ponto médio do $[AC]$.

$$ x_M = \frac{4\sqrt{6}+0}{2} = 2\sqrt{6} $$
$$ y_M = \frac{0+6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} $$
$$ z_M = \frac{0+2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6} $$



$$ M\left(2\sqrt{6}, 3\sqrt{2}, \sqrt{6}\right) $$

Como sabemos que r tem a mesma direção da reta CG e a face $[OCGD]$ está no plano yOz, podemos determinar um vector diretor de r, chamemos-lhe $\vec{u}$, rapidamente:

$$ \overrightarrow{OC} = \left(0, 6\sqrt{2}, 2\sqrt{6}\right) $$

logo

$$ \overrightarrow{CG} = \left(0, -2\sqrt{6}, 6\sqrt{2}\right) $$

e podemos determinar um vetor colinear com este multiplicando todas as coordenadas por $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, ficando:

$$ \vec{u} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(0, -2\sqrt{6}, 6\sqrt{2}\right) = \left(0, -\sqrt{3}, 3\right) $$

Então uma equação da reta r pode ser a apresentada.

2.2 Seja $Q\left(x_Q, y_Q, z_Q\right)$.

Sendo paralelo a xOy, a equação do plano BQC é $z = 2\sqrt{6}$, logo, $z_Q = 2\sqrt{6}$

Recorrendo à equação da reta apresentada na alínea anterior,

$$2\sqrt{6} = \sqrt{6} + 3k \Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

e, portanto:

$$x_Q = 2\sqrt{6} + \frac{\sqrt{6}}{3} \times 0 = 2\sqrt{6}$$

$$y_Q = 3\sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} \times \left(-\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{2}$$

O que permite concluir que $Q\left(2\sqrt{6}, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{6}\right)$.

3. Considerando o primeiro ponto do enunciado, temos duas situações distintas que é importante considerar.

A primeira em que ainda temos um número cujo algarismo das dezenas é o 1:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & 1 & 7,9 \\ \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} \\ & & & & 1 & 2 \end{array}$$

e a segunda em que já não temos o 1 como algarismo das dezenas:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & 2,3,4,\ldots,9 & 1,3,5,7,9 \\ \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} \\ & & & & 8 & 5 \end{array}$$

Para o segundo ponto do enunciado, temos de te ter em conta que a palavra "matemática" tem 6 letras distintas e que uma e só uma delas tem de aparecer na combinação, sendo um dos espaços ocupado por ela enquanto que no outro apenas podem aparecer as restantes letras (20):

$$\begin{array}{cccccc} & & \text{A,C,E,I,M,T} & \text{restantes} & & \\ \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} \\ & & 6 & 20 & & \\ & & \multicolumn{2}{c}{\times 2} & & \end{array}$$

No terceiro ponto do enunciado apenas é pedido que o primeiro dígito seja um número primo, nada sendo imposto no segundo, temos:

$$\begin{array}{cccccc} 2,3,5,7 & \text{todos} & & & & \\ \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} \\ 4 & 10 & & & & \end{array}$$

A solução será:

$$4 \times 10 \times 6 \times 20 \times 2 \times (1 \times 2 + 8 \times 5) = 403200$$

Opção: $\boxed{\text{A}}$

4.

4.1 Sejam:

A: «A bola é preta.»

B: «A bola está numerada com um número par.»

Do enunciado sai que:

- $P(A) = 0{,}625$
- $P(B|A) = \frac{3}{5}$
- $P\left(\overline{A}\middle|B\right) = \frac{1}{3}$

Queremos saber o valor de $P\left(\overline{B}\right)$.

Como

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} &= \frac{P(B \cap A)}{0{,}625} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{5} \times 0{,}625 &= P(B \cap A) \\ \Leftrightarrow \quad \frac{3}{8} &= P(B \cap A) \end{aligned}$$

Sabemos também que:

$$P\left(\overline{A}\middle|B\right) = 1 - P(A|B) = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

portanto:

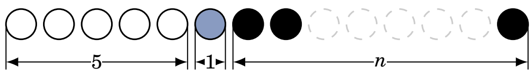
$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= 1 - \frac{\frac{3}{8}}{P(B)} \\ \Leftrightarrow P(B) &= \frac{\frac{3}{8}}{\frac{2}{3}} \\ \Leftrightarrow P(B) &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$

Assim sendo:

$$P\left(\overline{B}\right) = 1 - \frac{9}{16} = 43{,}75\%$$

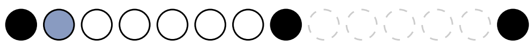
4.2 De acordo com a definição de X e Y feita no enunciado, $P(Y|X)$ é a probabilidade de as bolas com a mesma cor serem extraídas consecutivamente sabendo que isso acontece com as bolas brancas. Assim, apenas temos de considerar o que acontece com as pretas (à falta de um valor concreto para o seu número vamos considerar n) e com a azul mas também com o posicionamento dos três grupos de cores presentes na extração.

Podemos visualizar uma das situações que queremos que aconteça (casos favoráveis):



Claro que os grupos podem trocar de posição entre si e, por isso, o número de casos favoráveis é: $3! = 6$.

No entanto, podemos ter um caso assim:



Para contarmos todas as situações possíveis vamos considerar que temos n bolas pretas, 1 bola azul e 1 grupo de bolas brancas que estará sempre junto, o que perfaz um total de $n+2$ elementos/espaços. Vamos começar por colocar todas as bolas pretas - n - nos $n+2$ espaços:

$$^{n+2}C_n = \frac{(n+2)!}{n!(n+2-n)!} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Isto terá de ser multiplicado pelas trocas entre a bola azul e o grupo de bolas brancas, assim:

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2} \times 2 = (n+2)(n+1)$$

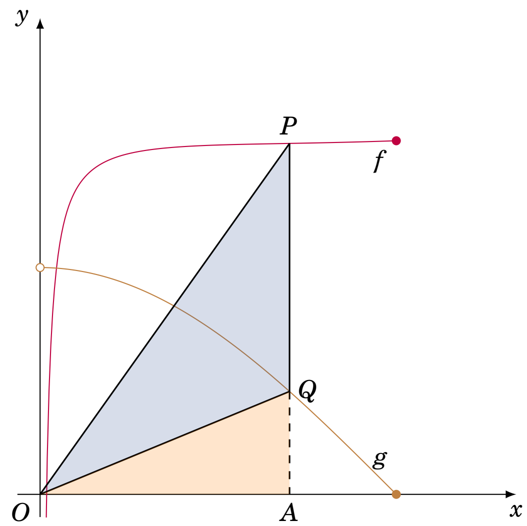
Assim sendo:

$$\begin{aligned} & \frac{6}{(n+2)(n+1)} &&= \frac{1}{22} \\ \Leftrightarrow\ & 132 &&= n^2+3n+2 \\ \Leftrightarrow\ & n^2+3n-130 &&= 0 \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{n=10} \vee n=-13 \notin \mathbb{N} \end{aligned}$$

Usando a fórmula resolvente

Temos $10+5+1=16$ bolas dentro da caixa.

5. Vamos considerar o seguinte:



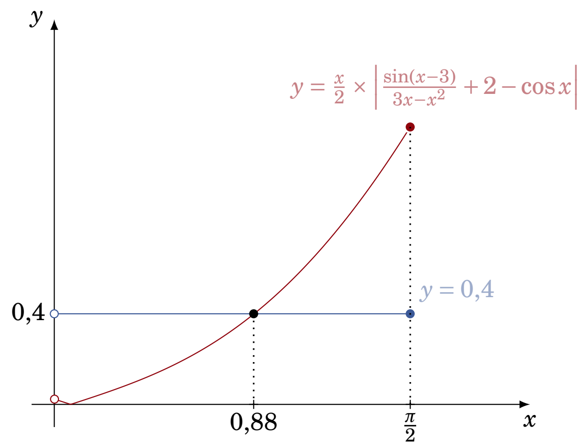
A área do triângulo $[OPQ]$, pode definir-se como a diferença entre as áreas dos triângulos $[OAP]$ e $[OAQ]$.

Assim, queremos saber para que a se tem:

$$\left| \underbrace{\frac{a \times \left(\frac{\sin(a-3)}{3a-a^2}+2\right)}{2}}_{A_{[OAP]}} - \underbrace{\frac{a \times \cos a}{2}}_{A_{[OAQ]}} \right| = 0{,}4$$

ou, se quisermos:

$$\frac{a}{2} \times \left| \frac{\sin(a-3)}{3a-a^2} + 2 - \cos a \right| = 0{,}4$$



Assim,depois de fazermos a representação na calculadora das funções $y = \frac{x}{2} \times \left|\frac{\sin(x-3)}{3x-x^2}+2-\cos x\right|$ e $y=0{,}4$, conseguimos verificar que se intersetam quando $x \approx 0{,}88$, ou seja, $a \approx 0{,}88$.

6. Sabendo que (u_n) é progressão aritmética, podemos escrever já que:

$$u_n = u_k + (n-k)r$$

e

$$S = \frac{u_n - u_k}{2} \times (n-k+1)$$

A partir daqui e com a informação que nos é dada no segundo ponto do enunciado, temos:

$$\begin{aligned}
& u_3 + u_4 + \ldots + u_{12} &= 35 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{u_3 + u_{12}}{2} \times (12-3+1) &= 35 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{u_7 - 4r_1 + u_8 + 4r_1}{2} \times 10 = 35 & \\
\Leftrightarrow\ & (u_7 - \cancel{4r_1} + u_8 + \cancel{4r_1}) \times 5 = 35 & \\
\Leftrightarrow\ & u_7 + u_8 &= 7 \\
\Leftrightarrow\ & u_8 &= 7 - u_7
\end{aligned}$$

Usando a fórmula indicada anteriormente

Considere-se r_1 a razão da p.a. (u_n)

Sendo assim, usando o primeiro ponto do enunciado:

$$\begin{aligned}
& u_8 - 1 &= (u_7)^2 \\
\Leftrightarrow\ & 7 - u_7 - 1 &= (u_7)^2 \\
\Leftrightarrow\ & (u_7)^2 + u_7 - 6 = 0 & \\
\Leftrightarrow\ & u_7 = -3 \quad \vee u_7 = 2 &
\end{aligned}$$

Usando a fórmula resolvente.

Vamos analisar cada um destes valores de u_7:

i) Se $u_7 = -3$ então $u_8 = 7+3 = 10$ e, consequentemente, o valor de $r_1 = r_8 - r_7 = 13$. Podemos, com isto, determinar o valor de $u_9 = 10 + 13 = 23$.

Sendo u_7 e u_9 os dois primeiros termos de (v_n), progressão geométrica, a sua razão pode calcular-se a partir da divisão destes termos que, como têm sinais contrários, será negativa e impossibilita a monotonia da sucessão (v_n).

ii) Se $u_7 = 2$ então $u_8 = 7-2 = 5$ e a razão é $r_1 = 3$. Assim sendo, $u_9 = 5+3 = 8$. Pelo facto de (v_n) ser decrescente conseguimos dizer que $v_1 = u_9 = 8$ e que $v_2 = u_7 = 2$. A razão desta progressão geométrica é

$$r_2 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 2^{-2}.$$

Como (v_n) é uma progressão geométrica,

$$v_n = v_k \times r^{n-k}$$

O que, substituindo adequadamente, fica:

$$v_n = 8 \times \left(2^{-2}\right)^{n-1} = 2^3 \times 2^{-2n+2} = 2^{5-2n}$$

7. Temos:

$$\operatorname{Arg}(z_1) = \frac{\pi}{24} \qquad \operatorname{Arg}(z_2) = \frac{13\pi}{24}$$

assim,

$$\operatorname{Arg}(z_2) - \operatorname{Arg}(z_1) = \frac{13\pi}{24} - \frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{2}$$

Com isto podemos descartar as opções **(A)**, **(B)** e **(D)**:

- descartamos **(A)** pois nesse caso teríamos um quadrado e os afixos seriam vértices consecutivos contrariando o enunciado;
- descartamos **(B)** e **(D)** pois no caso de um hexágono e de um decágono não encontramos vértices que resultem da rotação centrada na origem e ângulo $\frac{\pi}{2}$ de outro vértice.

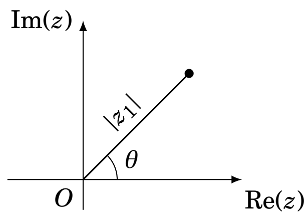
Opção: $\boxed{\text{C}}$

8. Em primeiro lugar vamos simplificar os números z_1 e z_2 presentes na expressão.

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{i^{3-4k} + 3 + 2i}{2-i} \\
&= \frac{i^3 \times \left(i^4\right)^{-k} + 3 + 2i}{2-i} \\
&= \frac{-i \times 1 + 3 + 2i}{2-i} \\
&= \frac{3+i}{2-i} \\
&= \frac{3+i}{2-i}{}_{\times(2+i)} \\
&= \frac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} \\
&= \frac{6+3i+2i-1}{2^2+1} = \frac{5+5i}{5} = 1+i
\end{aligned}$$

Como $i^3 = -i$ e $i^4 = 1$

Seguindo as regras da divisão de complexos escritos na forma algébrica.



Passando agora z_1 para a forma trigonométrica:

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Seja θ um argumento de z_1, então

$$\tan\theta = \frac{1}{1} \wedge \theta \in 1^{\text{º}}Q.$$

Logo,

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

e assim, podemos escolher $k = 0$, ficando $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Concluimos, portanto, que

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Analisemos agora o número z_2.

$$\begin{aligned}
z_2 &= \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{i}\\
&= \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + \frac{1}{i} \times \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\\
&= \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\\
&= \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{8}\right)\\
&= \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)\\
&= e^{i\left(\frac{9\pi}{8}\right)}
\end{aligned}$$

Como $\frac{1}{i} = -i$

Sendo que $-\sin(\alpha) = +\sin(\pi + \alpha)$ podemos escrever

Agora,

$$\overline{z_2}^2 = \left(e^{i\left(-\frac{9\pi}{8}\right)}\right)^2 = e^{i\left(-\frac{9\pi}{4}\right)}$$

mas, tendo em conta que:

$$-\frac{9\pi}{4} = -2\pi - \frac{\pi}{4}$$

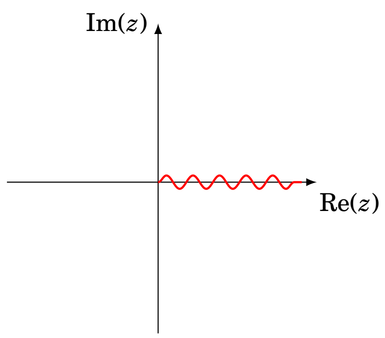
então, podemos simplificar para:

$$\overline{z_2}^2 = e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$

Assim sendo,

$$\frac{(z_1)^n}{\left(\overline{z_2}^2\right)} = \frac{\left(\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)^n}{e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{4}\right)}$$

Para o número ser real positivo, o argumento tem de ser da forma: $0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.



Por isso

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{4} &= 0 + 2k\pi\ , k \in \mathbb{Z}\\
\pi n + \pi &= 8k\pi\ , k \in \mathbb{Z}\\
n + 1 &= 8k\ , k \in \mathbb{Z}\\
n &= 8k - 1\ , k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Colocamos os mesmos denominadores.

Dividimos tudo por π.

O menor valor de n obtém-se quando $k = 1$:

$$n = 8 - 1 = 7.$$

9. Manipulando a expressão da circunferência

$$\begin{aligned}
& x^2 - 2x + y^2 - 8y + 13 = 0\\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 8y + 4^2 - 4^2 + 13 = 0\\
\Leftrightarrow\ & (x-1)^2 + (y-4)^2 = 2^2
\end{aligned}$$

conseguimos determinar o seu centro $(1,4)$ e o raio $r = 2$.

Como BC é paralela ao eixo Ox e sabemos que os ângulos internos de um triângulo equilátero têm 60° de amplitude, o declive - m - da reta AB é: $m = \tan 60° = \sqrt{3}$

O declive - m' - da mediatriz é: $m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Num triângulo equilátero o incentro e o circuncentro coincidem e, por isso, sabemos que a mediatriz contém o centro da circunferência representada. Sendo assim:

$$\begin{aligned}
y - 4 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1) &\Leftrightarrow 3y - 12 = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}\\
&\Leftrightarrow 3y + \sqrt{3}x = 12 + \sqrt{3}
\end{aligned}$$

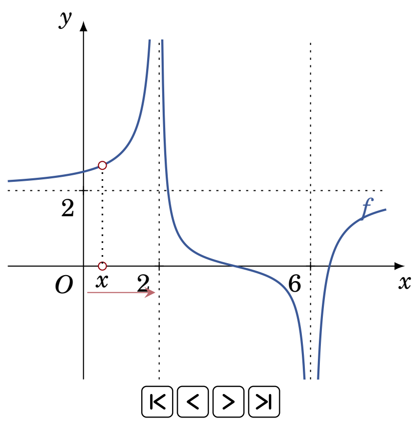
Opção: $\boxed{\text{C}}$

10. Começamos por calcular o valor de $\lim\left[n \cdot \ln\left(\frac{n+4}{n+2}\right)\right]$

$$\begin{aligned}
\lim\left[n \cdot \ln\left(\frac{n+4}{n+2}\right)\right] &= \lim\left[\ln\left(\frac{\cancel{n}\left(1+\frac{4}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)}\right)^n\right]\\
&= \ln\left[\frac{\lim\left[\left(1+\frac{4}{n}\right)^n\right]}{\lim\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right]}\right]\\
&= \ln\frac{e^4}{e^2} = \ln e^2 = 2^-
\end{aligned}$$

Então o limite $\lim f(u_n)$ é equivalente a $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$.

Observando o gráfico, vemos que, à medida que o x toma valores próximos mas inferiores a 2, os valores de $f(x)$ tendem para $+\infty$.



Opção: $\boxed{\text{B}}$

11. Se queremos que a função g seja contínua no ponto $x=-2$ então queremos que

$$\lim_{x\to -2^-} g(x) = \lim_{x\to -2^+} g(x) = g(-2)$$

Comecemos por resolver o limite onde não encontramos o a nem o b.

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{e^{x+2}+x+1}{x+2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to -2^-} \frac{e^{x+2}+x+1-0}{x-(-2)} = f'(-2) = 2$$

> Considerando que
>
> $$f(x) = e^{x+2}+x+1$$
>
> f é derivável no seu domínio e o limite é igual a
>
> $$\lim_{x\to -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}$$
>
> Podemos então concluir que este se resume a $f'(2)$.
>
> $f'(x) = e^{x+2}+1 \Rightarrow f'(-2) = e^0+1 = 2$

Como o limite calculado tem de ser igual ao valor de $g(-2)$ então sabemos já que $a=2$ (descartamos as opções **(C)** e **(D)**).

$$\lim_{x\to -2^+} \left(b + \frac{\ln(x+3)}{x+2}\right) = b + \lim_{x\to -2^+} \frac{\ln(x+3)-0}{x-(-2)}$$
$$= b + h'(-2) = b+1$$

> Considerando que
>
> $$h(x) = \ln(x+3)$$
>
> h é derivável no seu domínio e o limite é igual a
>
> $$\lim_{x\to -2} \frac{h(x)-h(-2)}{x-(-2)}$$
>
> Podemos então concluir que este se resume a $h'(2)$.
>
> $h'(x) = \frac{1}{x+3} \Rightarrow h'(-2) = \frac{1}{-2+3} = 1$

Também este limite tem de ser igual a 2 e, portanto, $b=1$.

Opção: $\boxed{\text{B}}$

12. De sabermos que $y=-3x+2$ é assíntota do gráfico de g e que $D_g = \mathbb{R}^+$, sabemos também que:

- $\lim_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{x} = -3$
- $\lim_{x\to +\infty} [g(x) - (-3x)] = 2$

Então:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(g(x))^2 + 3g(x)}{\ln x - g(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{g(x)(g(x)+3x)}{\ln x - g(x)}$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{g(x)}{x}(g(x)+3x)}{\frac{\ln x}{x} - \frac{g(x)}{x}}$$
$$= \frac{\overbrace{\lim_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{x}}^{-3} \cdot \overbrace{\lim_{x\to +\infty} [g(x)-(-3x)]}^{2}}{\underbrace{\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Limite notável }=0} - \underbrace{\lim_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{x}}_{-3}}$$
$$= \frac{-3\cdot 2}{3} = -2$$

Opção: $\boxed{\text{B}}$

13.

13.1 $$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-\sqrt{x}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1} \left[\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x-\sqrt{x}}\right]$$
$$= \underbrace{\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}}_{f'(1)} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}}\,{\scriptstyle (x+\sqrt{x})}$$
$$= f'(1)\cdot \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+\sqrt{x})}{x^2-x}$$
$$= f'(1)\cdot \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+\sqrt{x})}{\cancel{(x-1)}x}$$
$$= f'(1)\cdot \lim_{x\to 1} \frac{x+\sqrt{x}}{x}$$

Como

- $f'(1) = (1+1)^2 e^{2\cdot 1+1} = 4e^3$
- $\lim_{x\to 1} \frac{x+\sqrt{x}}{x} = \frac{1+1}{1} = 2$

temos:

$$= 4e^3 \cdot 2$$
$$= 8e^3$$

Opção: $\boxed{\text{D}}$

13.2 O declive da reta tangente à função para $x = a$ é dado por $f'(a)$. Se queremos saber o declive máximo no intervalo $]-\infty, -1]$ então queremos saber onde $f'(x)$ atinge o seu máximo nesse intervalo. Para isso vamos analisar $f''(x)$.

$$f''(x) = \left((x+1)^2 e^{2x+1}\right)'$$
$$= \left((x+1)^2\right)' e^{2x+1} + (x+1)^2 \left(e^{2x+1}\right)'$$
$$= 2(x+1)e^{2x+1} + 2(x+1)^2 e^{2x+1}$$
$$= 2e^{2x+1}(x+1)(x+2)$$

Calculamos agora os seus zeros:

$$2e^{2x+1}(x+1)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2e^{2x+1} = 0}_{\text{Impossível em } \mathbb{R}} \vee x+1 = 0 \vee x+2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = -2$$

x	$-\infty$	-2		-1
$2e^{2x+1}$	+	+	+	+
$x+1$	−	−	−	0
$x+2$	−	0	+	+
$f''(x)$	+	0	−	0
$f'(x)$	↗	máx. $f'(-2)$	↘	min. $f'(-1)$

Assim sendo, o declive máximo no intervalo pedido é igual a $f'(-2)$ ou seja:

$$f'(-2) = (-2+1)^2 e^{2\cdot(-2)+1} = e^{-3}$$

Item extra: $\ln\left((x+1)^2 e^{2x+1}\right) - 1 \geq \ln\left(3x^2 + x\right) + 2x$

Começamos com a determinação do domínio em que esta desigualdade é válida:

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} : (x+1)^2 e^{2x+1} > 0 \wedge 3x^2 + x > 0\right\}$$

Para verificarmos a primeira condição

$$(x+1)^2 e^{2x+1} > 0$$

basta que $x \neq -1$, ou seja, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

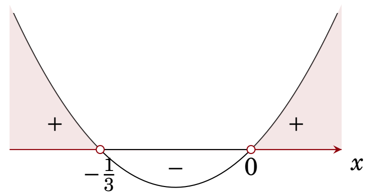
Para a segunda, temos uma inequação de segundo grau:

$$3x^2 + x > 0$$

Calculamos os zeros:

$$3x^2 + x = 0$$
$$\Leftrightarrow x(3x+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{1}{3}$$

Fazemos o esboço da parábola:



Como queremos que seja positiva, ficamos com:

$$\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[\cup \left]0, +\infty\right[$$

Assim, o domínio onde vamos trabalhar é

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \cap \left(\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[\cup \left]0, +\infty\right[\right)$$
$$= \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[\cup \left]0, +\infty\right[\setminus \{-1\}$$

Então, em D temos:

$$\ln\left((x+1)^2 e^{2x+1}\right) - 1 \geq \ln\left(3x^2 + x\right) + 2x$$

$$\Leftrightarrow \ln\left((x+1)^2 e^{2x+1}\right) \geq \ln\left(3x^2 + x\right) + 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow \ln\left((x+1)^2 e^{2x+1}\right) \geq \ln\left(3x^2 + x\right) + \ln\left(e^{2x+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left((x+1)^2 e^{2x+1}\right) \geq \ln\left[\left(3x^2 + x\right)\left(e^{2x+1}\right)\right]$$

$e > 1$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 e^{2x+1} \geq \left(3x^2 + x\right)\left(e^{2x+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 e^{2x+1} - \left(3x^2 + x\right)\left(e^{2x+1}\right) \geq 0$$

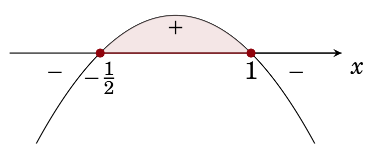
$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{2x+1}}_{>0 \forall x \in D} \left[(x+1)^2 - \left(3x^2 + x\right)\right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 3x^2 - x \geq 0$$

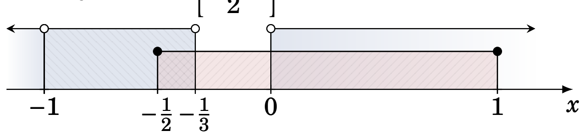
$$\Leftrightarrow -2x^2 + x + 1 \geq 0$$

Mais uma vez temos uma inequação de segundo grau, cujos zeros podemos calcular usando a fórmula resolvente e são: $-\frac{1}{2}$ e 1.

Desta vez a parábola está voltada para baixo:



A solução é: $D \cap \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$



Ou seja:

$$S = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right[\cup \left]0, 1\right].$$

14.

14.1 Para os casos em que o ponto não pertence ao domínio, a existência de limite da função em a apenas prevê que

$$\lim_{x\to a^-} g(x) = \lim_{x\to a^+} g(x)$$

Assim, neste caso, queremos verificar se:

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x)$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^3(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x\left(1-\cos^2 x\right)}{x^3(1+\cos x)}$$

Pela fórmula fundamental da trigonometria.

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x \sin^2 x}{x^3(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\sin^3 x}{x^3}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right)$$

$$= \Bigg(\underbrace{\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}}_{\substack{\text{limite notável}\\ =1}}\Bigg)^3 \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+\cos x}}_{\frac{1}{2}}$$

$$= 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(xe^{\frac{2}{x}}\right) \overset{(0\cdot\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}}$$

$$= 2\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{2}{x}}}{\frac{2}{x}}$$

Se $x \to 0^+$ então $\frac{2}{x} \to +\infty$. Seja $y = \frac{2}{x}$, $y \to +\infty$

$$= \underbrace{\lim_{y\to +\infty}\frac{e^y}{y}}_{\substack{\text{limite}\\ \text{notável}=\\ +\infty}}$$

$$= 2\cdot +\infty = +\infty$$

Com isto, concluímos que não existe $\lim_{x\to 0} g(x)$.

14.2 Vamos começar por ver qual a expressão da função f apresentada no enunciado.

$$f(x) = x^3\cdot g(x)$$

$$= \begin{cases} x^3\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3} & \text{se } -\pi \le x < 0 \\[2ex] x^3\cdot xe^{\frac{2}{x}} & \text{se } x>0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sin x(1-\cos x) & \text{se } -\pi \le x < 0 \\[2ex] x^4\cdot e^{\frac{2}{x}} & \text{se } x>0 \end{cases}$$

Para estudar a sua monotonia e existência de extremos relativos vamos analisar f'.

Para $x \in [-\pi, 0[$:

$$(\sin x(1-\cos x))' = (\sin x)'(1-\cos x) + \sin x(1-\cos x)'$$

$$= \cos x(1-\cos x) + \sin x\cdot\sin x$$

$$= \cos x - \cos^2 x + \sin^2 x$$

$$= \cos x - \cos^2 x + 1 - \cos^2 x$$

$$= -2\cos^2 x + \cos x + 1$$

já quando $x \in]0, +\infty[$:

$$\left(x^4 e^{\frac{2}{x}}\right)' = \left(x^4\right)' e^{\frac{2}{x}} + x^4\left(e^{\frac{2}{x}}\right)'$$

$$= 4x^3 e^{\frac{2}{x}} + x^4\left(-\frac{2}{x^2}e^{\frac{2}{x}}\right)$$

$$= 4x^3 e^{\frac{2}{x}} - 2x^2 e^{\frac{2}{x}}$$

$$= 2x^2 e^{\frac{2}{x}}(2x-1)$$

e, portanto:

$$f'(x) = \begin{cases} -2\cos^2 x + \cos x + 1 & \text{se } -\pi \le x < 0 \\ 2x^2 e^{\frac{2}{x}}(2x-1) & \text{se } x>0 \end{cases}$$

Vejamos agora para que valores $f'(x) = 0$.

Quando $x \in [-\pi, 0[$:

$$-2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0$$

Usando a fórmula resolvente.

$$\Leftrightarrow \cos x = 1 \vee \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\vee\, x = -\pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

De todas as soluções, a que pertence ao intervalo onde estamos a trabalhar é: $-\frac{2\pi}{3}$.

Se $x \in \left]0, +\infty\right[$:

$$2x^2 e^{\frac{2}{x}}(2x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 e^{\frac{2}{x}}=0 \vee 2x-1=0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2=0 \vee \underbrace{e^{\frac{2}{x}}=0}_{\substack{\text{Impossível}\\ \text{em } \mathbb{R}}} \vee 2x-1=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\tfrac{1}{2}$$

Neste intervalo, temos de considerar a solução $\frac{1}{2}$.

x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f'	$-$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$
f	máx.	$\searrow$	min.	$\nearrow$		$\searrow$	min.	$\nearrow$

Assim, podemos dizer que

- f é decrescente em $\left[-\pi, -\dfrac{2\pi}{3}\right]$ e em $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$.
- f é crescente em $\left[-\dfrac{2\pi}{3}, 0\right[$ e em $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.
- f tem um máximo relativo quando $x=-\pi$.
- f tem mínimos relativos quando $x=-\dfrac{2\pi}{3}$ e quando $x=\dfrac{1}{2}$.

RECURSOS PARA MATEMÁTICA

Grupo do Facebook

Prova Modelo de Exame Nacional
Matemática A
Prova 635 | Ensino Secundário | Junho 2021

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
- É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Apresente apenas uma resposta para cada item.
- As cotações dos itens encontram-se no final da prova.

- A prova inclui um formulário.
- Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
- Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

- Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

1.1., 1.2., 3., 4., 6., 8., 10.1., 10.2., 13.1., 13.2. e 15.

Estes itens estão assinalados no enunciado através de uma moldura que os rodeia.

- Dos restantes 7 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r- raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r- raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r- raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad \left(k \in \{0, \ldots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N}\right)$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$\left(u^n\right)' = n u^{n-1} u' \ (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$\left(e^u\right)' = u' e^u$

$\left(a^u\right)' = u' a^u \ln a \quad \left(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\right)$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad \left(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\right)$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Carlos Frias

1. Na figura 1 encontra-se representado em referencial o.n. $Oxyz$ um prisma reto $[OABCDEFG]$.
Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- A pertence ao plano xOy;
- F pertence ao plano xOz;
- a base $[OAFG]$ é um paralelogramo;
- a reta AF pode ser definida vetorialmente por:
$(x,y,z)=(3,4,-3)+k(1,-2,3),\ k\in\mathbb{R}$

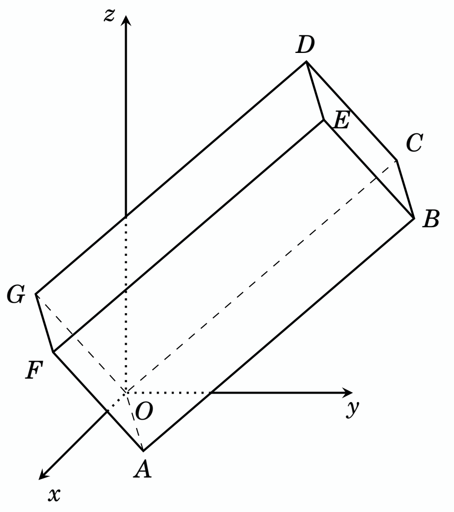


Figura 1

Resolva os itens seguintes por processos analíticos.

1.1. Defina por uma equação o plano que contém a face $[DEFG]$.

Apresente a equação na forma $ax+by+cz+d=0$, com $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

1.2. Sejam $P(2,-2,2)$ um ponto e θ a amplitude do ângulo OAP.

Determine o valor de $\cos(2\theta)$.

Paulo Conde

2. A soma de todos os elementos de duas linhas completas do Triângulo de Pascal é 2080.
De entre os elementos dessas duas linhas, qual é o que tem maior valor?

(A) 210 **(B)** 462 **(C)** 792 **(D)** 924

João Ferreira

3. Relativamente aos funcionários de uma empresa, sabe-se que:

- 20% são homens;
- 60% das mulheres não são licenciadas.

Para representarem os trabalhadores numa reunião da direção, o diretor de recursos humanos da empresa selecionou, aleatoriamente, dois funcionários da empresa.

Sabendo que a probabilidade de esses dois funcionários serem mulheres licenciadas é de $\frac{92}{925}$, determine quantas mulheres licenciadas trabalham na empresa.

José Nuno Cunha

4. Seja E o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos ($A\subset E$ e $B\subset E$) tais que $P(\overline{A})=0{,}6$ e $P(B)=0{,}8$.

O valor de $P(A|B)$ pertence necessariamente a um dos seguintes intervalos. Qual?

(A) $\left[\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right]$ **(B)** $\left[\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right]$ **(C)** $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$ **(D)** $\left[\frac{1}{2},1\right]$

Roberto Oliveira

5. Na figura 2 está representada parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, juntamente com uma das suas assíntotas, paralela à bissetriz dos quadrantes pares.

Indique o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{f(x)}$.

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** $+\infty$ **(D)** $-\infty$

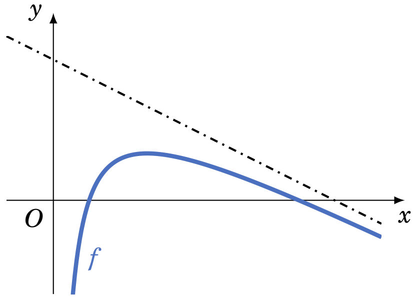


Figura 2

Marisa Cardoso

6. Seja (u_n) uma progressão aritmética tal que $\ln 2$ e $\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$ são dois termos consecutivos de (u_n).

Mostre que a sucessão (v_n), definida por $v_n = 3e^{-2u_n}$ é uma progressão geométrica, indicando a sua razão.

Manuel Gonçalves

7. Considera as sucessões (u_n) e (v_n) definidas por:

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2}+3 & \text{se } n<12 \\[2mm] \dfrac{5-3n}{n+1} & \text{se } n \geq 12 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad v_n : \begin{cases} v_1 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{-2v_n}{(-1)^n \times 3} \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

Qual das seguintes afirmações é **falsa**?

(A) ambas as sucessões são limitadas.

(B) ambas as sucessões são convergentes.

(C) (u_n) é limitada mas não monótona.

(D) (v_n) é limitada e monótona.

Tozé Oliveira

8. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números dos complexo, considere

$$z = \frac{-2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \left(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\right)i}{\cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha}, \text{ com } \alpha \in \left]0,\pi\right[.$$

Determine os valores de α de modo que o afixo de z pertença à bissetriz dos quadrantes pares.

Carla Pacheco

9. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o conjunto A, definido por:

$$A = \left\{z \in \mathbb{C} : \left(\operatorname{Im}(z) \geq 0 \vee \operatorname{Re}(z) \leq 0\right) \wedge |z| < \left|1+i\right|\right\}$$

Qual dos números pertence ao conjunto A?

(A) $i^{323} - 2$ **(B)** $i(1+i)$ **(C)** $\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$ **(D)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}}$

Valter Carlos

10. Considere as funções f e g definidas por

$$f(x) = 3\cos^2 x + 4\,\mathrm{sen}\,(2x) \quad \text{e} \quad g(x) = \pi - 4\,\mathrm{sen}\,(2x)$$

10.1. Considera a reta r de equação $x = k$, com $k \in [0,5]$.
Sejam A e B os pontos de interseção da reta r com os gráficos de f e de g, respetivamente.
Seja d a função que a cada valor k faz corresponder o valor de $\overline{AB}$.
O valor de k, aproximado às centésimas, para o qual a função d atinge o máximo absoluto é:

(A) 0,69 **(B)** 2,26 **(C)** 3,83 **(D)** 9,78

10.2. Considere a função f definida em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Seja P um ponto do gráfico de f e seja t a reta tangente ao gráfico de f no ponto P.
Sabe-se que a reta t é paralela à reta de equação $2y+3x+6=0$ e que o valor da sua ordenada na origem é b.

Determine, **recorrendo às capacidades gráficas da calculadora**, o valor de b, arredondado às décimas, sabendo-se que este valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.
Na resposta:

- apresente uma equação que permita determina a abcissa do ponto P;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculado que permite(m) resolver a equação e apresenta a abcissa do ponto P arredondada às centésimas;
- determine, arredondada às centésimas, a ordenada do ponto P;
- apresente o valor de b, arredondado às décimas.

Luís Malheiro

11. Num referencial o.n. xOy, considere a reta r tangente à circunferência definida por $x^2+y^2-10x=0$ num ponto de abcissa 8 e de ordenada positiva.

Qual a equação reduzida da reta r?

(A) $y = -\frac{3}{4}x + 11$ **(B)** $y = \frac{3}{4}x - 10$ **(C)** $y = -\frac{3}{4}x + 10$ **(D)** $y = \frac{3}{4}x - 11$

Lara Reis

12. Na figura 3, está representada, em referencial o.n. xOy, uma circunferência de centro no ponto O e raio 2.
Sabe-se que:

- os pontos A, B e C pertencem à circunferência;
- os pontos O, B e E pertencem à reta r;
- os pontos A, D e E pertencem à reta t;
- a reta t é vertical e tangente à circunferência no ponto $A(2,0)$;
- o ponto C é simétrico do ponto B em relação ao eixo Ox;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB;
- $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$;

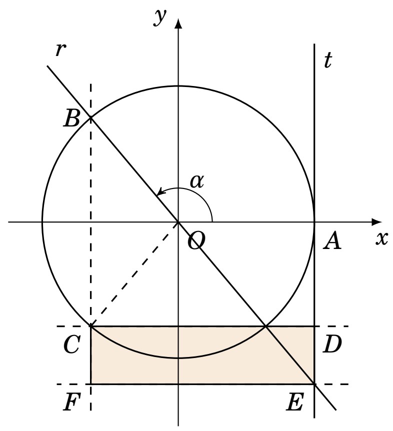


Figura 3

Mostra que a área do retângulo $[CDEF]$ pode ser dada, em função de α, pela seguinte expressão:

$$f(\alpha) = -2\,\mathrm{sen}\,(2\alpha)\,\mathrm{tg}^2\,\alpha$$

José Carlos Pereira

13. Considere a função g, contínua em $]0,+\infty[$, definida por:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-kx+k}+x-2}{x^2-x} & \text{se } 0<x<1\\[2ex] \dfrac{x^2\ln x-2}{x} & \text{se } x\geq 1\end{cases}$$

13.1. Estude, no intervalo $]1,+\infty[$, o gráfico da função g quanto ao sentido das concavidades e mostre que tem um ponto de inflexão de coordenadas $\left(2,\ln\left(\dfrac{4}{e}\right)\right)$.

13.2. Qual é o valor de k?

(A) -1 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3

José Carlos Pereira

14. Seja a um número real positivo tal que $\ln a = 3$.

Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da inequação

$$e^{\frac{4}{x-2}-2x}\geq a$$

Carlos Frias

15. Na figura 4 encontram-se parcialmente representados, em referencial o.n. xOy, os gráficos de duas funções f e g, de domínios $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$, respetivamente, definidas por $f(x)=e^x$ e $g(x)=\ln x$ e ainda uma reta t.

Tal como a figura sugere:

- a reta t é tangente ao gráfico de g num ponto de abcissa a, com $a>1$;
- a reta t é também tangente ao gráfico de f num ponto de abcissa negativa.

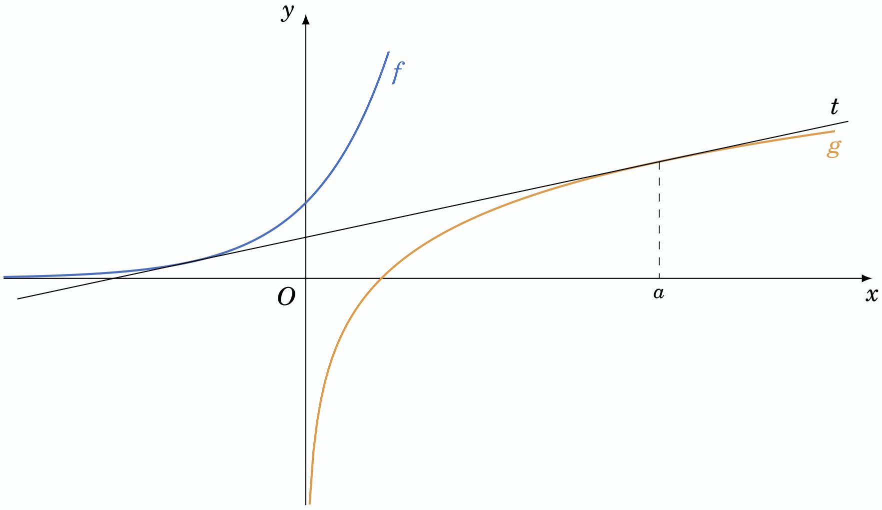


Figura 4

Prove, por processos analíticos, que:

$$\ln a=\frac{a+1}{a-1}$$

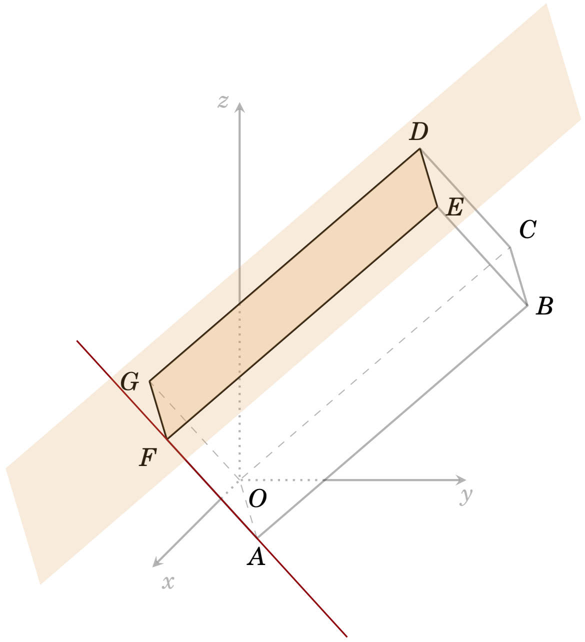
As pontuações obtidas nas respostas a estes 11 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.1.**	**1.2.**	**3.**	**4.**	**6.**	**8.**	**10.1.**	**10.2.**	**13.1.**	**13.2.**	**15.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	12	14	12	12	14	14	12	14	14	144
Destes 7 itens, contribuem para a classificação final da prova os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**	**5.**	**7**	**9.**	**11.**	**12.**	**14.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	4×14 pontos											56
Total												200

Coordenação
José Carlos Pereira

Paginação
Antero Neves

1.

1.1. A face $[DEFG]$ contida no plano pedido e a reta AF estão assinaladas na figura seguinte:



Comecemos por determinar um vetor perpendicular ao plano DEF. Se o vetor $(1,-2,3)$, vetor diretor da reta AF, for perpendicular a FE e a OA, que são dois vetores não colineares, paralelos a DEF então o vetor $(1,-2,3)$ é normal a DEF.

Usaremos o produto escalar entre os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $(1,-2,3)$, da reta, nessa verificação.

Precisamos de determinar as coordenadas do ponto A que, por ser um ponto do plano xOy, sabemos ter cota nula, ou seja $A(x_A,y_A,0)$ e como é ponto da reta AF podemos fazer:

$$(x_A,y_A,0)=(3,4,-3)+k(1,-2,3)$$

de onde sai que:

$$\begin{cases} x_A &= 3+k \\ y_A &= 4-2k \\ 0 &= -3+3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A &= 4 \\ y_A &= 2 \\ 1 &= k \end{cases}$$

Logo $A(4,2,0)$.

Determinamos agora o vetor $\overrightarrow{OA}$:

$$\overrightarrow{OA}=(4,2,0)-(0,0,0)=(4,2,0)$$

e fazemos o produto escalar entre este e o vetor da reta:

$$(4,2,0)\cdot(1,-2,3)=4\times 1+2\times(-2)+0\times 3=0$$

ou seja, $[OAFG]$é um retângulo e podemos usar o vetor diretor da reta para a equação do plano.

Em $ax+by+cz+d=0$ vamos substituir os valores de a, b e c pelas coordenadas do vetor normal ao plano. Temos, então:

$$x-2y+3z+d=0$$

Determinamos d usando as coordenadas de um ponto do plano para substituirmos x, y e z.
Vamos determinar as coordenadas de F que, para além de estar no plano DEF, pertence também ao plano xOz, ou seja, ao plano de equação $y=0$ e, por isso, podemos escrever que $F(x_F,0,z_F)$. Como F também faz parte da reta AF, tem-se

$$(x_F,0,z_F)=(3,4,-3)+k(1,-2,3)$$

De onde sai que

$$\begin{cases} x_F &= 3+k \\ 0 &= 4-2k \\ z_F &= -3+3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F &= 3+k \\ k &= 2 \\ z_F &= -3+3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F &= 5 \\ k &= 2 \\ z_F &= 3 \end{cases}$$

Logo $F(5,0,3)$.

Como dissemos anteriormente, vamos substituir estas coordenadas na equação do plano:

$$5-2\times 0+3\times 3+d=0 \Leftrightarrow d=-14$$

Uma equação do plano que contém a face $[DEFG]$ pode ser:

$$x-2y+3z-14=0$$

1.2. Pedem-nos para determinar o valor de $\cos(2\theta)$. Ora:

$$\cos(2\theta)=\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta$$

Portanto, se descobrirmos o valor de $\cos\theta$ e de $\operatorname{sen}\theta$, conseguiremos encontrar o valor de $\cos(2\theta)$.
Temos que $A(4,2,0)$, $P(2,-2,2)$ e, obviamente, $O(0,0,0)$.
Daqui podemos determinar os vetores

$$\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{OA}=(-4,-2,0)$$

e

$$\overrightarrow{AP}=(2,-2,2)-(4,2,0)=(-2,-4,2)$$

Fazemos também as normas de cada um destes vetores e o produto escalar entre eles:

$$\|\overrightarrow{AO}\|=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2+0^2}=\sqrt{20}$$

$$\|\overrightarrow{AP}\|=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+(2)^2}=\sqrt{24}$$

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}=(-4,-2,0)\cdot(-2,-4,2)=16$$

Com isto, podemos usar a fórmula:

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}=\|\overrightarrow{AO}\|\times\|\overrightarrow{AP}\|\times\cos\theta$$

para determinarmos $\cos\theta$.

$$16=\sqrt{20}\times\sqrt{24}\times\cos\theta\Leftrightarrow\cos\theta=\frac{16}{\sqrt{20}\sqrt{24}}=\frac{2\sqrt{30}}{15}$$

Agora, pela fórmula fundamental da trigonometria:

$$\operatorname{sen}^2\theta+\left(\frac{2\sqrt{30}}{15}\right)^2=1\Leftrightarrow\operatorname{sen}^2\theta=\frac{7}{15}$$

E, assim:

$$\cos(2\theta)=\left(\frac{2\sqrt{30}}{15}\right)^2-\frac{7}{15}=\frac{1}{15}$$

Podíamos ainda resolver este exercício recorrendo à Lei dos cossenos para calcular o valor de $\cos\theta$.
Para isso precisamos de determinar $\overrightarrow{OP}$:

$$\overrightarrow{OP}=P-O=(2,-2,2)-(0,0,0)=(2,-2,2)$$

E ainda a sua norma:

$$\|\overrightarrow{OP}\|=\sqrt{2^2+(-2)^2+2^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

Aplicando a Lei dos cossenos:

$$\|\overrightarrow{OP}\|^2=\|\overrightarrow{AP}\|^2+\|\overrightarrow{AO}\|^2-2\|\overrightarrow{AP}\|\,\|\overrightarrow{AO}\|\cos\theta$$

ou seja:

$$12=24+20-2\sqrt{24}\sqrt{20}\cos\theta\Leftrightarrow\cos\theta=\frac{2\sqrt{30}}{15}$$

A partir daqui a resolução coincide com a anterior.

2. A soma de todos os elementos da linha n do Triângulo de Pascal é igual a 2^n.

Sejam n e $n+p$ as linhas que estão a ser somadas.

- A soma de todos os elementos da linha n é 2^n.
- A soma de todos os elementos da linha $n+p$ é 2^{n+p}.

Então, atendendo ao enunciado:

$$2^n+2^{n+p}=2080$$

$$\Leftrightarrow 2^n+2^n\times2^p=2080$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2^n}_{\text{Par}}\underbrace{\left(1+2^p\right)}_{\text{Ímpar}}=2080$$

Fatorizando 2080 ficamos com:

$$2080=2^5\times5\times13$$

A única forma de se ter $2^n\left(1+2^p\right)=2080$ com n e p naturais é tendo $n=5$ e $1+2^p=65$.

$$1+2^p=65$$

$$\Leftrightarrow 2^p=64$$

$$\Leftrightarrow p=6$$

Assim sendo, somaram-se todos os elementos das linhas 5 e 11. A linha 11 tem 12 elementos. Os maiores são ${}^{11}C_5={}^{11}C_6=462$.

Opção: (B)

Temos então de encontrar m e n tais que:

$$2^m+2^n=2080$$

Por tentativa e erro, com ajuda da calculadora, rapidamente chegamos a

$$2048+32=2080$$

Como $2048=2^{11}$ e $2^5=32$ então estamos perante as linhas 5 e 11.

Sendo 5 e 11 números ímpares, cada uma destas linhas tem um número par de elementos e, por isso, os dois elementos de maior valor serão os dois centrais. Temos então: ${}^5C_2={}^5C_3=10$ e ${}^{11}C_5={}^{11}C_6=462$.

3. Comecemos por definir os acontecimentos:

H: «O funcionário é homem.»
L: «O funcionário é licenciado.»

Pela informação presente no enunciado, sai que:

- $P(H)=0{,}2$
- $P\left(\overline{L}|\overline{H}\right)=0{,}6$

Daqui podemos tirar mais alguns dados:

$$P\left(\overline{H}\right)=1-P(H)=1-0{,}2=0{,}8$$

$$P\left(\overline{L}|\overline{H}\right)=\frac{P\left(\overline{L}\cap\overline{H}\right)}{P\left(\overline{H}\right)}\Leftrightarrow 0{,}6=\frac{P\left(\overline{L}\cap\overline{H}\right)}{0{,}8}$$

$$\Leftrightarrow 0{,}6\times0{,}8=P\left(\overline{L}\cap\overline{H}\right)\Leftrightarrow 0{,}48=P\left(\overline{L}\cap\overline{H}\right)$$

pelo que podemos concluir também que:

$$P\left(L\cap\overline{H}\right)=P\left(\overline{H}\right)-P\left(\overline{L}\cap\overline{H}\right)=0{,}8-0{,}48=0{,}32$$

Considere-se agora que $\underline{n}$ é o número de mulheres licenciadas e $\underline{m}$ o número de trabalhadores que não são mulheres licenciadas. Então:

$$
\begin{aligned}
P\left(L\cap\overline{H}\right)=\frac{n}{n+m} &\Leftrightarrow 0{,}32=\frac{n}{n+m}\\
&\Leftrightarrow 0{,}32\,(n+m)=n\\
&\Leftrightarrow 0{,}32m=n-0{,}32n\\
&\Leftrightarrow m=\frac{0{,}68n}{0{,}32}\\
&\Leftrightarrow m=\frac{17}{8}n
\end{aligned}
$$

Temos agora de considerar o acontecimento:

M: «São escolhidas duas mulheres licenciadas para representar os trabalhadores.»

Temos:

- Casos possíveis: ${}^{n+m}C_2$
- Casos favoráveis: ${}^{n}C_2$

Então:

$$P\,(M)=\frac{{}^{n}C_2}{{}^{n+m}C_2}=\frac{92}{925}$$

$$\frac{{}^{n}C_2}{{}^{n+m}C_2}=\frac{92}{925}$$

Recordar que

$${}^{n}C_p=\frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dfrac{n!}{2!\times(n-2)!}}{\dfrac{(n+m)!}{2!\times(n+m-2)!}}=\frac{92}{925}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dfrac{n\times(n-1)\times\cancel{(n-2)!}}{2!\times\cancel{(n-2)!}}}{\dfrac{(n+m)\times(n+m-1)\times\cancel{(n+m-2)!}}{2!\times\cancel{(n+m-2)!}}}=\frac{92}{925}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dfrac{n\times(n-1)}{\cancel{2!}}}{\dfrac{(n+m)\times(n+m-1)}{\cancel{2!}}}=\frac{92}{925}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n\times(n-1)}{(n+m)\times(n+m-1)}=\frac{92}{925}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{n}{n+m}}_{0{,}32=\frac{8}{25}}\times\frac{n-1}{n+m-1}=\frac{92}{925}$$

Como vimos anteriormente:

$$m=\frac{17}{8}n$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{25}\times\frac{n-1}{n+\frac{17}{8}n-1}=\frac{92}{925}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n-1}{\frac{25}{8}n-1}=\frac{23}{74}$$

$$\Leftrightarrow 74n-74=\frac{575}{8}n-23$$

$$\Leftrightarrow \frac{17}{8}n=51\Leftrightarrow n=24$$

Concluímos assim que na empresa trabalham 24 mulheres licenciadas num universo de 75 trabalhadores.

4. No enunciado é-nos dito que:

$$P\left(\overline{A}\right)=0{,}6 \quad \text{e} \quad P\,(B)=0{,}8$$

de onde podemos tirar que:

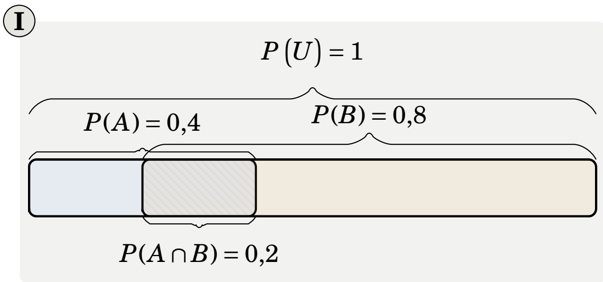
$$P\,(A)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-0{,}6=0{,}4$$

Para avaliarmos os possíveis valores para $P\,(A|B)$ vamos escrever esta probabilidade como

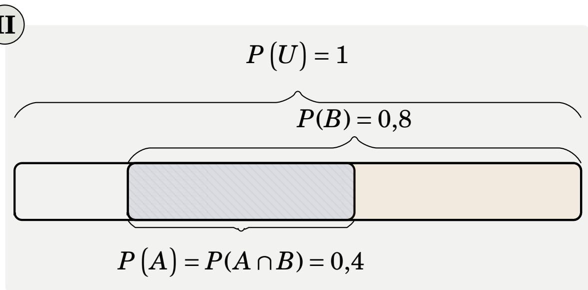
$$\frac{P\,(A\cap B)}{P\,(B)}$$

e começar por enquadrar $P\,(A\cap B)$.

I



II



Na figura **I** está representada a situação em que conseguimos ter a menor interseção possível e na figura **II** temos a situação em que $A\subseteq B$ e, por isso, a maior interseção possível. Assim, ficamos com:

$$0{,}2\le P\,(A\cap B)\le 0{,}4$$

Dividindo por $P\,(B)=0{,}8$

$$\frac{0{,}2}{0{,}8}\le\frac{P\,(A\cap B)}{P\,(B)}\le\frac{0{,}4}{0{,}8}$$

$$\frac{1}{4}\le P\,(A|B)\le\frac{1}{2}$$

Opção: (C)

5. Podemos escrever o limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{f(x)}$$

como

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{f(x)} \times \operatorname{sen} x\right)$$

Da informação que conseguimos retirar do enunciado e observação da figura podemos concluir que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

e, consequentemente,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$$

Sabemos também que $\operatorname{sen} x$ é uma função limitada.

Assim, podemos concluir imediatamente que

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{f(x)} \times \operatorname{sen} x\right) = 0$$

ou seja:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{f(x)} = 0$$

Opção: **(B)**

Para determinar o valor deste limite podíamos começar pelo enquadramento:

$$\begin{aligned} & -1 \le \operatorname{sen} x \le 1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{f(x)} \le \frac{\operatorname{sen} x}{f(x)} \le -\frac{1}{f(x)} \end{aligned}$$

Dividimos tudo por $f(x)$. Atenção que quando $x \to +\infty$ temos $f(x) < 0$

Como

$$\lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{f(x)}\right) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{f(x)}\right) = 0$$

então

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{f(x)} = 0$$

6. Se (u_n) é uma progressão aritmética em que $\ln 2$ e $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ são termos consecutivos então podemos encontrar a razão r de (u_n) fazendo:

$$r = \ln\left(\frac{2}{3}\right) - \ln 2 = \ln 2 - \ln 3 - \ln 2 = -\ln 3$$

Assim

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -\ln 3$$

Para (v_n) ser uma progressão geométrica, é necessário que $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ não dependa de n.

Vamos usar a definição de (v_n) para determinar a expressão de v_{n+1}.

$$v_{n+1} = 3e^{-2u_{n+1}}$$

$$v_n = 3e^{-2u_n}$$

fazemos a divisão entre estas duas expressões e simplificamos.

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{\cancel{3}e^{-2u_{n+1}}}{\cancel{3}e^{-2u_n}} \\ &= e^{-2u_{n+1}-(-2u_n)} \\ &= e^{-2(u_{n+1}-u_n)} \\ &= e^{-2\times(-\ln 3)} \\ &= e^{\ln\left(3^2\right)} \\ &= 3^2 = 9 \longrightarrow \text{Não depende de } n. \end{aligned}$$

Como visto em cima: $u_{n+1} - u_n = -\ln 3$

Então, como $\forall n \in \mathbb{N}$ temos $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 9$ podemos afirmar que (v_n) é uma progressão geométrica com razão igual a 9.

7. Ao observar a forma como as sucessões estão definidas, (v_n) chama a atenção pela presença de $(-1)^n$, que muitas vezes significa que a sucessão não é monótona. Assim, vamos calcular alguns termos desta sucessão e verificar se é esse o caso aqui.

$v_1 = 4$

$-\frac{8}{3} - 4 < 0 \Rightarrow$ decrescimento

$v_2 = -\frac{8}{3}$

$-\frac{16}{9} - \left(-\frac{8}{3}\right) < 0 \Rightarrow$ decrescimento

$v_3 = -\frac{16}{9}$

$-\frac{32}{27} - \left(-\frac{16}{9}\right) > 0 \Rightarrow$ crescimento

$v_4 = -\frac{32}{27}$

Assim, concluímos que (v_n) não é monótona e, por isso, a frase:

(v_n) é limitada e monótona.

é falsa.

Opção: **(D)**

8. Começamos por simplificar a expressão:

$$z = \frac{-\overbrace{2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha}^{\mathrm{sen}(2\alpha)} + \overbrace{\left(\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha\right)}^{\cos(2\alpha)}i}{\cos\alpha - i\,\mathrm{sen}\,\alpha}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-\mathrm{sen}\left(2\alpha\right) + \cos\left(2\alpha\right)i}{\cos\alpha - i\,\mathrm{sen}\,\alpha}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{\left[-\mathrm{sen}\left(2\alpha\right) + \cos\left(2\alpha\right)i\right]\left(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha\right)}{\underbrace{\left(\cos\alpha - i\,\mathrm{sen}\,\alpha\right)\left(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha\right)}_{\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}}$$

$$\Leftrightarrow z = -\mathrm{sen}\left(2\alpha\right)\cos\alpha - i\,\mathrm{sen}\left(2\alpha\right)\mathrm{sen}\,\alpha +$$

$$+ i\cos\left(2\alpha\right)\cos\alpha - \cos\left(2\alpha\right)\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$\Leftrightarrow z = -\overbrace{\left(\mathrm{sen}\left(2\alpha\right)\cos\alpha + \cos\left(2\alpha\right)\mathrm{sen}\,\alpha\right)}^{\mathrm{sen}(2\alpha+\alpha)=\mathrm{sen}(3\alpha)} +$$

$$+ i\underbrace{\left(\cos\left(2\alpha\right)\cos\alpha - \mathrm{sen}\left(2\alpha\right)\mathrm{sen}\,\alpha\right)}_{\cos(2\alpha+\alpha)=\cos(3\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow z = -\mathrm{sen}\left(3\alpha\right) + i\cos\left(3\alpha\right)$$

Como queremos que o afixo de z pertença à bissetriz dos quadrantes pares $\left(y = -x\right)$ então:

$$\cos\left(3\alpha\right) = -\left(-\mathrm{sen}\left(3\alpha\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3\alpha\right) = \mathrm{sen}\left(3\alpha\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3\alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha = \frac{\pi}{2} - 3\alpha + 2k\pi \lor \underbrace{3\alpha = -\left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha\right) + 2k\pi}_{\text{condição impossível}},\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 6\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$$

Vejamos agora, pela substituição de k quais os α que estão no intervalo indicado:

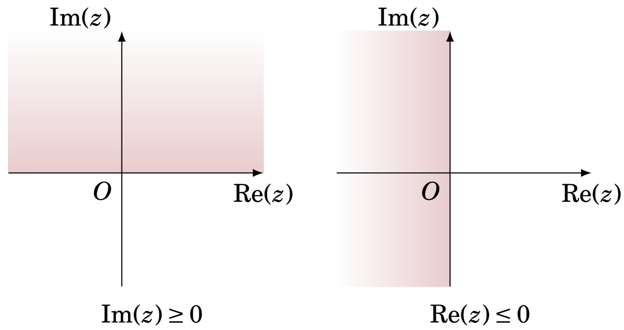
$k = 0 \implies \alpha = \frac{\pi}{2} \in \left]0, \pi\right[$ $\qquad$ $k = 1 \implies \alpha = \frac{5\pi}{12} \in \left]0, \pi\right[$

$k = 2 \implies \alpha = \frac{3\pi}{4} \in \left]0, \pi\right[$ $\qquad$ $k = 3 \implies \alpha = \frac{13\pi}{12} \notin \left]0, \pi\right[$

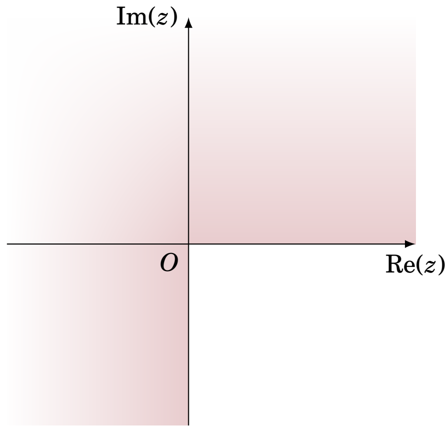
$k = -1 \implies \alpha = -\frac{\pi}{4} \notin \left]0, \pi\right[$

Logo $\alpha \in \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}\right\}$.

9. Vamos começar por fazer a representação, plano de Argand, da região correspondente ao conjunto A.



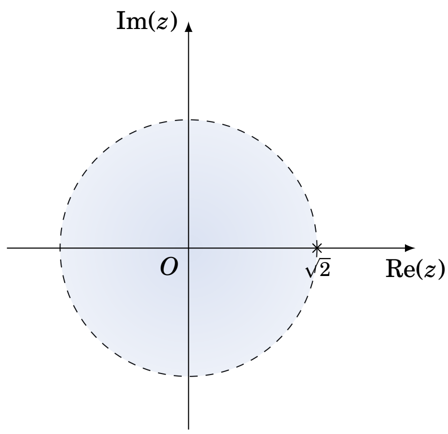
Assim, a condição $\mathrm{Im}(z) \lor \mathrm{Re}(z)$ corresponde a:



Para entendermos a parte $|z| < \left|1+i\right|$ temos de saber a que corresponde $\left|1+i\right|$.

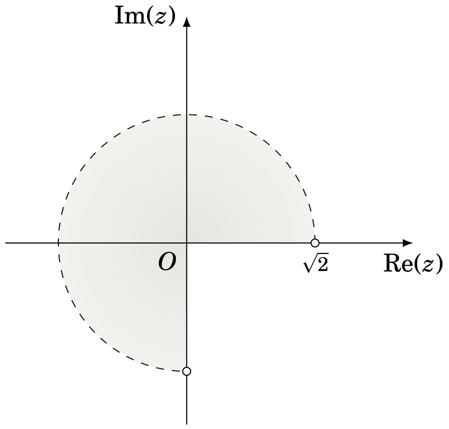
$$\left|1+i\right| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Ficamos com $|z| < \sqrt{2}$, ou seja, queremos considerar todos os pontos que estão a uma distância à origem do referencial inferior a $\sqrt{2}$. Temos, portanto:



Podemos agora representar a região que resulta da conjunção entre as duas condições:

$$\left(\mathrm{Im}(z) \geq 0 \vee \mathrm{Re}(z) \leq 0\right) \wedge |z| < |1+i|$$



Na opção **(A)** temos o número $i^{323} - 2$ que é igual a $-i+1$. No entanto

$$|-i-2| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} > \sqrt{2}$$

logo, este número não pertence a A.

Na opção **(B)** temos o número $i\,(1+i)$ que é igual a $-1+i$. No entanto

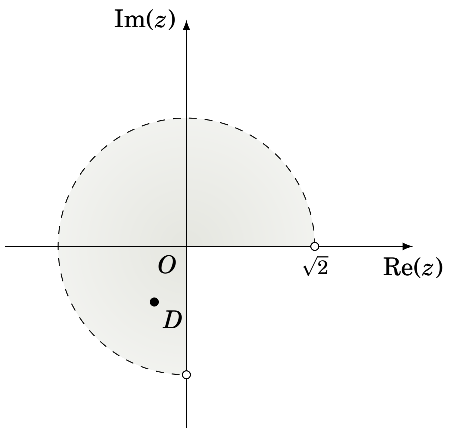
$$|-1+i| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

portanto, este número também não pertence a A

No caso da opção **(C)**, porque o número está na forma trigonométrica, ainda é mais fácil percebermos que não pode pertencer a A pela mesma razão que a opção anterior: o seu módulo não é inferior a $\sqrt{2}$.

Assim, ficamos com a opção **(D)**, cujo módulo é $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e o argumento é $-\dfrac{2\pi}{3}$.

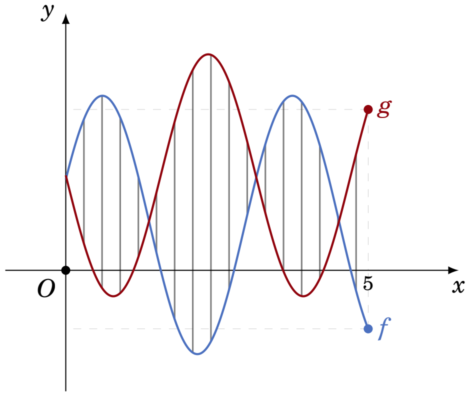
Seja D o afixo do número desta opção.



Opção: **(D)**

10.

10.1. Na figura seguinte apresentam-se parte das representações gráficas das duas funções consideradas no enunciado com $x \in [0,5]$:

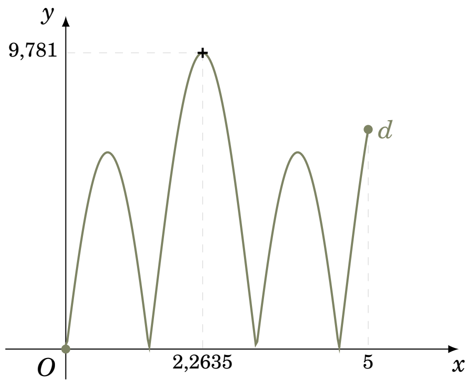


Cada um dos segmentos verticais que se apresentam na figura correspondem a um segmento $[AB]$ com A e B definidos como no enunciado.

