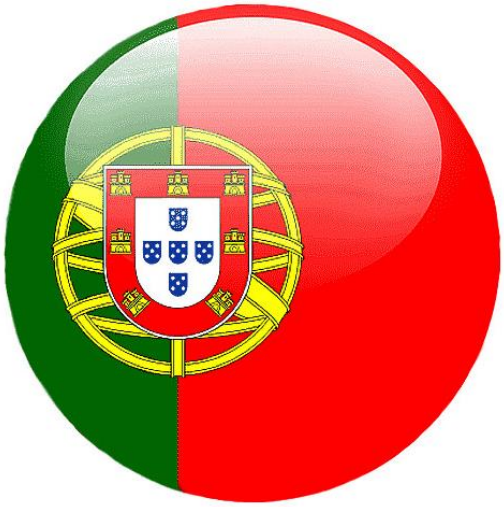
PAU PORTUGAL

Matematica A (635) 1997-2020



Gerard Romo Garrido

Toomates Coolección vol. 32

Toomates Coolección

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "**licencias digitales**" con las que las editoriales pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo libro, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.

Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de licencias digitales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía**.

El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las editoriales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de unos libros de texto que actualmente son muy mediocres, y no mediante retorcidas técnicas comerciales.

Estos libros se comparten bajo una licencia "**Creative Commons 4.0 (Atribution Non Commercial)**": Se permite, se promueve y se fomenta cualquier uso, reproducción y edición de todos estos materiales siempre que sea sin ánimo de lucro y se cite su procedencia. Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas. **¡Libérate de la tiranía y mediocridad de las editoriales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos**

Problem Solving (en español):

Geometría Axiomática Problemas de Geometría 1 Problemas de Geometría 2
Introducción a la Geometría Álgebra Teoría de números Combinatoria Probabilidad
Trigonometría Desigualdades Números complejos Calculus & Precalculus

Libros de texto (en catalán):

Nombres (Preàlgebra) Àlgebra Proporcionalitat Mesures geomètriques
Geometria analítica Combinatòria i Probabilitat Estadística Trigonometria Funcions
Nombres Complexos Àlgebra Lineal Geometria Lineal Càlcul Infinitesimal
Programació Lineal Mates amb Excel

PAU españolas:

Cataluña TEC Cataluña CCSS Valencia Galicia País Vasco Baleares

PAU internacionales:

Portugal Italia Francia Rumanía Hungría Pearson Edexcel International A Level
Pearson Edexcel IGCSE Cambridge International A Level Cambridge IGCSE
AQA GCSE International Baccalaureate (IB)

Evaluación diagnóstica y pruebas de acceso:

ACM6EP ACM4 CFGS PAP

Competiciones matemáticas:

Canguro: España Cataluña Francia USA Reino Unido Austria
USA: Mathcounts AMC 8 10 12 AIME USAJMO USAMO TSTST TST ELMO Putnam
España: OME OMEFL OMEC OMEA OMEM CDP
Europa: OMI Arquimede HMMT BMO Balkan MO JBMO
Internacional: IMO IGO SMT INMO CMO HMMT EGMO
AHSME: Book 1 Book 2 Book 3 Book 4 Book 5 Book 6 Book 7 Book 8 Book 9

Otros materiales:

Pizzazz!: Book A Book B Book C Book D Book E Pre-Algebra Algebra , REOIM

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales para facilitar su edición.

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a **toomates@gmail.com**
¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.

Consulta el **catálogo de libros** completo en **http://www.toomates.net**

Descarga toda la biblioteca Toomates en un solo archivo **Aquí** MEGA
Visita mi **Canal de Youtube**: **https://www.youtube.com/c/GerardRomo**
Visita mi **blog: https://toomatesbloc.blogspot.com/**

Versión de este documento: **13/01/2025**

Este documento forma parte del siguiente bloque:

Prueba Final 3.º Ciclo do Ensino Básico + Información general

http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal.pdf

A (635) 1997-2020:

http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal635.pdf

A (635) 2021-2024:

http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal635b.pdf

B (735) 2006-2020:

http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal735.pdf

B (735) 2021-2024:

http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal735b.pdf

MACS (835) 2021-2024:

http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal835.pdf

Otros compendiums de pruebas PAU internacionales:

Portugal: http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal.pdf
Italia: http://www.toomates.net/biblioteca/Italia.pdf
Francia: http://www.toomates.net/biblioteca/Francia.pdf
Rumanía: http://www.toomates.net/biblioteca/Rumania.pdf
Hungría: http://www.toomates.net/biblioteca/Hungria.pdf
International Baccalaureate (IB): http://www.toomates.net/biblioteca/IB.pdf
Pearson Edexcel International A Level:
http://www.toomates.net/biblioteca/Edexcel.pdf
Pearson Edexcel IGCSE: http://www.toomates.net/biblioteca/EdexcelIGCSE.pdf
Cambridge International A Level: http://www.toomates.net/biblioteca/Cambridge.pdf
Cambridge IGCSE: http://www.toomates.net/biblioteca/CambridgeIGCSE.pdf
AQA GCSE: http://www.toomates.net/biblioteca/AQAGCSE.pdf

Compendiums de pruebas PAU españolas:

Cataluña (TEC): http://www.toomates.net/biblioteca/Pautec.pdf
Cataluña (CCSS): http://www.toomates.net/biblioteca/Pauccss.pdf
Valencia: http://www.toomates.net/biblioteca/Valencia.pdf
Galicia: http://www.toomates.net/biblioteca/Galiciapau.pdf
País Vasco: http://www.toomates.net/biblioteca/Paisvascopau.pdf
Baleares: http://www.toomates.net/biblioteca/Balears.pdf

Índice.

Información general.

Año	Página	
1997	5	
1998	46	
1999	101	
2000	182	
2001	400	
2002	585	
2003	694	
2004	848	
2005	955	
2006	1064	
2007	1143	
2008	1200	
2009	1277	
2010	1369	
2011	1450	
2012	1665	
2013	1757	
2014	1873	
2015	1989	
2016	2103	
2017	2215	
2018	2312	
2019	2419	
	2501	Enunciados y soluciones en castellano
2020	2513	

Fuente principal.

https://mat.absolutamente.net/joomla/index.php/recursos/exames-e-testes-intermedios/matematica-a#1997

1997

PROVA N.º 135 / 6 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei nº 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos de Carácter Geral e Cursos Tecnológicos
Cursos das Escolas Secundárias Soares dos Reis e António Arroio

Duração da Prova: 90 min + 30 min de tolerância **1ª CHAMADA**
1997

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

–

I

Para cada uma das nove questões deste grupo, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e **escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde**. Não apresente cálculos. Atenção! Se apresentar mais do que uma resposta a questão será anulada, o mesmo acontecendo em caso de resposta ambígua. Cotação: cada resposta certa, + 9 pontos; cada resposta errada, - 3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.

1. Uma função real de variável real f é tal que $f(0) = 1$.
Indique qual das seguintes expressões pode definir a função f :

(A) $\frac{x+2}{x-1}$ **(B)** $\frac{ln\, x}{x+1}$

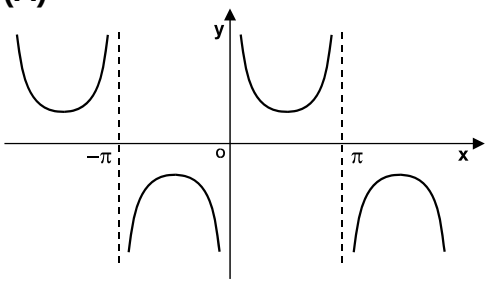
(C) $tg\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ **(D)** $2^{sen\, x}$

2. Seja g a função definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = x^5 - x + 1$.
O Teorema de Bolzano permite-nos afirmar que a equação $g(x) = 8$ tem pelo menos uma solução no intervalo

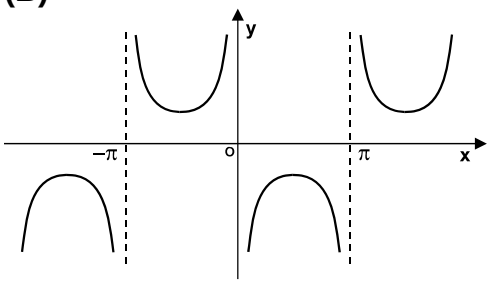
(A) $]-1, 0[$ **(B)** $]0, 1[$ **(C)** $]1, 2[$ **(D)** $]2, 3[$

3. Indique qual das seguintes figuras pode ser parte da representação gráfica da função definida por $s(x) = \frac{1}{sen\, x}$

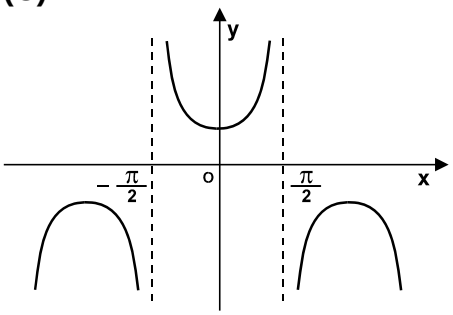
(A)



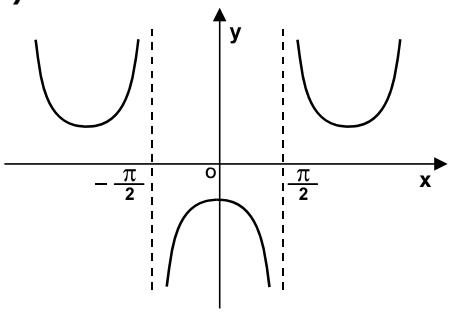
(B)



(C)



(D)

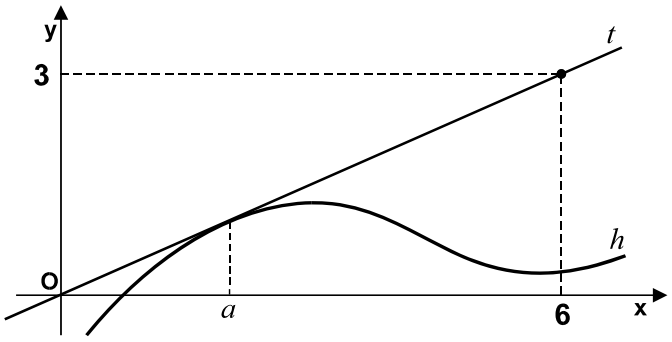


4.

Na figura junta está a representação gráfica de uma função h e de uma recta t, tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa a.

A recta t passa pela origem do referencial e pelo ponto de coordenadas (6, 3).

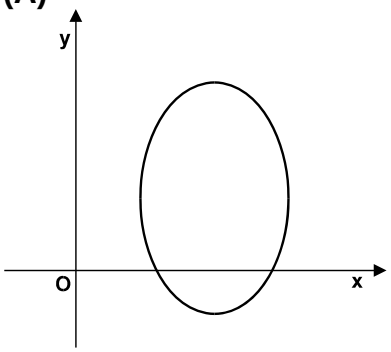
O valor de $h'(a)$ é:



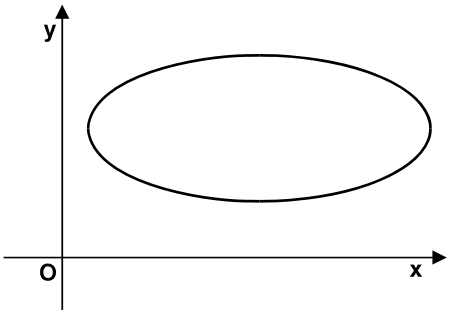
(A) $-\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{6}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

5. Indique qual das figuras seguintes pode representar o lugar geométrico dos pontos equidistantes da recta de equação $x = 1$ e do ponto de coordenadas $(5, 3)$.

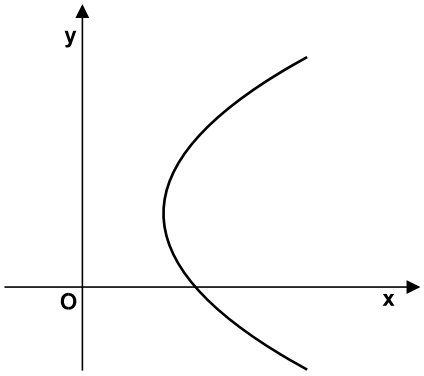
(A)



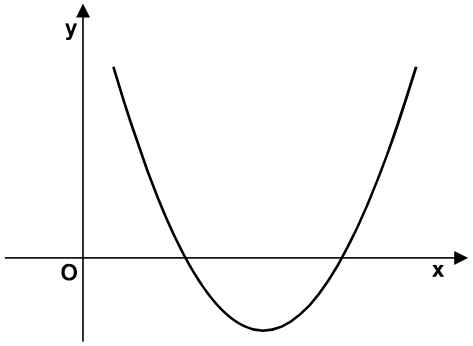
(B)



(C)



(D)



6. Num referencial o. n. $Oxyz$, o ponto de intersecção da recta $r : \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3}$ com o plano xOz tem coordenadas

(A) $(-1, 2, 0)$ **(B)** $(1, 0, 2)$ **(C)** $(1, 0, 6)$ **(D)** $(3, 0, 6)$

7. Num referencial o. n. $Oxyz$, os planos α e β são definidos pelas equações:

$$\alpha : x - y + z + \frac{1}{2} = 0 \quad \text{e} \quad \beta : 2x + 2y + 2z + 1 = 0$$

Os planos α e β são:

(A) Coincidentes
(B) Estritamente paralelos
(C) Concorrentes não perpendiculares
(D) Perpendiculares

8. Considere todos os números pares com cinco algarismos. Quantos destes números têm quatro algarismos ímpares?

(A) $5 \times {}^{5}C_{4}$ **(B)** 5^5 **(C)** $5!$ **(D)** $5 \times {}^{5}A_{4}$

9. Lançam-se simultaneamente dois dados equilibrados com as faces numeradas de 1 a 6 e multiplicam-se os dois números saídos.
A probabilidade do acontecimento "***o produto dos números saídos é 21***" é:

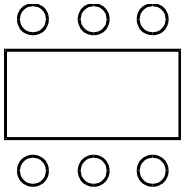
(A) 0 **(B)** $\frac{1}{36}$ **(C)** $\frac{1}{18}$ **(D)** $\frac{21}{36}$

Nas questões dos grupos II e III, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações que entender necessárias.

II

1.

Seis amigos entram numa pastelaria para tomar café e sentam-se ao acaso numa mesa rectangular com três lugares de cada lado, como esquematizado na figura junta.
Determine a probabilidade de dois desses amigos, a Joana e o Rui, ficarem sentados em frente um do outro.



2. Na pastelaria acima referida a temperatura ambiente é constante.
A temperatura, em graus centígrados, de um café servido nessa pastelaria, t **minutos** após ter sido colocado na chávena, é dada por

$$f(t) = 20 + 50\,e^{-0{,}04\,t} \quad (t \geq 0)$$

a) Determine a temperatura do café no instante em que é colocado na chávena.

b) Estude a função f quanto à existência de assimptotas, à monotonia e ao sentido das concavidades. Esboce o gráfico de f.

c) Com o decorrer do tempo, a temperatura do café tende a igualar a temperatura ambiente. Indique, justificando, a temperatura ambiente.

d) Justifique a seguinte afirmação: ***a taxa de variação média da função f, em qualquer intervalo do seu domínio, é negativa***.

e) Quanto tempo decorre entre o instante em que o café é colocado na chávena e o instante em que a sua temperatura atinge 65 graus centígrados? Apresente o resultado em minutos e segundos.
(Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve no mínimo três casas decimais.)

III

Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, um cilindro de revolução como o representado na figura junta.

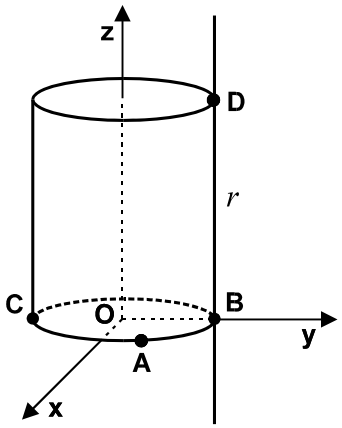
A base inferior do cilindro tem centro na origem O do referencial e está contida no plano xOy.

$[BC]$ é um diâmetro da base inferior, contido no eixo Oy. O ponto C tem coordenadas $(0,\ -5,\ 0)$.

O ponto A pertence à circunferência que limita a base inferior do cilindro e tem coordenadas $(4,\ 3,\ 0)$.

A recta r passa no ponto B e é paralela ao eixo Oz.

O ponto D pertence à recta r e à circunferência que limita a base superior do cilindro.



a) Justifique que a recta AC é perpendicular à recta AB.

b) Escreva uma equação vectorial da recta r.

c) Justifique que $\overrightarrow{AC}$ é um vector perpendicular ao plano ABD.
Determine uma equação deste plano.

d) Designando por α a amplitude do ângulo BOD, mostre que o volume do cilindro é dado por $V(\alpha) = 125\,\pi\,tg\,\alpha$, com $\alpha \in [0,\ \frac{\pi}{2}[$.
Determine $\lim\limits_{\alpha \to \frac{\pi}{2}^-} V(\alpha)$ e interprete o resultado obtido.

Volume do Cilindro = Área da Base $\times$ Altura

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I.....81

Cada questão certa ..... +9
Cada questão errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

GRUPO II 73

1 20

2 53
a) 5
b).....20
c).....7
d).....7
e).....14

GRUPO III 46

a) 6
b).....8
c).....14
d).....18

TOTAL 200

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.° Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.° 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos de Carácter Geral e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 90 min + 30 min de tolerância — **1.ª FASE**
1997 — **1.ª CHAMADA**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I ..... **81 pontos**

Para cada questão:
- Resposta certa ..... +9
- Resposta errada ..... -3
- Questão não respondida ou anulada 0

Um total inferior a zero neste grupo vale 0 pontos.

Grupo II ..... **73 pontos**
- 1 ..... **20**
- 2 ..... **53**
  - a) **5**
  - b) **20**
  - c) **7**
  - d) **7**
  - e) **14**

Grupo III ..... **46 pontos**
- a) **6**
- b) **8**
- c) **14**
- d) **18**

Total ..... **200 pontos**

CRITÉRIOS DE CORRECÇÃO

Critérios Gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro.

O professor deverá valorizar o raciocínio e a criatividade do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor, que corrigir a prova, adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo, sempre que qualquer outra prova apresente uma resolução do mesmo tipo.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na sua resolução, devem receber a cotação indicada.

Erros ocasionais de contas, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de 10% da cotação atribuída.

Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
D	C	A	D	C	D	C	B	A

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir neste grupo em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas / Resp. certas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3	0	0		
3	27	24	21	18	15	12	9			
4	36	33	30	27	24	21				
5	45	42	39	36	33					
6	54	51	48	45						
7	63	60	57							
8	72	69								
9	81									

Grupo II

1. ..... **20**

A probabilidade pedida pode ser obtida por pelo menos quatro processos, os quais diferem uns dos outros segundo o modelo adoptado para formar o espaço de acontecimentos. Uma vez adoptado o modelo, a técnica de contagem dos casos possíveis e dos casos favoráveis tem obrigatoriamente que ser coerente.

1º Processo

O espaço de acontecimentos é o conjunto de maneiras de os seis amigos ocuparem seis lugares.

Número de casos possíveis = $6!$
Número de casos favoráveis = $2 \times 3 \times 4!$

2º Processo

O espaço de acontecimentos é o conjunto de maneiras de a Joana e o Rui ocuparem dois de seis lugares.

Número de casos possíveis = A_2^6
Número de casos favoráveis = 2×3

3º Processo

O espaço de acontecimentos é o conjunto de maneiras de escolher dois de seis lugares para serem ocupados pela Joana e pelo Rui.

Número de casos possíveis = C_2^6
Número de casos favoráveis = 3

4º Processo

Supondo que, por exemplo, a Joana já está sentada, existem cinco lugares disponíveis para o Rui se sentar.
O espaço de acontecimentos é o conjunto de maneiras de o Rui escolher um lugar entre cinco.

Número de casos possíveis = 5
Número de casos favoráveis = 1

Indica-se seguidamente como devem ser distribuídos os 20 pontos:

Número de casos possíveis 8
Número de casos favoráveis 8
Resultado 4

Nota: Como se disse acima, a contagem dos casos favoráveis deve ser coerente com a contagem dos casos possíveis. No caso do número de casos possíveis estar correcto de acordo com algum modelo e o número de casos favoráveis estar correcto de acordo com outro modelo, a cotação a atribuir ao conjunto dos dois itens deverá ser 8 pontos.

2.

a) **5**

Substituição da variável t por 0 ..... **2**
Cálculo do valor pedido **3**

b) **20**

Justificação de que não existem assimptotas verticais **2**

Assimptota horizontal **2**

Monotonia:
Cálculo da 1ª derivada **1**
Sinal da 1ª derivada **2**
Conclusão **2**

Concavidades:
Cálculo da 2ª derivada **1**
Sinal da 2ª derivada **2**
Conclusão **2**

Esboço do gráfico **6**

c) **7**

Apresentação do valor pedido **3**
Justificação **4**

Na justificação pode ser utilizada a alínea anterior ou pode ser calculado $\lim_{t \to +\infty} f(t)$.

d) **7**

São de admitir várias justificações, tais como:

- "A afirmação é verdadeira, visto que, em qualquer intervalo de extremos a e b, $(a < b)$, contido no domínio de f, $f(b)-f(a) < 0$, e portanto a t.v.m. $(f(b)-f(a)) / (b-a)$ é negativa."
- "A afirmação é verdadeira, visto que a função f é estritamente decrescente no seu domínio."

e) **14**

Escrita da equação f(t)=65 ..... **2**

Resolução da equação:

Obtenção de $e^{-0,04t} = 0,9$ **2**
Obtenção de $-0,04\ t = \ln(0,9)$ **4**
Obtenção de t **3**

Resultado em minutos e segundos **3**

Grupo III

a) **6**

A justificação de que AC ⊥ AB pode ser feita por, pelo menos, dois processos:

1º Processo:

O ângulo CAB é recto por estar inscrito numa semicircunferência..... **6**

2º Processo:

Coordenadas do ponto B..... **1**
Coordenadas do vector $\overrightarrow{AB}$ **1**
Coordenadas do vector $\overrightarrow{AC}$ **1**
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ **2**
Conclusão **1**

b) **8**

Vector director da recta r **4**
Equação vectorial **4**

c) **14**

Justificação de que $\overrightarrow{AC} \perp ABD$ **8**
Equação do plano **6**

d) **18**

Área da base do cilindro $=25\pi$ **2**
Altura do cilindro = $5\ tg\ \alpha$ **6**
$V(\alpha)=125\ \pi\ tg\ \alpha$ **2**
Determinação do limite pedido **3**
Interpretação do resultado obtido **5**

PROVA N.º 135 / 6 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei nº 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos de Carácter Geral e Cursos Tecnológicos
Cursos das Escolas Secundárias Soares dos Reis e António Arroio

Duração da Prova: 90 min + 30 min de tolerância **2ª CHAMADA**

1997

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

I

Para cada uma das nove questões deste grupo, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e **escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde**. Não apresente cálculos. Atenção! Se apresentar mais do que uma resposta a questão será anulada, o mesmo acontecendo em caso de resposta ambígua. Cotação: cada resposta certa, + 9 pontos; cada resposta errada, - 3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.