Pedem-nos para determinar o máximo absoluto que $\overline{AB}$ toma para valores de $x \in [0,5]$, ou seja, o máximo absoluto da função d que se pode definir do seguinte modo:

$$d(x) = |f(x) - g(x)|, \text{ com } x \in [0,5]$$

Recorremos depois à calculadora para determinarmos o ponto pedido e obtemos:



Assim verificamos que máximo absoluto de d se atinge quando $x \approx 2{,}26$.

Opção: **(B)**

10.2. Seja $P\,(a, f(a))$. Sendo a reta tangente paralela a t, vamos calcular o declive de t - m_t - e calcular $a \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tal que $f'(a) = m_t$.

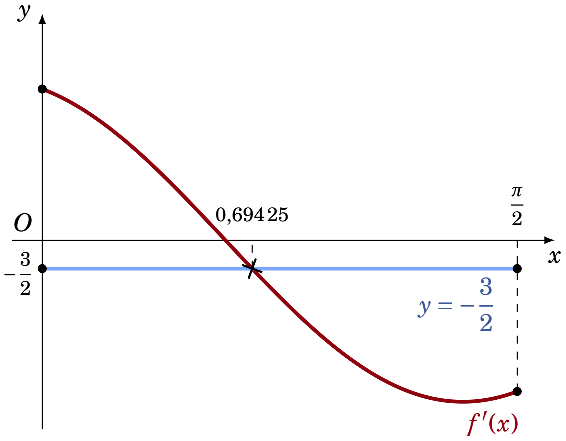
Como

$$2y + 3x + 6 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x - 3$$

concluímos que $m_t = -\dfrac{3}{2}$.

Recorremos agora às capacidades gráficas da calculadora para representar a derivada de f e resolver a equação

$$f'(a) = -\frac{3}{2}$$



Chegamos a $\alpha \approx 0{,}69$.
Então

$$f(\alpha)=f\left(0{,}69\right)\approx 5{,}71$$

Podemos agora substituir estes valores na equação da reta tangente:

$$y=-\frac{3}{2}x+b$$

e determinar o valor de b pedido.

$$5{,}71=-\frac{3}{2}\times 0{,}69+b \Leftrightarrow b=5{,}71+1{,}035 \Leftrightarrow b\approx 6{,}7$$

11. O ponto de tangência é um ponto comum à circunferência e à reta tangente. Quando nos dizem que esse ponto tem abcissa igual a 8 e ordenada positiva então podemos excluir já as opções **(B)** e **(D)** uma vez que nestes casos ao substituirmos x por 8 nas equações das retas obtemos valores negativos para as respetivas ordenadas.

Na opção **(A)**, para $x=8$ temos:

$$y=-\frac{3}{4}\times 8+11=5$$

então o ponto da reta com abcissa 8 é $(8,5)$. Vejamos se este ponto pertence à circunferência de equação $x^2+y^2-10x=0$:

$$8^2+5^2-10\times 8=0 \Leftrightarrow 9=0 \qquad \text{Prop. falsa.}$$

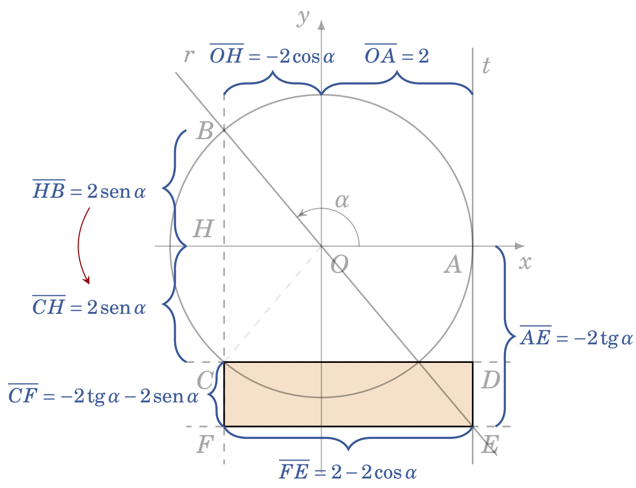
logo não é ponto da circunferência.

Na opção **(C)** temos o ponto $(8,4)$ e se usarmos estes valores para substituir o x e y na equação da circunferência ficamos com:

$$8^2+4^2-10\times 8=0 \Leftrightarrow 0=0 \qquad \text{Prop. verdadeira.}$$

Opção: **(C)**

12. Para determinarmos a área do retângulo $[CDEF]$ vamos primeiro colocar alguns comprimentos na figura por forma a termos alguma orientação:



Podemos fazer:

$$\begin{aligned}
f(\alpha) &= \overline{FE}\times\overline{CF}\\
&=\left(2-2\cos\alpha\right)\times\left(-2\,\text{tg}\,\alpha-2\,\text{sen}\,\alpha\right)\\
&=-4\,\text{tg}\,\alpha-4\,\text{sen}\,\alpha+4\cos\alpha\,\text{tg}\,\alpha+4\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\\
&=-4\,\text{tg}\,\alpha-4\,\text{sen}\,\alpha+4\cancel{\cos\alpha}\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}+4\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\\
&=-4\,\text{tg}\,\alpha-\cancel{4\,\text{sen}\,\alpha}+\cancel{4\,\text{sen}\,\alpha}+4\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\\
&=-4\,\text{tg}\,\alpha+4\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\\
&=4\,\text{tg}\,\alpha\left(-1+\cos^2\alpha\right)\\
&=4\,\text{tg}\,\alpha\left(-\text{sen}^2\,\alpha\right)\\
&=-4\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}\,\text{sen}^2\,\alpha\\
&=-4\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\frac{\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha}\\
&=-2\times 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\left(\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}\right)^2\\
&=-2\,\text{sen}\left(2\alpha\right)\text{tg}^2\,\alpha
\end{aligned}$$

Pela fórmula fundamental da trigonometria

$2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha=\text{sen}\left(2\alpha\right)$

13.

13.1. Em $]1,+\infty[$ a função g está definida como:

$$g(x)=\frac{x^2\ln x-2}{x}$$

e é válida a simplificação

$$g(x)=x\ln x-\frac{2}{x}$$

Para estudarmos o sentido das concavidades do gráfico da função vamos calcular a segunda derivada de g neste intervalo.

$$\begin{aligned}g'(x) &= \left(x\ln x - \frac{2}{x}\right)'\\ &= x'\ln x + x(\ln x)' - \left(\frac{2}{x}\right)'\\ &= \ln x + x\times\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\\ &= \ln x + 1 + \frac{2}{x^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g''(x) &= \left(\ln x + 1 + \frac{2}{x^2}\right)'\\ &= (\ln x)' + 1' + \left(\frac{2}{x^2}\right)'\\ &= \frac{1}{x}_{\times x^2} - \frac{4}{x^3}\\ &= \frac{x^2-4}{x^3}\end{aligned}$$

Calculamos agora os zeros da segunda derivada em busca de candidatos a pontos de inflexão do gráfico de g.

$$\frac{x^2-4}{x^4} = 0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \wedge x^3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \wedge \; x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \pm 2 \quad \wedge \; x \neq 0$$

x	1		2	$+\infty$
x^2-4		$-$	0	$+$
x^3		$+$	8	$+$
$g''(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$			*P.I.*	

Temos concavidade voltada para baixo em $]1,2]$ e voltada para cima em $[2,+\infty[$.

Temos também um ponto de inflexão com abcissa 2 e cuja ordenada é:

$$g(2) = \frac{2^2\ln 2 - 2}{2} = 2\ln 2 - 1 = \ln 2^2 - \ln e = \ln\left(\frac{4}{e}\right)$$

Assim, como queríamos mostrar, temos um ponto de inflexão de coordenadas $\left(2, \ln\left(\frac{4}{e}\right)\right)$.

13.2. Sendo g contínua em $]0,+\infty]$ então é contínua em $x=1$ e, se isso acontece, sabemos que

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x) = g(1)$$

Pela forma como está definida a função

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2\ln x - 2}{x} = -2 = g(1)$$

Assim sendo,

$$\underbrace{\lim_{x\to 1^-} \frac{e^{-kx+x}+x-2}{x^2-x}}_{\frac{0}{0}\text{ (ind.)}} = -2$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}\left[\frac{e^{-kx+k}-1}{x(x-1)} + \frac{x-1}{x(x-1)}\right] = -2$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}\left[-\frac{k}{x}\times\frac{e^{-k(x-1)}-1}{-k(x-1)}\right] + \underbrace{\lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{x-1}}{x\cancel{(x-1)}}}_{=1} = -2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\lim_{x\to 1^-}\left(-\frac{k}{x}\right)}_{=-k} \times \lim_{x\to 1^-}\left[\frac{e^{-k(x-1)}-1}{-k(x-1)}\right] + 1 = -2$$

$$\Leftrightarrow -k \times \lim_{x\to 1^-}\left[\frac{e^{-k(x-1)}-1}{-k(x-1)}\right] = -3$$

Se $x \to 1^-$ então $-k(x-1) \to 0^{\pm}$ (dependendo do sinal de k) Seja $y = -k(x-1)$ então $y \to 0^{\pm}$

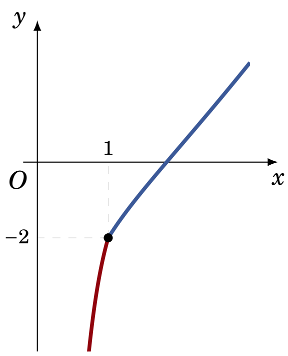
$$\Leftrightarrow -k \underbrace{\lim_{y\to 0^{\pm}} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Limite notável } =1} = -3$$

$$\Leftrightarrow -k \times 1 = -3$$

$$\Leftrightarrow k = 3$$

Opção: (D)

Podíamos também usar a calculadora para representar a função com o k substituído por cada valor presente nas opções. Para $k=3$ ficava:



e, embora sem certezas da continuidade da função, como nos restantes casos essa descontinuidade era evidente, apenas restava esta hipótese como verdadeira.

14. Queremos determinar, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução de:

$$e^{\frac{4}{x-2}-2x} \geq a$$

sabendo que $a \in \mathbb{R}^+$ e que $\ln a = 3$.

Temos então:

$$
\begin{aligned}
& e^{\frac{4}{x-2}-2x} \geq a && D = \mathbb{R} \setminus \{2\} \\
& && \textit{Se } \ln a = 3 \textit{ então } a = e^3. \\
\Leftrightarrow\, & e^{\frac{4}{x-2}-2x} \geq e^3 && \\
& && e > 1 \\
\Leftrightarrow\, & \frac{4}{x-2} - 2x \geq 3 && \\
\Leftrightarrow\, & \frac{4}{x-2} - \frac{2x(x-2)}{x-2} - \frac{3(x-2)}{x-2} \geq 0 && \\
\Leftrightarrow\, & \frac{4-2x^2+4x-3x+6}{x-2} \geq 0 && \\
\Leftrightarrow\, & \frac{-2x^2+x+10}{x-2} \boxed{\geq 0} && \longrightarrow \textit{A considerar para a solução.}
\end{aligned}
$$

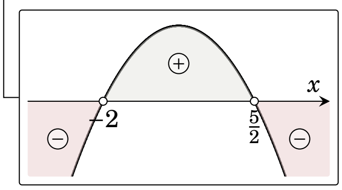
- Zeros do numerador

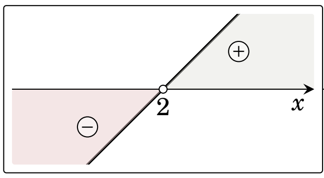
$$
\begin{aligned}
& -2x^2+x+10=0 \\
\Leftrightarrow\, & x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times (-2) \times 10}}{2 \times (-2)} \\
\Leftrightarrow\, & x = \frac{5}{2} \vee x = -2
\end{aligned}
$$

- Zeros do denominador

$$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$

x	$-\infty$	-2		2		$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$-2x^2+x+10$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{-2x^2+x+10}{x-2}$	$+$	0	$-$	$n.d.$	$+$	0	$-$





Então $S = \left]-\infty, -2\right] \cup \left]2, \frac{5}{2}\right]$.

15. Sejam P e Q os pontos onde a reta t é tangente às funções f e g, respetivamente.

Do ponto Q sabemos ter abcissa igual a $a > 0$ e, portanto, $Q(a, \ln a)$.

Digamos que a abcissa do ponto P é b, então $P\left(b, e^b\right)$.

Por outro lado, sendo t tangente a g no ponto de abcissa a, o declive da reta t - m_t - é igual a $g'(a)$. Temos que:

$$g'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

então

$$m_t = g'(a) = \frac{1}{a} \qquad (\star)$$

Pelas mesmas razões, esse declive também é igual a $f'(b)$. Como $f'(x) = (e^x)' = e^x$, ficamos com $f'(b) = e^b$, que conduz à igualdade:

$$e^b = \frac{1}{a}$$

Assim, conseguimos determinar b em função de a:

$$b = \ln\left(\frac{1}{a}\right) = \ln\left(a^{-1}\right) = -\ln(a)$$

Com isto concluímos que $P\left(-\ln a, \frac{1}{a}\right)$.

Usemos os pontos P e Q para determinar uma expressão para o declive de t:

$$m_t = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{\frac{1}{a} - \ln(a)}{-\ln(a) - a} \qquad (\star\star)$$

De $(\star)$ e $(\star\star)$ sai:

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{a} = \frac{\frac{1}{a} - \ln(a)}{-\ln(a) - a} \\
\Leftrightarrow\, & -\ln(a) - a = 1 - a\ln(a) \\
\Leftrightarrow\, & -\ln(a) + a\ln(a) = 1 + a \\
\Leftrightarrow\, & \ln(a)(-1+a) = 1 + a \\
\Leftrightarrow\, & \ln(a) = \frac{a+1}{a-1}
\end{aligned}
$$

como se pedia para mostrar.

Recursos para Matemática

Grupo do Facebook

Prova Modelo de Exame Nacional
Matemática A
Prova 635 | Ensino Secundário | Julho 2021

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
- É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Apresente apenas uma resposta para cada item.
- As cotações dos itens encontram-se no final da prova.

- A prova inclui um formulário.
- Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
- Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

- Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

1.1., 1.2., 3., 4., 6., 8., 10.1., 10.2., 13.1., 13.2. e 15.

Estes itens estão assinalados no enunciado através de uma moldura que os rodeia.

- Dos restantes 7 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r- raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r- raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r- raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad \left(k \in \{0, \ldots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N}\right)$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u' \; (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad \left(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\right)$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad \left(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\right)$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Manuel Gonçalves

1. De duas sucessões (u_n) e (v_n) sabe-se que:

- (u_n) é uma progressão aritmética;
- a soma de todos os termos de (u_n) entre o quarto e o décimo terceiro, incluindo-os, é -55;
- $u_9 = -7$;
- (v_n) é uma progressão geométrica estritamente crescente;
- u_8 e u_{12} são os dois primeiros termos de (v_n).

1.1. Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

(A) (u_n) é uma sucessão monótona crescente.

(B) Se $n > 11$ então a soma dos primeiros n termos consecutivos de (u_n) é inferior a 0.

(C) A soma dos primeiros vinte termos de (u_n) é igual a -230.

(D) $u_{15} = -28$.

1.2. Determina k sabendo que o termo geral de (v_n) é dado pela expressão $v_n = -2^{k-2n}$.

Paulo Naves Pedro

2. Considere um cubo e um octaedro seu dual, representados na figura 1.

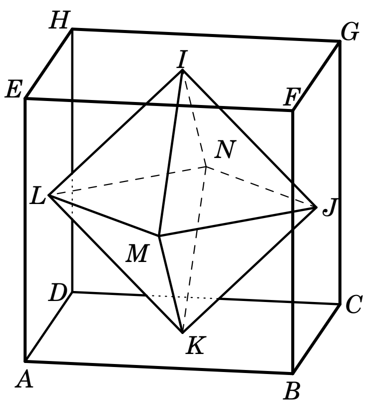


Figura 1

Escolhendo ao acaso um conjunto de três vértices do cubo e um conjunto de três vértices do octaedro, qual é a probabilidade desses dois conjuntos definirem planos paralelos ou coincidentes?

José Carlos Pereira

3. Considera todos os números de seis algarismos distintos que se podem formar com os algarismos de 0 a 9. Quantos destes números têm os algarismos colocados por ordem crescente ou decrescente?

(A) 210 **(B)** 294 **(C)** 420 **(D)** 462

José Carlos Pereira

4. Seja E o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset E$ e $B \subset E)$ tais que:

- $P\left(A \middle| \left(B \cup \overline{A}\right)\right) = \dfrac{1}{3}$
- $P(A) = \dfrac{3}{4}$

Qual é o valor de $P\left(B \middle| A\right)$?

José Carlos Pereira

5. Qual é o valor de $\lim\left(2n\left(\ln\left(n^2+3n+2\right)-\ln\left(n^2+2n\right)\right)\right)$?

Carlos Frias

6. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere a equação $z^2-8z+25=0$.

Na figura 2 encontra-se representado, no plano complexo, um quadrado $[OABC]$.

Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- O vértice A do quadrado é a imagem geométrica de uma das soluções da equação dada;
- O vértice B é a imagem geométrica de um complexo w.

Qual dos seguintes é o valor de w?

(A) $2+6i$ **(B)** $2+7i$ **(C)** $1+7i$ **(D)** $1+6i$

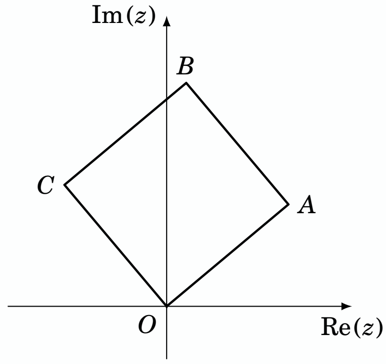


Figura 2

João Ferreira

7. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos. Considere:

$$z_1=\frac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^5}{-8e^{i\pi}i^{2015}} \qquad \text{e} \qquad z_2=4\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+4i\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

No plano complexo, sejam O a origem do referencial e A e B as imagens geométricas de z_1 e z_2, respetivamente.

Sabe-se que o segmento de reta $[AB]$ é um dos lados do polígono cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice n de um certo número complexo.

Qual é o valor de n?

Carlos Frias

8. No referencial o.n. xOy da figura 3 estão representadas uma reta r e uma circunferência.

Tal como a figura sugere:

- a reta r passa pela origem do referencial e tem a inclinação $\frac{\pi}{6}$rad;
- a reta r é tangente à circunferência no ponto A de ordenada $2\sqrt{3}$;
- a circunferência é centrada num ponto C pertencente ao eixo das abcissas.

Qual das equações seguintes define a circunferência?

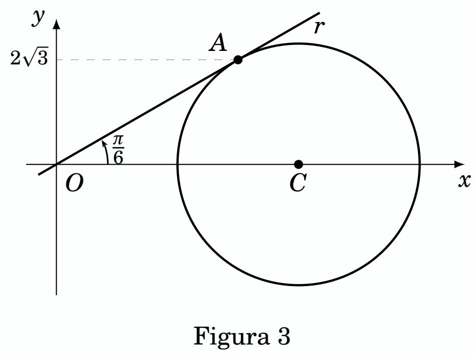


Figura 3

(A) $(x-9)^2+y^2=14$ **(B)** $(x-8)^2+y^2=14$ **(C)** $(x-9)^2+y^2=16$ **(D)** $(x-8)^2+y^2=16$

José Gomes

9. Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da inequação:

$$\ln\left(5e^{2x}-1\right) \leq x + \ln\left(1-e^{x}\right)$$

Carlos Frias

10. Na figura 4 encontra-se representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um triângulo $[ABC]$.
Sabe-se que:

- O é a origem dos referencial;
- o ponto A pertence ao eixo das cotas;
- B e C são os pontos de interseção do plano de equação

$$2x+3y-6=0$$

  com os eixos Oy e Ox, respetivamente.
- o volume da pirâmide $[OABC]$ é igual a 4.

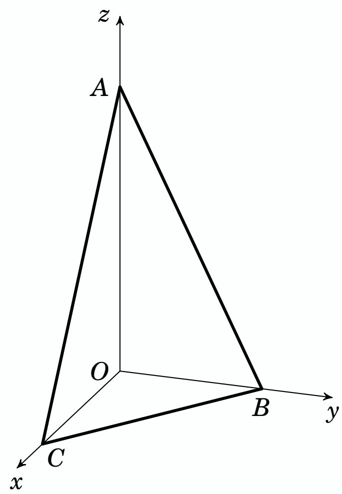


Figura 4

Resolva os itens seguintes por processos analíticos.

10.1. Mostre que o plano ABC é definido por $4x+6y+3z-12=0$.

10.2. Considere a superfície esférica centrada no ponto P de coordenadas $\left(-1,-8,1\right)$ e que é tangente ao plano ABC.
Defina essa superfície esférica por uma condição.

Paulo Conde

11. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases} 2e^{x}\cos(x)+1 & ,x\leq 0 \\ \dfrac{\ln\left(2x+1\right)}{x} & ,x>0 \end{cases}$$

Mostre que o gráfico de f tem duas assíntotas, ambas horizontais.

Valter Carlos

12. Considere as funções f e g, definidas, respetivamente, em $]-3,+\infty[$ e $\mathbb{R}$, por:

$$f(x)=2\ln\left(x+3\right)+x+1 \qquad \text{e} \qquad g(x)=x^{2}-2e^{x+1}$$

Seja a a abcissa do ponto de inflexão do gráfico de g.
Escreva a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f, no ponto de abcissa a.
Apresente a ordenada na origem na forma $\ln k$, com $k \in \mathbb{R}^{+}$

José Carlos Pereira

13. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\dfrac{\cos(x)}{4-\operatorname{sen}(x)}$.

13.1. Seja $\beta\in\mathbb{R}$ tal que $\operatorname{tg}(\beta)=2$. Qual é o valor de $f(2\beta)$?

(A) $-\dfrac{3}{16}$ **(B)** $-\dfrac{3}{8}$ **(C)** $-\dfrac{3}{2}$ **(D)** -3

13.2. O gráfico da função f tem um ponto de abcissa pertencente ao intervalo $[0,\pi]$ tal que quando se adiciona 2 à abcissa a sua ordenada dobra.

Utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora, determine as coordenadas desse ponto.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;
- apresente as coordenadas do ponto, arredondadas às centésimas.

Mário Oliveira

14. Considere a função g definida em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ por $g(x)=\dfrac{\ln\left(x^2\right)}{x}$.

Estude a função g quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

José Gomes

15. Considere f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$ e f' a primeira derivada da função f, contínua em $\mathbb{R}$.

Sejam a e b dois números reais tais que:

- $b>a$
- $g(a)=b$
- $(g\circ g)(a)=a$

Sabe-se que: $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)\times\left[(g\circ g)(x)-g(x)\right]+f(x)>(f\circ g)(x)$.

Mostre que existe pelo menos uma reta tangente ao gráfico da função f com declive igual a $\dfrac{t.m.v._{(f,[a;b])}}{t.m.v._{(g,[a;b])}}$.

As pontuações obtidas nas respostas a estes 11 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.1.**	**1.2.**	**3.**	**4.**	**6.**	**8.**	**10.1.**	**10.2.**	**13.1.**	**13.2.**	**15.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	12	14	12	12	14	14	12	14	14	144
Destes 7 itens, contribuem para a classificação final da prova os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**	**5.**	**7**	**9.**	**11.**	**12.**	**14.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	4 × 14 pontos											56
Total												200

Coordenação
José Carlos Pereira

Paginação
Antero Neves

1.

1.1. Da sucessão (u_n) sabemos que:

- é uma progressão aritmética, logo
$$u_n = u_1 + r(n-1) \quad \text{ou} \quad u_n = u_k + r(n-k)$$
- $u_4 + u_5 + \ldots + u_{13} = S_{13} - S_3 = -55$
- $u_9 = -7$

Vamos tentar encontrar a razão de (u_n).

Com u_9 podemos escrever:

$$u_n = -7 + r(n-9)$$

Do segundo ponto sai:

$$S_{13} - S_3 = -55$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_1 + u_{13}}{2} \times 13 - \frac{u_1 + u_3}{2} \times 3 = -55$$

Conseguimos calcular, em função de r, os termos que surgem na expressão.

$$u_1 = -7 + r(1-9) = -7 - 8r$$
$$u_{13} = -7 + r(13-9) = -7 + 4r$$
$$u_3 = -7 + r(3-9) = -7 - 6r$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overbrace{-7-8r}^{u_1} + \overbrace{(-7)+4r}^{u_{13}}}{2} \times 13 - \frac{\overbrace{-7-8r}^{u_1} + \overbrace{(-7)-6r}^{u_3}}{2} \times 3 = -55$$

$$\Leftrightarrow \frac{-14-4r}{2} \times 13 - \frac{-14-14r}{2} \times 3 = -55$$

$$\Leftrightarrow -91 - 26r - (-21 - 21r) = -55$$

$$\Leftrightarrow -70 - 5r = -55$$

$$\Leftrightarrow -5r = 15$$

$$\Leftrightarrow r = -3$$

Assim, porque $r < 0$, a progressão é monótona decrescente e, por isso, **(A)** é falsa.

$$u_1 = -7 + (-3)(1-9) = 17$$

$$u_{12} = -7 + (-3)(12-9) = -16$$

$$S_{12} = \frac{u_{12} + u_1}{2} \times 12 = \frac{-16+17}{2} \times 12 = 6 > 0$$

Logo, nem sempre temos a soma dos termos inferior a zero quando $n > 11$ e, portanto, **(B)** é falsa.

$$u_1 = -7 + (-3)(1-9) = 17$$

$$u_{20} = -7 + (-3)(20-9) = -40$$

$$S_{20} = \frac{u_{20} + u_1}{2} \times 20 = \frac{-40+17}{2} \times 20 = -230$$

Ou seja, **(C)** é verdadeira.

Confirmemos apenas que **(D)** é falsa:

$$u_{15} = -7 + (-3)(15-9) = -25 \neq -28.$$

Opção: **(C)**

1.2. Sabendo que (v_n) é progressão geométrica estritamente crescente e que u_8 e u_{12} são os seus dois primeiros termos, vamos determiná-los para, posteriormente, conseguirmos calcular a razão de (v_n).

$$u_8 = -7 + (-3)(8-9) = -4$$

$$u_{12} = -7 + (-3)(12-9) = -16$$

Como (v_n) é crescente então $v_1 = -16$ e $v_2 = -4$. Podemos agora calcular a razão de (v_n):

$$r = \frac{v_2}{v_1} = \frac{-4}{-16} = \frac{1}{4}$$

Recordemos agora a expressão do termo geral de uma progressão geométrica:

$$v_n = v_k \times r^{n-k}$$

se $k = 1$ temos

$$v_n = v_1 \times r^{n-1}$$

Como

$$v_1 = -16 = -2^4$$

e

$$r = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$$

ficamos com:

$$v_n = -2^4 \times \left(2^{-2}\right)^{n-1} = -2^4 \times 2^{-2n+2} = -2^{6-2n}$$

Comparando esta expressão com a que é dada no enunciado, $v_n = -2^{k-2n}$, concluímos que $k = 6$.

2. Vamos começar por definir o acontecimento:

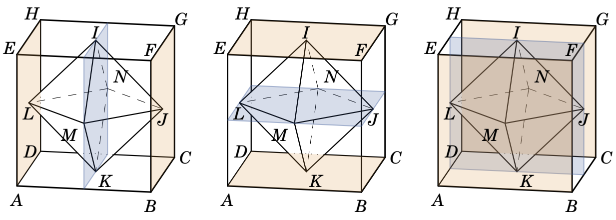
A: «Os dois conjuntos de vértices definem planos paralelos ou coincidentes.»

É importante notar que se escolhermos três vértices do cubo nunca teremos três pontos colineares, ou seja, define-se sempre um plano. Isto é válido também para o octaedro.

Assim, para os casos possíveis, temos:

Dos oito vértices do cubo escolhemos três. ⟷ $^{8}C_3 \times {^{6}C_3}$ ⟷ Dos seis vértices do octaedro escolhemos três.

Já no que a casos favoráveis diz respeito, precisamos considerar algumas situações:



Número de planos definidos no octaedro.

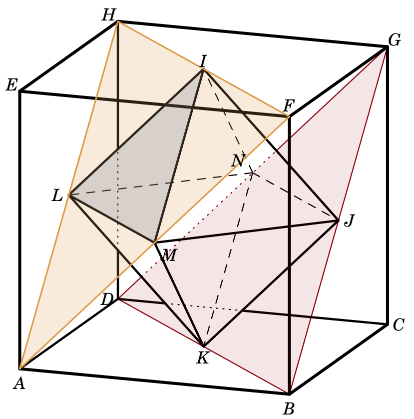
Número de faces do cubo paralelas ao plano definido pelos vértices do octaedro.

$$3 \times {^{4}C_3} \times 2 \times {^{4}C_3}$$

Formas de escolher 3 vértices do octaedro de entre os 4 disponíveis para cada plano.

Formas de escolher 3 vértices de uma face do cubo paralela ao plano definido no octaedro.

Para além destes, temos para cada uma das oito faces do octaedro, uma situação como a que se apresenta de seguida:



em que se verifica a existência de dois planos, um paralelo e outro coincidente com o plano que contém a face de referência. Assim, serão mais 16 casos favoráveis a acrescentar aos anteriores.

Com isto, chegamos a:

$$P\left(A\right) = \frac{3 \times {^{4}C_3} \times 2 \times {^{4}C_3} + 16}{^{8}C_3 \times {^{6}C_3}} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

3. Temos à disposição todos os algarismos, 0 a 9, e queremos formar um número com seis deles. Por exemplo, de:

$\boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{6}\ \boxed{7}\ \boxed{8}\ \boxed{9}$

podemos fazer a escolha

$\boxed{7}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{5}\ \boxed{8}\ \boxed{1}$

esta dá origem a dois números que verificam o exigido, ordenação crescente ou decrescente dos seis dígitos:

$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{5}\ \boxed{7}\ \boxed{8}$

e

$\boxed{8}\ \boxed{7}\ \boxed{5}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{1}$

No entanto, nem todas as escolhas geram dois números com seis algarismos, por exemplo, na escolha:

$\boxed{8}\ \boxed{0}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{1}\ \boxed{5}$

temos

$\boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{5}\ \boxed{8}$

e

$\boxed{8}\ \boxed{5}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{0}$

sendo que o primeiro destes não tem seis, mas sim cinco algarismos: 12 358, não sendo, por isso, uma opção válida. Convém aqui realçar que o segundo tem de terminar, forçosamente, com o algarismo 0.

Pelo que vimos, vamos contabilizar os números desta forma:

Quando o zero não é escolhido podemos considerar as duas formas de ordenação.

$$^{9}C_6 \times 2 + {^{9}C_5}$$

Formas de escolher seis algarismos de entre nove porque excluímos a hipótese de 0 fazer parte do grupo de algarismos escolhidos.

Formas de escolher cinco algarismos de entre nove, uma vez que o 0 já foi escolhido e ocupa a posição das unidades.

$$^{9}C_6 \times 2 + {^{9}C_5} = 294$$

Opção: **(B)**

4. Para determinarmos o valor de $P\left(B|A\right)$ podemos começar por escrever esta expressão de outra forma:

$$P\left(B|A\right)=\frac{P\left(B\cap A\right)}{P\left(A\right)}$$

$$=\frac{P\left(A\cap B\right)}{\frac{3}{4}}$$

$A\cap B=B\cap A$. Do enunciado sabemos que $P\left(A\right)=\frac{3}{4}$.

Vamos agora descobrir o valor de $P\left(A\cap B\right)$:

$$P\left(A\middle|\left(B\cup\overline{A}\right)\right)=\frac{1}{3}$$

Aplicação da fórmula: $P\left(A|B\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(B\right)}$

$$\Leftrightarrow\frac{P\left(A\cap\left(B\cup\overline{A}\right)\right)}{P\left(B\cup\overline{A}\right)}=\frac{1}{3}$$

Propriedade distributiva de $\cap$ relativamente a $\cup$.

$$\Leftrightarrow\frac{P\left(\left(A\cap B\right)\cup\overbrace{\left(A\cap\overline{A}\right)}^{\emptyset}\right)}{P\left(B\cup\overline{A}\right)}=\frac{1}{3}$$

$\emptyset$ é elemento neutro de $\cup$.

$$\Leftrightarrow P\left(A\cap B\right)=\frac{1}{3}P\left(B\cup\overline{A}\right)$$

$$\Leftrightarrow P\left(A\cap B\right)=\frac{1}{3}\left[P\left(B\right)+P\left(\overline{A}\right)-P\left(B\cap\overline{A}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow P\left(A\cap B\right)=\frac{1}{3}\left[P\left(B\right)+\left(1-P\left(A\right)\right)-\left(P\left(B\right)-P\left(B\cap A\right)\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow P\left(A\cap B\right)=\frac{1}{3}\left[\cancel{P\left(B\right)}+1-\overbrace{P\left(A\right)}^{\frac{3}{4}}-\cancel{P\left(B\right)}+P\left(B\cap A\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow P\left(A\cap B\right)=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}+P\left(B\cap A\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow P\left(A\cap B\right)=\frac{1}{12}+\frac{1}{3}P\left(B\cap A\right)$$

$$\Leftrightarrow P\left(A\cap B\right)-\frac{1}{3}P\left(B\cap A\right)=\frac{1}{12}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{3}P\left(B\cap A\right)=\frac{1}{12}$$

$$\Leftrightarrow P\left(B\cap A\right)=\frac{1}{8}$$

Voltando ao cálculo inicial:

$$P\left(B|A\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{\frac{3}{4}}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{6}$$

5. Começamos por fazer a substituição de n por $+\infty$ e obtemos:

$$\lim\left(2n\left(\ln\left(n^2+3n+2\right)-\ln\left(n^2+2n\right)\right)\right)$$

$$=+\infty\left(\ln(+\infty)-\ln(+\infty)\right)$$

$$=+\infty(\overbrace{+\infty-\infty}^{\text{Ind.}})$$

Chegados a uma indeterminação, vamos tentar resolver o limite doutra forma, começando por aplicar a propriedade

$$\log_c a-\log_c b=\log_c\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$=\lim\left[2n\left(\ln\frac{n^2+3n+2}{n^2+2n}\right)\right]$$

$b\log_c a=\log_c a^b$

$$=\lim\left[\ln\left(\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+2n}\right)^{2n}\right)\right]$$

$$=\ln\left[\lim\left(\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+2n}\right)^{2n}\right)\right]$$

Como:

$$\begin{array}{r|l} n^2+3n+2 & n^2+2n \\ \cline{2-2} -n^2-2n & 1 \\ \hline n+2 & \end{array}$$

então

$$\frac{n^2+3n+2}{n^2+2n}=1+\frac{n+2}{n^2+2n}=1+\frac{\cancel{n+2}}{n\cancel{(n+2)}}=1+\frac{1}{n}$$

$$=\ln\left[\left(\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2\right]$$

$$=\ln e^2=2$$

Limite notável: $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

6. Visto que A é a imagem geométrica de uma solução da equação dada, vamos começar por resolver essa equação.

$$z^2-8z+25=0\Leftrightarrow z=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\times1\times25}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{8\pm\sqrt{-36}}{2}$$

$-36=36\times i^2=(6i)^2$

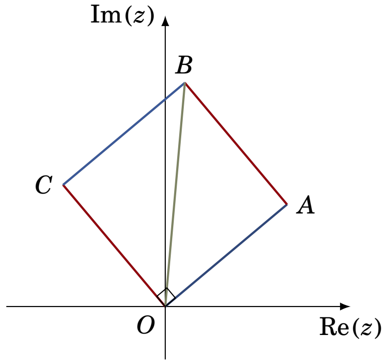
$$\Leftrightarrow z=\frac{8\pm6i}{2}$$

$$\Leftrightarrow z=4\pm3i$$

$$\Rightarrow z_A=4+3i$$

Como A está no primeiro quadrante, então o número do qual é afixo tem parte real e parte imaginária positiva.

Atentando na figura:



verificamos que podemos calcular o número do qual C é imagem geométrica multiplicando z_A por i uma vez que isso resulta numa rotação de centro em O e ângulo $+90°$.

$$z_C = z_A \times i = (4+3i) \times i = -3+4i$$

outra coisa que se observa é que $z_B = z_A + z_C$, então:

$$z_B = 4+3i+(-3+4i) = 1+7i$$

Opção: (C)

Outra forma de resolver esta questão passa por determinar $|z_A|$, depois de resolver a equação, de modo calcular o comprimento do lado do quadrado $[OABC]$:

$$|z_A| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$$

logo, $\overline{OB} = 5\sqrt{2} = z_B$

Determinando o módulo de cada opção presente (usando a calculadora por uma questão de rapidez), verificamos que isso só acontece na opção **(C)**.

7. Para resolver este problema é vantajoso escrever os dois números - z_1 e z_2 - de uma forma simplificada.

Para z_1:

Seja $w = 1+\sqrt{3}i$.

$$|w| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

Seja θ um argumento de w. Como $\mathrm{Re}(w) = 1 > 0$ e $\mathrm{Im}(w) = \sqrt{3} > 0$ então $\theta \in$ 1.º quadrante.

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} \quad \wedge \theta \in \text{ 1.º Q}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{tg}\,\theta = \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3} \quad \wedge \theta \in \text{ 1.º Q}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge \theta \in \text{ 1.º Q}$$

Vamos considerar $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

Ficamos com:

$$w = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

Quanto ao denominador de z_1, fazemos:

$$-8e^{i\pi}i^{2015}$$

$$= -8e^{i\pi} \times (-i)$$

$i^{2015} = i^{2012} \times i^3$, 2012 é divisível por 4, logo $i^{2012} = 1$ e $i^3 = -i$

$$= 8e^{i\pi} \times i$$

$$= 8e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$$

a multiplicação por i corresponde a um aumento de $\frac{\pi}{2}$ no argumento.

Ficamos, então, com:

$$z_1 = \frac{\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^5}{8e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}} = \frac{32e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)}}{8e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}} = 4e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

Para z_2:

$$4\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) + 4i\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

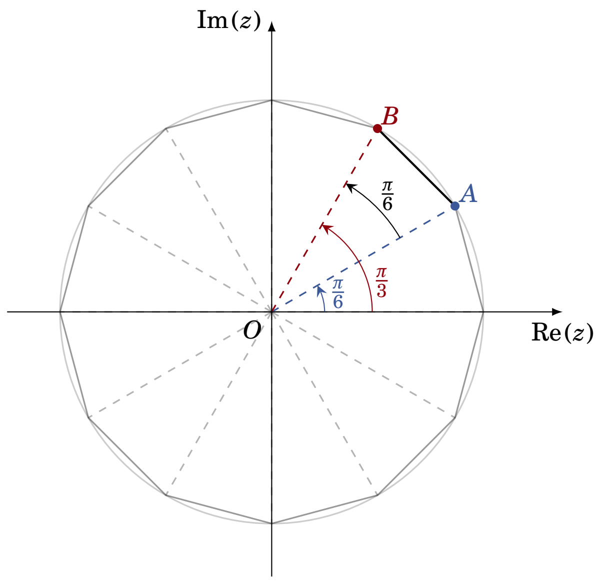
$$= 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha = e^{i\alpha}$

$$= 4e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

Sendo o segmento de reta $[AB]$ um dos lados do polígono cujos vértices são os afixos das raízes de índice n de um número complexo, então A e B são vértices consecutivos e por isso a diferença entre os seus argumentos permite-nos saber em quantas partes dividimos 2π e, em consequência disso, saber o número de vértices e o valor de n.

Vejamos a seguinte ilustração da situação presente:



Temos $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$ então $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = \dfrac{12\pi}{\pi} = 12.$

Logo, $n = 12$.

8. Como r passa pela origem sabemos que a sua equação é do tipo $y = mx$. A inclinação α de r é dada, logo podemos calcular o valor do declive:

$$m = \operatorname{tg} \alpha$$

Assim, como $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ficamos com:

$$r : y = \frac{\sqrt{3}}{3} x$$

O ponto A que pertence a r tem ordenada $2\sqrt{3}$ então facilmente determinamos a sua abcissa:

$$2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} x \Leftrightarrow x = 6$$

Tendo em conta que r é uma reta tangente à circunferência no ponto A, sabemos que é perpendicular a AC e o seu declive é

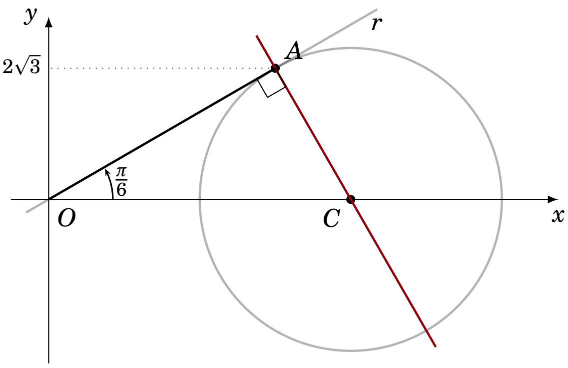
$$m_{AC} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\sqrt{3}$$

Com este declive e o ponto A determinamos a abcissa de C que tem ordenada nula:

$$0 - 2\sqrt{3} = -\sqrt{3}(x-6) \Leftrightarrow -8\sqrt{3} = -\sqrt{3}x \Leftrightarrow x = 8$$

Ou seja, $C(8,0)$.

Nas opções já nos apresentam equações de circunferências na forma $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$ então podemos **descartar (A)** e **(C)** pois o centro tem outras coordenadas.



Para determinarmos o comprimento do raio $[AC]$ fazemos:

$$\overline{AC} = \sqrt{(8-6)^2 + \left(0 - 2\sqrt{3}\right)^2}$$

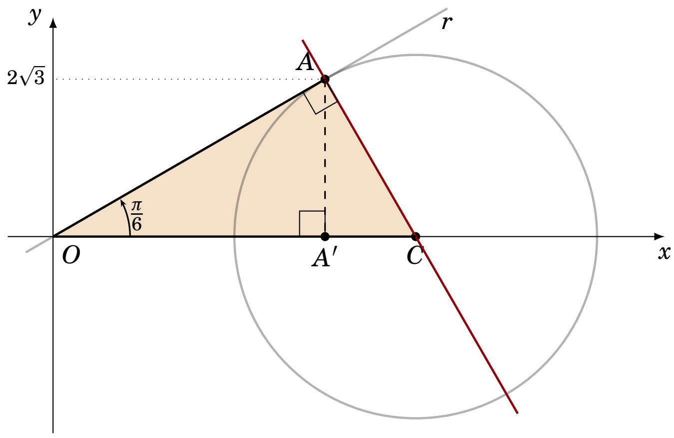
$$\Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{4 + 12} = 4$$

Ou seja, a equação da circunferência é:

$$(x-8)^2 + y^2 = 4^2$$

Opção: **(D)**

Podemos abordar o problema de outra forma, tendo em consideração alguns pontos mencionados na resolução anterior, podemos construir a seguinte imagem:



$[AOA']$ é um triângulo retângulo então podemos determinar o comprimento $\overline{OA}$ fazendo:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{\overline{OA}}$$

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{\overline{OA}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{OA} = 4\sqrt{3}$$

Sabemos que $[AOC]$ também é um triângulo retângulo:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\overline{AC}}{4\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\overline{AC}}{4\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\cancel{\sqrt{3}\sqrt{3}}}{\cancel{3}} = \overline{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = 4$$

Podemos **descartar** as opções **(A)** e **(B)**.

Por outro lado,

$$\overline{OC}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AC}^2$$

$$\overline{OC} = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 + 4^2}, \quad \overline{OC} \geq 0$$

$$\overline{OC} = 8$$

Então o centro da circunferência é $C(8,0)$.

Assim, a circunferência tem equação $(x-8)^2 + y^2 = 4^2$

9. Para resolver a inequação, vamos começar por determinar o domínio - D - onde a desigualdade é válida.

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} : 5e^{2x} - 1 > 0 \wedge 1 - e^x > 0\right\}$$

$$5e^{2x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > \frac{1}{5}$$

$\ln x$ é uma função crescente

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{2x}\right) > \ln\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x > \ln\left(5^{-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x > -\ln 5$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{\ln 5}{2}$$

$$1 - e^x > 0 \Leftrightarrow -e^x > -1$$

$$\Leftrightarrow e^x < 1$$

$\ln x$ é uma função crescente

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^x\right) < \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x < 0$$

$$D = \left]-\frac{\ln 5}{2}, 0\right[$$

Em D temos:

$$\ln\left(5e^{2x} - 1\right) \leq x + \ln\left(1 - e^x\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(5e^{2x} - 1\right) \leq \ln\left(e^x\right) + \ln\left(1 - e^x\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(5e^{2x} - 1\right) \leq \ln\left(e^x\left(1 - e^x\right)\right)$$

$\ln x$ é uma função crescente

$$\Leftrightarrow 5e^{2x} - 1 \leq e^x\left(1 - e^x\right)$$

$$\Leftrightarrow 5e^{2x} - 1 \leq e^x - e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 6e^{2x} - e^x - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 6\left(e^x\right)^2 - e^x - 1 \leq 0$$

Seja $e^x = y$

$$\Leftrightarrow 6y^2 - y - 1 \leq 0$$

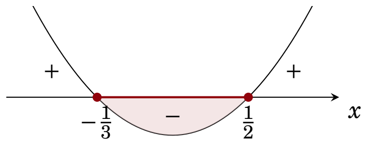
Vamos calcular os zeros de $6y^2 - y - 1$:

$$6y^2 - y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 6 \times (-1)}}{2 \times 6}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \vee y = -\frac{1}{3}$$

Fazemos agora o esboço:



então

$$y \geq -\frac{1}{3} \wedge y \leq \frac{1}{2}$$

$y = e^x$

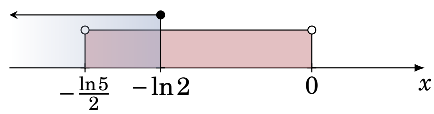
$$\Leftrightarrow \underbrace{e^x \geq -\frac{1}{3}}_{\text{Cond. Universal}} \wedge e^x \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^x \leq \frac{1}{2}$$

$\ln x$ é uma função crescente.

$$\Leftrightarrow \ln e^x \leq \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x \leq -\ln 2$$



$$S = \left]-\frac{\ln 5}{2}, \ln 2\right]$$

10.

10.1. Se B pertence a Oy então $B\left(0, y_B, 0\right)$. Mas B também pertence ao plano $2x + 3y - 6 = 0$ então:

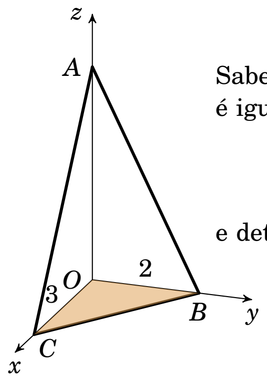
$$2 \times 0 + 3 \times y_B - 6 = 0 \Leftrightarrow y_B = 2$$

O ponto C pertence a O_x então $C\left(x_C, 0, 0\right)$, tal como B também pertence ao plano $2x + 3y - 6 = 0$, aplicando um raciocínio análogo, chegamos a $x_C = 3$.

Temos agora que:

$$B(0,2,0) \qquad \text{e} \qquad C(3,0,0)$$

Podemos agora determinar a área da base da pirâmide $[OABC]$



$$A_{[OBC]} = \frac{2 \times 3}{2} = 3$$

Sabe-se que o volume da pirâmide é igual a 4. Aplicamos a fórmula

$$V_{[OABC]} = \frac{1}{3} \times A_{[OBC]} \times \overline{OA}$$

e determinarmos a sua altura:

$$4 = \frac{1}{3} \times 3 \times \overline{OA} \Leftrightarrow 4 = \overline{OA}$$

Assim, concluímos que $A(0,0,4)$.

Os pontos A, B e C não são colineares, logo, definem um plano. Para mostrarmos que o plano ABC pode ser definido pela expressão:

$$4x+6y+3z-12=0$$

vamos substituir x, y e z da expressão pelas coordenadas de cada um dos três pontos e ver se a proposição resultante é verdadeira.

Para A:

$$4\times 0+6\times 0+3\times 4-12=0$$
$$12-12=0$$
$$0=0 \text{ (Prop. verdadeira)}$$

então A pertence a $4x+6y+3z-12=0$.

Para B:

$$4\times 0+6\times 2+3\times 0-12=0$$
$$12-12=0$$
$$0=0 \text{ (Prop. verdadeira)}$$

então B pertence a $4x+6y+3z-12=0$.

Para C:

$$4\times 3+6\times 0+3\times 0-12=0$$
$$12-12=0$$
$$0=0 \text{ (Prop. verdadeira)}$$

então C pertence a $4x+6y+3z-12=0$.

Logo, o plano ABC é definido por $4x+6y+3z-12=0$.

10.2. Uma condição que define a superfície esférica pode ser do tipo:

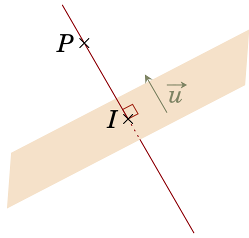
$$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2=r^2$$

Como o centro é dado, então podemos escrever já:

$$\left(x-(-1)\right)^2+\left(y-(-8)\right)^2+(z-1)^2=r^2$$

Para encontrarmos o raio precisamos de calcular qual a distância de P ao plano ABC que, por 10.1, sabemos ter equação

$$4x+6y+3z-12=0$$



Vamos definir a equação de uma reta perpendicular ao plano que passe em P e determinar a interseção dela com o plano. Sendo perpendicular ao plano, podemos usar o vetor do plano como vetor diretor da reta, ficamos com:

$$(x,y,z)=(-1,-8,1)+k(4,6,3),\, k\in\mathbb{R}$$

De onde podemos tirar o ponto genérico

$$(-1+4k,-8+6k,1+3k) \qquad (\star)$$

Substituindo estas expressões na equação do plano, vamos determinar qual o valor de k que permite encontrar o ponto que pertence à reta e ao plano.

$$4(-1+4k)+6(-8+6k)+3(1+3k)-12=0$$
$$\Leftrightarrow -4+16k-48+36k+3+9k-12=0$$
$$\Leftrightarrow -61+61k=0$$
$$\Leftrightarrow k=1$$

Seja I o ponto que pertence à reta e ao plano, então, usando $k=1$ em $(\star)$:

$$I(3,-2,4)$$

E o raio da superfície esférica é:

$$\overline{PI}=\sqrt{(-1-3)^2+\left(-8-(-2)\right)+(1-4)^2}=\sqrt{61}$$

A condição para a superfície esférica indicada é:

$$(x+1)^2+(y+8)^2+(z-1)^2=61$$

11. É-nos pedido para mostrar que o gráfico de f tem duas assíntotas e que ambas são horizontais. Comecemos por testar a existência de assíntotas verticais que, a haver, pelo que nos é dito sobre o domínio da função - $\mathbb{R}$ - e pela forma como esta está definida, será $x=0$ e apenas para $x\to 0^+$.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(2x+1)}{x}=\frac{0}{0}\text{ (ind.)}$$

Seja $y=\ln(2x+1)\Leftrightarrow e^y=2x+1\Leftrightarrow \frac{e^y-1}{2}=x$.
$x\to 0^+ \Rightarrow \ln(2x+1)\to 0^+$ ou seja $y\to 0^+$.

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{y}{\frac{e^y-1}{2}}=2\lim_{y\to 0^+}\frac{y}{e^y-1}=2\Bigg[\underbrace{\lim_{y\to 0^+}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{Lim. notável }=1}\Bigg]^{-1}=2\in\mathbb{R}$$

Logo $x=0$ não é uma assintota vertical.

No caso das assíntotas não verticais, temos um máximo de duas.

Vamos calcular assíntotas horizontais, uma vez que são essas que nos interessam e, se forem duas, fica demonstrado o que se pretende.

Para $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x+1)}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ (ind.)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x+1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\ln(2x+1)}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x+1)}{2x+1}}{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2x+1}}$$

Seja $y = 2x+1$. Como $x \to +\infty$ então $2x+1 \to +\infty$ Portanto, $y \to +\infty$.

$$= \frac{\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{\ln(y)}{y}}{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2x+1}}$$

$$\underbrace{\lim_{y\to+\infty} \frac{\ln(y)}{y}}_{\text{Lim. Notável } = 0}$$

$$= \frac{0}{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}}{2\cancel{x}}}$$

$$= \frac{0}{\frac{1}{2}} = 0$$

Assim sendo, $y = 0$ é assintota horizontal ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

Para $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \left(2e^x \cos(x) + 1\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(2e^x \cos x\right) + \underbrace{\lim_{x\to-\infty} 1}_{=1}$$

$$= 2\underbrace{\overbrace{\lim_{x\to-\infty} (e^x)}^{e^{-\infty}=0} \times \lim_{x\to-\infty} \overbrace{\cos x}^{\text{Função limitada}}}_{=0} + 1$$

$$= 1$$

Temos, então, que $y = 1$ é uma assintota horizontal ao gráfico de f quando $x \to -\infty$;

Fica assim mostrado o que se pretendia.

12. Para determinarmos o valor de a precisamos de calcular os pontos de inflexão do gráfico da função g e, para isso, os zeros da segunda derivada desta função.

Primeira derivada de g:

$$g'(x) = \left(x^2 - 2e^{x+1}\right)'$$
$$= \left(x^2\right)' - 2\left(e^{x+1}\right)'$$
$$= 2x - 2(x+1)' e^{x+1}$$
$$= 2x - 2e^{x+1}$$

Segunda derivada de g:

$$g''(x) = \left(2x - 2e^{x+1}\right)'$$
$$= (2x)' - 2\left(e^{x+1}\right)'$$
$$= 2 - 2(x+1)' e^{x+1}$$
$$= 2 - 2e^{x+1}$$

Zeros da segunda derivada de g:

$$2 - 2e^{x+1} = 0 \Leftrightarrow -2e^{x+1} = -2 \Leftrightarrow e^{x+1} = 1$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{x+1}\right) = \ln 1 \Leftrightarrow x+1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -1$$

Do enunciado depreende-se que o gráfico de g tem um e só um ponto de inflexão então, porque temos apenas um zero da segunda derivada de g, esse ponto tem abcissa igual ao zero que determinámos, ou seja, $a = -1$.

Para chegarmos à equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1, precisamos do declive - $f'(-1)$ - e de um ponto dessa reta.

Quanto ao declive:

$$f'(x) = \left(2\ln(x+3) + x + 1\right)' = 2\left(\ln(x+3)\right)' + x' + 1'$$

$$= 2\frac{(x+3)'}{x+3} + 1 = 2 \times \frac{1}{x+3} + 1 = \frac{2}{x+3} + 1$$

Então $f'(-1) = 2$.

O ponto a usar será o ponto de tangência que pertence tanto à reta quanto à função: $\left(-1, f(-1)\right)$.

$$f(-1) = 2\ln(-1+3) + (-1) + 1 = 2\ln 2$$

Assim, podemos escrever:

$$y - 2\ln 2 = \underbrace{2}_{f'(-1)} \left(x - (-1)\right)$$

$$y = 2x + 2 + 2\ln 2$$

$$2 + 2\ln 2 = \ln e^2 + \ln 2^2 = \ln\left(e^2 \times 4\right) = \ln\left(4e^2\right)$$

$$y = 2x + \ln\left(4e^2\right)$$

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto indicado é:

$$y = 2x + \ln\left(4e^2\right)$$

13.

13.1. Se $f(x)=\dfrac{\cos(x)}{4-\operatorname{sen}(x)}$ podemos escrever:

$$f(2\beta)=\frac{\cos(2\beta)}{4-\operatorname{sen}(2\beta)}$$

$\cos(2\beta)=\cos^2\beta-\operatorname{sen}^2\beta$
$\operatorname{sen}(2\beta)=2\operatorname{sen}\beta\cos\beta$

$$=\frac{\cos^2\beta-\operatorname{sen}^2\beta}{4-2\operatorname{sen}\beta\cos\beta}$$

Dividindo tudo por $\cos^2\beta$

$$=\frac{1-\operatorname{tg}^2\beta}{\dfrac{4}{\cos^2\beta}-2\operatorname{tg}\beta}$$

$$=\frac{1-\operatorname{tg}^2\beta}{4\dfrac{1}{\cos^2\beta}-2\operatorname{tg}\beta}$$

$1+\operatorname{tg}^2\beta=\dfrac{1}{\cos^2\beta}$

$$=\frac{1-\operatorname{tg}^2\beta}{4\left(1+\operatorname{tg}^2\beta\right)-2\operatorname{tg}\beta}$$

Como $\operatorname{tg}\beta=2$, ficamos com:

$$\frac{1-2^2}{4\left(1+2^2\right)-2\times 2}=-\frac{3}{16}$$

Opção: (A)

13.2. No enunciado podemos ler:

O gráfico da função $\overbrace{f \text{ tem um ponto}}^{(x,f(x))}$ pertencente ao intervalo $[0,\pi]$, tal que quando $\underbrace{\text{se adiciona 2 à sua abcissa}}_{(x+2,f(x+2))}$ $\underbrace{\text{a sua ordenada dobra}}_{(x+2,2f(x))}$.

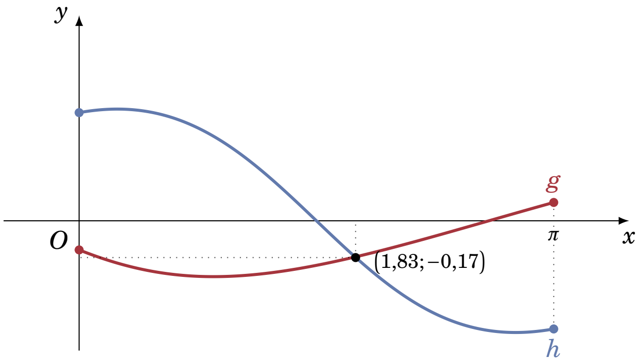
Para resolver o problema precisamos da solução da equação:

$$f(x+2)=2f(x)$$

Vamos considerar:

- $g(x)=f(x+2)=\dfrac{\cos(x+2)}{4-\operatorname{sen}(x+2)}$
- $h(x)=2f(x)=2\times\dfrac{\cos(x)}{4-\operatorname{sen}(x)}$

e fazer a representação gráfica destas duas funções no intervalo considerado e encontrar a interseção.



O ponto pretendido tem coordenadas $\left(1{,}83;f(1{,}83)\right)$, ou seja, $(1{,}83;-0.08)$.

14. Para estudar a monotonia da função vamos analisar o sinal da sua derivada. Começamos por determinar g':

$$g'(x)=\left(\frac{\ln\left(x^2\right)}{x}\right)'=\frac{\left[\ln\left(x^2\right)\right]'\cdot x-\ln\left(x^2\right)\cdot x'}{x^2}$$

$$=\frac{\frac{2x}{x^2}\cdot x-\ln\left(x^2\right)\cdot x'}{x^2}=\frac{2-\ln\left(x^2\right)}{x^2}$$

e agora os seus zeros:

$$\frac{2-\ln\left(x^2\right)}{x^2}=0\Leftrightarrow 2-\ln\left(x^2\right)=0\wedge x^2\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(x^2\right)=2\wedge x\neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2=e^2\wedge x\neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x=e\vee x=-e)\wedge x\neq 0$$

x	$-\infty$	$-e$		0		e	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	Min.	↗		↗	Max.	↘

A função é monótona decrescente em $]-\infty,-e]$ e em $[e,+\infty[$ e é monótona crescente em $[-e,0[$ e em $]0,e]$.

- $g(-e)=\dfrac{\ln\left[(-e)^2\right]}{-e}=-\dfrac{2}{e}$
- $g(e)=\dfrac{\ln e^2}{e}=\dfrac{2}{e}$

Tem um mínimo relativo em $x=-e$ com valor $-\dfrac{2}{e}$ e um máximo relativo em $x=e$ igual a $\dfrac{2}{e}$.

15. Em primeiro lugar, vamos analisar a informação que encontramos no enunciado:

- $b>a\Leftrightarrow a-b<0$;
- $g(a)=b$;
- $(g\circ g)(a)=a\Leftrightarrow g\left(g(a)\right)=a\Leftrightarrow g(b)=a$.

Vejamos agora em que podemos transformar a expressão $\dfrac{t.m.v._{(f,[a;b])}}{t.m.v._{(g,[a;b])}}$.

$$\frac{t.m.v._{(f,[a;b])}}{t.m.v._{(g,[a;b])}}=\frac{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Queremos mostrar que existe uma reta tangente ao gráfico da função f com este declive, ou seja,

$$\exists c\in\mathbb{R}: f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Vamos também escrever a expressão

$$f'(x)\times\left[(g\circ g)(x)-g(x)\right]+f(x)>(f\circ g)(x)$$

de outra forma:

$$f'(x)\left[g\left(g(x)\right)-g(x)\right]+f(x)>f\left(g(x)\right)$$

Para $x=a$:

$$f'(a)\left[\overbrace{g\left(g(a)\right)}^{a}-\overbrace{g(a)}^{b}\right]+f(a)>f\left(\overbrace{g(a)}^{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow f'(a)(a-b)>f(b)-f(a)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(a)\cancel{(a-b)}}{\cancel{(a-b)}}<\frac{f(b)-f(a)}{(a-b)}$$

Dividimos por: $a-b<0$

$$\Leftrightarrow f'(a)<\frac{f(b)-f(a)}{a-b}$$

$$\Leftrightarrow f'(a)<\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Para $x=b$:

$$f'(b)\left[\overbrace{g\left(g(b)\right)}^{b}-\overbrace{g(b)}^{a}\right]+f(b)>f\left(\overbrace{g(b)}^{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow f'(b)(b-a)>f(a)-f(b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(b)\cancel{(b-a)}}{\cancel{(b-a)}}>\frac{f(a)-f(b)}{(b-a)}$$

Dividimos por: $b-a>0$

$$\Leftrightarrow f'(b)>\frac{f(a)-f(b)}{b-a}$$

$$\Leftrightarrow f'(b)>\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}$$

$$\Leftrightarrow f'(b)>\frac{-\left(f(b)-f(a)\right)}{-\left(g(b)-g(a)\right)}$$

$$\Leftrightarrow f'(b)>\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Como f' é uma função contínua em $\mathbb{R}$ é contínua, em particular, no intervalo $[a,b]$ e temos

- $f'(a)<\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$
- $f'(b)>\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, podemos afirmar que:

$$\exists c\in\,]a,b[\,:\,f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{t.m.v._{(f,[a;b])}}{t.m.v._{(g,[a;b])}}.$$

Recursos para Matemática

Grupo do Facebook

Prova Modelo de Exame Nacional
Matemática A
Prova 635 | Ensino Secundário | Junho 2022

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado por uma moldura que os rodeia, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

INSTRUÇÕES DE REALIZAÇÃO

- Para cada resposta, identifique o item.
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
- É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.
- Apresente apenas uma resposta para cada item.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

- A prova inclui um formulário.
- Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
- Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r- raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r- raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r- raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad \left(k \in \{0, \ldots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N}\right)$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u' \; (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad \left(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\right)$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad \left(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\right)$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Roberto Oliveira

1. Considere uma progressão geométrica monótona (a_n).

Sabe-se que $a_2 = 36$ e que $a_4 = 81$.

Qual das seguintes é uma expressão do termo geral de (a_n)?

(A) $16 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^n$ **(B)** $\frac{45}{2}n - 9$ **(C)** $16 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$ **(D)** $81 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Vasco Coelho

2. Relativamente a duas sucessões (a_n) e (b_n) sabe-se que:

- (a_n) é progressão aritmética;
- $a_3 = 18$ e $a_{10} = 39$;
- $b_n = \frac{12k - n}{n + k}, k \in \mathbb{R}$

Determine k de modo que $a_5 + \ldots + a_{13}$ seja o trigésimo sexto termo de (b_n).

Manuel Gonçalves

3. Na figura 1 está representada uma grelha retangular de 3 por 6.

Pretende-se distribuir dez cartões numerados de 1 a 10 pelas "casas" da grelha de modo a que:

- cada cartão colocado ocupe apenas uma "casa" da grelha;
- uma das linhas fique completamente livre;
- uma das linhas fique ocupada com, exatamente, 6 cartões;
- os cartões em cada linha fiquem todos juntos e encostados a uma das laterais da grelha.

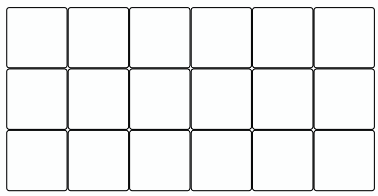


Figura 1

O número de maneiras diferentes de o fazer é?

(A) 29 030 400 **(B)** 43 545 600 **(C)** 21 772 800 **(D)** 311 040

Manuel Gonçalves

4. Seja k o valor do décimo quinto elemento de uma determinada linha do triângulo de Pascal de modo a que o valor do trigésimo sétimo elemento é também igual a k.

Selecionando, ao acaso, 5 elementos da linha seguinte determine a probabilidade de, pelo menos dois deles, serem inferiores a k.

Apresente o resultado em percentagem com arredondamento às centésimas.

Fred CC

5. Numa certa região do país, uma central elétrica distribui eletricidade para as cidades da região.

A distribuição da eletricidade pode, ou não, passar por uma subestação elétrica.

Num certo momento, para uma das cidades da região, A-do-Alentejo, verificou-se que:

- $\frac{3}{5}$ da distribuição da eletricidade passa pela subestação;
- a percentagem de eletricidade que a cidade A-do-Alentejo recebe e não passa na subestação é 12%.

Designe por A o acontecimento «eletricidade recebida pela cidade A-do-Alentejo» e por S o acontecimento «eletricidade que passa pela subestação».

Determine o valor de $P\left(A|S\right)$, de modo a satisfazer as seguintes condições,

$$P\left(\overline{S}|A\right)=P\left(S|\overline{A}\right) \qquad \text{e} \qquad P\left(A|S\right)>0{,}5$$

Apresente o resultado arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

Antero Neves

6. Na figura 2 podemos visualizar um cubo $[ABCDHEFG]$ e uma pirâmide $[EIJHQ]$ parcialmente inserida no cubo.

Sabe-se que:

- $A(2,-2,0)$, $B(2,2,0)$ e $C(-2,2,0)$;
- I e J são pontos médios de $[BF]$ e $[CG]$, respetivamente;
- o centro da base da pirâmide é a projeção ortogonal do ponto Q no plano EHI;
- o ponto Q pertence ao plano BCG;
- o ponto P é a interseção de QI com FG.

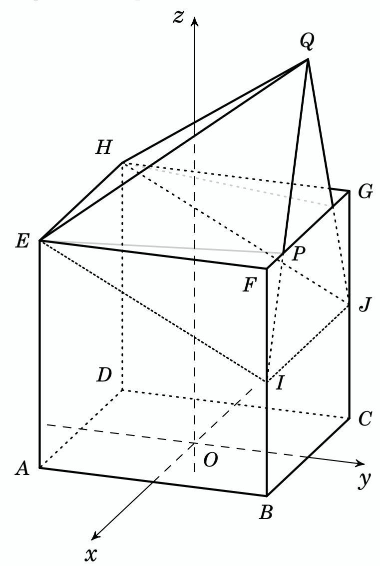


Figura 2

6.1. Qual das seguintes condições define uma superfície esférica com o centro no interior do cubo e que contém os pontos A, C e I?

(A) $x^2+y^2+z^2-2x-2y+2z=8$

(B) $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z=8$

(C) $x^2+y^2+z^2+2x+2y-6z=8$

(D) $x^2+y^2+z^2+4x+4y-10z=8$

6.2. Calcule as coordenadas da projeção ortogonal de P sobre o plano que contém a base da pirâmide.

Antero Neves

7. Na figura 3 estão representados em referencial o.n. xOy, uma circunferência de raio 2 centrada na origem O do referencial, o ângulo α, os pontos A, B e C e o triângulo do qual são vértices e ainda o ponto D. Sabe-se que:

- α é a amplitude do ângulo DOA e $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$;
- os pontos A, B, C e D situam-se na circunferência;
- o ponto B é simétrico do ponto A relativamente à bissetriz dos quadrantes pares;
- o ponto C pertence ao eixo das ordenadas.
- o ponto D pertence ao semieixo positivo das abcissas.

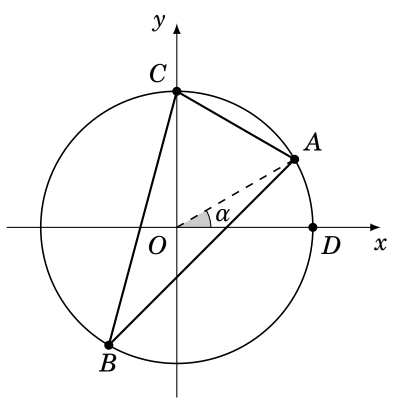


Figura 3

Mostre que a área $A(\alpha)$ do triângulo $[ABC]$ se pode escrever, em função de α como:

$$A(\alpha)=2\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+2\cos(2\alpha)$$

Marisa Cardoso

8. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{3-x}-x+2}{2x^2-18} & \text{se } x>3\\[2ex] k & \text{se } x=3\\[2ex] e^{\left[\ln(3-x)-\ln\left(\sqrt{3}-\sqrt{x}\right)\right]} & \text{se } 0<x<3\end{cases}$$

8.1. Mostre que não existe nenhum k, para o qual a função f seja contínua em $x=3$.

8.2. Mostre que $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x\left(f(x)-f(1)\right)}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}$.

Item extra: Mostre que a taxa média de variação no intervalo $[1,2]$ é igual a $\sqrt{2}-1$.

Sugestão: Comece por mostrar que para $x\in\,]0,3[$: $f(x)=\dfrac{3-x}{\sqrt{3}-\sqrt{x}}$.

Carlos Frias

9. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x)=x^2\ln x$.

9.1. Qual das equações seguintes define a reta tangente ao gráfico de f, no ponto de ordenada nula?

(A) $y=2x-1$ **(B)** $y=x-1$ **(C)** $y=x-2$ **(D)** $y=2x-2$

9.2. Considere o triângulo $[OAP]$, sendo:

- O a origem do referencial;
- A o ponto do gráfico de f com ordenada mínima;
- P um ponto do gráfico de f com abcissa maior que 1.

Sabe-se que o triângulo $[OAP]$ é retângulo em A, utilize as potencialidades da sua calculadora para determinar, com aproximação às centésimas, as coordenadas do ponto P.

Na sua resposta, deve:

- determinar, por processos analíticos, as coordenadas do ponto A;
- apresentar uma equação cuja solução corresponda ao resultado pretendido;
- apresentar o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora, apresentado o(s) ponto(s) relevante(s) para o problema;
- indicar uma aproximação para as coordenadas do ponto P.

Victor Corveira

10. Em $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos, considera z_1 e z_2 em que $z_1=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Sabe-se que, no plano complexo, as imagens geométricas de z_1 e de z_2 são vértices consecutivos de um polígono regular com n lados.

Seja w o número complexo tal que $w=\dfrac{z_2}{z_1}$.

Sabendo que w é um imaginário puro, qual o valor de n?

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6

Carlos Paulo Freitas

11. Resolva este item sem recorrer à calculadora, a não ser para eventuais cálculos numéricos.

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição $|z-2+i| = 3\sqrt{5}$ define, no plano complexo, uma circunferência.

Considere todos os números complexos cujos afixos pertencem a esta circunferência.

Determine qual deles tem maior módulo e qual tem menor módulo.

Apresente esses números complexos na forma $a+bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Paulo Conde

12. Considere a função f definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} x - x e^{\frac{2}{x}} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Estude a função f quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico paralelas aos eixos coordenados.

Tozé Oliveira

13. Seja f uma função, de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, cuja **derivada**, também de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, é definida por:

$$f'(x) = \frac{\cos x}{2 - \operatorname{sen} x}.$$

Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f.

Pedro Teixeira

14. Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto-solução da equação:

$$2\ln^2(2x+3) - \ln(2) = 3 + \ln\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

José Carlos Pereira

15. Sejam f uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}^-$.

Sabe-se que:

- $f(1) = 1$ e $f'(1) = 0$;
- $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Mostre que a equação $f(x) = f(x+1)$ tem exatamente uma solução em $]a, f(a)[$.

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**3.**	**4.**	**6.1.**	**6.2.**	**8.1.**	**8.2.**	**9.1.**	**9.2.**	**10.**	**12.**	**15.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	12	14	12	14	14	14	12	14	12	14	14	158
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**		**5.**		**7.**		**11**		**13.**		**14.**		**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos												42
Total													200

Coordenação
José Carlos Pereira

Paginação
Antero Neves

Pergunta 1

Sejo (a_n) uma progressão geométrica monótona, tal que $a_2 = 36$ e $a_4 = 81$. Então

$$\begin{aligned} a_4 = a_2 \times r^{4-2} &\Leftrightarrow 81 = 36 \times r^2 \\ &\Leftrightarrow r^2 = \frac{9}{4} \\ &\Leftrightarrow r = \pm\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Como (a_n) é monotona, então $r > 0$, logo $r = \frac{3}{2}$.

Donde

$$\begin{aligned} a_n &= a_2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \\ &= 36 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \\ &= 16 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n} \end{aligned}$$

Opção (C)

Pergunta 2

Como (a_n) e uma progressão aritmética tal que $a_3 = 18$ e $a_{10} = 39$ vem que:

$$\begin{aligned} a_{10} = a_3 + (10-3) \times r &\Leftrightarrow 39 = 18 + 7r \\ &\Leftrightarrow 21 = 7r \\ &\Leftrightarrow r = 3 \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} a_n &= a_3 + (n-3) \times 3 \\ &= 18 + (n-3) \times 3 \\ &= 3n + 9 \end{aligned}$$

Pelo que

$$\begin{aligned} a_5 + \cdots + a_{13} &= \frac{a_5 + a_{13}}{2} \times 9 \\ &= \frac{24 + 48}{2} \times 9 \\ &= 324 \end{aligned}$$

Pretende-se que

$$\begin{aligned} b_{36} = a_5 + \cdots + a_{13} &\Leftrightarrow \frac{12k - 36}{k + 36} = 324 \\ &\Leftrightarrow \frac{12k - 36}{k + 36} - 324 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{12k - 36 - 324(k + 36)}{k + 36} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-312k - 11700}{k + 36} = 0 \\ &\Leftrightarrow -312k - 11700 = 0 \wedge k + 36 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow k = -\frac{75}{2} \end{aligned}$$

Pergunta 3

1	2	3	4	5	6
		7	8	9	10

Uma resposta possível é:

$$^3C_1 \times ^2C_1 \times ^{10}C_6 \times 6! \times ^2C_1 \times 4! = 43\,545\,600$$

- $^3C_1$ representa o número de possibilidades de escolher a linha que fica livre.
- $^2C_1$ representa o número de possibilidades de escolher a linha que fica ocupada com exatamente 6 cartões.
- $^{10}C_6 \times 6!$ representa o número de possibilidades de escolher, entre os 10 cartões numerados, 6 para ocupar a linha, permutando-os pelas 6 posições.
- $^2C_1 \times 4!$ representa o número de possibilidades de escolher uma das duas laterais da grelha e permutar os 4 cartões restantes, mantendo-os juntos e encostados.

Opção (B)

Pergunta 4

$$\underline{1} \quad \cdots \quad \underline{\ \ } \quad \underset{p=14}{\underline{k}} \quad \cdots \quad \underset{p=36}{\underline{k}} \quad \underline{\ \ } \quad \cdots \quad \underline{1}$$

$$\underline{1} \quad \cdots \quad \underline{\ \ } \quad \cdots \quad \underline{\ \ } \quad \cdots \quad \underline{1}$$

$$^nC_{14} = ^n C_{36} \Leftrightarrow 36 = n - 14 \Leftrightarrow n = 50$$

Logo, a linha seguinte, daterminada para $n = 51$ tem 52 elementos, dos quais $2 \times 14 = 28$ são inferiores a k.

Donde

<u>Número de casos possíveis</u>: $^{52}C_5$

<u>Número de casos favoráveis</u>: $^{52}C_5 - ^{24}C_5 - ^{24}C_4 \times ^{28}C_1$

Pelo que

$$P(x) = \frac{^{52}C_5 - ^{24}C_5 - ^{24}C_4 \times ^{28}C_1}{^{52}C_5}$$
$$\simeq 86,92\%$$

Pergunta 5

Considere-se os acontecimentos:

A - «*eletricidade recebida pela cidade A-do-Alentejo*»

S - «*eletricidade que passa pela subestação*»

Sabe-se que:

- $P(S) = \dfrac{3}{5}$
- $P\left(A \cap \overline{S}\right) = 12\% = 0,12$

$$\begin{aligned} P\left(A \cap \overline{S}\right) = 0,12 \Leftrightarrow & P(A) - P(A \cap S) = 0,12 \\ \Leftrightarrow & P(A) = 0,12 + P(A \cap S) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left(\overline{A}\right) =& 1 - P(A) \\ =& 1 - (0,12 + P(A \cap S)) \\ =& 0,88 - P(A \cap S) \end{aligned}$$

Dado que se pretende satisfazer a condição

$$P\left(\overline{S} \mid A\right) = P\left(S \mid \overline{A}\right)$$

Então:

$$\begin{aligned} & P\left(\overline{S} \mid A\right) = P\left(S \mid \overline{A}\right) \\ \Leftrightarrow & \frac{P\left(\overline{S} \cap A\right)}{P(A)} = \frac{P\left(S \cap \overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)} \\ \Leftrightarrow & 0,12 P\left(\overline{A}\right) = P(A) \times (P(S) - P(A \cap S)) \\ \Leftrightarrow & 0,12\,(0,88 - P(A \cap S)) = \\ & \qquad P(A) \times (0,6 - P(A \cap S)) \\ \Leftrightarrow & 0,1056 - 0,12P(A \cap S) = \\ & \qquad (0,12 + P(A \cap S))\,(0,6 - P(A \cap S)) \\ \Leftrightarrow & 0,1056 - 0,12P(A \cap S) = 0,072 - 0,12P(A \cap S) \\ & \qquad + 0,6P(A \cap S) - [P(A \cap S)]^2 \\ \Leftrightarrow & [P(A \cap S)]^2 - 0,6P(A \cap S) + 0,0336 = 0 \\ \Leftrightarrow & P(A \cap S) = \frac{-(-0,6) \pm \sqrt{(-0,6)^2 - 4 \times 1 \times 0,0336}}{2 \times 1} \end{aligned}$$

Logo

$P(A \cap S) \simeq 0,0625$ ou $P(A \cap S) \simeq 0,5375$

e portanto

$P(A \mid S) = \dfrac{P(A \cap S)}{P(S)} \simeq 0,1$ ou $P(A \mid S) \simeq 0,9$

Como $P(A \mid S) > 0,5$, conclui-se que $P(A \mid S) \simeq 0,9$.

Pergunta 6.1

<u>Opção (A)</u>

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z = 8 \\ \Leftrightarrow & (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 11 \end{aligned}$$

Centro $(1, 1, -1)$ e raio $r = \sqrt{11}$

Esta opção é rejeitada, pois o centro da superfície esférica não pertence ao interior do cubo.

<u>Opção (B)</u>

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 8 \\ \Leftrightarrow & (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 11 \end{aligned}$$

Centro $(1,1,1)$ e raio $r=\sqrt{11}$

Tem-se que

$$\begin{aligned}\overline{C'I} =& \sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2+(2-1)^2}\\ =& \sqrt{3}<\sqrt{11}\end{aligned}$$

Esta opção é rejeitada, dado que a superfície esférica não contém o ponto I.

<u>Opção (C)</u>

$$\begin{aligned}& x^2+y^2+z^2+2x+2y-6z=8\\ \Leftrightarrow& (x+1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=19\end{aligned}$$

Centro $(-1,-1,3)$ e raio $r=\sqrt{19}$

<u>Opção (D)</u>

$$\begin{aligned}& x^2+y^2+z^2+4x+4y-10z=8\\ \Leftrightarrow& (x+2)^2+(y+2)^2+(z-5)^2=41\end{aligned}$$

Centro $(-2,-2,5)$ e raio $r=\sqrt{41}$

Esta opção é rejeitada, pois o centro da superfície esférica não pertence ao interior do cubo.

Opção (C)

Pergunta 6.2

Como $Q\in BCG$ então $y_Q=2$.

Logo $Q\left(x_Q,2,z_Q\right)$

Por outro lado, $E(2,-2,4)$ e $J(-2,2,2)$, donde Q', projeção ortogonal do ponto Q no plano EHI tem de coordenadas

$$\begin{aligned}Q' &= \left(\frac{2+(-2)}{2},\frac{-2+2}{2},\frac{4+2}{2}\right)\\ &= (0,0,3)\end{aligned}$$

Tem-se que

- $\overrightarrow{EH}=(-4,0,0)$
- $\begin{aligned}\overrightarrow{EI}&=I-E\\ &=(2,2,2)-(2,-2,4)\\ &=(0,4,-2)\end{aligned}$

Considere-se um vetor, $\vec{n}(a,b,c)$ tal que:

$$\begin{aligned}\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EH}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EI}=0\end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases}(a,b,c)\cdot(-4,0,0)=0\\ (a,b,c)\cdot(0,4,-2)=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}-4a=0\\ 4b-2c=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\ c=2b\end{cases}\end{aligned}$$

donde $\vec{n}(0,b,2b),\ b\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Tomando $b=1$, vem que o vetor $\vec{n}(0,1,2)$ é um vetor normal ao plano EHI.

A reta

$$r:(x,y,z)=(0,0,3)+k(0,1,2),k\in\mathbb{R}$$

é perpendicular ao plano EHI e contém o ponto Q. Donde, substituindo, vem

$$\begin{aligned}&(x_Q,2,z_Q)=(0,0,3)+k(0,1,2)\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}x_Q=0+o\times k\\ 2=0+k\\ z_Q=3+2k\end{cases}\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}x_Q=0\\ k=2\\ z_Q=7\end{cases}\end{aligned}$$

Concluindo-se que $Q(0,2,7)$

O vetor

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IQ}&=Q-I\\ &=(0,2,7)-(2,2,2)\\ &=(-2,0,5)\end{aligned}$$

Pelo que, a equação da reta IQ é

$$IQ:(x,y,z)=(2,2,2)+\lambda(-2,0,5),\lambda\in\mathbb{R}$$

Intersetando com a reta $y = 2 \wedge z = 4$ vem

$$\begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 2 \\ z = 2 + 5\lambda \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dots \\ \dots \\ 4 = 2 + 5\lambda \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ \dots \\ \lambda = \frac{2}{5} \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

pelo que, as coordenadas do ponto P são $\left(\frac{6}{5}, 2, 4\right)$.

Ora, a equação da reta perpendicular ao plano EHI e que contém o ponto P é

$$s : (x, y, z) = \left(\frac{6}{5}, 2, 4\right) + \mu(0, 1, 2), \mu \in \mathbb{R}$$

e a equação do plano HEI é

$$\begin{aligned} HEI : & 0 \times (x - 2) + 1 \times (y - 2) + 2(z - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow & y + 2z - 6 = 0 \end{aligned}$$

Donde, a interseção da reta s com o plano HEI é:

$$\begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = 2t\mu \\ z = 4 + 2\mu \\ y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots \\ 2 + \mu + 2(4 + 2\mu) - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots \\ 5\mu = -4 \end{cases}$$

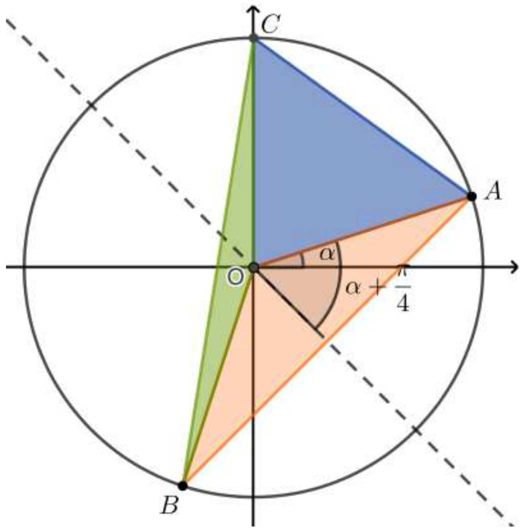
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{6}{5} \\ z = \frac{12}{5} \\ \mu = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

ou seja, as coordenadas da projeção ortogonal de P sobre o plano que contém a base da pirâmide são $P'\left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$.

Pergunta 7

Considere-se a circunferência de centro na origem e raio 2 e $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$. Tem-se então que:

- $A(2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$
- $B(-2\sin\alpha, -2\cos\alpha)$
- $C(0, 2)$



Assim,

$$A_{[ABC]} = A_{[BOC]} + A_{[AOC]} + A_{[AOB]}$$

<u>Área do triângulo $[BOC]$</u>

$$\begin{aligned} A_{[BOC]} &= \frac{2 \times 2\sin\alpha}{2} \\ &= 2\sin\alpha \end{aligned}$$

<u>Área do triângulo $[AOC]$</u>

$$\begin{aligned} A_{[AOC]} &= \frac{2 \times 2\cos\alpha}{2} \\ &= 2\cos\alpha \end{aligned}$$

<u>Área do triângulo $[AOB]$</u>

Tem-se que

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\overline{O'A}}{2} \Leftrightarrow \overline{O'A} = 2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

e que

$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\overline{OO'}}{2}\Leftrightarrow \overline{OO'}=2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

logo,

$$\overline{AB}=2\times 2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=4\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

Pelo que,

$$\begin{aligned}A_{[AOB]}&=\frac{2\times 2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\times 2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{2}\\&=2\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\\&=2\cos(2\alpha)\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}A(\alpha)=&2\sin\alpha+2\cos\alpha+2\cos(2\alpha)\\=&2\sqrt{2}\left(\sin\alpha\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\cos\alpha\right)\\&+2\cos(2\alpha)\\=&2\sqrt{2}\left(\sin\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\alpha\right)\\&+2\cos(2\alpha)\\=&2\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+2\cos(2\alpha)\end{aligned}$$

Pergunta 8.1

Tem-se que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3^-}f(x)&=\lim_{x\to 3^-}e^{[\ln(3-x)-\ln(\sqrt{3}-\sqrt{x})]}\\&=\lim_{x\to 3^-}e^{\ln\left(\frac{3-x}{\sqrt{3}-\sqrt{x}}\right)}\\&=\lim_{x\to 3^-}\frac{3-x}{\sqrt{3}-\sqrt{x}}\\&=\lim_{x\to 3^-}\left(\frac{3-x}{\sqrt{3}-\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{x}}{\sqrt{3}+\sqrt{x}}\right)\\&=\lim_{x\to 3^-}\frac{(3-x)\left(\sqrt{3}+\sqrt{x}\right)}{3-x}\\&=\lim_{x\to 3^-}\left(\sqrt{3}+\sqrt{x}\right)\\&=\sqrt{3}+\sqrt{3}\\&=2\sqrt{3}\end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 3^+}f(x)\\&=\lim_{x\to 3^+}\frac{e^{3-x}-x+2}{2x^2-18}\\&=\lim_{x\to 3^+}\frac{e^{3-x}-1+1-x+2}{2\left(x^2-9\right)}\\&=\lim_{x\to 3^+}\left[\frac{e^{3-x}-1}{x-3}\times\frac{1}{2(x+3)}+\frac{3-x}{2(x-3)(x+3)}\right]\\&=-\underbrace{\lim_{3-x\to 0^-}\frac{e^{3-x}-1}{3-x}}_{\text{Se } x\to 3^+ \text{ então } 3-x\to 0^-}\times\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{2(x+3)}\\&\qquad+\lim_{x\to 3^+}\frac{-(x-3)}{2(x-3)(x+3)}\\&=-1\times\frac{1}{2\times(3+3)}+\frac{-1}{2(3+3)}\\&=-\frac{1}{6}\end{aligned}$$

Para f ser contínua em $x=3$. ter-se-ia de verificar:

$$\lim_{x\to 3^-}f(x)=f(3)=\lim_{x\to 3^+}f(x)$$

ou seja

$$2\sqrt{3}=k=-1/6$$

o que é impossível.

Logo, não existe nenhum valor k, para o qual a função f é contínua em $x=3$.

Pergunta 8.2

Tem-se que

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 1}\frac{2x(f(x)-f(1))}{x^2-1}\\&=\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x}{x+1}\times\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right)\\&=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{x+1}\times\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\\&=\frac{2\times 1}{1+1}\times f'(1)\\&=f'(1)\\&\overset{(*)}{=}\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Se $x \in]0,3[$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left[e^{\ln(3-x)-\ln\left(\sqrt{3}-\sqrt{x}\right)}\right]' \\
&= \left[e^{\ln\left(\dfrac{3-x}{\sqrt{3}-\sqrt{x}}\right)}\right]' \\
&= \left[\frac{3-x}{\sqrt{3}-\sqrt{x}}\right]' \\
&= \frac{(3-x)'\left(\sqrt{3}-\sqrt{x}\right)-(3-x)\left(\sqrt{3}-\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{x}\right)^2} \\
&= \frac{-\left(\sqrt{3}-\sqrt{x}\right)+(3-x)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{x}\right)^2}
\end{aligned}
$$

donde se obtém

$$
\begin{aligned}
f'(1) &= \frac{-\left(\sqrt{3}-1\right)+(3-1)\times\dfrac{1}{2\sqrt{1}}}{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} \\
&= \frac{-\left(\sqrt{3}-1\right)+1}{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} \\
&= \frac{2-\sqrt{3}}{3-2\sqrt{3}+1} \\
&= \frac{2-\sqrt{3}}{2(2-\sqrt{3})} \\
&= \frac{1}{2} \quad (*)
\end{aligned}
$$

Pergunta 9.1

Pretende-se a reta tangente ao gráfico de f, no ponto de ordenada nula.

$$
\begin{aligned}
f(x)=0 &\Leftrightarrow x^2\ln x = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \\
&\Leftrightarrow \left(x^2=0 \vee \ln x = 0\right) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \\
&\Leftrightarrow (x=0 \vee x=1) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \\
&\Leftrightarrow x = 1
\end{aligned}
$$

Logo o ponto de tangência tem de coordenadas $(1,0)$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(x^2\ln x\right)' \\
&= 2x\ln x + x^2\times\frac{1}{x} \\
&= 2x\ln x + x
\end{aligned}
$$

Logo, o declive da reta tangente é dado por:

$$f'(1) = 2\times 1\times\ln(1)+1 = 1$$

Pelo que se conclui que a equação da reta tangente é:

$$
\begin{aligned}
t &:(y-0) = 1(x-1) \\
&\Leftrightarrow y = x-1
\end{aligned}
$$

Opção (B)

Pergunta 9.2

Pela alinea anterior $f'(x) = 2x\ln x + x$. Donde:

$$
\begin{aligned}
f'(x)=0 &\Leftrightarrow 2x\ln x + x = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \\
&\Leftrightarrow x(2\ln x+1) = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \\
&\Leftrightarrow \left(x=0 \vee \ln x = -\frac{1}{2}\right) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \\
&\Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

	0		$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
f'	$n.d.$	$-$	0	$+$
f	$n.d.$	$\searrow$	Min	$\nearrow$

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2\ln e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2e}$$

A função f' é decrescente em $\left]0, e^{-\frac{1}{2}}\right]$ e crescente em $\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$ e por isso, o ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$ tem ordenada mínima.

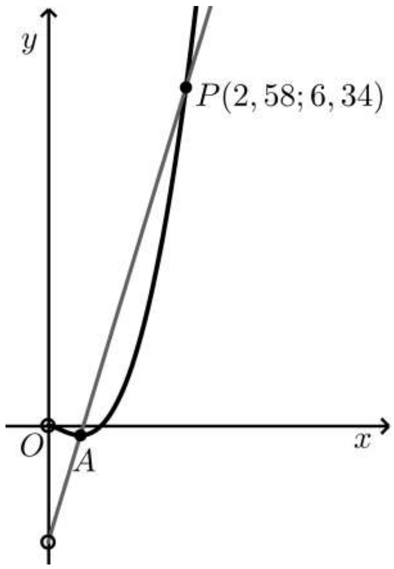
Seja $P(x,y)$, o ponto do gráfico de f, tal que $x > 1$.

Então

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AO} &= O - A \\
&= (0,0) - \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{1}{2e}\right) \\
\overrightarrow{AP} &= P - A \\
&= (x,y) - \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right) \\
&= \left(x-\frac{1}{\sqrt{e}}, y+\frac{1}{2e}\right)
\end{aligned}
$$

Donde, para o triângulo $[OAP]$ ser retângulo em A, tem de se verificar a condição:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\
\Leftrightarrow&\left(x-\frac{1}{\sqrt{e}},y+\frac{1}{2e}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{e}},\frac{1}{2e}\right)=0\\
\Leftrightarrow&-\frac{1}{\sqrt{e}}x+\frac{1}{e}+\frac{1}{2e}y+\frac{1}{4e^2}=0\\
\Leftrightarrow&\frac{1}{2e}y=\frac{1}{\sqrt{e}}x-\frac{4e+1}{4e^2}\\
\Leftrightarrow&y=\frac{2e}{\sqrt{e}}x-\frac{4e+1}{2e}
\end{aligned}$$



Concluindo-se assim, que as coordenadas do ponto P, com aproximação às centésimas é $P(2,58;6,33)$.

Pergunta 10

Sejam $z_1=2e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ e z_2 números eomplexos, tais que, z_1 e z_2 são vértices consecutivos de um polígono regular de n lados. Logo $z_2=|z_2|\,e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{n}\right)}$

$$\begin{aligned}
w&=\frac{z_2}{z_1}\\
&=\frac{|z_2|\,e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{n}\right)}}{2e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}}\\
&=\frac{|z_2|}{2}e^{i\left(\frac{2\pi}{n}\right)}
\end{aligned}$$

Como w é um imaginário puro, então

$$\begin{aligned}
&\frac{2\pi}{n}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\\
\Leftrightarrow&\frac{2\pi}{n}=\frac{\pi+2k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\\
\Leftrightarrow&n=\frac{4}{1+2k},k\in\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Como $n\geq 3$, tomando $k=0$, conclui-se que $n=4$.

Opção (B)

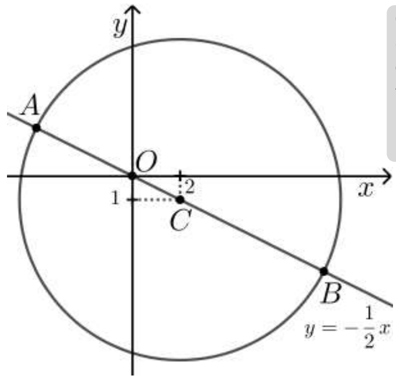
Pergunta 11

Considere-se, no plano complexo, a circunferência definida por:

$$|z-2+i|=3\sqrt{5}\Leftrightarrow|z-(2-i)|=3\sqrt{5}$$

Logo, os afixos pertencem à circunferência de equação:

$$(x-2)^2+(y+1)^2=45$$



OBS:
Sendo P um ponto qualquer da circunferência, pela desigualdade triangular, conclui-se que:

$$r-\overline{OC}\leq\overline{OP}\leq r+\overline{OC}$$

Considere-se a reta r que passa no centro da circunferência $C(2,-1)$ e na origem O. Logo

$$r:y=mx$$

Como $(2,-1)\in r$, vem que $-1=m\times 2\Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$

logo
$$r:y=-\frac{1}{2}x$$

Determinando os pontos de interseção da reta r com a circunferência:

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y+1)^2=45\\ y=-\frac{1}{2}x\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)^2+\left(-\frac{1}{2}x+1\right)^2=45\\ y=-\frac{1}{2}x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+4+\frac{1}{4}x^2-x+1=45 \\ y=-\dfrac{1}{2}x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x-32=0 \\ y=-\dfrac{1}{2}x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=8 \\ y=-4 \end{cases}$$

Logo, os pontos $A(-4,2)$ e $B(3,-4)$ são os afixos dos números complexos $z_A=-4+2i$ e $z_B=8-4i$ respetivamente, de menor e de maior módulo

Pergunta 12

Assíntotas Verticais

Em $]-\infty,0[$ a função f resulta da composição e de operações sucessivas envolvendo funções contínuas neste intervalo, sendo por isso, contínua em $]-\infty,0[$.

Logo, neste intervalo, o gráfico de f não admite assíntotas verticais ao seu gráfico.

Em $]0,+\infty[$ a função f resulta de operações sucessivas envolvendo funções contínuas neste intervalo, sendo por isso, contínua em $]0,+\infty[$.

Logo, neste intervalo, o gráfico de f não admite assíntotas verticais ao seu gráfico.

Dado que 0 é ponto aderente ao domínio de f, então:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^-} f(x) &= \lim_{x\to0^-}\left(x-xe^{\frac{2}{x}}\right)\\ &=0-0\times0\\ &=0\end{aligned}$$

como $x\to0^-$ então $\dfrac{2}{x}\to-\infty$ e por isso $e^{\frac{2}{x}}\to0^-$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+} f(x) &= \lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x^2}\\ &=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{(1-\cos x)}{x^2}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right]\\ &=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}\\ &=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}\\ &=\underbrace{\left[\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}\right]^2}_{\text{Limite Notável}}\times\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+\cos x}\\ &=1^2\times\frac{1}{2}\\ &=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Logo, a reta de equação $x=0$ não é assíntota vertical ao gráfico de f.

Desta forma, conclui-se que não existem assíntotas verticais ao gráfico de f.

Assíntotas Horizontais

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\left(x-xe^{\frac{2}{x}}\right)\\ &=\lim_{x\to-\infty}\left[-x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)\right]\\ &=\lim_{t\to0^-}\left[\frac{-2}{t}\left(e^t-1\right)\right]\\ &=-2\times\lim_{t\to0^-}\frac{e^t-1}{t}\\ &=-2\times1\\ &=-2\end{aligned}$$

Mudança de Variável
Seja $t=\dfrac{2}{x}$
Se $x\to-\infty$ então $t\to0^-$

Logo, a reta de equação $y=-2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f em $-\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\\ &=\lim_{x\to+\infty}\left[(1-\cos x)\times\frac{1}{x^2}\right]\\ &=0\end{aligned}$$

dado que, $\forall x\in\mathbb{R}^+, 0\leqslant 1-\cos x\leqslant 2$ sendo por isso uma função limitada e $\dfrac{1}{x^2}\to0$.

Logo, a reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f em $+\infty$.

Pergunta 13

Seja fuma função, de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, cuja derivada, também tem domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ é definida por:

$$f'(x) = \frac{\cos x}{2 - \sin x}$$

Então

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[\frac{\cos x}{2-\sin x}\right]' \\ &= \frac{(\cos x)'(2-\sin x) - \cos x(2-\sin x)'}{(2-\sin x)^2} \\ &= \frac{-\sin x(2-\sin x) + \cos x \times \cos x}{(2-\sin x)^2} \\ &= \frac{1-2\sin x}{(2-\sin x)^2} \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} & f''(x) = 0 \wedge x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \Leftrightarrow & \frac{1-2\sin x}{(2-\sin x)^2} = 0 \wedge x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \Leftrightarrow & 1 - 2\sin x = 0 \wedge x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \Leftrightarrow & \sin x = \frac{1}{2} \wedge x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \Leftrightarrow & x = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
f''	$n.d.$	$+$	0	$-$	-1
f	$n.d.$	$\smile$	$P.I.$	$\frown$	$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Pelo que se conclui que o gráfico de f tem a concavidade voltada pora cima em $\left]0, \frac{\pi}{6}\right]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$.

O gráfico de f tem um ponto de inflexão de abcissa $x = \frac{\pi}{6}$.

Pergunta 14

Considere-se a equação.

$$2\ln^2(2x+3) - \ln(2) = 3 + \ln\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

Tem-se que:

$$\begin{aligned} D_E &= \left\{x \in \mathbb{R} : 2x + 3 > 0 \wedge x + \frac{3}{2} > 0\right\} \\ &= \left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & 2\ln^2(2x+3) - \ln(2) = 3 + \ln\left(x + \frac{3}{2}\right) \wedge x \in D_E \\ \Leftrightarrow & 2\ln^2(2x+3) = 3 + \ln\left(x + \frac{3}{2}\right) + \ln(2) \wedge x \in D_E \\ \Leftrightarrow & 2\ln^2(2x+3) = 3 + \ln(2x+3) \wedge x \in DE \\ \Leftrightarrow & 2\ln(2x+3) - \ln(2x+3) - 3 = 0 \quad \wedge x \in D_E \\ \Leftrightarrow & \ln(2x+3) = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 2 \times (-3)}}{2 \times 2} \\ \Leftrightarrow & \left(\ln(2x+3) = -1 \vee \ln(2x+3) = \frac{3}{2}\right) \wedge x \in D_E \\ \Leftrightarrow & \left(2x + 3 = e^{-1} \vee 2x + 3 = e^{\frac{3}{2}}\right) \wedge x \in D_E \\ \Leftrightarrow & x = \frac{-3e+1}{2e} \vee x = \frac{e^{\frac{3}{2}} - 3}{2} \end{aligned}$$

Pergunta 15

Seja f uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}^-$ tal que:

- $f(1) = 1$ e $f'(1) = 0$
- $f'' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

A função f é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e por isso é contínua em $\mathbb{R}$.

Como $f'' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ então a função f' é crescente em $\mathbb{R}$.

Consequentemente, como f' é crescente em $\mathbb{R}$ e $f'(1) = 0$, concluí-se que $f'(x) < 0, \forall x < 1$ e $f'(x) > 0, \forall x > 1$.

Concluíndo-se que f é decrescente em $]-\infty, 1]$ e é crescente em $[0, +\infty[$, sendo $f(1) = 1$ o mínimo absoluto de f em $x = 1$.

Considere-se a função g, definida por:

$$g(x) = f(x) - f(x+1)$$

OBS:

$$\begin{aligned} & f(x) = f(x+1) \\ \Leftrightarrow & f(x) - f(x+1) = 0 \\ \Leftrightarrow & g(x) = 0 \end{aligned}$$

A função g resulta da composição e de operações sucessivas envolvendo funções contínuas em $\mathbb{R}$ e por isso, em particular, é contínua em $[a, f(a)]$.

Tem-se que

$$g(a) \times g(f(a)) = \left(\underbrace{f(a) - f(a+1)}_{>0}\right)\left(\underbrace{f(f(a)) - f(f(a)+1)}_{<0}\right) < 0$$

- Como $a < 0$ então $a < a+1 < 1$.

  Dado que a função f é decrescente em $]-\infty, 1[$ conclui-se que

  $$f(a) > f(a+1) \Leftrightarrow f(a) - f(a+1) > 0$$

- Como $f(1) = 1$ é o mínimo absoluto da função f, então $f(a) > 1$, e por isso

  $$1 < f(a) < f(a) + 1$$

  Dado que a função f é crescente em $]1, +\infty[$ então

  $$f(f(a)) < f(f(a)+1)$$
  $$\Leftrightarrow f(f(a)) - f(f(a)+1) < 0$$

Logo, pelo Corolário do Teorema do Bolzano- Cauchy conclui-se que:

$$\exists x_0 \in]a, f(a)[: g(x_0) = 0$$
$$\Leftrightarrow \exists x_0 \in]a, f(a)[: f(x_0) - f(x_0+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \exists x_0 \in]a, f(a)[: f(x_0) = f(x_0+1)$$

Dado que

$$g'(x) = [f(x) - f(x+1)]'$$
$$= f'(x) - f'(x+1) \times (x+1)'$$
$$= f'(x) - f'(x+1)$$

e que f' é monótona crescente e por isso injetiva, então $g'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, pelo que, g é monótona em $\mathbb{R}$, e por isso, em particular, em $]a, f(a)[$. Concluíndo-se assim, que a solução da equação $f(x) = f(x+1)$, no intervalo $]a, f(a)[$ é única.

Recursos para Matemática

Grupo do Facebook

Prova Modelo de Exame Nacional

Matemática A

Prova 635 | Ensino Secundário | Junho 2022

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado por uma moldura que os rodeia, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

INSTRUÇÕES DE REALIZAÇÃO

- Para cada resposta, identifique o item.
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
- É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.
- Apresente apenas uma resposta para cada item.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

- A prova inclui um formulário.
- Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
- Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r- raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r- raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r- raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad \left(k \in \{0, \ldots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N}\right)$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$\left(u^n\right)' = n u^{n-1} u' \ (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$\left(e^u\right)' = u' e^u$

$\left(a^u\right)' = u' a^u \ln a \quad \left(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\right)$

$\left(\ln u\right)' = \frac{u'}{u}$

$\left(\log_a u\right)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad \left(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\right)$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

José Carlos Pereira

1. Qual dos seguintes é o termo geral de uma sucessão crescente e convergente?

(A) 2^n **(B)** $2+\frac{1}{n}$ **(C)** $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ **(D)** $2-\frac{1}{n}$

Paulo Conde

2. Seja (a_n) uma progressão aritmética tal que:

- $a_3+a_6=-2$
- $a_4-a_8=-8$

Sabe-se que a soma de seis termos consecutivos da sucessão (a_n) é igual a 198.

Determine o primeiro destes seis termos, ou seja, o termo de menor ordem.

António Pedro Costa Silva

3. Seja E, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos $A\subset E, B\subset E$ tais que:

- $P(A)=\frac{3}{5}$
- $P(A\cap B)=\frac{1}{5}$
- $P(A\cup B)=\frac{9}{10}$

Qual é o valor de $P\left(\overline{A}|B\right)$?

(A) $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{2}{5}$ **(C)** $\frac{3}{5}$ **(D)** $\frac{4}{5}$

Marta Lopes

4. Na figura 1 está a planificação de um dado equilibrado, com as faces numeradas.

Considere a experiência aleatória, que consiste em lançar o dado seis vezes consecutivas e registar, pela ordem de saída, o número da face que fica voltada para cima em cada um dos lançamentos.

Quantos são os registos possíveis em que não existam números que não são divisíveis por 9 registados consecutivamente?

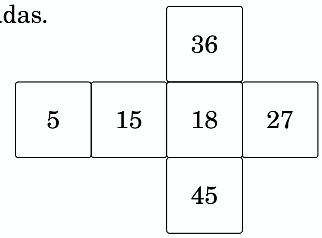


Figura 1

Hugo Rocha

5. Um saco não transparente contém bolas de três cores distintas indistinguíveis ao tato, sendo que há, no saco, o mesmo número de bolas de cada cor.

Retiram-se sucessivamente e sem reposição duas bolas do saco.

Sabendo que a probabilidade de as duas bolas extraídas não serem da mesma cor é de 75%, quantas bolas existiam inicialmente no saco?

Anabela Matoso

6. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$:

- a superfície esférica, $\mathcal{S}$, definida por

$$(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=5;$$

- o plano α, definido por $x-y+z-9=0$;
- a reta r, definida por

$$(x,y,z)=(0,-1,2)+k(1,-1,2),\ k\in\mathbb{R}.$$

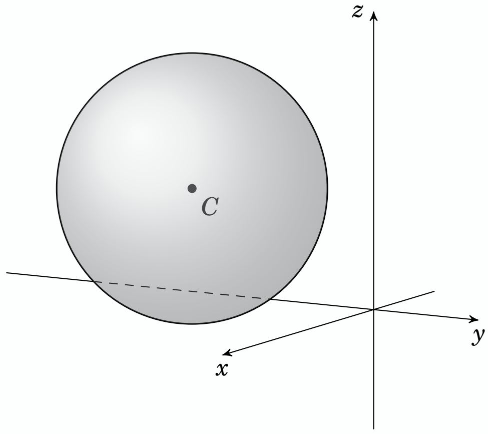


Figura 2

6.1. Seja C o centro da superfície esférica $\mathcal{S}$ e sejam P e Q os pontos de interseção da reta r com a superfície esférica $\mathcal{S}$.

Sendo θ a amplitude, em radianos, do ângulo PCQ, qual é o valor de $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$?

(A) $\frac{2}{5}$ **(B)** $\frac{11}{25}$ **(C)** $\frac{21}{50}$ **(D)** $\frac{3}{7}$

6.2. Determine o perímetro da circunferência que resulta da interseção do plano α com a superfície esférica $\mathcal{S}$.

Paulo Conde

7. Na figura 3 estão representados, num referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica e e o triângulo $[OAB]$.

Sabe-se que:

- C e D são os pontos da circunferência que têm a menor e a maior ordenada, respetivamente;
- a amplitude, em radianos, do ângulo AOD é α e a do ângulo COB é o dobro $\left(\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right[\right)$;
- os pontos A e B pertencem à circunferência e ao segundo e terceiro quadrantes, respetivamente;
- $A(\alpha)$ é a área do triângulo $[OAB]$, em função de α.

Mostre que $A(\alpha)=\frac{\operatorname{sen}(3\alpha)}{2}$.

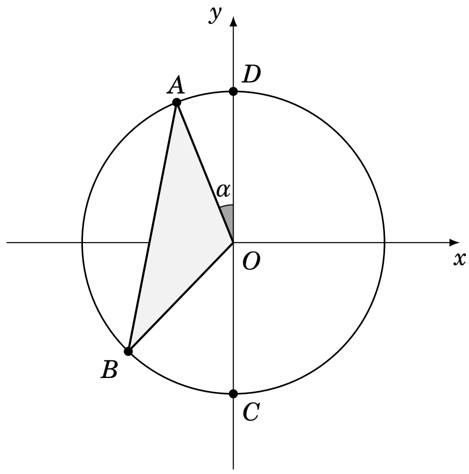


Figura 3

Tozé Oliveira

8. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}2x^2e^x-3xe^x & \text{se } x<0\\ \dfrac{\ln(e^x+x)-3x}{x} & \text{se } x>0\end{cases}$$

8.1. Estude a função quanto à existência de assíntotas horizontais ao seu gráfico.

8.2. Estude, no intervalo $]-\infty,0[$, a função f quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

José Carlos Pereira

9. Uma espécie de felinos foi reintroduzida numa área protegida. Os responsáveis estimam que o número de felinos, em centenas, t anos após a reintrodução é dado, aproximadamente, pelo modelo:

$$F(t) = \frac{2}{1+3e^{-0,3t}}, \ t \geq 0$$

Considere que $t = 0$ corresponde ao início de 2022.

9.1. Em que ano se espera que o número de felinos desta espécie duplique em relação ao início de 2022?

(A) 2024 **(B)** 2025 **(C)** 2026 **(D)** 2027

9.2. Segundo este modelo, após os primeiros cinco anos existe um instante t_1 tal que quando passa o quíntuplo do tempo que passou até ao instante t_1 o número de felinos desta espécie aumenta cinquenta indivíduos.

Determine o instante t_1 sabendo que ele existe e é único.

Apresente o resultado em anos e meses, com meses arredondados às unidades.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o(s) gráfico(s) que considerar necessário(s) para a resolução do problema, bem como a(s) coordenada(s) de algum (ou alguns) ponto(s) relevante(s), arredondadas às centésimas.

Anabela Matoso

10. Em $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos, considere os complexos, não nulos, z e w, tais que:

$$\operatorname{Arg}(\overline{z}) = \operatorname{Arg}(w) \quad \text{e} \quad |z| \times |w| = 1.$$

Podemos afirmar que:

(A) z é o simétrico de w.

(B) z é o inverso de w.

(C) z é o conjugado de w.

(D) z é o simétrico do conjugado de w.

António Pedro Costa Silva

11. Sejam z e w dois números complexos tais que $z = \dfrac{2+i}{1-2i}$ e $w = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Determine o menor valor natural de n de modo que o número complexo $(w-2z)^n \times i^{2022}$ pertença ao conjunto definido por:

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 0 \wedge \operatorname{Im}(z) < 0\}$$

Victor Corveira

12. Considera a função g, de domínio $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2 + x + \cos x\,(\operatorname{sen} x - 2)$.

Mostre que existe pelo menos um ponto com abcissa no intervalo $]-\pi, 0[$ em que a reta tangente ao gráfico de g nesse ponto é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Nuno Leal Ribeiro

13. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, tal que a sua derivada, também de domínio $\mathbb{R}^+$ é definida por:

$$g'(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) - e^x$$

Mostre que o gráfico de g tem exatamente um ponto de inflexão e indique a sua abcissa.

Apresente o resultado na forma $\ln\left(\sqrt{k}\right)$, com $k \in \mathbb{N}$.

José Carlos Pereira

14. Determine em $\mathbb{R}$ o conjunto solução da inequação:

$$(\ln x - 1) \times 4^x \geq \ln\left(x^2\right) - 2$$

José Carlos Pereira

15. Considere as função f e g, diferenciáveis em $\mathbb{R}$, e uma reta r, oblíqua, tais que:

- $f(1) = 1$
- f não tem zeros;
- $g(x) = (f \circ f)(x) + \dfrac{1}{f(x)} - 1$
- a reta r tangente aos gráficos de f e de g no ponto de abcissa 1.

Escreva a equação reduzida da reta r.

José Carlos Pereira

Item Extra Para certos valores reais de a e de b, a função f, de domínio $]-\infty, \pi]$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x+1} - x - 2}{x^2 - x - 2} & \text{se } x < -1 \\[2ex] ax + b & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sen}(3x) + x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} & \text{se } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

é contínua.

Qual é o valor de $\log_8\left(a^b\right)$?

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**3.**	**4.**	**6.1.**	**6.2.**	**8.1.**	**8.2.**	**9.1.**	**9.2.**	**10.**	**12.**	**15.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	12	14	12	14	14	14	12	14	12	14	14	158
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**		**5.**		**7.**		**11**		**13.**		**14.**		**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos												42
Total													200

Coordenação
José Carlos Pereira

Paginação
Antero Neves

Prova Modelo n.º 6 | Grupo Recursos Para Matemática

Proposta de Resolução

José Carlos Pereira

1. Qual dos seguintes é o termo geral de uma sucessão crescente e convergente?

(A) 2^n (B) $2+\frac{1}{n}$ (C) $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (D) $2-\frac{1}{n}$

A) $\lim 2^n = +\infty$ → não é convergente

B) $\lim\left(2+\frac{1}{n}\right) = 2+\frac{1}{+\infty} = 2+0 = 2$ → é convergente

$b_{n+1} - b_n = \cancel{2} + \frac{1}{n+1} - \cancel{2} - \frac{1}{n} = \frac{\cancel{n}-\cancel{n}-1}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$

é decrescente

C) $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ → é convergente ($0<\frac{1}{2}<1$)

$c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow c_1 = \frac{1}{2}$ e $c_2 = \frac{1}{4}$ → $c_2 < c_1$ → não é crescente

D) $\lim\left(2-\frac{1}{n}\right) = 2-\frac{1}{+\infty} = 2-0 = 2$ → é convergente

$d_{n+1} - d_n = \cancel{2} - \frac{1}{n+1}_{(\times n)} - \cancel{2} + \frac{1}{n}_{(\times(n+1))} = \frac{-\cancel{n}+\cancel{n}+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$ → é crescente

R: D

Paulo Conde

2. Seja (a_n) uma progressão aritmética tal que:

1) • $a_3 + a_6 = -2$
2) • $a_4 - a_8 = -8$

Sabe-se que a soma de seis termos consecutivos da sucessão (a_n) é igual a 198.
Determine o primeiro destes seis termos, ou seja, o termo de menor ordem.

Seja r a razão da p.a. (a_n)

2) $a_8 = a_4 + 4r$

então $-4r = \underbrace{a_4 - a_8}_{-8} \Leftrightarrow -4r = -8 \Leftrightarrow r = 2$

1) $a_6 = a_3 + 3r \Leftrightarrow a_6 = a_3 + 3\times 2 \Leftrightarrow a_6 = a_3 + 6$

Substituindo, em $a_3 + \underbrace{a_3 + 6}_{a_6} = -2 \Leftrightarrow 2a_3 = -8 \Leftrightarrow a_3 = -4$

Logo, $a_n = a_3 + (n-3)\cdot r = -4 + (n-3)\cdot 2 = -4 + 2n - 6 = 2n - 10$

Logo, $a_n = a_3 + (n-3) \cdot r = -4 + (n-3) \cdot 2 = -4 + 2n - 6 = 2n - 10$

Sabemos que existe uma ordem p tal que $\underbrace{a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + a_{p+3} + a_{p+4} + a_{p+5}} = 198$

é o que se pretende

$\frac{a_p + a_{p+5}}{2} \times 6 = 3(a_p + a_{p+5})$

Logo, $3(a_p + a_{p+5}) = 198 \Leftrightarrow a_p + a_{p+5} = 66 \Leftrightarrow 2p - 10 + 2(p+5) - 10 = 66 \Leftrightarrow$

$\div 3$; $a_p \to 2p - 10$; $a_{p+5} \to 2(p+5) - 10$

$\Leftrightarrow 2p - 10 + 2p + \cancel{10} - \cancel{10} = 66$

$\Leftrightarrow 4p = 76 \Leftrightarrow p = \frac{76}{4} \Leftrightarrow p = 19$

$\therefore$ O termo de menor ordem é o 19, que é $a_{19} = 2 \times 19 - 10 = 28$ //

António Pedro Costa Silva

3. Seja E, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos $A \subset E, B \subset E$ tais que:

- $P(A) = \frac{3}{5}$
- $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$
- $P(A \cup B) = \frac{9}{10}$

Qual é o valor de $P(\overline{A}|B)$?

(A) $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{2}{5}$ **(C)** $\frac{3}{5}$ **(D)** $\frac{4}{5}$

* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{9}{10} = \frac{3}{5} + P(B) - \frac{1}{5} \Leftrightarrow 9 = 6 + 10P(B) - 2$
(×2) (×10) (×2)

$\Leftrightarrow 5 = 10P(B) \Leftrightarrow P(B) = \frac{5}{10} \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2}$

R: C

$P(\overline{A}|B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

Marta Lopes

4. Na figura 1 está a planificação de um dado equilibrado, com as faces numeradas.

Considere a experiência aleatória, que consiste em lançar o dado seis vezes consecutivas e registar, pela ordem de saída, o número da face que fica voltada para cima em cada um dos lançamentos.

Quantos são os registos possíveis em que os números que não são divisíveis por 9, não estão registados consecutivamente?

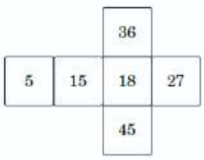


Figura 1

Um registo possível é

5 18 18 27 45 36

O n.º total de registos possível é 6^6

Os únicos não divisíveis por 9 são 5 e 15

Registos possíveis nas condições do enunciado:

1) . 18 18 36 27 45 36 → não existem números não divisíveis por 9

2) . 18 5 36 36 36 36 → só existe um número não divisível por 9

3) . 15 18 36 5 45 18 → existem dois não divisíveis por 9, mas não consecutivamente

4) . 15 18 5 18 18 5 → existem três não divisíveis por 9, mas não consecutivamente

1.º caso: 4^6

2.º caso: $^2C_1 \times {}^6C_1 \times 4^5$

$^6C_1$ → escolher a posição para o 5 ou 15

$^2C_1$ → escolher o 5 ou o 15

3.º caso:

$$\downarrow \; \underset{4}{\_} \; \downarrow \; \underset{4}{\_} \; \downarrow \; \underset{4}{\_} \; \downarrow \; \underset{4}{\_} \; \downarrow$$

→ os dois não divisíveis por 9 têm de estar entre os outros

↓ → posições que podem ocupar

↓

podem ficar entre os restantes quatro (três posições) ou nas pontas (duas posições)

$4^4 \times {}^5C_2 \times 2^2$ → 5 + 5, 5 + 15, 15 + 5, 15 + 15

$^5C_2$ → escolher duas posições entre as cinco para os dois não divisíveis por 9.

4.º caso

$$\downarrow \; \underset{4}{\_} \; \downarrow \; \underset{4}{\_} \; \downarrow \; \underset{4}{\_} \; \downarrow$$

→ os três não divisíveis por 9 podem ocupar três de quatro posições (as duas entre os restantes três mais as duas nas pontas)

$4^3 \times {}^4C_3 \times 2^3$ → 5 + 5 + 5, 5 + 5 + 15, 5 + 15 + 5, 15 + 5 + 5, 15 + 15 + 5, 15 + 5 + 15, 5 + 15 + 15, 15 + 15 + 15

$^4C_3$ → escolher três das quatro posições para os não divisíveis por 9

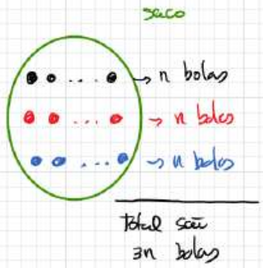
Total: $4^6 + {}^2C_1 \times {}^6C_1 \times 4^5 + 4^4 \times {}^5C_2 \times 2^2 + 4^3 \times {}^4C_3 \times 2^3 = 28672$

Hugo Rocha

5. Um saco não transparente contém bolas de três cores distintas indistinguíveis ao tato, sendo que há, no saco, o mesmo número de bolas de cada cor.

Retiram-se sucessivamente e sem reposição duas bolas do saco.

Sabendo que a probabilidade de as duas bolas extraídas não serem da mesma cor é de 75%, quantas bolas existiam inicialmente no saco?



Seja n o nº de bolas de cada cor. No total são 3n bolas

n.c.p. $3n \cdot (3n-1) = {}^{3n}A_2$ $\underline{\quad}$ 3n bolas $\underline{\quad}$ 3n-1 bolas

n.c.f. $\underbrace{{}^{3}C_2 \times 2!}_{{}^{3}A_2} \times n^2 = 6n^2$

$\underset{n}{\text{cor 1}} \leftrightarrow \underset{n}{\text{cor 2}}$ ou $\underset{n}{\text{cor 1}} \leftrightarrow \underset{n}{\text{cor 3}}$ ou $\underset{n}{\text{cor 2}} \leftrightarrow \underset{n}{\text{cor 3}}$

$\rightarrow 3 \times 2! \times n^2$

P $\dfrac{\cancel{6}^{\,2}\, n^{\cancel{2}}}{3\cancel{n}(3n-1)} = 0{,}75 \Leftrightarrow 2n = 0{,}75(3n-1) \Leftrightarrow 2n - 2{,}25n = -0{,}75 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -0{,}25n = -0{,}75 \Leftrightarrow n = \dfrac{0{,}75}{0{,}25} \Leftrightarrow n = 3$

Há três bolas de cada cor.

∴ Estavam inicialmente no saco nove bolas.

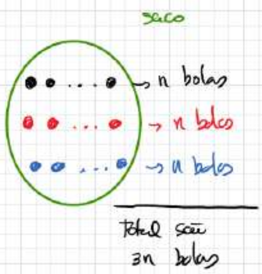
Outra resolução:

Hugo Rocha

5. Um saco não transparente contém bolas de três cores distintas indistinguíveis ao tato, sendo que há, no saco, o mesmo número de bolas de cada cor.

Retiram-se sucessivamente e sem reposição duas bolas do saco.

Sabendo que a probabilidade de as duas bolas extraídas não serem da mesma cor é de 75%, quantas bolas existiam inicialmente no saco?



$\underbrace{P(\text{não serem da mesma cor})}_{0{,}75} = 1 - P(\text{serem da mesma cor})$

$\Leftrightarrow P(\text{serem da mesma cor}) = \underset{\frac{1}{4}}{0{,}25}$

n.c.p.: $3n(3n-1)$

n.c.f.: $3 \times n(n-1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cancel{3n}(n-1)}{\cancel{3n}(3n-1)} = \dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow 4(n-1) = 3n-1 \Leftrightarrow 4n - 4 = 3n - 1 \Leftrightarrow n = 3$

∴ Estão no saco três bolas de cada cor, ou seja, estão no saco nove bolas.

Anabela Matoso

6. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$:

- a superfície esférica, $\mathcal{S}$, definida por

$$(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=5; \quad \rightarrow \quad C(1,-3,2)$$

- o plano α, definido por $x-y+z-9=0$;
- a reta r, definida por

$$(x,y,z)=(0,-1,2)+k\,(1,-1,2)\,,\ k\in\mathbb{R}.$$

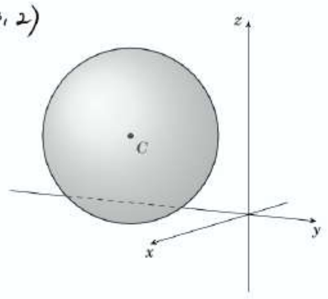


Figura 2

6.1. Seja C o centro da superfície esférica $\mathcal{S}$ e sejam P e Q os pontos de interseção da reta r com a superfície esférica $\mathcal{S}$.

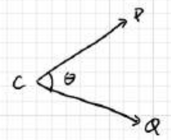
Sendo θ a amplitude, em radianos, do ângulo PCQ, qual é o valor de $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$?

(A) $\frac{2}{5}$ **(B)** $\frac{11}{25}$ **(C)** $\frac{21}{50}$ **(D)** $\frac{3}{7}$

6.2. Determine o perímetro da circunferência que resulta da interseção do plano α com a superfície esférica $\mathcal{S}$.

6.1

• $\theta = P\hat{C}Q = \overrightarrow{CP}\,\hat{}\,\overrightarrow{CQ}$



então $\cos\theta = \cos(\overrightarrow{CP}\,\hat{}\,\overrightarrow{CQ}) = \dfrac{\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CQ}}{\|\overrightarrow{CP}\|\times\|\overrightarrow{CQ}\|}$

1) Determinar as coordenadas de P e de Q

Um ponto genérico de r é $(k, -1-k, 2+2k)$, $k\in\mathbb{R}$. Substituindo na equação de S

vem $(k-1)^2+(-1-k+3)^2+(\cancel{2}+2k-\cancel{2})^2=5 \Leftrightarrow (k-1)^2+(2-k)^2+(2k)^2=5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2-2k+\cancel{1}+\cancel{4}-4k+k^2+4k^2=\cancel{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6k^2-6k \Leftrightarrow 6k(k-1)=0 \Leftrightarrow 6k=0 \ \vee\ k-1=0 \Leftrightarrow k=0 \ \vee\ k=1$

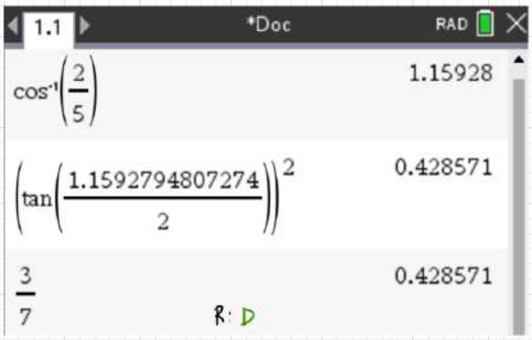
se $k=0$, então $P(0,-1,2)$, se $k=1$, então $Q(1,-1-1,2+2\times1)$, ou seja $Q(1,-2,4)$

2) $\overrightarrow{CP} = P-C = (0,-1,2)-(1,-3,2) = (-1,2,0) \Rightarrow \|\overrightarrow{CP}\| = \sqrt{(-1)^2+2^2+0^2} = \sqrt{5}$

$\overrightarrow{CQ} = Q-C = (1,-2,4)-(1,-3,2) = (0,1,2) \Rightarrow \|\overrightarrow{CQ}\| = \sqrt{0^2+1^2+2^2} = \sqrt{5}$

$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CQ} = (-1,2,0)\cdot(0,1,2) = 0+2+0 = 2$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CQ}}{\|\overrightarrow{CP}\|\times\|\overrightarrow{CQ}\|} = \dfrac{2}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \dfrac{2}{5}$ → Como é escolha múltipla, podemos usar a máquina:



Sem usar a máquina

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1-\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{1-\frac{7}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{\frac{3}{\cancel{10}}}{\frac{7}{\cancel{10}}} = \frac{3}{7}$$

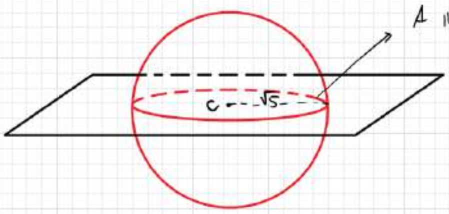
NOTA: $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \underbrace{\sin^2\alpha}_{1-\cos^2\alpha} = 2\cos^2\alpha - 1$

$\underbrace{\cos\theta}_{\frac{2}{5}} = \cos\left(2\cdot\underbrace{\frac{\theta}{2}}_{\alpha}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 \Rightarrow \frac{2}{5} = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 \Leftrightarrow \frac{2}{5} + 1 = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{7}{5}$

$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{7}{10}$

6.2. Se $C(1,-3,2)$ pertencesse a α, era mais simples

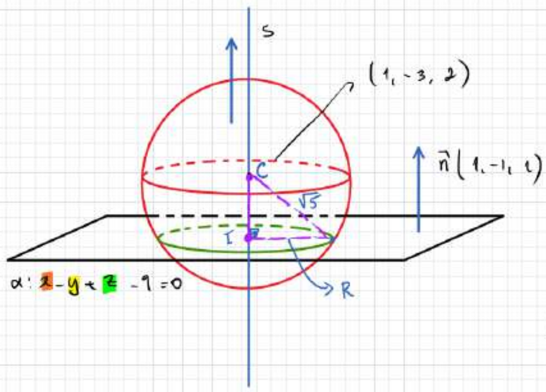


A intersecção era uma circunferência com raio igual à de S.E.

Mas C não pertence a α:

$1-(-3)+2-9=0 \Leftrightarrow -3=0 \rightarrow$ Falso

Como resolver.



Seja $s \perp \alpha$ e $C \in s$

Como $s \perp \alpha$, um vector director de s é $\vec{n}(1,-1,1)$

$\therefore\ s: (x,y,z) = (1,-3,2) + k(1,-1,1),\ k \in \mathbb{R}$

Um ponto genérico é $(1+k, -3-k, 2+k),\ k\in\mathbb{R}$

Substituindo na equação de α, vem:

$1+k-(-3-k)+2+k-9=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+k+3+k+2+k-9=0$

$\Leftrightarrow 3k-3=0 \Leftrightarrow 3k=3 \Leftrightarrow k=1$

I é o ponto de intersecção de s com α

Logo, $I(1+1, -3-1, 2+1)$, ou seja, $I(2,-4,3)$. Então $\overline{IC} = \sqrt{(2-1)^2+(-4+3)^2+(3-2)^2} = \sqrt{3}$

Assim, sendo R o raio da circunferência que resulta da intersecção de α com a S.E. S, pelo teorema de Pitágoras, vem: $R^2 + (\sqrt{3})^2 = (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow R^2 = 2 \underset{R>0}{\Leftrightarrow} R = \sqrt{2}$

$\therefore$ O perímetro é $2\pi\cdot\sqrt{2}$

Paulo Conde

7. Na figura 3 estão representados, num referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica e e o triângulo $[OAB]$.

Sabe-se que:

- C e D são os pontos da circunferência que têm a menor e a maior ordenada, respetivamente;
- a amplitude, em radianos, do ângulo AOD é α e a do ângulo COB é o dobro $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\right)$;
- os pontos A e B pertencem à circunferência e ao segundo e terceiro quadrantes, respetivamente;
- $A(\alpha)$ é a área do triângulo $[OAB]$, em função de α.

Mostre que $A(\alpha) = \frac{\text{sen}(3\alpha)}{2}$.

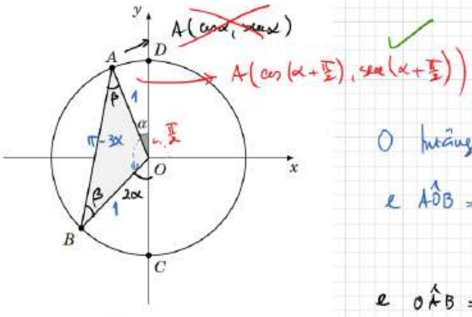


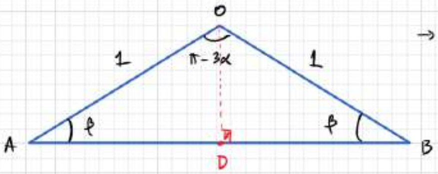
Figura 3

O triângulo $[OAB]$ é isósceles

e $A\hat{O}B = \pi - \alpha - 2\alpha$

$= \pi - 3\alpha$

e $O\hat{A}B = O\hat{B}A = \beta$



$\rightarrow 2\beta + \cancel{\pi} - 3\alpha = \cancel{\pi} \Leftrightarrow \beta = \frac{3\alpha}{2}$

$\text{sen}\,\beta = \frac{\overline{OD}}{1} \Leftrightarrow \overline{OD} = \text{sen}\,\beta$

$\cos\beta = \frac{\overline{BD}}{1} \Leftrightarrow \overline{BD} = \cos\beta$

$$\therefore A_{[OAB]} = \frac{\underset{2\overline{BD}}{\overline{AB}} \times \overline{OD}}{2} = \frac{2\overline{BD} \times \overline{OD}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{2 \cdot \cos\beta \cdot \text{sen}\,\beta}_{\text{sen}(2\beta)} = \frac{1}{2}\,\text{sen}(2\beta) = \frac{\text{sen}(3\alpha)}{2} \,//$$

$\frac{3\alpha}{2} \Rightarrow 2\beta = \cancel{2} \cdot \frac{3\alpha}{\cancel{2}} = 3\alpha$

Tozé Oliveira

8. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2e^x - 3xe^x & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{\ln(e^x + x) - 3x}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

8.1. Estude a função quanto à existência de assíntotas horizontais ao seu gráfico.

8.2. Estude, no intervalo $]-\infty, 0[$, a função f quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

8.1. $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x^2e^x - 3xe^x\right) \overset{(\infty\times 0)}{=} \lim_{x\to-\infty}\left(2x^2e^x\right) - \lim_{x\to-\infty}\left(3xe^x\right) = 2\lim_{y\to+\infty}\left((-y)^2e^{-y}\right) - 3\lim_{y\to+\infty}\left(-ye^{-y}\right) =$$

$y = -x \Leftrightarrow x = -y$

$x \to -\infty \Rightarrow y \to +\infty$

$$= 2\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\frac{y^2}{e^y}} + 3\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^y}} = 2\times 0 + 3\times 0 = 0$$

$$= \frac{1}{\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^y}{y^2}}_{\text{L.N.}}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \qquad = \frac{1}{\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y}}_{\text{L.N.}}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$\therefore$ A recta de equação $y = 0$ é A.H. ao gráfico de f quando $x \to -\infty$.

$x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x + x) - 3x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x + x)}{x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(e^x\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right)}{x} - 3 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{\ln e^x}^{x} + \ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)}{x} - 3$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} + \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)}{x} - 3 \overset{*}{=} 1 - \frac{\ln(1-0)}{+\infty} - 3 =$$

$$* \quad \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right) = \ln\left(1 + \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}}_{\frac{1}{\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}}_{L.N.}}}\right) = \ln(1+0)$$

$$\frac{1}{+\infty} = 0$$

$$= 1 - \frac{0}{+\infty} - 3 = 1 - 0 - 3 = -2$$

$\therefore$ A recta de equação $y = -2$ é A.H. ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

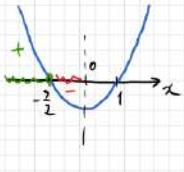
8.2. para $x \in \left]-\infty, 0\right[$, $f(x) = 2x^2 e^x - 3x e^x = e^x(2x^2 - 3x)$

- $f'(x) = (e^x)'(2x^2 - 3x) + e^x(2x^2 - 3x)' = e^x(2x^2 - 3x) + e^x(4x - 3) =$

$$= e^x(2x^2 - 3x + 4x - 3) = e^x(2x^2 + x - 3)$$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{impossível em } \mathbb{R}} \vee 2x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 2 \times (-3)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underset{\in \left]-\infty, 0\right[}{x = -\frac{3}{2}} \vee \underset{\notin \left]-\infty, 0\right[}{x = 1}$$



x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		0
e^x		+	+	+	n.d.
$2x^2 + x - 3$		+	0	−	n.d.
$f'(x)$		+	0	−	n.d.
f		↗	Máx	↘	n.d.

$\therefore$ Em $\left]-\infty, 0\right[$, f é crescente em $\left]-\infty, -\frac{3}{2}\right]$, é decrescente em $\left[-\frac{3}{2}, 0\right[$ e tem máximo em $x = -\frac{3}{2}$.