1. Uma função real de variável real f é tal que $f(x) = f'(x)$, para qualquer número real x.

Indique qual das seguintes expressões pode definir a função f:

(A) $3x^2$ **(B)** $sen\ x$ **(C)** e^{5x} **(D)** $2e^x$

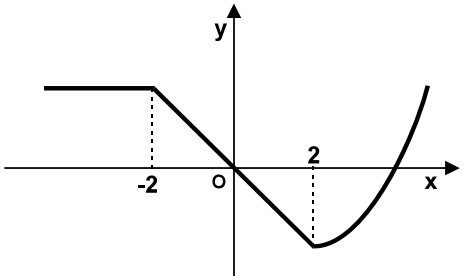
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x^5 e^{-x})$ é

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** 2 **(D)** $+\infty$

3. Indique qual dos seguintes conjuntos de pontos, em referencial o.n. xOy, é sempre o gráfico de uma função real de variável real $f : x \to y$

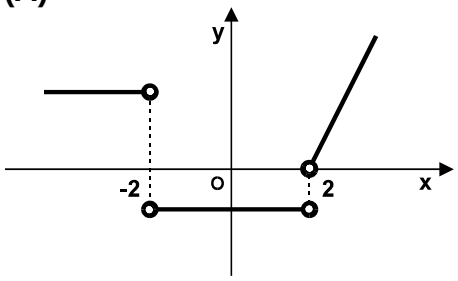
(A) Uma recta vertical **(B)** Uma recta horizontal
(C) Uma parábola **(D)** Uma elipse

4. Se a representação gráfica de uma função g é

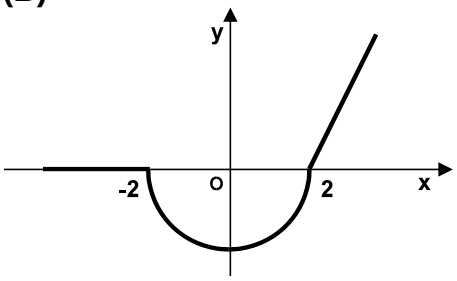


então a representação gráfica de g' pode ser

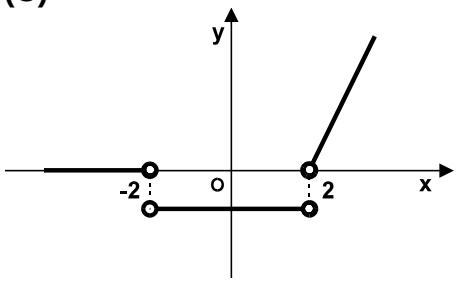
(A)



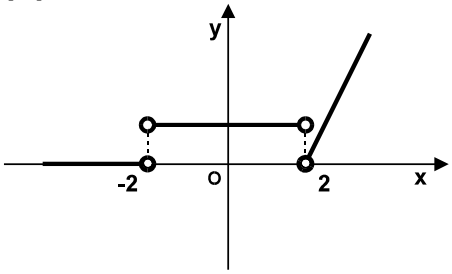
(B)



(C)



(D)



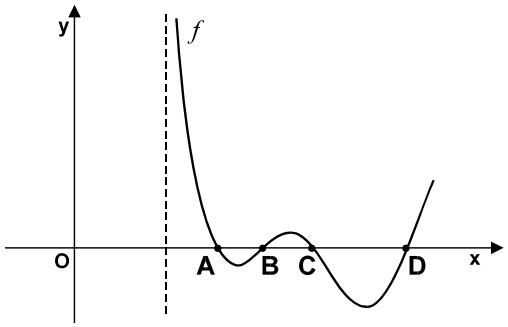
5.

Na figura ao lado está parte da representação gráfica da função f definida por

$$f(x) = cos(\pi\, x) \,.\, ln(x-1)$$

Os pontos A, B, C e D são pontos de intersecção do gráfico da função f com o eixo das abcissas.

A abcissa do ponto A é:



(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** 1 **(C)** $\frac{3}{2}$ **(D)** 2

6. Considere a elipse de focos $(-3, 0)$ e $(3, 0)$ e a que pertence o ponto $(0, 4)$.
Um outro ponto que pertence à elipse é:

(A) $(5, 0)$ **(B)** $(3, 4)$ **(C)** $(4, 0)$ **(D)** $(0, -5)$

7. Num referencial o. n. $Oxyz$, as rectas AB e r são paralelas.

O vector $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(-2, m, 3)$.

A recta r é definida pela condição $\frac{x-1}{2} = y = -\frac{z}{3}$

O valor de m é:

(A) $-\frac{1}{3}$ **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** 1

8. Foram oferecidos dez bilhetes para uma peça de teatro a uma turma com doze rapazes e oito raparigas.
Ficou decidido que o grupo que vai ao teatro é formado por cinco rapazes e cinco raparigas.
De quantas maneiras diferentes se pode formar este grupo?

(A) ${}^{12}C_5 \times {}^{8}C_5$ **(B)** ${}^{12}A_5 \times {}^{8}A_5$

(C) $12 \times 8 \times 5^2$ **(D)** $\frac{12! \times 8!}{5!}$

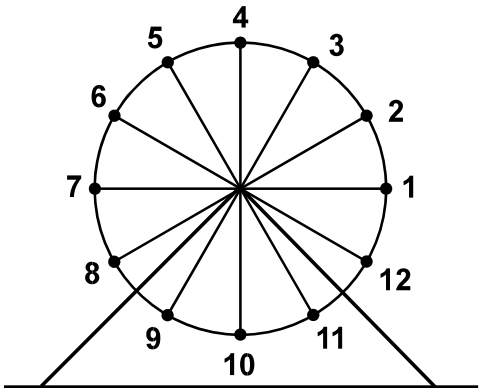
9. Uma empresa de cofres atribui ao acaso um código secreto a cada cofre que comercializa.
Cada código secreto é formado por quatro algarismos, por uma certa ordem.
Escolhendo-se um cofre ao acaso, qual é a probabilidade de o código ter exactamente três zeros?

(A) $0,0004$ **(B)** $0,0027$ **(C)** $0,0036$ **(D)** $0,004$

Nas questões dos grupos II e III, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações que entender necessárias.

II

1. Uma roda gigante de um parque de diversões tem doze cadeiras, numeradas de 1 a 12, com um lugar cada uma (ver figura abaixo). Seis raparigas e seis rapazes, vão andar na roda gigante e sorteiam entre si os lugares que vão ocupar.
Qual é a probabilidade de rapazes e raparigas ficarem sentados alternadamente, isto é, cada rapaz entre duas raparigas e cada rapariga entre dois rapazes? Apresente o resultado na forma de percentagem.



2. Depois de toda a gente estar sentada nas respectivas cadeiras, a roda gigante começa a girar. Um dos rapazes, o Manuel, ficou sentado na cadeira número 1. No instante em que a roda gigante começa a girar, a cadeira 1 está na posição indicada na figura acima.
A distância, em metros, da cadeira 1 ao solo, t segundos após a roda gigante ter começado a girar, é dada por

$$d(t) = 7 + 5\,sen\left(\frac{\pi\, t}{30}\right)$$

a) Determine a distância a que a cadeira número 1 se encontra do solo no instante em que a roda gigante começa a girar.

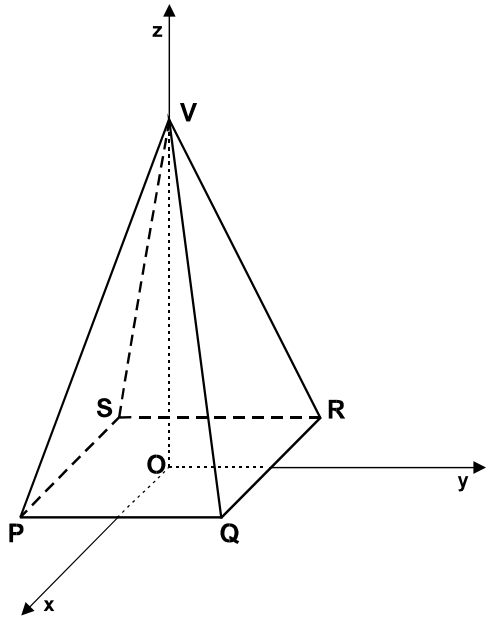
b) Esboce o gráfico da função d, para $t \in [0,\ 90]$. Assinale as coordenadas dos pontos correspondentes aos extremos da função.
Da análise do gráfico, indique quanto tempo demora o Manuel a dar uma volta completa.

c) Resolva a equação $d(t) = 9,5$ para $t \in [0,\ 90]$.
A partir do conjunto solução obtido, indique quanto tempo demora o Manuel a encontrar-se pela primeira vez a uma distância de 9,5 metros do solo, depois da roda gigante ter começado a girar.

d) Indique, justificando, qual é o raio da roda gigante.

III

Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide regular de base quadrada (ver figura abaixo).
O vértice V da pirâmide pertence ao semi-eixo positivo Oz.
A base da pirâmide está contida no plano xOy.
A aresta $[PQ]$ é paralela ao eixo Oy. O ponto Q tem coordenadas $(2,\ 2,\ 0)$.



a) Sabendo que, na unidade considerada, o volume da pirâmide é igual a 32, determine a cota do vértice V.

Volume da Pirâmide = $\frac{1}{3}$ × *Área da Base* × *Altura*

b) Mostre que o plano QRV pode ser definido pela equação $3y + z = 6$.
Se não resolveu a alínea anterior, considere que o ponto V tem cota 6.

c) Determine uma condição que defina a recta que passa na origem do referencial e é perpendicular ao plano QRV.

d) Justifique que a intersecção da aresta $[QV]$ com o plano de equação $z = 3$ é o ponto $M\,(1,\ 1,\ 3)$ e determine a área da secção produzida na pirâmide por esse plano.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I.....81

Cada questão certa ..... +9
Cada questão errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

GRUPO II 67

1 20

2 47
a) 5
b).....18
c).....16
d).....8

GRUPO III 52

a) 10
b).....12
c).....10
d).....20

TOTAL 200

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos de Carácter Geral e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 90 min + 30 min de tolerância
1997

1.ª FASE
2.ª CHAMADA

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I ..... **81 pontos**

Para cada questão:
Resposta certa ..... +9
Resposta errada ..... -3
Questão não respondida ou anulada 0

Um total inferior a zero neste grupo vale 0 pontos.

Grupo II ..... **67 pontos**
1 ..... **20**
2 ..... **47**
a) **5**
b) **18**
c) **16**
d) **8**

Grupo III ..... **52 pontos**

a) **10**
b) **12**
c) **10**
d) **20**

Total ..... **200 pontos**

CRITÉRIOS DE CORRECÇÃO

CRITÉRIOS GERAIS

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro.

O professor deverá valorizar o raciocínio e a criatividade do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor, que corrigir a prova, adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo, sempre que qualquer outra prova apresente uma resolução do mesmo tipo.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na sua resolução, devem receber a cotação indicada.

Erros ocasionais de contas, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de 10% da cotação atribuída.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS

Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua e todas as questões em que o aluno dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
D	B	B	C	C	A	B	A	C

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir neste grupo em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas / Resp. certas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3	0	0		
3	27	24	21	18	15	12	9			
4	36	33	30	27	24	21				
5	45	42	39	36	33					
6	54	51	48	45						
7	63	60	57							
8	72	69								
9	81									

Grupo II

1. ..... **20**

A probabilidade pedida pode ser obtida por pelo menos três processos, os quais diferem uns dos outros segundo o modelo adoptado para formar o espaço de acontecimentos. Uma vez adoptado o modelo, a técnica de contagem dos casos possíveis e dos casos favoráveis tem obrigatoriamente que ser coerente.

1º Processo

O espaço de acontecimentos é o conjunto de maneiras de os doze amigos ocuparem as doze cadeiras.

Número de casos possíveis = $12!$
Número de casos favoráveis = $2 \times 6! \times 6!$

2º Processo

O espaço de acontecimentos é o conjunto de maneiras de seis amigos do mesmo sexo ocuparem seis de doze cadeiras.

Número de casos possíveis = A_6^{12}
Número de casos favoráveis = $2 \times 6!$

3º Processo

O espaço de acontecimentos é o conjunto de maneiras de escolher seis de doze cadeiras para serem ocupadas por seis amigos do mesmo sexo.

Número de casos possíveis = C_6^{12}
Número de casos favoráveis = 2

Indica-se seguidamente como devem ser distribuídos os 20 pontos:

Número de casos possíveis **8**
Número de casos favoráveis **8**
Resultado **4**

Nota: Como se disse acima, a contagem dos casos favoráveis deve ser coerente com a contagem dos casos possíveis. No caso do número de casos possíveis estar correcto, de acordo com algum modelo, e o número de casos favoráveis estar correcto, de acordo com outro modelo, a cotação a atribuir ao conjunto dos dois itens deverá ser 8 pontos.

2.

a) **5**

Substituição da variável t por 0 ..... **2**
Cálculo do valor pedido **3**

b) **18**

Esboço do gráfico (Ver Nota) **10**
Coordenadas dos pontos correspondentes aos extremos **3**
Indicação do tempo que o Manuel demora a dar uma volta completa **5**

Nota: A atribuição dos 10 pontos pressupõe o esboço da sinusóide com o domínio e o contradomínio correctos e a indicação dos valores da função nos extremos do intervalo.

c) **16**

Resolução da equação em IR (ver Nota) **6**
Soluções no intervalo (ver Nota) **6**
Tempo pedido **4**

Nota: É também concebível uma resolução da equação no intervalo dado com base no gráfico da função *d*.

d) **8**

Indicação do valor **3**
Justificação **5**

Grupo III

a) **10**

Área da base **3**
Escrita da equação **4**
Conclusão **3**

b) **12**

A demonstração pedida pode ser feita por, pelo menos, dois processos diferentes: o primeiro consta da verificação de que os pontos Q, R e V pertencem ao plano definido pela equação dada, pelo que esta, tendo em conta a unicidade do plano definido por três pontos não colineares, é uma equação do plano QRV; o segundo consta da determinação de uma equação do plano QRV, a qual deverá ser equivalente à equação dada.

Indica-se a seguir como devem ser distribuídos os 12 pontos em cada um dos processos:

1º Processo

Coordenadas do ponto R **3**
Verificação de que Q, R e V são pontos do plano definido pela equação do enunciado..... **6**
Justificação de que a equação do enunciado define o plano QRV **3**

2º Processo

Coordenadas do ponto R **3**
Escrita de uma equação do plano QRV **6**
Obtenção da equação do enunciado **3**

c) **10**

Vector perpendicular ao plano QRV **4**
Condição pedida **6**

d) **20**

Justificação pedida (Ver Nota) **10**
Área do quadrado **10**

Nota: Indica-se a seguir como devem ser distribuídos os 10 pontos, em três processos distintos de fazer esta justificação:

1º Processo:
- Condição que define a recta QV **5**
- Justificação de que M é o ponto de intersecção da recta QV com o plano definido por z=3 ..... **5**

2º Processo:
- Justificação de que os pontos V, M e Q são colineares e portanto M pertence à recta QV **4**
- Justificação de que M pertence ao plano definido por z=3 ..... **3**
- Justificação de que M é o ponto de intersecção da recta QV com o plano definido por z=3 ..... **3**

3º Processo:
- Justificação de que M é o ponto médio do segmento de recta $[QV]$ **6**
- Coordenadas de M **4**

PROVA N.º 135 / 5 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei nº 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos de Carácter Geral e Cursos Tecnológicos
Cursos das Escolas Secundárias Soares dos Reis e António Arroio

Duração da Prova: 90 min + 30 min de tolerância **2ª FASE**
1997

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

I

Para cada uma das nove questões deste grupo, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e **escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde**. Não apresente cálculos. Atenção! Se apresentar mais do que uma resposta a questão será anulada, o mesmo acontecendo em caso de resposta ambígua. Cotação: cada resposta certa, + 9 pontos; cada resposta errada, - 3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.

1. Indique quantos são os pontos comuns aos gráficos das funções f e g definidas por

$$f(x) = x^2 \quad \text{e} \quad g(x) = |x|$$

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3

2. Sendo f a função definida por $f(x) = x^e$, a expressão analítica de f' é

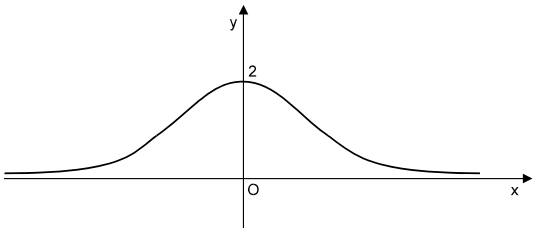
(A) x^e **(B)** x^{e-1} **(C)** $e\,x^{e-1}$ **(D)** $x^e\ ln\,x$

3. Um navio encontra-se atracado num porto.
A distância h, do casco do navio ao fundo do mar, varia com a maré.
Admita que h é dada, em função do tempo x, por $h(x) = 10 - 3\,cos\,(2x)$.

A distância do casco ao fundo do mar, no momento da maré-alta, é

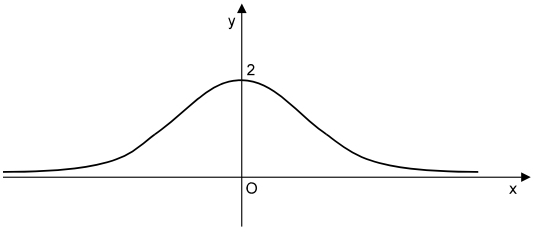
(A) 4 **(B)** 10 **(C)** 13 **(D)** 16

4. Na figura abaixo está uma representação gráfica de g', derivada de uma certa função g.

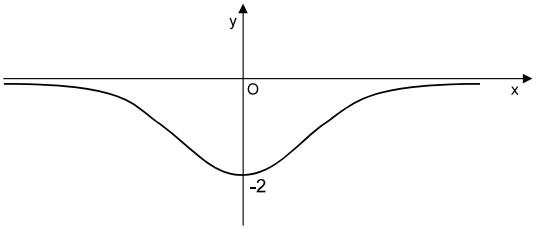


A função h é definida por $h(x) = g(x) + 1$. Nestas condições, uma representação gráfica de h', derivada de h, pode ser

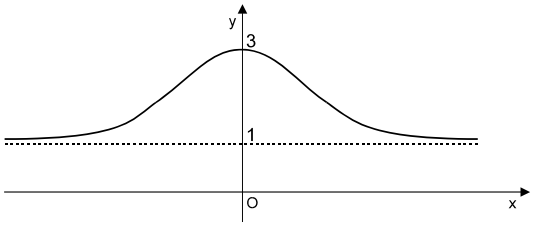
(A)



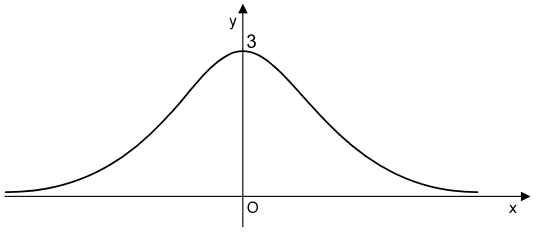
(B)



(C)



(D)



5. Indique qual dos pares de equações seguintes define, num referencial o. n. $Oxyz$, um par de planos perpendiculares.

(A) $x + y = 3$ e $x + y = 0$

(B) $-x + y - z = 1$ e $3x + 2y + 2z = 2$

(C) $x = y$ e $z = 0$

(D) $2x + 2y + z = 9$ e $x - 3z = 0$

6. Num referencial o. n. $Oxyz$, a intersecção das superfícies esféricas definidas pelas equações

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9$$ é

(A) Um ponto

(B) Uma superfície esférica

(C) Uma circunferência

(D) O conjunto vazio

7. Num referencial o. n. xOy, uma parábola tem vértice na origem, o seu eixo de simetria é o eixo Oy e um dos seus pontos é $P\,(-2,\,-4)$. Uma equação da parábola é

(A) $x^2 = -y$ **(B)** $y^2 = -8x$ **(C)** $x^2 = -8y$ **(D)** $x^2 - y^2 = 1$

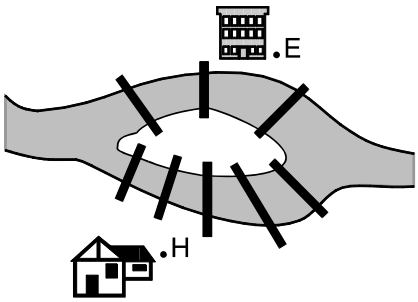
8. Abre-se, ao acaso, um livro, ficando à vista duas páginas numeradas.
A probabilidade de a soma dos números dessas duas páginas ser ímpar é

(A) 0 **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** 1

9.

Na figura ao lado estão representados:
o rio que atravessa certa localidade;
uma ilha situada no leito desse rio;
as oito pontes que ligam a ilha às margens.

H representa a habitação e E a escola de um jovem dessa localidade.



Para efectuar o percurso **de ida** (*casa-ilha-escola)* **e volta** (*escola-ilha-casa)*, um jovem pode seguir vários caminhos, que diferem uns dos outros pela sequência de pontes utilizadas.
Indique quantos caminhos diferentes pode o jovem seguir, num percurso **de ida e volta**, **sem passar duas vezes pela mesma ponte.**

(A) $5 \times 3 + 4 \times 2$ **(B)** $5 \times 4 \times 3 \times 2$ **(C)** $5 + 4 + 3 + 2$ **(D)** $5^2 \times 3^2$

II

A actividade R, de qualquer substância radioactiva, é dada, numa certa unidade de medida, pela expressão

$$R(t) = A \times e^{-B\,t}\,,$$

em que A e B são constantes reais positivas e t é o tempo em horas, com $t \geq 0$.

a) Estude a função R quanto à monotonia e quanto à existência de assimptotas.

b) Designando por R' a derivada de R, mostre que R e R' são directamente proporcionais.

c) Mostre que o tempo necessário para que a actividade R passe do seu valor inicial para metade é $\frac{ln\,2}{B}$.

d) Sabendo que o valor inicial da actividade de uma certa substância radioactiva é 28 unidades e que $R(1) = 26$, determine os valores de A e B para essa substância.

III

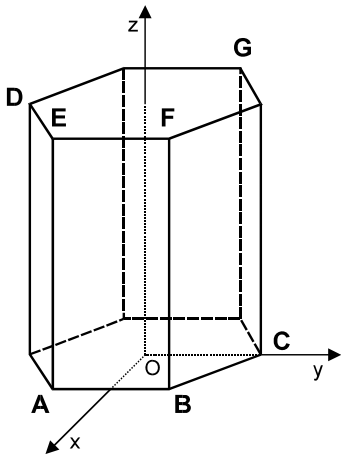
Uma embalagem de pastilhas tem a forma de um prisma hexagonal regular, como o representado na figura abaixo.

1. A embalagem contém doze pastilhas com igual aspecto exterior, sendo três de ananás, três de cereja, três de laranja e três de morango.
Esvaziando a embalagem após a compra e retirando quatro pastilhas ao acaso, qual a probabilidade de retirar uma de cada sabor?

2.

Considere o referido prisma representado num referencial o. n. $Oxyz$.
Sabe-se que:

- Os pontos A, B e C pertencem à base inferior do prisma, a qual está contida no plano xOy e tem por centro a origem do referencial.
- Os pontos D, E, F e G pertencem à base superior do prisma, a qual está contida no plano $z = 12$
- O ponto C tem coordenadas $(0, 4, 0)$.



a) Mostre que o ponto B tem coordenadas $(\sqrt{12}, 2, 0)$ e aproveite este resultado para justificar que o ponto G tem coordenadas $(-\sqrt{12}, 2, 12)$.

*(***Nota**: *o lado de um hexágono regular é igual ao raio da circunferência circunscrita ao hexágono)*

b) Mostre que a recta DG pode ser definida pela condição $\sqrt{3}\,x + y = -4 \wedge z = 12$.

c) Determine a intersecção da recta DG com o plano que contém a face $[ABFE]$ do prisma.

d) Considere agora que a unidade do referencial é um centímetro ($1\,cm$).
Sabendo que cada uma das doze pastilhas tem um volume de $30\ cm^3$, determine, com aproximação às unidades, a percentagem do volume da caixa que, no momento da compra, se encontra vazia.

(**Nota**: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, uma casa decimal.)

Área do hexágono $= \frac{3\sqrt{3}}{2}\, l^2$, *em que* l *representa o lado do hexágono*

Volume do prisma $=$ *Área da base* $\times$ *altura*

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I.....81

Cada questão certa ..... +9
Cada questão errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

GRUPO II 54

a) 20
b).....11
c).....11
d).....12

GRUPO III 65

1..... 20
2..... 45

a) 12
b).....10
c).....9
d).....14

TOTAL 200

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos de Carácter Geral e Cursos Tecnológicos
Cursos das Escolas Secundárias Soares dos Reis e António Arroio

Duração da prova: 90 min + 30 min de tolerância **2.ª FASE**
1997

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I ..... **81 pontos**

Para cada questão:

Resposta certa	9
Resposta errada	-3
Questão não respondida ou anulada	0

Um total inferior a zero neste grupo vale 0 pontos.

Grupo II ..... **54 pontos**

a)	20
b)	11
c)	11
d)	12

Grupo III ..... **65 pontos**

1	20
2	45
a)	12
b)	10
c)	9
d)	14

Total ..... **200 pontos**

CRITÉRIOS DE CORRECÇÃO

Critérios Gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro.

O professor deverá valorizar o raciocínio e a criatividade do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor que corrigir a prova adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo sempre que qualquer outra prova apresente uma resolução do mesmo tipo.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na sua resolução, devem receber a cotação indicada.

Erros ocasionais de contas, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de 10% da cotação atribuída.

Critérios Específicos

Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
D	C	C	A	C	D	A	D	B

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir neste grupo em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas / Resp. certas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3	0	0		
3	27	24	21	18	15	12	9			
4	36	33	30	27	24	21				
5	45	42	39	36	33					
6	54	51	48	45						
7	63	60	57							
8	72	69								
9	81									

Grupo II

a) **20**

Estudo da monotonia **10**

1º Processo

Obtenção de $A'(t)$ **3**

Sinal de $A'(t)$ **4**

Conclusão **3**

2º Processo

Monotonia de e^t **3**

Monotonia de e^{-kt} **4**

Conclusão **3**

Estudo das assimptotas **10**

Justificação de que não existem assimptotas verticais **4**

Determinação da assimptota horizontal **6**

b) **11**

No caso em que o examinando não determinou A' na alínea anterior, a distribuição dos 11 pontos é a seguinte:

Cálculo de A' **3**

Prova pedida **8**

No caso em que o examinando determinou A' na alínea anterior, os 11 pontos devem ser atribuídos à prova pedida.

c) **11**

$A(0) = b$ **2**

Equacionar o problema **3**

Obtenção de $\ln 2/k$ **6**

Dos 6 pontos previstos na última parcela, 3 devem ser atribuídos à igualdade $\ln \frac{1}{2} = -\ln 2$

d) **12**

Equacionar o problema **3**

Valor de b **3**

Valor de k **6**

V.S.F.F.

Grupo III

1. ..... **20**

A probabilidade pedida pode ser obtida por, pelo menos, dois processos, os quais diferem um do outro segundo o modelo adoptado para formar o espaço de acontecimentos. Uma vez adoptado o modelo, a técnica de contagem dos casos possíveis e dos casos favoráveis tem obrigatoriamente que ser coerente.

<u>1º Processo</u>

O espaço de acontecimentos é o conjunto dos subconjuntos, de quatro pastilhas, de um conjunto de doze pastilhas.

Número de casos possíveis = C_4^{12}

Número de casos favoráveis = 3^4

<u>2º Processo</u>

O espaço de acontecimentos é o conjunto das sequências de quatro pastilhas retiradas de um conjunto de doze pastilhas.

Número de casos possíveis = A_4^{12}

Número de casos favoráveis = $3^4 \times 4!$

Indica-se seguidamente como devem ser distribuídos os 20 pontos:

Número de casos possíveis **8**
Número de casos favoráveis **8**
Resultado **4**

Nota: Como se disse acima, a contagem dos casos favoráveis deve ser coerente com a contagem dos casos possíveis. No caso do número de casos possíveis estar correcto de acordo com algum modelo e o número de casos favoráveis estar correcto de acordo com outro modelo, a cotação a atribuir ao conjunto dos dois itens deverá ser **8** pontos.

2.

a) **12**

Justificação do valor da abcissa de *B* **3**
Justificação do valor da ordenada de *B* **3**
Justificação do valor da cota de *B* **1**
Justificação do valor da abcissa de *G* **2**
Justificação do valor da ordenada de *G* **2**
Justificação do valor da cota de *G* **1**

b) **10**

A verificação pedida pode ser feita por, pelo menos, dois processos diferentes: o primeiro consta da justificação de que os pontos *D* e *G* pertencem à recta definida pela condição dada, pelo que esta, tendo em conta a unicidade da recta definida por dois pontos, é uma condição da recta *DG;* o segundo consta da determinação de uma condição da recta *DG*, a qual deverá ser equivalente à condição dada.
Indica-se a seguir como devem ser distribuídos os 10 pontos em cada um dos processos:

<u>1º Processo</u>
- Coordenadas de *D* **2**
- Verificação de que *D* e *G* satisfazem a condição **4**
- Conclusão **4**

<u>2º Processo</u>
- Coordenadas de *D* **2**
- Vector director de *DG* **2**
- Condição pedida **6**

c) **9**

- Equação do plano referido **3**
- Condição que define a intersecção **3**
- Conclusão **3**

d) **14**

- Área da base do prisma **3**
- Volume do prisma **3**
- Volume das pastilhas **3**
- Percentagem pedida **5**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei nº 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos de Carácter Geral e Cursos Tecnológicos
Cursos das Escolas Secundárias Soares dos Reis e António Arroio

Duração da Prova: 90 min + 30 min de tolerância **Militares**
1997

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

I

Para cada uma das nove questões deste grupo, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e **escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde**. Não apresente cálculos. Atenção! Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo em caso de resposta ambígua. Cotação: cada resposta certa, + 9 pontos; cada resposta errada, - 3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.

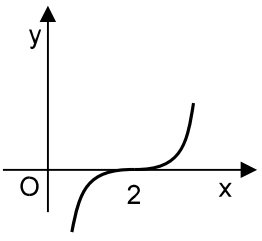
1. Certo tratamento médico consiste na aplicação, a um paciente, de uma determinada substância. Admita que a quantidade Q de substância que permanece no paciente, t horas após a aplicação, é dada, em miligramas, por $Q(t) = 250^{1-0,1t}$.

A quantidade de substância aplicada ao doente foi

(A) $10\,mg$ **(B)** $50\,mg$ **(C)** $100\,mg$ **(D)** $250\,mg$

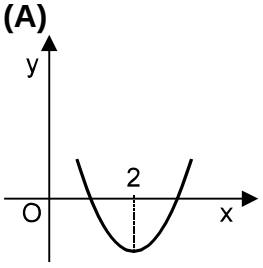
2. Na figura junta está a representação gráfica de uma função f.

O eixo Ox é tangente à curva representativa do gráfico de f.

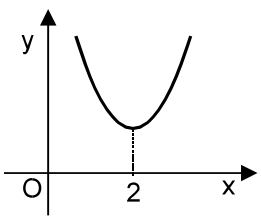


A representação gráfica de f' pode ser

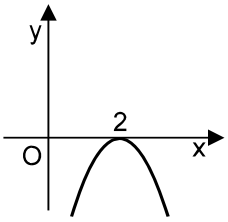
(A)



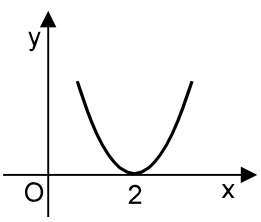
(B)



(C)



(D)

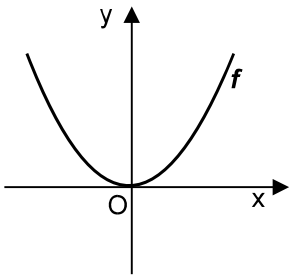


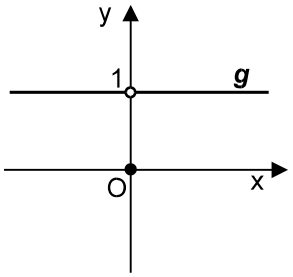
3. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{sen\, x}$

(A) é 0 **(B)** é 1 **(C)** é $+\infty$ **(D)** não existe

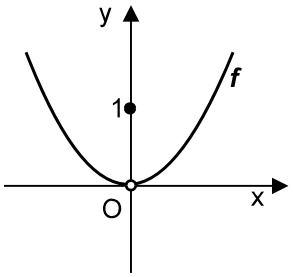
4. Considere duas funções, f e g, definidas em $\mathbb{R}$.
Nenhuma delas é contínua em $\mathbb{R}$, mas a sua soma, $f + g$, é contínua em $\mathbb{R}$.
As representações gráficas de f e g podem ser

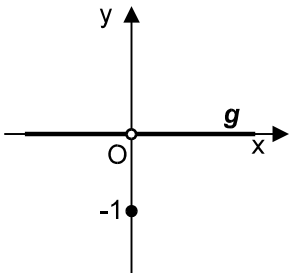
(A)



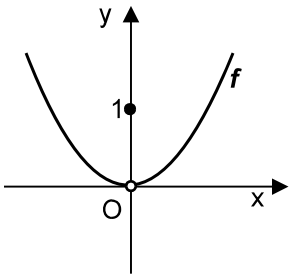


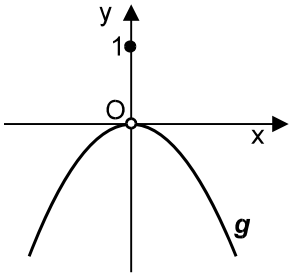
(B)



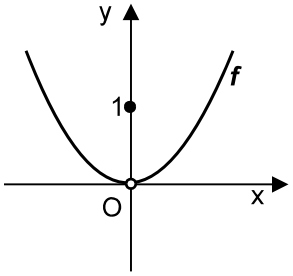


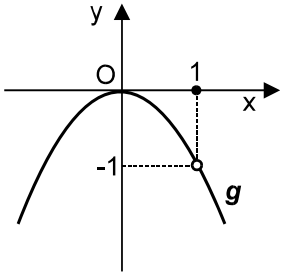
(C)





(D)





5. Num referencial o.n. $Oxyz$ uma esfera tem centro no ponto $C\,(2,\,3,\,4)$ e é tangente ao plano xOy. Uma condição que define a esfera é:

(A) $x^2+y^2+z^2\leq 4^2$ **(B)** $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2\leq 2^2$

(C) $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2\leq 3^2$ **(D)** $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2\leq 4^2$

6. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere a recta r de equação vectorial

$$(x,\,y,\,z)=(0,\,1,2)+k\,(3,0,\,-1)\,,\,k\in\mathbb{R}$$

A recta r

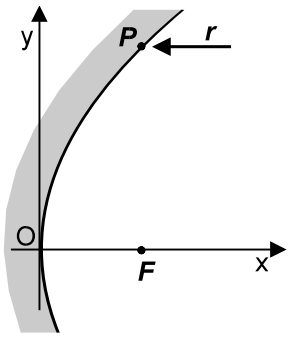
(A) é paralela ao plano xOy **(B)** é paralela ao plano xOz

(C) é paralela ao plano yOz **(D)** não é paralela a nenhum dos planos coordenados

7. Efectuando um corte num espelho, obteve-se uma parábola como a representada na figura abaixo, em referencial o.n. xOy.

A parábola tem vértice na origem do referencial e foco em $F\,(3,0)$.

Um raio luminoso r incide no espelho, paralelamente ao eixo Ox, no ponto $P\,(3,6)$.



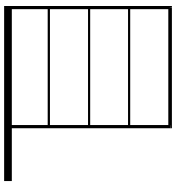
O raio reflectido está sobre a recta de equação

(A) $y=2x$ **(B)** $y=3x-2$ **(C)** $x=3$ **(D)** $y=6$

8. Considere uma caixa de doze aguarelas, sendo uma de cada cor, e também uma caixa de doze lápis de cera com as mesmas cores das referidas aguarelas.
Retirou-se, ao acaso, uma aguarela e um lápis de cera.
Qual a probabilidade de ter obtido uma aguarela e um lápis de cera da mesma cor?

(A) $\frac{1}{12}$ **(B)** $\frac{1}{24}$ **(C)** $\frac{1}{144}$ **(D)** $\frac{1}{12!}$

9. Um novo país, a Colorilândia, quer escolher a sua bandeira, que terá quatro tiras coloridas verticais.

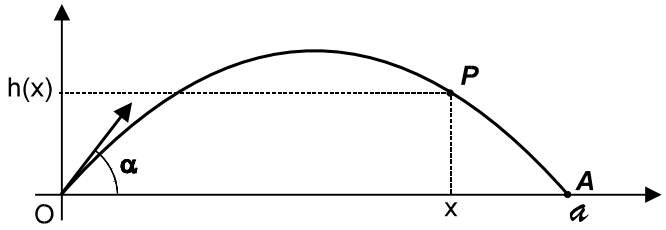


Estão disponíveis cinco cores diferentes. Como é óbvio, duas tiras vizinhas não podem ser da mesma cor.
Quantas bandeiras diferentes se podem fazer nestas condições?

(A) 5×4^3 **(B)** $5 \times 4 \times 3 \times 2$ **(C)** 5^4 **(D)** 1

II

Um projéctil é lançado segundo uma direcção que faz um ângulo α (chamado ângulo de arranque) com a horizontal, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, de acordo com a figura abaixo.



Para um certo valor da velocidade inicial, a equação da trajectória é

$h(x) = -(1 + tg^2\alpha)\, x^2 + (tg\,\alpha)\, x$, x em quilómetros, $h(x)$ em quilómetros.

O local do lançamento é aqui tomado como origem do referencial.

A abcissa a do ponto A é o alcance do projéctil.

Considera-se, naturalmente, o intervalo $[0,\, a]$ como domínio da função h.

a) Determine a altura máxima atingida pelo projéctil quando o ângulo de arranque é $\frac{\pi}{3}$

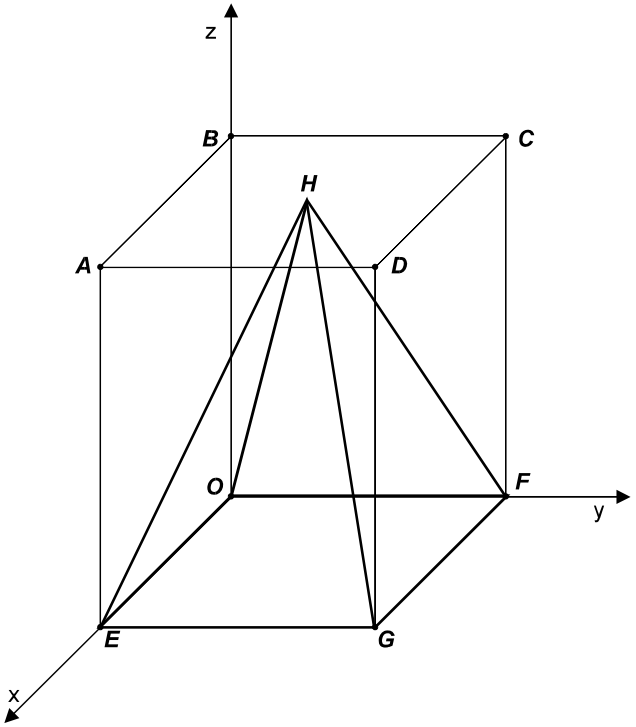
b) Mostre que o alcance do projéctil é $\frac{1}{2}\, sen\,(2\alpha)$

c) Mostre que valores complementares do ângulo de arranque (ou seja, α e $\frac{\pi}{2} - \alpha$) provocam a queda do projéctil no mesmo local.

d) Determine o ângulo de arranque de modo que o alcance seja máximo e calcule o valor desse alcance.

III

Na figura abaixo estão representados, em referencial o.n. $Oxyz$, um prisma quadrangular regular e uma pirâmide cuja base $[OFGE]$ coincide com a do prisma e está assente no plano xOy. O vértice H da pirâmide coincide com o centro da base superior do prisma.



1. Considerando, ao acaso, cinco dos nove vértices da figura representada, qual a probabilidade de que pelo menos quatro sejam da pirâmide?

2. O ponto G tem coordenadas $(4, 4, 0)$.

a) Sabendo que, na unidade considerada, o volume do prisma é igual a 96, mostre que H tem coordenadas $(2, 2, 6)$.

b) Escreva uma equação cartesiana do plano OEH.

c) Indique, justificando, uma equação vectorial da recta que é a intersecção do plano OEH com o plano ABC.

d) Determine, com aproximação à centésima da unidade, o raio da esfera cuja área é igual à área total do prisma.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Área da superfície esférica = $4\pi r^2$

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I.....81

Cada questão certa ..... +9
Cada questão errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

GRUPO II 54

a) 14
b).....20
c).....10
d).....10

GRUPO III 65

1..... 20

2..... 45

a) 10
b).....13
c).....12
d).....10

TOTAL 200

1998

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos de Carácter Geral e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos
1998

1.ª FASE
1.ª CHAMADA
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

Primeira Parte

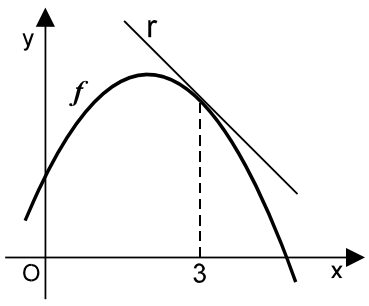
Para cada uma das nove questões desta primeira parte, seleccione a resposta correcta, de entre as alternativas que lhe são apresentadas, e **escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde**. Não apresente cálculos. Atenção! Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
Cotação: cada resposta certa, +9 pontos; cada resposta errada, -3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos. Um total negativo nesta primeira parte da prova vale 0 pontos.

1. O valor de $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$ é

(A) 1 **(B)** $+\infty$ **(C)** $\sqrt{e}$ **(D)** e^2

2. Na figura estão representadas:

- parte do gráfico de uma função f diferenciável em $\mathbb{R}$
- uma recta r tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 3



O valor de $f'(3)$, derivada da função f no ponto 3, pode ser igual a

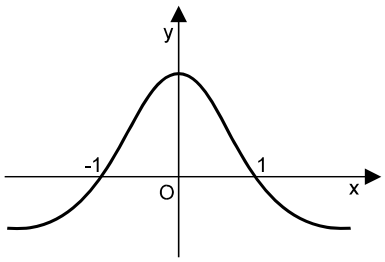
(A) -1 **(B)** 0 **(C)** $\frac{1}{f(3)}$ **(D)** 1

3. De uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:
- $g(0)=1$
- g é estritamente crescente em $[0,+\infty[$
- g é par

Indique qual das seguintes afirmações é verdadeira.

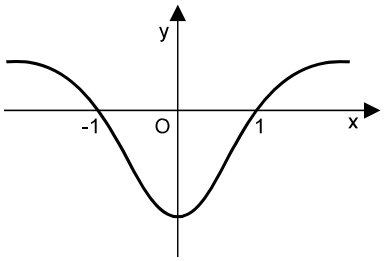
(A) O contradomínio de g é $[0,+\infty[$ **(B)** g é estritamente crescente em $\mathbb{R}$
(C) g é injectiva **(D)** g não tem zeros

4. Na figura abaixo está parte da representação gráfica de uma função s de domínio $\mathbb{R}$.

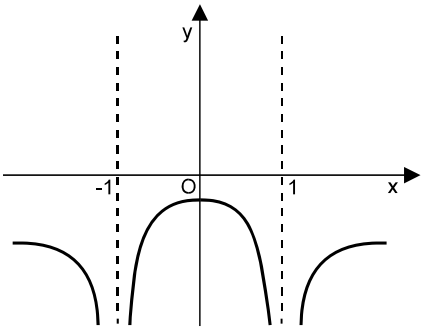


Indique qual das figuras seguintes pode ser parte da representação gráfica da função t definida por $t(x) = \frac{1}{s(x)}$

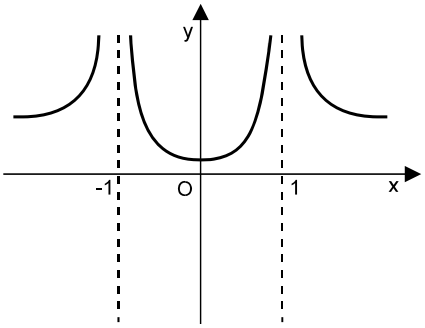
(A)



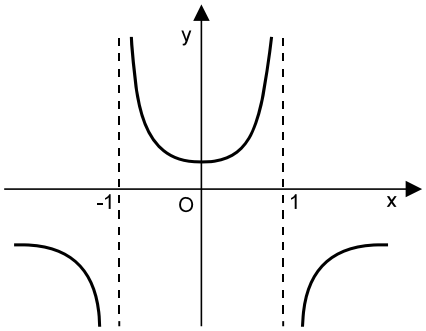
(B)



(C)



(D)



5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$:

• a esfera $\mathcal{E}$ definida pela condição $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \leq 36$

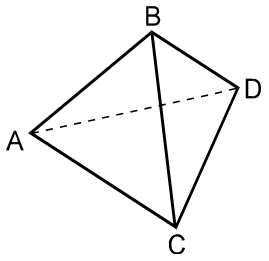
• a recta r de equação $(x,\, y,\, z) = (1,2,3) + k\,(-2,0,1)\,,\ k \in \mathbb{R}$

A intersecção da recta r com a esfera $\mathcal{E}$ é um segmento de recta.

Qual é o comprimento desse segmento de recta?

(A) 8 **(B)** 10 **(C)** 12 **(D)** 14

6. Na figura está representado um tetraedro regular (sólido geométrico com quatro faces, que são todas **triângulos equiláteros**).



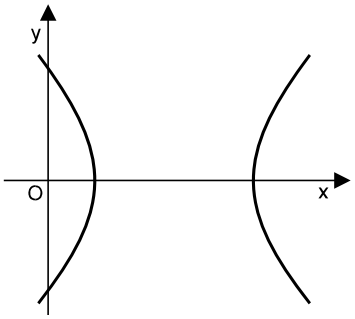
- A, B, C e D são os vértices do tetraedro
- $\overline{AB} = 6$

O valor do produto escalar $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$ é

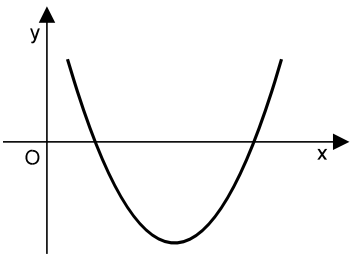
(A) 18 **(B)** $18\sqrt{2}$ **(C)** 36 **(D)** $36\sqrt{2}$

7. Considere, num referencial o.n. xOy, os pontos $A(2, 0)$ e $B(6, 0)$.
Indique qual das figuras seguintes pode representar o conjunto de pontos P do plano tais que $\overline{PA} + \overline{PB} = 5$.

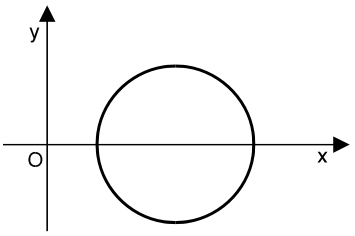
(A)



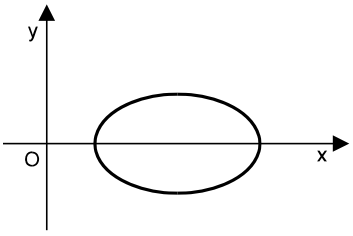
(B)



(C)



(D)



8. O penúltimo número de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 10.
Qual é o terceiro número dessa linha?

(A) 11 **(B)** 19 **(C)** 45 **(D)** 144

9. Um dado é lançado cinco vezes.
Qual é a probabilidade de que a face *seis* apareça pelo menos uma vez?

(A) $1 - \left(\frac{1}{6}\right)^5$ **(B)** $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5$ **(C)** $C_1^5 \left(\frac{1}{6}\right)^5$ **(D)** $C_1^5 \left(\frac{5}{6}\right)^5$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações que entender necessárias.
Atenção: pode ser-lhe útil consultar o formulário apresentado no final da prova.

1. Seja f a função definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = log_2(8x^2) - log_2\, x$

a) Mostre que $f(x) = 3 + log_2\, x$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$

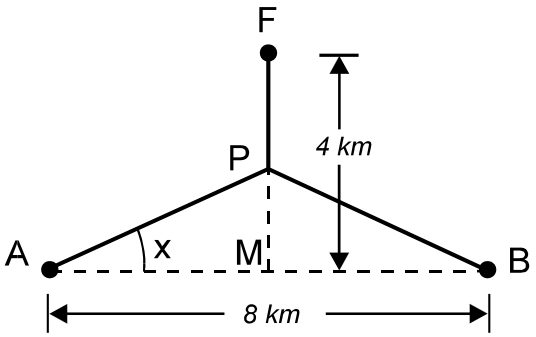
b) Determine a abcissa do ponto de intersecção do gráfico de f com a recta de equação $y = 8$

2. Duas povoações, A e B, distanciadas 8 km uma da outra, estão a igual distância de uma fonte de abastecimento de água, localizada em F.

Pretende-se construir uma canalização ligando a fonte às duas povoações, como se indica na figura abaixo. A canalização é formada por três canos: um que vai da fonte F até um ponto P e dois que partem de P, um para A e outro para B. O ponto P está a igual distância de A e de B.

Tem-se ainda que:

- o ponto M, ponto médio de $[AB]$, dista 4 km de F
- x é a amplitude do ângulo PAM $\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$



a) Tomando para unidade o quilómetro, mostre que o comprimento total da canalização é dado por

$$g(x) = 4 + \frac{8 - 4\,sen\,x}{cos\,x}$$

(Sugestão: comece por mostrar que $\overline{PA} = \frac{4}{cos\,x}$ e que $\overline{FP} = 4 - 4\,tg\,x$)

b) Calcule $g(0)$ e interprete o resultado obtido, referindo a forma da canalização e consequente comprimento.

c) Determine o valor de x para o qual o comprimento total da canalização é mínimo.