9. Uma espécie de felinos foi reintroduzida numa área protegida. Os responsáveis estimam que o número de felinos, em centenas, t anos após a reintrodução é dado, aproximadamente, pelo modelo:

$$F(t) = \frac{2}{1+3e^{-0,3t}}, t \geq 0$$

Considere que $t = 0$ corresponde ao início de 2022.

José Carlos Pereira

9.1. Em que ano se espera que o número de felinos desta espécie duplique em relação ao início de 2022?

(A) 2024 **(B)** 2025 **(C)** 2026 **(D)** 2027

9.2. Segundo este modelo, após os primeiros cinco anos existe um instante t_1 tal que quando passa o quíntuplo do tempo que passou até ao instante t_1 o número de felinos desta espécie aumenta cinquenta indivíduos.

Determine o instante t_1 sabendo que ele existe e é único.

Apresente o resultado em anos e meses, com meses arredondados às unidades.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o(s) gráfico(s) que considerar necessário(s) para a resolução do problema, bem como a(s) coordenada(s) de algum (ou alguns) ponto(s) relevante(s), arredondadas às centésimas.

9.1. $F(t) = 2F(0)$

$2F(0)$: nº de felinos no início de 2022

$$F(0) = \frac{2}{1+3e^{-0,3\times 0}} = \frac{2}{1+3\times 1} = \frac{1}{2}$$

$e^0 = 1$

$F(t) = 2F(0) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1+3e^{-0,3t}} = \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 = 1 + 3e^{-0,3t} \Leftrightarrow 1 = 3e^{-0,3t} \Leftrightarrow e^{-0,3t} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow -0,3t = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{-0,3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t \approx 3,66$$

$t = 0 \rightarrow$ início de 2022

$t = 1 \rightarrow$ início de 2023

$t = 2 \rightarrow$ início de 2024

$t = 3 \rightarrow$ início de 2025 $\rightarrow t \approx 3,66 \rightarrow$ Durante o ano de 2025

$t = 4 \rightarrow$ início de 2026

R: B

9.2.

- $t_1 > 5 \rightarrow$ no instante t_1 o nº de felinos é dado por $F(t_1)$
- Passado o quíntuplo do tempo que passou até t_1, ou seja $5t_1$, o nº de felinos aumentou 50 em relação ao nº de felinos no instante t_1, ou seja, passou a ser $F(t_1) + 0,5$

$5t_1$: neste instante o nº de felinos é dado por $F(5t_1)$

50: meia centena

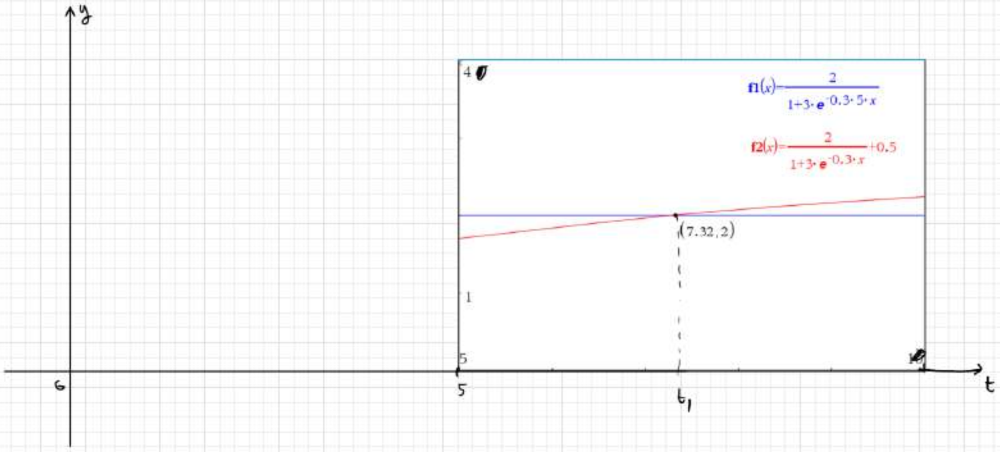
$$\Downarrow$$

$$F(5t_1) = F(t_1) + 0,5$$

$\therefore$ Pretende-se $t > 5$ tal que $F(5t) = F(t) + 0,5$ (t_1 é a solução desta equação)

$\therefore$ Pretende-se $t > 5$ tal que $F(5t) = F(t) + 0,5$ (t_1 é a solução desta equação)

Definir $y_1 = F(5t)$ e $y_2 = F(t) + 0,5$ na janela $[5, 10] \times [0, 4]$:



CA.

1 ano → 12 meses

0,32 ano → x meses

$x = 12 \times 0,32 \approx 4$

$t_1 \approx 7,32$, portanto, sete e quatro meses, aproximadamente

10. Em $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos, considere os complexos, não nulos, z e w, tais que:

$$\operatorname{Arg}(\bar{z}) = \operatorname{Arg}(w) \quad \text{e} \quad |z| \times |w| = 1.$$

Podemos afirmar que:

(A) z é o simétrico de w.

(B) z é o inverso de w.

(C) z é o conjugado de w.

(D) z é o simétrico do conjugado de w.

Anabela Matoso

Seja $z = |z| e^{i\theta}$

Logo $\bar{z} = |z| e^{i(-\theta)}$

é argumento de w

Como $|z| \times |w| = 1 \Leftrightarrow |w| = \frac{1}{|z|}$, vem que $w = |w| e^{i(-\theta)} = \frac{1}{|z|} e^{i(-\theta)}$ → é o inverso de z

De facto $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z| e^{i\theta}} = \frac{e^{i(0)}}{|z| e^{i\theta}} = \frac{1}{|z|} \cdot e^{i(0-\theta)} = \frac{1}{|z|} e^{i(-\theta)} = w$

$\therefore \frac{1}{z} = w \Leftrightarrow z = \frac{1}{w}$

↗ w é inverso de z

↘ z é inverso de w

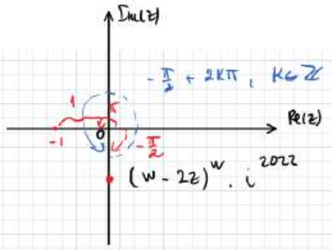
R: B

António Pedro Costa Silva

11. Sejam z e w dois números complexos tais que $z = \dfrac{2+i}{1-2i}$ e $w = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Determine o menor valor natural de n de modo que o número complexo $(w-2z)^n \times i^{2022}$ pertença ao conjunto definido por:

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \underbrace{\mathrm{Re}(z) = 0}_{\text{imaginário puro}} \wedge \mathrm{Im}(z) < 0\}$$ → parte imaginária negativa.



- $(w-2z)^n \cdot i^{2022}$

- $i^{2022} = \underbrace{i^{2020}}_{1} \cdot \underbrace{i^2}_{-1} = -1$ (2020: múltiplo de 4)

- $z = \dfrac{2+i}{1-2i} \times \dfrac{1+2i}{1+2i} = \dfrac{2+4i+i+2i^2}{1^2-(2i)^2} = \dfrac{\cancel{2}+5i-\cancel{2}}{5} = i$ (com $i^2 = -1$)

- $w = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1+i$

Logo, $(w-2z)^n \cdot i^{2022} = (1+i-2i)^n \cdot \underbrace{(-1)}_{e^{i\pi}} = (1-i)^n \cdot e^{i\pi} =$

$= \left(\sqrt{2}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^n \cdot e^{i\pi}$ *

$= (\sqrt{2})^n\, e^{i\left(-\frac{n\pi}{4}\right)} \cdot e^{i\pi}$

$= (\sqrt{2})^n\, e^{i\left(-\frac{n\pi}{4}+\pi\right)}$

$\in A$ se $-\frac{n\pi}{4} + \pi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

* $|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

Sendo α um arg. de $1-i$, vem que

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{-1}{1} = -1$ e $\alpha \in 4.^{\circ}Q \Rightarrow \alpha$ pode ser $-\frac{\pi}{4}$

$\therefore 1-i = \sqrt{2}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

Logo, $-\frac{n\pi}{4} + \pi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \underset{\times 4}{\Leftrightarrow} -n\cancel{\pi} + 4\cancel{\pi} = -2\cancel{\pi} + 8k\cancel{\pi},\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -n = -6 + 8k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = 6 - 8k,\ k \in \mathbb{Z}$

$k=-1 \Rightarrow n = 14 \in \mathbb{N}$

$k=0 \Rightarrow n = 6 \in \mathbb{N}$

$k=1 \Rightarrow n = -2 \notin \mathbb{N}$

$\therefore n = 6$

Victor Correira

12. Considera a função g, de domínio $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2 + x + \cos x\,(\operatorname{sen} x - 2)$.

Mostre que existe pelo menos um ponto com abcissa no intervalo $]-\pi, 0[$ em que a reta tangente ao gráfico de g nesse ponto é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.

derivada no ponto

tem o mesmo declive

$\hookrightarrow y = x$

declive igual a 1

Assim, pretende-se mostrar que $\exists\, c \in]-\pi, 0[\,:\, g'(c) = 1$

1) $g'(x) = \left(x^2 + x + \cos x(\operatorname{sen} x - 2)\right)' = 2x + 1 + (\cos x)'(\operatorname{sen} x - 2) + \cos x(\operatorname{sen} x - 2)' =$

$= 2x + 1 - \operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x - 2) + \cos x \cdot \cos x = 2x + 1 - \operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x + \cos^2 x =$

$= 2x + 1 + 2\operatorname{sen} x + \underbrace{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}_{\cos(2x)} = 2x + 1 + 2\operatorname{sen} x + \cos(2x)$

- g' é contínua em $\mathbb{R}$, por ser a composição, o produto e a soma entre funções contínuas no seu domínio (trigonométricas e polinomiais). Logo, é contínua em $[-\pi, 0] \subseteq \mathbb{R}$

- $g'(-\pi) = -2\pi + 1 + 2\underbrace{\operatorname{sen}(-\pi)}_{0} + \underbrace{\cos(-2\pi)}_{1} = -2\pi + 1 + 2\times 0 + 1 = 2 - 2\pi \Rightarrow g'(-\pi) < 1$

$g'(0) = 2\times 0 + 1 + 2\underbrace{\operatorname{sen}(0)}_{0} + \underbrace{\cos(0)}_{1} = 2 \Rightarrow g'(0) > 1$

$\therefore$ Como g' é contínua em $[-\pi, 0]$ e como $g'(-\pi) < 1 < g'(0)$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists\, c \in]-\pi, 0[\,:\, g'(c) = 1$, pelo que fica provado o que se pretendia.

Nuno Leal Ribeiro

13. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, tal que a sua derivada, também de domínio $\mathbb{R}^+$ é definida por:

$$g'(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) - e^x$$

Mostre que o gráfico de g tem exatamente um ponto de inflexão e indique a sua abcissa.
Apresente o resultado na forma $\ln\left(\sqrt{k}\right)$, com $k \in \mathbb{N}$.

$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

- $g''(x) = \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)\right)' - \underbrace{(e^x)'}_{e^x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)'}{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} - e^x =$

$\overset{*}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}}{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} - e^x = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}e^x \cdot \cancel{(e^x+1)}}{(e^x+1)^{\cancel{2}}(e^x - 1)} - e^x$

$= \frac{e^x}{\underbrace{(e^x+1)(e^x-1)}_{(e^x)^2 - 1^2 = e^{2x} - 1}} - e^x = \frac{e^x}{e^{2x} - 1} - e^x$

* C.A.

$\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)' = \frac{(e^x - 1)'(e^x + 1) - (e^x - 1)(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2}$

$= \frac{e^x(e^x + 1) - (e^x - 1) \cdot e^x}{(e^x + 1)^2}$

$= \frac{\cancel{e^{2x}} + e^x - \cancel{e^{2x}} + e^x}{(e^x + 1)^2}$

$= \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$

• $g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^{2x}-1} - e^x = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^{2x}-1} = e^x \Leftrightarrow \cancel{e^x} = \cancel{e^x}\left(e^{2x}-1\right) \Leftrightarrow$

$e^{2x}-1 \neq 0$
$\forall x \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow 1 = e^{2x}-1 \Leftrightarrow e^{2x} = 2 \Leftrightarrow 2x = \ln 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln 2 \Leftrightarrow x = \ln 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$

$e^x \neq 0$
$\forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x = \ln\sqrt{2}$

x	0		$\ln(\sqrt{2})$		$+\infty$
$g''(x)$	n.d	$+$	0	$-$	
gráfico de g	n.d	$\smile$	P.I	$\frown$	

$\therefore$ O gráfico de g tem exactamente um ponto de inflexão de abcissa $\ln(\sqrt{2})$.

José Carlos Pereira

14. Determine em $\mathbb{R}$ o conjunto solução da inequação:

$$(\ln x - 1) \times 4^x \geq \ln\left(x^2\right) - 2$$

• $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge \underbrace{x^2 > 0}_{x \neq 0}\} = \mathbb{R}^+$

• Neste domínio D, tem-se:

$(\ln x - 1) \cdot 4^x \geq \ln(x^2) - 2 \underset{\substack{x \in D \\ x > 0}}{\Leftrightarrow} (\ln(x) - 1) \cdot 4^x \geq \underbrace{2\ln(x) - 2}_{2(\ln(x) - 1)} \wedge x \in D$

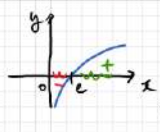
$\Leftrightarrow (\ln(x) - 1) \cdot 4^x - 2(\ln(x) - 1) \geq 0 \wedge x \in D$

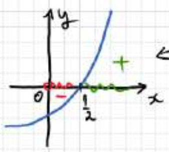
$\Leftrightarrow (\ln(x) - 1)(4^x - 2) \geq 0 \wedge x \in D$

C.A. $\ln(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

$4^x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$





x	0		$\frac{1}{2}$		e		$+\infty$
$\ln(x) - 1$	n.d	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$4^x - 2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$(\ln(x) - 1)(4^x - 2)$	n.d	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\therefore$ O conj. solução é $\left]0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[e, +\infty\right[$.

15. Considere as funções f e g, diferenciáveis em $\mathbb{R}$, e uma reta r, oblíqua, tais que:

- $f(1)=1$ $\Rightarrow (1, f(1)) = (1,1) \in R$
- f não tem zeros;
- $g(x)=(f\circ f)(x)+\dfrac{1}{f(x)}-1$ → x fosse $f^2(x)$ → Derivada *
- a reta r tangente aos gráficos de f e de g no ponto de abcissa 1. $\Rightarrow m_R = f'(1) = g'(1)$

Escreva a equação reduzida da reta r.

$g(1) = (f\circ f)(1) + \frac{1}{f(1)} - 1 = f(f(1)) + \cancel{1} - \cancel{1} = f(1) = 1$ ✓

Derivada da Composta

$(f\circ h)'(x) = f'(h(x)).h'(x)$

1) $g'(x) = (f\circ f)'(x) + \left(\frac{1}{f(x)}\right)' - 1' = f'(f(x)).f'(x) + \dfrac{\overbrace{1'}^{0}f(x) - 1f'(x)}{(f(x))^2} - 0 =$

$= f'(f(x)).f'(x) - \dfrac{f'(x)}{(f(x))^2}$

* $\left(f^2(x)\right)' = 2f(x).f'(x)$

↓

$(u^n)' = n u^{n-1}.u'$

Assim, $\underbrace{g'(1)}_{=f'(1)} = f'(\underbrace{f(1)}_{1}).f'(1) - \dfrac{f'(1)}{(\underbrace{f(1)}_{1})^2} \Leftrightarrow f'(1) = f'(1)\times f'(1) - \dfrac{f'(1)}{1^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 = (f'(1))^2 - 2f'(1)$

$\Leftrightarrow 0 = f'(1)(f'(1)-2)$

$\Leftrightarrow f'(1)=0 \vee f'(1)-2=0$

$\Leftrightarrow \underbrace{f'(1)=0}_{\text{impossível}} \vee f'(1)=2 \Leftrightarrow \boxed{f'(1)=2}$

pois R é oblíqua $\Rightarrow f'(1) = m_R \neq 0$

∴ Como $m_R = g'(1) = f'(1) = 2$, vem que $R: y = 2x + b$. Como $(1,1)\in R$, vem que

$1 = 2\times 1 + b \Leftrightarrow b = -1 \Rightarrow R: y = 2x - 1$ //

Item Extra Para certos valores reais de a e de b, a função f, de domínio $]-\infty, \pi]$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x+1}-x-2}{x^2-x-2} & \text{se } x<-1\\ ax+b & \text{se } -1\le x\le 0\\ \dfrac{\operatorname{sen}(3x)+x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} & \text{se } 0<x\le\pi\end{cases}$$

é contínua.

Qual é o valor de $\log_8(a^b)$?

Como f é contínua, vem que

é contínua em $x=-1$

⇓

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \underbrace{\lim_{x\to -1^+} f(x)}_{-a+b} = \underbrace{f(-1)}_{-a+b}$

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \dfrac{e^{x+1}-x-2}{x^2-x-2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to -1^-} \dfrac{e^{x+1}-x-2}{(x+1)(x-2)} = \underbrace{\lim_{x\to -1^-} \dfrac{1}{x-2}}_{-\frac{1}{3}} \times \lim_{x\to -1^-} \dfrac{e^{x+1}-x-2}{x+1}$

	1	−1	−2
−1		−1	2
	1	−2	0

$\therefore x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$

$\therefore -a + b = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = b}$

$$= -\frac{1}{3}\lim_{y\to 0^-} \frac{e^y - (y-1) - 2}{y} =$$

$y = x+1$
$\Leftrightarrow x = y-1$
$x \to -1^- \Rightarrow y \to 0^-$

$$= -\frac{1}{3}\lim_{y\to 0^-} \frac{e^y - y + 1 - 2}{y}$$

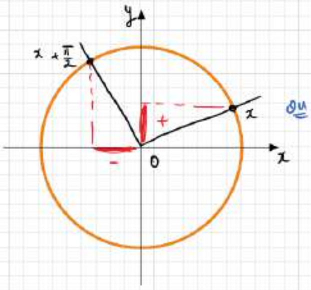
$$= -\frac{1}{3}\left(\underbrace{\lim_{y\to 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{L.N.} - \lim_{y\to 0^-} \frac{\cancel{y}}{\cancel{y}}\right)$$

$$= -\frac{1}{3} \times (1-1) = -\frac{1}{3} \times 0 = 0$$

Como f é contínua, tem que é contínua em $x = 0 \Rightarrow \underbrace{\lim_{x\to 0^-} f(x)}_{a\times 0 + b = b} = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \underbrace{f(0)}_{a\times 0 + b = b}$

$y = 3x$, $x \to 0^+ \Rightarrow y \to 0^+$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(3x) + x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(3x) + x}{-\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x} + \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}}{-\frac{\operatorname{sen} x}{x}}$$



$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x$

ou $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} - \operatorname{sen} x \underbrace{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}_{1}$

$= 0 \times \cos x - 1 \times \operatorname{sen} x$

$= -\operatorname{sen} x$

$$= \frac{3\underbrace{\lim_{y\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{L.N.} + 1}{-\underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{L.N.}} = \frac{3\times 1 + 1}{-1} = -4$$

$\therefore \boxed{b = -4}$

Assim, como $a = b$ e $b = -4$, tem que $a = -4$ e :

$$\log_8\left((-4)^{-4}\right) = \log_8 4^{-4} = -4\log_8 4 = -4 \times \frac{\log_2 4}{\log_2 8} = -4 \times \frac{2}{3} = -\frac{8}{3}$$

$(-4)^{-4} = \frac{1}{(-4)^4} = \frac{1}{4^4} = 4^{-4}$

$\log_2 2^2 = 2$

$\log_2 2^3 = 3$

FIM

Recursos para Matemática

Grupo do Facebook

Prova Modelo de Exame Nacional

Matemática A

Prova 635 | Ensino Secundário | Junho 2023

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado com ⋆ ao lado no número item, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

INSTRUÇÕES DE REALIZAÇÃO

- Para cada resposta, identifique o item.
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
- É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.
- Apresente apenas uma resposta para cada item.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

- A prova inclui um formulário.
- Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
- Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r- raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r- raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r- raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad \left(k \in \{0, \ldots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N}\right)$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u' \ (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad \left(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\right)$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad \left(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\right)$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Roberto Oliveira

⋆ 1. É dada uma sucessão (b_n), definida por $b_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{4n}$.

É possível concluir que 0,00125:

(A) não é termo de (b_n);

(B) é termo de ordem 199;

(C) é termo de ordem 200;

(D) é termo de ordem 201;

Helder Martins

2. Considerem-se (u_n) e (v_n), progressões aritmética e geométrica, respetivamente, com a mesma razão e primeiro termo igual a 2.

Sabendo que a diferença entre u_3 e v_3 é $\dfrac{5}{2}$, calcule a soma de todos os termos de (v_n).

Manuel Oliveira

⋆ 3. Considere a família de funções quadráticas definidas em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = x^2 - 2x\cos(\alpha) + 1 - \operatorname{sen}(\alpha), \quad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Determine, analiticamente, os valores de α para os quais os gráficos das funções desta família são tangentes ao eixo das abcissas.

José Gomes

4.

⋆ 4.1. Considere o lançamento de dez dados cúbicos equilibrados, todos de cores diferentes e com as faces numeradas de 1 a 6. A soma dos valores obtidos nos dez dados foi de 16 pontos. Em quantos desses lançamentos ocorre exatamente uma face com o número 4?

Uma resposta a este problema é

$$10 \times \left({}^{11}C_8 - 9\right)$$

Numa pequena composição justifique esta resposta.

4.2. Seja $\left(E, \mathcal{P}(E), P\right)$ um espaço de probabilidade e $A, B \in \mathcal{P}(E)$ dois acontecimentos possíveis.

Sabe-se que:

- $P\left(A|B\right) = P(B)$
- $P\left[(A \cap B) \,|\, (A \cup B)\right] = \dfrac{1}{5}$
- $P(A) = 4P(B) - 1$

Qual é o valor de $P(B)$?

5. Na figura 1 estão representados, num referencial ortonormado $Oxyz$, o prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$ e a reta r. Sabe-se que:

- os pontos A e B têm coordenadas $(3,5,3)$ e $(-3,3,6)$, respetivamente;
- uma equação vetorial da reta r, que contém o ponto E, é:

$$(x,y,z) = (4,6,-9) + k(-7,-10,-6),\ k \in \mathbb{R}$$

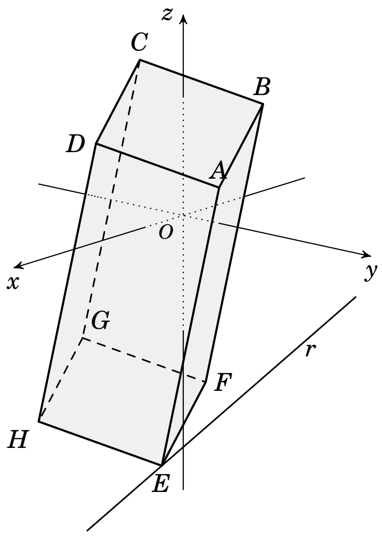


Figura 1

⋆ 5.1. Sejam α um plano que passa no ponto A e $\vec{u}(1,2,1)$ um vetor paralelo a α. A reta r é paralela ao plano α.

As coordenadas do ponto de interseção do plano α com o eixo Oy são:

(A) $(0,2,0)$ **(B)** $(0,1,0)$ **(C)** $(0,-1,0)$ **(D)** $(0,-2,0)$

5.2. Escolhendo, simultaneamente e ao acaso, três dos oito vértices do prisma, qual é a probabilidade do plano definido por esses três pontos conter a reta AE? Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

⋆ 5.3. Determine o volume do prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$.

Paulo Conde

⋆ 6. Durante o pôr e o nascer do Sol, o Sol aparenta estar numa posição que não corresponde à realidade. Esta discrepância deve-se à mudança da direção de propagação da luz quando esta muda do vácuo para a atmosfera e entre as diferentes camadas da atmosfera.

Assumindo um modelo simplista de que a atmosfera é constituída por uma única camada de densidade constante, é possível explicar este desvio através da fórmula:

$$\delta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{n \times R}{R+h}\right) - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{R}{R+h}\right)$$

sendo n o índice de refração da atmosfera, R o raio do planeta, h a espessura da atmosfera e δ a amplitude do desvio.

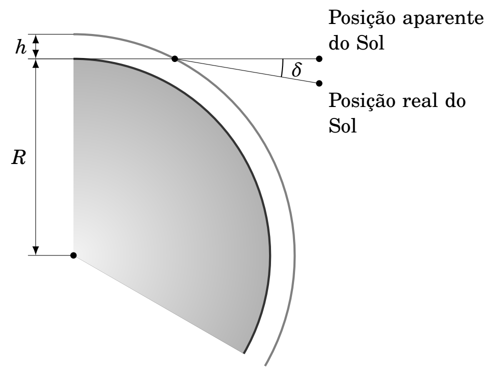


Figura 2

⋆ 6.1. Aplicando este modelo simplista na Terra, ou seja, considerando que a atmosfera da Terra é constituída por uma única camada de índice de refração 1,0003 e que a espessura dessa atmosfera é 320 vezes menor que o seu raio.

A amplitude do desvio, em graus e aproximado às centésimas, é:

(A) 0,20° **(B)** 0,22° **(C)** 0,24° **(D)** 0,26°

⋆ 6.2. Considera-se que os planetas TOI 700 d e Teegarden b têm atmosferas constituídas por uma única camada de índice de refração 1,0003. Estima-se que o raio de TOI 700 d é 12% maior que o raio de Teegarden b.

Seja $k > 100$ o quociente entre o raio e a espessura da atmosfera do planeta Teegarden b. Verifica-se que, em comparação com Teegarden b, se a espessura da atmosfera de TOI 700 d é 5% inferior, então a amplitude do desvio aumenta 9,2%.

Utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora, determine o valor de k.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o(s) gráfico(s) que considerar necessário(s) para a resolução do problema bem como a(s) coordenada(s) de algum (ou alguns) ponto(s) relevante(s);
- indicar o valor de k arredondado às unidades.

Sugestão: na equação do problema, colocar um dos membros a zero.

José Gomes

Vasco Coelho

7. Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação

$$(x-e)\log\sqrt{-x+1} \leq \ln\left(e^{-x}\right)\log(1-x)$$

Apresente a resposta usando a notação de intervalos de números reais.

Frederico Costa

★ 8. Sejam f e g duas funções diferenciáveis, definidas no intervalo $[-a, a]$, com $a > 0$.
Sabemos que:

- f é ímpar;
- g é par e $g(-a) = 0$.

Mostra, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que existe pelo menos um valor de x no intervalo $[-a, a]$ em que $f(x) = g(x)$.

Carlos Frias

★ 9. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = (x-2)\,e^{-0{,}25x}$.
Sejam:

- A o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo das abcissas;
- B um ponto móvel no gráfico de f com abcissa maior que 2;
- C o ponto sobre o eixo das abcissas com a mesma abcissa do ponto B.

Considere g, a função que a cada abcissa do ponto B faz corresponder a área do triângulo $[ABC]$.
Determine, por processos analíticos, a abcissa do ponto B para a qual é máxima a área do triângulo $[ABC]$.

José Carlos Pereira

★ 10. Na figura 3 está representado, no plano complexo, um eneágono regular inscrito numa circunferência centrada na origem.

O ponto P pertence à circunferência e é a imagem geométrica do número complexo $z = 4 + 3i$.

A e B são vértices do polígono e A pertence ao eixo imaginário.

Qual é o número complexo cuja imagem geométrica é o ponto B?

(A) $5e^{i\frac{25\pi}{18}}$ **(B)** $5e^{i\frac{29\pi}{18}}$

(C) $6e^{i\frac{25\pi}{18}}$ **(D)** $6e^{i\frac{29\pi}{18}}$

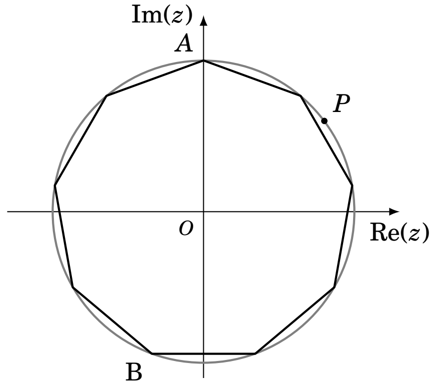


Figura 3

Hugo Rocha

11. Considere $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos. Sejam $z \in \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C}$ e $\theta \in \mathbb{R}$ tais que

$$ze^{i\theta} + we^{i(-\theta)} = 2\cos\theta + 3\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Determine, na forma algébrica, dois números complexos z e w que verifiquem a equação para todo o $\theta \in \mathbb{R}$.

Nuno Leal Ribeiro

12. Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\operatorname{sen}(\pi x)} - 1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \ln k & \text{se } x = 0, \quad k \in \mathbb{R}^+ \\ \ln\left(e^x - 1\right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

⋆ 12.1. Sabendo que $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$, qual é o valor de k?

(A) $\ln \pi$ **(B)** e **(C)** π **(D)** e^{π}

12.2. Determine as equações das assíntotas ao gráfico de f.

José Carlos Pereira

⋆ 13. Seja f uma função duas vezes derivável em $\mathbb{R}$ tal que:

- a reta de equação $y = -3x + 3$ é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0;
- o gráfico de f tem um ponto de inflexão no ponto de abcissa 0.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(f(x)\right)^2 + 2f(x)f'(x) + \left(f'(x)\right)^2}{x^2}$?

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**3.**	**4.1**	**5.1.**	**5.3.**	**6.1.**	**6.2.**	**8.**	**9.**	**10.**	**12.1.**	**13.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	12	14	12	14	12	14	14	14	12	12	14	158

Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**	**4.2.**	**5.2.**	**7.**	**11.**	**12.2**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos						42
Total							200

Coordenação
José Carlos Pereira

Paginação
Antero Neves

1. Podemos escrever a sucessão como:

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{4n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ -\dfrac{1}{4n} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Uma vez que 0,001 25 é positivo, usamos o ramo dos termos de ordem ímpar para construir a equação:

$$\frac{1}{4n} = 0{,}00125 \Leftrightarrow \frac{1}{4n} = \frac{1}{800} \Leftrightarrow n = 200$$

no entanto, 200 é um número par, logo esta igualdade não é verificada e concluímos que 0,001 25 não é termo de (b_n).

Com a ajuda da calculadora podemos também verificar rapidamente se a sucessão toma o valor indicado para alguma das ordens que constam nas opções:

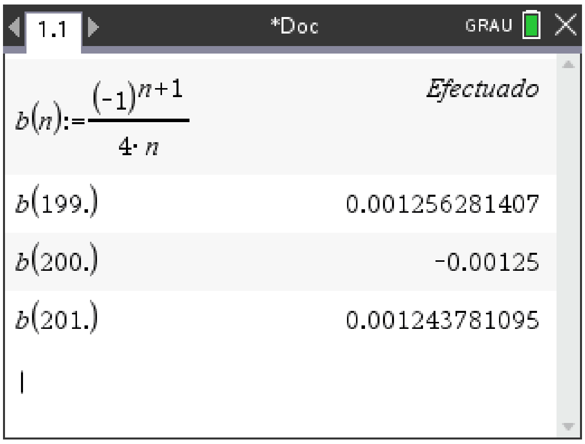


Figura 1: Usando a calculadora TI-*n***spire** *CX II-T*

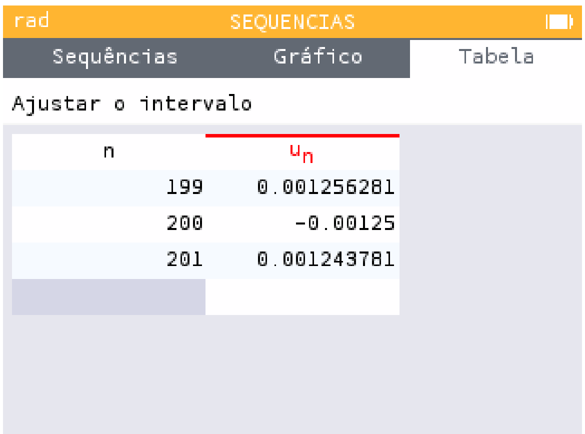


Figura 2: Usando a calculadora NUMWORKS

Opção: **(A)**

2. Uma vez que (u_n) é uma progressão aritmética,

$$u_n = u_k + r(n-k)$$

e como (v_n) é uma progressão geométrica,

$$v_n = v_k \times r^{n-k}$$

Sabemos que $u_1 = v_1 = 2$ e que a razão é igual nas duas progressões.

Também nos é dito que

$$u_3 - v_3 = \frac{5}{2}$$

Logo,

$$u_3 - v_3 = \frac{5}{2} \qquad u_3 = u_1 + r(3-1) = 2 + 2r$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2r - 2r^2 = \frac{5}{2} \qquad v_3 = v_1 \times r^{3-1} = 2r^2$$

$$\Leftrightarrow 4r^2 - 4r + 1 = 0 \qquad r = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4\times 4\times 1}}{2\times 4} = \frac{4\pm\sqrt{0}}{8}$$

$$\Leftrightarrow \qquad r = \frac{1}{2}$$

Assim, a soma dos n primeiros termos de (v_n) é dada por:

$$S_n = 2 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 4\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Como queremos a soma de todos os termos, vamos determinar este valor quando $n \to +\infty$:

$$\lim S_n = \lim\left[4\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\right]$$

$$= 4\left(1 - \lim\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \qquad \textit{Como } 0 < \tfrac{1}{2} < 1$$

$$= 4(1-0) = 4$$

3. Sendo f uma função quadrática, a sua representação gráfica traduz-se numa parábola. Se o objetivo é que esta seja tangente ao eixo das abcissas, então só poderá ter um zero e, nestas condições, $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.

Temos então:

$$\underbrace{1}_{a}x^2 \underbrace{-2\cos(\alpha)}_{b}x + \underbrace{1-\operatorname{sen}(\alpha)}_{c} = 0$$

e queremos:

$$\left(-2\cos(\alpha)\right)^2 - 4\times 1\times\left(1-\operatorname{sen}(\alpha)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2(\alpha) + 4\operatorname{sen}(\alpha) - 4 = 0 \qquad :4$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha) - 1 = 0 \qquad \cos^2\alpha = 1-\operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow 1 - \operatorname{sen}^2(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\operatorname{sen}^2(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\operatorname{sen}(\alpha)\left(\operatorname{sen}(\alpha)-1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\operatorname{sen}(\alpha) = 0 \quad \vee \quad \operatorname{sen}(\alpha) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}(\alpha) = 0 \quad \vee \quad \operatorname{sen}(\alpha) = 1$$

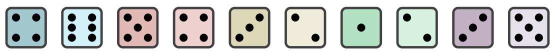
$$\Leftrightarrow \alpha = k_1\pi \quad \vee \quad \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi, \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

Como $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, as únicas soluções obtêm-se quando $k_1 = k_2 = 0$ e são:

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{2}$$

4.

4.1. Comecemos por imaginar o lançamento dos dez dados em que temos exatamente um dado com o número 4

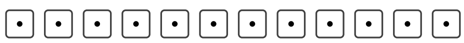


Nota-se imediatamente que esta não é uma das situações que procuramos pois não verifica a restrição à soma de pontos que nos é imposta (16 pontos).

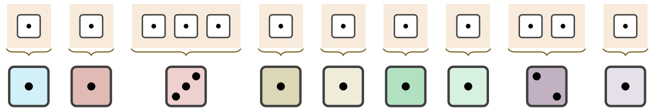
Também percebemos que o número 4, que queremos que saia apenas uma vez, pode sair em qualquer um dos 10 dados.

Para cada uma dessas posições do número 4 temos depois de considerar que há ainda nove dados pelos quais têm de ser distribuídos apenas 12 pontos.

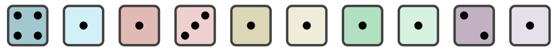
Pensemos então nesses 12 pontos como elementos separados:



Se entre estes colocarmos 8 separações, podemos "criar" nove dados cuja pontuação é a soma de cada grupo criado e que, todos juntos, totalizam 12 pontos. Por exemplo:



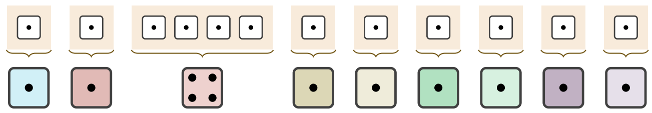
O conjunto dos dez dados ficava:



$$4 + 1 + 1 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 = 16$$

Temos onze espaços entre os 12 pontos individuais. Destes vamos escolher oito para colocar as oito separações e dessa forma criarmos os nove dados. Temos ${}^{11}C_8$ formas de o fazer.

Há, no entanto, separações que não nos importam, como aquela que se apresenta de seguida:



poque apresenta outro dado com o número 4. Esse conjunto pode corresponder a qualquer um dos nove dados e por isso precisamos de retirar estas possibilidades às combinações que calculámos antes.

Assim, uma resposta possível é $10 \times \left({}^{11}C_8 - 9\right)$.

4.2. Com A e B acontecimentos possíveis, temos

$$P\left(A|B\right) = P(B) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(B)$$

$$\Leftrightarrow \quad P(A\cap B) = \left(P(B)\right)^2 \qquad (\star)$$

Sabemos também que

$$P\left[(A\cap B)\,|\,(A\cup B)\right] = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{P\left[(A\cap B)\cap(A\cup B)\right]}{P(A\cup B)} = \frac{1}{5}$$

Como $A\cap B \subseteq A\cup B$ então $(A\cap B)\cap(A\cup B) = A\cap B$

$$\Leftrightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)} = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5P(A\cap B) = 1P(A\cup B)$$

$$\Leftrightarrow 5P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

$$\Leftrightarrow 6P(A\cap B) = P(A) + P(B)$$

Usando ($\star$) e o facto de $P(A) = 4P(B) - 1$, que encontramos no terceiro ponto do enunciado, sai

$$6\left(P(B)\right)^2 - 5P(B) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6 \cdot 1}}{2 \cdot 6}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{5 \pm 1}{12}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2} \quad \vee \quad P(B) = \frac{1}{3}$$

- Se $P(B) = \frac{1}{2}$, vem que

  $$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \text{ e } P(A) = 1$$

  logo

  $$P(A \cup B) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4} > 1$$

  o que é impossível.
- Se $P(B) = \frac{1}{3}$, vem que

  $$P(A \cap B) = \frac{1}{9} \text{ e } P(A) = \frac{1}{3}$$

  logo

  $$P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

  como $0 \leq \frac{5}{9} \leq 1$, este caso é possível.

Concluímos assim que $P(B) = \frac{1}{3}$.

5.

5.1. Queremos encontrar o ponto com coordenadas do tipo $(0, y, 0)$ e que pertence ao plano α.

Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor normal ao plano α.

Sabemos que o vetor $\vec{u}$ e o vetor diretor da reta r, $(-7, -10, -6)$ são paralelos ao plano, logo são perpendiculares ao vetor $\vec{n}$. Estes dois vetores também não são colineares pois as coordenadas homólogas não são diretamente proporcionais:

$$\frac{-7}{1} \neq \frac{-10}{2} \neq \frac{-6}{1}$$

Assim, podemos recorrer a estes vetores para determinarmos um possível $\vec{n}$.

$$\begin{cases} (1,2,1) \cdot (a,b,c) = 0 \\ (-7,-10,-6) \cdot (a,b,c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ -7a - 10b - 6c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b - c \\ 14b + 7c - 10b - 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ c = -4b \end{cases}$$

Logo

$$\vec{n} = (2b, b, -4b)$$

e, se $b = 1$ então $\vec{n}(2, 1, -4)$.

Ficamos com

$$2x + y - 4z + d = 0$$

e, como sabemos que o ponto $A(3,5,3)$ pertence ao plano α:

$$2 \times 3 + 5 - 4 \times 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = 1$$

Sai que:

$$\alpha : 2x + y - 4z + 1 = 0$$

Para encontrarmos a ordenada do ponto que queremos, basta anular a abcissa e a cota, ficando:

$$2 \times 0 + y - 4 \times 0 + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1$$

O ponto pretendido é $(0, -1, 0)$.

Opção: **(C)**

Com auxílio da calculadora

Com a calculadora, podemos determinar o produto externo[1] para obtermos um vetor normal ao plano:

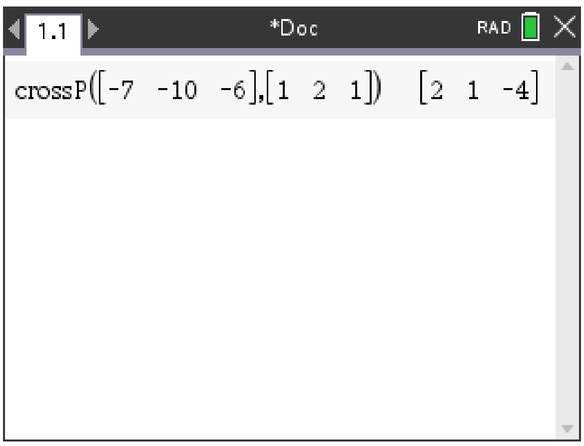


Figura 3: Usando a calculadora TI-*n***spire** *CX II-T*.
menu, 7, C, 2.

[1]Este conteúdo não está contemplado nas aprendizagens essenciais e, por isso, não pode ser usado em questões de desenvolvimento.

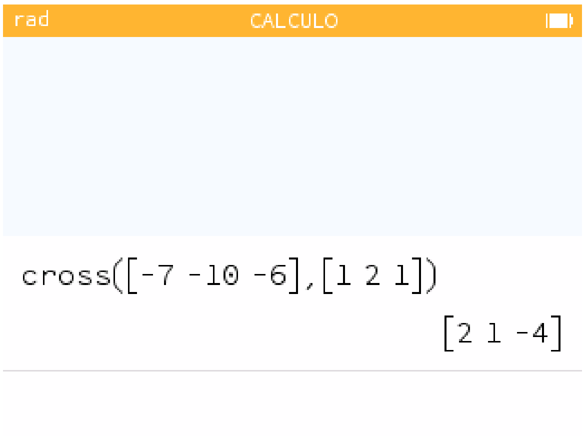


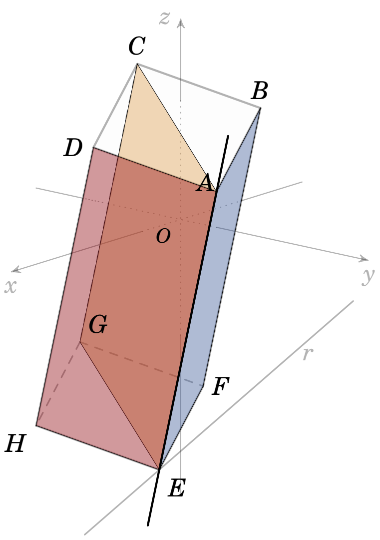
Figura 4: Usando a calculadora NUMWORKS.
Caixa de ferramentas, Matrizes e Vetores, Vetores, cross(U,V)

Embora o resultado não seja exatamente igual, o vetor que obtemos por este método é colinear com o que se determinou analiticamente.

5.2. Seja p a probabilidade pedida. Vamos determinar o valor de p recorrendo à regra de Laplace.

No que diz respeito a casos possíveis, temos apenas de calcular o número de formas que temos de escolher três pontos a partir dos oito disponíveis: ${}^8C_3$.

Para calcular o número de casos favoráveis, observando a figura, podemos concluir que será necessário escolher três vértices que pertençam simultaneamente à face $[ABFE]$ ou à face $[ADHE]$ ou então a $[ACGE]$.



o que corresponde a ${}^4C_3 \times 3$.

Logo

$$p = \frac{{}^4C_3 \times 3}{{}^8C_3} = \frac{12}{56} = \frac{3}{14}$$

5.3. A fórmula de cálculo do volume do prisma é:

$$V = A_{\text{base}} \times \text{altura}$$

A base é um quadrado visto o prisma ser quadrangular regular, então:

$$A_{[ABCD]} = \overline{AB}^2$$

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(3-(-3)\right)^2 + (5-3)^2 + (3-6)^2} = 7$$

Logo, $A_{[ABCD]} = 49$.

A altura do prisma é $\overline{AE}$ e, para a calcular, vamos primeiro determinar as coordenadas de E tendo em conta que é o ponto que pertence à reta r e ao plano ADH.

O plano ADH tem $\overrightarrow{AB} = (-6,-2,3)$ como um vetor normal, logo a equação será do tipo:

$$-6x - 2y + 3z + d = 0$$

e, usando o ponto A, temos:

$$-6 \times 3 - 2 \times 5 + 3 \times 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = 19$$

Então, ADH tem equação:

$$-6x - 2y + 3z + 19 = 0$$

O ponto genérico da reta r, que designaremos por P, tem coordenadas da forma:

$$(4-7k, 6-10k, -9-6k), k \in \mathbb{R}$$

Vamos usar as coordenadas deste ponto para substituir x, y e z na equação do plano e encontrar $k \in \mathbb{R}$ tal que:

$$-6(4-7k) - 2(6-10k) + 3(-9-6k) + 19 = 0$$

Sai que

$$-24 + 42k - 12 + 20k - 27 - 18k + 19 = 0$$

$$\Leftrightarrow 44k - 44 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = 1$$

Em alternativa...

Podíamos procurar o ponto da reta r que verifica a condição

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

Tendo em conta que

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (1-7k, 1-10k, -12-6k)$$

queremos $k \in \mathbb{R}$ de modo que

$$(-6,-2,3) \cdot (1-7k, 1-10k, -12-6k) = 0$$

$$\Leftrightarrow -6+42k-2+10k-36-18k=0$$

$$\Leftrightarrow 44k-44=0$$

$$\Leftrightarrow k=1$$

Para obtermos o ponto E e o vetor $\overrightarrow{AE}$ basta fazer $k=1$ em:

$$P\left(4-7k, 6-10k, -9-6k\right), k \in \mathbb{R}$$

e

$$\overrightarrow{AP}\left(1-7k, 1-10k, -12-6k\right)$$

respetivamente.

Sai que $E\left(-3,-4,-15\right)$ e $\overrightarrow{AE}\left(-6,-9,-18\right)$.

$$\|\overrightarrow{AE}\| = \overline{AE} = \sqrt{\left(-6\right)^2+\left(-9\right)^2+\left(-18\right)^2} = 21$$

Logo,

$$V_{[ABCDEFGH]} = 49 \times 21 = 1029\text{u.v.}$$

6.

6.1. Na expressão dada:

$$\delta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{n \times R}{R+h}\right) - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{R}{R+h}\right)$$

fazemos

$$n = 1{,}0003$$

e

$$h = \frac{R}{320}$$

e ficamos com:

$$\delta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1{,}0003 \times R}{R+\frac{R}{320}}\right) - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{R}{R+\frac{R}{320}}\right)$$

$$= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1{,}0003 \times \cancel{R}}{\cancel{R}\left(1+\frac{1}{320}\right)}\right) - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\cancel{R}}{\cancel{R}\left(1+\frac{1}{320}\right)}\right)$$

Usando a calculadora, com o cuidado de verificarmos se os resultados devolvidos vêm em graus, temos:

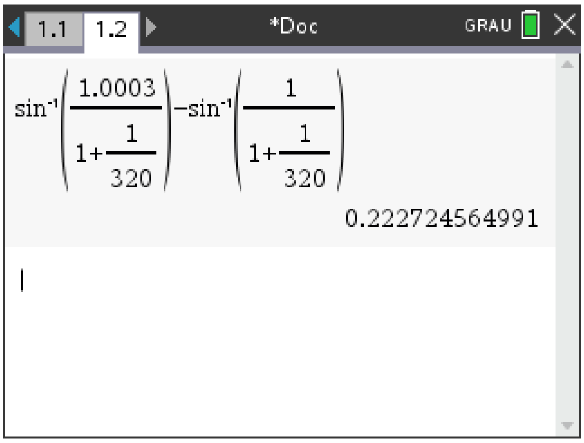


Figura 5: Usando a calculadora TI-n**spire** *CX II-T*.

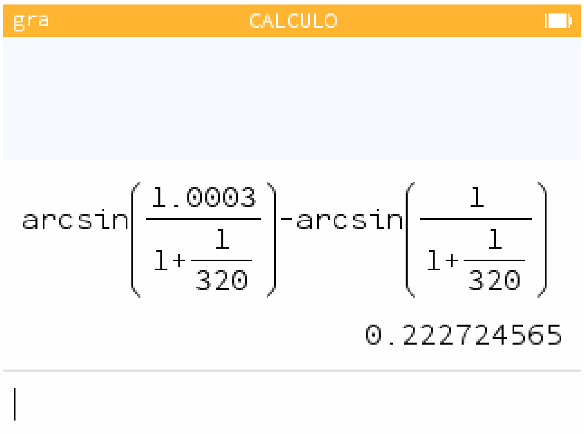


Figura 6: Usando a calculadora NUMWORKS.

Podíamos fazer também a representação de uma função

$$f1(x) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1{,}0003 \times x}{x+\frac{x}{320}}\right) - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{x+\frac{R}{320}}\right)$$

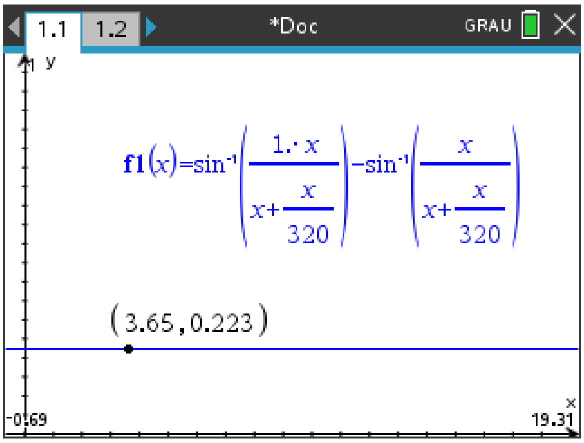


Figura 7: Usando a calculadora TI-n**spire** *CX II-T*.

E, depois de verificarmos que é constante, escolhíamos a opção correta.

Opção: **(B)**

6.2. Nesta questão temos dois planetas. Vamos considerar que:

- TOI 700 d tem: índice de refração n_1, raio R_1 e espessura da atmosfera h_1;
- Teegarden b tem: índice de refração n_2, raio R_2 e espessura da atmosfera h_2.

Dizem-nos que:

$$n_1 = n_2 = 1{,}0003$$

$$R_1 = 1{,}12R_2$$

e ainda que:

$$k = \frac{R_2}{h_2}, \quad k > 100$$

Podemos mudar ligeiramente a expressão da amplitude do desvio:

$$\begin{aligned}\delta &= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{n \times R}{R+h}\right) - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{R}{R+h}\right)\\ &= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{n \times R}{h\left(\frac{R}{h}+1\right)}\right) - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{R}{h\left(\frac{R}{h}+1\right)}\right)\\ &= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\frac{R}{h}n}{\frac{R}{h}+1}\right) - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\frac{R}{h}}{\frac{R}{h}+1}\right)\end{aligned}$$

E assim, para o planeta Teegarden b, temos que:

$$\delta(k) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1{,}0003k}{k+1}\right) - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{k}{k+1}\right), \quad k > 100$$

No caso descrito no enunciado, temos como condição que a espessura da atmosfera de TOI 700 d é 5% inferior à de Teegarden b, logo

$$h_1 = 0{,}95h_2$$

então

$$\frac{R_1}{h_1} = \frac{1{,}12R_2}{0{,}95h_2} = \frac{1{,}12}{0{,}95}k = \frac{112}{95}k$$

o que significa que o desvio para TOI 700 d é dado por $\delta\left(\frac{112}{95}k\right)$ e este valor é 109,2% do desvio $\delta(k)$.

Uma equação que traduz este facto é:

$$\delta\left(\frac{112}{95}k\right) = 1{,}092\,\delta(k),\ k > 100$$

Seguindo a sugestão apresentada, podemos obter:

$$\delta\left(\frac{112}{95}k\right) - 1{,}092\,\delta(k) = 0,\ k > 100$$

Para usar as potencialidades da calculadora podemos definir uma função f como:

$$f(x) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1{,}0003x}{x+1}\right) - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{x+1}\right), \quad x > 100$$

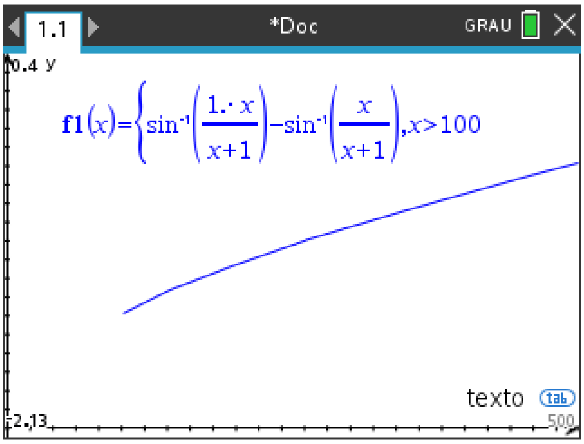


Figura 8: Usando a calculadora TI-*n***spire** *CX II-T*.

e, de seguida, definir uma outra, g, igual ao primeiro membro da equação anterior:

$$g(x) = f\left(\frac{112}{95}x\right) - 1{,}092f(x), \quad x > 100$$

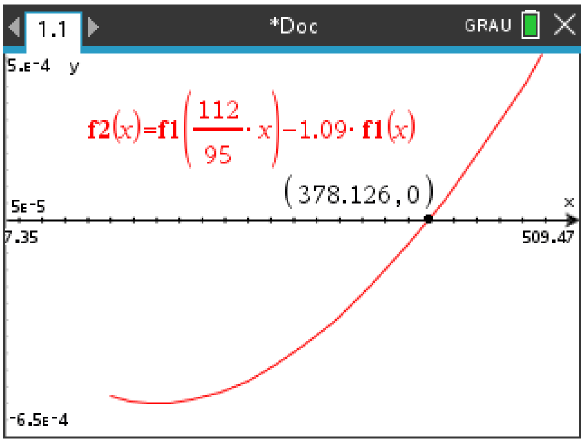
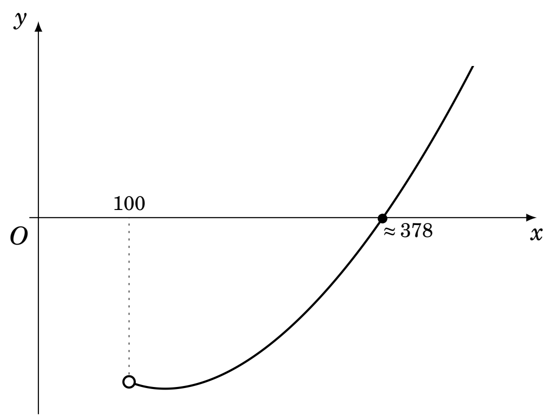


Figura 9: Usando a calculadora TI-*n***spire** *CX II-T*.



Então $k \approx 378$.

7. Comecemos por determinar o domínio onde esta inequação faz sentido e designemos esse domínio por D.

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : \underbrace{-x+1>0}_{1} \wedge \underbrace{e^{-x}>0}_{2} \wedge \underbrace{1-x>0}_{1} \right\}$$

1 $\quad -x+1>0 \Leftrightarrow -x+1>0 \Leftrightarrow x<1$

2 $\quad$ Condição universal em $\mathbb{R}$

Então $D = \left]-\infty, 1\right[$ e para $x \in D$, podemos fazer:

$$(x-e)\log(-x+1)^{\frac{1}{2}} \leq -x\log(1-x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-e}{2}\log(1-x) + x\log(1-x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-e}{2}+x\right)\log(1-x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3x-e}{2}\right)\log(1-x) \leq 0$$

$\times 2$

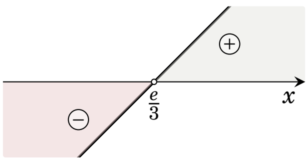
$$\Leftrightarrow \underbrace{(3x-e)\times\log(1-x)}_{P(x)} \boxed{\leq 0}$$

A considerar na solução.

x	$-\infty$	0		$\frac{e}{3}$		1
$3x-e$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$\log(1-x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	

$$y = 3x - e$$

é a equação de uma reta com declive positivo:



Como $\log(x)$ é uma função crescente, podemos concluir que $\log(1-x)$ é uma função decrescente pois o seu gráfico pode ser obtido a partir do gráfico de $\log(x)$ através de uma translação e de uma reflexão de eixo vertical, sendo que esta última transformação muda a monotonia. Assim, a função vai ser positiva até ao seu zero e negativa a partir daí.

A solução é

$$x \in \left]-\infty, 0\right] \cup \left[\frac{e}{3}, 1\right[$$

8. Mostrar que

$$\exists c \in [-a, a] : f(c) = g(c)$$

é equivalente a mostrar que

$$\exists c \in [-a, a] : f(c) - g(c) = 0$$

Seja h a função definida por

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

Como f e g são funções diferenciáveis então são contínuas em $[-a, a]$, assim, h é uma função contínua em $[-a, a]$ pois está definida como a diferença entre duas funções contínuas.

Temos também que

$$\begin{aligned} h(-a) &= f(-a) - \underbrace{g(-a)}_{0} \\ &= -f(a) - 0 \\ &= -f(a) \end{aligned}$$

f é ímpar, logo $f(-a) = -f(a)$

e

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - g(a) \\ &= f(a) \end{aligned}$$

g é par, logo $g(a) = g(-a) = 0$

sai que

$$h(-a) \times h(a) = -f(a) \times f(a) = -\left(f(a)\right)^2 \leq 0$$

Se $h(-a) \times h(a) = 0$ então $f(a) = 0$ e como $g(a) = 0$ então a é solução da equação $f(x) = g(x)$.

Se $h(-a) \times h(a) < 0$, pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir que

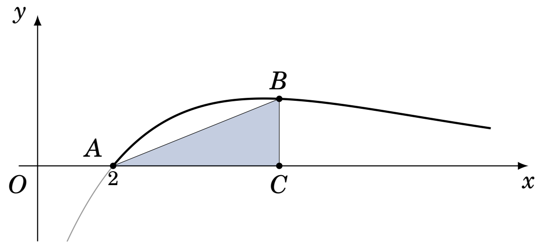
$$\exists c \in [-a, a] : h(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = g(c)$$

Em qualquer caso, $f(x) = g(x)$ tem pelo menos uma solução em $[-a, a]$.

9. Segundo os dados do enunciado, temos que:

- $A(x_A, 0)$, onde x_A é um zero da função f;
- $B\left(x_B, f(x_B)\right)$ com $x_B > 2$;
- $C(x_B, 0)$.

Podemos começar por fazer a representação da função para perceber como será o triângulo:



Determinemos os zeros de f:

$$\left(x-2\right)e^{-0,25x}=0$$

$$\Leftrightarrow x-2=0 \vee \underbrace{e^{-0,25x}=0}_{\text{Condição impossível}}$$

$$\Leftrightarrow x=2$$

como a função só apresenta um zero, então $x_A=2$.

Temos então, para o triângulo $[ABC]$:

- $\overline{AC}=\underbrace{\left|x_B-2\right|}_{\text{Como } x_B>2 \text{ então } x_B-2>0}=x_B-2$
- $\overline{BC}=\left|f\left(x_B\right)\right|=\left|\underbrace{\left(x_B-2\right)}_{>0}\underbrace{e^{-0,25x_B}}_{>0}\right|$

$$=\left(x_B-2\right)e^{-0,25x_B}$$

Sai que:

$$A_{[ABC]}=\frac{\left(x_B-2\right)\times\left(x_B-2\right)e^{-0,25x_B}}{2}$$

Seja A uma função que a cada $x>2$ faz corresponder a área do triângulo $[ABC]$, definida por:

$$A\left(x\right)=\frac{\left(x-2\right)^2e^{-0,25x}}{2}$$

Temos que:

$$A'\left(x\right)=\left(\frac{\left(x-2\right)^2e^{-0,25x}}{2}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(x-2\right)^2e^{-0,25x}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\left(x-2\right)^2\right)'e^{-0,25x}+\left(x-2\right)^2\left(e^{-0,25x}\right)'\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[2\left(x-2\right)e^{-0,25x}+\left(x-2\right)^2\left(-\frac{1}{4}e^{-0,25x}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left(x-2\right)\left(-x+10\right)e^{-0,25x}$$

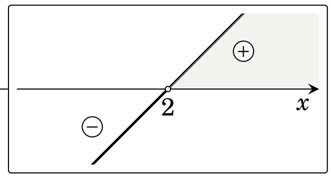
Calculamos os zeros da derivada:

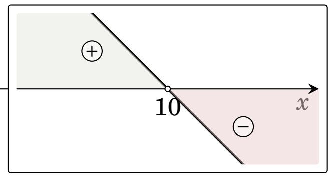
$$A'\left(x\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{8}\left(x-2\right)\left(-x+10\right)e^{-0,25x}=0$$

$$\Leftrightarrow\quad x-2=0 \vee -x+10=0 \vee \underbrace{e^{-0,25x}=0}_{\substack{\text{Condição impossível}\\ \forall x\in\mathbb{R},\, e^{-0,25x}>0}}$$

$$\Leftrightarrow\quad x=2 \vee x=10$$

	2		10	$+\infty$
$\frac{1}{8}\left(x-2\right)$		$+$	$+$	$+$
$-x+10$		$+$	0	$-$
$e^{-0,25x}$		$+$	$+$	$+$
A'		$+$	0	$-$
A		↗	max. $A\left(10\right)$	↘





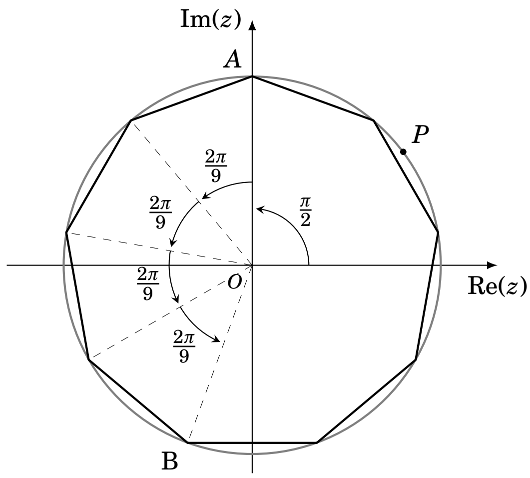
Então a área é máxima quando $x_B=10$.

10. Todas as opções têm números complexos escritos na forma trigonométrica. Os afixos A, B e P estão todos sobre a circunferência centrada na origem então são todos afixos de números complexos com o mesmo módulo.

Comecemos por isso por determinar o módulo de z:

$$|z|=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$$

Uma vez que A pertence à parte positiva do eixo imaginário sabemos que é o afixo de $5e^{i\frac{\pi}{2}}$.



Logo, B é afixo do número $5e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{8\pi}{9}\right)}=5e^{i\frac{25\pi}{18}}$.

Opção: **(A)**

11. Na equação

$$ze^{i\theta}+we^{i(-\theta)}=2\cos\theta+3\operatorname{sen}\theta$$

vamos usar a relação $e^{i\alpha}=\cos(\alpha)+i\operatorname{sen}(\alpha)$

$$z\left(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta\right)+w\left(\cos\left(-\theta\right)+i\operatorname{sen}\left(-\theta\right)\right)=2\cos\theta+3\operatorname{sen}\theta$$

Sabemos que a função cosseno é par e que a função seno é ímpar logo

$$\cos(-\theta)=\cos\theta \qquad \operatorname{sen}(-\theta)=-\operatorname{sen}\theta$$

$$z\left(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta\right)+w\left(\cos\left(\theta\right)-i\operatorname{sen}\left(\theta\right)\right)=2\cos\theta+3\operatorname{sen}\theta$$

$$\Leftrightarrow z\cos\theta+iz\operatorname{sen}\theta+w\cos\theta-iw\operatorname{sen}\theta=2\cos\theta+3\operatorname{sen}\theta$$

$$\Leftrightarrow (z+w)\cos\theta+(iz-iw)\operatorname{sen}\theta=2\cos\theta+3\operatorname{sen}\theta$$

$$\begin{cases} z+w=2\\ iz-iw=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w=2-z\\ iz-i(2-z)=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w=2-z\\ 2iz=3+2i\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w=2-z\\ z=\dfrac{3}{2i}+\dfrac{\cancel{2i}}{\cancel{2i}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w=2-z\\ z=1+\dfrac{3}{2i}\times\dfrac{-i}{-i}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w=2-z\\ z=1-\dfrac{3i}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w=2-\left(1-\dfrac{3i}{2}\right)\\ z=1-\dfrac{3}{2}i\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w=1+\dfrac{3}{2}i\\ z=1-\dfrac{3}{2}i\end{cases}$$

Em alternativa

Tendo em consideração a transformação:

$$e^{i\alpha}=\cos(\alpha)+i\operatorname{sen}(\alpha)$$

vem que

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta$$

$$e^{i(-\theta)}=\cos(-\theta)+i\operatorname{sen}(-\theta)=\cos(\theta)-i\operatorname{sen}(\theta)$$

A função cosseno é par e a função seno é ímpar.

e daqui podemos tirar as seguintes relações:

$$e^{i\theta}+e^{i(-\theta)}=2\cos(\theta) \Leftrightarrow \frac{e^{i\theta}+e^{i(-\theta)}}{2}=\cos\theta$$

$$e^{i\theta}-e^{i(-\theta)}=2i\operatorname{sen}(\theta) \Leftrightarrow \frac{e^{i\theta}-e^{i(-\theta)}}{2i}=\operatorname{sen}\theta$$

Sendo assim

$$\begin{aligned}2\cos\theta+3\operatorname{sen}\theta &= \cancel{2}\times\frac{e^{i\theta}+e^{i(-\theta)}}{\cancel{2}}+3\times\frac{e^{i\theta}-e^{i(-\theta)}}{2i}\\ &= e^{i\theta}+e^{i(-\theta)}+\frac{3}{2i}e^{i\theta}-\frac{3}{2i}e^{i(-\theta)}\\ &= \underbrace{\left(1+\frac{3}{2i}\right)}_{z}e^{i\theta}+\underbrace{\left(1-\frac{3}{2i}\right)}_{w}e^{i(-\theta)}\end{aligned}$$

Logo

$$z=1+\frac{3}{2i}\times\frac{-i}{-i}=1+\frac{3i}{2i^2}=1-\frac{3}{2}i$$

$$w=1-\frac{3}{2i}\times\frac{-i}{-i}=1-\frac{3i}{2i^2}=1+\frac{3}{2}i$$

12.

12.1. Sabemos que

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=f(0)$$

e temos

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{\operatorname{sen}(\pi x)}-1}{x} \quad \text{e} \quad f(0)=\ln k$$

Do limite, sai

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^-}\frac{e^{\operatorname{sen}(\pi x)}-1}{x} &\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to0^-}\left(\frac{e^{\operatorname{sen}(\pi x)}-1}{\operatorname{sen}(\pi x)}\times\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x}\times\pi\right)\\ &= \lim_{x\to0^-}\frac{e^{\operatorname{sen}(\pi x)}-1}{\operatorname{sen}(\pi x)}\times\lim_{x\to0^-}\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x}\times\pi\\ &= \underbrace{\lim_{y\to0^-}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{Limite notável }=1}\times\underbrace{\lim_{z\to0^-}\frac{\operatorname{sen}z}{z}}_{\text{Limite notável }=1}\times\pi\\ &= \pi\end{aligned}$$

Se $x\to0^-$ então

$\operatorname{sen}(\pi x)\to0^-$ e $\pi x\to0^-$

Com $\operatorname{sen}(\pi x)=y$ e $\pi x=z$ concluímos que

$y\to0^-$ e $z\to0^-$

Assim

$$\ln k=\pi\Leftrightarrow k=e^{\pi}$$

Opção: **(D)**

12.2. Vamos estudar a existência de todas as assíntotas ao gráfico de f.

Antes de começar o cálculo das suas equações, podemos fazer uma representação da função na calculadora e, dessa maneira, ter uma ideia de como serão as assíntotas: verticais, horizontais ou oblíquas.

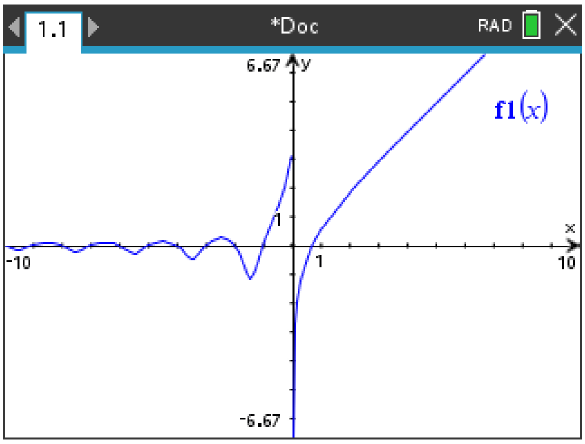


Figura 10: Usando a calculadora TI-*n***spire** *CX II-T*.

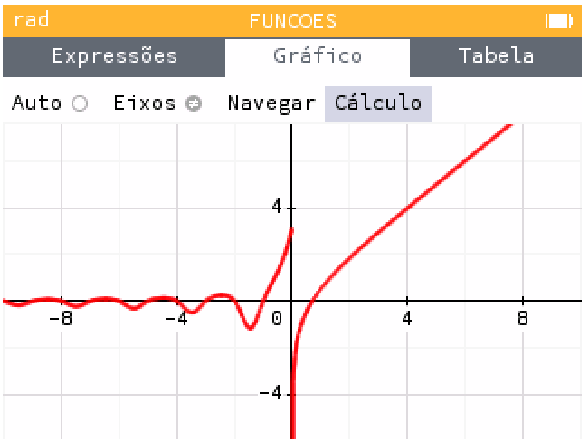


Figura 11: Usando a calculadora NUMWORKS.

Assíntotas verticais:

Para $x \to 0^-$, pela alínea anterior,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \pi$$

Se $x \to 0^+$,

$$\lim_{x\to 0^+} \ln\left(e^x - 1\right) = \ln\left(\underbrace{e^{0^+}}_{1^+} - 1\right) = \ln 0^+ = -\infty$$

Assim, porque um destes limites é infinito, concluímos que $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

Para $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ a função está definida como composição de funções contínuas e, por isso, é contínua. Não há mais assíntotas verticais ao gráfico de f.

Assíntotas não verticais:

Para $x \to -\infty$ parece haver uma assíntota horizontal. Vamos calcular

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{e^{\operatorname{sen}(\pi x)} - 1}{x} = \lim_{x\to -\infty}\left[\left(e^{\operatorname{sen}(\pi x)} - 1\right) \times \frac{1}{x}\right]$$

Temos que:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \operatorname{sen}(\pi x) \leq 1 \\ \Leftrightarrow\ e^{-1} &\leq e^{\operatorname{sen}(\pi x)} \leq e^{1} \quad e > 1 \\ \Leftrightarrow e^{-1} - 1 &\leq e^{\operatorname{sen}(\pi x)} - 1 \leq e - 1 \end{aligned}$$

$$\therefore y = e^{\operatorname{sen}(\pi x)} - 1 \text{ é limitada.}$$

E

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Então podemos concluir que

$$\lim_{x\to -\infty}\left[\left(\underbrace{e^{\operatorname{sen}(\pi x)} - 1}_{\text{limitada}}\right) \times \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{Tende para zero.}}\right] = 0$$

Portanto, $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f quando $x \to -\infty$.

Para $x \to +\infty$, a assíntota, a existir, parece ser oblíqua.

Vamos calcular

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(e^x - 1\right)}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln e^x + \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\overbrace{\ln e^x}^{x}}{x} + \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(1 + \overbrace{e^{-x}}^{e^{-\infty} = 0^+}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{\ln 1}{+\infty}$$

$$= 1 + \frac{\ln 1}{+\infty} = 1 + 0 = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\ln\left(e^x - 1\right) - 1x\right] \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim_{x\to+\infty} \left[\ln\left(e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)\right) - x\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\ln\left(e^x\right) + \ln\left(1 + e^{-x}\right) + x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\cancel{x} + \ln\left(1 + e^{-x}\right) + \cancel{x}\right)$$

$$= \ln(1+0) = \ln 1 = 0$$

Logo, $y = x$ é assíntota ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

13. Queremos determinar

$$\lim_{x\to 0} \frac{(f(x))^2 + 2f(x)f'(x) + (f'(x))^2}{x^2}$$

Observando o numerador da expressão, podemos reparar que é o resultado de um quadrado do binómio:

$$(f(x))^2 + 2f(x)f'(x) + \left(f'(x)\right)^2 = \left(f(x) + f'(x)\right)^2$$

Resolvendo o limite com essa substituição feita, ficamos com:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(f(x) + f'(x))^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{f(x) + f'(x)}{x}\right)^2$$

$$= \left(\lim_{x\to 0} \frac{f(x) + f'(x)}{x}\right)^2 \qquad (\dagger)$$

Uma vez que o declive da reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa 0 é igual a -3 podemos escrever que:

$$-3 = f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \qquad (\star)$$

O ponto de tangência é comum à reta tangente e a função. Usando a equação da reta tiramos que esse ponto tem ordenada

$$-3 \times 0 + 3 = 3$$

ou seja, $f(0) = 3$, fazendo a devida substituição no limite $(\star)$ temos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 3}{x} = -3$$

Voltando ao limite $(\dagger)$, vamos somar e subtrair 3 de forma a construir o limite que queremos.

$$= \left(\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 3 + 3 + f'(x)}{x}\right)^2$$

$$= \left(\underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 3}{x}}_{-3} + \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) + 3}{x}\right)^2$$

$$= \left(-3 + \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) + 3}{x}\right)^2 \qquad (\ddagger)$$

Sendo a função duas vezes derivável e tendo um ponto de inflexão em $x = 0$, podemos dizer que

$$0 = f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0}$$

pelo que vimos antes, $f'(0) = -3$, então

$$0 = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - (-3)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) + 3}{x}$$

Substituindo em $\ddagger$

$$\left(-3 + \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{f'(x) + 3}{x}}_{0}\right)^2 = (-3 + 0)^2 = 9$$

Recursos para Matemática
Grupo do Facebook

Prova Modelo de Exame Nacional
Matemática A
Prova 635 | Ensino Secundário | Junho 2024

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado com ⋆ ao lado no número item, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

INSTRUÇÕES DE REALIZAÇÃO

- Para cada resposta, identifique o item.
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
- É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.
- Apresente apenas uma resposta para cada item.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

- A prova inclui um formulário.
- Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
- Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r- raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r- raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r- raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad \left(k \in \{0, \ldots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N}\right)$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$\left(u^n\right)' = n u^{n-1} u' \; (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$\left(\operatorname{tg} u\right)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$\left(e^u\right)' = u' e^u$

$\left(a^u\right)' = u' a^u \ln a \quad \left(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\right)$

$\left(\ln u\right)' = \frac{u'}{u}$

$\left(\log_a u\right)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad \left(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\right)$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

José Carlos Pereira

⋆ 1. Na figura 1 está representado o diagrama de dispersão de pontos que relaciona duas variáveis x e y.

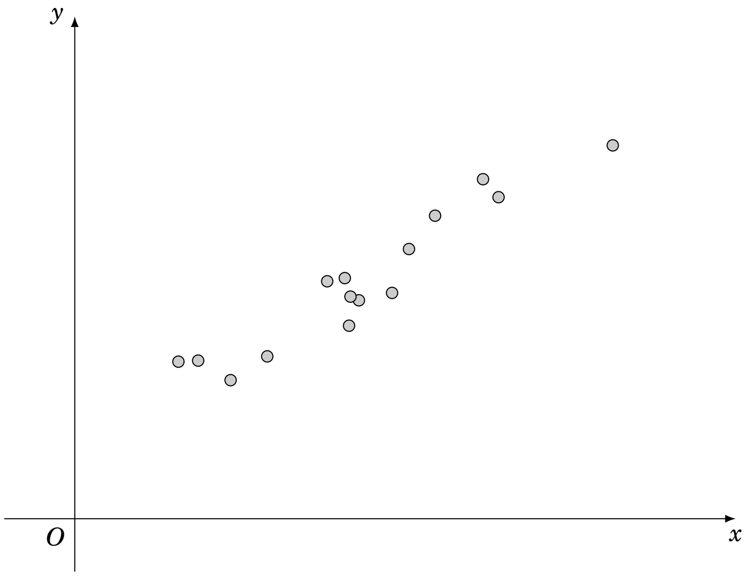


Figura 1

Numa das opções seguintes está o coeficiente de correlação linear, r, e a equação reduzida da reta de regressão linear.

Em qual?

(A) $r \approx 0{,}15$ e $y = 0{,}783x + 116{,}9$

(B) $r \approx 0{,}15$ e $y = -0{,}783x + 116{,}9$

(C) $r \approx 0{,}93$ e $y = 0{,}783x + 116{,}9$

(D) $r \approx 0{,}93$ e $y = -0{,}783x + 116{,}9$

Ricardo Costa

2. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x} + e^x - 2}{x} - 3 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x^2 \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

⋆ 2.1. Estude a continuidade da função f em $x = 0$.

⋆ 2.2. Seja (u_n) uma sucessão tal que $\lim f(u_n) = -3$.

Qual dos seguintes pode ser o termo geral de (u_n)?

(A) $-\dfrac{1}{n+1}$ **(B)** $1 - \sqrt{n}$ **(C)** $1 + n^2$ **(D)** $\dfrac{1}{n+1}$

2.3. Estude a função f, no intervalo $]0, +\infty[$, quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos e determine, caso existam, esses extremos.

Ricardo Ferreira

3. No referencial o.n. $Oxyz$ está representado o prisma triangular $[ABCDEF]$. Sabe-se que:

- a base $[ABC]$ é um triângulo retângulo no vértice B;
- o ponto A tem coordenadas $(0,0,4)$;
- o ponto C tem coordenadas $(5,4,-3)$;
- o ponto B pertence ao eixo Oy;
- o ponto F tem coordenadas $(-8,0,0)$;
- o plano ABC tem equação $3x-2y+z-4=0$.

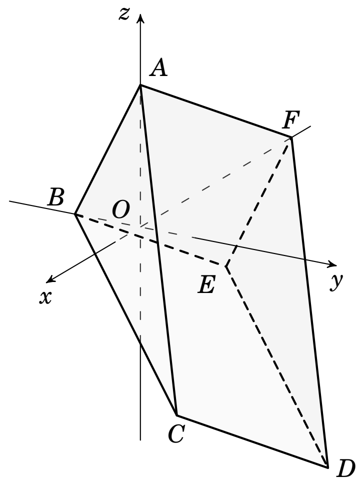


Figura 2

⋆ 3.1. Seja α a amplitude do ângulo BAC. Qual é o valor de $\cos^2 \alpha$?

(A) $\frac{1}{9}$ **(B)** $\frac{9}{25}$ **(C)** $\frac{2}{9}$ **(D)** $\frac{18}{25}$

⋆ 3.2. Determine o volume do prisma.

3.3. Dos seis vértices do prisma serão escolhidos três vértices ao acaso. Determine a probabilidade de esses três vértices formarem um triângulo que tenha pelo menos um vértice pertencente ao plano xOy.

Paulo Conde

4. Considere uma progressão aritmética (u_n) de razão 3.

Sabe-se que a soma dos vinte primeiros termos de ordem ímpar de (u_n) é 1180.

Determine o termo de ordem dez de (u_n).

Paulo Conde

5. Um grupo de amigos visitou um parque de diversões.

⋆ 5.1. O mesmo era constituído por três raparigas e alguns rapazes. Aquando da compra dos bilhetes, os elementos do grupo colocaram-se numa única fila existente; dando continuidade à mesma e de forma a não existirem outras pessoas entre eles. A probabilidade de se terem distribuído de forma a não ficarem duas raparigas do grupo seguidas é $\frac{5}{12}$.

Determine o número de rapazes existentes nesse grupo.

⋆ 5.2. Sabe-se que:

- 2 em cada 5 elementos do grupo eram raparigas;
- 15% dos elementos do grupo não gostaram desta visita;
- 40% dos elementos que não gostaram da visitam eram rapazes.

Escolhe-se ao acaso um rapaz do grupo. Determine a probabilidade de esse rapaz ter gostado da visita ao parque.

Vasco Coelho

⋆ **6.** De duas funções f e g, ambas contínuas em $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- a reta de equação $2x - y = 1$ é assíntota não vertical ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.
- a reta de equação $3x - 2y = 0$ é perpendicular à assíntota não vertical ao gráfico de g quando $x \to -\infty$.
- $g(x) - g(-x) = 0, \forall x, -x \in \mathbb{R}$.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)g(x) - f^3(x)g(x)}{x^4}$?

(A) -7 **(B)** $+\infty$ **(C)** $-\dfrac{16}{3}$ **(D)** $-\dfrac{15}{2}$

Paulo Conde

7. Na figura 3 estão representados, num referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica, o triângulo $[ABC]$ e a reta r, tangente à circunferência e paralela ao eixo das ordenadas.

Sabe-se que:

- o ponto B está situado no primeiro quadrante e pertence à reta r;
- o segmento de reta $[AB]$ contém a origem do referencial;
- o ponto A pertence à circunferência e tem a mesma abcissa que o ponto C, que pertence ao eixo das abcissas;
- o ângulo COB tem de amplitude α $\left(\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[\right)$.

Determine o valor de α para o qual a área do triângulo $[ABC]$ é máxima.

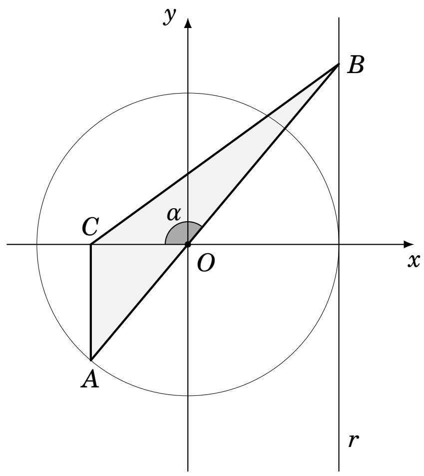


Figura 3

Victor Corveira

⋆ **8.** Um paraquedista salta de um helicóptero. Ao fim de algum tempo, o paraquedas abre.

Admita que a distância, em metros, a que o paraquedista se encontra do solo, t segundos após a abertura do paraquedas, é dada por

$$d(t) = 840 - 6t + 25e^{-1{,}7t}, 0 \leq t \leq 140.$$

Decorridos t_1 segundos após a abertura do paraquedas, a distância a que o paraquedista se encontra do solo é um determinado valor.

Sabe-se que, passado igual período de tempo, a distância do paraquedista ao solo é a terça parte desse valor.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de t_1, sabendo que ele existe e é único, e a distância, para esse valor, a que o paraquedista se encontra do solo.

Na resposta:

- apresente uma equação que permita resolve o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- apresente o valor de t_1;
- apresente o valor da distância, para t_1, a que o paraquedista se encontra do solo.

João Ferreira

9. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 2x$ e $g(x) = \cos(x)\sin(x)$, tais que para um certo número real a positivo, se tem: $\sin(2a) < a - 2$.

Mostre que a equação $(f \circ g)(x) = x - 2$ é possível no intervalo $]0, a[$.

Anabela Matoso

⋆ 10. Seja f uma função duas vezes diferenciável de domínio $\mathbb{R}$ e seja g uma função contínua de domínio $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.
Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} g(x)$
- a reta de equação $x + 2y = 6$ é tangente ao gráfico da função f', primeira derivada da função f, no ponto de abcissa zero.

Considere as proposições seguintes:

I. A reta de equação $x = 2$ é uma assíntota ao gráfico da função g.

II. A reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa zero tem declive $-\frac{1}{2}$.

III. O gráfico da função f admite um ponto de inflexão de abcissa zero.

Justifique que as proposições **I**, **II** e **III** são falsas.
Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

Patrícia Silva

⋆ 11. Seja z_1 a solução, em $\mathbb{C}$, da equação $z^2 - 2z = -2$ em que $\text{Im}(z)\text{Re}(z) < 0$.
Então o afixo do número $i^{23}(-z_1)$ é um ponto que pertence:

(A) à bissetriz do 1.º quadrante e à circunferência centrada na origem e de raio $\sqrt{2}$.

(B) à circunferência trigonométrica.

(C) ao 4.º quadrante.

(D) à bissetriz do 3.º quadrante e à circunferência centrada na origem e de raio $\sqrt{2}$.

Helder Martins

12. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \sqrt{3} - i$ e $w = 3e^{i\theta}$, $\theta \in]0, \pi[$.
Sabe-se que $z^2 \times \overline{w}$ é um número real negativo.
Sem recorrer à calculadora, determine w na forma algébrica.

José Carlos Pereira

⋆ 13. Sejam a e b números reais, não nulos, tais que os gráficos das funções f e g, ambas de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = ax^2 + bx$ e $g(x) = 2ax^2 + 1$ têm apenas um ponto em comum.
Mostre que a abcissa desse ponto é igual ao dobro do inverso de b e determina a sua ordenada.

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	**8.**	**10.**	**11.**	**13.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	12	12	14	14	14	12	14	14	12	14	158
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.3.**		**3.3.**		**4.**		**7.**		**9.**		**12**		**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos												42
Total													200

Coordenação
José Carlos Pereira

Paginação
Antero Neves

Resolução da prova Modelo n.º 8 – Grupo Recursos para a Matemática

1. A reta de regressão tem declive positivo, logo, como o coeficiente de correlação tem o mesmo sinal do declive da reta de regressão, o coeficiente de correlação é positivo.
Em relação ao valor absoluto do coeficiente de correlação, das opções dadas só poderá ser $0,93$, pois, ao observar a nuvem de pontos, percebemos que há uma correlação linear forte entre as variáveis.
Opção: (C)

2.

2.1. $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{e^{2x}+e^{x}-2}{x}-3\right) = -3+\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}+e^{x}-2}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} -3+\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1+e^{x}-1}{x} =$$

$$= -3+2\times\lim_{2x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1}{2x}+\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{x}-1}{x} = -3+2\times 1+1 = 0$$

$$f(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x^2\ln x\right) \overset{(0\times\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+}(x)\times\lim_{x\to 0^+}(x\ln x) = 0\times\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right) = 0\times\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right) =$$

$$= 0\times\left[-\lim_{\frac{1}{x}\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)\right] = 0\times(-0) = 0$$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, a função f é contínua em $x=0$.

2.2.

- $\lim(u_n) = \lim\left(-\frac{1}{n+1}\right) = -\frac{1}{+\infty} = 0^-$

$\lim f(u_n) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ Esta não é a opção correta.

- $\lim(u_n) = \lim\left(1-\sqrt{n}\right) = 1-(+\infty) = -\infty$

$$\lim f(u_n) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{2x}+e^{x}-2}{x}-3\right) = \frac{e^{-\infty}+e^{-\infty}-2}{-\infty}-3 = \frac{0+0-2}{-\infty}-3 = 0-3 = -3$$

Esta opção está correta.

- $\lim(u_n) = \lim\left(1+n^2\right) = 1+(+\infty) = +\infty$

$\lim f(u_n) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^2\ln x\right) = (+\infty)^2\times(+\infty) = +\infty$ Esta opção não está correta.

- $\lim(u_n) = \lim\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{+\infty} = 0^+$

$\lim f(u_n) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ Esta não é a opção correta.

2.3. Se $x \in \left]0,+\infty\right[$, então $f(x) = x^2 \ln x$

$$f'(x) = \left(x^2 \ln x\right)' = \left(x^2\right)' \times \ln x + x^2 \times (\ln x)' = 2x\ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x\ln x + x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x\ln x + x = 0 \Leftrightarrow x(2\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee \ln x = \ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) \Leftrightarrow x = 0 \vee x = e^{-\frac{1}{2}}$$

Como $x \in \left]0,+\infty\right[$, $x = e^{-\frac{1}{2}}$

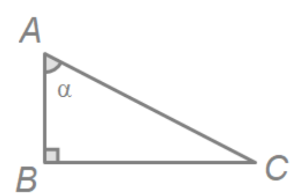
x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
Zeros e sinal de f'	n.d.	$-$	0	$+$
Variação e extremos de f	n.d.	$\searrow$	$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$	$\nearrow$

$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$ é um mínimo relativo.

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \times \ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = e^{-1} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e}$$

3.

3.1. Consideremos o triângulo retângulo $[ABC]$.



$B(0,b,0)$, sendo $b < 0$

Como $B \in ABC$, vem que $0 - 2b + 0 - 4 = 0 \Leftrightarrow b = -2$, logo $B(0,-2,0)$.

Assim, $\overrightarrow{AB} = (0,-2,0) - (0,0,4) = (0,-2,-4)$ e $\overrightarrow{AC} = (5,4,-3) - (0,0,4) = (5,4,-7)$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{(0,-2,-4)\cdot(5,4,-7)}{\sqrt{4+16} \times \sqrt{25+16+49}} = \frac{-8+28}{\sqrt{20}\times\sqrt{90}} = \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$\cos^2(\alpha) = \left(\frac{2}{3\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{4}{9\times 2} = \frac{2}{9}$$

Opção: (C)

3.2. $V_{prisma} = Área_{[ABC]} \times \overline{FF'}$, sendo F' a projeção ortogonal do ponto F no plano ABC.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo $[ABC]$, vem que $\overline{BC} = \sqrt{90-20} = \sqrt{70}$, logo

$$Área_{[ABC]} = \frac{\sqrt{70}\times\sqrt{20}}{2} = 5\sqrt{14}$$

Seja r a reta perpendicular ao plano ABC e à qual pertence o ponto F:

$r:(x,y,z) = (-8,0,0) + k(3,-2,1), k \in \mathbb{R}$

O ponto F' é o ponto de interseção da reta r com o plano ABC.

$$\begin{cases} x = -8+3k \\ y = -2k \\ z = k \\ 3x-2y+z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8+3k \\ y = -2k \\ z = k \\ 3(-8+3k)-2(-2k)+k-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8+3\times 2 \\ y = -2\times 2 \\ z = 2 \\ k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \\ z = 2 \\ k = 2 \end{cases}$$

Logo $F'(-2,-4,2)$

A altura do prisma é $\overline{FF'} = \sqrt{(-8+2)^2+(-4-0)^2+(2-0)^2} = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}$

Então, $V_{prisma} = 5\sqrt{14}\times\sqrt{56} = 5\sqrt{14}\times 2\sqrt{14} = 10\times 14 = 140\ u.v.$

3.3. $\text{n.º c.p.} = {}^{6}C_3 = 20$

Há dois vértices do prisma que pertencem ao plano xOy: os vértices B e F, logo:

$\text{n.º c.f.} = {}^{2}C_1 \times {}^{4}C_2 + {}^{2}C_2 \times {}^{4}C_1 = 16$

A probabilidade pedida é igual a $\dfrac{16}{20} = \dfrac{4}{5}$

4. Seja $u_n = u_1 + (n-1)\times 3$, ou seja, $u_n = 3n + u_1 - 3$.

Consideremos apenas os números naturais ímpares, ou seja $n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}$

A sucessão definida por $v_k = 3(2k-1)+u_1-3 \Leftrightarrow v_k = 6k+u_1-6$ é a sucessão cujos termos são os termos de ordem ímpar de (u_n).

$$S_{20} = 1180 \Leftrightarrow \frac{v_1+v_{20}}{2}\times 20 = 1180 \Leftrightarrow \frac{u_1+114+u_1}{2}\times 20 = 1180 \Leftrightarrow 2u_1+114 = 118 \Leftrightarrow u_1 = 2$$

Assim, $u_{10} = 30+2-3 \Leftrightarrow u_{10} = 29$

5.

5.1. Seja n o número de rapazes.

n rapazes

× H × H × H × . . . × H × H ×

× → n+1 lugares disponíveis para as raparigas

Observando o esquema ao lado, vemos que:

$$\text{n.º c.p.} = (n+3)!$$

$$\text{n.º c.f.} = {}^{n+1}C_3 \times 3! \times n! = {}^{n+1}A_3 \times n! = (n+1)n(n-1)n! = (n+1)! \times n(n-1)$$

$$P(\text{«Não ficarem duas raparigas seguidas»}) = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{(n+1)! \times n(n-1)}{(n+3)!} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{(n+1)!} \times n(n-1)}{(n+3)(n+2)\cancel{(n+1)!}} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{(n+3)(n+2)} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow 12n(n-1) = 5(n+3)(n+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12n^2 - 12n = 5n^2 + 25n + 30 \Leftrightarrow 7n^2 - 37n - 30 = 0 \underset{F.R.}{\Leftrightarrow} n = -5 \vee n = 6$$

Como $n \in \mathbb{N}$, vem que $n = 6$, logo no grupo havia 6 rapazes.

5.2. Consideremos os acontecimentos:

H: «O amigo escolhido é um rapaz» e G: «O amigo escolhido gostou da visita»

Sabemos que: $P(\overline{H}) = \frac{2}{5}$, $P(\overline{G}) = 0{,}15$ e $P(H \mid \overline{G}) = 0{,}4$

Pretendemos determinar $P(G \mid H)$

$$P(G \mid H) = \frac{P(G \cap H)}{P(H)}$$

$$\circ\ P(H) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\circ\ P(H \mid \overline{G}) = 0{,}4 \Leftrightarrow \frac{P(H \cap \overline{G})}{P(\overline{G})} = 0{,}4 \Leftrightarrow P(H) - P(H \cap G) = 0{,}4 \times 0{,}15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}6 - P(H \cap G) = 0{,}06 \Leftrightarrow P(H \cap G) = 0{,}54$$

Logo, $P(G \mid H) = \frac{0{,}54}{0{,}6} = 0{,}9$

6. Uma vez que a reta de equação $y=2x-1$ é assíntota ao gráfico de f quando $x \to +\infty$, sabemos que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$.

Como a reta de equação $y=\dfrac{3}{2}x$ é perpendicular à assíntota ao gráfico de g quando $x \to -\infty$, sabemos que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x}=-\dfrac{2}{3}$.

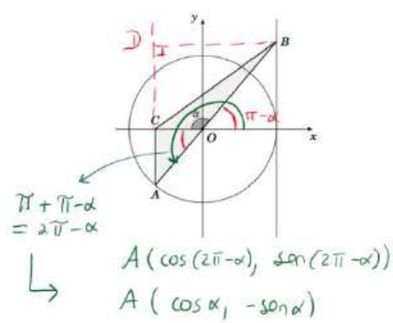
$g(x)=g(-x), \forall x,-x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow g$ é uma função par, logo como $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x}=-\dfrac{2}{3}$, vem que

$$-\lim_{-x\to+\infty}\frac{g(x)}{-x}=-\frac{2}{3}\Leftrightarrow -\lim_{-x\to+\infty}\frac{g(-x)}{-x}=-\frac{2}{3}\underset{y=-x}{\Leftrightarrow}\lim_{y\to+\infty}\frac{g(y)}{y}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)g(x)-f^3(x)g(x)}{x^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)g(x)\left(1-f^2(x)\right)}{x\times x\times x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{1-f^2(x)}{x^2}=$$

$$=2\times\frac{2}{3}\times\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}-\lim_{x\to+\infty}\frac{f^2(x)}{x^2}\right)=\frac{4}{3}\times\left(\frac{1}{+\infty}-\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\right)^2\right)=\frac{4}{3}\times\left(0-2^2\right)=-\frac{16}{3}$$ Opção: (C)

7. Seja D a projeção ortogonal do ponto B na reta AC .



$$Área_{[ABC]}=\frac{\overline{AC}\times\overline{DB}}{2}$$

$$A(\alpha)=\frac{\operatorname{sen}\alpha\times(-\cos\alpha+1)}{2}=\frac{1}{2}(-\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\times 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\alpha)+\operatorname{sen}\alpha\right)$$

$$A'(\alpha)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\times 2\cos(2\alpha)+\cos\alpha\right)=\frac{1}{2}\left(-\cos(2\alpha)+\cos\alpha\right)$$

$$A'(\alpha)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(-\cos(2\alpha)+\cos\alpha\right)=0\Leftrightarrow-\cos(2\alpha)+\cos\alpha=0\Leftrightarrow\cos\alpha=\cos(2\alpha)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha=2\alpha+k\times 2\pi\vee\alpha=-2\alpha+k\times 2\pi\ ,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow-\alpha=k\times 2\pi\vee 3\alpha=k\times 2\pi\ ,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha=-k\times 2\pi\vee\alpha=k\times\frac{2\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$$

Como $\alpha\in\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$, vem que $\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$

x	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
Zeros e sinal de A'	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.
Variação e extremos de A	n.d.	↗	$A\left(\frac{2\pi}{3}\right)$	↘	n.d.

A área do triângulo é máxima, quando $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

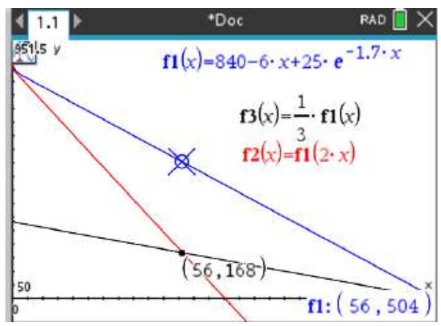
8. A equação que pretendemos resolver é $d\left(2t_1\right) = \frac{1}{3} d\left(t_1\right)$

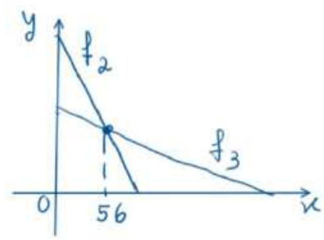
Consideremos as funções definidas por:

$f_1(x) = 840 - 6x + 25e^{-1{,}7x}$

$f_2(x) = f_1\left(2x\right)$

$f_3(x) = \frac{1}{3} f_1(x)$





Recorrendo à calculadora determinamos a abcissa do ponto de interseção dos gráficos das funções f_2 e f_3.

Resposta: $t_1 = 56$ segundos e no instante t_1 o paraquedista encontra-se a 504 m do solo.

9. $\left(f \circ g\right)\left(x\right) = f\left(g(x)\right) = f\left(\cos x \operatorname{sen} x\right) = 2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen}(2x)$

$\operatorname{sen}(2x) = x - 2 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) - (x-2) = 0$

Consideremos a função h definida por $h(x) = \operatorname{sen}(2x) - (x-2)$.

(1) h é contínua em $\mathbb{R}$ por ser definida pela diferença de duas funções contínuas em $\mathbb{R}$, uma trigonométrica e uma afim. Em particular, h é contínua em $\left[0, a\right]$.

(2) $h(0) = \operatorname{sen}(0) - (0-2) = 2 > 0$

$h(a) = \operatorname{sen}(2a) - (a-2) < 0$, pois, $\operatorname{sen}(2a) < a - 2 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2a) - \left(a-2\right) < 0$

Assim $h(0) \times h(a) < 0$.

Por (1) e (2) e atendendo ao Corolário do Teorema de Bolzano, $\exists c \in \left]0, a\right[: h(c) = 0$, ou seja, a equação $h(x) = 0$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $\left]0, a\right[$ e, portanto, a equação $\left(f \circ g\right)\left(x\right) = x - 2$ é possível em $\left]0, a\right[$.

10. A reta de equação $x = 2$ é uma assíntota (vertical) ao gráfico da função g, se pelo menos um dos limites laterais quando $x \to 2$ for infinito. Como f é diferenciável em $\mathbb{R}$, f é contínua em $\mathbb{R}$, logo $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$, ou seja, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ é um número real. Assim, $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ é um número real, logo a reta de equação $x = 2$ não é assíntota do gráfico de g e, portanto, a afirmação I é falsa.

Uma vez que a reta de equação $y = -\frac{1}{2}x + 3$ é tangente ao gráfico da função f', primeira derivada da função f, no ponto de abcissa zero, sabemos que $f'(0) = 3$, logo o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa zero é 3 e, portanto, a afirmação II é falsa.

Como f é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$, as abcissas dos eventuais pontos de inflexão do gráfico de f são zeros da função f''. Sabemos que $f''(0) = -\frac{1}{2}$, logo $f''(0) \neq 0$, portanto o gráfico de f não admite um ponto de inflexão de abcissa 0. Concluímos assim que a afirmação III também é falsa.

11. $z^2 - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \Leftrightarrow z = \dfrac{2 \pm 2i}{2} \Leftrightarrow z = 1 + i \vee z = 1 - i$

Como $\mathrm{Im}(1-i) \times \mathrm{Re}(1-i) = -1 \times 1 = -1 < 0$, $z_1 = 1 - i$ e $-z_1 = -1 + i$

$$i^{23} \times (-1+i) = i^{20} \times i^3 \times (-1+i) = \underbrace{\left(i^4\right)^5}_{1} \times (-i) \times (-1+i) = i + 1$$

$$Arg(1+i) = \frac{\pi}{4} \quad \wedge \quad |1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Assim, o afixo de z_1 pertence à bissetriz do primeiro quadrante e à circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{2}$. **Opção: (A)**

12. $z = \sqrt{3} - i = \rho e^{i\alpha}$, sendo $\rho \in \mathbb{R}^+$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\rho = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Como $\alpha \in 4^{\text{o}}\text{Q}$, $\alpha = -\frac{\pi}{6}$, por exemplo.

Assim $z = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

$$z^2 \times \overline{w} = \left(2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}\right)^2 \times 3e^{i(-\theta)} = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} \times 3e^{i(-\theta)} = 12e^{i\left(-\frac{\pi}{3} - \theta\right)}$$

Como $z^2 \times \overline{w}$ é um número real negativo, sabemos que $-\frac{\pi}{3}-\theta=\pi+k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

$$-\frac{\pi}{3}-\theta=\pi+k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow -\theta=\frac{\pi}{3}+\pi+k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta=-\frac{4\pi}{3}-k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Como $\theta\in\left]0,\pi\right[$, para $k=-1$ vem que $\theta=-\frac{4\pi}{3}+2\pi=\frac{2\pi}{3}$

$$w=3e^{i\frac{2\pi}{3}}=3\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=3\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=3\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

13. Uma vez que os gráficos das funções têm exatamente um ponto em comum, a equação $f(x)=g(x)$ tem exatamente uma solução.

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow ax^2+bx=2ax^2+1 \Leftrightarrow -ax^2+bx-1=0$$

Para que esta equação tenha apenas uma solução, o binómio discriminante da equação terá de ser igual a zero.

$$\Delta=0 \Leftrightarrow b^2-4(-a)\times(-1)=0 \Leftrightarrow b^2-4a=0 \Leftrightarrow b^2=4a \Leftrightarrow a=\frac{b^2}{4}$$

Sendo $\Delta=0$, $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{0}}{2(-a)} \Leftrightarrow x=\frac{-b}{2\times\left(-\frac{b^2}{4}\right)} \Leftrightarrow x=\frac{-b}{-\frac{b^2}{2}} \Leftrightarrow x=\frac{2}{b}$

Assim, a abcissa do ponto de interseção dos gráficos é o dobro do inverso de b e a ordenada é igual a:

$$g\left(\frac{2}{b}\right)=2a\times\left(\frac{2}{b}\right)^2+1=2a\times\frac{4}{b^2}+1 \underset{a=\frac{b^2}{4}\Leftrightarrow b^2=4a}{=} 2a\times\frac{4}{4a}+1=2\times\frac{\cancel{4a}}{\cancel{4a}}+1=2\times 1+1=3 .$$

FIM

OmegaMat

Exame Modelo VII de Matemática A

Duração do Exame: 150 **minutos** + 30 **minutos de tolerância** | **junho de 2020**

12.º Ano de Escolaridade

Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta

É permitido o uso de calculadora

Não é permitido o uso de corretor. Risca o que pretendes que não seja classificado

Para cada resposta identifica o item

Apresenta as tuas respostas de forma legível

Apresenta apenas uma resposta para cada item

A prova apresenta um formulário na página 2

As cotações dos itens encontram-se na página 7

Na resposta aos itens de seleção (escolha múltipla), seleciona a resposta correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação apresenta sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr *(α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)*

área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

área de um setor circular:

$\dfrac{\alpha r^2}{2}$ *(α- amplitude, em radianos, do ângulo ao centro, r - raio)*

área lateral de um cone: $\pi r g$ *(r - raio da base, g - geratriz)*

área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ *(r - raio)*

Volume da pirâmide: $\dfrac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume do cone: $\dfrac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume da esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ *(r - raio)*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\dfrac{u_1+u_n}{2}\times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \dfrac{1-r^n}{1-r}$, $r \neq 1$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$(|z|e^{i\theta})^n = |z|^n e^{i(n\theta)}$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0;1;2;...;n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Seja E, conjunto finito e não vazio, o espaço amostral de uma experiência aleatória, seja $P(E)$ o espaço dos acontecimentos, sendo equiprováveis os acontecimentos elementares, P uma probabilidade em $P(E)$ e sejam A e B dois acontecimentos possíveis, associados a essa experiência aleatória

   Sabe-se que $P(A) = 0.2$, $P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0.1$ e $P(A \cup B) = p, p > 0.2$

   Em qual das opções está o valor de p de modo que $P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{5}{8}$

   (A) 0.6
   (B) 0.7
   (C) 0.5
   (D) 0.4

2. Seja $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos

   2.1. Seja $z \in \mathbb{C}$

   Em qual das opções podem estar representados, no plano D´Argand - Gauss, os afixos dos números complexos que são solução da equação $z^4 - z = 0$?

   (A)

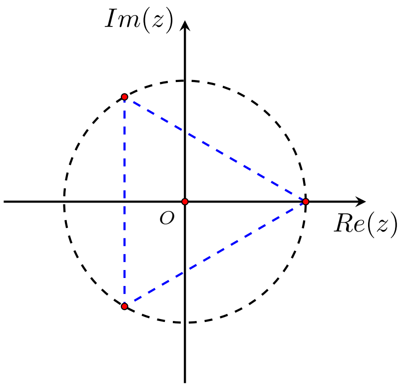


Figura 1

   (B)

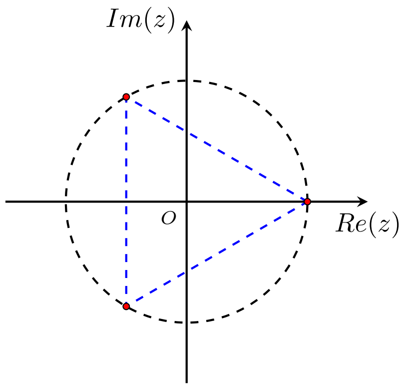


Figura 2

   (C)

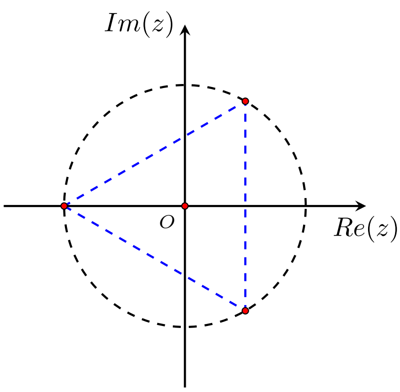


Figura 3

   (D)

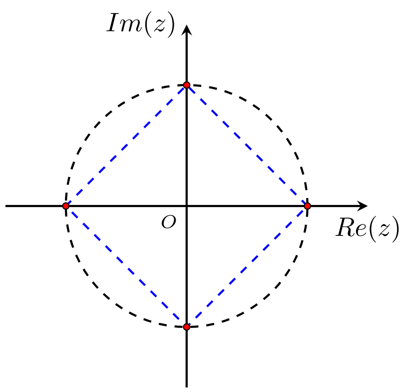


Figura 4

   2.2. Considera o número complexo unitário $z = e^{i\theta}$, com $\theta \in]0; \pi]$

   Sendo $w = z - 1$, mostra que: $Arg(w) = \dfrac{\pi + \theta}{2}$ e $|w| = 2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

3. Seja f, a função, real de variável real, definida por $f(x) = e^{2x} - 2e^{x}$

   3.1. Resolve, em $\mathbb{R}$, a equação $f(x) = -1$

   3.2. Mostra que a função g, real de variável real, definida por $g(x) = f(x) - 1$, tem pelo um zero no intervalo $]0;1[$

4. Seja f, a função real de variável real, definida por, $f(x) = \begin{cases} \sin(x) + \dfrac{x}{2} & se \quad 0 \leq x < \pi \\ \ln\left(e^{k}\right) + 2k + \pi & se \quad x = \pi \\ \dfrac{e^{x-\pi} - 1}{x - \pi} - 1 + \dfrac{\pi}{2} & se \quad x > \pi \end{cases}$, com $k \in \mathbb{R}$

   4.1. Numa das opções está o valor de $\lim\limits_{x \to 0^{+}} \dfrac{f(x)}{2x + \ln(x+1)}$

   Em qual delas?

   (A) $\dfrac{3}{2}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{1}{4}$ (D) $\dfrac{3}{4}$

   4.2. Averigua, analiticamente, se existe algum $k \in \mathbb{R}$, para o qual a função f é contínua no ponto $x = \pi$

   4.3. Estuda, quanto à monotonia, a função f, no intervalo $[0;\pi[$

   4.4. No referencial cartesiano o.n. da figura 5, está, a representação gráfica da função g, restrição da função f ao intervalo $[0;\pi[$, parte do gráfico da função h, definida por $h(x) = \dfrac{x}{2}$, e um triângulo $[ABC]$

   Considera que um ponto A se desloca ao longo do gráfico da função g, nunca coincidindo com o ponto C nem com a origem O do referencial

   Para cada posição do ponto A, seja x a sua abcissa

   Sabe-se que o ponto B tem a mesma abcissa do ponto A

   Recorrendo às potencialidades da calculadora gráfica, determina o valor de x para o qual a área do triângulo $[ABC]$ é máxima

   Na tua resolução deves:
   Apresentar o gráfico que utilizaste para resolver o problema, e assinalar os pontos relevantes
   Apresentar o valor de x arredondado às centésimas

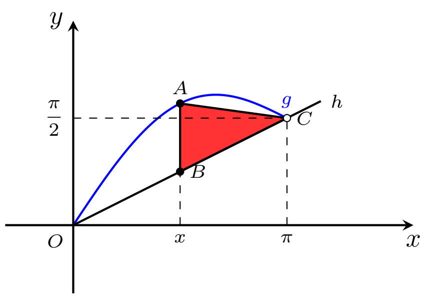


Figura 5

5. Uma prateleira está dividida em dezasseis compartimentos iguais. Em cada compartimento só se pode colocar um objeto

   Pretende-se encher a prateleira com dezasseis bolas, sendo sete brancas, quatro azuis, numeradas de um a quatro, e cinco vermelhas, numeradas de um a cinco.
   As bolas de cor branca não se distinguem
   Mostra que existem 4151347200 maneiras diferentes de as bolas ficarem colocadas na prateleira

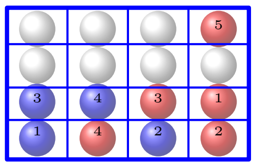


Figura 6

6. Numa caixa há dezassete bolas, sendo oito azuis, numeradas com o número dois, quatro vermelhas, numeradas com o número três, três brancas, numeradas com o número quatro e duas pretas, numeradas com o número um

   Retiram-se, de uma só vez, duas bolas da caixa e multiplicam-se os números das bolas

   Qual é a probabilidade de o produto dos números das bolas ser igual quatro?

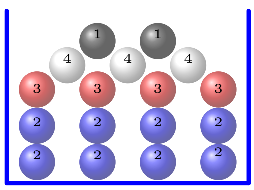


Figura 7

7. Seja f, a função definida em $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, por $f(x)=\dfrac{-x^2+2}{x-1}$

Na figura 8, encontra-se representado, em referencial ortonormado xOy, parte do gráfico da função f, e duas retas, assintotas ao gráfico da função f
A assíntota oblíqua está identificada por r

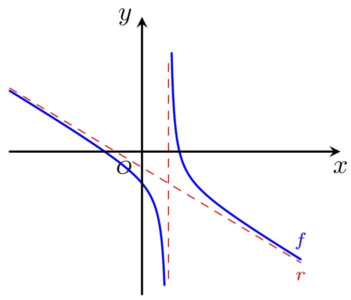


Figura 8

Em qual das opções está a equação reduzida da reta r?

(A) $y=-x+1$

(B) $y=-2x-2$

(C) $y=-3x-2$

(D) $y=-x-1$

8. Na figura 9, está representada uma pirâmide de base retangular e reta, $[ABCDV]$

Sabe-se que:

- o vértice A, da base da pirâmide, tem coordenadas $(0,2;0)$
- uma equação vetorial da reta r, que contém a altura da pirâmide é $(x;y;z)=(2;-2;-2)+k(0;2;2),k\in\mathbb{R}$
- Uma equação cartesiana do plano ABV é $-3x+y+z-2=0$

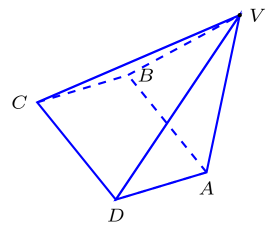


Figura 9

8.1. Determina a altura da pirâmide
Sugestão: Começa por escrever uma equação cartesiana do plano que contém a base da pirâmide

8.2. Seja α, o plano de equação cartesiana $(2\lambda^2-1)x+2\lambda^2y+z+4=0$, com $\lambda\in\mathbb{R}$
Determina o(s) valor(es) de λ, para os quais os planos ABV e α são perpendiculares

9. Considera o desenvolvimento de $\left(2x-\dfrac{1}{2y}\right)^8$, sendo, $x\neq 0$ e $y\neq 0$

Em qual das opções está o termo da forma ax^4y^{-4}, com $a\in\mathbb{R}$, do desenvolvimento?

(A) $70x^4y^{-4}$
(B) $-70x^4y^{-4}$
(C) $28x^5y^{-3}$
(D) $-28x^5y^{-3}$

10. Numa caixa, identificada por X, há seis bolas numeradas: uma com o número um, duas com o número dois, duas com o número quatro e uma com o número seis. Numa outra caixa, identificada por Y, há dez bolas numeradas: quatro com o número dois, três com o número quatro, duas com o número seis e uma com o número sete

Considera a experiência aleatória que consiste no seguinte:

Retiram-se, ao acaso, duas bolas da caixa X e colocam-se na caixa Y. De seguida, retiram-se três bolas da caixa Y e multiplicam-se os respetivos números

Qual é a probabilidade de o produto dos números das bolas retiradas da caixa Y ser um número par?

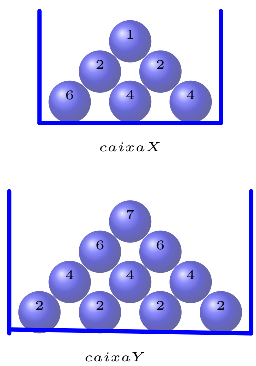


Figura 10

11. Seja f uma função real de variável real, duas vezes diferenciável num intervalo $I =]a; b[$, e seja $c \in]a; b[$

Sabe-se que $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$

Pode-se afirmar que:

(A) a função tem um máximo relativo para $x = c$

(B) a função tem um mínimo relativo para $x = c$

(C) a função não está definida em $x = c$

(D) a função não tem mínimo relativo nem máximo relativo para $x = c$

12. A atividade F, de qualquer substância radioativa, é dada, numa certa unidade de medida, pela expressão $F(t) = A \times e^{-Bt}$, sendo A e B constantes reais positivas e t é o tempo em horas, com $t \geq 0$

Designe-se por F' a função derivada de F

Pode-se afirmar que:

(A) $\dfrac{F(t)}{F'(t)} = \dfrac{1}{B}$

(B) $\dfrac{F(t)}{F'(t)} = -\dfrac{1}{B}$

(C) $\dfrac{F(t)}{F'(t)} = -B$

(D) $\dfrac{F(t)}{F'(t)} = -1$

13. Na figura 11 está representado, em referencial ortonormado xOy, parte do gráfico de uma função f, real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$ e contínua em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

Considera a sucessão (a_n), de termo geral $a_n = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Em qual das opções está o valor de $\ln\left[e^{\lim f(a_n)}\right]$?

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) $+\infty$

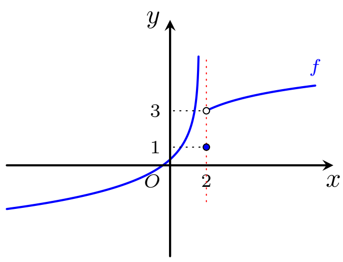


Figura 11

14. Seja f, a função real de variável real, definida em $\mathbb{R}^+$, por $f(x) = \dfrac{1 - \ln(x)}{e^{-x}}$

Na figura 12, está representado, em referencial ortonormado xOy, parte do gráfico da função f, a reta t, tangente ao gráfico no ponto A, a reta s, de equação $y = -e$, e um trapézio retângulo $[ABCO]$

Sabe-se que:

- A, é o ponto onde o gráfico de f interseta o eixo das abcissas
- B, é o ponto de interseção das retas t e s
- $C(0; -e)$

Mostra que a área do trapézio $[ABCO]$ é igual a $A_{[ABCO]} = e^2 + \dfrac{1}{2}e^{3-e}$

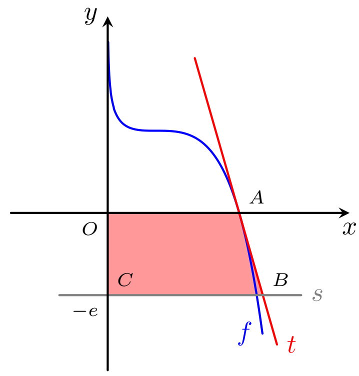


Figura 12

COTAÇÕES

1.			
		....	5 pontos
2.			
	2.1	....	5 pontos
	2.2	....	15 pontos
3.			
	3.1	....	10 pontos
	3.2	....	15 pontos
4.			
	4.1	....	5 pontos
	4.2	....	15 pontos
	4.3	....	15 pontos
	4.4	....	15 pontos
5.			
		....	10 pontos
6.			
		....	10 pontos
7.			
		....	5 pontos
8.			
	8.1	....	15 pontos
	8.2	....	10 pontos
9.			
		....	5 pontos
10.			
		....	10 pontos
11.			
		....	5 pontos
12.			
		....	5 pontos
13.			
		....	5 pontos
14.			
		....	20 pontos
		TOTAL	**100 pontos**

PÁGINA EM BRANCO

Resolução do Exame Modelo VII de Matemática A

Duração do Exame: 150 **minutos +** 30 **minutos de tolerância** | **junho de 2020**

12.º Ano de Escolaridade

1. .

$P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0.1 \Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) = 0.1 \Leftrightarrow 0.2 - P(A \cap B) = 0.1 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0.2 - 0.1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0.1$

$P(A \cup B) = p \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = p \Leftrightarrow 0.2 + P(B) - 0.1 = p \Leftrightarrow P(B) = p - 0.1$

Assim,

$P(B \mid \overline{A}) = \frac{5}{8} \Leftrightarrow \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{5}{8} \Leftrightarrow \frac{P(B) - P(B \cap A)}{0.8} = \frac{5}{8} \Leftrightarrow \frac{p - 0.1 - 0.1}{0.8} = \frac{5}{8} \Leftrightarrow \frac{p - 0.2}{0.8} = \frac{5}{8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p - 0.2 = 0.8 \times \frac{5}{8} \Leftrightarrow p - 0.2 = 0.5 \Leftrightarrow p = 0.5 + 0.2 \Leftrightarrow p = 0.7$

Resposta: (B)

2. .

2.1. Comecemos por resolver a equação $z^4 - z = 0$

$z^4 - z = 0 \Leftrightarrow z(z^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z = \sqrt[3]{1} \Leftrightarrow z = 0 \vee z = \sqrt[3]{e^{i(0)}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = e^{i\left(\frac{0+k2\pi}{3}\right)}, k \in \{0; 1; 2\} \Leftrightarrow z = 0 \vee z = e^{i\left(\frac{k2\pi}{3}\right)}, k \in \{0; 1; 2\}$

Atribuindo valores a k, obtemos as soluções: $z = 0 \vee z = e^{i(0)} \vee z = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \vee z = e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$

Os afixos destes complexos situam-se, no plano de Argand - Gauss, um na origem do referencial, e os outros três, sobre uma circunferência centrada na origem do referencial e de raio um

Resposta: (A)

2.2. .
$z = e^{i\theta}$, com $\theta \in]0; \pi]$

Ora,

$w = z - 1 = e^{i\theta} - 1 = \cos(\theta) + i\sin(\theta) - 1 =$
$= \cos(\theta) - 1 + i\sin(\theta) =$
$= -2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Cálculo auxiliar:

$\cos(\theta) = \cos\left(2 \times \frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) =$
$= 1 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Então, $\cos(\theta) - 1 = -2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Seja $\alpha = Arg(w)$

Então,

$$\tan(\alpha) = \frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{-2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

Então, $Arg(w) = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi+\theta}{2}$

Por outro lado,

$$|w| = \sqrt{\left[-2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^2 + \left[2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^2}$$

$$= \sqrt{4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]}$$

$$= \sqrt{4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$, visto que $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$

3. .

3.1. .

$f(x) = -1 \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow (e^x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$

$C.S. = \{0\}$

3.2. A função f é contínua em $\mathbb{R}$, em particular, é contínua em $[0;1]$

Assim, a função g é contínua em $[0;1]$, por se tratar da diferença de duas funções contínuas

Por outro lado

$g(0) = f(0) - 1 = -1 - 1 = -2 < 0$

$g(1) = e^2 - 2e - 1 > 0$

Como a função g é contínua em $[0;1]$ e $g(0)\times g(1) < 0$, então, pelo corolário do teorema de Bolzano, existe pelo pelo menos um zero da função g em $]0;1[$

4. .

4.1. .

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{2x+\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)+\frac{x}{2}}{2x+\ln(x+1)} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin(x)}{x}+\frac{1}{2}}{2+\frac{\ln(x+1)}{x}} =$$

$$= \frac{\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x}+\frac{1}{2}}{2+\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{x}} = \frac{1+\frac{1}{2}}{2+\lim_{y\to 0^+}\frac{y}{e^y-1}} = \frac{\frac{3}{2}}{2+\frac{1}{\lim_{y\to 0^+}\frac{e^y-1}{y}}} = \frac{\frac{3}{2}}{2+\frac{1}{1}} = \frac{\frac{3}{2}}{2+1} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$$

Cálculos auxiliares

Fez-se a mudança de variável

$y = \ln(x+1) \Leftrightarrow x = e^y - 1$

se $x \to 0^+$, então, $y \to 0^+$

Nota:

Aplicaram-se os **limites notáveis**

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

Resposta: (B)

4.2. $\pi \in D_f$

A função f é contínua em $x=\pi$, se existir $\lim\limits_{x\to\pi} f(x)$, ou seja,

se $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi^+} f(x) = f(\pi)$

Ora,

$\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi^-}\left(\sin(x)+\frac{x}{2}\right) = \sin(\pi)+\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to\pi^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi^+}\left(\frac{e^{x-\pi}-1}{x-\pi}-1+\frac{\pi}{2}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to\pi^+}\frac{e^{x-\pi}-1}{x-\pi}-1+\frac{\pi}{2} = \lim\limits_{x-\pi\to 0^+}\frac{e^{x-\pi}-1}{x-\pi}-1+\frac{\pi}{2} = 1-1+\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$f(\pi) = \ln\left(e^k\right)+2k+\pi = k+2k+\pi = 3k+\pi$

Assim, se $3k+\pi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 3k = \frac{\pi}{2}-\pi \Leftrightarrow 3k = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{\pi}{6}$, a função f é contínua em $x=\pi$

Nota:

Aplicou-se o **limite notável** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

4.3. Determinemos a função derivada de f em $[0;\pi[$

$f'(x) = \left(\sin(x)+\frac{x}{2}\right)' = \cos(x)+\frac{1}{2}$

Procuremos os zeros de f'

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x)+\frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3}+k2\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

Atribuindo valores a k, vem,

$k=0 \hookrightarrow x = \frac{2\pi}{3} \vee x = -\frac{2\pi}{3}$

$k=1 \hookrightarrow x = \frac{8\pi}{3} \vee x = \frac{4\pi}{3}$

$k=-1 \hookrightarrow x = -\frac{4\pi}{3} \vee x = -\frac{8\pi}{3}$

Como $x\in[0;\pi[$, tem-se que $x = \frac{2\pi}{3}$

Elaborando um quadro de sinais para a função derivada

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	\\\\\\
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}$	$\searrow$	\\\\\\

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{\frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}$

A função f é estritamente crescente em $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$, e é estritamente decrescente em $\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right[$

Atinge o valor máximo $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}$, para $x = \frac{2\pi}{3}$

4.4. Sendo x a abcissa de A e de B, tem-se que:

$B\left(x; \frac{x}{2}\right)$ e $A(x; f(x))$

$\overline{AB} = \left|f(x) - \frac{x}{2}\right| = \left|\sin(x) + \frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right| = |\sin(x)| = \sin(x)$, visto que $x \in]0; \pi[$

Assim, se j for a função área, vem,

$$j(x) = \frac{\overline{AB} \times |\pi - x|}{2} = \frac{\sin(x) \times (\pi - x)}{2}, \text{ com } x \in]0; \pi[$$

Inserir a função na calculadora, ajustar a janela de visualização $[0; \pi] \times [0; 2.5]$

Desenhar o gráfico da função j e procurar a abcissa do seu ponto de máximo

Encontramos o ponto $I(1.11; 0.91)$, que se encontra assinalado no referencial

O valor de x, arredondado às centésimas, para o qual a área do triângulo $[ABC]$ é máxima, é 1.11 rad

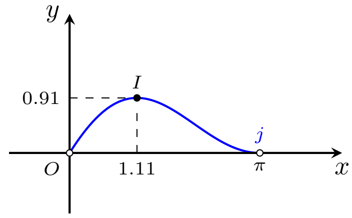


Figura 1

5. .

Primeiro Processo

Comecemos por colocar as sete bolas brancas na prateleira. Como as sete bolas brancas não se distinguem então existem $^{16}C_7$ maneiras diferentes de as colocar na prateleira. Colocadas as sete bolas brancas, restam nove compartimentos para colocar as quatro bolas azuis que são numeradas e que portanto, se distinguem umas das outras. existem $^{9}A_4$ maneiras distintas de colocar as bolas azuis na prateleira. Por fim, restam cinco compartimentos para colocar as cinco bolas vermelhas, (que também são numeradas, e portanto, distinguem-se umas das outras). Há $^{5}A_5 = 5!$ maneiras distintas de colocar as bolas vermelhas na prateleira
Concluindo, há $^{16}C_7 \times ^{9} A_4 \times ^{5} A_5 = 4151347200$ maneiras diferentes de colocar as bolas na prateleira

Segundo Processo

Comecemos por colocar as cinco bolas vermelhas na prateleira. Como as cinco bolas vermelhas se distinguem, então existem $^{16}A_5$ maneiras diferentes de as colocar na prateleira. Colocadas as cinco bolas vermelhas, restam onze compartimentos para colocar as quatro bolas azuis que são numeradas e que portanto, se distinguem umas das outras. existem $^{11}A_4$ maneiras distintas de colocar as bolas azuis na prateleira. Por fim, restam sete compartimentos para colocar as sete bolas brancas, que não se distinguem umas das outras. Há uma única maneira de colocar as bolas brancas na prateleira (estando já colocadas as outras)
Concluindo, há $^{16}A_5 \times ^{11} A_4 = 4151347200$ maneiras diferentes de colocar as bolas na prateleira

Terceiro Processo

Comecemos por colocar as quatro bolas azuis na prateleira. Como as quatro bolas azuis se distinguem, então existem $^{16}A_4$ maneiras diferentes de as colocar na caixa. Colocadas as quatro bolas azuis, restam doze compartimentos para colocar as cinco bolas vermelhas que são numeradas e que portanto, se distinguem umas das outras. existem $^{12}A_5$ maneiras distintas de colocar as bolas vermelhas na prateleira. Por fim, restam sete compartimentos para colocar as sete bolas brancas, que não se distinguem umas das outras. Há uma única maneira de colocar as bolas brancas na caixa (estando já colocadas as outras)
Concluindo, há $^{16}A_4 \times ^{12} A_5 = 4151347200$ maneiras diferentes de colocar as bolas na prateleira

Obs.: Há mais processos de resolução

6. .

O número de casos possíveis é igual a ${}^{17}C_2$, dado que se escolhem duas bolas de um conjunto de dezassete

Quanto ao número de casos favoráveis:
Para que o produto dos números seja igual a quatro tem de ocorrer o seguinte:

⊛ Saem duas bolas com o número 2: ${}^{8}C_2$

⊛ Sai uma bola com número 1 e outra com número 4: ${}^{2}C_1 \times^3 C_1$

Então o número de casos favoráveis é igual a ${}^{8}C_2 +^2 C_1 \times^3 C_1$

Assim, a probabilidade pedida será igual a $P = \dfrac{{}^{8}C_2 +^2 C_1 \times^3 C_1}{{}^{17}C_2} = \dfrac{1}{4}$

7. A equação reduzida da reta r é da forma $y = mx + b, m, b \in \mathbb{R}$

Ora,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-x^2+2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2+2}{x^2-x} =^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(-1+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{x}{x^2}\right)} = \frac{\lim_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{2}{x^2}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)} =$$

$$= \frac{-1+0}{1-0} = -1$$

Logo, $m = -1$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2+2}{x-1}+x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2+2+x^2-x}{x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x+2}{x-1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(-1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{\lim_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{2}{x}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{-1+0}{1-0} = -1$$

Logo, $b = -1$

Concluindo, equação reduzida da reta r é $y = -x - 1$

Observação: Também se poderia ter optado pelo cálculo dos limites quando x tende para $-\infty$

Resposta: (D)

8. .

8.1. Determinemos uma equação do plano ABC
Um vetor normal ao plano poderá ser um vetor diretor da reta que contém a altura da pirâmide, ou seja, poderá ser $\overrightarrow{\alpha}(0; 2; 2)$
assim, $ABC : 0x + 2y + 2z + d = 0, d \in \mathbb{R}$, ou seja, $ABC : 2y + 2z + d = 0, d \in \mathbb{R}$
Como $A(0, 2; 0)$ é um ponto deste plano, vem,

$$2 \times 2 + 2 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow 0 + 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = -4$$

Logo, $ABC : 2y + 2z - 4 = 0$, ou seja, $ABC : y + z - 2 = 0$

Determinemos, agora o ponto S, de interseção deste plano com a reta que contém a altura da pirâmide

Ora, um ponto genérico da reta é $(2; -2+2k; -2+2k), k \in \mathbb{R}$
Assim, substituindo na equação do plano, vem,

$-2+2k-2+2k-2=0 \Leftrightarrow 4k-6=0 \Leftrightarrow k=\frac{3}{2}$
Portanto,
$S\left(2; -2+2\times\frac{3}{2}; -2+2\times\frac{3}{2}\right)$, ou seja, $S\,(2;1;1)$

Determinemos as coordenadas do ponto V

Este ponto é o ponto de de interseção do plano ABV com a reta que contém a altura da pirâmide

Ora, um ponto genérico da reta é $(2; -2+2k; -2+2k), k \in \mathbb{R}$
Assim, substituindo na equação do plano, vem,

$-3\times 2-2+2k-2+2k-2=0 \Leftrightarrow 4k-12=0 \Leftrightarrow k=3$

Portanto,

$V\,(2; -2+2\times 3; -2+2\times 3)$, ou seja, $V\,(2;4;4)$

A medida da altura da pirâmide é $\overline{VS}=\sqrt{(2-2)^2+(4-1)^2+(4-1)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

8.2. Um vetor normal ao plano ABV é $\overrightarrow{\beta}(-3;1;1)$

Um vetor normal ao plano α é $\overrightarrow{\alpha}(2\lambda^2-1; 2\lambda^2; 1)$

O plano ABV é perpendicular ao plano α, se $\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta}=0$

$\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta}=0 \Leftrightarrow (2\lambda^2-1)\times(-3)+2\lambda^2\times 1+1\times 1=0 \Leftrightarrow -6\lambda^2+3+2\lambda^2+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4\lambda^2=-4 \Leftrightarrow \lambda^2=1 \Leftrightarrow \lambda=\pm 1$

Resposta: existem dois valores para λ

9. $\left(2x-\frac{1}{2y}\right)^8=$
$=\sum_{p=0}^{8}\left[{}^8C_p\times(2x)^{8-p}\times\left(-\frac{1}{2y}\right)^p\right]=$
$=\sum_{p=0}^{8}\left[{}^8C_p\times 2^{8-p}\times x^{8-p}\times(-1)^p\times\left(\frac{1}{2y}\right)^p\right]=$
$=\sum_{p=0}^{8}\left[{}^8C_p\times(-1)^p\times 2^{8-p}\times x^{8-p}\times 2^{-p}\times y^{-p}\right]=$
$=\sum_{p=0}^{8}\left[{}^8C_p\times(-1)^p\times 2^{8-2p}\times x^{8-p}\times y^{-p}\right]=$

Procuremos $p\in\mathbb{N}_0$ de modo que $8-p=4\wedge -p=-4\wedge 0\le p\le 8$

$8-p=4\wedge -p=-4\wedge 0\le p\le 8 \Leftrightarrow p=4\wedge p=4\wedge 0\le p\le 8 \Leftrightarrow p=4\in\mathbb{N}_0$, e $0\le 4\le 8$

Então, existe termo da forma ax^4y^{-4} no desenvolvimento

Termo:${}^8C_4\times(-1)^4\times 2^{8-8}\times x^{8-4}\times y^{-4}=70x^4y^{-4}$

Resposta: (A)

10. Se, se retiram, ao acaso, duas bolas da caixa X e se colocam na caixa Y e de seguida, se retiram três bolas da caixa Y e se multiplicam os respetivos números, então, atendendo à constituição das duas caixas, independentemente do tipo de número das bolas que saem da caixa X , quando colocadas na caixa Y, o produto das três bolas retiradas da caixa Y vai ser sempre um número par. Com efeito, na pior das hipóteses, poderia entrar na caixa Y a bola com o número um que existe na caixa X, e neste caso, ficariam na caixa Y duas bolas com número ímpar e as restantes com número par. Ora, quando se retiram três bolas da caixa Y, necessariamente, uma delas vai ter número par, e por consequência, quando se multiplicam os números obtemos um número par

    Assim sendo, a probabilidade pedida é igual a um

11. .

    Por hipótese sabemos que $f'(c) = 0$, para $c \in]a; b[$

    Ora,

    $$f''(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^+} \frac{f'(x) - 0}{x - c} = \lim_{x \to c^+} \frac{f'(x)}{x - c}$$

    Como também se sabe que $f''(c) > 0$, então, existe um intervalo $]c; c + \varepsilon[, \varepsilon > 0$, no qual $f'(x)$ toma sinal positivo. Sendo assim, a função f é crescente em $]c; c + \varepsilon[, \varepsilon > 0$, ou seja, $f(c) \leq f(x)$

    De modo análogo,

    $$f''(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^-} \frac{f'(x) - 0}{x - c} = \lim_{x \to c^-} \frac{f'(x)}{x - c}$$

    Como também se sabe que $f''(c) > 0$, então, existe um intervalo $]c - \varepsilon; c[, \varepsilon > 0$, no qual $f'(x)$ toma sinal negativo. Sendo assim, a função f é decrescente em $]c - \varepsilon; c[, \varepsilon > 0$, ou seja, $f(c) \leq f(x)$

    Concluindo, a função f admite um mínimo relativo para $x = c$

    Resposta: (B)

12. Determinemos a função derivada de F

    $$F'(t) = \left(A \times e^{-Bt}\right)' = -AB \times e^{-Bt}$$

    Assim,

    $$\frac{F(t)}{F'(t)} = \frac{A \times e^{-Bt}}{-AB \times e^{-Bt}} = -\frac{1}{B}$$

    Resposta: (B)

13. .