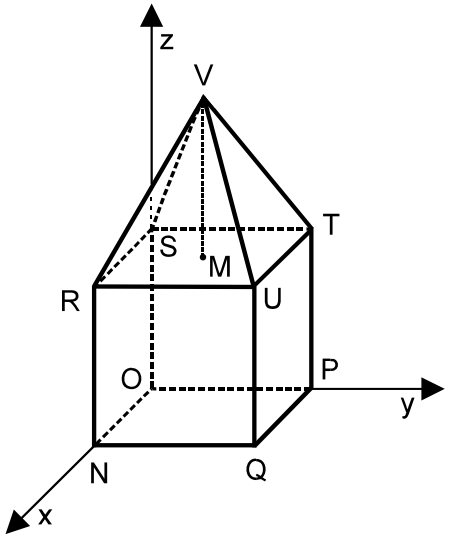
3. Uma turma de uma escola secundária tem 27 alunos: 15 raparigas e 12 rapazes.
O delegado de turma é um rapaz.
Pretende-se constituir uma comissão para organizar um passeio. A comissão deve ser formada por 4 raparigas e 3 rapazes. Acordou-se que um dos 3 rapazes da comissão será necessariamente o delegado de turma.

a) Quantas comissões diferentes se podem constituir?

b) Admita que os 7 membros da comissão, depois de constituída, vão posar para uma fotografia, colocando-se uns ao lado dos outros.
Supondo que eles se colocam ao acaso, qual é a probabilidade de as raparigas ficarem todas juntas?
Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às milésimas.

4. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um sólido formado por um cubo e uma pirâmide quadrangular regular.

- A base da pirâmide coincide com a face superior do cubo
- O vértice O coincide com a origem do referencial
- O vértice N pertence ao semieixo positivo Ox
- O vértice P pertence ao semieixo positivo Oy
- O vértice S pertence ao semieixo positivo Oz
- A altura da pirâmide, $\overline{VM}$, é igual ao comprimento da aresta do cubo
- O vértice V tem coordenadas $(3, 3, 12)$



a) Justifique que $\overline{UQ} = 6$ e que $\overline{UV} = 3\sqrt{6}$

b) Determine a intersecção da recta que contém a aresta $[UV]$ com o plano de equação $x = 4$

c) Considere um ponto A pertencente à aresta $[UQ]$.
Um plano que contenha o ponto A e que seja paralelo ao plano xOy divide o sólido representado na figura em duas partes.
Determine a cota do ponto A de modo que sejam iguais os volumes dessas duas partes.

Formulário

Volume da pirâmide = $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte.....**81**

Cada questão certa ..... +9
Cada questão errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1 22
a) 11
b).....11

2 39
a) 12
b).....12
c).....15

3 22
a) 10
b).....12

4 36
a) 12
b).....12
c).....12

TOTAL **200**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **1.ª FASE**
1998 **1.ª CHAMADA**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Primeira Parte **81**

Cada questão certa ..... +9
Cada questão errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1 22
a) 11
b)..... 11

2 39
a) 12
b)..... 12
c)..... 15

3 22
a) 10
b)..... 12

4 36
a) 12
b)..... 12
c)..... 12

TOTAL **200**

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Primeira Parte

Se o examinando transcrever letras correspondentes às duas versões da prova, a cotação desta primeira parte será zero.

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Versão 1	D	A	D	D	C	A	D	C	B
Versão 2	G	H	F	F	E	G	F	F	G

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir nesta primeira parte em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas / Resp. certas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3	0	0		
3	27	24	21	18	15	12	9			
4	36	33	30	27	24	21				
5	45	42	39	36	33					
6	54	51	48	45						
7	63	60	57							
8	72	69								
9	81									

Segunda Parte

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Critérios específicos

1.

a) **11**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos diferentes:

1.º Processo

Utilizar a propriedade do logaritmo do produto 4
Utilizar a propriedade do logaritmo da potência 4
$log_2 8 = 3$ 2
Restante simplificação 1

2.º Processo

Utilizar a propriedade da diferença de logaritmos 4
Simplificar a fracção 1
Utilizar a propriedade do logaritmo do produto 4
$log_2 8 = 3$ 2

b) **11**

Equacionar o problema ($3 + log_2 x = 8$) 4
Resolver a equação 7

$3 + log_2 x = 8$
$\Leftrightarrow log_2 x = 5$ 1
$\Leftrightarrow x = 2^5$ 5
$\Leftrightarrow x = 32$ 1

2.

a) **12**

Mostrar que $\overline{PA} = \frac{4}{\cos x}$ 3

$\cos x = \frac{\overline{MA}}{\overline{PA}} = \frac{4}{\overline{PA}}$ 2

Conclusão 1

Mostrar que $\overline{FP} = 4 - 4\,tg\,x$ 4

$tg\,x = \frac{\overline{PM}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{PM}}{4}$ 2

$\overline{PM} = 4\,tg\,x$ 1

Conclusão 1

Comprimento total da canalização = $4 - 4\,tg\,x + 2 \times \frac{4}{\cos x}$ 2

Comprimento total da canalização = $4 + \frac{8 - 4\,sen\,x}{\cos x}$ 3

V.S.F.F.

b) **12**

$g(0) = 12$ 5

$sen\,0 = 0$ 2

$cos\,0 = 1$ 2

Restantes cálculos 1

Interpretação do resultado 7

A cotação a atribuir à interpretação do resultado deverá ser tanto maior quanto melhor descrever a situação. Seguem-se três exemplos de respostas possíveis, que correspondem a níveis diferentes de interpretação, e respectiva cotação:

"Quando $x = 0$, a canalização tem 12 km de comprimento" 3

"Quando $x = 0$, a canalização tem a forma $\perp$ " 5

"Quando $x = 0$, a canalização tem a forma $\perp$, pelo que o seu comprimento (sendo $\overline{FM} + \overline{AB}$) é 12 km" 7

c) **15**

Determinar g' 5

$g'(x) = \frac{-4 \cdot cos\,x \cdot cos\,x + sen\,x\,(8 - 4\,sen\,x)}{cos^2 x}$ 2

$g'(x) = \frac{-4 + 8\,sen\,x}{cos^2 x}$ 3

Determinar o zero de g' 5

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -4 + 8\,sen\,x = 0$ 2

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow sen\,x = \frac{1}{2}$ 1

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$ 2

Mostrar que $\frac{\pi}{6}$ é o valor de x para o qual g toma o seu valor mínimo 5

Nota 1: o examinando pode mostrar que $\frac{\pi}{6}$ é o valor de x para o qual a função g toma o seu valor mínimo por, pelo menos, dois processos:

1. Através do estudo da variação do sinal de g' (que pode ser apresentado por meio de um quadro).

2. Através do esboço do gráfico da função, o qual pode ser obtido com recurso à calculadora gráfica. Neste caso, o examinando deverá apresentar uma justificação do tipo da que se segue: "Da análise do gráfico, verifica-se que g é decrescente de 0 até um certo ponto, onde g toma o seu valor mínimo, e depois é crescente desse ponto até $\frac{\pi}{4}$. Logo, o único valor que anula g' é necessariamente o ponto onde g toma o seu valor mínimo".

Nota 2: o examinando, com recurso à calculadora gráfica, poderá apresentar uma resolução (incompleta) baseada na análise do gráfico da função. Mais precisamente, o examinando poderá:

- verificar que g é decrescente de 0 até um certo ponto, onde g toma um valor mínimo, e depois é crescente desse ponto até $\frac{\pi}{4}$;
- utilizar, por exemplo, a função *zoom* da calculadora para encontrar um valor aproximado do pedido.

Nesta situação, a cotação máxima a atribuir é de 7 pontos e deverá ter em conta a descrição do processo de utilização da calculadora e o grau de precisão do valor apresentado (note-se que $\frac{\pi}{6} \approx 0,5236$).

3.

a) 10

Uma comissão é um conjunto formado por quatro raparigas e três rapazes, sendo um destes o delegado de turma. O número de comissões é, então, o número de maneiras de reunir quatro raparigas, escolhidas de entre quinze, com dois rapazes, escolhidos de entre onze.

Número de maneiras de escolher as raparigas $= C_4^{15}$ 2

Número de maneiras de escolher os rapazes $= C_2^{11}$ 3

Número total de comissões $= C_4^{15} \times C_2^{11}$ 3

Número total de comissões $= 1365 \times 55 = 75\,075$ 2

b) 12

A probabilidade pedida pode ser obtida por, pelo menos, três processos diferentes, consoante o modelo adoptado para formar o espaço de acontecimentos.

1.º Processo

O espaço de acontecimentos é o conjunto de maneiras dos sete membros da comissão se disporem em fila uns ao lado dos outros.

Número de casos possíveis $= 7!$ 4

Número de casos favoráveis $= 4 \times 4! \times 3!$ 6

Probabilidade pedida $= \frac{4 \times 4! \times 3!}{7!}$ 1

Probabilidade pedida $\approx 0,114$ 1

2.º Processo

O espaço de acontecimentos é o conjunto de maneiras das raparigas ocuparem quatro dos sete lugares da fila.

Número de casos possíveis $= A_4^7$ 5

Número de casos favoráveis $= 4 \times 4!$ 5

Probabilidade pedida $= \frac{4 \times 4!}{A_4^7}$ 1

Probabilidade pedida $\approx 0,114$ 1

3.º Processo

O espaço de acontecimentos é o conjunto de maneiras de escolher quatro de sete lugares (os lugares onde ficam as raparigas).

Número de casos possíveis $= C_4^7$ 5

Número de casos favoráveis $= 4$ 5

Probabilidade pedida $= \frac{4}{C_4^7}$ 1

Probabilidade pedida $\approx 0,114$ 1

4.

a) **12**

Justificar que $\overline{UQ} = 6$ 4

Justificar que $\overline{UV} = 3\sqrt{6}$ 8

Esta justificação pode ser feita por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo
(através da determinação da distância de U a V):
Indicar as coordenadas de U 4
Determinar a distância de U a V 4

2.º Processo
(através do Teorema de Pitágoras):
Determinar $\overline{US}$ 3
Determinar $\overline{UM}$ 1
Determinar $\overline{UV}$ 4

b) **12**

Obter uma condição que defina a recta UV 6
Obter as coordenadas do ponto de intersecção da recta com o plano 6

c) **12**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1..º Processo
Concluir que o volume do sólido da figura é 4/3 do volume do cubo..... 4
Concluir que o volume da parte do sólido que se situa abaixo do plano secante tem de ser 2/3 do volume do cubo..... 4
Concluir que a cota pedida é 4 4

2.º Processo
Concluir que o volume do sólido da figura é 288 2
Concluir que o volume da parte do sólido que se situa abaixo do plano secante tem de ser 144..... 4
Concluir que a cota pedida é 4 6

3.º Processo
Equacionar o problema: $36\,z = 72 + 36(6 - z)$ 10
Resolver a equação..... 2

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos de Carácter Geral e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos
1998

1.ª FASE
2.ª CHAMADA
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

Primeira Parte

Para cada uma das nove questões desta primeira parte, seleccione a resposta correcta, de entre as alternativas que lhe são apresentadas, e **escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde**. Não apresente cálculos. Atenção! Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
Cotação: cada resposta certa, + 9 pontos; cada resposta errada, - 3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos. Um total negativo nesta primeira parte da prova vale 0 pontos.

1. Considere a função f definida por $f(x) = sen(x^2)$

Indique qual das expressões seguintes define f', função derivada de f

(A) $2x \,.\, cos\,(x^2)$ **(B)** $cos\,(x^2)$

(C) $2x \,.\, cos\,(2\,x)$ **(D)** $-\,cos\,(x^2)$

2. Considere a função g definida por $g(x) = \dfrac{2\,x - 5}{x - 1}$

Indique qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$

(A) 0 **(B)** 2

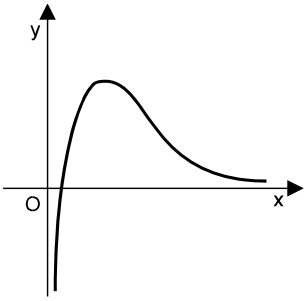
(C) $-\infty$ **(D)** $+\infty$

3. De uma função h sabe-se que:

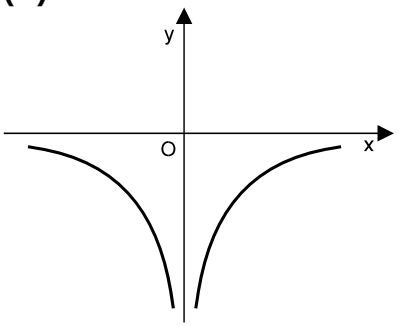
o domínio de h é $\mathbb{R}^+$ $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$ $\lim_{x\to 0} h(x) = -\infty$

Indique qual dos gráficos seguintes poderá ser o gráfico de h.

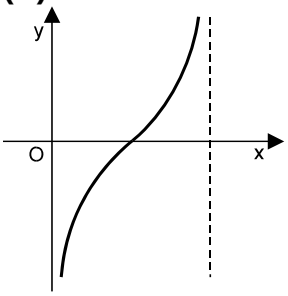
(A)



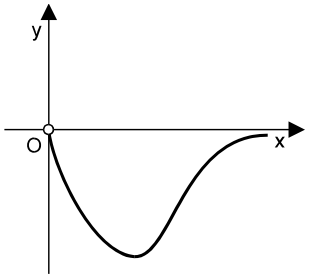
(B)



(C)



(D)

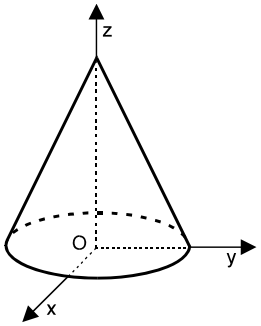


4. Uma instituição bancária oferece uma taxa de juro de 8% ao ano para depósitos feitos numa certa modalidade.
Um cliente desse banco fez um depósito de 100 contos, nessa modalidade.
Qual é, em contos, o capital desse cliente, relativo a esse depósito, passados n anos?

(A) $100 + 0,8\,n$ **(B)** $100 \times 1,08\,n$ **(C)** $100 \times 1,8^n$ **(D)** $100 \times 1,08^n$

5. Na figura está representado, num referencial o. n. $Oxyz$, um cone de revolução.

- A base do cone está contida no plano xOy
- O centro da base é a origem do referencial
- O raio da base tem 5 unidades de comprimento
- O vértice do cone pertence ao eixo Oz



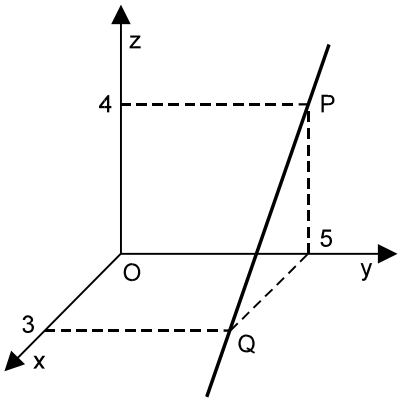
A intersecção do plano definido pela condição $x = 3$ com a superfície lateral do cone é

(A) uma elipse. **(B)** parte de uma parábola.
(C) parte de uma hipérbole. **(D)** um par de segmentos de recta.

6. Na figura está representada, num referencial o. n. $Oxyz$, uma recta PQ.

• O ponto P pertence ao plano yOz

• O ponto Q pertence ao plano xOy



Indique qual das condições seguintes define a recta PQ

(A) $3\,x + 5\,y + 4\,z = 0$

(B) $(x, y, z) = (3, 0, -4) + k\,(3, 5, 0)\,,\ k \in \mathbb{R}$

(C) $x = 3 \wedge y = 5 \wedge z = 4$

(D) $(x, y, z) = (3, 5, 0) + k\,(3, 0, -4)\,,\ k \in \mathbb{R}$

7. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$:
• o plano α, de equação $2x + 2y + 2z = 5$
• a recta r, definida pela condição $x = y = z$

Qual é a posição relativa da recta r e do plano α ?

(A) r é perpendicular a α
(B) r e α são concorrentes, mas não perpendiculares
(C) r é estritamente paralela a α
(D) r está contida em α

8. Lançou-se três vezes ao ar uma moeda equilibrada, tendo saído sempre a face *coroa*.
Qual é a probabilidade de, num quarto lançamento, sair a face *cara* ?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{3}{4}$

9. Indique qual das equações seguintes é equivalente à equação $(x+1)^4 = 4\,x^3 + 6\,x^2$

(A) $x^4 - 4\,x^3 - 6\,x^2 + 1 = 0$
(B) $x^4 + 1 = 0$
(C) $x^4 - 4\,x^3 - 4\,x^2 + 1 = 0$
(D) $x^4 + 4\,x + 1 = 0$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações que entender necessárias.
Atenção: pode ser-lhe útil consultar o formulário apresentado no final da prova.

1. De uma certa função $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ sabe-se que:

- $f(1) = 0$
- a sua **derivada**, f', é definida por $f'(x) = \dfrac{1 + ln\, x}{x}$

a) Escreva uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

b) Poderá concluir-se que f é contínua para $x = 1$? Justifique a sua resposta.

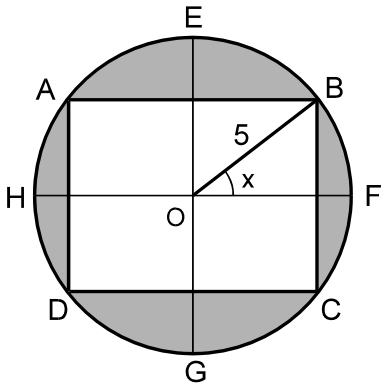
c) Mostre que $f''(x) = \dfrac{-\, ln\, x}{x^2}$ e estude f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.

2. A figura abaixo representa um canteiro de forma circular com $5\,m$ de raio.
O canteiro tem uma zona rectangular, que se destina à plantação de flores, e uma zona relvada, assinalada a sombreado na figura.

Os vértices A, B, C e D do rectângulo pertencem à circunferência que limita o canteiro.

Na figura estão também assinalados:

- dois diâmetros da circunferência, $[EG]$ e $[HF]$, que contêm os pontos médios dos lados do rectângulo
- o centro O da circunferência
- o ângulo BOF, de amplitude x $\quad \left(x \in \left]\, 0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$



a) Mostre que a área (em m^2) da zona relvada é dada, em função de x, por

$$g(x) = 25\,\pi\, - 50\, sen\,(2\,x)$$

b) Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que existe um valor de x compreendido entre $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{4}$ para o qual a área da zona relvada é $30\,m^2$

3. O código de um cartão multibanco é uma sequência de quatro algarismos como, por exemplo, 0559.

a) Quantos códigos diferentes existem com um e só um algarismo zero?

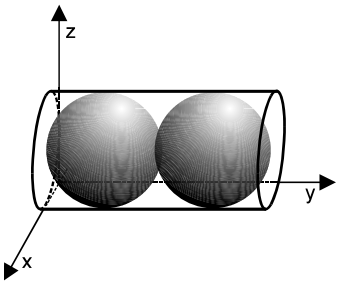
b) Imagine que um amigo seu vai adquirir um cartão multibanco.
Admitindo que o código de qualquer cartão multibanco é atribuído ao acaso, qual é a probabilidade de o código desse cartão ter os quatro algarismos diferentes?
Apresente o resultado na forma de dízima.

4. Na figura abaixo está representada, em referencial o. n. $Oxyz$, uma caixa cilíndrica construída num material de espessura desprezável.
A caixa contém duas bolas encostadas uma à outra e às bases da caixa cilíndrica.

- O cilindro tem uma das bases no plano xOz
- O centro dessa base é o ponto de coordenadas $(3,\ 0,\ 3)$
- A outra base está contida no plano de equação $y = 12$

- As bolas são esferas de raio igual a 3

- Os diâmetros das esferas e das bases do cilindro são iguais



a) Justifique que a superfície esférica correspondente à bola mais afastada do plano xOz tem centro no ponto $(3,\ 9,\ 3)$ e que o ponto $(1,\ 8,\ 1)$ pertence a essa superfície esférica.

b) Escreva uma equação do plano tangente, no ponto $(1,\ 8,\ 1)$, à superfície esférica referida na alínea anterior.

Nota: um plano tangente a uma superfície esférica é perpendicular ao raio relativo ao ponto de tangência.

c) **Considere agora a caixa vazia**. Seccionou-se a caixa pelo plano de equação $z = 4$.
Supondo que a unidade do referencial é o centímetro, determine o perímetro da secção obtida.

Formulário

$sen(2x) = 2\,.\,sen\,x\,.\,cos\,x$ $\qquad$ $cos\,(2x) = cos^2 x - sen^2 x$ $\qquad$ $tg(2x) = \frac{2\,tg\,x}{1-tg^2 x}$

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte.....**81**

Cada questão certa ..... +9
Cada questão errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1 35
a) 12
b).....8
c).....15

2 22
a) 12
b).....10

3 22
a) 10
b).....12

4 40
a) 14
b).....14
c).....12

TOTAL **200**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos
1998

1.ª FASE
2.ª CHAMADA

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Primeira Parte **81**

Cada questão certa ..... +9
Cada questão errada ..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1 ..... **35**
a) 12
b) 8
c) 15

2 ..... **22**
a) 12
b) 10

3 ..... **22**
a) 10
b) 12

4 ..... **40**
a) 14
b) 14
c) 12

TOTAL **200**

V.S.F.F.

135/C/1

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Primeira Parte

Se o examinando transcrever letras correspondentes às duas versões da prova, a cotação desta primeira parte será zero.

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Versão 1	A	C	A	D	C	D	A	B	D
Versão 2	H	G	G	G	E	H	F	F	F

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir nesta primeira parte em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas / Resp. certas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3	0	0		
3	27	24	21	18	15	12	9			
4	36	33	30	27	24	21				
5	45	42	39	36	33					
6	54	51	48	45						
7	63	60	57							
8	72	69								
9	81									

Segunda Parte

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Critérios específicos

1.

a) **12**

Cálculo de $f'(1)$ 6
Equação da recta pedida 6

b) **8**

Afirmar que se pode concluir que f é contínua para $x = 1$ 1
Justificar a resposta 7

Referir que f é diferenciável para $x = 1$ (porque o valor de $f'(1)$ é finito) 3
Justificar a continuidade de f para $x = 1$ (toda a função diferenciável num ponto é contínua nesse ponto) 4

c) **15**

Determinar f'' 3

$f''(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (1 + \ln x)}{x^2}$ 2

$f''(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$ 1

Determinar o zero de f'' 3

Estudar a variação de sinal de f'' 3

Indicar o sentido das concavidades 3

Indicar o ponto de inflexão (ou, simplesmente, a sua abcissa) 3

2.

a) **12**

Calcular a área do círculo 2

Obter as dimensões de um dos quatro rectângulos em que

o rectângulo $[ABCD]$ está dividido ($5\,sen\,x$ e $5\cos x$)

ou as dimensões do rectângulo $[ABCD]$ ($10\,sen\,x$ e $10\cos x$) ..... 4 (2+2)

Obter a área do rectângulo $[ABCD]$ 2

Utilizar a fórmula da duplicação 2

Indicar a área sombreada como a diferença entre a área do círculo

e a área do rectângulo $[ABCD]$ 2

b) **10**

Referir e justificar a continuidade de g em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ 2

$g\left(\frac{\pi}{4}\right) < 30$ 3

$g\left(\frac{\pi}{6}\right) > 30$ 3

Conclusão 2

Nota: o examinando pode referir e justificar a continuidade de g em todo o seu domínio, que é o intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, para justificar a continuidade de g em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$.

3.

a) **10**

Número de posições que o algarismo zero pode ocupar $= 4$ 3

Número de possibilidades dos restantes algarismos $= 9^3$ 3

Número de códigos $= 4 \times 9^3 = 2\,916$ 4

b) **12**

Número de casos possíveis $= 10^4$ 3

Número de casos favoráveis $= A_4^{10}$ 7

Probabilidade pedida $= \frac{A_4^{10}}{10^4}$ 1

Probabilidade pedida $= 0,504$ 1

4.

a) **14**

Justificar que o centro da superfície esférica é o ponto $(3, 9, 3)$ 5

Abcissa 1
Ordenada 3
Cota 1

Para justificar a abcissa e a cota, o examinando pode referir que elas têm de ser iguais às dos centros das bases do cilindro.
Para justificar a ordenada, o examinando pode referir que ela é igual a $6 + 3$ (ou a $12 - 3$).

Justificar que o ponto $(1, 8, 1)$ pertence à superfície esférica 9

Esta justificação pode ser feita por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Determinar a distância do ponto $(1, 8, 1)$ ao ponto $(3, 9, 3)$ 7
Referir que, pelo facto dessa distância ser igual ao raio da esfera, o ponto $(1, 8, 1)$ pertence à superfície esférica.....2

2.º Processo

Determinar uma equação da superfície esférica 5
Verificar que as coordenadas $(1, 8, 1)$ satisfazem a equação ...4

b) **14**

Determinar um vector normal ao plano 5
Determinar uma equação do plano 9

c) **12**

Referir que a secção é um rectângulo 2

Referir que o comprimento do lado maior do rectângulo é 12 2

Determinar o comprimento do lado menor do rectângulo 6

Determinar o perímetro do rectângulo 2

Nota 1: no enunciado não se pede um valor aproximado do resultado. Subentende-se, assim, que se pretende o valor exacto do perímetro pedido. No entanto, se o examinando determinar o valor exacto do perímetro, $24 + 8\sqrt{2}$, e depois apresentar um valor aproximado, não deverá ser penalizado.
Nota 2: se o examinando trabalhar sempre com valores aproximados, deverá ser penalizado em 2 pontos.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos de Carácter Geral e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **2.ª FASE**
1998 **Versão 1**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

Primeira Parte

Para cada uma das nove questões desta primeira parte, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e **escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde**. Não apresente cálculos. Atenção! Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
Cotação: cada resposta certa, + 9 pontos; cada resposta errada, - 3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos. Um total negativo nesta primeira parte da prova vale 0 pontos.