    Ora, $\lim(a_n) = \lim\left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2 + \frac{1}{\sqrt{\lim(n)}} = 2 + \frac{1}{+\infty} = 2^+$

    Assim,

    $$\ln\left[e^{\lim f(a_n)}\right] = \lim f(a_n) = 3$$

    Resposta: (C)

14. A abcissa do ponto de tangência A, é o zero da função f

Ora,

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln(x)}{e^{-x}}=0 \wedge x>0 \Leftrightarrow 1-\ln(x)=0 \wedge x>0 \Leftrightarrow \ln(x)=1 \wedge x>0 \Leftrightarrow x=e \wedge x>0 \Leftrightarrow x=e$$

Assim, o ponto de tangência é $A(e;0)$

Determinemos a função derivada de f

$$f'(x)=\left(\frac{1-\ln(x)}{e^{-x}}\right)'=\frac{-\frac{1}{x}\times e^{-x}-(1-\ln(x))\times(-e^{-x})}{e^{-2x}}=\frac{e^{-x}\left(-\frac{1}{x}+1-\ln(x)\right)}{e^{-2x}}=\frac{-\frac{1}{x}+1-\ln(x)}{e^{-x}}$$

Seja m o declive da reta tangente

$$m=f'(e)=\frac{-\frac{1}{e}+1-\ln(e)}{e^{-e}}=\frac{-\frac{1}{e}+1-1}{e^{-e}}=-\frac{\frac{1}{e}}{e^{-e}}=-\frac{1}{e^{1-e}}=-e^{e-1}$$

Assim sendo, a equação reduzida da reta tangente t é da forma $y=-e^{e-1}x+b, b\in\mathbb{R}$

Como a reta passa no ponto $A(e;0)$, vem,

$$0=-e^{e-1}\times e+b \Leftrightarrow b=e^{e}$$

Portanto, a equação reduzida da reta t é $y=-e^{e-1}x+e^{e}$

Determinemos a abcissa do ponto B, que é a solução da equação $-e^{e-1}x+e^{e}=-e$

$$-e^{e-1}x+e^{e}=-e \Leftrightarrow -e^{e-1}x=-e^{e}-e \Leftrightarrow x=\frac{e^{e}+e}{e^{e-1}}$$

Assim a área do trapézio $[ABCO]$ é igual a

$$A_{[ABCO]}=\frac{\overline{AO}+\overline{BC}}{2}\times\overline{OC}=\frac{e+\frac{e^{e}+e}{e^{e-1}}}{2}\times e=\frac{e^{2}+\frac{e^{e+1}+e^{2}}{e^{e-1}}}{2}=\frac{e^{e+1}+e^{e+1}+e^{2}}{2e^{e-1}}=$$

$$=\frac{2e^{e+1}+e^{2}}{2e^{e-1}}=e^{2}+\frac{1}{2}e^{3-e}$$

OmegaMat

Exame Modelo VIII de Matemática A

Duração do Exame: 150 **minutos** + 30 **minutos de tolerância** | **junho de 2020**

12.º Ano de Escolaridade

Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta

É permitido o uso de calculadora

Não é permitido o uso de corretor. Risca o que pretendes que não seja classificado

Para cada resposta identifica o item

Apresenta as tuas respostas de forma legível

Apresenta apenas uma resposta para cada item

A prova apresenta um formulário na página 2

As cotações dos itens encontram-se na página 8

Na resposta aos itens de seleção (escolha múltipla), seleciona a resposta correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação apresenta sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

área de um polígono regular: *Semiperímetro $\times$ Apótema*

área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ *(α- amplitude, em radianos, do ângulo ao centro, r - raio)*

área lateral de um cone: *$\pi r g$ (r - raio da base, g - geratriz)*

área de uma superfície esférica: *$4\pi r^2$ (r - raio)*

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3}\times$ *área da base $\times$ Altura*

Volume do cone: $\frac{1}{3}\times$ *área da base $\times$ Altura*

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ *(r - raio)*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2}\times n$

Progressão geométrica: $u_1\times\frac{1-r^n}{1-r}$, $r\neq 1$

Trigonometria

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

Complexos

$(|z|e^{i\theta})^n=|z|^n e^{i(n\theta)}$

$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$, $k\in\{0;1;2;...;n-1\}$ e $n\in\mathbb{N}$

Regras de derivação

$(u+v)'=u'+v'$

$(uv)'=u'v+uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(u^n)'=nu^{n-1}u' \quad (n\in\mathbb{R})$

$(\sin u)'=u'\cos u$

$(\cos u)'=-u'\sin u$

$(\tan u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)'=u'e^u$

$(a^u)'=u'a^u\ln a \quad (a\in\mathbb{R}^+\backslash\{1\})$

$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$

$(\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a} \quad (a\in\mathbb{R}^+\backslash\{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \quad (n\in\mathbb{N})$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty \quad (p\in\mathbb{R})$

1. Considera a função f, real de variável real, definida em $\mathbb{R}$, por $f(x) = \sin(\pi x)$

   Seja g, a função real de variável real, definida em $\mathbb{R}$, por $g(x) = -2f(4x)$

   Pode-se afirmar que a função g, no intervalo $[0; 2]$, tem

   (A) 8 zeros
   (B) 9 zeros
   (C) 10 zeros
   (D) 3 zeros

2. O Professor de Matemática de uma turma de 12º ano, colocou aos seus alunos o seguinte problema de cálculo combinatório:
   Considerem o conjunto A de todos os números de cinco algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9
   Considerem, agora, o conjunto B, subconjunto de A, cujos elementos satisfazem os seguintes requisitos:

   - *cada número tem os algarismos todos diferentes*
   - *começam todos por* 7 *e terminam em* 2
   - *a soma dos cinco algarismos é ímpar*

   Qual é o cardinal do conjunto B?

   Duas respostas corretas ao problema proposto foram apresentadas por dois alunos da turma, Rodrigo e Carolina

   Numa composição, explica-as

Resposta do Rodrigo

$\#B = {}^3C_1 \times {}^3C_1 \times {}^4A_2 + {}^3A_3 = 114$

Resposta da Carolina

$\#B = {}^4C_2 \times {}^3C_2 \times 2! \times {}^3C_1 + 3! = 114$

3. Considera, num plano munido de um referencial ortonormado xOy, uma circunferência de centro na origem e de raio r, com $r > 0$, como se observa na figura 1

   Sabe-se que:

   - os pontos A, B, C e D pertencem à circunferência
   - os pontos A e B são simétricos em relação ao eixo Oy
   - os pontos C e D são simétricos em relação ao eixo Oy
   - os triângulos $[ABO]$ e $[CDO]$, são simétricos em relação ao eixo Ox
   - $E(r; 0)$
   - o ponto A move-se no primeiro quadrante, e os pontos B, C e D, acompanham esse movimento
   - $E\hat{O}A = x$, com $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

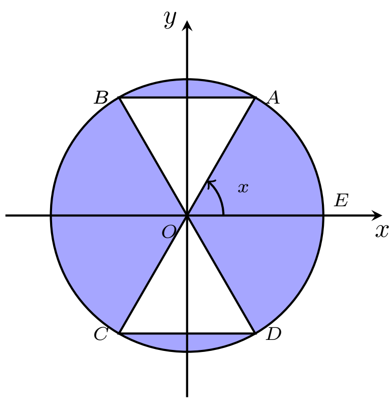


Figura 1

   A área da região colorida da figura, é dada, em função de x, por:

   (A) $\pi - \sin(2x)$
   (B) $r^2(\pi - \sin(2x))$
   (C) $r(\pi - \sin(2x))$
   (D) $r^2(\pi - \cos(2x))$

4. Sejam a e b, dois números reais, com $a > 1$ e $b > 1$

   Sabe-se que $\log_a(b^2) = 4$

   Mostra que, para esses valores de a e b, se tem, $\log_b\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right) = \dfrac{1}{4}$

5. Na figura 2 está representado, num plano munido de um referencial ortonormado xOy, parte do gráfico de uma função quadrática f, de domínio $\mathbb{R}$, e definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, $b, c \in \mathbb{R}$, e $a \in \mathbb{R}^+$

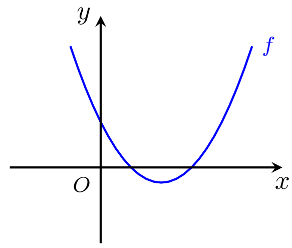


Figura 2

   Seja g, a função real de variável real, definida por $g(x) = f(x) + e$

   Em qual das opções seguintes pode estar representado parte do gráfico da função g', derivada da função g?

(A)

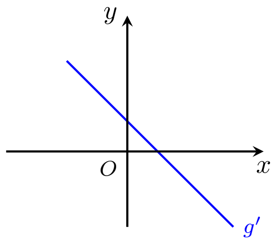


Figura 3

(B)

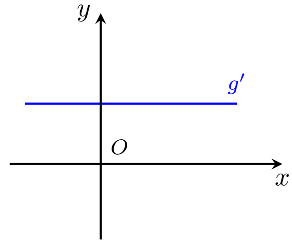


Figura 4

(C)

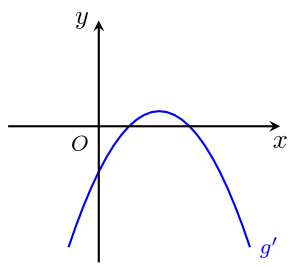


Figura 5

(D)

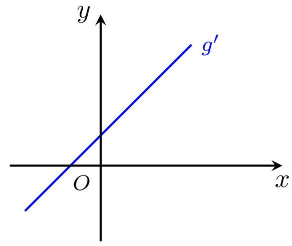


Figura 6

6. Uma caixa contém dez bolas numeradas de 1 a 10
   Retiram-se da caixa duas bolas, sucessivamente e sem reposição

   Qual é a probabilidade de saírem duas bolas em que o número da segunda bola não é o sucessor do número da primeira bola?

   (A) 10%

   (B) 40%

   (C) 80%

   (D) 90%

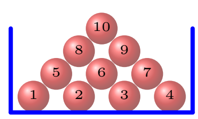


Figura 7

7. Numa caixa, identificada por X, estão seis bolas numeradas de um a seis, e numa caixa, identificada por Y, estão três bolas numeradas com o número um, quatro numeradas com o número dois e cinco numeradas com o número três

Lança-se um dado cúbico equilibrado

Se sair número par, retira-se a bola com o número quatro da caixa X e coloca-se na caixa Y, juntamente com mais onze bolas iguais a ela

Seguidamente retiram-se duas bolas da caixa Y e somam-se os números das bolas que saíram

Sejam os acontecimentos

A : sai número ímpar no lançamento do dado

B : A soma dos números das duas bolas extraídas da caixa Y é igual a cinco

Sem utilizar a fórmula de probabilidade condicionada, mostra que

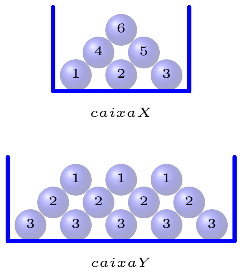


Figura 8

$$P(B|\overline{A}) = \frac{{}^{12}C_1 \times {}^{3}C_1 + {}^{4}C_1 \times {}^{5}C_1}{{}^{24}C_2}$$

8. Seja f, a função real de variável real, definida por $f(x) = \ln(e^{4x} - e^{2x})$

   8.1. Determina o domínio da função f

   8.2. Escreve as equações das assíntotas ao gráfico da função f

9. Seja g, a função real de variável real, definida em $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, por $g(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$
   Seja g', a função derivada da função g

   9.1. Estuda a função g, quanto a monotonia e existência de extremos

   9.2. Em qual das opções está o valor de $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{g'(x)}{x-e}$?

   (A) e^{-1}
   (B) e^{-2}
   (C) $-e^{-1}$
   (D) $-e^{-2}$

10. Numa escola com 150 Professores, 100 são do sexo feminino. A direção da escola, aquando da preparação do ano letivo, terá de escolher um grupo de Professores para desempenharem a função de Diretor de Turma
    Definido o perfil do Diretor de Turma pela Direção, estima-se que, dos Professores da escola do sexo feminino, 90% têm perfil para desempenhar o cargo, e que dos Professores da escola do sexo masculino, 60% têm perfil para desempenhar o cargo

    Escolhido um Professor, ao acaso, qual é a probabilidade de ser do sexo feminino, se não tem perfil para desempenhar a função de Diretor de Turma?

11. Seja $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos e seja z um número complexo

11.1. Em qual das opções pode estar representado o conjunto dos pontos do plano complexo, afixos do complexo z, que satisfazem a condição $1 \leq |z-2i| \leq 3 \wedge \frac{\pi}{4} < Arg(z-2i) < \frac{3\pi}{4}$

(A)

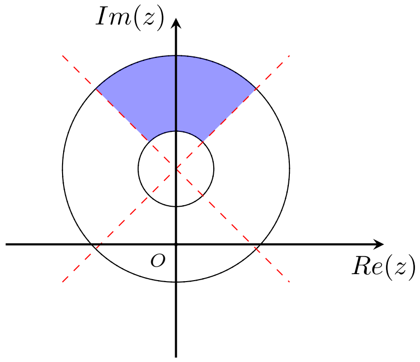


Figura 9

(B)

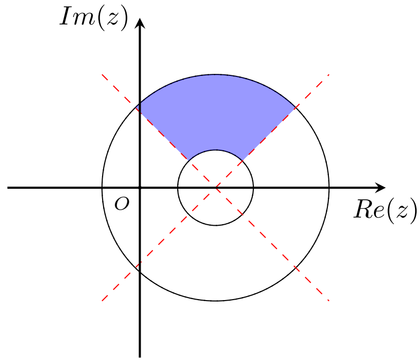


Figura 10

(C)

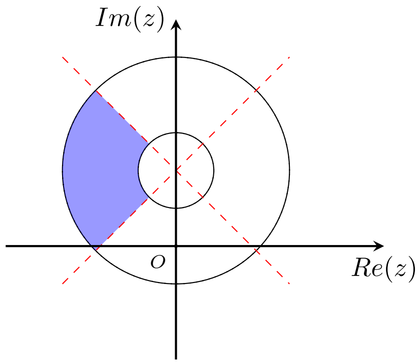


Figura 11

(D)

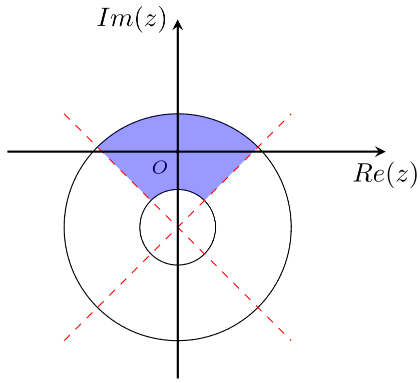


Figura 12

11.2. Admite que $z_1 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$ e $z_2 = 2e^{i\left(\frac{13\pi}{20}\right)}$ são duas raízes índice n, consecutivas, do número complexo z. Determina o valor de n e o número complexo z

12. Seja f, a função real e variável real, de domínio $]-\infty; -a]$, definida por $f(x) = b + \sqrt{-x-a}$ com $a > 0$ e $b > 0$, e a função g, de domínio $[a; +\infty[$, definida por $g(x) = f(-x)$
No referencial cartesiano ortonormado xOy, estão representados partes dos gráficos das funções f e g, e um trapézio isósceles $[ABCD]$, como se observa na figura 13

Sabe-se que:

- os pontos A e D pertencem ao gráfico da função g
- os pontos B e C pertencem ao gráfico da função f
- a abcissa do ponto A é a
- a abcissa do ponto D excede a abcissa do ponto A em uma unidade

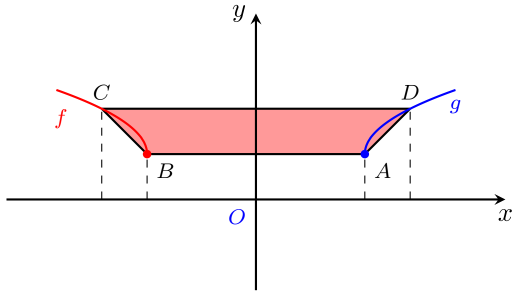


Figura 13

A área do trapézio $[ABCD]$, é dada, em função de a, por:

(A) $2a + 2$

(B) $a + 1$

(C) $4a + 2$

(D) $2a + 1$

13. Seja f, a função real de variável real, definida por $f(x) = xe^x - e^x$
na figura 14, estão representados, num plano munido de um referencial ortonormado xOy, parte do gráfico da função f, a reta r, tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa 2, e dois pontos do gráfico, I e T

Sabe-se que:

- I é ponto de inflexão do gráfico da função f
- T é o ponto de interseção da reta r com o gráfico de f

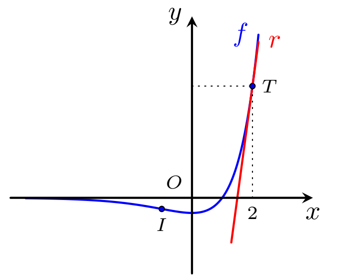


Figura 14

13.1. Escreve a equação reduzida da reta r

13.2. Mostra, analiticamente, que o ponto I tem coordenadas $\left(-1; -\frac{2}{e}\right)$

13.3. Mostra, recorrendo ao Teorema de Bolzano, que a função g, real de variável real, definida por $g(x) = -1 + f(2x)$ admite um zero no intervalo $]0;1[$

14. Nas festas da cidade de Paredes, junto ao parque da cidade, há um carrossel para crianças com a forma que se apresenta na figura 15
A base do carrossel é formado por um prisma octogonal regular, e o telhado é uma pirâmide octogonal, como se observa na figura 15
Na figura está um modelo do carrossel

Admite que se fixa um referencial ortonormado $Oxyz$, como o representado na figura 15

Sabe-se que:

- $a > 0$
- o ponto A pertence ao eixo Oy
- $B\left(\frac{3}{2}a; \frac{3}{2}a; 0\right)$
- $\overrightarrow{AD} = (0, 0; 4a)$
- $\overrightarrow{CD} = (0, 4a; 0)$
- $V(0; 0; 5a)$
- a reta AV tem equação vetorial
$(x; y; z) = (0, -2a, 10a) + k(0, -4a, 10a), k \in \mathbb{R}$

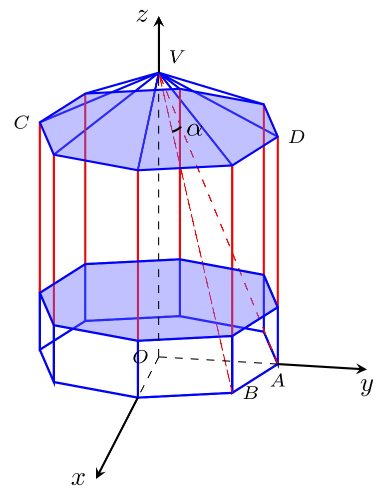


Figura 15

14.1. Sendo α a amplitude do ângulo BVA, um valor aproximado às décimas de α é:

(A) 16.6°
(B) 16.7°
(C) 16.8°
(D) 16.9°

14.2. Escreve uma equação cartesiana do plano ABC

COTAÇÕES

1.			
		....	5 pontos
2.			
		....	15 pontos
3.			
		....	5 pontos
4.			
		....	10 pontos
5.			
		....	5 pontos
6.			
		....	5 pontos
7.			
		....	15 pontos
8.			
	8.1	....	5 pontos
	8.2	....	15 pontos
9.			
	9.1	....	15 pontos
	9.2	....	5 pontos
10.			
		....	15 pontos
11.			
	11.1	....	5 pontos
	11.2	....	10 pontos
12.			
		....	5 pontos
13.			
	13.1	....	10 pontos
	13.2	....	15 pontos
	13.3	....	10 pontos
14.			
	14.1	....	15 pontos
	14.2	....	15 pontos
		TOTAL	**100 pontos**

Resolução do Exame Modelo VIII de Matemática A

Duração do Exame: 150 **minutos** + 30 **minutos de tolerância** | **junho de 2020**

12.º Ano de Escolaridade

1. Ora, $g(x) = -2f(4x) = -2\sin(4\pi x)$

   Procuremos os zeros de g em $[0;2]$

   $g(x) = 0 \Leftrightarrow -2\sin(4\pi x) = 0 \Leftrightarrow \sin(4\pi x) = 0 \Leftrightarrow \sin(4\pi x) = \sin(0) \Leftrightarrow 4\pi x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{4\pi}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \dfrac{k}{4}, k \in \mathbb{Z}$

   Atribuindo valores a k, vem,

$k = 0 \rightarrow x = 0 \in [0;2]$

$k = 1 \rightarrow x = \dfrac{1}{4} \in [0;2]$

$k = 2 \rightarrow x = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \in [0;2]$

$k = 3 \rightarrow x = \dfrac{3}{4} \in [0;2]$

$k = 4 \rightarrow x = \dfrac{4}{4} = 1 \in [0;2]$

$k = 5 \rightarrow x = \dfrac{5}{4} \in [0;2]$

$k = 6 \rightarrow x = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} \in [0;2]$

$k = 7 \rightarrow x = \dfrac{7}{4} \in [0;2]$

$k = 8 \rightarrow x = \dfrac{8}{4} = 2 \in [0;2]$

$k = 9 \rightarrow x = \dfrac{9}{4} \notin [0;2]$

   A função g tem 9 zeros no intervalo $[0;2]$

   Resposta: (B)

Obs.: Poderíamos inserir a função g na calculadora gráfica, definindo a janela $[0;2] \times [-5;5]$, e contar os zeros da função

Gráfico da função g no intervalo $[0;2]$

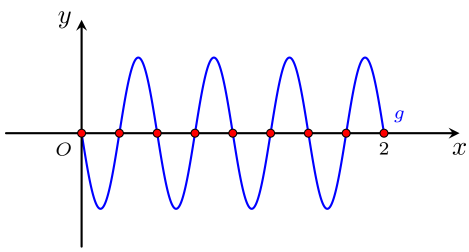


Figura 1

2. Fazendo um esquema

   Cada número do conjunto B é da forma: 7 $\cdots$ $\cdots$ $\cdots$ 2

   Para que a soma dos cinco algarismos do número seja ímpar é preciso que a soma dos três algarismos em falta seja par

   Ora, para que esta soma seja par, dois casos podem ocorrer:

   - um algarismo é par e os outros dois são ímpares(e distintos)
   - os três algarismos são pares (e distintos)

   Resposta do Rodrigo

   1º. Caso:

   Neste caso, temos de escolher um número par de entre três disponíveis (4, 6 e 8), visto que o 2 já está escolhido, e essa escolha pode ser feita de ${}^3C_1$ maneiras distintas. Para além disso, temos de escolher a posição que este algarismo vai ocupar nos três lugares disponíveis, o que pode ser feito de ${}^3C_1$ maneiras distintas. Assim, há ${}^3C_1 \times {}^3C_1$ maneiras distintas de escolher e colocar o número par
   Escolhido o algarismo par e fixada a sua posição, restam duas posições para quatro algarismos ímpares (1,3, 5, 9), visto que o 7 já está escolhido. Há ${}^4A_2$ maneiras distintas de escolher ordenadamente os dois algarismos ímpares para estas duas posições

   Então há ${}^3C_1 \times {}^3C_1 \times {}^4A_2$ números distintos neste caso

   2º. Caso:

   Temos três algarismos pares disponíveis (4, 6 e 8), visto que o 2 já está escolhido, e três posições para eles. Então, temos de escolher ordenadamente três algarismos pares de entre os três que existem, para essas três posições. O número de maneiras distintas de o fazer é ${}^3A_3$ (para a primeira posição temos três escolhas; fixado esse algarismo, temos duas escolhas para a segunda posição; fixados esses dois algarismos, para a terceira posição temos uma escolha)

   Concluindo, $\#B = {}^3C_1 \times {}^3C_1 \times {}^4A_2 + {}^3A_3$

   Resposta da Carolina

   1º. Caso:

   Neste caso, temos de escolher dois números ímpares de entre quatro disponíveis (1, 3, 5 e 9), visto que o 7 já está escolhido, e essa escolha pode ser feita de ${}^4C_2$ maneiras distintas. Para além disso, temos de escolher a posição que este dois algarismos vão ocupar nos três lugares disponíveis, o que pode ser feito de ${}^3C_2$ maneiras distintas. Escolhidos e colocados os dois algarismos ímpares, eles ainda podem permutar entre si de 2! maneiras distintas. Assim, há ${}^4C_2 \times {}^3C_2 \times 2!$ maneiras distintas de escolher e colocar os números ímpares
   Escolhidos os dois algarismos ímpares e fixada a sua posição, resta uma posição para três algarismos pares (4, 6 e 8), visto que o 2 já está escolhido. Há ${}^3C_1$ maneiras distintas de colocar o algarismo par

   Então há $\#B = {}^4C_2 \times {}^3C_2 \times 2! \times {}^3C_1$ números distintos neste caso

   2º. Caso:

   Temos três algarismos pares disponíveis (4, 6 e 8), visto que o 2 já está escolhido, e três posições para eles. Então, colocam-se os três algarismos nas três posições, permutando entre si. O número de maneiras distintas de o fazer é 3!
   Concluindo, $\#B = {}^4C_2 \times {}^3C_2 \times 2! \times {}^3C_1 + 3!$

3. Como a circunferência tem raio r, então

   $A(r\cos(x); r\sin(x))$, com $\cos(x) > 0$ e $\sin(x) > 0$

   Sendo F, a projeção ortogonal do ponto A sobre o eixo Oy, tem-se que $F(0; r\sin(x))$

   Assim,

   $\overline{AB} = 2r\cos(x)$

   $\overline{OF} = r\sin(x)$

   Portanto, a área da região colorida é

   $A_{regiaocolorida} = \pi r^2 - 2\times A_{[ABO]} = \pi r^2 - 2\times\frac{\overline{AB}\times\overline{OF}}{2} = \pi r^2 - \overline{AB}\times\overline{OF} = \pi r^2 - 2r\cos(x)\times r\sin(x) =$

   $= \pi r^2 - 2r^2\sin(x)\cos(x) = \pi r^2 - r^2\sin(2x) = r^2(\pi - \sin(2x))$

   Resposta: (B)

4. De $\log_a(b^2) = 4$, tem-se,

   $\log_a(b^2) = 4 \Leftrightarrow 2\log_a(b) = 4 \Leftrightarrow \log_a(b) = 2$

   Assim,

   $$\log_b\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = \frac{\log_a\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)}{\log_a(b)} = \frac{\log_a\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{2} = \frac{\frac{1}{2}\log_a\left(\frac{b}{a}\right)}{2} = \frac{\log_a(b) - \log_a(a)}{4} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$$

5. $g(x) = f(x) + e$

   Assim,

   $g'(x) = (f(x) + e)' = f'(x) + e' = (ax^2 + bx + c)' + 0 = 2ax + b$, com $a > 0$

   Logo, o gráfico da função g' só poderá estar na opção D

   Resposta: (D)

6. Consideremos o acontecimento

   A: saem duas bolas em que o número da segunda bola é o sucessor do número da primeira bola

   Então,

   $\overline{A}$: saem duas bolas em que o número da segunda bola não é o sucessor do número da primeira bola

   $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

   Calculemos, então, $P(A)$

   número de casos possíveis:

   Se, se retiram duas bolas da caixa sucessivamente e sem reposição, então o número de maneiras distintas de o fazer é dado por ${}^{10}A_2$. Este número é o número de casos possíveis

   Número de casos favoráveis:

   Pretende-se que saiam duas bolas em que o número da segunda bola é o sucessor do número da primeira bola

   Então temos os seguintes casos a considerar:

   $1; 2$ ou $2; 3$ ou $3; 4$ ou $\cdots$ $9; 10$. Ou seja, são nove casos favoráveis

   Sendo assim, $P(A) = \dfrac{9}{{}^{10}A_2}$

   Logo,

   $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{9}{{}^{10}A_2} = 1 - 0.1 = 0.9 = 90\%$

   Resposta: (D)

7. $P(B|\overline{A})$, é a probabilidade de a soma dos números das duas bolas extraídas da caixa Y ser cinco, sabendo que não saiu número ímpar no lançamento do dado
   Ora, se saiu número par no lançamento do dado, então, vai ser retirada a bola com o número quatro da caixa X e, juntamente com mais onze bolas iguais a ela, vão ser colocadas na caixa Y
   Assim, na caixa Y passa a haver vinte e quatro bolas, sendo três bolas numeradas com o número um, quatro numeradas com o número dois, cinco numeradas com o número três e doze numeradas com o número quatro
   Como a seguir se retiram em simultâneo, duas bolas da caixa Y, então o número de casos possíveis é igual a ${}^{24}C_2$

   Quanto ao número de casos favoráveis:

   Pretende-se que a soma dos números das duas bolas extraídas seja igual a cinco, então podem ocorrer os seguintes casos:

   - sai uma bola com o número quatro e uma bola com o número um : ${}^{12}C_1 \times {}^3 C_1$
   - sai uma bola com o número dois e uma bola com o número três : ${}^{4}C_1 \times {}^5 C_1$

   Então o número de casos favoráveis é igual a ${}^{12}C_1 \times {}^3 C_1 + {}^4 C_1 \times {}^5 C_1$

   E a probabilidade pedida é,

   $$P(B|\overline{A}) = \frac{{}^{12}C_1 \times {}^3 C_1 + {}^4 C_1 \times {}^5 C_1}{{}^{24}C_2}$$

8. .

8.1. $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : e^{4x} - e^{2x} > 0\right\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}^+$

Cálculo auxiliar

$e^{4x} - e^{2x} > 0 \Leftrightarrow e^{4x} > e^{2x} \Leftrightarrow 4x > 2x \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

8.2. $D_f = \mathbb{R}^+$
Assintotas verticais

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} [\ln(e^{4x} - e^{2x})] = \ln[\lim_{x \to 0^+} (e^{4x} - e^{2x})] = \ln(0^+) = -\infty$$

Logo, a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico da função f

Como a função f é contínua em todo o seu domínio, então, não existem mais assíntotas verticais ao gráfico da função f

Assíntotas não verticais

A equação da assíntota não vertical é da forma $y = mx + b$, $m, b \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(e^{4x} - e^{2x})}{x} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left[e^{4x}\left(1 - \frac{e^{2x}}{e^{4x}}\right)\right]}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(e^{4x}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right)}{x} = \lim_{x \to +\infty} (4) + \frac{0}{+\infty} = 4 + 0 = 4$$

Logo, $m = 4$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 4x) = \lim_{x \to +\infty} [\ln(e^{4x} - e^{2x}) - 4x] \overset{(\infty - \infty)}{=} \lim_{x \to +\infty} \left[\ln\left[e^{4x}\left(1 - \frac{e^{2x}}{e^{4x}}\right)\right] - 4x\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\ln\left(e^{4x}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right) - 4x\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[4x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right) - 4x\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\ln\left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right)\right] = \ln(1) = 0$$

Logo, $b = 0$

Concluindo, a reta de equação $y = 4x$, é assíntota não vertical ao gráfico da função f, quando $x \to +\infty$

9. .

9.1. Determinemos a função derivada de g

$$g'(x) = \left(\frac{x}{\ln(x)}\right)' = \frac{1 \times \ln(x) - x \times \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}$$

Procuremos os zeros de g'

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2} = 0 \wedge x > 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow \ln(x) - 1 = 0 \wedge (\ln(x))^2 \neq 0 \wedge x > 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = 1 \wedge \ln(x) \neq 0 \wedge x > 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = e \wedge x > 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = e$$

Quadro de sinal de g'

x	0		1		e	$+\infty$
$\ln(x)-1$	$\backslash\backslash\backslash$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(\ln(x))^2$	$\backslash\backslash\backslash$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$g'(x)$	$\backslash\backslash\backslash$	$-$	$\backslash\backslash\backslash$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\backslash\backslash\backslash$	$\searrow$	$\backslash\backslash\backslash$	$\searrow$	e	$\nearrow$

$g(e)=\dfrac{e}{\ln(e)}=\dfrac{e}{1}=e$

A função g é estritamente decrescente em $]0;1[$ e em $]1;e]$, e é estritamente crescente em $[e;+\infty[$

Atinge o valor mínimo relativo e, para $x=e$

9.2. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{g'(x)}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{g'(x)-0}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{g'(x)-g'(e)}{x-e}=g''(e)=\dfrac{2-\ln(e)}{e\times(\ln(e))^3}=\dfrac{2-1}{e\times 1^3}=\dfrac{1}{e}=e^{-1}$

Cálculos auxiliares

$g'(e)=\dfrac{\ln(e)-1}{(\ln(e))^2}=\dfrac{1-1}{1^2}=0$

$$g''(x)=\left(\frac{\ln(x)-1}{(\ln(x))^2}\right)'=\frac{\frac{1}{x}\times(\ln(x))^2-(\ln(x)-1)\times 2\times\ln(x)\times\frac{1}{x}}{(\ln(x))^4}=$$

$$=\frac{\frac{1}{x}(\ln(x))^2-\frac{2}{x}(\ln(x))^2+\frac{2}{x}\ln(x)}{(\ln(x))^4}=\frac{-\frac{1}{x}(\ln(x))^2+\frac{2}{x}\ln(x)}{(\ln(x))^4}=\frac{\frac{1}{x}\ln(x)(2-\ln(x))}{(\ln(x))^4}=\frac{2-\ln(x)}{x(\ln(x))^3}$$

Resposta: (A)

10. .

Sejam os acontecimentos:

M: o professor é do sexo feminino $\rightarrow P(M)=\dfrac{100}{150}=\dfrac{2}{3}$

$\overline{M}$: o professor é do sexo masculino $\rightarrow P(\overline{M})=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

A: o professor tem perfil para desempenhar a função de Diretor de Turma

$\overline{A}$: o professor não tem perfil para desempenhar a função de Diretor de Turma

Então,

$P(A|M)=0.9$ e $P(A|\overline{M})=0.6$

Sabe-se que:

$$P(A|M)=0.9\Leftrightarrow\frac{P(A\cap M)}{P(M)}=\frac{9}{10}\Leftrightarrow P(A\cap M)=\frac{9}{10}\times P(M)\Leftrightarrow P(A\cap M)=\frac{9}{10}\times\frac{2}{3}\Leftrightarrow P(A\cap M)=\frac{3}{5}$$

$$P(A|\overline{M})=0.6\Leftrightarrow\frac{P(A\cap\overline{M})}{P(\overline{M})}=\frac{6}{10}\Leftrightarrow P(A\cap\overline{M})=\frac{6}{10}\times P(\overline{M})\Leftrightarrow P(A\cap\overline{M})=\frac{6}{10}\times\frac{1}{3}\Leftrightarrow P(A\cap\overline{M})=\frac{1}{5}$$

Elaborando uma tabela

	A	$\overline{A}$	
M	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{3}$
$\overline{M}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

Pretende-se determinar $P(M|\overline{A})$

Ora, $P(M|\overline{A}) = \dfrac{P(M \cap \overline{A})}{\overline{A}} = \dfrac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{5}} = \dfrac{1}{3}$

11. .

11.1. A condição, $1 \leq |z - 2i| \leq 3$, que é equivalente a $1 \leq |z - (0 + 2i)| \leq 3$, representa, no plano complexo, uma coroa circular centrada no ponto $P(0; 2)$, afixo do número complexo $z = 2i$, e de raios 1 e 3

A condição $\dfrac{\pi}{4} < Arg(z - 2i) < \dfrac{3\pi}{4}$, que é equivalente a $\dfrac{\pi}{4} < Arg(z - (0 + 2i)) < \dfrac{3\pi}{4}$, representa, no plano complexo, o conjunto de pontos, afixos de z, que se situam entre a semirreta de origem P e que forma, com a semirreta de origem P e com direção e sentido do semieixo real positivo, um ângulo de amplitude$\dfrac{\pi}{4}$, e a semirreta de origem P e que forma, com a semirreta de origem P e com direção e sentido do semieixo real positivo, um ângulo de amplitude $\dfrac{3\pi}{4}$

Então, o conjunto definido pela condição $1 \leq |z - 2i| \leq 3 \wedge \dfrac{\pi}{4} < Arg(z - 2i) < \dfrac{3\pi}{4}$ pode estar representado na opção A

Resposta: (A)

11.2. se z_1 e z_2 são duas raízes consecutivas n-ésimas do complexo z, então
os argumentos destes dois números complexos estão em progressão aritmética de razão $\dfrac{2\pi}{n}$

Sendo assim, como são raízes consecutivas n-esimas, tem-se

$$\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{n} = \frac{13\pi}{20}$$

então,

$$\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{n} = \frac{13\pi}{20} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{n} = \frac{13\pi}{20} - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{n} = \frac{8\pi}{20} \Leftrightarrow n = 5$$

Ou seja, z_1 e z_2 são duas raízes quintas, consecutivas do complexo z

Assim,

o complexo $z = (z_2)^5 = \left(2e^{i\left(\frac{13\pi}{20}\right)}\right)^5 = 2^5 e^{i\left(\frac{65\pi}{20}\right)} = 32e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$

12. Sabemos que $f(x) = b + \sqrt{-x - a}$

Assim, $g(x) = f(-x) = b + \sqrt{x - a}$

Coordenadas dos vértices do trapézio

Ponto A

$g(a) = b + \sqrt{a-a} = b + 0 = b$

Logo, $A(a; b)$

Ponto D

$g(a+1) = b + \sqrt{a+1-a} = b + 1$

Logo, $D(a+1; b+1)$

Ponto B é simétrico do ponto A em relação ao eixo Oy

Logo, $B(-a; b)$

Ponto C é simétrico do ponto D em relação ao eixo Oy

Logo, $C(-a-1; b+1)$

Assim,

Base menor do trapézio

$\overline{AB} = |a - (-a)| = |a + a| = |2a| = 2a$, visto que $a > 0$

Base maior do trapézio

$\overline{CD} = |a + 1 - (-a - 1)| = |a + 1 + a + 1| = |2a + 2| = 2a + 2$, visto que $a > 0$

Altura do trapézio:

$|ordenada \quad de \quad D - ordenada \quad de \quad A| = |b + 1 - b| = 1$

Portanto,

$A_{[ABCD]} = \dfrac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \times 1 = \dfrac{2a + 2a + 2}{2} = \dfrac{4a + 2}{2} = 2a + 1$

Resposta: (D)

13. .

13.1. Calculemos a função derivada de f

$f'(x) = (xe^x - e^x)' = 1e^x + xe^x - e^x = xe^x$

Seja m o declive da reta tangente

$m = f'(2) = 2e^2 = 2e^2$

Ponto de tangência I

$f(2) = 2e^2 - e^2 = e^2$

Então, $I(2; e^2)$

Assim sendo,

$r: y = 2e^2x + b$, com $b \in \mathbb{R}$

Como a reta "passa" no ponto I, vem,

$e^2 = 2e^2 \times 2 + b \Leftrightarrow b = -3e^2$

Logo,

$r: y = 2e^2x - 3e^2$

13.2. $f(x) = xe^x - e^x$

A função derivada de f é $f'(x) = xe^x$

Calculemos a função segunda derivada de f

$f''(x) = (xe^x)' = e^x + xe^x = e^x(x+1)$

Zeros de $f''(x)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \vee e^x = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Quadro de sinal de $f''(x)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$
e^x	$+$	$+$	$+$
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$	$-\frac{2}{e}$	$\smile$

Cálculos auxiliares

$f(-1) = -e^{-1} - e^{-1} = -2e^{-1} = -\frac{2}{e}$

O gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty; -1]$, tem a concavidade voltada para cima em $[-1; +\infty[$, e tem um ponto de inflexão de coordenadas $I\left(-1; -\frac{2}{e}\right)$

13.3. A função f é contínua em $\mathbb{R}$, em particular, é contínua em $[0; 1]$

Assim, a função g é contínua em $[0; 1]$, por se tratar da soma de duas funções contínuas

Por outro lado

$g(0) = -1 + f(0) = -1 + 0 \times e^0 - e^0 = -2 < 0$

$g(1) = -1 + f(2) = -1 + 2 \times e^2 - e^2 = e^2 - 1 > 0$

Como a função g é contínua em $[0; 1]$ e $g(0) \times g(1) < 0$, então, pelo corolário do teorema de Bolzano, existe pelo pelo menos um zero da função g em $]0; 1[$

14. .

14.1. Sabemos que o ponto A pertence ao eixo Oy, logo, é da forma $(0; y; 0)$, com $y \in \mathbb{R}$

Como pertence à reta AV, vem,

$(0; y; 0) = (0, -2a, 10a) + k(0, -4a, 10a) \Leftrightarrow 0 = 0 \wedge y = -2a - 4ak \wedge 0 = 10a + 10ak \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -2a - 4ak \wedge k = -1 \Leftrightarrow y = -2a + 4a \wedge k = -1 \Leftrightarrow y = 2a \wedge k = -1$

Logo, $A(0; 2a; 0)$

Determinemos os vetores $\overrightarrow{AV}$ e $\overrightarrow{BV}$

$\overrightarrow{AV} = V - A = (0; 0; 5a) - (0; 2a; 0) = (0; -2a; 5a)$

$\overrightarrow{BV} = V - B = (0; 0; 5a) - \left(\frac{3}{2}a; \frac{3}{2}a; 0\right) = \left(-\frac{3}{2}a; -\frac{3}{2}a; 5a\right)$

Calculemos o produto escalar entre estes dois vetores

$\overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{BV} = 0 \times \left(-\frac{3}{2}a\right) - 2a \times \left(-\frac{3}{2}a\right) + 5a \times 5a = 3a^2 + 25a^2 = 28a^2$

Calculemos as normas destes dois vetores

$||\overrightarrow{AV}|| = \sqrt{0^2 + (-2a)^2 + (5a)^2} = \sqrt{0 + 4a^2 + 25a^2} = \sqrt{29a^2} = \sqrt{29}a$, visto que $a > 0$

$||\overrightarrow{BV}|| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}a\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}a\right)^2 + (5a)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + \frac{9}{4}a^2 + 25a^2} = \sqrt{\frac{118}{4}a^2} = \frac{\sqrt{118}}{2}a$, visto que $a > 0$

Seja α, a amplitude do ângulo BVA

assim,

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{BV}}{||\overrightarrow{AV}|| \times ||\overrightarrow{BV}||} = \frac{28a^2}{\sqrt{29}a \times \frac{\sqrt{118}}{2}a} = \frac{56a^2}{\sqrt{3422}a^2} = \frac{56}{\sqrt{3422}}$$

Portanto,

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{56}{\sqrt{3422}}\right) \approx 16.8°$$

Resposta: (C)

14.2. Sabemos que:

$A(0; 2a; 0)$
$B\left(\frac{3}{2}a; \frac{3}{2}a; 0\right)$
$\overrightarrow{AD} = (0, 0; 4a)$
$\overrightarrow{CD} = (0, -4a; 0)$

Ora, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = (0; 0; 4a) + (0; 4a; 0) = (0; -2a; 4a)$
$\overrightarrow{AB} = B - A = \left(\frac{3}{2}a; \frac{3}{2}a; 0\right) - (0; 2a; 0) = \left(\frac{3}{2}a; -\frac{1}{2}a; 0\right)$

Determinemos uma equação do plano ABC
Seja $\overrightarrow{\alpha}(b; c; d)$, um vetor normal ao plano ABC

Assim,

$\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \wedge \overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$\Leftrightarrow (b; c; d) \cdot \left(\frac{3}{2}a; -\frac{1}{2}a; 0\right) = 0 \wedge (b; c; d) \cdot (0; -4a; 4a) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}ab - \frac{1}{2}ac = 0 \wedge -4ac + 4ad = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3b - c = 0 \wedge -c + d = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b = \frac{1}{3}c \wedge d = c$

Logo,

$\overrightarrow{\alpha}\left(\frac{1}{3}c; c; c\right)$, com $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, é uma família de vetores normais ao plano ABC

Tomando $c = 3$, vem, $\overrightarrow{\alpha}(1; 3; 3)$

assim, $ABC : 1x + 3y + 3z + d = 0, d \in \mathbb{R}$, ou seja, $ABC : x + 3y + 3z + d = 0, d \in \mathbb{R}$

Como $A\,(0, 2a; 0)$ é um ponto deste plano, vem,

$0 + 3 \times 2a + 3 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow 6a + d = 0 \Leftrightarrow d = -6a$

Logo, $ABC : x + 3y + 3z - 6a = 0$, com $a > 0$

OmegaMat

Exame Modelo IX de Matemática A

Duração do Exame: 150 **minutos** + 30 **minutos de tolerância** | **junho de 2020**

12.º Ano de Escolaridade

Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta

É permitido o uso de calculadora

Não é permitido o uso de corretor. Risca o que pretendes que não seja classificado

Para cada resposta identifica o item

Apresenta as tuas respostas de forma legível

Apresenta apenas uma resposta para cada item

A prova apresenta um formulário na página 2

As cotações dos itens encontram-se na página 6

Na resposta aos itens de seleção (escolha múltipla), seleciona a resposta correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação apresenta sempre o valor exato.

NOTA

⁕ Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

6.1, 6.2, 6.3 e 9

Estes itens estão assinalados no enunciado a cor azul e em itálico

⁕ Dos restantes 14 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr *(α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)*

área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

área de um setor circular:

$\dfrac{\alpha r^2}{2}$ *(α- amplitude, em radianos, do ângulo ao centro, r - raio)*

área lateral de um cone: $\pi r g$ *(r - raio da base, g - geratriz)*

área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ *(r - raio)*

Volume da pirâmide: $\dfrac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume do cone: $\dfrac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume da esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ *(r - raio)*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\dfrac{u_1+u_n}{2}\times n$

Progressão geométrica: $u_1\times\dfrac{1-r^n}{1-r}$, $r\neq 1$

Trigonometria

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

Complexos

$(|z|e^{i\theta})^n=|z|^n e^{i(n\theta)}$

$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$, $k\in\{0;1;2;...;n-1\}$ e $n\in\mathbb{N}$

Regras de derivação

$(u+v)'=u'+v'$

$(uv)'=u'v+uv'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$(u^n)'=nu^{n-1}u' \quad (n\in\mathbb{R})$

$(\sin u)'=u'\cos u$

$(\cos u)'=-u'\sin u$

$(\tan u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)'=u'e^u$

$(a^u)'=u'a^u\ln a \quad (a\in\mathbb{R}^+\backslash\{1\})$

$(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u\ln a} \quad (a\in\mathbb{R}^+\backslash\{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e \quad (n\in\mathbb{N})$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^p}=+\infty \quad (p\in\mathbb{R})$

1. Considera um tabuleiro com dezasseis casas (quadrado dividido em dezasseis quadrados)
O Rodrigo tem seis bolas numeradas de 1 a 6 numa caixa
Ele pretende colocar nesse tabuleiro quatro das seis bolas numeradas de 1 a 6, uma, e só uma, em cada casa
Quantas configurações distintas pode o Rodrigo fazer no tabuleiro?

(A) 43680

(B) 1820

(C) 27300

(D) 655200

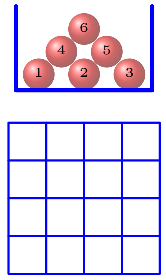


Figura 1

2. Numa caixa estão quatro bolas azuis e n bolas vermelhas
Considera a experiência que consiste em retirar, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da caixa

Sabe-se que a probabilidade de a primeira bola ser azul e a segunda ser vermelha é igual a $\frac{10}{69}$
Quantas bolas estão na caixa?

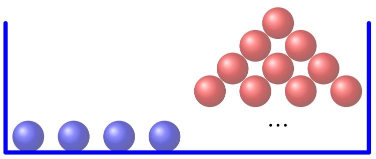


Figura 2

3. Sejam f e g, as funções reais de variável real, definidas, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = 1 + 2e^{x-2}$, $g(x) = -f(x)$

Na figura 3, estão representados, num plano munido de um referencial ortonormado xOy, partes dos gráficos das funções f e g, e um trapézio isósceles $[ABCD]$

Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem ao gráfico de f
- os pontos C e D pertencem ao gráfico de g
- a ordenada do ponto D é -3
- os pontos A e D têm a mesma abcissa
- B é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Oy
- C é o ponto de interseção do gráfico de g com o eixo Oy

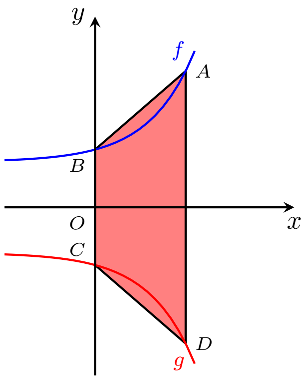


Figura 3

3.1. Mostra que a área A do trapézio $[ABCD]$ é $A_{[ABCD]} = \frac{4+8e^2}{e^2}$

4. Em qual das opções está o valor de $k \in \mathbb{R}^+$, tal que $\lim \left(\frac{n+2}{n+6}\right)^{\frac{n}{2}} = e^{\ln(k)-3}$?

(A) 1

(B) $2e$

(C) e

(D) $3e$

5. Considera, num plano munido de um referencial ortonormado xOy, a circunferência trigonométrica, como se observa na figura 4

Sabe-se que:

- os pontos A, B, C, D, E e F, pertencem à circunferência
- os pontos A e B são simétricos em relação ao eixo Oy
- os pontos C e D são simétricos em relação ao eixo Oy
- os triângulos $[ABO]$ e $[CDO]$, são simétricos em relação ao eixo Ox
- $E(1;0)$ e $F(-1;0)$
- o ponto A move-se no primeiro quadrante, e os pontos B, C e D, acompanham esse movimento
- $E\hat{O}A = x$, com $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

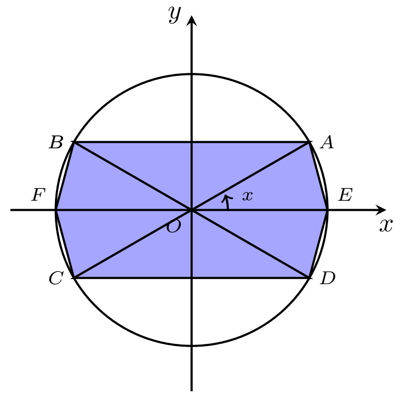


Figura 4

5.1. Mostra que a área A, da região colorida da figura, é dada, em função de x, por

$$A(x) = 2\sin(x) + \sin(2x)$$

5.2. Determina, analiticamente, o valor de x, para o qual a área da região colorida é máxima

6. Na figura 5 está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um sólido, que pode se decomposto num prisma $[ABCDEFGH]$, quadrangular regular reto e numa pirâmide $[EFGHI]$, quadrangular regular reta

Sabe-se que:

- *a face $[ABCD]$ está contida no plano xOz*
- *a base da pirâmide coincide com a face $[EFGH]$ do prisma*
- *a origem do referencial é o centro da face $[ABCD]$*
- *os pontos A e C pertencem ao eixo Ox*
- *os pontos B e D pertencem ao eixo Oz*
- *o plano ADE tem equação cartesiana $x + z - 4 = 0$*
- *o plano EFI tem equação cartesiana $3x + 4y - 3z - 36 = 0$*
- $\overrightarrow{HD} = (0, -6, 0)$

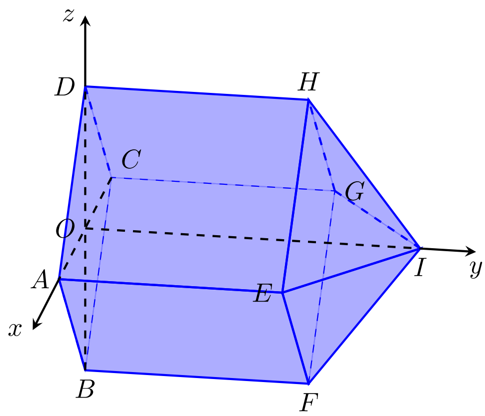


Figura 5

6.1. *Determina uma equação reduzida da superfície esférica de centro em I e que contém os pontos E, F, G e H, e escreve as equações dos planos paralelos ao plano xOy e tangentes a esta superfície esférica*

6.2. *Escreve uma equação vetorial da reta EF*

6.3. *Escreve uma equação cartesiana do plano ABE*
Escreve a equação na forma $ax + by + cz + d = 0$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

7. Considera um número complexo z, não nulo, cujo afixo é B
Na figura 6 está representado o plano de Argand - Gauss e nele alguns afixos de números complexos, sendo um deles o afixo de z

Qual dos afixos representados poderá ser o afixo do número complexo $w = \frac{-iz}{2}$?

(A) A

(B) E

(C) C

(D) D

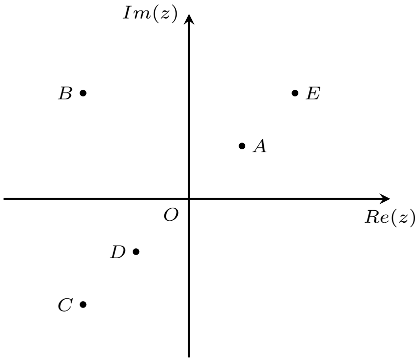


Figura 6

8. Seja $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos e seja z um número complexo
Mostra que a soma das soluções da equação $z^3 + 2iz^2 + z = 0$ é $2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

*9. Na figura 7 está representado um quadrado $[ABCD]$ de lado r, com $r > 0$
Desenharam-se arcos de circunferência, todos centrados no vértice A, sendo a medida do raio de cada arco, depois do primeiro, igual a metade do raio do arco anterior*

Considera a sucessão de todos esses arcos

Sendo S, a soma de todos os comprimentos dos n arcos da sucessão, pode-se afirmar que:

(A) $S = \pi$

(B) $S = \pi r$

(C) $S = 2\pi r$

(D) $S = 4\pi r$

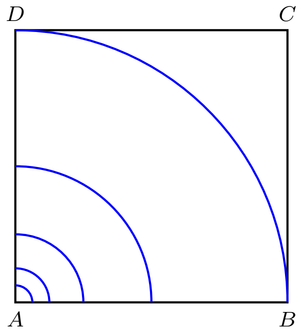


Figura 7

10. Seja $(E, P(E), P)$ um espaço de probabilidade, P uma probabilidade em $P(E)$ e sejam A e B, dois acontecimentos, com $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$

Mostra que $\dfrac{P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(A) + P(B) - 1}{2} = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B})$

11. Num saco estão nove cartões numerados de 1 a 9. Considera a experiência aleatória que consiste em retirar, sucessivamente e sem reposição, três cartões do saco
Com esses três cartões retirados forma-se um número de três algarismos (o número do primeiro cartão a sair do saco representa o algarismo das centenas, o número do segundo cartão representa o algarismo das dezenas e o número do terceiro cartão representa o algarismo das unidades)

De todos os números de três algarismos que se podem constituir, qual é a probabilidade de ser formado um número em que o produto dos três algarismos é par?

12. Seja f, a função real de variável real, definida por, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2e^x-x^2} & se \quad x<0\\[2mm] \log_a(b^2) & se \quad x=0\\[2mm] \dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{\ln(x+1)} & se \quad x>0\end{cases}$,

com $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $a>1$

12.1. Averigua se existe uma relação entre a e b, para a qual a função f é contínua no ponto $x=0$

12.2. Averigua, analiticamente, se o gráfico da função f admite assíntota horizontal quando $x \to +\infty$

13. Seja g, a função real de variável real, definida em $\mathbb{R}$, por $g(x)=\dfrac{x^2-1}{e^{-x}}$

Na figura 8, está representado, em referencial ortonormado xOy, parte do gráfico da função g, e uma reta t, tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa -1

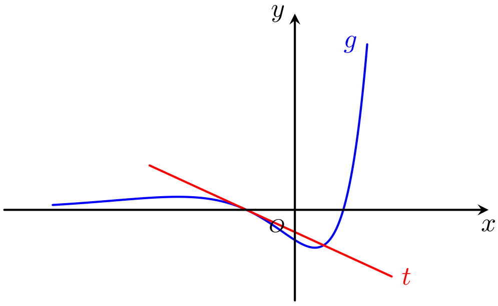


Figura 8

13.1. Em qual das opções está o declive da reta tangente t?

(A) $\dfrac{2}{e}$

(B) $-\dfrac{2}{e}$

(C) $2e$

(D) $-2e$

13.2. Estuda a função g quanto ao sentido das concavidades e pontos de inflexão do seu gráfico

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final					
Itens	6.1	6.2	6.3	9	Subtotal
Cotação (Pontos)	20	16	16	20	72

Destes 14 itens da prova, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação														
Itens	1	2	3	4	5.1	5.2	7	8	10	11	12.1	12.2	13.1	13.2	Subtotal
Cotação (Pontos)	8 × 16 Pontos														128

OmegaMat

Resolução do Exame Modelo IX de Matemática A

Duração do Exame: 150 **minutos** + 30 **minutos de tolerância** | **junho de 2020**

12.º Ano de Escolaridade

1. Em primeiro lugar é necessário escolher as quatro bolas de entre as seis que vão ser colocadas nas casas do tabuleiro. Essa escolha pode ser feita de ${}^6C_4$ maneiras distintas
   Escolhidas as bolas que vão ser colocadas no tabuleiro, existem ${}^{16}A_4$ maneiras distintas de colocar as quatro bolas nas dezasseis casas do tabuleiro (a colocação tem de ser ordenada)
   Portanto, há ${}^6C_4 \times {}^{16} A_4 = 655200$ maneiras distintas de colocar as quatro bolas no tabuleiro

   Resposta: (D)

2. Na caixa há $n + 4$ bolas

   se a probabilidade de a primeira bola ser azul e a segunda ser vermelha é igual a $\frac{10}{69}$

   então, tem-se que,

   $$\frac{4}{n+4} \times \frac{n}{n+3} = \frac{10}{69}$$

   Desta igualdade resulta que,

   $$\frac{4n}{n^2+7n+12} - \frac{10}{69} = 0 \Leftrightarrow \frac{276n - 10n^2 - 70n - 120}{69(n^2+7n+12)} = 0 \Leftrightarrow \frac{206n - 10n^2 - 120}{69(n^2+7n+12)} = 0 \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow -10n^2 + 206n - 120 = 0 \wedge n^2 + 7n + 12 \neq 0 \Leftrightarrow \left(n = 20 \vee n = \frac{3}{5}\right) \wedge n \neq -4 \wedge n \neq -3 \Leftrightarrow n = 20 \vee n = \frac{3}{5}$$

   Como n é um número natural, então $n = 20$, isto é, na caixa há 20 bolas vermelhas

   Logo, o número total de bolas que estão na caixa é 24

   Cálculos auxiliares

   $$-10n^2 + 206n - 120 = 0 \Leftrightarrow 5n^2 - 103n + 60 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{103 \pm \sqrt{(-103)^2 - 4 \times 5 \times 60}}{2 \times 5} \Leftrightarrow n = 20 \vee n = \frac{3}{5}$$

   $$69(n^2 + 7n + 12) = 0 \Leftrightarrow n^2 + 7n + 12 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 1 \times 12}}{2 \times 1} \Leftrightarrow n = -3 \vee n = -4$$

3. .

   Ponto $B(0; y)$

   sendo $y = f(0) = 1 + 2e^{0-2} = 1 + \frac{2}{e^2}$

   Logo, $B\left(0, 1 + \frac{2}{e^2}\right)$

   Ponto $D(x; -3)$, sendo x tal que $g(x) = -3$

   $$g(x) = -3 \Leftrightarrow -1 - 2e^{x-2} = -3 \Leftrightarrow e^{x-2} = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Logo, $D(2;-3)$

Como os gráficos das funções f e g são simétricos em relação ao eixo Ox, tem-se,

$C\left(0,-1-\frac{2}{e^2}\right)$

$A(2;3)$

Assim,

Base maior do trapézio: $\overline{AD}=|3-(-3)|=|3+3|=6$

Base menor do trapézio: $\overline{BC}=\left|1+\frac{2}{e^2}-\left(-1-\frac{2}{e^2}\right)\right|=\left|1+\frac{2}{e^2}+1+\frac{2}{e^2}\right|=\left|2+\frac{4}{e^2}\right|=2+\frac{4}{e^2}$

Logo, a área A do trapézio $[ABCD]$ é

$A_{[ABCD]}=\frac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}\times|abcissa \quad ponto \quad A|=\frac{6+2+\frac{4}{e^2}}{2}\times 2=8+\frac{4}{e^2}=\frac{4+8e^2}{e^2}$

4. Calculemos $\lim\left(\frac{n+2}{n+6}\right)^{\frac{n}{2}}$

$$\lim\left(\frac{n+2}{n+6}\right)^{\frac{n}{2}}=\left[\lim\left(\frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+\frac{6}{n}\right)}\right)^n\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{6}{n}\right)^n}\right]^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{e^2}{e^6}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(e^{-4}\right)^{\frac{1}{2}}=e^{-2}$$

Nota:

$$\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=\lim\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}\times 2}=\left[\lim\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2=e^2\text{, visto que, se } n\to+\infty\text{, então, }\frac{n}{2}\to+\infty$$

$$\lim\left(1+\frac{6}{n}\right)^n=\lim\left(1+\frac{1}{\frac{n}{6}}\right)^{\frac{n}{6}\times 6}=\left[\lim\left(1+\frac{1}{\frac{n}{6}}\right)^{\frac{n}{6}}\right]^6=e^6\text{, visto que, se } n\to+\infty\text{, então, }\frac{n}{6}\to+\infty$$

Então,

$$\lim\left(\frac{n+2}{n+6}\right)^{\frac{n}{2}}=e^{\ln(k)-3}\Leftrightarrow e^{\ln(k)-3}=e^{-2}\Leftrightarrow \ln(k)-3=-2\wedge k>0\Leftrightarrow \ln(k)=1\wedge k>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k=e\wedge k>0\Leftrightarrow k=e$$

Utilizou-se o limite notável $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

Resposta: (C)

5. .

5.1. Como a circunferência tem raio 1, então

$A(\cos(x);\sin(x))$, com $\cos(x)>0$ e $\sin(x)>0$

Sendo T, a projeção ortogonal do ponto A sobre o eixo Oy, tem-se que $T(0;\sin(x))$

Sendo S, a projeção ortogonal do ponto A sobre o eixo Ox, tem-se que $S(\cos(x);0)$

Assim,

$\overline{AB} = 2\cos(x)$

$\overline{OT} = \overline{AS} = \sin(x)$

$\overline{AD} = 2\sin(x)$

$\overline{OS} = \cos(x)$

Portanto, a área da região colorida é

$$A_{regiaocolorida} = 2 \times A_{[ABO]} + 4 \times A_{[AEO]} = 2 \times \frac{\overline{AB} \times \overline{OT}}{2} + 4 \times \frac{\overline{OE} \times \overline{AS}}{2} =$$

$$= \overline{AB} \times \overline{OT} + 2\overline{OE} \times \overline{AS} = 2\cos(x) \times \sin(x) + 2 \times 1 \times \sin(x) = 2\sin(x) + \sin(2x)$$

Logo, $A(x) = 2\sin(x) + \sin(2x)$, com $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

5.2. Determinemos a função derivada de A em $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

$$A'(x) = (2\sin(x) + \sin(2x))' = 2\cos(x) + 2\cos(2x)$$

Procuremos os zeros de $A'(x)$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos(x) + 2\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = -\cos(x) \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(\pi - x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pi - x + k2\pi \vee 2x = -\pi + x + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = \pi + k2\pi \vee x = -\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \vee x = -\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

Atribuindo valores a k, vem,

$k = 0 \hookrightarrow x = \frac{\pi}{3} \vee x = -\pi$

$k = 1 \hookrightarrow x = \pi \vee x = \pi$

$k = -1 \hookrightarrow x = -\frac{\pi}{3} \vee x = -3\pi$

Como $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, tem-se que $x = \frac{\pi}{3}$
Elaborando um quadro de sinais para a função derivada

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$A'(x)$	\\\\\\\\	$+$	0	$-$	\\\\\\\\
$A(x)$	\\\\\\\\	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	\\\\\\\\

$$A\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

A função A é estritamente crescente em $\left]0; \frac{\pi}{3}\right]$, e é estritamente decrescente em $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right[$
Atinge o valor máximo $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, para $x = \frac{\pi}{3}$

Resposta: a área colorida é máxima para $x = \frac{\pi}{3}$

6. .

6.1. Determinemos as coordenadas do ponto A

Sabe-se que $A(x;0;0)$, com $x \in \mathbb{R}$

Ora, A é ponto do plano ADE

Assim,

$x + 0 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

Logo, $A(4;0,0)$

Determinemos as coordenadas do ponto E

Ora, $E = A + \overrightarrow{DH} = (4;0;0) + (0;6;0) = (4;6;0)$

Determinemos as coordenadas do ponto I, vértice da pirâmide

Sabe-se que $I(0;y;0)$, com $y \in \mathbb{R}$

Ora, I é ponto do plano EFI

Assim,

$3 \times 0 + 4 \times y - 3 \times 0 - 36 = 0 \Leftrightarrow 4y = 36 \Leftrightarrow y = \frac{36}{4} \Leftrightarrow y = 9$

Logo, $I(0;9;0)$

Superfície esférica

Centro: $I(0;9;0)$
Raio:$\overline{EI} = \sqrt{(4-0)^2 + (6-9)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

Logo, a equação reduzida da superfície esférica pedida é $(x-0)^2 + (y-9)^2 + (z-0)^2 = 5^2$

Ou seja, $x^2 + (y-9)^2 + z^2 = 25$

As equações dos planos tangentes pedidos são $z = -5$ e $z = 5$

6.2. .

Ora, $E(4;6;0)$

Um vetor diretor da reta EF, poderá ser um vetor normal ao plano ADE

Seja $\overrightarrow{\alpha}$ esse vetor diretor da reta

então, $\overrightarrow{\alpha} = (1;0;1)$

Portanto, uma equação vetorial da reta EF é $(x;y;z) = (4;6;0) + k(1;0;1), k \in \mathbb{R}$

6.3. O plano ABE é perpendicular ao plano ADE

Assim, um vetor normal ao plano ABE terá de ser perpendicular a um vetor normal ao plano ADE

Seja $\overrightarrow{\beta}$, um vetor normal ao plano ABE

Como $\overrightarrow{\alpha} = (1;0;1)$ é um vetor normal ao plano ADE, então,

$\overrightarrow{\beta}$ pode ser $(-1;0;1)$

Nota 1: A escolha do vetor $\overrightarrow{\beta}$ foi feita de modo que $\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} = 0$

Nota 2: Em alternativa, poderíamos considerar $\overrightarrow{AD}$ para vetor normal ao plano ABE

Assim, uma equação cartesiana do plano ABE é da forma $-x + 0y + z + d = 0$, com $d \in \mathbb{R}$, ou seja, $-x + z + d = 0$, com $d \in \mathbb{R}$

Como A pertence a este plano, vem, $-4 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 4$

Logo, $-x + z + 4 = 0$ é uma equação cartesiana do plano ABE

7. Seja $z = |z|e^{i\theta}$, com $\theta \in \mathbb{R}$

   Assim,

   $w = \frac{-iz}{2} = -\frac{1}{2}i|z|e^{i\theta} = \frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}|z|e^{i\theta} = \frac{1}{2}|z|e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$
   Portanto, o afixo do complexo w obtém-se do afixo do complexo z por uma rotação de centro na origem e ângulo de amplitude $-\frac{\pi}{2}$, seguida de uma homotetia de razão $\frac{1}{2}$
   Conclui-se assim que o afixo de w só poderá ser A

   Resposta: (A)

8. $z^3+2iz^2+z = 0 \Leftrightarrow z(z^2+2iz+1) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z^2+2iz+1 = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z = (-1-\sqrt{2})i \vee z = (-1+\sqrt{2})i$

   Cálculos auxiliares

   $z^2 + 2iz + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-2i \pm \sqrt{(2i)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} \Leftrightarrow z = \frac{-2i \pm \sqrt{-4-4}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{-2i \pm \sqrt{-8}}{2} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow z = \frac{-2i \pm 2\sqrt{2}i}{2} \Leftrightarrow z = (-1-\sqrt{2})i \vee z = (-1+\sqrt{2})i$

   Obs.:

   $X = \sqrt{-8} = \sqrt{8e^{i\pi}} = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi+k2\pi}{2}\right)}$

   $k = 0 \mapsto X_0 = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 2\sqrt{2}i$

   $k = 1 \mapsto X_1 = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = -2\sqrt{2}i$

   Seja w a soma das soluções da equação

   $w = 0 + (-1-\sqrt{2})i + (-1+\sqrt{2})i = (-1-\sqrt{2}-1+\sqrt{2})i = -2i = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

9. Seja (P_n) a sucessão dos comprimentos dos n arcos

Ora,

$$P_1 = \frac{2\pi \times r}{4} = \pi r \times \frac{1}{2}$$

$$P_2 = \frac{2\pi \times \frac{r}{2}}{4} = \frac{\pi r}{4} = \pi r \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$P_3 = \frac{2\pi \times \frac{r}{4}}{4} = \frac{\pi r}{8} = \pi r \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$P_4 = \frac{2\pi \times \frac{r}{8}}{4} = \frac{\pi r}{16} = \pi r \times \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

Mantendo-se a regularidade, tem, $P_n = \pi r \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Os comprimentos dos arcos estão em progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$

Assim,

$$S_n = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n = \pi r \times \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \pi r \times \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = \pi r \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

Portanto, $S = \lim S_n = \lim \left[\pi r \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\right] = \pi r \times (1 - 0) = \pi r$

Resposta: (B)

10. .

$$\frac{P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(A) + P(B) - 1}{2} = \frac{P(A \cap B) + P(\overline{A \cup B}) + P(A) + P(B) - 1}{2} =$$

$$= \frac{P(A \cap B) + 1 - P(A \cup B) + P(A) + P(B) - 1}{2} =$$

$$= \frac{P(A \cap B) - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] + P(A) + P(B)}{2} =$$

$$= \frac{P(A \cap B) - P(A) - P(B) + P(A \cap B) + P(A) + P(B)}{2} =$$

$$= \frac{2P(A \cap B)}{2} = P(A \cap B)$$

$$= P(\overline{\overline{A} \cup \overline{B}})$$

$$= 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B})$$

11. .

Número de casos possíveis: ${}^9A_3$, visto que para o algarismos das centenas temos nove escolhas, fixado esse algarismos, para o algarismo das dezenas temos oito escolhas, e para o algarismo das unidades temos sete escolhas

Número de casos favoráveis:

Para que o produto dos três algarismos seja par é preciso que pelo menos um dos três algarismos que constituem o número seja par

Três casos podem ocorrer:

- um algarismo é par e os outros dois são ímpares(e distintos)
- dois algarismos são pares(e distintos) e um algarismo é ímpar
- três algarismos são pares (e distintos)

1º. Caso:

Neste caso, temos de escolher um número par, e isso pode ser feito de ${}^4C_1$ maneiras distintas , e temos de escolher a posição que este algarismo vai ocupar nos três lugares disponíveis, o que pode ser feito de ${}^3C_1$ maneiras distintas
Escolhido o algarismo par e fixada a sua posição, há ${}^5A_2$ maneiras distintas de escolher ordenadamente os dois algarismos ímpares de entre os cinco disponíveis (1, 3, 5, 7 e 9), para ocuparem as outras duas posições

Então há ${}^4C_1 \times {}^3 C_1 \times {}^5 A_2 = 240$ números distintos neste caso

2º. Caso:

Neste caso, temos de escolher dois números pares, e isso pode ser feito de ${}^4C_2$ maneiras distintas , e temos de escolher a posição que estes dois algarismos vão ocupar nos três lugares disponíveis, o que pode ser feito de ${}^3C_2$ maneiras distintas. Escolhido e fixados os dois algarismos pares, eles podem permutar de posição entre si de 2! maneiras distintas
Escolhidos os algarismos pares e fixadas as suas posições, há ${}^5C_1$ maneiras distintas de escolher o algarismo ímpar de entre os cinco disponíveis (1, 3, 5, 7 e 9), para ocupar a terceira posição

Então há ${}^4C_2 \times {}^3 C_2 \times 2! \times {}^5 C_1 = 180$ números distintos neste caso

3º. Caso:

Temos quatro algarismos pares disponíveis (2, 4, 6 e 8). Então, temos de escolher ordenadamente três algarismos pares de entre os quatro que existem, para ocuparem três posições, e o número de maneiras distintas de o fazer é ${}^4A_3 = 24$

Concluindo, podemos constituir ${}^4C_1 \times {}^3 C_1 \times {}^5 A_2 + {}^4 C_2 \times {}^3 C_2 \times 2! \times {}^5 C_1 + {}^4 A_3 = 444$ números nas condições dadas

Este é o número de casos favoráveis

Assim, $P = \dfrac{{}^4C_1 \times {}^3 C_1 \times {}^5 A_2 + {}^4 C_2 \times {}^3 C_2 \times 2! \times {}^5 C_1 + {}^4 A_3}{{}^9A_3} = \dfrac{444}{504} = \dfrac{37}{42}$

Em alternativa, poderíamos fazer o seguinte:

A probabilidade pedida é $P = 1-$ probabilidade de saírem três números ímpares

Ou seja, $P = 1 - \dfrac{{}^5A_3}{{}^9A_3} = \dfrac{{}^9A_3 - {}^5 A_3}{{}^9A_3} = \dfrac{444}{504} = \dfrac{37}{42}$

12. .

12.1. $0 \in D_f$

A função f é contínua em $x=0$, se existir $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, ou seja,

se $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

Ora,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3}{x^2e^x - x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3}{x^2(e^x-1)} =$$
$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{e^x-1} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{3x}-e^{2x}}{\ln(x+1)} =$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x}(e^x-1)}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0^+} e^{2x} \times \frac{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x}}{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x}} =$$
$$= 1 \times \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0^+} \frac{y}{e^y-1}} = \frac{1}{\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0^+} \frac{e^y-1}{y}}} = \frac{1}{\frac{1}{1}} = 1$$

Nota: Fez-se a mudança de variável

$y = \ln(x+1) \Leftrightarrow e^y = x+1 \Leftrightarrow x = e^y - 1$

Se $x \to 0^+$, então, $y \to 0^+$

Nota:

Aplicou-se o **limite notável** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

$f(0) = \log_a(b^2)$

Assim, se $\log_a(b^2) = 1 \Leftrightarrow a = b^2$, a função f é contínua em $x=0$

12.2. .

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{3x}-e^{2x}}{\ln(x+1)} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{3x}\left(1-e^{-x}\right)}{\ln(x+1)} =$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{3x}}{x^3} \times \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{\ln(x+1)} \times \lim_{x\to +\infty} (1-e^{-x}) =$$
$$= \left(\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x}\right)^3 \times \frac{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3}{x+1}}{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1}} \times (1-0) = +\infty \times \frac{\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2)}{\lim\limits_{y\to +\infty} \frac{\ln(y)}{y}} \times 1 = +\infty \times \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

Nota: Fez-se a mudança de variável

$y = x+1$

Se $x \to +\infty$, então, $y \to +\infty$

Aplicaram-se os seguintes **limites notáveis**

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty,\ p\in\mathbb{R}$$

Logo, o gráfico da função f não admite assíntota horizontal quando $x\to+\infty$

13. .

13.1. Determinemos a função derivada de g

$$g'(x)=\left(\frac{x^2-1}{e^{-x}}\right)'=\frac{2x\times e^{-x}+(x^2-1)\times e^{-x}}{e^{-2x}}=\frac{2xe^{-x}+(x^2-1)e^{-x}}{e^{-2x}}=\frac{e^{-x}(x^2+2x-1)}{e^{-2x}}=$$
$$=\frac{x^2+2x-1}{e^{-x}}$$

Seja m, o declive da reta t

Então,

$$g'(-1)=\frac{(-1)^2+2\times(-1)-1}{e^1}=-\frac{2}{e}$$

Resposta: (B)

13.2. Determinemos a função segunda derivada de g

$$g''(x)=\left(\frac{x^2+2x-1}{e^{-x}}\right)'=\frac{(2x+2)\times e^{-x}+(x^2+2x-1)\times e^{-x}}{e^{-2x}}=\frac{(x^2+4x+1)e^{-x}}{e^{-2x}}=$$
$$=\frac{x^2+4x+1}{e^{-x}}$$

Procuremos os zeros de $g''(x)$

$$g''(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^2+4x+1}{e^{-x}}=0\Leftrightarrow x^2+4x+1=0\wedge e^{-x}\neq0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times1\times1}}{2\times1}\Leftrightarrow x=-2-\sqrt{3}\vee x=-2+\sqrt{3}$$

Quadro de sinal de g''

x	$-\infty$	$-2-\sqrt{3}$		$-2+\sqrt{3}$	$+\infty$
x^2+4x+1	$+$	0	$-$	0	$+$
e^{-x}	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$g''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\smile$	$\frac{6+4\sqrt{3}}{e^{2+\sqrt{3}}}$	$\frown$	$\frac{6-4\sqrt{3}}{e^{2-\sqrt{3}}}$	$\smile$

$$g(-2-\sqrt{3})=\frac{(-2-\sqrt{3})^2-1}{e^{2+\sqrt{3}}}=\frac{6+4\sqrt{3}}{e^{2+\sqrt{3}}}$$
$$g(-2+\sqrt{3})=\frac{(-2+\sqrt{3})^2-1}{e^{2-\sqrt{3}}}=\frac{6-4\sqrt{3}}{e^{2-\sqrt{3}}}$$

O gráfico da função g tem a concavidade voltada para baixo em $]-2-\sqrt{3};-2+\sqrt{3}[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty;-2-\sqrt{3}[$, e em $]-2+\sqrt{3};+\infty[$

O gráfico da função tem dois pontos de inflexão, de coordenadas $I\left(-2-\sqrt{3};\frac{6+4\sqrt{3}}{e^{2+\sqrt{3}}}\right)$ e $J\left(-2+\sqrt{3};\frac{6-4\sqrt{3}}{e^{2-\sqrt{3}}}\right)$

OmegaMat

Exame Modelo X de Matemática A

Duração do Exame: 150 **minutos** + 30 **minutos de tolerância** | **junho de 2020**

12.º Ano de Escolaridade

Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta

É permitido o uso de calculadora

Não é permitido o uso de corretor. Risca o que pretendes que não seja classificado

Para cada resposta identifica o item

Apresenta as tuas respostas de forma legível

Apresenta apenas uma resposta para cada item

A prova apresenta um formulário na página 2

As cotações dos itens encontram-se na página 7

Na resposta aos itens de seleção (escolha múltipla), seleciona a resposta correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação apresenta sempre o valor exato.

NOTA

⋇ Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

9, 11, 12.1 e 12.2

Estes itens estão assinalados no enunciado a cor azul e em itálico

⋇ Dos restantes 14 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr *(α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)*

área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ *(α- amplitude, em radianos, do ângulo ao centro, r - raio)*

área lateral de um cone: $\pi r g$ *(r - raio da base, g - geratriz)*

área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ *(r - raio)*

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume do cone: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ *(r - raio)*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$, $r \neq 1$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$(|z|e^{i\theta})^n = |z|^n e^{i(n\theta)}$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0; 1; 2; ...; n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Seja $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos e seja $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$, um número complexo

   1.1. Prova que o afixo do número complexo z^{8n+1} pertence ao conjunto $A = \{w \in \mathbb{C} : Re(w) = Im(\overline{w})\}$, para todo o número natural n

   1.2. Em qual das opções estão os valores de a e b, $\in \mathbb{R}$, para os quais, z é solução da equação

   $w^2 + aw + \sqrt{2}b = 0$

   (A) $a = -2\sqrt{2}$ e $b = 2\sqrt{2}$
   (B) $a = 2\sqrt{2}$ e $b = -2\sqrt{2}$
   (C) $a = -2\sqrt{2}$ e $b = -2\sqrt{2}$
   (D) $a = 2\sqrt{2}$ e $b = 2\sqrt{2}$

2. Considera um tabuleiro com dezasseis casas (quadrado dividido em dezasseis quadrados)
   Pretende-se colocar nove cartões no tabuleiro, um e um só, em cada casa, sendo quatro vermelhos, numerados de um a quatro, e cinco azuis, numerados de cinco a nove

   2.1. De quantas maneiras distintas se podem colocar os cartões no tabuleiro?

   Numa das opções está a resposta a esta questão
   Em qual delas?

   (A) 4151347200
   (B) 34594560
   (C) 1441440
   (D) 172972800

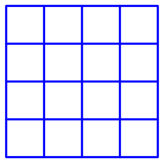


Figura 1

   2.2. Determina a probabilidade de os quatro cantos do tabuleiro ficarem preenchidos só com cartões vermelhos

3. Considera a função f, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $f(x) = \dfrac{4x\cos(x) - 2\sin(x)}{\cos(x)}$

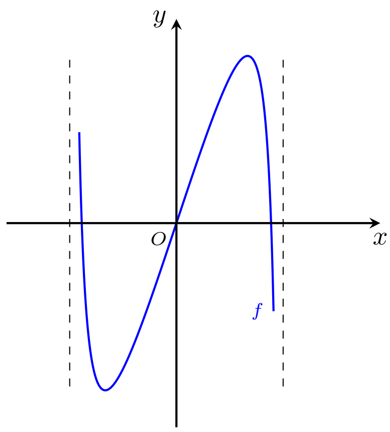


Figura 2

   No referencial cartesiano xOy, da figura 2, estão representados parte do gráfico da função f, e as suas assíntotas verticais

   3.1. Mostra, analiticamente, que o gráfico da função f tem duas assíntotas verticais e escreve as suas equações

   3.2. Estuda a função f quanto à monotonia e existência de extremos relativos

4. Considera a função g, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $g(x) = \begin{cases} \dfrac{-x+\ln(-x+1)}{x} & se \quad x<0 \\ \dfrac{xe^x - x + x^2}{x^2} & se \quad x>0 \end{cases}$

No referencial cartesiano xOy, da figura 3, está representado parte do gráfico da função g, e estão assinalados dois valores a e b, no eixo das ordenadas

4.1. Mostra, analiticamente, que o gráfico da função g tem uma assíntota não vertical quando $x \to -\infty$ e escreve a sua equação

4.2. Mostra, analiticamente, que $b = -a$

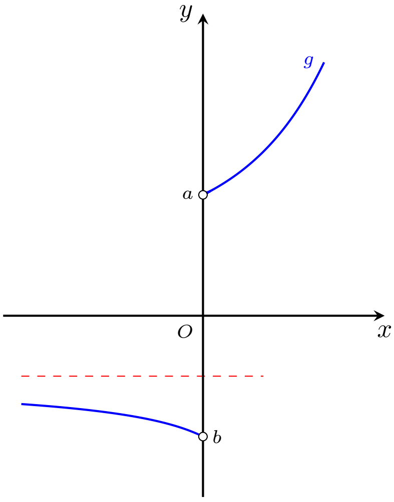


Figura 3

5. Na figura 4 está representada a pirâmide $[ABCDV]$, quadrangular regular reta

Sabe-se que:

- a base $[ABCD]$ é um quadrado de lado l, com $l > 0$
- o ponto U é o centro da base da pirâmide
- T é o ponto médio da aresta $[BC]$
- x é amplitude do ângulo UTV
- $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

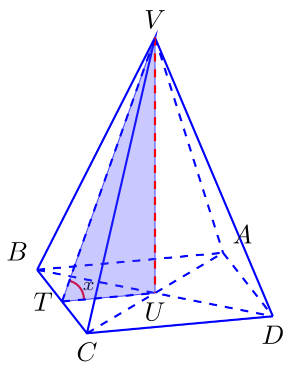


Figura 4

Em qual das opções está a expressão, em função de x e de l, da área da superfície da pirâmide?

(A) $l + \dfrac{l}{\cos(x)}$

(B) $l^2 + \dfrac{l^2}{\sin(x)}$

(C) $l^2 + \dfrac{l^2}{\cos(x)}$

(D) $l^2 + \dfrac{l^2}{4\cos(x)}$

6. Relativamente a uma turma de 12° ano da Escola Secundária de Arribas de Cima, sabe-se que:

- $\frac{2}{5}$ dos alunos são raparigas
- $\frac{4}{5}$ dos alunos estão inscritos no clube de leitura da Biblioteca
- $\frac{1}{5}$ das raparigas não estão inscritos no clube de leitura da Biblioteca

Determina a probabilidade de um aluno dessa turma, escolhido ao acaso, ser rapaz, sabendo que está inscrito no clube de leitura da Biblioteca

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível

7. Considera a função h, de domínio $]e;+\infty[$, definida por $h(x)=\ln(x-e)$
No referencial cartesiano xOy, da figura 5, está representado parte do gráfico da função h, e estão assinalados dois pontos $A(a;h(a))$ e $B(b;h(b))$ no gráfico

Sabe-se que:

- $b>a$
- $h(b)=h(a)+\ln(2)$
- o declive da reta AB é $m_{AB}=\dfrac{\ln(\sqrt{2})}{e}$

Mostra que a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de h no ponto A é $y=\dfrac{1}{2e}x+\ln(2)-\dfrac{1}{2}$

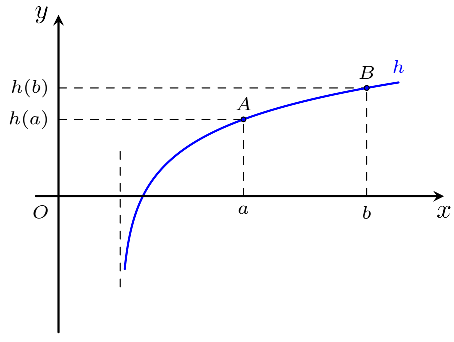


Figura 5

8. Seja f, uma função real de variável de domínio $\mathbb{R}^+$, e seja g, a função real de variável real, definida em $\mathbb{R}^+$ por $g(x)=\dfrac{f^3(x)+e^{3x}}{x^2}$

No referencial cartesiano xOy, da figura 6, estão representados parte do gráfico da função f, e da sua assíntota não vertical

Sabe-se que a assíntota ao gráfico de f interseta o eixo Ox no ponto de abcissa $\dfrac{1}{2}$, e interseta o eixo Oy, no ponto de ordenada -1

Em qual das opções está o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$?

(A) 8

(B) -8

(C) 0

(D) $+\infty$

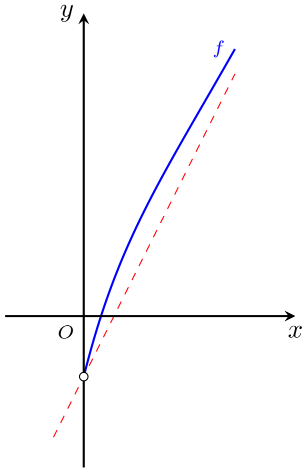


Figura 6

9. Na figura 7 está representado, em referencial cartesiano xOy, parte do gráfico de uma função f, real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$
Seja (x_n), uma sucessão de valores do domínio da função f

Sabe-se que:

- *a,b,c,d são números reais,*tais que $a>b>c>d$
- $\lim f(x_n)=a$

Em qual das opções pode estar a sucessão (x_n)?

(A) $x_n=e-\dfrac{1}{\sqrt{\ln(n+1)+1}}$

(B) $x_n=1-\dfrac{2}{\sqrt{e^n+1}}$

(C) $x_n=e+\ln(e)-\dfrac{\sqrt{n}}{n}$

(D) $x_n=e+1+\dfrac{n}{e^n}$

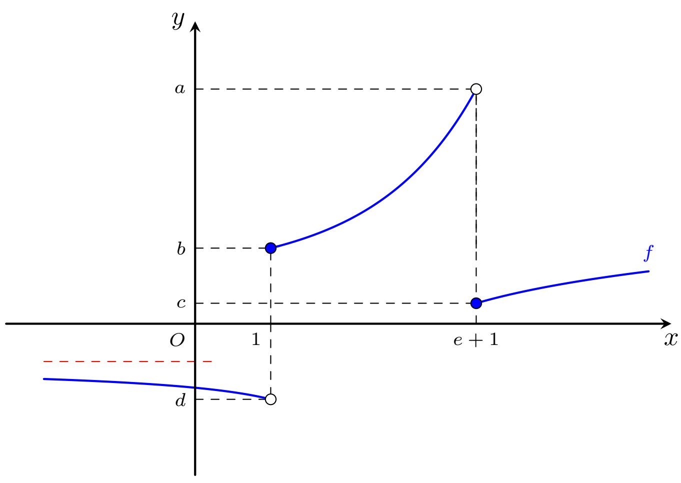


Figura 7

10. Considera, num referencial *o.n.*, $Oxyz$, o sólido que pode ser decomposto em duas pirâmides quadrangulares regulares retas, $[ABCDV]$ e $[EFGHV]$, que se encontra representado na figura 8

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo Ox
- o ponto D pertence ao eixo Oy
- os pontos A, B, C e D, são as projeções ortogonais dos pontos E, F, G e H, respetivamente, sobre o plano xOy
- a base da pirâmide $[ABCDV]$ está contida no plano xOy
- a base da pirâmide $[EFGHV]$ está contida num plano paralelo ao plano xOy
- a abcissa do ponto A é igual à ordenada do ponto D
- as duas pirâmides têm a mesma altura
- uma equação vetorial da reta AG é

$(x; y; z) = (3; -6; -9) + k(0; 2; 3), k \in \mathbb{R}$

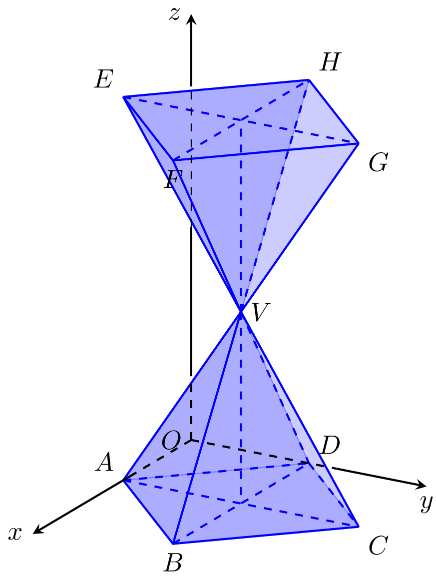


Figura 8

10.1. Determina o volume do sólido

10.2. Sabe-se que uma equação cartesiana do plano ABV é $-3x + 3y - 2z + 9 = 0$

Escreve uma equação cartesiana de um plano α, perpendicular ao plano ABV e que contém o ponto V
Escreve a equação na forma $ax + by + cz + d = 0$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

11. Sabe-se que $\frac{2}{e^{-2}}$, $\frac{a}{16}$ *e* $512e^{10}$, *com* $a \in \mathbb{R}$, *são três termos consecutivos de uma progressão geométrica* (a_n) *de razão positiva*

Determina o valor de a, *e calcula o produto dos termos,* a_5, a_6 *e* a_7, *da progressão geométrica* (a_n), *sabendo que* $a_1 = \frac{e^{-14}}{32768}$

12. Seja f, *a função real de variável real, definida por,* $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(-2x+2) - \ln(-x) - 1}{x} & se \quad x < 0 \\ 2 & se \quad x = 0 \\ \frac{x^3 e^{-2x} + ax}{2x} & se \quad x > 0 \end{cases}$,

com $a \in \mathbb{R}$

12.1. *Determina os zeros da função* f *no intervalo* $]-\infty; 0[$

12.2. *Determina o valor de* a, *de modo que* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final					
Itens	9.	11.	12.1	12.2	Subtotal
Cotação (Pontos)	16	20	20	16	72

Destes 14 itens da prova, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação															
Itens	1.1	1.2	2.1	2.2	3.1	3.2	4.1	4.2	5	6	7	8	10.1	10.2	Subtotal
Cotação (Pontos)	8×16 Pontos														128

PÁGINA EM BRANCO

Escola Secundária de Paredes

Resolução do Exame Modelo X de Matemática A

Duração do Exame: 150 **minutos** + 30 **minutos de tolerância** | **junho de 2020**

12.º Ano de Escolaridade

1. .

1.1. Passemos z para a forma trigonométrica

$|z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$

Seja θ o argumento de z

Então,

$\tan(\theta) = \dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$, e θ pertence ao quarto quadrante

Logo, $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$

Assim,$z = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

Ora,

$z^{8n+1} = \left(2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^{8n+1} = 2^{8n+1}e^{i\left(-\frac{(8n+1)\pi}{4}\right)} = 2^{8n+1}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}-2n\pi\right)}$

Verificamos que o argumento de z^{8n+1} é $-\frac{\pi}{4} - 2n\pi$, com $n \in \mathbb{N}$

Logo, o afixo do número complexo z^{8n+1} pertence à semirreta com origem em O, e que faz um ângulo de amplitude $-\dfrac{\pi}{4}$ com o semieixo positivo real

Seja $w = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$

O conjunto $A = \{w \in \mathbb{C} : R_e(w) = Im(\overline{w})\} = \{w \in \mathbb{C} : x = -y\} = \{w \in \mathbb{C} : y = -x\}$, representa a bissetriz dos quadrantes pares

Logo, o afixo do número complexo z^{8n+1} pertence ao conjunto $A = \{w \in \mathbb{C} : R_e(w) = Im(\overline{w})\}$, para todo o número natural n

1.2. z é solução da equação $w^2 + aw + \sqrt{2}b = 0$, se e só se, $z^2 + az + \sqrt{2}b = 0$

Ou seja,

$(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^2 + a(\sqrt{2} - \sqrt{2}i) + \sqrt{2}b = 0 \Leftrightarrow 2 - 4i + 2i^2 + \sqrt{2}a - \sqrt{2}ai + \sqrt{2}b = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 - 4i - 2 + \sqrt{2}a - \sqrt{2}ai + \sqrt{2}b = 0 \Leftrightarrow -4i + \sqrt{2}a - \sqrt{2}ai + \sqrt{2}b = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}a + \sqrt{2}b + (-\sqrt{2}a - 4)i = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}a + \sqrt{2}b = 0 \wedge -\sqrt{2}a - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b = -a \wedge a = -2\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b = 2\sqrt{2} \wedge a = -2\sqrt{2}$

Resposta:(A)

2. .

2.1. O número de maneiras distintas de colocar no tabuleiro os quatro cartões vermelhos é dado por $^{16}A_4$
Colocados os cartões vermelhos, sobram doze casas para colocar, de forma ordenada, os cinco cartões azuis. O número de maneiras distintas de colocar no tabuleiro os cinco cartões azuis é dado por $^{12}A_5$

Então, os nove cartões podem ser colocados no tabuleiro de $^{16}A_4 \times ^{12}A_5 = 4151347200$ maneiras distintas

Segundo processo

O número de maneiras distintas de colocar no tabuleiro os cinco cartões azuis é dado por $^{16}A_5$
Colocados os cartões azuis, sobram onze casas para colocar, de forma ordenada, os quatro cartões vermelhos. O número de maneiras distintas de colocar no tabuleiro os quatro cartões vermelhos é dado por $^{11}A_4$

Então, os nove cartões podem ser colocados no tabuleiro de $^{16}A_5 \times ^{11}A_4 = 4151347200$ maneiras distintas

Terceiro processo

Olhando para a constituição dos nove cartões, verificamos que são todos distintos (pois, apesar de haver cartões de duas cores, eles estão numerados). Então só temos de colocar os nove cartões em nove das dezasseis casas do tabuleiro. Assim, o número de maneiras distintas de colocar no tabuleiro os nove cartões é dado por $^{16}A_9 = 4151347200$

Resposta: (A)

2.2. O número de casos possíveis é $^{16}A_4 \times ^{12}A_5$

Quanto ao número de casos favoráveis
Em primeiro lugar é necessário colocar, de forma ordenada, os quatro cartões vermelhos nos quatro cantos do tabuleiro. Essa colocação pode ser feita de 4! maneiras distintas
colocados os cartões vermelhos nos quatro cantos do tabuleiro, existem $^{12}A_5$ maneiras distintas de colocar os cinco cartões azuis nas restantes doze casas do tabuleiro
Assim, há $4! \times ^{12}A_5$ maneiras distintas de colocar os cartões no tabuleiro, de modo que os quatro cantos sejam preenchidos com cartões vermelhos

Portanto, a probabilidade pedida é $P = \frac{4! \times ^{12}A_5}{^{16}A_4 \times ^{12}A_5} = \frac{1}{1820}$

3. .

3.1. A função f, tem domínio $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

Calculemos, $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x)$ e $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x)$

Ora,

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \left(\frac{4x\cos(x) - 2\sin(x)}{\cos(x)}\right) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} (4x - 2\tan(x)) = -2\pi - (-\infty) = +\infty$$

Logo, a reta de equação $x = -\frac{\pi}{2}$, é assíntota vertical ao gráfico de f

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{4x\cos(x) - 2\sin(x)}{\cos(x)}\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (4x - 2\tan(x)) = 2\pi - (+\infty) = -\infty$$

Logo, a reta de equação $x = \frac{\pi}{2}$, é assíntota vertical ao gráfico de f
Como a função f é contínua em todo o seu domínio, então não existem mais assíntotas verticais ao gráfico da função f

3.2. Determinemos a função derivada de f

$$f'(x) = \left(\frac{4x\cos(x) - 2\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = (4x - 2\tan(x))' = 4 - \frac{2}{\cos^2(x)}$$

Procuremos os zeros de $f'(x)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - \frac{2}{\cos^2(x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{4\cos^2(x) - 2}{\cos^2(x)} = 0 \Leftrightarrow 4\cos^2(x) - 2 = 0 \wedge \cos^2(x) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(x) = \frac{1}{2} \wedge \cos(x) \neq 0 \Leftrightarrow \cos(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \vee \cos(x) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi \vee x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi\right) \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

Como $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, resulta que, $x = -\frac{\pi}{4} \vee x = \frac{\pi}{4}$

Quadro de sinal de $f'(x)$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	\\\\\\	$-$	0	$+$	0	$-$	\\\\\\
$f(x)$	\\\\\\	$\searrow$	$-\pi + 2$	$\nearrow$	$\pi - 2$	$\searrow$	\\\\\\

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 4 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) - 2\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\pi + 2$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 \times \left(\frac{\pi}{4}\right) - 2\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi - 2$$

A função f é estritamente decrescente em $\left]-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right]$ e em $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$, e é estritamente crescente em $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$

A função atinge o valor mínimo relativo $-\pi + 2$, para $x = -\frac{\pi}{4}$, e atinge o valor máximo relativo $\pi - 2$, para $x = \frac{\pi}{4}$

4. .

4.1. $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x + \ln(-x+1)}{x} =^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x} + \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(-x+1)}{x} =$

$$= \lim_{x\to-\infty}(-1) + \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln(y)}{1-y} = -1 + \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln(y)}{y} \times \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{1-y} = -1 + 0 \times \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{y\left(\frac{1}{y} - 1\right)} =$$

$$= -1 + 0 \times \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{y} - 1} = 1 - 0 \times (-1) = -1$$

Nota: fez-se uma mudança de variável:

$y = -x + 1 \Leftrightarrow x = 1 - y$

se $x \to -\infty$, então, $y \to +\infty$

Logo, a reta de equação $y = -1$, é assíntota horizontal ao gráfico da função g, quando $x \to -\infty$

Nota: Utilizou-se o limite notável $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

4.2. .

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x+\ln(-x+1)}{x} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} + \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(-x+1)}{x} = \lim_{x\to 0^-}(-1) + \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{1-e^y} =$$

$$= -1 - \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0^+} \frac{e^y-1}{y}} = -1 - \frac{1}{1} = -2$$

Nota: fez-se uma mudança de variável:

$y = \ln(-x+1) \Leftrightarrow x = 1 - e^y$

se $x \to 0^-$, então, $y \to 0^+$

Logo, $b = -2$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{xe^x - x + x^2}{x^2} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x\to 0^+} \frac{x(e^x-1)}{x^2} + \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} + \lim_{x\to 0^+}(1) = 1+1 = 2$$

Logo, $a = 2$

Ou seja, $b = -a$

Nota: Utilizou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1$

5. .

Determinemos $\overline{TV}$

No triângulo retângulo VTU, tem-se,

$$\cos(x) = \frac{\overline{TU}}{\overline{TV}} \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{\frac{l}{2}}{\overline{TV}} \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{l}{2\overline{TV}} \Leftrightarrow 2\overline{TV} = \frac{l}{\cos(x)} \Leftrightarrow \overline{TV} = \frac{l}{2\cos(x)}$$

Assim,

$$A_{superficie \quad da \quad piramide} = A_{[ABCD]} + 4\times A_{[BCV]} = \overline{BC}^2 + \frac{\overline{BC}\times\overline{TV}}{2} = l^2 + 4\times\frac{l\times\frac{l}{2\cos(x)}}{2} = l^2 + \frac{l^2}{\cos(x)}$$

Resposta:(C)

6. Consideremos os acontecimentos

A : O aluno é rapaz

B : O aluno está inscrito no clube de leitura da Biblioteca

Pretende-se determinar $P(A|B)$

Dos dados,

- $\frac{2}{5}$ dos alunos são raparigas
- $\frac{4}{5}$ dos alunos estão inscritos no clube de leitura da Biblioteca
- $\frac{1}{5}$ das raparigas não estão inscritos no clube de leitura da Biblioteca

Tem-se,

$P(A) = \frac{3}{5}$
$P(\overline{A}) = \frac{2}{5}$

$P(B) = \frac{4}{5}$
$P(\overline{B}) = \frac{1}{5}$

$P(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{1}{5}$

Ora,

$$P(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{P(\overline{B} \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{P(\overline{B} \cap \overline{A})}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow P(\overline{B} \cap \overline{A}) = \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} \Leftrightarrow P(\overline{B} \cap \overline{A}) = \frac{2}{25}$$

Elaborando uma tabela

	A	$\overline{A}$	
B	$\frac{12}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{4}{5}$
$\overline{B}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{5}$
	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

Assim,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{12}{25}}{\frac{4}{5}} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$$

7. Dos dados do problema, tem-se,

$$\begin{cases} h(b) = h(a) + \ln(2) \\ m_{AB} = \frac{\ln(\sqrt{2})}{e} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h(b) = h(a) + \ln(2) \\ \frac{h(b) - h(a)}{b - a} = \frac{\ln(\sqrt{2})}{e} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(b - e) = \ln(a - e) + \ln(2) \\ \frac{\ln(2)}{b - a} = \frac{\frac{1}{2}\ln(2)}{e} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(b - e) = \ln(2a - 2e) \\ \frac{\ln(2)}{b - a} = \frac{\ln(2)}{2e} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b - e = 2a - 2e \\ b - a = 2e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a - e \\ b - a = 2e \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a - e \\ 2a - e - a = 2e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a - e \\ a = 3e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5e \\ a = 3e \end{cases}$$

Ponto A

$h(3e) = \ln(3e - e) = \ln(2e) = \ln(2) + \ln(e) = \ln(2) + 1$

Logo, $A(3e; \ln(2) + 1)$

O declive da reta tangente ao gráfico de h no ponto A, é $h'(3e)$

$h'(x) = \dfrac{(x-e)'}{x-e} = \dfrac{1}{x-e}$

Assim,

$h'(3e) = \dfrac{1}{3e-e} = \dfrac{1}{2e}$

Logo,

$y = \dfrac{1}{2e}x + b, b \in \mathbb{R}$

Ora,

$\ln(2) + 1 = \dfrac{1}{2e} \times 3e + b \Leftrightarrow \ln(2) + 1 = \dfrac{3}{2} + b \Leftrightarrow b = \ln(2) + 1 - \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow b = \ln(2) - \dfrac{1}{2}$

Concluindo,

a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de h no ponto A é $y = \dfrac{1}{2e}x + \ln(2) - \dfrac{1}{2}$

8. Sabemos que a assíntota ao gráfico de f interseta o eixo Ox no ponto de abcissa $\dfrac{1}{2}$, e interseta o eixo Oy, no ponto de ordenada -1

Assim, o declive da reta é $m = \dfrac{-1-0}{0-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{-1}{-\dfrac{1}{2}} = 2$

Deste modo, sabemos que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$

Ora,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{f^3(x)+e^{3x}}{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f^3(x)+e^{3x}}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f^3(x)}{x^3} + \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{x^3} =$$

$$= \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}\right)^3 + \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}\right)^3 = 2^3 + \infty = +\infty$$

Resposta: (D)

Nota: Utilizou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

9. Se $\lim f(x_n) = a$, então, a sucessão (x_n) terá de ser tal que:

- $x_n < e + 1$

- $\lim(x_n) = e + 1$

Observando as opções, tem-se que,

(A) $x_n = e - \dfrac{1}{\sqrt{\ln(n+1)+1}} < e$ e $\lim(x_n) = e - \dfrac{1}{+\infty} = e - 0 = e$

(B) $x_n = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{e^n+1}} < 1$ e $\lim(x_n) = 1 - \dfrac{2}{+\infty} = 1 - 0 = 1$

(C) $x_n = e + \ln(e) - \dfrac{\sqrt{n}}{n} = e + 1 - \dfrac{\sqrt{n}}{n} < e + 1$ e $\lim(x_n) = e + 1 - \lim \dfrac{\sqrt{n}}{n} = e + 1 - \lim \sqrt{\dfrac{n}{n^2}} =$

$= e + 1 - \sqrt{\lim \dfrac{1}{n}} = e + 1 - 0 = e + 1$

(D) $x_n = e+1+\dfrac{n}{e^n} > e+1$ e $\lim(x_n) = e+1+\lim\dfrac{n}{e^n} = e+1+\dfrac{1}{\lim\dfrac{e^n}{n}} = e+1+\dfrac{1}{+\infty} = e+1+0 = e+1$

Resposta: (C)

Nota: Utilizou-se os limite notável $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x} = +\infty$

10. .

10.1. Determinemos as coordenadas do ponto A

Sabe-se que $A(x;0;0)$, com $x \in \mathbb{R}$

Ora, A é ponto da reta AG

Assim,

$(x;0;0) = (3;-6;-9)+k(0;2;3) \Leftrightarrow x = 3 \wedge 0 = -6+2k \wedge 0 = -9+3k \Leftrightarrow x = 3 \wedge k = 3 \wedge k = 3 \Leftrightarrow x = 3$

Logo, $A(3;0,0)$

assim, $D(0;3;0)$

Ora, $\overline{AD} = \sqrt{(3-0)^2+(0-3)^2+(0-0)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Determinemos as coordenadas do ponto V

Sabe-se que $V(3;3;z)$, com $z \in \mathbb{R}$

Ora, V é ponto da reta AG

Assim,

$(3;3;z) = (3;-6;-9)+k(0;2;3) \Leftrightarrow 3 = 3 \wedge 3 = -6+2k \wedge z = -9+3k \Leftrightarrow 3 = 3 \wedge k = \dfrac{9}{2} \wedge z = -9+3k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 = 3 \wedge k = \dfrac{9}{2} \wedge z = -9+\dfrac{27}{2} \Leftrightarrow 3 = 3 \wedge k = \dfrac{9}{2} \wedge z = \dfrac{9}{2}$

Logo, $V\left(3;3;\dfrac{9}{2}\right)$

Assim, a medida da altura da pirâmide $[ABCDV]$ é $\dfrac{9}{2}$

Portanto, o volume do sólido é igual a

$Vsolido = 2\times V_{piramide[ABCDV]} = 2\times\dfrac{1}{3}\times\overline{AD}^2\times\dfrac{9}{2} = 3\times(3\sqrt{2})^2 = 3\times 18 = 54\ u.v.$

10.2. O plano α é perpendicular ao plano ABV

Assim, um vetor normal ao plano α terá de ser perpendicular a um vetor normal ao plano ABV

Seja $\overrightarrow{\alpha}$, um vetor normal ao plano α

Como $\overrightarrow{\beta} = (-3;3;-2)$ é um vetor normal ao plano ABV, então,

$\overrightarrow{\alpha}$ pode ser $(2;0;-3)$

Nota 1: A escolha do vetor $\overrightarrow{\alpha}$ foi feita de modo que $\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta} = 0$
Há infinitos vetores
O procedimento foi: Substituir a ordenada do vetor $\overrightarrow{\beta}$ por zero, trocar as outras duas coordenadas

e mudar o sinal de uma delas

Assim, uma equação cartesiana de um plano perpendicular ao plano ABV é da forma

$2x + 0y - 3z + d = 0$, com $d \in \mathbb{R}$, ou seja, $2x - 3z + d = 0$, com $d \in \mathbb{R}$

Como V pertence a este plano, vem, $2 \times 3 - 3 \times \frac{9}{2} + d = 0 \Leftrightarrow 6 - \frac{27}{2} + d = 0 \Leftrightarrow -\frac{15}{2} + d = 0 \Leftrightarrow d = \frac{15}{2}$

Logo, $2x - 3z + \frac{15}{2} = 0$ é uma equação cartesiana de um plano α perpendicular ao plano ABV

Ou seja, $4x - 6z + 15 = 0$

Obs.: Há um **número infinito** de planos perpendiculares ao plano ABV e que contêm o ponto V

O plano α pedido é um deles

11. Como, $\frac{2}{e^{-2}}$, $\frac{a}{16}$ e $512e^{10}$, com $a \in \mathbb{R}$, são três termos consecutivos de uma progressão geométrica (a_n) de razão positiva,

Então, vem,

$$\frac{\frac{a}{16}}{\frac{2}{e^{-2}}} = \frac{512e^{10}}{\frac{a}{16}} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{16}\right)^2 = 1024e^{12} \Leftrightarrow a^2 = 16^2 \times 1024e^{12} \Leftrightarrow a^2 = 262144e^{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \pm\sqrt{262144e^{12}} \Leftrightarrow a = \pm 512e^6$$

Como a razão da progressão geométrica é positiva, então $a > 0$, logo $a = 512e^6$

Assim,

$$\frac{a}{16} = \frac{512e^6}{16} = 32e^6$$

Seja r, a razão da progressão geométrica

$$r = \frac{512e^{10}}{32e^6} = 16e^4$$

Assim,

$$a_5 = a_1 \times r^4 = \frac{e^{-14}}{32768} \times \left(16e^4\right)^4 = \frac{e^{-14}}{32768} \times 16^4 e^{16} = \frac{e^{-14}}{32768} \times 65536e^{16} = 2e^2$$

$$a_6 = a_5 \times r = 2e^2 \times 16e^4 = 32e^6$$

$$a_7 = a_6 \times r = 32e^6 \times 16e^4 = 512e^{10}$$

Portanto,

$$a_5 \times a_6 \times a_7 = 2e^2 \times 32e^6 \times 512e^{10} = 32768e^{18}$$

12. .

12.1. $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{\ln(-2x+2)-\ln(-x)-1}{x}=0 \Leftrightarrow \ln(-2x+2)-\ln(-x)-1=0 \wedge x<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(-2x+2)=\ln(-x)+1 \wedge x<0 \Leftrightarrow \ln(-2x+2)=\ln(-x)+\ln(e) \wedge x<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(-2x+2)=\ln(-ex) \wedge x<0 \Leftrightarrow -2x+2=-ex \wedge x<0 \Leftrightarrow -2x+ex=-2 \wedge x<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (e-2)x=-2 \wedge x<0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-2}{e-2} \wedge x<0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{2-e} \wedge x<0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{2-e}$

Resposta: $\dfrac{2}{2-e}$ é o zero da função f em $]-\infty;0[$

12.2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3e^{-2x}+ax}{2x} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3e^{-2x}}{2x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^{2x}}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a}{2}=$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^2}}+\dfrac{a}{2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}\right)^2}+\dfrac{a}{2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{+\infty}+\dfrac{a}{2}=\dfrac{1}{2}\times 0+\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{2}$

Outro processo

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3e^{-2x}+ax}{2x} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(x^2e^{-2x}+a\right)}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2e^{-2x}}{2}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a}{2}=$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^{2x}}+\dfrac{a}{2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^2}}+\dfrac{a}{2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}\right)^2}+\dfrac{a}{2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{+\infty}+\dfrac{a}{2}=\dfrac{1}{2}\times 0+\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{2}$

Assim,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1 \Leftrightarrow \dfrac{a}{2}=-1 \Leftrightarrow a=-2$

Resposta: $a=-2$

OmegaMat

Exame Modelo XI de Matemática A

Duração do Exame: 150 **minutos** + 30 **minutos de tolerância** | **setembro de 2020**

12.º Ano de Escolaridade

Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta

É permitido o uso de calculadora

Não é permitido o uso de corretor. Risca o que pretendes que não seja classificado

Para cada resposta identifica o item

Apresenta as tuas respostas de forma legível

Apresenta apenas uma resposta para cada item

A prova apresenta um formulário na página 2

As cotações dos itens encontram-se na página 7

Na resposta aos itens de seleção (escolha múltipla), seleciona a resposta correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida

Na resposta aos restantes itens, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias Quando, para um resultado, não é pedida aproximação apresenta sempre o valor exato

NOTA

⁎ Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

5, 6.1, 6.2 e 11

Estes itens estão assinalados no enunciado a cor azul e em itálico

⁎ Dos restantes 14 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr *(α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)*

área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ *(α- amplitude, em radianos, do ângulo ao centro, r - raio)*

área lateral de um cone: $\pi r g$ *(r - raio da base, g - geratriz)*

área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ *(r - raio)*

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume do cone: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ *(r - raio)*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$, $r \neq 1$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$(|z|e^{i\theta})^n = |z|^n e^{i(n\theta)}$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0; 1; 2; ...; n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Seja f, a função real de variável real, definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, por $f(x) = \dfrac{e^{x+1} - e}{x}$

   Seja (a_n), a sucessão de números reais, de termo geral $a_n = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$

   Em qual das opções está o valor de $\lim(f(a_n))$?

   (A) 0
   (B) e
   (C) 1
   (D) $-e$

2. O Rodrigo, a Marta, o Luís e a Ana, estão a participar num jogo de cartas
   Neste jogo, em cada jogada, apenas um jogador recebe quatro cartas de um baralho constituído por cinquenta e duas cartas (distribuídas por quatro naipes: copas, ouros, paus e espadas. Em cada naipe há treze cartas)
   Na jogada seguinte, baralham-se novamente as cinquenta e duas cartas e o segundo jogador recebe quatro cartas. E assim sucessivamente, até completarem vinte jogadas (cinco jogadas por cada jogador)
   O objetivo é obter um trio em cada jogada

   Ganha quem obtiver mais trios em vinte jogadas (cinco jogadas por jogador)
   Neste jogo, entende-se por trio: três cartas com o mesmo valor facial (três *ases*, ou três *reis*, etc), e uma quarta carta diferente
   Receber quatro cartas com o mesmo valor facial não é considerado ter recebido um trio

   Exemplo de trio

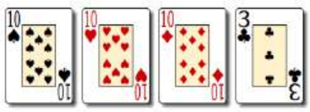
   

   Figura 1

   2.1. Na primeira jogada o Rodrigo recebeu as quatro cartas e verificou que tinha um trio

   Em qual das opções está o número de combinações de cartas que o Rodrigo pode ter recebido?

   (A) 1920 (B) 11520 (C) 2496 (D) 14976

   2.2. Na segunda jogada a Marta recebeu as quatro cartas e verificou que recebeu um par (entende-se por par: duas cartas com o mesmo valor facial (dois *ases*, ou dois *reis*, etc), e as outras duas cartas com valor facial diferente)
   Qual é a probabilidade de ter recebido um às, dois reis e uma dama?
   Apresenta o valor sob a forma de fração irredutível

3. Numa caixa A estão dez bolas, sendo, seis azuis e quatro vermelhas, e numa caixa B estão n bolas vermelhas e nove bolas azuis

   Considera a experiência aleatória que consiste em retirar uma bola da caixa A, colocar na caixa B e em seguida, retirar, de uma só vez, duas bolas da caixa B e registar a sua cor

   Sejam A e B, os acontecimentos seguintes:

   A : A bola retirada da caixa A é vermelha

   B : As bolas retiradas da caixa B são vermelhas

   Sabe-se que $P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{1}{8}$

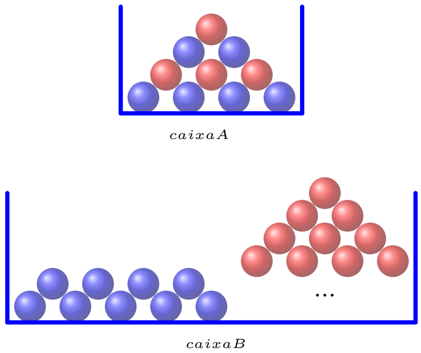
   

   Figura 2

   Sem recorreres à fórmula da probabilidade condicionada, diz, em qual das opções está o valor de n, número de bolas vermelhas que estavam inicialmente na caixa B

   (A) 9
   (B) 8
   (C) 7
   (D) 6

4. Considera as funções f e g, definidas em $]0; 2\pi[$, por $f(x) = e^{\sin(x)}$ e $g(x) = e^{\sin(2x)}$, respetivamente

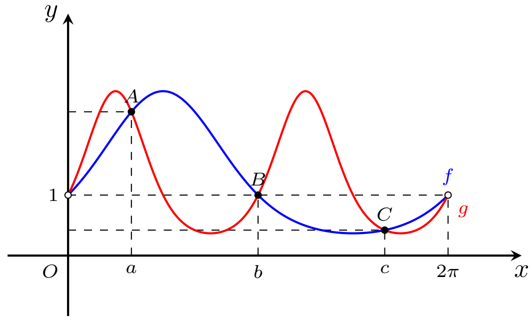


Figura 3

4.1. Na figura 3, estão representados, em referencial o.n xOy, os gráficos das funções f e g, e os respetivos pontos de interseção, A, B e C

Determina, analiticamente, as abcissas, a, b e c, dos pontos de interseção, A, B e C

4.2. Para certos valores de $a \in]0; 2\pi[$, a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a é perpendicular à reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa a
Recorrendo às potencialidades da calculadora gráfica, determina o(s) valor(es) de a

Na tua resposta:

- apresenta uma equação que te permita resolver o problema
- reproduz, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que te permite(m) resolver a equação e apresenta as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas
- apresenta o valor pedido, arredondado às centésimas
  Se, nos cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, duas casas decimais

5. *Considera a sucessão de números reais (u_n), de termo geral $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$*

Mostra que a sucessão (u_n) é limitada

6. *Considera, num plano munido de um referencial ortonormado xOy, a circunferência trigonométrica, como se observa na figura 4*

Sabe-se que:

- *os pontos A, B, C, D, E, F e G, pertencem à circunferência*
- *os pontos E e G são pontos de interseção da circunferência trigonométrica com o eixo Ox*
- *os pontos F e H são pontos de interseção da circunferência trigonométrica com o eixo Oy*
- *os pontos A e B são simétricos em relação ao eixo Oy*
- *os pontos C e D são simétricos em relação ao eixo Oy*
- *os pontos A e D são simétricos em relação ao eixo Ox*
- *os pontos B e C são simétricos em relação ao eixo Ox*
- *o ponto B move-se no segundo quadrante, e os pontos A, C e D, acompanham esse movimento*
- *$E\hat{O}B = x$, com $x \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$*

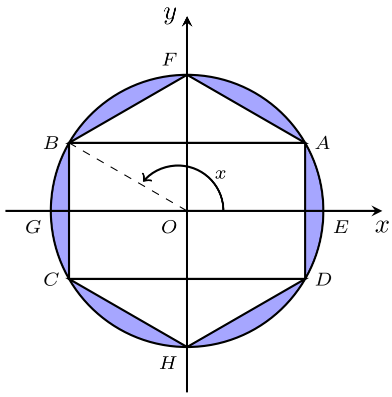


Figura 4

6.1. *Mostra que a área A, da região colorida da figura, é dada, em função de x, por*

$$A(x) = \pi + 2\cos(x) + \sin(2x)$$

6.2. *Determina $\lim\limits_{x \to \pi^-} A(x)$, e interpreta geometricamente esse valor, no contexto do problema*

7. Na figura 5 está representado, num referencial ortonormado $Oxyz$, um octaedro $[CABDEF]$

Sabe-se que:

- os vértices A, B e C, pertencem, respetivamente, aos semieixos positivos das abcissas, das ordenadas e das cotas
- os vértices D, E e F, pertencem, respetivamente, aos semieixos negativos das abcissas, das ordenadas e das cotas
- o centro do octaedro é a origem do referencial
- as faces do octaedro são triângulos equiláteros
- o ponto A tem coordenadas $(a; 0; 0)$, com $a > 0$

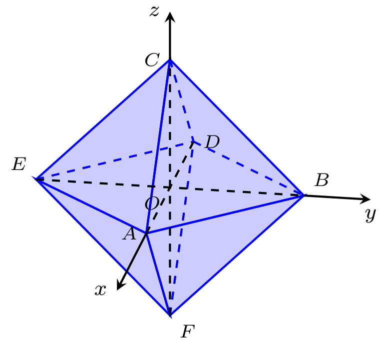


Figura 5

Seja $P(x; y; z)$, um ponto do espaço
A condição $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ define um conjunto de pontos do espaço

Em qual das opções está uma equação, na forma reduzida, deste conjunto de pontos?

(A) $x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$

(B) $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$

(C) $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{a^2}{2}$

(D) $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{a^2}{4}$

8. Seja g, a função real de variável real, definida em $\mathbb{R}^+$, por $g(x) = 2\ln(x) - x^2$, e seja a função f, real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$

Na figura 6, está representado, em referencial ortonormado xOy, parte do gráfico da função f, e uma reta r, assíntota ao seu gráfico

Sabe-se que a reta r interseta o eixo Ox no ponto de abcissa 1 e interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 1

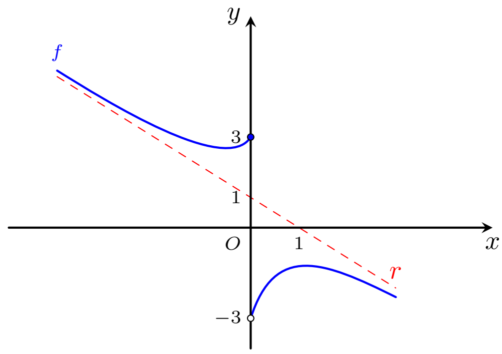


Figura 6

8.1. Em qual das opções está o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{f(x)}$?

(A) -2
(B) -1
(C) 0
(D) $-\frac{1}{2}$

8.2. Estuda a função g quanto à monotonia e determina, caso existam, os extremos relativos

Na tua resposta apresenta o(s) intervalo(s) de monotonia

9. Seja $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos

9.1. Seja $z = e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$, um número complexo

Sabe-se que $w = z^{-2} \times \overline{z} \times (-z)$ é também um número complexo

O menor valor de $n \in \mathbb{N}$ para o qual w^n é um número real, é

(A) 4
(B) 3
(C) 2
(D) 1

9.2. Seja z um número complexo

Os afixos das soluções da equação $z^4 - 16 = 0$ são vértices de um polígono

Em qual das opções está o valor da área desse polígono?

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10

10. Seja f, a função real de variável real, definida por, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^{x+1}}{2\sin(x)} & se \quad x < 0 \\ e^k & se \quad x = 0 \\ \dfrac{e^{x+1} - e}{\sqrt{x^3 + 4x^2}} & se \quad x > 0 \end{cases}$,

com $k \in \mathbb{R}$

10.1. Averigua se existe um valor k, para o qual a função f é contínua no ponto $x = 0$

10.2. Averigua, analiticamente, se o gráfico da função f admite assíntota horizontal quando $x \to +\infty$

11. Considera a reta r de equação vetorial $(x; y) = (1; -2) + k(-2; \sqrt{3}), k \in \mathbb{R}$

Determina, com aproximação às décimas, a inclinação da reta r, e escreve a equação reduzida da reta r

12. Seja g, a função real de variável real, definida em $\mathbb{R}$, por $g(x) = 2x + e^{-x}$

Na figura 7, está representado, em referencial ortonormado xOy, parte do gráfico da função g, uma reta r, assíntota ao gráfico da função quando $x \to +\infty$, e uma reta t, tangente ao gráfico de g no ponto A de abcissa -2

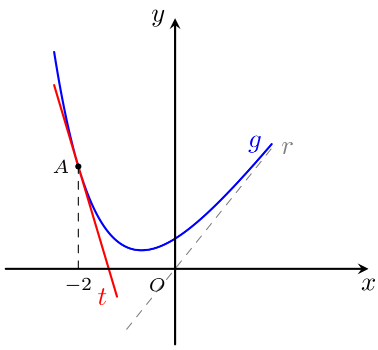


Figura 7

Em qual das opções está a equação reduzida da reta tangente t?

(A) $y = (2 - e^2)x + e^2$
(B) $y = (2 - e^2)x - e^2$
(C) $y = (2 + e^2)x + 3e^2$
(D) $y = (2 + e^2)x - 3e^2$

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final					
Itens	5.	6.1	6.2	11	Subtotal
Cotação (Pontos)	20	20	16	16	72

Destes 14 itens da prova, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação															
Itens	1	2.1	2.2	3	4.1	4.2	7	8.1	8.2	9.1	9.2	10.1	10.2	12	Subtotal
Cotação (Pontos)	8×16 Pontos														128

PÁGINA EM BRANCO

OmegaMat

Resolução do Exame Modelo XI de Matemática A

Duração do Exame: 150 **minutos** + 30 **minutos de tolerância** | **setembro de 2020**

12.º Ano de Escolaridade

1. Comecemos por calcular $\lim(a_n)$

$$\lim(a_n) = \lim\left[1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n\right] = 1 - \lim\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = 1 - \lim\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]^n =$$

$$= 1 - \lim\left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n \times \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 - e^{-1} \times e = 1 - e^0 = 1 - 1 = 0$$

Sabemos que:

$a_1 = 1$

$a_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

$\lim(a_n) = 0^+$

Assim,

$$\lim(f(a_n)) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x+1} - e}{x} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x e - e}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e\left(e^x - 1\right)}{x} =$$

$$= e \times \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = e \times 1 = e$$

Nota: Utilizou-se o limite notável $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Resposta: (B)

2. .

2.1. Suponhamos que o trio é constituído por três ases

Fazendo um esquema

$\underline{A_1}\quad \underline{A_2}\quad \underline{A_3}\quad \underline{\cdots}$

Para esta situação temos ${}^4C_3$ maneiras distintas de escolher os três ases
Para cada uma destas maneiras, temos 48 escolhas para a quarta carta (visto que às 52 cartas do baralho temos de retirar os três ases que saíram e também o outro às que falta - Esta carta não pode ser um às)

Então ${}^4C_3 \times 48$ é o número de combinações possíveis para se formar um trio de ases

Raciocinando da mesma maneira para os restantes tipos de trios, tem-se que o número de combinações de cartas que o Rodrigo pode ter recebido é ${}^4C_3 \times 48 \times 13 = 2496$

Resposta: (C)

2.2. A Marta recebeu quatro cartas, e sabe-se que recebeu um par

Então, o número de casos possíveis é $13 \times^4 C_2 \times^{48} C_1 \times^{44} C_1$

Quanto ao número de casos favoráveis:

Pretendemos que saiam, um às, dois reis e uma dama

Como no baralho há quatro ases, quatro reis e quatro damas, então, temos ${}^4C_1 \times^4 C_2 \times^4 C_1$ maneiras distintas de receber as cartas pretendidas

Portanto, a probabilidade pedida é $P = \dfrac{{}^4C_1 \times^4 C_2 \times^4 C_1}{13 \times^4 C_2 \times^{48} C_1 \times^{44} C_1} = \dfrac{1}{1716}$

3. Sabemos que, $P(B \mid \overline{A})$, representa a probabilidade saírem da caixa B duas bolas vermelhas, dado que a bola retirada da caixa A é azul

Ora, se da caixa A saiu uma bola azul e esta bola foi colocada na caixa B, então a caixa B passou a ter $n + 10$ bolas, sendo n vermelhas e 10 azuis

Assim, como a seguir se retiram, de uma só vez, duas bolas da caixa, e se pretende que sejam vermelhas, então, essa probabilidade é dada por $\dfrac{{}^nC_2}{{}^{n+10}C_2}$

Mas, por hipótese, sabe-se que $P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{1}{8}$

Logo,

$$P(B \mid \overline{A}) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{{}^nC_2}{{}^{n+10}C_2} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{\frac{n!}{2!(n-2)!}}{\frac{(n+10)!}{2!(n+8)!}} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{2!n!(n+8)!}{2!(n+10)!(n-2)!} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!(n+8)!}{(n+10)(n+9)(n+8)!(n-2)!} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{(n+10)(n+9)} - \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow \frac{8n^2 - 8n - n^2 - 19n - 90}{8(n+10)(n+9)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{7n^2 - 27n - 90}{8(n+10)(n+9)} = 0 \Leftrightarrow 7n^2 - 27n - 90 = 0 \wedge 8(n+10)(n+9) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{27 \pm \sqrt{(-27)^2 - 4 \times 7 \times (-90)}}{2 \times 7} \wedge n \neq -10 \wedge n \neq -9 \Leftrightarrow (n = 6 \vee n = -\frac{15}{7}) \wedge n \neq -10 \wedge n \neq -9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 6 \vee n = -\frac{15}{7}$$

Como, $n \in \mathbb{N}$, então $n = 6$

Resposta: (D)

4. .

4.1. Teremos de resolver a equação $g(x) = f(x)$, no intervalo $]0; 2\pi[$

Ora,

$g(x) = f(x) \Leftrightarrow e^{\sin(2x)} = e^{\sin(x)} \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = x + k2\pi \vee 2x = \pi - x + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = k2\pi \vee 3x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = k2\pi \vee x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

Atribuindo valores a k, vem,

$k=0 \mapsto x=0 \vee x=\frac{\pi}{3}$

$k=1 \mapsto x=2\pi \vee x=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}$

$\therefore x=2\pi \vee x=\pi$

$k=2 \mapsto x=4\pi \vee x=\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}$

$\therefore x=4\pi \vee x=\frac{5\pi}{3}$

$k=3 \mapsto x=6\pi \vee x=\frac{\pi}{3}+\frac{6\pi}{3}$

$\therefore x=6\pi \vee x=\frac{7\pi}{3}$

$k=-1 \mapsto x=-2\pi \vee x=\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}$

$\therefore x=-2\pi \vee x=-\frac{\pi}{3}$

Concluímos, assim, que as soluções da equação, no intervalo $]0;2\pi[$, são:

$\frac{\pi}{3}$; π e $\frac{5\pi}{3}$

Portanto,

A abcissa (a) do ponto A é $\frac{\pi}{3}$

A abcissa (b) do ponto B é π

A abcissa (c) do ponto C é $\frac{5\pi}{3}$

4.2. Determinemos as funções, f' e g', derivadas de f e de g, respetivamente

$f'(x)=\cos(x)e^{\sin(x)}$ e $g'(x)=2\cos(2x)e^{\sin(2x)}$

Assim,

$f'(a)\times g'(a)=\cos(a)e^{\sin(a)}\times 2\cos(2a)e^{\sin(2a)}=2\cos(a)\cos(2a)e^{\sin(a)+\sin(2a)}$

Pretende-se resolver a equação $f'(a)\times g'(a)=-1$

Inserir as funções:

$y_1=2\cos(a)\cos(2a)e^{\sin(a)+\sin(2a)}$

$y_2=-1$

Ajustar a janela de visualização: $[0;2\pi]\times[-4;4]$

Desenhar os gráficos das duas funções

Procurar as abcissas dos pontos de interseção dos dois gráficos

$A(0.85;-1)$; $B(1.42;-1)$; $C(2.77;-1)$; $D(3.71;-1)$

Obtém-se: $a\approx 0.85\ rad$, $a\approx 1.42\ rad$, $a\approx 2.77\ rad$ e $a\approx 3.71\ rad$

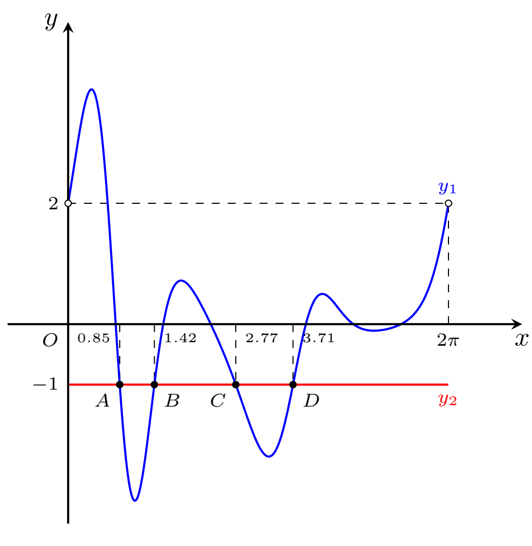


Figura 1

5. Ora, $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2} = \dfrac{2n+4-3}{n+2} = \dfrac{2(n+2)-3}{n+2} = \dfrac{2(n+2)}{n+2} - \dfrac{3}{n+2} = 2 - \dfrac{3}{n+2}$

$n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$
$\therefore n+2 \geq 3, \forall_{n\in\mathbb{N}}$
$\therefore \dfrac{1}{n+2} \leq \dfrac{1}{3}, \forall_{n\in\mathbb{N}}$
Por outro lado, a sucessão de termo geral $\dfrac{1}{n+2}$ tem os termos todos positivos, assim,
$0 < \dfrac{1}{n+2} \leq \dfrac{1}{3}, \forall_{n\in\mathbb{N}}$
$\therefore 0 > -\dfrac{1}{n+2} \geq -\dfrac{1}{3}, \forall_{n\in\mathbb{N}}$
$\therefore -\dfrac{1}{3} \leq -\dfrac{1}{n+2} < 0, \forall_{n\in\mathbb{N}}$
$\therefore -1 \leq -\dfrac{3}{n+2} < 0, \forall_{n\in\mathbb{N}}$
$\therefore 2-1 \leq 2-\dfrac{3}{n+2} < 0+2, \forall_{n\in\mathbb{N}}$
$\therefore 1 \leq 2-\dfrac{3}{n+2} < 2, \forall_{n\in\mathbb{N}}$
$\therefore 1 \leq u_n < 2, \forall_{n\in\mathbb{N}}$ c.q.d.

Como o conjunto dos termos da sucessão (u_n) admite majorante (2) e minorante (1), a sucessão é limitada

6. .

6.1. Como a circunferência tem raio 1, então

$B(\cos(x); \sin(x))$, com, $\cos(x) < 0$ e $\sin(x) > 0$

Sendo T, a projeção ortogonal do ponto A sobre o eixo Oy, tem-se que $T(0; \sin(x))$

Assim,

$\overline{AB} = 2|\cos(x)| = -2\cos(x)$, visto que, $\cos(x) < 0$

$\overline{AD} = 2|\sin(x)| = 2\sin(x)$, visto que, $\sin(x) > 0$

$\overline{FT} = 1 - |\sin(x)| = 1 - \sin(x)$, visto que, $\sin(x) > 0$

Portanto, a área da região colorida é

$A_{regiaocolorida} = \pi \times 1^2 - 2 \times A_{[ABF]} - A_{[ABCD]} = \pi - 2 \times \dfrac{\overline{AB} \times \overline{FT}}{2} - \overline{AB} \times \overline{CD} =$

$= \pi - \overline{AB} \times \overline{FT} - \overline{AB} \times \overline{CD} = \pi - (-2\cos(x)) \times (1 - \sin(x)) - (-2\cos(x)) \times 2\sin(x) =$

$= \pi + 2\cos(x) - 2\cos(x) \times \sin(x) + 4\cos(x) \times \sin(x) =$

$= \pi + 2\cos(x) + 2\cos(x) \times \sin(x) =$

$= \pi + 2\cos(x) + \sin(2x)$

Logo, a área A, da região colorida da figura, é dada, em função de x, por

$$A(x) = \pi + 2\cos(x) + \sin(2x)$$

6.2. Ora,

$$\lim_{x\to\pi^-} A(x) = \lim_{x\to\pi^-} (\pi + 2\cos(x) + \sin(2x)) =$$
$$= \pi + 2\cos(\pi) + \sin(2\pi) = \pi - 2$$

Este valor representa a área de uma região colorida, quando x está muito próximo de π

Geometricamente, quando $x \to \pi^-$, a região colorida tende para o que se observa na figura ao lado
O polígono $[EFGH]$ é um quadrado de lado $\sqrt{2}$

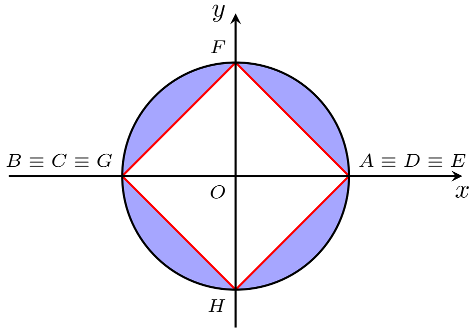


Figura 2

7. A condição $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ define uma superfície esférica de diâmetro $[AB]$

$\overrightarrow{AP} = P - A = (x - a; y - 0; z - 0) = (x - a; y; z)$

$\overrightarrow{BP} = P - B = (x - 0; y - a; z - 0) = (x; y - a; z)$

Assim,

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \Leftrightarrow (x-a; y; z)\cdot(x; y-a; z) = 0 \Leftrightarrow x(x-a)+y(y-a)+z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2-ax+y^2-ay+z^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{a^2}{2}$$

Outro processo

Centro da superfície esférica: $M\left(\frac{a+0}{2}; \frac{0+a}{2}; \frac{0+0}{2}\right)$, ou seja, $M\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$

Raio da superfície esférica: $r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{(a-0)^2 + (0-a)^2 + (0-0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{2a^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}|a| = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

Assim, uma equação da superfície esférica é,

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + z^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2$$

Ou seja,

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{a^2}{2}$$

Resposta: (C)

8. .