1. Qual é o limite da sucessão de termo geral $u_n = 1 + e^{-n}$?

(A) $-\infty$ **(B)** $+\infty$ **(C)** 0 **(D)** 1

2. Para um certo número real k, é **contínua** a função m definida por

$$m(x) = \begin{cases} e^{2x} + k \ , & se \quad x \leq 0 \\ \dfrac{sen\, x}{x} \ , & se \quad x > 0 \end{cases}$$

O valor de k é

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** 2

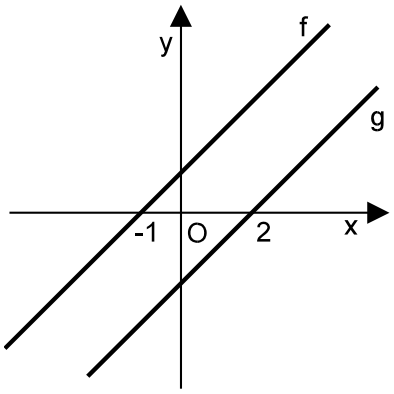
3. Um projéctil é lançado verticalmente de baixo para cima.
Admita que a sua altitude h (em metros), t segundos após ter sido lançado, é dada pela expressão

$$h(t) = 100\,t - 5\,t^2$$

Qual é a **velocidade** (em metros por segundo) do projéctil, dois segundos após o lançamento?

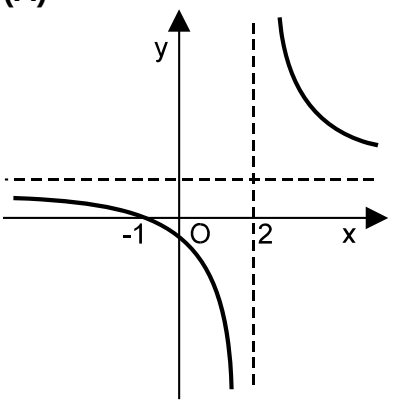
(A) 80 **(B)** 130 **(C)** 170 **(D)** 230

4. Na figura estão representadas graficamente duas funções: f e g.

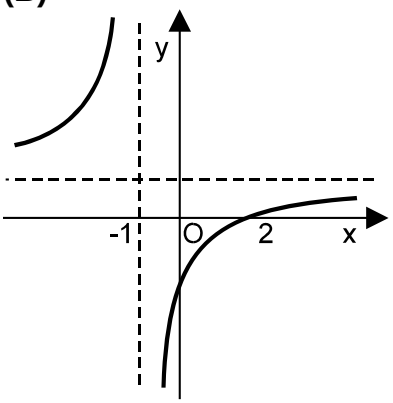


Qual dos seguintes gráficos poderá ser o da função $\frac{f}{g}$?

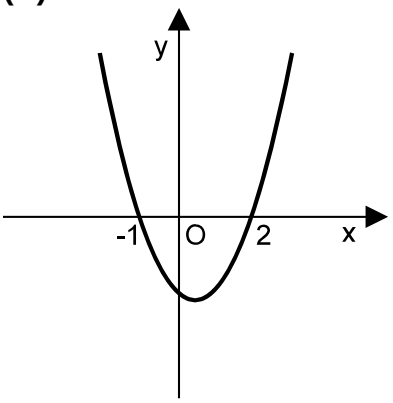
(A)



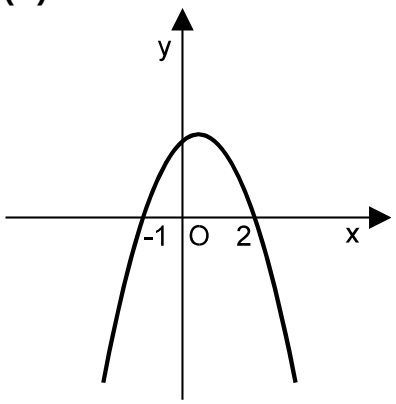
(B)



(C)



(D)



5. Uma hipérbole tem vértices $V_1(-6,0)$ e $V_2(6,0)$.
Seja P um ponto da hipérbole. A distância de P a um dos focos é 4.
Qual é a distância de P ao outro foco?

(A) 2 **(B)** 8 **(C)** 10 **(D)** 16

6. Considere, relativamente a um referencial o. n. $Oxyz$:

- um plano α, definido pela equação $3x - z = 2$
- uma recta r, definida pela condição $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$
- um ponto P, de coordenadas $(0,2,3)$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) P pertence a α **(B)** P pertence a r
(C) r é paralela a α **(D)** r é perpendicular a α

7. Considere a esfera definida pela condição $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 \leq 14$.
Sabendo que $[AB]$ é um diâmetro dessa esfera e que A tem coordenadas $(1,1,1)$, indique as coordenadas de B.

(A) $(2,4,8)$ **(B)** $(3,5,7)$ **(C)** $(4,6,5)$ **(D)** $(5,3,6)$

8. Colocaram-se numa urna doze bolas indistinguíveis pelo tacto, numeradas de 1 a 12.
Tirou-se uma bola da urna e verificou-se que o respectivo número era par.
Essa bola não foi reposta na urna.
Tirando, ao acaso, outra bola da urna, a probabilidade do número desta bola ser par é

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{5}{12}$ **(D)** $\frac{5}{11}$

9. Num torneio de xadrez, cada jogador jogou uma partida com cada um dos outros jogadores.
Supondo que participaram no torneio dez jogadores, o número de partidas disputadas foi

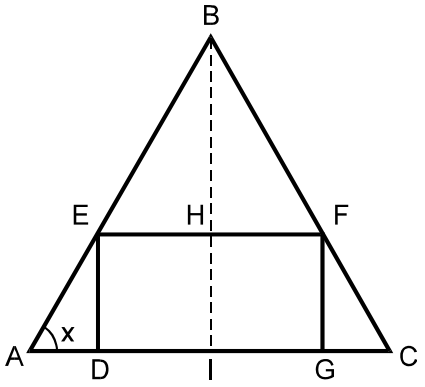
(A) ${}^{10}C_2$ **(B)** ${}^{10}C_9$ **(C)** $10!$ **(D)** 10×9

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações que entender necessárias.
Atenção: pode ser-lhe útil consultar o formulário apresentado no final da prova.

1. Na figura

- o triângulo $[ABC]$ é isósceles $(\overline{AB} = \overline{BC})$
- $[DEFG]$ é um rectângulo
  $\overline{DG} = 2$
  $\overline{DE} = 1$
- x designa a amplitude do ângulo BAC



a) Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é dada, em função de x, por

$$f(x) = 2 + tg\ x + \frac{1}{tg\ x} \qquad \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$$

(**Nota**: pode ser-lhe útil reparar que $B\widehat{E}F = B\widehat{A}C$)

b) Mostre que $f'(x) = -\frac{cos(2x)}{sen^2x \,.\, cos^2x}$ (f' designa a derivada de f).

c) Determine o valor de x para o qual a área do triângulo $[ABC]$ é mínima.

2. A magnitude M de um sismo e a energia total E libertada por esse sismo estão relacionadas pela equação

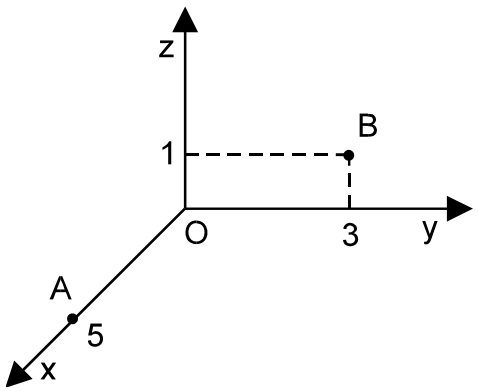
$$log_{10} E = 5,24 + 1,44\,M$$ (a energia E é medida em Joule).

a) Um físico português estimou que o terramoto de Lisboa de 1755 teve magnitude 8,6.
Mostre que a energia total libertada nesse sismo foi aproximadamente $4{,}2 \times 10^{17}$ Joule.

b) A ponte *Vasco da Gama* foi concebida para resistir a um sismo cuja energia total libertada seja cinco vezes a do terramoto de Lisboa de 1755. Qual será a magnitude de um tal sismo? Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas.

3. Um fiscal do Ministério das Finanças vai inspeccionar a contabilidade de sete empresas, das quais três são clubes de futebol profissional.
A sequência segundo a qual as sete inspecções vão ser feitas é aleatória.
Qual é a probabilidade de que as três primeiras empresas inspeccionadas sejam exactamente os três clubes de futebol?
Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

4. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, os pontos $A(5,0,0)$ e $B(0,3,1)$.



a) Mostre que a recta AB está contida no plano de equação $x + 2y - z = 5$

b) Determine as coordenadas de um ponto C, pertencente ao eixo Oz e de cota positiva, de tal modo que o triângulo $[ABC]$ seja rectângulo em C.

c) Determine o volume do cone que resulta da rotação do triângulo $[AOB]$ em torno do eixo Ox.

Formulário

$sen(2\,x) = 2\,.\,sen\,x\,.\,cos\,x$

$cos(2\,x) = cos^2 x - sen^2 x$

$(tg\,x)' = \frac{1}{cos^2 x}$

Volume do cone = $\frac{1}{3}$ × *Área da Base* × *Altura*

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte.....**81**

Cada questão certa ..... +9
Cada questão errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1 41
a) 15
b).....12
c).....14

2 22
a) 10
b).....12

3 20

4 36
a) 12
b).....12
c).....12

TOTAL **200**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **2.ª FASE**
1998

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Primeira Parte **81**

Cada questão certa ..... +9
Cada questão errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1 41
a) 15
b)..... 12
c)..... 14

2 22
a) 10
b)..... 12

3 20

4 36
a) 12
b)..... 12
c)..... 12

TOTAL **200**

V.S.F.F.

135/C/1

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Primeira Parte

Se o examinando transcrever letras correspondentes às duas versões da prova, a cotação desta primeira parte será zero.

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Versão 1	D	B	A	A	D	C	B	D	A
Versão 2	G	E	E	H	E	E	H	G	F

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, nesta primeira parte, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas / Resp. certas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3	0	0		
3	27	24	21	18	15	12	9			
4	36	33	30	27	24	21				
5	45	42	39	36	33					
6	54	51	48	45						
7	63	60	57							
8	72	69								
9	81									

Segunda Parte

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Critérios específicos

1.
a) **15**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

$\overline{AD} = \frac{1}{tg\,x}$ 4

$\overline{AC} = 2 + \frac{2}{tg\,x}$ 2

$\overline{BI} = 1 + tg\,x$ 4

Área do triângulo $[ABC] = \frac{\left(2 + \frac{2}{tg\,x}\right)(1 + tg\,x)}{2}$ 2

Área do triângulo $[ABC] = 2 + tg\,x + \frac{1}{tg\,x}$ 3

2.º Processo

$\overline{AD} = \frac{1}{tg\,x}$ 4

Área do triângulo $[ADE] = \frac{1}{2\,tg\,x}$ 2

$\overline{BH} = tg\,x$ 3

Área do triângulo $[BEF] = tg\,x$ 2

Área do rectângulo $[DEFG] = 2$ 1

Área do triângulo $[ABC] = 2 + tg\,x + 2 \times \frac{1}{2\,tg\,x}$ 2

Área do triângulo $[ABC] = 2 + tg\,x + \frac{1}{tg\,x}$ 1

Nota: apesar de não fazer parte do programa, o examinando poderá utilizar a função *co-tangente*.

b) **12**

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\frac{-1}{\cos^2 x}}{tg^2 x}$ 4

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{sen^2 x}$ 3

$f'(x) = \frac{sen^2 x - \cos^2 x}{sen^2 x \cdot \cos^2 x}$ 2

$f'(x) = -\frac{\cos^2 x - sen^2 x}{sen^2 x \cdot \cos^2 x}$ 2

$f'(x) = -\frac{\cos(2x)}{sen^2 x \cdot \cos^2 x}$ 1

Nota 1: na sequência do que se disse na nota da alínea anterior, o examinando poderá identificar $\frac{1}{tg\,x}$ com $cotg\,x$ e obter a derivada de $\frac{1}{tg\,x}$ como a derivada de $cotg\,x$, que poderá conhecer. Portanto, o examinando poderá omitir o primeiro passo previsto nestes critérios e escrever directamente $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{sen^2 x}$. A cotação a atribuir a este passo é de 7 pontos.

Nota 2: o examinando poderá começar por escrever $f(x) = 2 + \frac{sen\,x}{\cos x} + \frac{\cos x}{sen\,x}$ e obter f' a partir desta expressão de f. A distribuição das cotações deverá ser, neste caso, idêntica à que foi discriminada acima.

Nota 3: o examinando poderá, em qualquer momento da sua resolução, abandonar a simplificação da expressão da derivada de f e aproveitar o facto do resultado final ser fornecido para igualar a $-\frac{\cos(2x)}{sen^2 x \cdot \cos^2 x}$ a expressão por si obtida, provando depois a identidade que daí resultar. Caberá ao corrector adaptar o desdobramento das cotações a cada caso que encontrar. A título de exemplo, apresentamos seguidamente uma resolução deste tipo com o respectivo desdobramento das cotações:

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{sen^2 x}$ 7

$\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{sen^2 x} = -\frac{\cos(2x)}{sen^2 x \cdot \cos^2 x}$

$\Leftrightarrow sen^2 x - \cos^2 x = -\cos(2x)$ 3

$\Leftrightarrow \cos^2 x - sen^2 x = \cos(2x)$ 2

Observe-se que a primeira equivalência é válida em todo o domínio de f, já que, em $]0, \frac{\pi}{2}[$, se tem $sen\,x \neq 0$ e $\cos x \neq 0$. O facto de o examinando não o explicitar não permite concluir que não o tenha tido em conta, pelo que não deverá ser penalizado.

c) 14

Determinar o zero de f' 7

1.º Processo

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow cos(2x) = 0$ 2

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2}$ (com justificação) 4

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ 1

A justificação referida poderá ser do tipo da que se segue:

Como $0 < x < \frac{\pi}{2}$, vem $0 < 2x < \pi$ e o único valor, entre 0 e π, para o qual o co-seno é zero, é $\frac{\pi}{2}$.

2.º Processo

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow cos(2x) = 0 \wedge x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ 2

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ 2

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ 1

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ 2

3.º Processo

$-\frac{cos(2x)}{sen^2 x . cos^2 x} = 0 \underset{(\text{em } \mathbb{R})}{\Leftrightarrow} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ 4

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ 3

Mostrar que $\frac{\pi}{4}$ é o valor de x para o qual f toma o seu valor mínimo 7

Nota 1: o examinando pode mostrar que $\pi/4$ é o valor de x para o qual a função f toma o seu valor mínimo por, pelo menos, dois processos:

1. Através do estudo da variação do sinal de f' (que pode ser apresentado por meio de um quadro).
2. Através do esboço do gráfico da função, o qual pode ser obtido com recurso à calculadora gráfica. Neste caso, o examinando deverá apresentar uma justificação do tipo da que se segue: "Da análise do gráfico, verifica-se que f é decrescente de 0 até um certo ponto, onde f toma o seu valor mínimo, e depois é crescente desse ponto até $\pi/2$. Logo, o único valor que anula f' é necessariamente o ponto onde f toma o seu valor mínimo".

Nota 2: o examinando, com recurso à calculadora gráfica, poderá apresentar uma resolução (incompleta) baseada na análise do gráfico da função. Mais precisamente, o examinando poderá:

- verificar que f é decrescente de 0 até um certo ponto, onde f toma o valor mínimo, e depois é crescente desse ponto até $\pi/2$;
- utilizar, por exemplo, a função *zoom* da calculadora para encontrar um valor aproximado do pedido.

Nesta situação, a cotação máxima a atribuir é de 7 pontos e deverá ter em conta a descrição do processo de utilização da calculadora e o grau de precisão do valor apresentado (note-se que $\pi/4 \approx 0,7854$).

V.S.F.F.

2.

a) **10**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Substituir M por $8,6$ 3

$log_{10} E = 17,624$ 1

$E = 10^{17,624}$ 4

$E \approx 4,2 \times 10^{17}$ 2

2.º Processo

Substituir M por $8,6$ e E por $4,2 \times 10^{17}$ 3

Primeiro membro $\approx 17,623$ 4

Segundo membro $= 17,624$ 1

Conclusão 2

b) **12**

$E \approx 21 \times 10^{17}$ (ou $2,1 \times 10^{18}$) 3

Escrever a equação $log_{10}\left(21 \times 10^{17}\right) = 5,24 + 1,44\,M$ 2

Resolver a equação 7

$18,32 = 5,24 + 1,44\,M$ 4

$M \approx 9,1$ 3

3. ..... **20**

A probabilidade pedida pode ser obtida por, pelo menos, três processos diferentes, consoante o modelo adoptado para formar o espaço de acontecimentos.

1.º Processo

O espaço de acontecimentos é o conjunto de sequências segundo as quais as sete inspecções vão ser feitas.

Número de casos possíveis $= 7!$ 6

Número de casos favoráveis $= 3! \times 4!$ 10

Probabilidade pedida $= \frac{3! \times 4!}{7!}$ 2

Probabilidade pedida $\approx 3\%$ 2

2.º Processo

O espaço de acontecimentos é o conjunto de sequências segundo as quais as três primeiras inspecções vão ser feitas.

Número de casos possíveis $= {}^{7}A_{3}$ 8

Número de casos favoráveis $= 3!$ 8

Probabilidade pedida $= \frac{3!}{{}^{7}A_{3}}$ 2

Probabilidade pedida $\approx 3\%$ 2

3.º Processo

O espaço de acontecimentos é o conjunto de maneiras de escolher três das sete empresas para realizar as três primeiras inspecções.

Número de casos possíveis $= {}^{7}C_{3}$ 8

Número de casos favoráveis $= 1$ 8

Probabilidade pedida $= \frac{1}{{}^{7}C_{3}}$ 2

Probabilidade pedida $\approx 3\%$ 2

4.

a) **12**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º Processo

Verificar que o ponto A pertence ao plano 5

Verificar que o ponto B pertence ao plano 5

Conclusão 2

2.º Processo

Verificar que o ponto A (ou o ponto B) pertence ao plano 5

Mostrar que a recta AB é paralela ao plano 5

$\overrightarrow{AB} = (-5, 3, 1)$ 2

Referir que o vector de coordenadas

$(1, 2, -1)$ é perpendicular ao plano 1

Verificar que o vector de coordenadas

$(1, 2, -1)$ é perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ 2

Conclusão 2

3.º Processo

Escrever uma condição que define a recta AB 3

Escrever o sistema formado por essa condição e pela equação do plano 2

Concluir que o sistema é indeterminado 5

Conclusão 2

b) **12**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

$C = (0, 0, z)$ 2

$\overrightarrow{AC} = (-5, 0, z)$ 2

$\overrightarrow{BC} = (0, -3, z-1)$ 2

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow z(z-1) = 0$ 3

$C = (0, 0, 1)$ 3

2.º Processo

$C = (0, 0, z)$ 2

$\overrightarrow{AC} = (-5, 0, z)$ 2

$\overrightarrow{BC} = (0, -3, z-1)$ 2

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2$ 2

$35 = 25 + z^2 + 9 + (z-1)^2$ 1

$C = (0, 0, 1)$ 3

c) **12**

Raio da base = $\sqrt{10}$ 3

Área da base = 10π 3

Altura = 5 3

Volume = $\frac{50\pi}{3}$ 3

Nota 1: no enunciado não se pede um valor aproximado do resultado. Subentende-se, assim, que se pretende o valor exacto do volume pedido. No entanto, se o examinando determinar o valor exacto do volume e depois apresentar um valor aproximado, não deverá ser penalizado.

Nota 2: se o examinando trabalhar sempre com valores aproximados, deverá ser penalizado em 2 pontos.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei nº 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos de Carácter Geral e Cursos Tecnológicos

Duração da Prova: 120 minutos **MILITARES**
1998

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

Primeira Parte

Para cada uma das nove questões desta primeira parte, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e **escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde**. Não apresente cálculos. Atenção! Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
Cotação: cada resposta certa, + 9 pontos; cada resposta errada, - 3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos. Um total negativo nesta primeira parte da prova vale 0 pontos.

1. O valor de $\lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1}$ é

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

2. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, contradomínio $]1, 4[$, contínua e estritamente crescente. Qual das afirmações seguintes é verdadeira, relativamente à equação $f(x) = 2$?

(A) Não tem solução. **(B)** Tem exactamente uma solução.
(C) Tem exactamente duas soluções. **(D)** Tem mais de duas soluções.

3. Seja $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = ln\, x$.
No gráfico da função g existe um ponto onde a recta tangente é paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares.
Qual é a abcissa desse ponto?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** e **(D)** $ln\, 2$

4. Considere a sucessão de termo geral $u_n = sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)$
Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira.

(A) (u_n) é crescente **(B)** (u_n) é decrescente
(C) (u_n) é um infinitamente grande **(D)** (u_n) é limitada

5. Considere, num referencial o. n. xOy, uma elipse de focos $F_1(-3,0)$ e $F_2(3,0)$ e cujo eixo maior tem comprimento 12. Seja V o ponto da elipse mais afastado de F_1. Qual é a distância de F_1 a V ?

(A) 6 **(B)** 7 **(C)** 8 **(D)** 9

6. Qual das condições seguintes define, num referencial o. n. $Oxyz$, uma recta paralela ao eixo Oy ?

(A) $x = 1 \wedge y = 2 \wedge z = 3$ **(B)** $x = 2 \wedge z = 1$
(C) $x = y = z$ **(D)** $y = 1$

7. De dois vectores $\overrightarrow{p}$ e $\overrightarrow{q}$ sabe-se que têm ambos norma igual a 3 e que $\overrightarrow{p} \,.\, \overrightarrow{q} = -9$ ($\overrightarrow{p} \,.\, \overrightarrow{q}$ *designa o produto escalar de* $\overrightarrow{p}$ *por* $\overrightarrow{q}$).
Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira.

(A) $\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q} = \overrightarrow{0}$ **(B)** $\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q} = \overrightarrow{0}$
(C) $\overrightarrow{p} \perp \overrightarrow{q}$ **(D)** O ângulo dos vectores $\overrightarrow{p}$ e $\overrightarrow{q}$ é agudo

8. Os números de telefone de uma certa região têm sete algarismos, sendo os três primeiros 123 (por esta ordem).
Quantos números de telefone podem existir nessa região?

(A) 10^7 **(B)** 10^4 **(C)** 7^4 **(D)** ${}^{10}A_4$

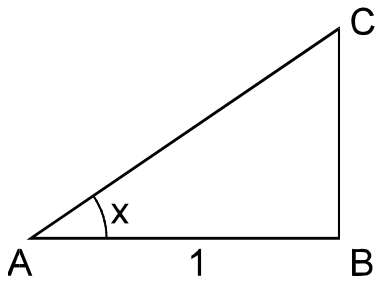
9. Lança-se sucessivas vezes uma moeda portuguesa.
Qual é a probabilidade de serem necessários **pelo menos** três lançamentos, até sair a face escudo?

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{8}$ **(D)** $\frac{1}{16}$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações que entender necessárias.
Atenção: pode ser-lhe útil consultar o formulário apresentado no final da prova.

1. Considere um triângulo rectângulo $[ABC]$, cujos catetos são $[AB]$ e $[BC]$.
Admita que se tem $\overline{AB} = 1$ e que x designa a amplitude do ângulo BAC.



a) Mostre que o perímetro do triângulo $[ABC]$ é dado por

$$f(x) = \frac{1 + sen\, x + cos\, x}{cos\, x} \quad , \quad x \in \left]0,\ \frac{\pi}{2}\right[$$

b) Seja $\alpha \in \left]0,\ \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{3}{5}$.
Determine o valor de $f(\alpha)$.

c) Recorrendo à função derivada de f, mostre que f é crescente.
Interprete geometricamente este resultado.