8.1. Determinemos o declive da reta r

$$m_r = \frac{1-0}{0-1} = -1$$

Logo,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

Assim,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{f(x)} = 2 \times \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{f(x)}{x}} = 2 \times \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}} = 2 \times \frac{1}{-1} = -2$$

Resposta: (A)

8.2. Determinemos a função derivada de g

$$g'(x) = \left(2\ln(x) - x^2\right)' = 2 \times \frac{1}{x} - 2x = \frac{2-2x^2}{x}$$

Procuremos os zeros de g'

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-2x^2}{x} = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow 2 - 2x^2 = 0 \wedge \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Quadro de sinal de g'

x	0		1	$+\infty$
$2-2x^2$	\\\\\\	$+$	0	$-$
x	\\\\\\	$+$	$+$	$+$
$g'(x)$	\\\\\\	$+$	0	$-$
$g(x)$	\\\\\\	$\nearrow$	0	$\searrow$

$$g(1) = 2 \times \ln(1) - 1^2 = 0 - 1 = -1$$

A função g é estritamente crescente em $]0;1]$ e é estritamente decrescente em $[1;+\infty[$

Atinge o valor máximo absoluto -1, para $x = 1$

9. .

9.1. Sabemos que $z = e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

Assim,

$$w = z^{-2} \times \overline{z} \times (-z) = \left(\frac{1}{z}\right)^2 \times \overline{z} \times (-z) = \left(e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^2 \times e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \times e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\left(-\frac{2\pi}{4}\right)} \times e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \times e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= e^{i\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \pi + \frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} = i$$

Ora, $w^n = i^n$

Para que w^n seja um número real, n tem de ser par

Assim, o menor valor de n para o qual w^n é um número real é 2

Resposta: (C)

9.2. Comecemos por resolver a equação $z^4 - 16 = 0$

$z^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow z^4 = 16 \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{16} \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{16e^{i(0)}} \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{16}e^{i\left(\frac{0+k2\pi}{4}\right)}$, $k \in \{0; 1; 2; 3\}$

$\Leftrightarrow z = 2e^{i\left(\frac{k\pi}{2}\right)}$, $k \in \{0; 1; 2; 3\}$

Atribuindo valores a k, vem,

$k = 0 \mapsto z = 2e^{i(0)} = 2$

$k = 1 \mapsto z = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 2i$

$k = 2 \mapsto z = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{2}\right)} = 2e^{i(\pi)} = -2$

$k = 3 \mapsto z = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = -2i$

Os afixos das soluções desta equação são vértices de um quadrado inscrito numa circunferência de raio 2 e centrada na origem

Sejam, $A(2; 0)$, $B(0; 2)$, $C(-2; 0)$ e $D(0; -2)$, esses afixos

Ora,

$\overline{AB} = \sqrt{(2-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
Assim, a área do polígono é $A_{[ABCD]} = \overline{AB}^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8\ u.a.$

Resposta: (C)

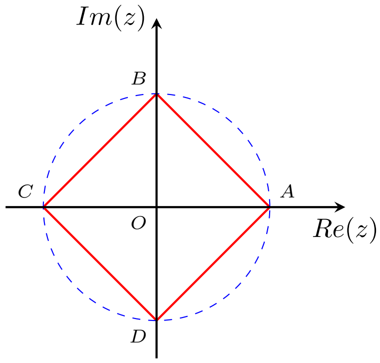


Figura 3

10. .

10.1. $0 \in D_f$

A função f é contínua em $x = 0$, se existir $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, ou seja,

se $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$

Ora,

- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(\frac{xe^{x+1}}{2\sin(x)}\right) =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \left(\frac{\lim\limits_{x \to 0^-} e^{x+1}}{2 \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sin(x)}{x}}\right) = \frac{e}{2 \times 1} = \frac{e}{2}$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{e^{x+1} - e}{\sqrt{x^3 + 4x^2}}\right) =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \frac{\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^{x+1} - e}{x}}{\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x^3 + 4x^2}}{x}} =$

$$= \frac{e \times \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x}}{\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{\frac{x^3 + 4x^2}{x^2}}} = e \times \frac{1}{\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x + 4}} = e \times \frac{1}{2} = \frac{e}{2}$$

- $f(0) = e^k$

Nota:

Aplicaram-se os **limites notáveis:**

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Assim, se $e^k = \frac{e}{2} \Leftrightarrow \frac{e^k}{e} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{k-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k - 1 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow k = 1 - \ln(2)$,
a função f é contínua em $x = 0$

10.2. .

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{x+1}-e}{\sqrt{x^3+4x^2}}\right) =^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x+1}-e}{x^2}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^3+4x^2}}{x^2}} =$$

$$= \frac{e\times\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^3+4x^2}{x^4}}} = e\times\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2}}} =$$

$$= e\times\frac{+\infty-0}{\sqrt{0+0}} = +\infty$$

Logo, o gráfico da função f não admite assíntota horizontal quando $x\to+\infty$

Nota:

Aplicou-se o **limite notável:**

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \ (p\in\mathbb{R})$

11. Um vetor diretor da reta r é $\overrightarrow{u}(-2;\sqrt{3})$

Assim, o declive da reta é $m_r = \dfrac{\sqrt{3}}{-2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Seja α a inclinação da reta r

Então,

$$\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 180^\circ \approx 139.1^\circ$$

Quanto à equação reduzida da reta

O declive da reta é $m_r = \dfrac{\sqrt{3}}{-2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Então,

$$r: y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + b, b\in\mathbb{R}$$

Como $A(1;-2)$ é ponto da reta, vem,

$$-2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\times 1 + b \Leftrightarrow 2b = -4+\sqrt{3} \Leftrightarrow b = \frac{-4+\sqrt{3}}{2}$$

Portanto,

A equação reduzida da reta r é $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{-4+\sqrt{3}}{2}$

12. Determinemos a função derivada da função g

$$g'(x) = (2x+e^{-x})' = 2-e^{-x}$$

O declive da reta tangente é,

$$m_t = g'(-2) = 2-e^2$$

A ordenada do ponto de tangência A, é,

$$g(-2) = -4+e^2$$

Então,

$t : y = (2 - e^2)x + b, b \in \mathbb{R}$

Como $A(-2; -4 + e^2)$ é ponto da reta, vem,

$-4 + e^2 = (2 - e^2) \times (-2) + b \Leftrightarrow b = -4 + e^2 + 4 - 2e^2 \Leftrightarrow b = -e^2$

Portanto,

A equação reduzida da reta t é $y = (2 - e^2)x - e^2$

Resposta: (B)

OmegaMat

Exame Modelo XII de Matemática A

Duração do Exame: 150 **minutos** + 30 **minutos de tolerância** |

12.º Ano de Escolaridade

Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta

É permitido o uso de calculadora

Não é permitido o uso de corretor. Risca o que pretendes que não seja classificado

Para cada resposta identifica o item

Apresenta as tuas respostas de forma legível

Apresenta apenas uma resposta para cada item

A prova apresenta um formulário na página 2

As cotações dos itens encontram-se na página 7

Na resposta aos itens de seleção (escolha múltipla), seleciona a resposta correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação apresenta sempre o valor exato.

NOTA

⋇ Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

1, 2, 3, 4, 5, 6.1, 6.2, 8.1, 8.2, 9 e 14

Estes itens estão assinalados no enunciado com o símbolo $*$

⋇ Dos restantes 7 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr *(α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)*

área de um polígono regular: *Semiperímetro $\times$ Apótema*

área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ *(α- amplitude, em radianos, do ângulo ao centro, r - raio)*

área lateral de um cone: $\pi r g$ *(r - raio da base, g - geratriz)*

área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ *(r - raio)*

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume do cone: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ *(r - raio)*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$, $r \neq 1$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$(|z|e^{i\theta})^n = |z|^n e^{i(n\theta)}$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0; 1; 2; ...; n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. (*) Seja (a_n), a sucessão definida por $a_n = \dfrac{2n+1}{4n-2}$

   Em qual das opções está o valor de $\lim\left((a_n)^n\right)$?

   (A) e

   (B) 0

   (C) 1

   (D) e^2

2. (*) Na figura 1 está representado o modelo da mesa de jantar, retangular, com catorze lugares, que existe na casa do João e da Joana

   O João, a Joana e os seus onze amigos, vão sentar-se à mesa para um jantar de aniversário do João

   De quantas maneiras se podem sentar à mesa, o João, a Joana e os seus onze amigos, de modo que:

   - o lugar vago da mesa fique na cabeceira da mesa
   - o João e a Joana ocupem dois lugares na cabeceira da mesa
   - a Inês e a Beatriz, que são duas das amigas, fiquem juntas num dos lados da mesa que tem cinco lugares

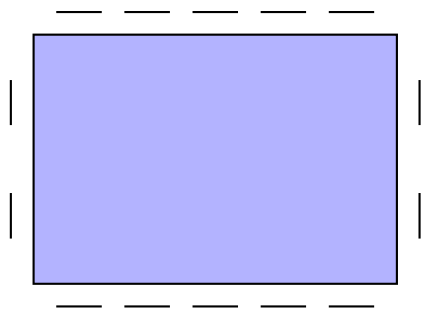


Figura 1

3. (*) Seja $(E, P(E), P)$ um espaço de probabilidade, P uma probabilidade em $P(E)$ e sejam A e B dois acontecimentos

   Sabe-se que:

   - $P\left(\overline{B}\right) = \dfrac{3}{10}$
   - $P\left(\overline{A}|B\right) = \dfrac{6}{7}$
   - $P\left(\overline{A \cup B}\right) = \dfrac{1}{5}$

   Em qual das opções está o valor de $P\left(\overline{B}|A\right)$?

   (A) 50%

   (B) 40%

   (C) 30%

   (D) 20%

4. (*) Seja g, a função real de variável real, definida por $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x+\sqrt{2}}{x-1} & se \quad x < 0 \\ 2 & se \quad x = 0 \\ -x^2+2 & se \quad x > 0 \end{cases}$

   Em qual das opções está um intervalo onde o teorema de Bolzano-Cauchy garante a existência de, pelo menos, um zero da função g?

   (A) $[-1; 1]$

   (B) $[-2; -1]$

   (C) $[-3; -2]$

   (D) $[2; 3]$

5. $(*)$ Seja f, a função real de variável real, definida por, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x)\cos(2x)}{2x^2 - x} & se \quad x < 0 \\ 1 + \ln(k-1) & se \quad x = 0 \\ \dfrac{ex^2 + ex}{e^{x+1} - e} & se \quad x > 0 \end{cases}$, $k > 1$

Averigua, analiticamente, se existe algum k, para o qual a função f é contínua no ponto $x = 0$

6. Considera a circunferência trigonométrica representada num plano munido de um referencial o.n. xOy, como se observa na figura 2

Sabe-se que:

- $E(1;0)$
- os pontos A e D pertencem à circunferência
- os pontos A e D são simétricos em relação ao eixo Ox
- os pontos B e C, pertencem à reta de equação $x = 1$
- os pontos B e C são simétricos em relação ao eixo Ox
- o ponto A move-se no primeiro quadrante, e os pontos B, C e D, acompanham esse movimento
- $E\hat{O}A = x$, com $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

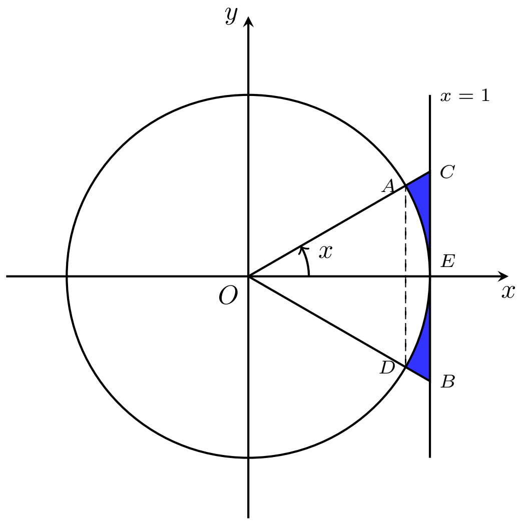


Figura 2

6.1. $(*)$ Mostra que a área da região colorida, é dada, em função de x, por

$A(x) = \tan(x) - x$, com $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

6.2. $(*)$ Para certo valor de $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, sabe-se que $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \frac{1}{2}$

Em qual das opções está o valor exato da área da região colorida para esse valor de x?

(A) $\dfrac{2\sqrt{3} - \pi}{6}$

(B) $\dfrac{3\sqrt{3} - \pi}{3}$

(C) $\dfrac{\sqrt{3} - \pi}{3}$

(D) $\dfrac{2\sqrt{3} - \pi}{3}$

7. Sabe-se que $\log_a \sqrt{b} = -\frac{3}{2}$, com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ e $b > 0$

Determina o valor de $\log_b \left(\sqrt[4]{\dfrac{a^3}{b^2}} \right)$

8. Seja f, a função real de variável real, definida por $f(x) = e^{x^2-4} - x^2$

   8.1. (∗) Estuda, analiticamente, a função f quanto a monotonia e extremos

   8.2. (∗) Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f' (primeira derivada de f), no ponto de abcissa 2

9. (∗) Seja h, a função real de variável real, definida por $h(x) = x + \ln\left(e^{x+1} - 1\right)$

   Mostra que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{x} = 2$

10. Na figura 3, está representado, no plano complexo, o quadrado $[ABCO]$

    Sabe-se que:

    - A e C são os afixos de duas raízes índice n de um número complexo z

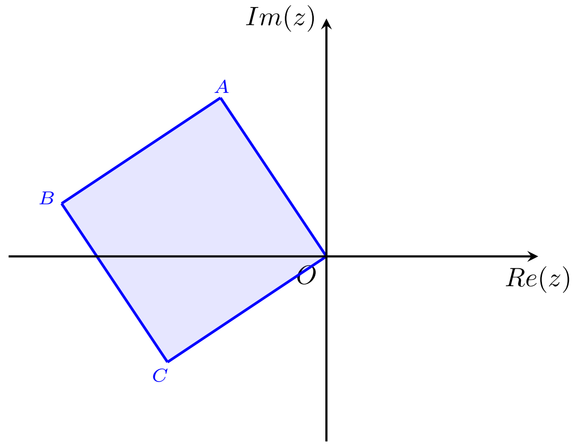


Figura 3

    Determina o menor valor natural de n

11. Considera em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, $w_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $w_2 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$, dois números complexos

    Determina as raízes cúbicas do número complexo $z_0 = \dfrac{\overline{w_1} + 1}{w_2}$

    Nota: Apresenta as soluções na forma trigonométrica

12. Considera a função f, real de variável real, definida em $\mathbb{R}$, por $f(x) = \ln(2e^x + 2)$

    Resolve a equação $f(x) = \ln(4) - x$

13. Na figura 4, está representada, em referencial *o.n.* $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3})$, uma pirâmide quandragular regular reta $[ABCDE]$

Sabe-se que:

- $A(3; -1; 1)$
- $E(3 - \sqrt{2}; 2; -4)$
- $D(3 - 2\sqrt{2}; -1; 1)$
- $\overrightarrow{BA} = (0; 2; 2)$

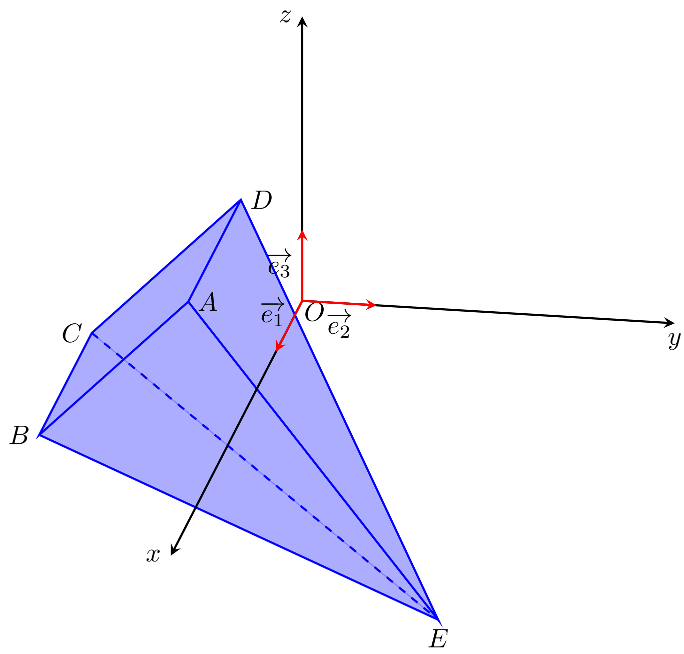


Figura 4

13.1. Escreve a equação cartesiana do plano ABC

Apresenta a equação na forma $ax + by + cz + d = 0$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

13.2. Em qual das opções está o valor exato do volume da pirâmide $[ABCDE]$?

(A) $\frac{8}{3}$

(B) 16

(C) $\frac{16}{3}$

(D) $\frac{32\sqrt{2}}{3}$

14. (∗) De uma progressão geométrica (u_n) sabe-se que, para determinado número real a, positivo e diferente de 1,

- $u_1 = \ln(e^a)$
- $u_2 = \frac{a}{2}$
- $u_3 = \log_2(4)$

são os três primeiros termos

Averigua se $\frac{1}{1024}$ é um termo da sucessão (u_n)

15. Relativamente ao desenvolvimento de $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^8$, com $x > 0$ e $y > 0$, sabe-se que há um termo da forma $ax^{-3}y^{-1}$, com $a \in \mathbb{R}$

Determina a

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 11 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final

Itens	1	2	3	4	5	6.1	6.2	8.1	8.2	9	14	Subtotal
Cotação (Pontos)	14	12	14	14	14	12	14	14	12	12	12	144

Destes 11 itens da prova, contribuem para a classificação final da prova os 5 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação

Itens	7	10	11	12	13.1	13.2	15	Subtotal
Cotação (Pontos)	4×14 Pontos							56

Duração do Exame: 150 **minutos** + 30 **minutos de tolerância**

12.º Ano de Escolaridade

1. $\lim\left((a_n)^n\right) = \lim\left(\dfrac{2n+1}{4n-2}\right)^n = \lim\left(\dfrac{2n\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)}{4n\left(1-\dfrac{2}{4n}\right)}\right)^n = \lim\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times \dfrac{\lim\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)}{\lim\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)} =$

$$= \lim\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{\lim\left(1+\dfrac{\frac{1}{2}}{n}\right)}{\lim\left(1-\dfrac{\frac{1}{2}}{n}\right)} = 0 \times \frac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}}} = 0$$

Resposta: (B)

2. Comecemos por escolher o lugar que fica vago na cabeceira da mesa

O número de maneiras distintas de fazer essa escolha é igual a ${}^4C_1$

Escolhido o lugar vago na cabeceira da mesa, sobram três lugares para colocar o João e a Joana

O número de maneiras distintas de fazer essa escolha é igual a ${}^3C_2 \times 2!$ ou ${}^3A_2$

Escolhido o lugar vago e os lugares da Joana e do João, coloquemos a Inês e a Beatriz

Colocar a Inês e Beatriz num lado da mesa: $4 \times 2!$

Colocar os restantes amigos nos nove lugares sobrantes: $9!$

Não esquecendo que a Inês e Beatriz podem ficar juntas no outro lado da mesa, tem-se que,

${}^4C_1 \times {}^3C_2 \times 2! \times 4 \times 2! \times 9! \times 2 = 139345920$ é o número de maneiras de sentar todos os amigos na mesa

3. .

$P\left(\overline{B}\right) = \dfrac{3}{10}$

$P(B) = 1 - P\left(\overline{B}\right) = 1 - \dfrac{3}{10} = \dfrac{7}{10}$

$P\left(\overline{A}|B\right) = \dfrac{6}{7} \Leftrightarrow \dfrac{P\left(\overline{A}\cap B\right)}{P(B)} = \dfrac{6}{7} \Leftrightarrow \dfrac{P\left(\overline{A}\cap B\right)}{\frac{7}{10}} = \dfrac{6}{7} \Leftrightarrow P\left(\overline{A}\cap B\right) = \dfrac{6}{7}\times\dfrac{7}{10} \Leftrightarrow P\left(\overline{A}\cap B\right) = \dfrac{6}{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(\overline{A}\cap B\right) = \dfrac{3}{5}$

Elaborando uma tabela de contingência

	A	$\overline{A}$	
B	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{10}$
$\overline{B}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$
	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	1

$P(A\cap B)=\frac{7}{10}-\frac{3}{5}=\frac{1}{10}$

$P\left(\overline{A\cup B}\right)=\frac{1}{5}\Leftrightarrow 1-P(A\cup B)=\frac{1}{5}\Leftrightarrow 1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=\frac{1}{5}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A)=1-\frac{1}{5}-P(B)+P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A)=1-\frac{1}{5}-\frac{7}{10}+\frac{1}{10}\Leftrightarrow P(A)=\frac{1}{5}$

$P\left(\overline{B}\cap A\right)=\frac{1}{5}-\frac{1}{10}=\frac{1}{10}$

$P\left(\overline{B}|A\right)=\frac{P\left(\overline{B}\cap A\right)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{5}}=\frac{5}{10}=50\%$

Resposta: (A)

4. Analisando cada opção

(A) No intervalo $[-1;1]$, a função não é contínua, pelo que não se pode aplicar o teorema de Bolzano

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x+\sqrt{2}}{x-1}=\frac{\sqrt{2}}{-1}=-\sqrt{2}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}(-x^2+2)=2$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, então não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Logo, f é descontínua em $x=0$

(B) No intervalo $[-2;-1]$ a função f é contínua, e,

$f(-2)=\frac{-2+\sqrt{2}}{-2-1}>0$ e $f(-1)=\frac{-1+\sqrt{2}}{-1-1}<0$

Logo, o teorema de Bolzano garante pelo menos um zero da função em $]-2;-1[$, e portanto, também em $[-2;-1]$

(C) No intervalo $[-3;-2]$ a função f é contínua, mas,

$f(-2)=\frac{-2+\sqrt{2}}{-2-1}>0$ e $f(-3)=\frac{-3+\sqrt{2}}{-1-1}>0$

Logo, o teorema de Bolzano não garante pelo menos um zero da função em $]-3;-2[$

(D) No intervalo $[2;3]$ a função f é contínua, mas,

$f(2)=-2^2+2=-2<0$ e $f(3)=-3^2+2=-7<0$

Logo, o teorema de Bolzano não garante pelo menos um zero da função em $]2;3[$

Resposta: (B)

5. $0 \in D_f$

A função f é contínua em $x=0$, se existir $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, ou seja,

se $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{ex^2+ex}{e^{x+1}-e} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x\to 0^+} \frac{ex(x+1)}{e\left(e^x-1\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{e^x-1} \times \lim_{x\to 0^+}(x+1)$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x}} \times 1 = \frac{1}{1} = 1$$

Aplicou-se o limite notável: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(2x)\cos(2x)}{2x^2-x} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{2}\sin(4x)}{x(2x-1)} = \frac{1}{2} \lim_{4x\to 0^-} \frac{\sin(4x)}{4x} \times 4 \times \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2x-1} =$$

$$= \frac{4}{2} \times 1 \times (-1) = -2$$

Aplicou-se o limite notável: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, então não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Logo, não existe k para o qual f é contínua em $x=0$

6. .

6.1. Sabe-se que $A(\cos(x);\sin(x))$, com $\cos(x)>0$ e $\sin(x)>0$

$C(1;\tan(x))$, com $\tan(x)>0$

$\overline{BC} = 2\tan(x)$

$\overline{OE} = 1$

Área do setor circular: $A_1 = \frac{2x\times 1^2}{2} = x$

Área do triângulo $[BCO]$: $A_{[BCO]} = \frac{\overline{BC}\times\overline{OE}}{2} = \frac{2\tan(x)\times 1}{2} = \tan(x)$

Logo, a área da região colorida, é dada, em função de x, por

$A(x) = A_{[BCO]} - A_1 = \tan(x) - x$, com $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

6.2. .

$$\cos^2(x)-\sin^2(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{3}+k2\pi \vee 2x = \frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6}+k\pi \vee x = \frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Atribuindo valores a k, tem-se,

$k=0 \mapsto x = -\frac{\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{6}$

$k=1 \mapsto x=\frac{5\pi}{6} \vee x=\frac{7\pi}{6}$

$k=-1 \mapsto x=-\frac{7\pi}{6} \vee x=-\frac{5\pi}{6}$

Portanto, $x=\frac{\pi}{6}$

Logo, a área da região colorida, é igual a

$A\left(\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{2\sqrt{3}-\pi}{6}$

Resposta: (A)

7. Sabe-se que $\log_a \sqrt{b}=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_a b=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow \log_a b=-3$

Assim,

$$\log_b\left(\sqrt[4]{\frac{a^3}{b^2}}\right)=\frac{1}{4}\log_b\left(\frac{a^3}{b^2}\right)=\frac{1}{4}\left(\log_b a^3-\log_b b^2\right)=\frac{1}{4}\left(3\log_b a-2\right)=\frac{1}{4}\left(3\times\frac{\log_a a}{\log_a b}-2\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(3\times\frac{1}{-3}-2\right)=\frac{1}{4}(-1-2)=-\frac{3}{4}$$

8. .

8.1. Função derivada de f

$f'(x)=\left(e^{x^2-4}-x^2\right)'=(x^2-4)'e^{x^2-4}-2x=2xe^{x^2-4}-2x=2x\left(e^{x^2-4}-1\right)$

Zeros de $f'(x)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x\left(e^{x^2-4}-1\right)=0 \Leftrightarrow 2x=0 \vee e^{x^2-4}-1=0 \Leftrightarrow x=0 \vee e^{x^2-4}=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x^2-4=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x^2=4 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-2 \vee x=2$

Sinal de $f'(x)$

$e^{x^2-4}-1>0 \Leftrightarrow e^{x^2-4}>1 \Leftrightarrow x^2-4>0 \Leftrightarrow x<-2 \vee x>2$

Quadro de sinal de $f'(x)$

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$2x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$e^{x^2-4}-1$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$\frac{1}{e^4}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$

$f(0)=e^{-4}-0^2=\frac{1}{e^4}$

$f(-2)=e^{(-2)^2-4}-(-2)^2=e^0-4=-3$

$f(2)=e^{2^2-4}-2^2=e^0-4=-3$

A função f é crescente em $]-2;0[$ e em $]2;+\infty[$

A função f é decrescente em $]-\infty;-2[$ e em $]0;2[$

A função atinge o mínimo absoluto -3 para $x=-2$ e para $x=2$

A função atinge o máximo relativo $\frac{1}{e^4}$ para $x=0$

8.2. Função segunda derivada de f

$f''(x)=\left[2x\left(e^{x^2-4}-1\right)\right]'=(2x)'\times\left(e^{x^2-4}-1\right)+2x\times\left(e^{x^2-4}-1\right)'=$

$=2\times\left(e^{x^2-4}-1\right)+2x\times\left((x^2-4)'e^{x^2-4}\right)=2\left(e^{x^2-4}-1\right)+2x\times\left(2xe^{x^2-4}\right)=2e^{x^2-4}-2+4x^2e^{x^2-4}=$

$=e^{x^2-4}(4x^2+2)-2$

Declive da reta

$m_t=f''(2)=e^{2^2-4}(4\times 2^2+2)-2=e^0(16+2)-2=16$

Ponto de tangência

$T(2;f'(2))$

$f'(2)=2\times 2\left(e^{2^2-4}-1\right)=4\left(e^0-1\right)=0$

Logo, $T(2;0)$

Reta tangente t

$t: y=16x+b, b\in\mathbb{R}$

Como T é ponto da reta, vem,

$0=16\times 2+b\Leftrightarrow b=-32$

Portanto, $t: y=16x-32$

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\ln\left(e^{x+1}-1\right)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\ln\left(e^{x+1}\left(1-\frac{1}{e^{x+1}}\right)\right)}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\ln\left(e^{x+1}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{e^{x+1}}\right)}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+x+1+\ln\left(1-\frac{1}{e^{x+1}}\right)}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{e^{x+1}}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)+\frac{0}{+\infty}=2$

10. Seja $z_A=|z_A|e^{i\theta}$, cujo afixo é o ponto A

Seja $z_C=|z_C|e^{i\theta}=|z_A|e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$, cujo afixo é o ponto C

Ora, deverá ter-se $z_C^n=z_A^n$

Assim,

$z_C^n = z_A^n \Leftrightarrow |z_A|^n e^{i\left(n\theta + \frac{n\pi}{2}\right)} = |z_A|^n e^{i(n\theta)}$

$\Leftrightarrow n\theta + \dfrac{n\pi}{2} = n\theta = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{n\pi}{2} = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = 4k, k \in \mathbb{Z}$

Atribuindo valores a k

$k = 0 \mapsto n = 0 \notin \mathbb{N}$

$k = 1 \mapsto n = 4 \in \mathbb{N}$

$k = 2 \mapsto n = 8 \in \mathbb{N}$

$k = -1 \mapsto n = -4 \notin \mathbb{N}$

Resposta: o menor valor de n é 4

11. .

$\overline{w_1} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$

$\overline{w_1} + 1 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} i + 1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$

$|\overline{w_1} + 1| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = 1$

Seja $\alpha = Arg(\overline{w_1} + 1)$

$\tan(\alpha) = \dfrac{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{2}}$, e $\alpha \in 4Q$

$\tan(\alpha) = -\sqrt{3}$, e $\alpha \in 4Q$

Logo, $\alpha = -\dfrac{\pi}{3}$

Assim, $\overline{w_1} + 1 = e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

$z_0 = \dfrac{\overline{w_1} + 1}{w_2} = \dfrac{e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}{2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}} = \dfrac{1}{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{1}{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

Seja z um número complexo

$z^3 = z_0 \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{z_0} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}} \Leftrightarrow$

$z = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}} e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{6} + k2\pi}{3}\right)}$, com $k \in \{0; 1; 2\}$

$z=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}e^{i\left(-\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}\right)}$, com $k\in\{0;1;2\}$

Atribuindo valores a k, tem-se,

$k=0\mapsto z_1=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}e^{i\left(-\frac{\pi}{18}\right)}$

$k=1\mapsto z_1=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}e^{i\left(\frac{11\pi}{18}\right)}$

$k=2\mapsto z_1=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}e^{i\left(\frac{23\pi}{18}\right)}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}e^{i\left(-\frac{13\pi}{18}\right)}$

Portanto, $C.S.=\left\{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}e^{i\left(-\frac{\pi}{18}\right)};\sqrt[3]{\frac{1}{2}}e^{i\left(\frac{11\pi}{18}\right)};\sqrt[3]{\frac{1}{2}}e^{i\left(-\frac{13\pi}{18}\right)}\right\}$

12. $f(x)=\ln(4)-x\Leftrightarrow\ln(2e^x+2)=\ln(4)-x\Leftrightarrow\ln(2e^x+2)=\ln(4)-\ln(e^x)\Leftrightarrow\ln(2e^x+2)=\ln\left(\frac{4}{e^x}\right)\Leftrightarrow$

    $\Leftrightarrow 2e^x+2=\frac{4}{e^x}\Leftrightarrow 2e^x+2-\frac{4}{e^x}=0\Leftrightarrow\frac{2\left(e^x\right)^2+2e^x-4}{e^x}=0\Leftrightarrow 2\left(e^x\right)^2+2e^x-4=0\wedge e^x\neq 0\Leftrightarrow$

    $\Leftrightarrow 2\left(e^x\right)^2+2e^x-4=0\wedge$ Condição universal $\Leftrightarrow 2\left(e^x\right)^2+2e^x-4=0$

    Fazendo a mudança de variável $y=e^x$, vem

    $2y^2+2y-4=0\Leftrightarrow y^2+y-2=0\Leftrightarrow y=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1}\Leftrightarrow y=1\vee y=-2$

    Assim, como $y=e^x$, resulta

    $e^x=1\vee e^x=-2\Leftrightarrow x=0\vee$ Equação impossível $\Leftrightarrow x=0$

    $C.S.=\{0\}$

13. .

    13.1. Ora,

    $\overrightarrow{AB}=(0;-2;-2)$

    $\overrightarrow{AD}=D-A=(3-2\sqrt{2};-1;1)-(3;-1;1)=(-2\sqrt{2};0;0)$

    Seja $\overrightarrow{\alpha}(a;b;c)$ um vetor normal ao plano ABC

    Então,

    $\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{AB}=0\wedge\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{AD}=0$

    $\Leftrightarrow(a;b;c)\cdot(0;-2;-2)=0\wedge(a;b;c)\cdot(-2\sqrt{2};0;0)=0$

    $\Leftrightarrow -2b-2c=0\wedge -2\sqrt{2}a=0$

    $\Leftrightarrow b=-c\wedge a=0$

    Logo, $\overrightarrow{\alpha}(0;-c;c)$, com $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

    Considerando, $c=1$, vem, $\overrightarrow{\alpha}(0;-1;1)$

Assim,
A equação cartesiana do plano $[ABC]$ é da forma $-y+z+d=0$, com $d\in\mathbb{R}$

Como $A(3;-1;1)$ é ponto do plano, tem-se,

$-(-1)+1+d=0 \Leftrightarrow d=-2$

Portanto,

$ABC: -y+z-2=0$

13.2. Seja T o ponto médio do semento $[BD]$

$T\left(\dfrac{3+3-2\sqrt{2}}{2};\dfrac{-3-1}{2};\dfrac{-1+1}{0}\right)$, ou seja, $T\left(3-\sqrt{2};-2;0\right)$

$\overline{TE}=\sqrt{\left(3-\sqrt{2}-3+\sqrt{2}\right)^2+(-2-2)^2+(0+4)^2}=\sqrt{0+16+16}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$\overline{AB}=\sqrt{0^2+(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{0+4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

Volume da pirâmide: $V_{pirâmide}=\dfrac{\overline{AB}^2\times\overline{TE}}{3}=\dfrac{8\times4\sqrt{2}}{3}=\dfrac{32\sqrt{2}}{3}$
Resposta: (D)

14. Sabe-se que

- $u_1=\ln(e^a)$
- $u_2=\dfrac{a}{2}$
- $u_3=\log_2(4)$

são os três primeiros termos da progressão geométrica (u_n)

Então, tem-se,

$$\frac{u_2}{u_1}=\frac{u_3}{u_2}\Leftrightarrow\frac{\frac{a}{2}}{\ln(e^a)}=\frac{\log_2(4)}{\frac{a}{2}}\Leftrightarrow\frac{\frac{a}{2}}{a}=\frac{\log_2(4)}{\frac{a}{2}}\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{2\log_2(4)}{a}\Leftrightarrow a=4\log_2(4)\Leftrightarrow a=4\log_2(2^2)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow a=4\times2\Leftrightarrow a=8$

Assim,

$u_1=\ln(e^a)=a=8$

$u_2=\dfrac{a}{2}=\dfrac{8}{2}=4$
$r=\dfrac{u_2}{u_1}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$

Termo geral de (u_n)

$u_n=8\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=2^3\times2^{1-n}=2^{4-n}$

Procuremos $n\in\mathbb{N}$, tal que $u_n=\dfrac{1}{1024}$

$u_n=\dfrac{1}{1024}\Leftrightarrow2^{4-n}=\dfrac{1}{2^{10}}\Leftrightarrow2^{4-n}=2^{-10}\Leftrightarrow4-n=-10\Leftrightarrow n=14\in\mathbb{N}$

Portanto, $\dfrac{1}{1024}$ é um termo da sucessão (u_n), é o termode ordem catorze

15. Desenvolvendo $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}\right)^8$, vem,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^8 =$$
$$= \sum_{p=0}^{8}\left[{}^8C_p \times \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{8-p} \times \left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^{p}\right] =$$
$$= \sum_{p=0}^{8}\left[{}^8C_p \times \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{8-p} \times \left(y^{-\frac{1}{2}}\right)^{p}\right] =$$
$$= \sum_{p=0}^{8}\left[{}^8C_p \times x^{\frac{p-8}{2}} \times y^{-\frac{p}{2}}\right]$$

Como um dos termos deste desenvolvimento da forma $ax^{-3}y^{-1}$, com $a \in \mathbb{R}$

Procuremos p de modo que $\dfrac{p-8}{2} = -3 \wedge -\dfrac{p}{2} = -1 \wedge 0 \leq p \leq 8$

$\dfrac{p-8}{2} = -3 \wedge -\dfrac{p}{2} = -1 \wedge 0 \leq p \leq 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p-8=-6 \wedge p=2 \wedge 0 \leq p \leq n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p=2 \wedge p=2 \wedge 0 \leq p \leq n$

$\Leftrightarrow p=2$

Logo, $a =^8 C_2 = 28$

OmegaMat

Exame Modelo XIII de Matemática A

Duração do Exame: 150 **minutos** + 30 **minutos de tolerância** |

12.º Ano de Escolaridade

Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta

É permitido o uso de calculadora

Não é permitido o uso de corretor. Risca o que pretendes que não seja classificado

Para cada resposta identifica o item

Apresenta as tuas respostas de forma legível

Apresenta apenas uma resposta para cada item

A prova apresenta um formulário na página 2

As cotações dos itens encontram-se na página 6

Na resposta aos itens de seleção (escolha múltipla), seleciona a resposta correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação apresenta sempre o valor exato.

NOTA

⋇ Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

1, 3, 4.1, 4.2, 5, 6, 7.2, 7.3, 8.1, 8.2 e 11

Estes itens estão assinalados no enunciado com o símbolo $*$

⋇ Dos restantes 7 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr *(* α *- amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *- raio)*

área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ *(* α*- amplitude, em radianos, do ângulo ao centro,* r *- raio)*

área lateral de um cone: $\pi r g$ *(* r *- raio da base,* g *- geratriz)*

área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ *(* r *- raio)*

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume do cone: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ *(* r *- raio)*

Progressões

Soma dos n *primeiros termos de uma progressão* (u_n)*:*

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$, $r \neq 1$

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$(|z|e^{i\theta})^n = |z|^n e^{i(n\theta)}$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0; 1; 2; ...; n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. (*) Em qual das opções está o valor de ${}^{2020}C_{500} + {}^{2020}C_{501} + {}^{2021}C_{502}$?

(A) ${}^{2021}C_{501}$
(B) ${}^{2021}C_{502}$
(C) ${}^{2022}C_{501}$
(D) ${}^{2022}C_{502}$

2. Considera todos os anagramas da palavra $INCONSTITUCIONAL$

Escolhido, ao acaso, um desses anagramas, qual é probabilidade de ter os três I juntos no final da palavra?

Apresenta o valor sob a forma de fração irredutivel

Nota: Anagrama de uma palavra, é uma nova palavra que se escreve com as mesmas letras, e que pode ter ou não sentido

3. (*) Num encontro de 50 surfistas na praia da Nazaré, 10 só falam francês, 25 só falam inglês e 15 falam as duas línguas

Escolhidos dois surfistas ao acaso, qual é probabilidade de os dois se entenderem numa conversa sem o auxílio de tradutor?

4. Na figura 1 está representado, em referencial $o.n.$ $Oxyz$, um cubo $[ABCDEFGH]$

Sabe-se que:

- a face $[ABCD]$ está contida no plano xOy
- o plano ABG tem equação cartesiana

  $x + y + \sqrt{2}z - 2\sqrt{2} = 0$
- os pontos A e C pertencem ao eixo Ox
- os pontos B e D pertencem ao eixo Oy
- a origem do referencial é o centro face $[ABCD]$
- o ponto I é o centro face $[EFGH]$

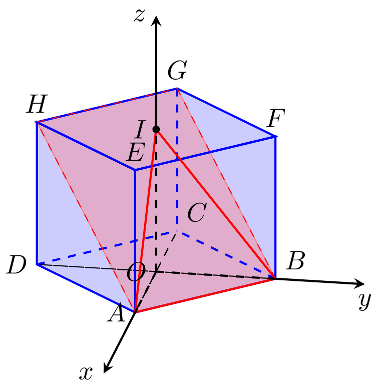


Figura 1

4.1. (*) Escreve a equação cartesiana reduzida da superfície esférica que contém os vértices do cubo

4.2. (*) Em qual das opções está um valor aproximado às centésimas da amplitude do ângulo AIB?

(A) 48.19° **(B)** 48.18° **(C)** 41.81° **(D)** 41.82°

4.3. Há um ponto do plano ABG que está mais próximo do ponto I do que de todos os outros
Determina a distância entre o ponto I e esse ponto do plano ABG

5. (*) Seja f, a função real de variável real, definida por, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x-4)}{x-2} & se \quad x < 2 \\ k^2 + \ln\left(e^k\right) & se \quad x = 2 \\ \dfrac{x^2-2x}{\ln(x-1)} & se \quad x > 2 \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$

Averigua, analiticamente, se existe algum $k \in \mathbb{R}$, para o qual a função f é contínua no ponto $x = 2$

6. $(*)$ Seja, f, a função de domínio $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $f(x) = x - \frac{1}{2}\sin(2x)$

Em qual das opções está o valor de x com arredondamento às centésimas, para o qual $f(x) = 1$?

(A) 1.27
(B) 1.28
(C) 1.29
(D) 1.31

7. Seja f, a função real de variável real, definida por, $f(x) = \begin{cases} e^{x+1}(2x+1) & se \quad x \leq 0 \\ 1 + \frac{\ln(x)}{x} & se \quad x > 0 \end{cases}$

7.1. Mostra , analiticamente, que a função f tem uma assíntota vertical e escreve a sua equação

7.2. $(*)$ A função f tem duas assíntotas paralelas ao eixo das abcissas

Determina, analiticamente, as suas equações

7.3. $(*)$ Seja g, a restrição da função f ao intervalo $]-\infty; 0[$

Estuda a função g quanto a monotonia e extremos

8. Seja $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos

Sejam $z_1 = -1 + 8i + i^{164}$ e $z_2 = \frac{2+2i}{2i}$, dois números complexos

8.1. $(*)$ Os afixos das soluções da equação $z^3 - z_1 = 0$ são vértices de um polígono regular

Determina o perímetro desse polígono

8.2. $(*)$ Considera o conjunto $A = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq |z_2|^2 \wedge Im(z) = -Re(z) \wedge Re(z) \geq 0 \wedge Im(z) \leq 0\right\}$

O conjunto A representa uma linha

Em qual das opções está o comprimento dessa linha?

(A) 2
(B) 4
(C) $2\sqrt{2}$
(D) $\sqrt{2}$

9. Seja g, a função real de variável real, definida por, $g(x) = \begin{cases} \sin(2x)\cos(2x) & se \quad x \leq 0 \\ \frac{\sin(4x)}{1 - e^{2x}} & se \quad x > 0 \end{cases}$

9.1. Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de g, no ponto de abcissa $-\frac{\pi}{16}$

9.2. Determina $\lim_{x \to 0^+} g(x)$

10. Considera, num plano munido de um referencial ortonormado xOy, a circunferência trigonométrica, como se observa na figura 2

Sabe-se que:

- os pontos A, B, C e D pertencem à circunferência
- os pontos A e B são simétricos em relação ao eixo Oy
- os pontos C e D são simétricos em relação ao eixo Oy
- os pontos A e D são simétricos em relação ao eixo Ox
- os pontos B e C são simétricos em relação ao eixo Ox
- $E(1;0)$ e $F(-1;0)$
- o ponto A move-se no segundo quadrante, e os pontos B, C e D, acompanham esse movimento
- $E\hat{O}A = x$, com $x \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$

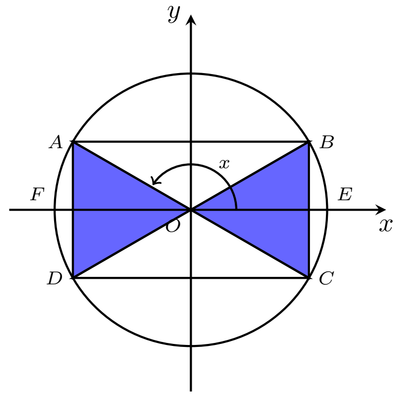


Figura 2

10.1. Em qual das opções está a expressão, em função de x, da área da região colorida da figura?

(A) $A(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$

(B) $A(x) = \sin(2x)$

(C) $A(x) = -\sin(2x)$

(D) $A(x) = -\frac{1}{2}\sin(x)$

10.2. Determina, analiticamente, o valor exato de x, para o qual a área da região colorida é igual a 1

11. (∗) Seja f, a função real de variável real, definida em $]0;\pi[$, por $f(x) = \sin(-2x) + \frac{e}{2}$,

Considera, num plano munido de um referencial o.n. xOy, o gráfico da função f e um triângulo $[ABC]$

sabe-se que:

- $A(\ln(2);e)$
- $B(\ln(6);e)$
- C é um ponto que se desloca sobre o gráfico da função f

Recorrendo às capacidades gráficas da tua calculadora determina a abcissa do ponto C para a qual o perímetro do triangulo $[ABC]$ é mínimo

Na tua resposta deves:

- equacionar o problema
- desenhar, num referencial o.n., o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizaste na calculadora, devidamente identificado(s)
- indicar a abcissa do ponto C com arredondamento às centésimas

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 11 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final											
Itens	1	3	4.1	4.2	5	6	7.2	7.3	8.1	8.2	11	Subtotal
Cotação (Pontos)	14	12	12	14	14	14	12	12	12	14	14	144

Destes 11 itens da prova, contribuem para a classificação final da prova os 5 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação								
Itens	2	4.3	7.1	9.1	9.2	10.1	10.2	Subtotal
Cotação (Pontos)	4 × 14 Pontos							56

OmegaMat

Resolução do Exame Modelo XIII de Matemática A

Duração do Exame: 150 **minutos** + 30 **minutos de tolerância**

12.º Ano de Escolaridade

1. .

$$^{2020}C_{500} +^{2020} C_{501} +^{2021} C_{502} =^{2021} C_{501} +^{2021} C_{502} =^{2022} C_{502}$$

Resposta: (D)

2. .

1° **Processo**

Número de casos possíveis: $\dfrac{16!}{3! \times 3! \times 2! \times 2! \times 2!}$

Quanto ao número de casos favoráveis

Fazendo um esquema

$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad \underline{III}$

Número de casos favoráveis: $\dfrac{13!}{3! \times 2! \times 2! \times 2!}$

Logo, a probabilidade pedida é igual a

$$P = \frac{\frac{13!}{3! \times 2! \times 2! \times 2!}}{\frac{16!}{3! \times 3! \times 2! \times 2! \times 2!}} = \frac{1}{560}$$

2° **Processo**

Número de casos possíveis: $^{16}C_3 \times^{13} C_3 \times^{10} C_2 \times^{8} C_2 \times^{6} C_2$

Quanto ao número de casos favoráveis

Fazendo um esquema

$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad \underline{III}$

Número de casos favoráveis: $^{13}C_3 \times^{10} C_2 \times^{8} C_2 \times^{6} C_2$

Logo, a probabilidade pedida é igual a

$$P = \frac{^{13}C_3 \times^{10} C_2 \times^{8} C_2 \times^{6} C_2}{^{16}C_3 \times^{13} C_3 \times^{10} C_2 \times^{8} C_2 \times^{6} C_2} = \frac{1}{560}$$

3. .

1° **Processo**

Seja A, o acontecimento

A : "Os dois surfistas entendem-se numa conversa"

Então,

$\overline{A}$: "Os dois surfistas não se entendem numa conversa"

Determinemos a probabilidade deste último acontecimento

Número de casos possíveis: ${}^{50}C_2$

Legenda:

${}^{50}C_2 \mapsto$ escolher dois surfistas de entre os 50

Número de casos favoráveis: ${}^{10}C_1 \times {}^{25}C_1$

Legenda:

${}^{10}C_1 \times {}^{25}C_1 \mapsto$ escolher um surfista que só fala francês e um surfista que só fala inglês

Logo, $P\left(\overline{A}\right) = \dfrac{{}^{10}C_1 \times {}^{25}C_1}{{}^{50}C_2}$

Assim,

$$P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{{}^{10}C_1 \times {}^{25}C_1}{{}^{50}C_2} = \frac{39}{49}$$

2° **Processo**

Número de casos possíveis: ${}^{50}C_2$
Legenda:

${}^{50}C_2 \mapsto$ escolher dois surfistas de entre os 50

Número de casos favoráveis: ${}^{10}C_2 + {}^{25}C_2 + {}^{15}C_2 + {}^{10}C_1 \times {}^{15}C_1 + {}^{25}C_1 \times {}^{15}C_1$

Legenda:

${}^{10}C_2 \mapsto$ escolher dois surfistas que só falam francês

${}^{25}C_2 \mapsto$ escolher dois surfistas que só falam inglês

${}^{15}C_2 \mapsto$ escolher dois surfistas que falam as duas línguas

${}^{10}C_1 \times {}^{15}C_1 \mapsto$ escolher um surfista que só fala francês e um surfista que fala as duas línguas

${}^{25}C_1 \times {}^{15}C_1 \mapsto$ escolher um surfista que só fala inglês e um surfista que fala as duas línguas

Logo, $P = \dfrac{{}^{10}C_2 + {}^{25}C_2 + {}^{15}C_2 + {}^{10}C_1 \times {}^{15}C_1 + {}^{25}C_1 \times {}^{15}C_1}{{}^{50}C_2} = \dfrac{39}{49}$

4. .

4.1. Determinemos as coordenadas dos pontos A e B

Ponto $A(x;0;0)$

Como A pertence ao plano ABG, resulta,

$x+0+\sqrt{2}\times 0-2\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow x-2\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow x=2\sqrt{2}$

Assim, $A(2\sqrt{2};0;0)$ e $B(0;2\sqrt{2};0)$

$\overline{AB}=\sqrt{(2\sqrt{2}-0)^2+(0-2\sqrt{2})^2+(0-0)^2}=\sqrt{8+8+0}=\sqrt{16}=4$

Seja J, o centro do cubo, então, $J(0;0;2)$

Determinemos o raio da superfície esférica

$r=\overline{AJ}=\sqrt{(2\sqrt{2}-0)^2+(0-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{8+0+4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

A equação cartesiana reduzida da superfície esférica que contém os vértices do cubo é

$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-2)^2=(2\sqrt{3})^2$, ou seja, $x^2+y^2+(z-2)^2=12$

4.2. Sabemos que, $I(0;0;4)$

Assim,

$\overrightarrow{IA}=A-I=(2\sqrt{2};0;0)-(0;0;4)=(2\sqrt{2};0;-4)$

$\overrightarrow{IB}=B-I=(0;2\sqrt{2};0)-(0;0;4)=(0;2\sqrt{2};-4)$

$\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=(2\sqrt{2};0;-4)\cdot(0;2\sqrt{2};-4)=2\sqrt{2}\times 0+0\times 2\sqrt{2}-4\times(-4)=0+0+16=16$

$||\overrightarrow{IA}||=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+0^2+(-4)^2}=\sqrt{8+0+16}=\sqrt{24}$

$||\overrightarrow{IB}||=\sqrt{0^2+(2\sqrt{2})^2+(-4)^2}=\sqrt{0+8+16}=\sqrt{24}$

Seja α a amplitude do ângulo AIB

$$\cos(\alpha)=\frac{|\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}|}{||\overrightarrow{IA}||\times||\overrightarrow{IB}||}$$

$$\therefore \cos(\alpha)=\frac{|16|}{\sqrt{24}\times\sqrt{24}}$$

$$\therefore \cos(\alpha)=\frac{16}{24}$$

$$\therefore \cos(\alpha)=\frac{2}{3}$$

$$\therefore \alpha=\cos^{-1}\left(\frac{16}{24}\right)\approx 48.19^\circ$$

Resposta: (A)

4.3. Seja I', a projeção ortogonal do ponto I sobre o plano ABG

Determinemos uma equação vetorial da reta II'

Um vetor diretor desta reta poderá ser o vetor normal ao plano ABG

Assim vem,

$(x;y;z) = (0;0;4) + k(1;1;\sqrt{2}), k \in \mathbb{R}$

Um ponto genérico desta reta é $(k;k;4+\sqrt{2}k), k \in \mathbb{R}$

Ora,

$k + k + \sqrt{2}(4+\sqrt{2}k) - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow 2k + 4\sqrt{2} + 2k - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4k + 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow 2k = -\sqrt{2} \Leftrightarrow k = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Portanto, $I'\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 4 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2}\right)$, ou seja, $I'\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 3\right)$

Portanto, a distância entre o ponto I e esse ponto I' do plano ABG, é

$$\overline{II'} = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1} = \sqrt{2}\ u.c.$$

5. $2 \in D_f$

A função f é contínua em $x = 2$, se existir $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, ou seja,

se $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$

- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{\sin(2x-4)}{x-2} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{\sin(2(x-2))}{x-2} = \lim\limits_{y \to 0^-} \dfrac{\sin(2y)}{y} =$

  $= \lim\limits_{2y \to 0^-} \dfrac{\sin(2y)}{2y} \times 2 = 1 \times 2 = 2$

  Fez-se a mudança de variável

  $y = x - 2 \Leftrightarrow x = y + 2$

  Se $x \to 2^-$, então, $y \to 0^-$

  Aplicou-se o limite notável: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - 2x}{\ln(x-1)} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x(x-2)}{\ln(x-1)} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-2}{\ln(x-1)} \times \lim\limits_{x \to 2^+} (x)$

  $= 2 \times \lim\limits_{y \to 0^+} \dfrac{e^y + 1 - 2}{y} = 2 \times \lim\limits_{y \to 0^+} \dfrac{e^y - 1}{y}$

  $= 2 \times 1 = 2$

  Fez-se a mudança de variável

  $y = \ln(x-1) \Leftrightarrow x - 1 = e^y \Leftrightarrow x = e^y + 1$

  Se $x \to 2^+$, então, $y \to 0^+$

Aplicou-se o limite notável: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

- $f(2) = k^2 + \ln\left(e^k\right) = k^2 + k$

Assim, deverá ter-se, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$

Ou seja,

$k^2 + k = 2 \Leftrightarrow k^2 + k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow k = -2 \vee k = 1$

Portanto, existem dois valores para k, para os quais a função f é contínua em $x = 2$

6. .

Inserir a função $y_1 = x - \frac{1}{2}\sin(2x)$

Inserir a função $y_2 = 1$

Ajustar a janela de visualização

$\left[0; \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Desenhar gáfico

Procurar a abcissa do ponto de interseção dos dois gráficos

$x_1 \approx 1.28$ rad

Resposta: (B)

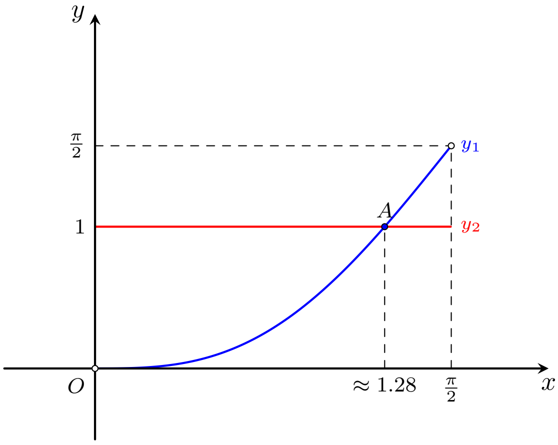


Figura 1

7. .

7.1. O domínio da função é $\mathbb{R}$

Calculemos $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{\ln(x)}{x}\right) = 1 + \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = 1 + \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$

Logo a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico da função f

Nota: Não existem mais assíntotas verticais ao gráfico da função f

7.2. .

Calculemos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\ln(x)}{x}\right) = 1 + = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 1 + 0 = 1$

Aplicou-se o limite notável $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

Logo, a reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico da função f, quando $x \to +\infty$

Calculemos $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(e^{x+1}(2x+1)\right) =^{(0\times\infty)} \lim_{y\to+\infty} \left(e^{-y+1}(-2y+1)\right) = \lim_{y\to+\infty} \left(e \times e^{-y}(-2y+1)\right) =$

$= \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{e\times(-2y+1)}{e^y}\right) = e \times \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{-2y+1}{e^y}\right) = e \times \frac{\lim_{y\to+\infty} \frac{-2y+1}{y}}{\lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y}} =$

$= e \times \frac{\lim_{y\to+\infty} \left(-2+\frac{1}{y}\right)}{\lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y}} = e \times \frac{-2+0}{+\infty} = 0$

Fez-se a mudança de variável

$y = -x \Leftrightarrow x = -y$

Se $x \to -\infty$, então, $y \to +\infty$

Aplicou-se o limite notável $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Logo, a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico da função f, quando $x \to -\infty$

7.3. $g(x) = e^{x+1}(2x+1)$, com $x \in \left]-\infty; 0\right[$

Calculemos a função primeira derivada de g

$g'(x) = \left(e^{x+1}(2x+1)\right)' = \left(e^{x+1}\right)' \times (2x+1) + e^{x+1} \times (2x+1)' =$

$= (x+1)' \times e^{x+1} \times (2x+1) + e^{x+1} \times 2 = e^{x+1}(2x+1) + 2e^{x+1} =$

$= e^{x+1}(2x+1+2) = e^{x+1}(2x+3)$

Determinemos os zeros de $g'(x)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x+1}(2x+3) = 0 \Leftrightarrow e^{x+1} = 0 \vee 2x+3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Equação impossível $\vee 2x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

Quadro de sinal de $g'(x)$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		0
e^{x+1}	$+$	$+$	$+$	$+$
$2x+3$	$-$	0	$+$	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	$n.d.$
$g(x)$	$\searrow$	$-\frac{2}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$	$n.d.$

$g\left(-\frac{3}{2}\right) = e^{-\frac{3}{2}+1}\left(2\times\left(-\frac{3}{2}\right)+1\right) = e^{-\frac{1}{2}} \times (-2) = -\frac{2}{\sqrt{e}}$

A função g é decrescente em $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[$ e é crescente em $\left]-\frac{3}{2}; 0\right[$

A função g atinge um mínimo absoluto $-\frac{2}{\sqrt{e}}$, para $x = -\frac{3}{2}$

8. .

8.1. Ora,

$164 = 41 \times 4$

Então,

$z_1 = -1 + 8i + i^{164} = -1 + 8i + i^{41\times 4} = -1 + 4i + \left(i^4\right)^{41} = -1 + 8i + 1 = 8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$

$z^3 - z_1 = 0 \Leftrightarrow z^3 = z_1 \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{z_1} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8e^{i\frac{\pi}{2}}} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8}e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k2\pi}{3}\right)}, k \in \{0; 1; 2\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k2\pi}{3}\right)}$, $k \in \{0; 1; 2\}$

Atribuindo valores a k, vem,

$k = 0 \mapsto w_0 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) =$

$= \sqrt{3} + i$

$k = 1 \mapsto w_1 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right] = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) =$

$= -\sqrt{3} + i$

$k = 2 \mapsto w_2 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)} = 2e^{i\left(\frac{9\pi}{6}\right)} = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = -2i$

Sejam, $A\left(\sqrt{3}; 1\right)$, $B\left(-\sqrt{3}; 1\right)$ e $C\,(0; -2)$, os afixos de w_0, w_1 e de w_2, respetivamente

Ora,

$\overline{AB} = |w_0 - w_1| = \left|\sqrt{3} + i - \left(-\sqrt{3} + i\right)\right| = \left|\sqrt{3} + i + \sqrt{3} - i\right| = \left|2\sqrt{3}\right| = 2\sqrt{3}$

Portanto, o perímetro do triângulo $[ABC]$ é igual a $6\sqrt{3}$ $u.c.$

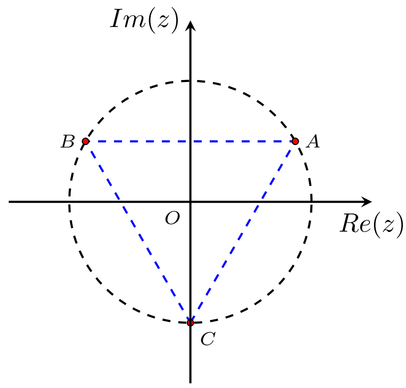


Figura 2

8.2. .

Calculemos $|z_2|^2$

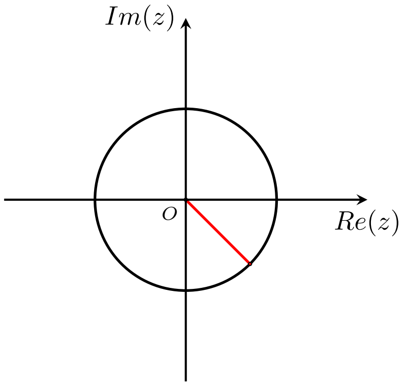
$z_2 = \frac{2 + 2i}{2i} = \frac{1 + i}{i} = \frac{(1 + i) \times (-i)}{i \times (-i)} = \frac{-i - i^2}{-i^2} = \frac{1 - i}{1} = 1 - i$

$|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

Logo, $|z_2|^2 = 2$

A condição $|z| \leq |z_2|^2 \Leftrightarrow |z| \leq 2$, representa, no plano complexo, o círculo centrado na origem e de raio 2

Representemos o conjunto A



O comprimento da linha é 2

Resposta: (A)

9. .

9.1. Ora, $g(x) = \sin(2x)\cos(2x) = \dfrac{1}{2}\sin(4x)$, se $x \leq 0$

Assim,

$$g'(x) = \left(\frac{1}{2}\sin(4x)\right)' = \frac{1}{2} \times (4x)'\cos(4x) = \frac{1}{2} \times 4\cos(4x) = 2\cos(4x)$$

O declive da reta tangente t é

$$m = g'\left(-\frac{\pi}{16}\right) = 2\cos\left(-\frac{4\pi}{16}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Logo, $t : y = \sqrt{2}x + b, b \in \mathbb{R}$

Quanto ao ponto de tangência $T\left(-\dfrac{\pi}{16}; g\left(-\dfrac{\pi}{16}\right)\right)$

$$g\left(-\frac{\pi}{16}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{4\pi}{16}\right) = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Assim, $T\left(-\dfrac{\pi}{16}; -\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$

Substituindo estas coordenadas na equação da reta, vem,

$$-\frac{\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2} \times \left(-\frac{\pi}{16}\right) + b \Leftrightarrow b = -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}\pi}{16} \Leftrightarrow b = \frac{-4\sqrt{2} + \sqrt{2}\pi}{16} \Leftrightarrow b = \frac{(\pi - 4)\sqrt{2}}{16}$$

Resumindo, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de g, no ponto de abcissa $-\dfrac{\pi}{16}$, é $y = \sqrt{2}x + \dfrac{(\pi - 4)\sqrt{2}}{16}$

9.2. $$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(4x)}{1 - e^{2x}} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} -\frac{\lim\limits_{4x \to 0^+} \dfrac{\sin(4x)}{4x} \times 4}{\lim\limits_{2x \to 0^+} \dfrac{e^{2x} - 1}{2x} \times 2} = -\frac{1 \times 4}{1 \times 2} = -2$$

Aplicaram-se os limites notáveis

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \text{ e } \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

10. .

10.1. Como a circunferência tem raio 1, então

$A(\cos(x);\sin(x))$, com $\cos(x) < 0$ e $\sin(x) > 0$

Seja G, a projeção ortogonal do ponto A sobre o eixo Ox, logo, $G(\cos(x);0)$

Logo,

$\overline{OG} = |\cos(x)| = -\cos(x)$

$\overline{AD} = 2|\sin(x)| = 2\sin(x)$

Assim,

$$A_{[ADO]} = \frac{\overline{AD} \times \overline{OG}}{2} = \frac{2\sin(x) \times (-\cos(x))}{2} = -\frac{1}{2}\sin(2x)$$

Portanto, a área da região colorida é dada, em função de x, por,

$$A(x) = 2 \times A_{[ADO]} = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\sin(2x)\right) = -\sin(2x), \text{ com } x \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$$

Resposta: (C)

10.2. Teremos de resolver a equação $A(x) = 1$, com $x \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$

Assim,

$$A(x) = 1 \Leftrightarrow -\sin(2x) = 1 \Leftrightarrow \sin(2x) = -1 \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Atribuindo valores a k, vem,

$$k = 0 \mapsto x = \frac{3\pi}{4} \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$$

$$k = 1 \mapsto x = \frac{3\pi}{4} + \pi = \frac{7\pi}{4} \notin \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$$

$$k = -1 \mapsto x = \frac{3\pi}{4} - \pi = -\frac{\pi}{4} \notin \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$$

Logo, $x = \frac{3\pi}{4}$

11. .

Ora, $A\,(\ln(2);e)$ $B\,(\ln(6);e)$ e $C(x;f(x))$

$y_1 = \sin(-2x) + \dfrac{e}{2}$

$y_2 = e$

$\overline{AB} = |\ln(6) - \ln(2)| = |\ln(3)| = \ln(3)$

$$\overline{AC} = \sqrt{(x-\ln(2))^2 + \left(\sin(-2x) + \frac{e}{2} - e\right)^2}$$

$$= \sqrt{(x-\ln(2))^2 + \left(\sin(-2x) - \frac{e}{2}\right)^2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(x-\ln(6))^2 + \left(\sin(-2x) + \frac{e}{2} - e\right)^2}$$

$$= \sqrt{(x-\ln(6))^2 + \left(\sin(-2x) - \frac{e}{2}\right)^2}$$

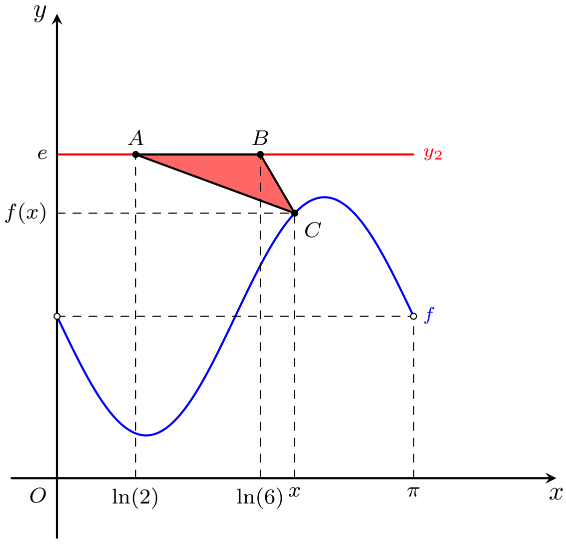


Figura 3

Pretende-se descobrir x, tal que

$P_{[ABC]} = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}$ é mínimo

Ou seja, que

$P_{[ABC]} = \ln(3) + \sqrt{(x-\ln(2))^2 + \left(\sin(-2x) - \frac{e}{2}\right)^2} + \sqrt{(x-\ln(6))^2 + \left(\sin(-2x) - \frac{e}{2}\right)^2}$ seja mínimo

Inserir a função

$$y_1 = \ln(3) + \sqrt{(x-\ln(2))^2 + \left(\sin(-2x) - \frac{e}{2}\right)^2} + \sqrt{(x-\ln(6))^2 + \left(\sin(-2x) - \frac{e}{2}\right)^2}$$

Ajustar a janela de visualização

$[0;\pi] \times [0;4]$

Desenhar gáfico

Procurar a abcissa do ponto onde a função atinge o mínimo

Resposta: $x_1 \approx 2.06$ rad

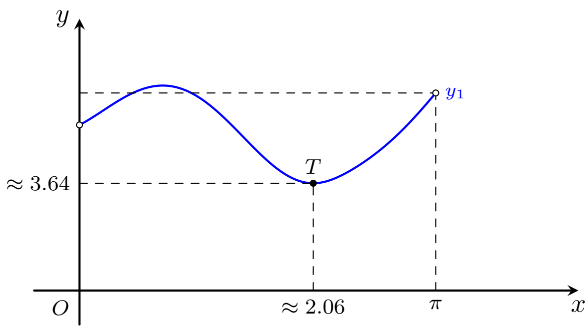


Figura 4