2. Um pára-quedista salta de um helicóptero. Ao fim de algum tempo, o pára-quedas abre.
Admita que a distância (em metros) a que o pára-quedista se encontra do solo, t segundos **após a abertura do pára-quedas**, é dada por

$$d(t) = 840 - 6\,t + 25\,e^{-1{,}7\,t}$$

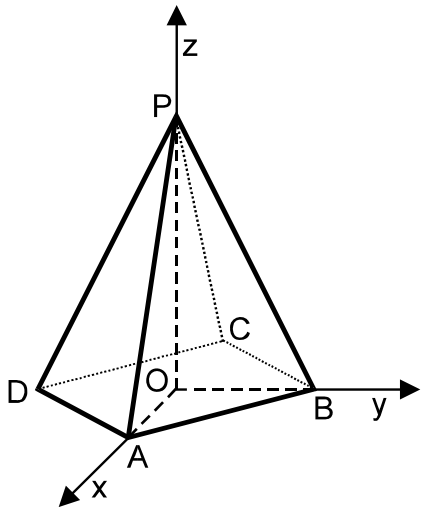
a) Sabendo que, no momento em que o pára-quedista salta do helicóptero, este se encontra a 1500 metros do solo, determine a distância percorrida em queda livre pelo pára-quedista (desde que salta do helicóptero até ao momento da abertura do pára-quedas).

b) Utilize a calculadora para determinar, com aproximação ao segundo, quanto tempo, após a abertura do pára-quedas, demora o pára-quedista a atingir o solo. Explique como procedeu.

3. Trinta soldados participam num exercício. A Marina Santos é um dos trinta soldados.
É necessário escolher três dos trinta soldados para ficarem de sentinela durante a noite.
Admitindo que a escolha é feita ao acaso, qual é a probabilidade de a Marina Santos ficar de sentinela?
Apresente o resultado na forma de percentagem.

4. A figura abaixo representa uma pirâmide quadrangular regular, em referencial o. n. $Oxyz$.

- A base $[ABCD]$ da pirâmide é um quadrado contido no plano xOy
- Os pontos A e C pertencem ao eixo Ox
- Os pontos B e D pertencem ao eixo Oy
- O ponto P pertence ao eixo Oz



a) Sabendo que uma equação do plano ABP é $2x + 2y + z = 6$, determine o volume da pirâmide.

b) Justifique que a recta definida pela condição $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = z$ é perpendicular ao plano ABP e contém a origem do referencial.

c) Determine uma equação da superfície esférica de centro na origem do referencial e que é tangente ao plano ABP.
(Sugestão: tenha em conta a alínea anterior.)

Formulário

Volume da Pirâmide $= \frac{1}{3} \times$ *Área da Base* $\times$ *Altura*

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte.....**81**

Cada questão certa ..... +9
Cada questão errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1 40
a) 13
b).....13
c).....14

2 23
a) 10
b).....13

3 20

4 36
a) 12
b).....12
c).....12

TOTAL **200**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei nº 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos de Carácter Geral e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **Prova Modelo**
1998 **Prova 1**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

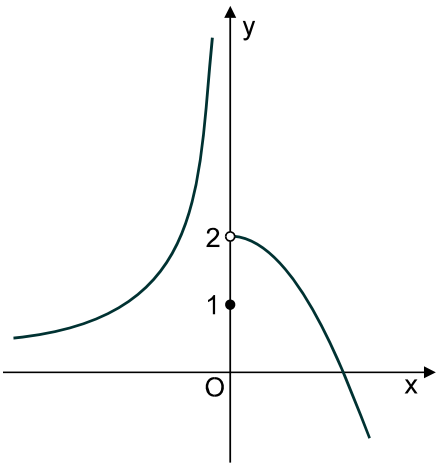
Primeira Parte

Para cada uma das nove questões desta primeira parte, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e **escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde**. Não apresente cálculos. Atenção! Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
Cotação: cada resposta certa, + 9 pontos; cada resposta errada, - 3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos. Um total negativo nesta primeira parte da prova vale 0 pontos.

1. Considere a função f definida por $f(x) = ln(3x)$
(ln designa *logaritmo de base* e).
Indique qual dos seguintes pontos pertence ao gráfico da função f :

(A) $(e\,,\ ln 3)$ **(B)** $(e\,,\ 1 + ln 3)$
(C) $(e\,,\ e + ln 3)$ **(D)** $(e\,,\ e\ ln 3)$

2. Na figura está parte da representação gráfica de uma função g de domínio $\mathbb{R}$ e contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

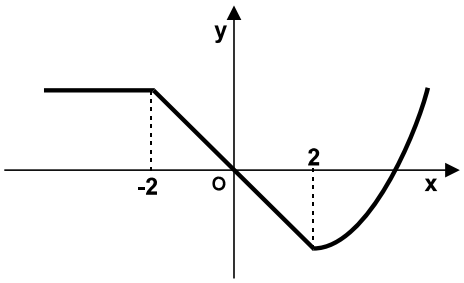


Considere a sucessão de termo geral
$u_n = \frac{1}{n}$

Indique o valor de $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n)$.

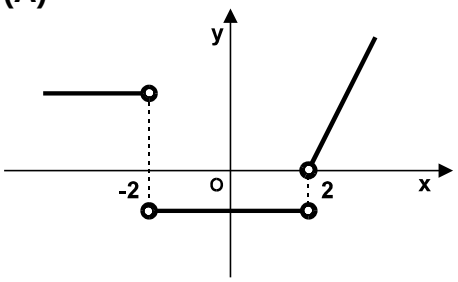
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** $+\infty$

3. Se a representação gráfica de uma função h é

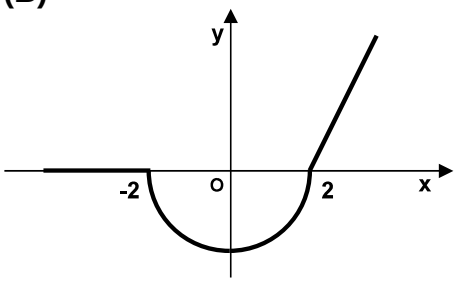


então a representação gráfica de h', derivada de h, pode ser:

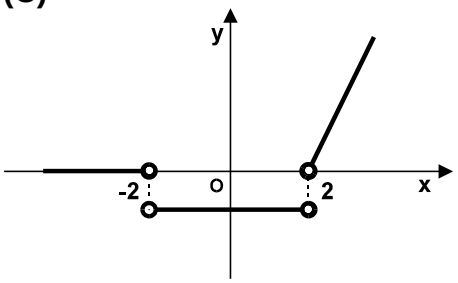
(A)



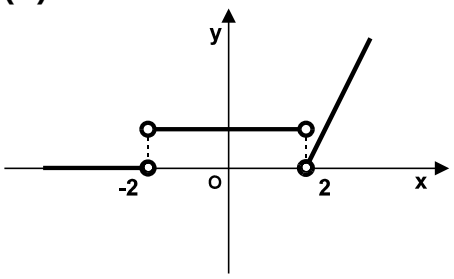
(B)



(C)



(D)



4. Numa certa localidade, o preço a pagar por mês pelo consumo de água é a soma das seguintes parcelas:

- 500 escudos pelo aluguer do contador;
- 200 escudos por cada metro cúbico de água consumido até 10 m^3 ;
- 400 escudos por cada metro cúbico de água consumido para além de 10 m^3.

Indique qual das funções seguintes traduz correctamente o preço a pagar, em escudos, em função do número x de metros cúbicos consumidos.

(A) $a(x) = \begin{cases} 700\,x,\ se\ x \leq 10 \\ 500\ +\ 400\,x,\ se\ x > 10 \end{cases}$

(B) $b(x) = \begin{cases} 500\ +\ 200\,x,\ se\ x \leq 10 \\ 500\ +\ 400\,x\,,\ se\ x > 10 \end{cases}$

(C) $c(x) = \begin{cases} 500\ +\ 200\,x,\ se\ x \leq 10 \\ 2500\ +\ 400\,x,\ se\ x > 10 \end{cases}$

(D) $d(x) = \begin{cases} 500\ +\ 200\,x,\ se\ x \leq 10 \\ 2500\ +\ 400\,(x-10),\ se\ x > 10 \end{cases}$

5. Num referencial o. n. xOy, uma elipse tem focos $F_1\,(2,0)$ e $F_2\,(6,0)$.
Um dos vértices da elipse é a origem O do referencial.
O comprimento do eixo maior da elipse é:

(A) 6 **(B)** 8 **(C)** 10 **(D)** 12

6. Num referencial o. n. $Oxyz$, o ponto de intersecção da recta $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3}$ com o plano xOz tem coordenadas:

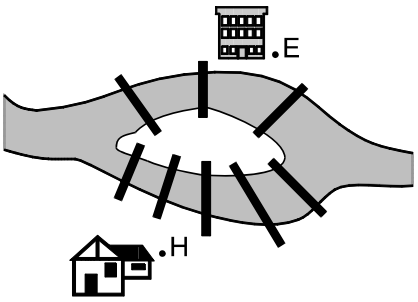
(A) $(-1,\,2,\,0)$ **(B)** $(1,\,0,\,2)$ **(C)** $(1,\,0,\,6)$ **(D)** $(3,\,0,\,6)$

7. Dois planos α e β são estritamente paralelos.
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) Qualquer recta contida em α é paralela a qualquer recta contida em β.
(B) Há rectas contidas em α que intersectam β.
(C) Há rectas perpendiculares a α que não são perpendiculares a β.
(D) Dada uma recta contida em α, existem em β infinitas rectas que lhe são paralelas.

8. Na figura ao lado estão representados:
- o rio que atravessa certa localidade;
- uma ilha situada no leito desse rio;
- as oito pontes que ligam a ilha às margens.

H representa a habitação e E a escola de um jovem dessa localidade.



Para efectuar o percurso **de ida** (*casa-ilha-escola)* **e volta** (*escola-ilha-casa)*, o jovem pode seguir vários caminhos, que diferem uns dos outros pela sequência de pontes utilizadas.
Indique quantos caminhos diferentes pode o jovem seguir, num percurso **de ida e volta**, **sem passar duas vezes pela mesma ponte.**

(A) $5\times 3+4\times 2$ **(B)** $5\times 4\times 3\times 2$ **(C)** $5+4+3+2$ **(D)** $5^2\times 3^2$

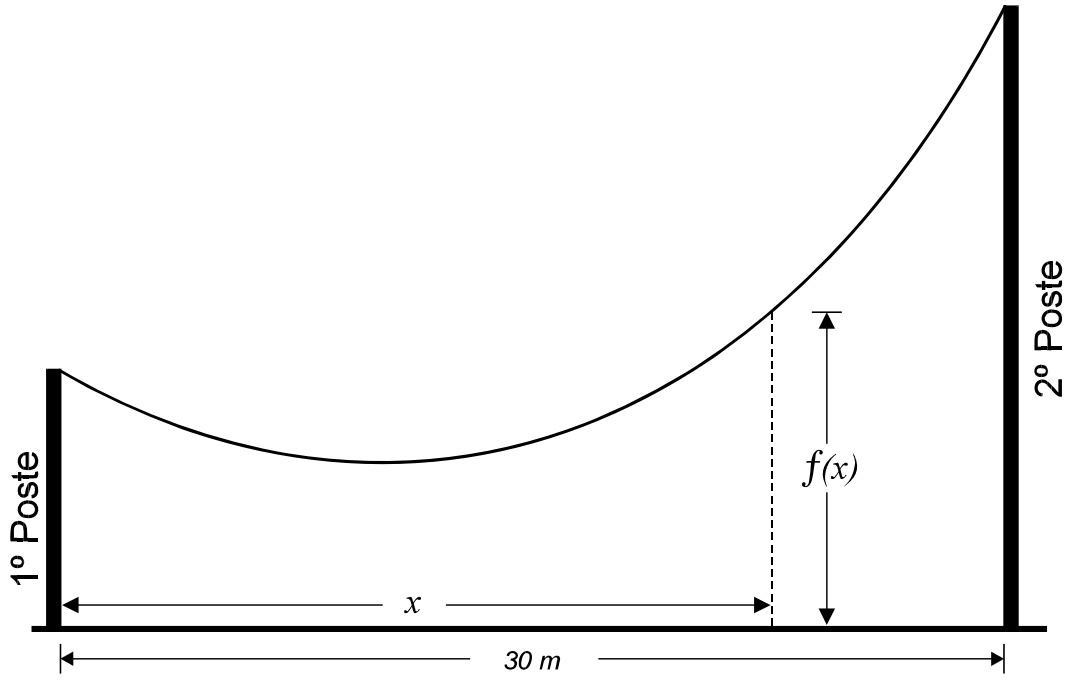
9. Uma moeda equilibrada é lançada **dez vezes**.
A probabilidade do acontecimento "**a face escudo sai exactamente quatro vezes**" é:

(A) ${}^{10}C_4\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ **(B)** $\frac{4}{10}$
(C) $\frac{10}{2^4}$ **(D)** $\frac{4}{2^{10}}$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações que entender necessárias.
Atenção: pode ser-lhe útil consultar o formulário apresentado no final da prova.

1. Um fio encontra-se suspenso entre dois postes. A distância entre ambos é de 30 metros.



Considere a função f definida por $f(x) = 5\left(e^{1-0,1x} + e^{0,1x-1}\right)$.

Admita que $f(x)$ é a distância ao solo, em metros, do ponto do fio situado x metros à direita do primeiro poste.

a) Determine a diferença de altura dos dois postes. Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às décimas.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

b) Recorrendo ao estudo da derivada da função f, determine a distância ao primeiro poste do ponto do fio mais próximo do solo.

2. Considere a função g **definida em** $[0, \pi]$ por $g(x) = sen\, x + sen\,(2x)$

a) Determine os zeros da função g .

b) Estude, quanto à existência de assímptotas, a função h definida em $[0, \pi]\setminus\{\frac{\pi}{2}\}$ por $h(x) = \frac{g(x)}{cos\, x}$

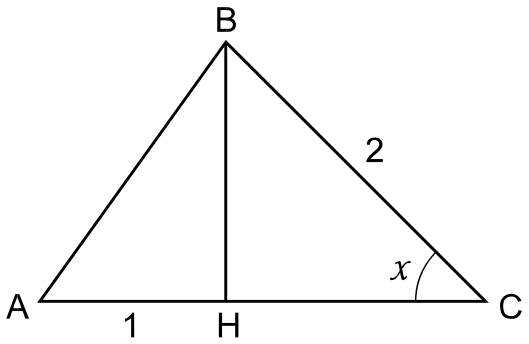
c) Mostre que, para qualquer $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $g(x)$ é a área de um triângulo $[ABC]$, em que

x é a amplitude do ângulo BCA;

$\overline{BC} = 2$;

$[BH]$ é a altura relativa ao vértice B ;

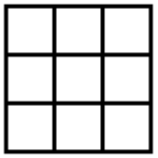
$\overline{AH} = 1$.



3.

Pretende-se colocar, sobre um tabuleiro situado à nossa frente, como o representado na figura, nove peças de igual tamanho e feitio, das quais quatro são brancas e cinco são pretas.

Cada casa do tabuleiro é ocupada por uma só peça.



a) Mostre que existem 126 maneiras diferentes de as peças ficarem colocadas no tabuleiro.

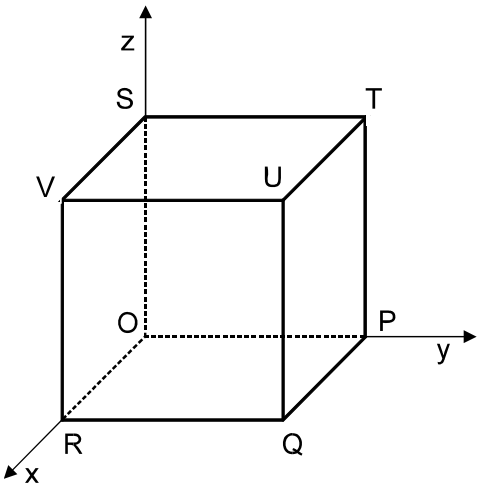
b) Supondo que as peças são colocadas ao acaso, determine a probabilidade de uma das diagonais ficar só com peças brancas.

4. Na figura está representado um cubo, em referencial o.n. $Oxyz$.

O vértice O coincide com a origem do referencial.

O vértice R pertence ao semieixo positivo Ox.
O vértice P pertence ao semieixo positivo Oy.
O vértice S pertence ao semieixo positivo Oz.

A abcissa de R é 2.



a) Determine uma equação cartesiana do plano PUV.

b) Mostre que o raio da superfície esférica que contém os oito vértices do cubo é $\sqrt{3}$ e determine uma equação dessa superfície esférica.

c) Calcule a área da região do plano PUV compreendida entre a secção determinada por esse plano, no cubo, e a secção determinada pelo mesmo plano, na superfície esférica referida na alínea anterior.

Formulário

$sen\,(2x) = 2\,.\,sen\,x\,.\,cos\,x$

$cos\,(2x) = cos^2 x - sen^2 x$

$tg\,(2x) = \frac{2\,tg\,x}{1-tg^2\,x}$

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte.....**81**

Cada questão certa ..... +9
Cada questão errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1 ..... **22**
a) 10
b).....12

2 ..... **33**
a) 12
b).....13
c).....8

3 ..... **22**
a) 10
b).....12

4 ..... **42**
a) 15
b).....15
c).....12

TOTAL **200**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei nº 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos de Carácter Geral e Cursos Tecnológicos

Duração da Prova: 120 minutos **RESERVA 1**
1998

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

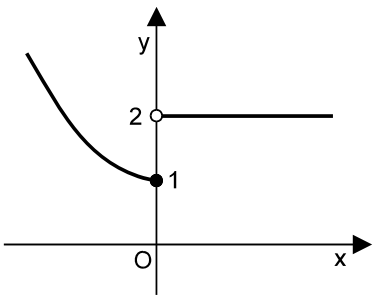
Primeira Parte

Para cada uma das nove questões desta primeira parte, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e **escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde**. Não apresente cálculos. Atenção! Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
Cotação: cada resposta certa, + 9 pontos; cada resposta errada, - 3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos. Um total negativo nesta primeira parte da prova vale 0 pontos.

1. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, injectiva e tal que $f(0) = 0$.
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) f não tem zeros
(B) f tem exactamente um zero
(C) f tem exactamente dois zeros
(D) f tem mais do que dois zeros

2. Na figura está parte da representação gráfica de uma função g.



Indique o valor de $g'(0^+)$, derivada lateral direita de g no ponto 0.

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** $+\infty$

3. Pretende-se desenhar um rectângulo com $80\,cm$ de perímetro.
Qual das expressões seguintes permite obter a área (em cm^2) do rectângulo, em função do comprimento x (em cm) de um dos seus lados?

(A) $x\,.\,(x-40)$ **(B)** $x\,.\,(80-x)$ **(C)** $x\,.\,(40-x)$ **(D)** $(x-80)^2$

4. Qual é o limite da sucessão de termo geral $u_n = tg\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\right)$?

(A) $-\infty$ **(B)** $+\infty$ **(C)** 0 **(D)** 1

5. Considere, num referencial o. n. xOy, a cónica $\mathscr{C}$ definida por $(x-3)^2 = 4\,(y-1)$.
A cónica $\mathscr{C}$ admite como eixo de simetria a recta de equação

(A) $x = 0$ **(B)** $x = 3$ **(C)** $y = 0$ **(D)** $y = 1$

6. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, a recta r definida por $x = y-1 \ \wedge \ z = 4$.
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) r é paralela ao plano xOy
(B) r contém o ponto $(2,3,5)$
(C) r é paralela ao eixo Oz
(D) r é concorrente com o eixo Ox

7. Num referencial o. n. $Oxyz$, considere:
- o plano de α, de equação $y = 4$
- a superfície esférica E, de equação $x^2+(y-2)^2+z^2 = 4$

A intersecção da superfície esférica E com o plano α é

(A) um ponto
(B) uma circunferência de raio 1
(C) uma circunferência de raio 2
(D) o conjunto vazio

8. Antes do começo de uma partida de basquetebol, é habitual os 12 intervenientes (os 5 jogadores de cada equipa e os 2 elementos da equipa de arbitragem) disporem-se uns ao lado dos outros para uma fotografia.
De quantas maneiras diferentes se podem dispor os 12 intervenientes, se os 2 elementos da equipa de arbitragem ficarem no meio, e os jogadores de cada equipa ficarem todos juntos?

(A) $2\times 2\times 5!\times 5!$
(B) $2\times 5!\times 5!$
(C) $2\times 2\times 5!$
(D) $2\times 10!$

9. Uma certa linha do triângulo de Pascal é constituída por todos os números da forma ${}^{24}C_p$.
Escolhendo ao acaso um número dessa linha, qual é a probabilidade de ele ser 1 ?

(A) $\frac{1}{12}$ **(B)** $\frac{1}{24}$ **(C)** $\frac{1}{25}$ **(D)** $\frac{2}{25}$

Segunda Parte

Nas respostas às questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações que entender necessárias. Atenção: pode ser-lhe útil consultar o formulário apresentado no final da prova.

1. Considere a função f, de domínio $[0,\, 2\pi\,]$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 + ln\,(\pi - x)\ , & se \quad 0 \leq x < \pi \\ \\ cos\,(2\,x)\ , & se \quad \pi \leq x \leq 2\,\pi \end{cases}$$

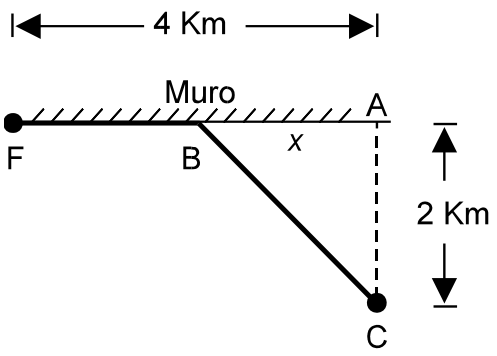
a) Estude f quanto à continuidade.

b) Determine os zeros de f.

c) Seja $\alpha \in [\,\pi,\, 2\,\pi]$ tal que $cos\ \alpha = \frac{2}{3}$. Determine $f\,(\alpha)$.

2. Pretende-se ligar uma fábrica **F** a uma central de tratamento de resíduos **C**, por meio de uma conduta, conforme a figura.

- A conduta deve seguir ao longo de um muro, até um certo ponto B, e daí deve seguir em linha recta até à central de tratamento.
- Designou-se por A o ponto do muro mais próximo da central de tratamento.
- A distância da fábrica ao ponto A é de 4 Km, e a distância deste ponto à central é de 2 Km.
- Designou-se por x a distância entre A e B (em quilómetros).



O preço de colocação da conduta é:
- três mil contos por quilómetro, ao longo do muro;
- cinco mil contos por quilómetro, do muro à central de tratamento.

a) Mostre que o preço de colocação da conduta, em milhares de contos, é dado, em função de x, por

$$p\,(x) = 12 - 3x + 5\,\sqrt{x^2 + 4} \qquad\qquad (\,x \in \,]\,0,\, 4\,[\,)$$

b) Determine o valor de x para o qual o preço de colocação da conduta é mínimo.

3. Para inaugurar uma ponte em Cegonhas de Baixo, a respectiva Junta de Freguesia vai organizar uma feijoada.

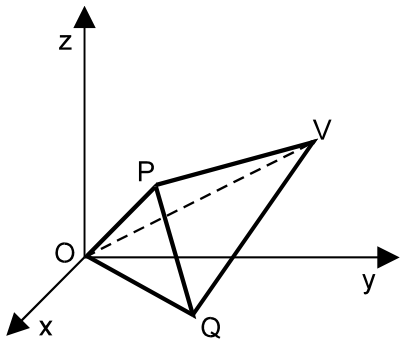
O principal clube desportivo da região, o Cegonhas Futebol Clube, foi convidado a fazer-se representar no almoço por três quaisquer membros da sua direcção. A Srª. Manuela Silvestre e o Sr. António Gonçalves são dois dos sete elementos dessa direcção.

Se a escolha dos três representantes for feita por sorteio, entre os sete membros da direcção do clube, qual é a probabilidade de a Srª. Manuela Silvestre e o Sr. António Gonçalves irem ambos à feijoada?

Apresente o resultado na forma de uma fracção irredutível.

4. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, uma pirâmide triangular não regular $[OPQV]$. Tem-se que:

- O vértice O da pirâmide é a origem do referencial
- O vértice V tem coordenadas $(0, 4, 2)$
- O vértice Q pertence ao plano xOy
- Uma equação do plano OPQ é $x - y = 0$
- Uma equação do plano PQV é $x + y + z = 6$
- Uma equação do plano OPV é $x + y - 2\,z = 0$



a) Mostre que o ponto P tem coordenadas $(2, 2, 2)$ e que o ponto Q tem coordenadas $(3, 3, 0)$.

b) Mostre que o ângulo OPQ é recto.

c) Justifique que a recta PV é perpendicular ao plano OPQ e utilize este facto para determinar o volume da pirâmide $[OPQV]$.

Formulário

$cos\,(2x) = cos^2\,x - sen^2\,x$

$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Volume da Pirâmide = $\frac{1}{3} \times$ *Área da Base* $\times$ *Altura*

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte.....**81**

Cada questão certa ..... +9
Cada questão errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1 37
a) 12
b).....15
c).....10

2 26
a) 11
b).....15

3 20

4 36
a) 12
b).....12
c).....12

TOTAL **200**

1999

PONTO 135/7 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **1.ª Fase**
1999 **1.ª Chamada**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

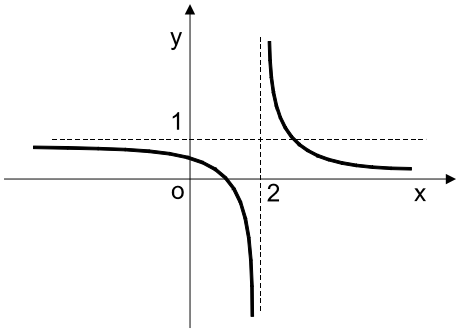
Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.

Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Na figura está desenhada parte da representação gráfica de uma função f, cujo domínio é $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.



As rectas de equações $x = 2$, $y = 1$ e $y = 0$ são assimptotas do gráfico de f.

Seja (x_n) a sucessão de termo geral

$$x_n = 2 - n^2$$

Indique o valor de $\lim f(x_n)$

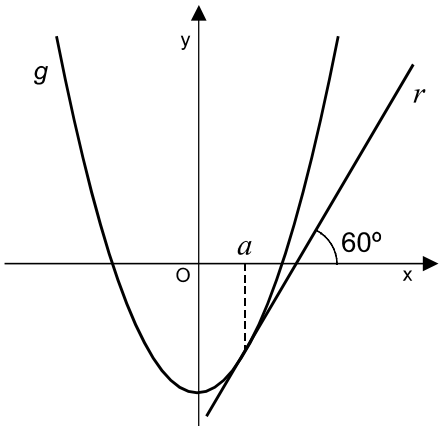
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** $-\infty$ **(D)** $+\infty$

2. Na figura estão representadas:

- parte do gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \sqrt{3}\,x^2 - 1$$

- uma recta r tangente ao gráfico de g, no ponto de abcissa a



A inclinação da recta r é $60°$

Indique o valor de a

(A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **(B)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

3. De uma função h, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- $h(0) = 0$
- h é estritamente crescente no intervalo $[0, 2]$
- h é uma função par

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) h tem um máximo relativo para $x = 0$

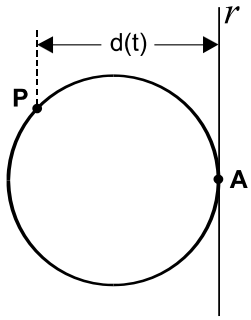
(B) $h(-1) < 0$

(C) h é estritamente decrescente no intervalo $[-1, 0]$

(D) $h(-2) + h(2) = 0$

4. Na figura estão representadas:

- uma circunferência de raio 1
- uma recta r, tangente à circunferência no ponto A

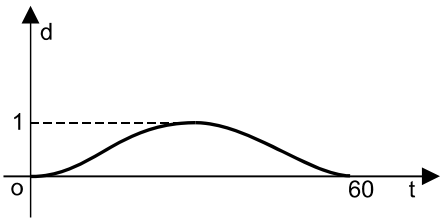


Admita que um ponto P, partindo de A, se desloca sobre a circunferência, em sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio, descrevendo uma única volta em sessenta segundos.

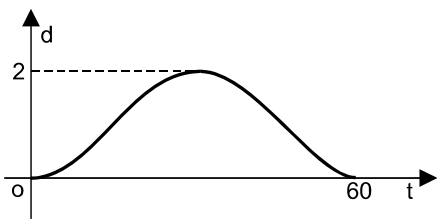
Seja $d(t)$ a distância do ponto P à recta r, t segundos após o início do movimento.

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função d?

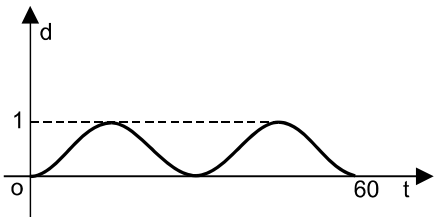
(A)



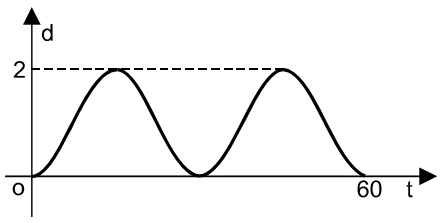
(B)



(C)



(D)



5. Num referencial o.n. xOy, uma parábola P tem vértice $V(3,6)$ e foco $F(-1,6)$.
Indique qual das expressões seguintes é uma equação da directriz da parábola P

(A) $x = -5$ **(B)** $x = 1$ **(C)** $x = 3$ **(D)** $x = 7$

6. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os planos α e β, definidos pelas seguintes equações:

$$\alpha : x = 1 \quad \text{e} \quad \beta : y = 2$$

Seja r a recta de intersecção dos planos α e β.

Indique qual das expressões seguintes é uma equação vectorial da recta r

(A) $(x, y, z) = (1, 2, 0) + k(0, 0, 2)\ ,\ k \in \mathbb{R}$
(B) $(x, y, z) = (1, 1, 0) + k(1, 2, 0)\ ,\ k \in \mathbb{R}$
(C) $(x, y, z) = (1, 1, 0) + k(0, 0, 2)\ ,\ k \in \mathbb{R}$
(D) $(x, y, z) = (1, 2, 0) + k(1, 2, 0)\ ,\ k \in \mathbb{R}$

7. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano definido pela equação $x + 2y + 3z = 10$

Para um certo número real m, a condição $x = y - 2 = \frac{z}{m}$ define uma recta paralela ao referido plano.

Indique o valor de m

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** 2

8. Lança-se quatro vezes consecutivas um dado com as faces numeradas de 1 a 6.
No primeiro lançamento sai face 1 e no segundo sai face 2.

Qual é a probabilidade de os números saídos nos quatro lançamentos serem todos diferentes?

(A) $\frac{6\times5\times4\times3}{6^4}$ **(B)** $\frac{6\times5}{6^4}$ **(C)** $\frac{6\times5}{6^2}$ **(D)** $\frac{4\times3}{6^2}$

9. $\underline{a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ e\ \ f\ \ g}$ representa uma linha completa do Triângulo de Pascal, onde todos os elementos estão substituídos por letras.

Qual das seguintes igualdades é verdadeira?

(A) $c = {}^6C_3$ **(B)** $c = {}^6C_2$ **(C)** $c = {}^7C_3$ **(D)** $c = {}^7C_2$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações que entender necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2\, e^{x+1} & se \quad x \leq 0 \\ \frac{x + \text{sen } x}{x} & se \quad x > 0 \end{cases}$

1.1. Estude a função f quanto à continuidade.

1.2. Mostre que f admite um único máximo no intervalo $]-\infty, 0[$ e determine-o.

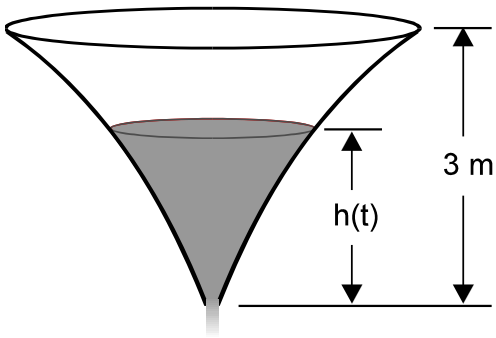
1.3. Seja r a recta de equação $y = 1$.
Mostre que existem infinitos pontos de intersecção da recta r com o gráfico de f.

2. A figura representa um reservatório com três metros de altura.
Considere que, inicialmente, o reservatório está cheio de água e que, num certo instante, se abre uma válvula e o reservatório começa a ser esvaziado.
O reservatório fica vazio ao fim de catorze horas.

Admita que a altura, em metros, da água no reservatório, t horas após este ter começado a ser esvaziado, é dada por

$$h(t) = \log_2(a - b\,t), \quad t \in [0, 14],$$

onde a e b são constantes reais positivas.



2.1. Mostre que $a = 8$ e que $b = \frac{1}{2}$

2.2. Prove que a taxa de variação média de h no intervalo $[6, 11]$ é $-0{,}2$.
Interprete este valor no contexto da situação descrita.

3. A Joana tem na estante do seu quarto três livros de José Saramago, quatro de Sophia de Mello Breyner Andresen e cinco de Carl Sagan.

Quando soube que ia passar as férias a casa da sua avó, decidiu escolher seis desses livros, para ler durante este período de lazer. A Joana pretende levar dois livros de José Saramago, um de Sophia de Mello Breyner Andresen e três de Carl Sagan.

3.1. De quantas maneiras pode fazer a sua escolha?

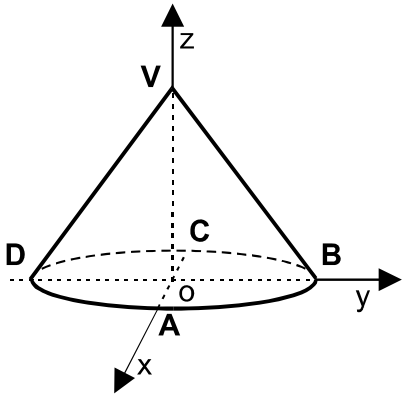
3.2. Admita agora que a Joana **já seleccionou** os seis livros que irá ler em casa da sua avó.

Supondo aleatória a sequência pela qual estes seis livros vão ser lidos, qual é a probabilidade de os dois livros de José Saramago serem lidos um a seguir ao outro? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cone de revolução.

Sabe-se que:

- A base do cone está contida no plano xOy e tem o seu centro na origem do referencial
- $[AC]$ e $[BD]$ são diâmetros da base
- O ponto A pertence ao semieixo positivo Ox
- O ponto B pertence ao semieixo positivo Oy
- O vértice V pertence ao semieixo positivo Oz



4.1. Sabendo que uma equação do plano ABV é $4x + 4y + 3z = 12$, mostre que o comprimento do raio da base é 3 e a altura do cone é 4.

4.2. Determine uma condição que defina a esfera cujo centro é o ponto V e cuja intersecção com o plano xOy é a base do cone.

4.3. Designando por α a amplitude do ângulo BVD, determine o valor de $\operatorname{sen}\alpha$.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte..... **81**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1. 38
1.1. 12
1.2. 15
1.3. 11

2. 25
2.1. 12
2.2. 13

3. 20
3.1. 8
3.2. 12

4. 36
4.1. 12
4.2. 12
4.3. 12

TOTAL **200**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos
1999

1.ª FASE
1.ª CHAMADA

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Primeira Parte **81**

Cada resposta certa	+9
Cada resposta errada	- 3
Cada questão não respondida ou anulada	0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1. 38
- **1.1.** 12
- **1.2.** 15
- **1.3.** 11

2. 25
- **2.1.** 12
- **2.2.** 13

3. 20
- **3.1.** 8
- **3.2.** 12

4. 36
- **4.1.** 12
- **4.2.** 12
- **4.3.** 12

TOTAL **200**

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Primeira Parte

A não indicação da versão da prova implica a anulação da primeira parte.

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Versão 1	B	D	C	B	D	A	B	D	B
Versão 2	D	B	D	C	B	C	C	A	A

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, nesta primeira parte, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas / Resp. certas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3	0	0		
3	27	24	21	18	15	12	9			
4	36	33	30	27	24	21				
5	45	42	39	36	33					
6	54	51	48	45						
7	63	60	57							
8	72	69								
9	81									

Segunda Parte

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Critérios específicos

1.1. 12

Justificar a continuidade de f em $\mathbb{R}^-$ 1

Justificar a continuidade de f em $\mathbb{R}^+$ 1

Justificar a não continuidade de f no ponto 0 10

1.º Processo:

Cálculo de $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ 2

Cálculo de $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ **(ver nota)** 6

Conclusão 2

2.º Processo:

Cálculo de $f(0)$ 2

Cálculo de $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ **(ver nota)** 6

Conclusão 2

Nota:
Os seis pontos atribuídos ao cálculo de $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ devem ser desdobrados de acordo com o seguinte critério:

$\frac{x + \operatorname{sen} x}{x} = 1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ 2

$\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ 3

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$ 1

1.2. ..... **15**

Calcular $f'(x)$ para $x < 0$ 4

$f'(x) = (x^2)' e^{x+1} + x^2 (e^{x+1})'$ 2

$f'(x) = 2x e^{x+1} + x^2 e^{x+1}$ 2

Determinar o zero de f' para $x < 0$ 4

$2x e^{x+1} + x^2 e^{x+1} = 0$

$\Leftrightarrow e^{x+1}(2x + x^2) = 0$ 1

$\Leftrightarrow x(2 + x) = 0$ 1

Concluir que -2 é o zero de f' para $x < 0$ 2

Verificar que -2 é o valor de x para o qual f toma o seu valor máximo, em $\mathbb{R}^-$ **(ver nota)** 5

$f(-2) = 1 + \frac{4}{e}$ 2

Nota:

O examinando pode mostrar que -2 é o valor de x para o qual f toma o seu valor máximo em $\mathbb{R}^-$ por, pelo menos, dois processos:

- através do estudo da variação do sinal de f' (em $\mathbb{R}^-$), que pode ser apresentado por meio de um quadro;

- através do esboço do gráfico da função (em $\mathbb{R}^-$), o qual pode ser obtido com recurso à calculadora gráfica. Neste caso, o examinando deverá apresentar uma justificação do tipo:
  «Da análise do gráfico, verifica-se que f é crescente à esquerda de -2 e decrescente à direita desse ponto. Logo, o único valor que anula f' (em $\mathbb{R}^-$) é, necessariamente, o ponto onde f toma o seu valor máximo, em $\mathbb{R}^-$ (como a função f é diferenciável em $\mathbb{R}^-$, se ela tivesse outro máximo, a sua derivada não teria apenas um zero).»

  ou, mais simplesmente,

  «Da análise do gráfico, verifica-se que f tem um máximo para $x = -2$. Logo, é para $x = -2$ que f toma o seu valor máximo, em $\mathbb{R}^-$ (como a função f é diferenciável em $\mathbb{R}^-$, se ela tivesse outro máximo, a sua derivada não teria apenas um zero).»

1.3. ..... **11**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Resolver a equação $f(x) = 1$, para $x > 0$ 7

$f(x) = 1$

$\Leftrightarrow$ sen $x = 0$ 3

$\Leftrightarrow x = k\pi$, com $k \in \mathbb{N}$ **(ver nota 1)** 4

Concluir a existência de infinitos pontos de intersecção 4

Notas:

1. O examinando que escreva apenas $x = k\pi$, ou que escreva $k \in \mathbb{Z}$, deve ser penalizado em 2 pontos.

2. O examinando pode começar por resolver a equação $f(x) = 1$, em $\mathbb{R}_0^-$.
   Neste caso, a distribuição das cotações deve ser feita como se segue:
   Resolver a equação $f(x) = 1$, para $x \leq 0$ 2
   Resolver a equação $f(x) = 1$, para $x > 0$ 7
   Concluir a existência de infinitos pontos de intersecção 2

3. Depois de obter a equação sen $x = 0$, o examinando pode concluir imediatamente: «Esta equação tem infinitas soluções, para $x > 0$» (sem as explicitar). Neste caso, deve ser atribuída ao examinando a totalidade da cotação prevista para esta questão (11 pontos).

2.º Processo

O examinando pode mostrar que a equação $f(x) = 1$ tem infinitas soluções, em $\mathbb{R}^+$, sem a resolver. Para isso, ele poderá utilizar uma argumentação do tipo da que se segue:

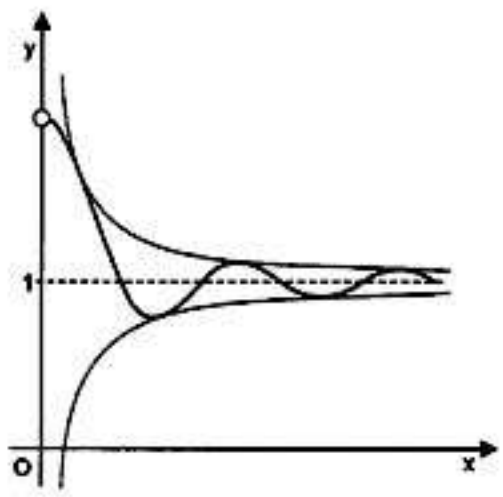
«Tem-se $-1 \leq$ sen $x \leq 1$, com os valores -1 e 1 a serem atingidos, alternadamente, infinitas vezes.

Por isso, o gráfico de f, em $\mathbb{R}^+$, está compreendido entre dois ramos de hipérbole, definidos respectivamente por

$g(x) = 1 - \frac{1}{x} \wedge x > 0$ e

$h(x) = 1 + \frac{1}{x} \wedge x > 0$,

intersectando-os, alternadamente, infinitas vezes.



O Teorema de Bolzano garante então que a equação $f(x) = 1$ tem infinitas soluções, em $\mathbb{R}^+$.»

2.1. ..... **12**

Estabelecer a condição $\log_2(a - b \times 0) = 3$ 3

Estabelecer a condição $\log_2(a - b \times 14) = 0$ 3

$a = 8$ 2

$8 - 14b = 1$ 3

$b = \frac{1}{2}$ 1

Nota:

Se o examinando substituir a por 8 e b por $\frac{1}{2}$ na expressão da função h, obtendo $h(t) = \log_2(8 - \frac{1}{2}t)$, e verificar em seguida que $h(0) = 3$ e que $h(14) = 0$, mostra que o par $\left(8, \frac{1}{2}\right)$ é solução do sistema $\begin{cases} \log_2(a - b \times 0) = 3 \\ \log_2(a - b \times 14) = 0 \end{cases}$ mas não mostra que o par $\left(8, \frac{1}{2}\right)$ é a única solução do referido sistema, pelo que deve ser penalizado em 4 pontos.

2.2. ..... **13**

Verificação pedida 8

Escrever $\frac{h(11) - h(6)}{11 - 6}$ 2

Mostrar que $\frac{h(11) - h(6)}{11 - 6} = -0{,}2$ 6

$h(11) - h(6) = \log_2\left(\frac{5}{2}\right) - \log_2(5)$ 1

$\log_2\left(\frac{5}{2}\right) - \log_2(5) = -1$ **(ver notas 1 e 2)** 4

Restantes cálculos 1

Interpretação **(ver notas 3 e 4)** 5

Notas:

1. Estes 4 pontos devem ser distribuídos de acordo com o seguinte critério:

   Propriedade do logaritmo do quociente 2

   $\log_2(2) = 1$ ou $\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ 2

2. Se o examinando utilizar a calculadora para, através de uma mudança de base, determinar $\log_2\left(\frac{5}{2}\right)$ e $\log_2(5)$, deverá ser penalizado em 1 ponto (note-se que os números em causa são irracionais, pelo que a utilização da calculadora não permite provar a igualdade do enunciado).
   Se, além disso, o examinando não utilizar toda a precisão da calculadora e arredondar os dois valores, deve ser penalizado em mais 1 ponto.

3. Indicam-se a seguir duas formas possíveis de apresentar a interpretação pedida:
   • «A altura da água no reservatório desceu, em média, 0,2 metros por hora, entre os instantes correspondentes a seis e a onze horas após a abertura da válvula.»
   • «No período referido, a altura da água diminuiu a uma velocidade média de 20 centímetros por hora.»

4. Se o examinando referir o caudal médio (ou a velocidade média) com que a água sai do reservatório, em vez da velocidade média de diminuição da altura da água, deverá ser cotado com 0 pontos.

3.1. ..... **8**

Número de maneiras de escolher os dois livros de Saramago $= {}^3C_2$ (ou 3) 1

Número de maneiras de escolher o livro de Sophia $= {}^4C_1$ (ou 4) 1

Número de maneiras de escolher os três livros de Sagan $= {}^5C_3$ 1

Número pedido $= {}^3C_2 \times {}^4C_1 \times {}^5C_3$ 4

${}^3C_2 \times {}^4C_1 \times {}^5C_3 = 120$ 1

A probabilidade pedida pode ser obtida por, pelo menos, três processos, consoante o modelo adoptado para formar o espaço de acontecimentos.

1.º Processo

O espaço de acontecimentos é o conjunto das permutações dos seis livros.

Número de casos possíveis $= 6!$

Número de casos favoráveis $= 5 \times 2! \times 4!$

2.º Processo

Designemos por A e B os dois livros de José Saramago que a Joana escolheu.

O espaço de acontecimentos é o conjunto dos pares ordenados (a, b), onde a designa, na sequência pela qual os seis livros vão ser lidos, o número de ordem de leitura do livro A e b designa, na mesma sequência, o número de ordem de leitura do livro B.

Número de casos possíveis $= {}^6A_2$

Número de casos favoráveis $= 5 \times 2!$

3.º Processo

O espaço de acontecimentos é constituído pelos conjuntos $\{a, b\}$, onde a e b têm o mesmo significado que no 2.º processo.

Número de casos possíveis $= {}^6C_2$

Número de casos favoráveis $= 5$

Qualquer que seja o modelo adoptado para formar o espaço de acontecimentos, a distribuição das cotações deve ser feita como segue:

Número de casos possíveis 5

Número de casos favoráveis 5

Fracção (Regra de Laplace) 1

Simplificação da fracção 1

Notas:

1. Qualquer que seja o modelo adoptado, não se exige que o examinando explicite o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis.

   Por exemplo, numa resposta como $\frac{5\times2!\times4!}{6!} = \frac{1}{3}$ está implícita a contagem correcta dos casos possíveis e dos casos favoráveis.

2. Se o examinando considerar o número de casos possíveis de acordo com um dos modelos e o número de casos favoráveis de acordo com outro modelo, deverá ser cotado em 5 dos 10 pontos previstos para o conjunto dos dois números.
   Por exemplo, uma resposta como $\frac{5\times 2!}{6!}=\frac{1}{72}$ deve ser cotada com 7 pontos (5+1+1).

3. Se o examinando se **limitar a apresentar um resultado**, como por exemplo $\frac{1}{3}$ ou $\frac{5}{6}$, deverá ser cotado com 0 pontos.

4.1. ..... **12**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Mostrar que o comprimento do raio da base do cone é 3 6

O comprimento do raio da base do cone é a ordenada de B 1
B tem coordenadas $(0,b,0)$ 2
$B \in ABV \Leftrightarrow 4\times 0+4\times b+3\times 0=12$ 2
$b=3$ 1

ou

O comprimento do raio da base do cone é a ordenada de B 1
O ponto B é a intersecção de ABV com o eixo Oy 2
Escrever $4x+4y+3z=12 \wedge x=0 \wedge z=0$ 2
$y=3$ 1

Mostrar que a altura do cone é 4 6

A altura do cone é a cota de V 1
V tem coordenadas $(0,0,c)$ 2
$V \in ABV \Leftrightarrow 4\times 0+4\times 0+3\times c=12$ 2
$c=4$ 1

ou

A altura do cone é a cota de V 1
O ponto V é a intersecção de ABV com o eixo Oz 2
Escrever $4x+4y+3z=12 \wedge x=0 \wedge y=0$ 2
$z=4$ 1

2.º Processo

Comprimento do raio da base do cone igual a 3 é equivalente a dizer que as coordenadas de A e de B são, respectivamente, $(3,0,0)$ e $(0,3,0)$ 2

Altura do cone igual a 4 é equivalente a dizer que as coordenadas de V são $(0,0,4)$ 2

Coordenadas de A, B e V serem $(3,0,0)$, $(0,3,0)$ e $(0,0,4)$, respectivamente, é equivalente, dado que os três pontos são não colineares, a ABV ser definido por $4x+4y+3z=12$ 8

4.2. ..... **12**

Escrever as coordenadas do centro da esfera 2

Determinar o raio da esfera $(\overline{VB})$ 5

Escrever a condição $x^2+y^2+(z-4)^2 \leq 25$ 5

Nota:

Determinam-se a seguir algumas penalizações a atribuir pela escrita incorrecta da condição $x^2+y^2+(z-4)^2 \leq 25$.

- Escrever " $=$ " ou " $<$ " em vez de " $\leq$ ": penalização de 2 pontos.
- Escrever 5 em vez de 25 : penalização de 3 pontos.
- Escrever $(z+4)^2$ em vez de $(z-4)^2$: penalização de 3 pontos.

4.3. ..... **12**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º Processo

Determinar as coordenadas do vector $\overrightarrow{VB}$ 1

Determinar as coordenadas do vector $\overrightarrow{VD}$ 1

Determinar $\overrightarrow{VB} \cdot \overrightarrow{VD}$ 2

Determinar $\|\overrightarrow{VB}\|$ 1

Determinar $\|\overrightarrow{VD}\|$ 1

Determinar $\cos\alpha$ 3

Determinar $\text{sen}\,\alpha$ 3

Nota:

Se o examinando utilizar os vectores $\overrightarrow{BV}$ e $\overrightarrow{DV}$, sem justificar a igualdade $\widehat{\overrightarrow{BV}\ \overrightarrow{DV}} = \widehat{\overrightarrow{VB}\ \overrightarrow{VD}}$, deverá ser penalizado em 3 pontos.

2.º Processo

$\alpha = 2\beta$ em que β designa a amplitude do ângulo BVO 1

$\text{sen}\,\alpha = 2\,\text{sen}\,\beta\,\cos\beta$ 5

Determinar sen β 2

Determinar cos β 2

Determinar sen α 2

3.º Processo

$\alpha = \pi - 2\gamma$ em que γ designa a amplitude do ângulo VBO 2

$\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,(2\gamma)$ 2

$\text{sen}\,(2\gamma) = 2\,\text{sen}\,\gamma\,\cos\gamma$ 2

Determinar sen γ 2

Determinar cos γ 2

Determinar sen α 2

Nota:
Deverá ser atribuída a cotação máxima de 11 pontos a um examinando que recorra à calculadora para determinar sen α, utilizando um processo como o que se exemplifica a seguir:

- determinar uma razão trigonométrica do ângulo BVO;
- determinar a amplitude do ângulo BVO;
- duplicar a amplitude do ângulo BVO;
- determinar o respectivo seno.

A cotação a atribuir depende da clareza da descrição apresentada e deverá ter em conta se o examinando arredondou os valores intermédios ou se utilizou toda a precisão da calculadora.

PONTO 135/7 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **1.ª Fase**
1999 **2.ª Chamada**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.

Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, assim definida: $f(x) = \begin{cases} 3\,x\,, & se\ x \leq 1 \\ 2\,x\,, & se\ x > 1 \end{cases}$

Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = f\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

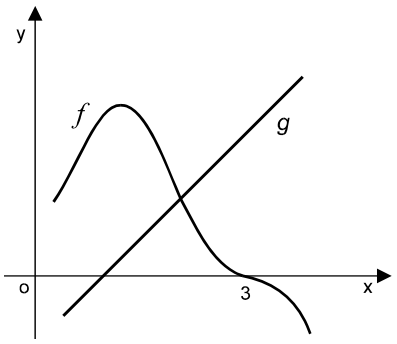
Indique qual das expressões seguintes define o termo geral de (u_n)

(A) $1 + \frac{1}{n}$ **(B)** $2 + \frac{2}{n}$ **(C)** $3 + \frac{3}{n}$ **(D)** $5 + \frac{1}{n}$

2. Na figura está representada parte dos gráficos de duas funções f e g, contínuas em $\mathbb{R}$.

O gráfico de f intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa 3.

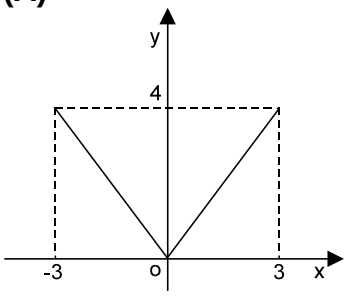
Indique o valor de $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{g(x)}{f(x)}$



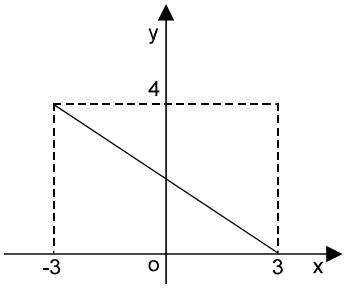
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** $-\infty$ **(D)** $+\infty$

3. De uma certa função f sabe-se que o seu domínio é o intervalo $[-3, 3]$ e que o seu contradomínio é o intervalo $[-4, 4]$.
Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função $|f|$?

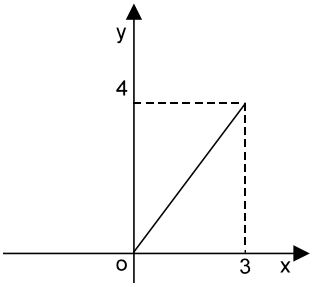
(A)



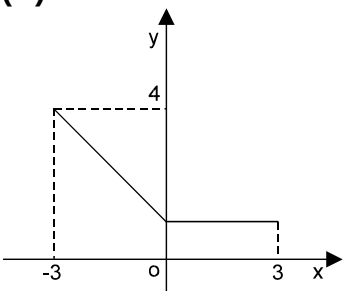
(B)



(C)

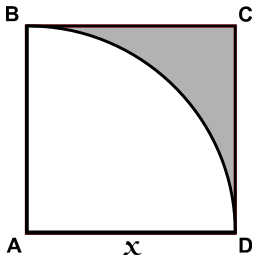


(D)



4. Na figura estão representados:

- um quadrado $[ABCD]$
- um arco de circunferência BD de centro em A



Indique qual das funções seguintes dá a área, em cm^2, da região sombreada, em função do comprimento x, em cm, do lado do quadrado.

(A) $f(x) = \frac{4x - \pi x^2}{2}$

(B) $f(x) = \frac{(1-\pi)x^2}{2}$

(C) $f(x) = \frac{(4-\pi)x^2}{4}$

(D) $f(x) = \frac{\pi - 1}{4} x^2$

5. Considere uma elipse $\mathcal{E}$ de focos F_1 e F_2.
Seja P um ponto da elipse $\mathcal{E}$ tal que $\overline{PF_1} = 6$ e $\overline{PF_2} = 14$.
Seja $[V_1 V_2]$ o eixo menor da elipse $\mathcal{E}$.
Qual é a distância de V_1 a F_1 ?

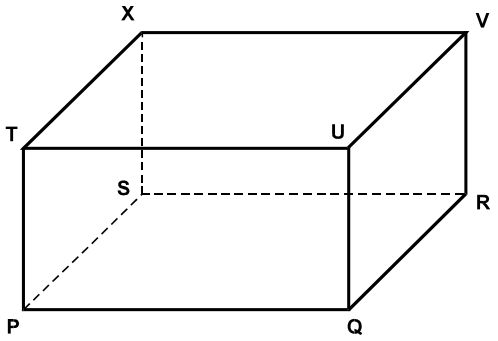
(A) 4 **(B)** 8 **(C)** 10 **(D)** 20

6. Sejam α e β dois planos perpendiculares.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) Qualquer recta paralela a α é paralela a β.
(B) Qualquer recta paralela à intersecção de α e β é paralela a β.
(C) Qualquer recta perpendicular a α é perpendicular a β.
(D) Qualquer recta perpendicular à intersecção de α e β é perpendicular a β.

7. Na figura está representado um paralelepípedo rectângulo $[PQRSTUVX]$.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\overrightarrow{TP} \,.\, \overrightarrow{QU} = 0$
(B) $\overrightarrow{UQ} \,.\, \overrightarrow{TX} = 0$
(C) $\overrightarrow{PQ} \,.\, \overrightarrow{TU} = 0$
(D) $\overrightarrow{PQ} \,.\, \overrightarrow{PV} = 0$

8. O João tem num bolso do casaco uma moeda de 50$00, duas moedas de 100$00 e três moedas de 200$00.
Retirando duas moedas ao acaso, qual é a probabilidade de, com elas, perfazer a quantia exacta de 250$00?

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{1}{5}$

9. Uma nova marca de gelados oferece, em cada gelado, um de três bonecos: Rato Mickey, Peter Pan ou Astérix.
Sete amigos vão comprar um gelado cada um.
Supondo que os três bonecos têm igual probabilidade de sair, qual é a probabilidade de o Rato Mickey sair exactamente a dois dos sete amigos?

(A) ${}^7C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^5$
(B) $\frac{{}^7C_2}{7!}$
(C) ${}^7C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^2$
(D) $\frac{{}^7A_2}{7!}$

Segunda Parte

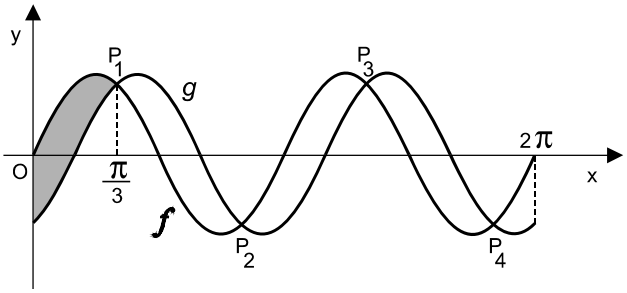
Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações que entender necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Na figura estão as representações gráficas de duas funções, f e g, de domínio $[0, 2\pi]$, definidas por:

$f(x) = \text{sen}\,(2x)$

$g(x) = \cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right)$



P_1, P_2, P_3 e P_4 são os pontos de intersecção dos gráficos de f e de g.

A abcissa de P_1 é $\frac{\pi}{3}$

1.1. Mostre que são perpendiculares as rectas tangentes aos gráficos de f e de g no ponto P_1

1.2. Determine as coordenadas de P_2

1.3. Defina, por meio de uma condição, a região sombreada, incluindo a fronteira.

2. Ao ser lançado, um foguetão é impulsionado pela expulsão dos gases resultantes da queima de combustível numa câmara.
Desde o arranque até se esgotar o combustível, a velocidade do foguetão, em quilómetros por segundo, é dada por:

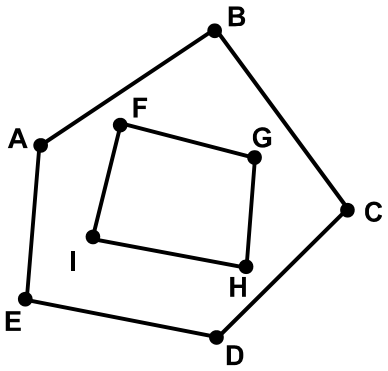
$v(t) = -3\ln(1 - 0{,}005\,t) - 0{,}01\,t$ ($\ln$ significa *logaritmo de base* e).

A variável t designa o tempo, em segundos, após o arranque.

2.1. A massa inicial do foguetão é de 150 toneladas, das quais 80% correspondem à massa do combustível.
Sabendo que o combustível é consumido à taxa de 0,75 toneladas por segundo, justifique que $t \in [0, 160]$.

2.2. Verifique que a derivada da função v, no intervalo $[0, 160]$, é positiva e conclua qual é a velocidade máxima que o foguetão atinge neste intervalo. Apresente o resultado em quilómetros por segundo, arredondado às décimas.

3. Na figura estão representados dois polígonos:



- um pentágono $[ABCDE]$
- um quadrilátero $[FGHI]$

Dos nove vértices representados, não existem três colineares.

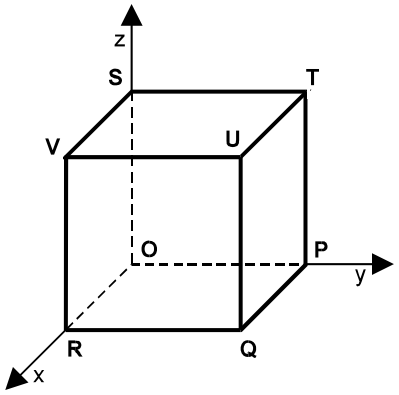
3.1. Determine quantos triângulos têm como vértices três dos nove pontos, de tal modo que dois vértices pertençam a um dos polígonos e o terceiro vértice pertença ao outro polígono.

3.2. A Sandra e o Jorge escolheram cada um, e em segredo, um dos nove vértices representados. Qual é a probabilidade de os dois vértices, assim escolhidos, pertencerem ambos ao mesmo polígono?
Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

4. Na figura está representado um cubo, em referencial o. n. $Oxyz$.

Sabe-se que:

- a face $[OPQR]$ está contida no plano xOy
- a face $[OSVR]$ está contida no plano xOz
- a face $[OSTP]$ está contida no plano yOz
- uma equação do plano VTQ é $x+y+z=6$



4.1. Mostre que o volume do cubo é 27.

4.2. Determine uma equação da superfície esférica tal que:
- o centro é o simétrico de U, em relação ao plano xOy;
- o ponto Q pertence a essa superfície esférica.

4.3. Seja α o plano que contém o ponto S e é paralelo ao plano VTQ.
Prove que a recta RP está contida em α.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte..... **81**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1. 36
1.1. 12
1.2. 12
1.3. 12

2. 25
2.1. 7
2.2. 18

3. 22
3.1. 10
3.2. 12

4. 36
4.1. 12
4.2. 12
4.3. 12

TOTAL **200**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos
1999

1.ª FASE
2.ª CHAMADA

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Primeira Parte **81**

Cada resposta certa	+9
Cada resposta errada.....	- 3
Cada questão não respondida ou anulada	0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1. 36
- **1.1.** 12
- **1.2.** 12
- **1.3.** 12

2. 25
- **2.1.** 7
- **2.2.** 18

3. 22
- **3.1.** 10
- **3.2.** 12

4. 36
- **4.1.** 12
- **4.2.** 12
- **4.3.** 12

TOTAL **200**

V.S.F.F.

135/C/1

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Primeira Parte

A não indicação da versão da prova implica a anulação da primeira parte.

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Versão 1	B	D	A	C	C	B	B	D	A
Versão 2	C	A	B	D	D	D	C	C	A

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, nesta primeira parte, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas / Resp. certas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3	0	0		
3	27	24	21	18	15	12	9			
4	36	33	30	27	24	21				
5	45	42	39	36	33					
6	54	51	48	45						
7	63	60	57							
8	72	69								
9	81									

Segunda Parte

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Critérios específicos

1.1. ..... **12**

$f'(x) = 2\cos(2x)$ 2

$f'(\frac{\pi}{3}) = 2\cos(\frac{2\pi}{3})$ 1

$f'(\frac{\pi}{3}) = -1$ 2

$g'(x) = -2\,\text{sen}(2x - \frac{5\pi}{6})$ 2

$g'(\frac{\pi}{3}) = -2\,\text{sen}(-\frac{\pi}{6})$ 1

$g'(\frac{\pi}{3}) = 1$ 2

Conclusão 2

Nota:
Não deve ser valorizada a escrita das equações das rectas tangentes.

1.2. ..... **12**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º Processo

Concluir que as funções são ambas periódicas de período π 2

Concluir que a abcissa de P_3 é $\frac{\pi}{3} + \pi$ 2

Referir que, por observação do gráfico, a abcissa de P_2 é a única solução da equação $f(x) = g(x)$ no intervalo $]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \pi[$ 1

Verificar que $f(x + \frac{\pi}{2}) = -f(x)$ 1

Verificar que $g(x + \frac{\pi}{2}) = -g(x)$ 1

$f(\frac{\pi}{3}) = g(\frac{\pi}{3}) \Rightarrow f(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}) = g(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2})$ 2

Concluir que a abcissa de P_2 é $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$ 1

Concluir que a ordenada de P_2 é $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2

V.S.F.F.

2.º Processo

Referir que, por observação do gráfico, a abcissa de P_2

parece ser $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$ 3

Verificar que $f(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3

Verificar que $g(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3

Concluir que as coordenadas de P_2 são $\left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 3

3.º Processo

Escrever a equação $\operatorname{sen}(2x) = \cos(2x - \frac{5\pi}{6})$ 1

Resolver a equação (por exemplo, em $\mathbb{R}$) 7

$\operatorname{sen}(2x) = \cos(2x - \frac{5\pi}{6}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2} - (2x - \frac{5\pi}{6})\right]$ 1

$\Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}(\frac{4\pi}{3} - 2x)$ 1

$\Leftrightarrow 2x = \frac{4\pi}{3} - 2x + 2k\pi \vee$

$2x = \pi - \frac{4\pi}{3} + 2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 2

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ 3

ou

$\operatorname{sen}(2x) = \cos(2x - \frac{5\pi}{6}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) = \cos(2x - \frac{5\pi}{6})$ 2

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2x = 2x - \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee$

$\frac{\pi}{2} - 2x = -2x + \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 2

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ 3

Concluir que a abcissa de P_2 é $\frac{5\pi}{6}$ 2

Concluir que a ordenada de P_2 é $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2

1.3. ..... **12**

Escrever a condição $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ 4

Escrever a condição $\cos(2x - \frac{5\pi}{6}) \leq y \leq \text{sen}(2x)$ 6

Conjunção das duas condições 2

Nota:

O examinando pode escrever $g(x) \leq y \leq f(x)$ em vez de $\cos(2x - \frac{5\pi}{6}) \leq y \leq \text{sen}(2x)$.

Neste caso, o examinando pode escrever apenas $x \leq \frac{\pi}{3}$ em vez de $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.

2.1. ..... **7**

Justificar que $t \geq 0$ 1

Justificar que $t \leq 160$ 6

Concluir que a massa inicial do combustível é de 120 toneladas 2

Concluir que o combustível se esgota ao fim de 160 seg. 4

Nota:

Não se exige que o examinando verifique que a expressão

$$-3\ \ln(1 - 0,005\,t) - 0,01\,t$$

tem significado para qualquer $t \in [0, 160]$.

V.S.F.F.

135/C/5

2.2. ..... **18**

Determinar v' 5

$v'(t) = -3\frac{-0{,}005}{1-0{,}005t} - 0{,}01$ 4

$v'(t) = \frac{0{,}015}{1-0{,}005t} - 0{,}01$ 1

Verificar que $v'(t) > 0$ 8

$\frac{0{,}015}{1-0{,}005t} - 0{,}01 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}015 > 0{,}01(1 - 0{,}005t)$ **(ver nota 1)** 4

$\Leftrightarrow t > -100$ 2

Concluir que $v'(t) > 0$, pois $t \in [0, 160]$ 2

ou

$\frac{0{,}015}{1-0{,}005t} - 0{,}01 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{0{,}005 + 0{,}00005t}{1-0{,}005t} > 0$ 2

Concluir que $v'(t) > 0$ **(ver nota 2)** 6

Concluir que a velocidade máxima é $v(160)$ 3

$v(160) \approx 3{,}2$ **(ver nota 3)**..... 2

Notas:

1. Ao desembaraçar de denominadores, o examinando deverá referir que o denominador é positivo para qualquer $t \in [0, 160]$. Se não o fizer, deverá ser penalizado em 2 pontos.

2. O examinando pode concluir que a fracção $\frac{0{,}005 + 0{,}00005t}{1-0{,}005t}$ é sempre positiva, para qualquer $t \in [0, 160]$, por, pelo menos, dois processos:

   - através de uma tabela de sinais;
   - através da constatação de que, quer o numerador, quer o denominador da fracção são positivos, para qualquer $t \in [0, 160]$.

3. Se o examinando não apresentar o resultado com o arredondamento pedido, deverá ser penalizado em 1 ponto.

3.1. ..... **10**

Número pedido $= {}^5C_2 \times 4 + {}^4C_2 \times 5 \left(\text{ou } {}^9C_3 - {}^5C_3 - {}^4C_3\right)$ 9

Número pedido $= 70$ 1

3.2. ..... **12**

Número de casos possíveis $= 9^2$ 4

Número de casos favoráveis $= 4^2 + 5^2$ 6

Probabilidade pedida $= \frac{4^2+5^2}{9^2}$ 1

Probabilidade pedida $\approx 51\%$ 1

Nota:

Se o examinando escrever $\frac{{}^4A_2 + {}^5A_2}{{}^9A_2}$ ou $\frac{{}^4C_2 + {}^5C_2}{{}^9C_2}$, que corresponde à situação de serem necessariamente diferentes os dois pontos escolhidos pela Sandra e pelo Jorge, deve ser cotado em 5 dos 11 pontos previstos para a obtenção da fracção $\frac{4^2+5^2}{9^2}$.

4.1. ..... **12**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Determinar o comprimento a da aresta do cubo 11

O ponto Q tem coordenadas $(a, a, 0)$ 5

$Q \in VTQ \Leftrightarrow a + a + 0 = 6$ 5

$a = 3$ 1

$3^3 = 27$ 1

2.º Processo

Volume do cubo igual a 27 é equivalente a dizer que o comprimento da aresta é igual a 3 1

Comprimento da aresta igual a 3 é equivalente a dizer que as cordenadas de V, T e Q são, respectivamente $(3, 0, 3)$, $(0, 3, 3)$ e $(3, 3, 0)$ 3

Coordenadas de V, T e Q serem $(3, 0, 3)$, $(0, 3, 3)$ e $(3, 3, 0)$, respectivamente, é equivalente, dado que os três pontos são não colineares, a VTQ ser definido por $x + y + z = 6$ 8

V.S.F.F.

135/C/7

4.2. ..... **12**

Centro da superfície esférica: $(3, 3, -3)$ 4

Raio da superfície esférica $= 3$ 4

Escrever a condição $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = 9$ 4

Nota:

Determinam-se a seguir algumas penalizações a atribuir pela escrita incorrecta da condição $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = 9$.

- Escrever " $\leq$ " em vez de " $=$ ": penalização de 2 pontos.
- Escrever 3 em vez de 9: penalização de 3 pontos.
- Escrever $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 9$: penalização de 3 pontos.

4.3. ..... **12**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Justificar que o plano α é o plano PRS **(ver nota)**..... 10

Conclusão 2

Nota:

Esta justificação pode ser feita, por exemplo, do seguinte modo:

- a recta RP é paralela ao plano VTQ (pois RP é paralela a VT);
- a recta RS é paralela ao plano VTQ (pois RS é paralela a QT);
- existem, portanto, no plano PRS, duas rectas (RS e RP) concorrentes, que são paralelas ao plano VTQ;
- logo, os planos PRS e VTQ são paralelos;
- portanto, o plano PRS contém S e é paralelo a VTQ, pelo que o plano α é o plano PRS.

2.º Processo

Escrever uma equação do plano α 6

Justificar que R pertence ao plano α 2

Justificar que P pertence ao plano α 2

Conclusão 2

PONTO 135/8 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **2.ª Fase**
1999

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.

Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Considere a função f, definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 - 4 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

Indique o conjunto dos zeros de f.

(A) $\{-2\ ,\ 2\}$ **(B)** $\{-2\ ,\ -1\ ,\ 2\}$

(C) $\{2\}$ **(D)** $\{-1\ ,\ 2\}$

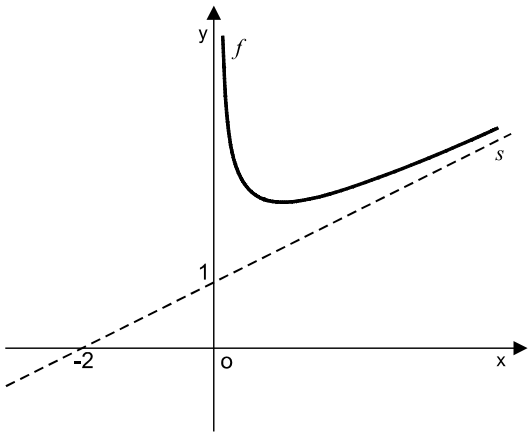
2. Indique qual das expressões seguintes define uma função **injectiva**, de domínio $\mathbb{R}$.

(A) $\cos x$ **(B)** $x^2 - x$

(C) $|x| + 1$ **(D)** x^3

3. Na figura ao lado está representada graficamente uma função f, de domínio $\mathbb{R}^+$.

A recta s, que contém os pontos $(-2, 0)$ e $(0, 1)$, é assimptota do gráfico de f.

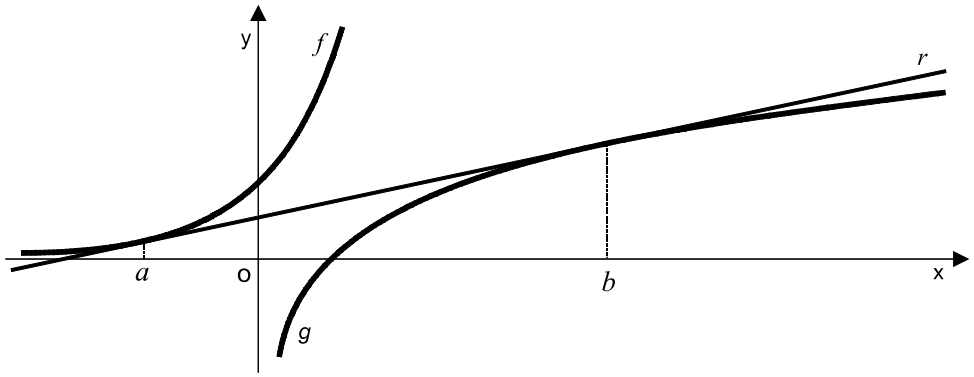


Indique o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

(A) -2 **(B)** 0 **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** 1

4. Na figura abaixo estão representadas graficamente duas funções:

- a função f, definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = e^{x}$
- a função g, definida em $\mathbb{R}^{+}$ por $g(x) = \ln x$ ($\ln$ designa logaritmo na base e)



A recta r é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a e é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa b.

Qual das igualdades seguintes é verdadeira?

(A) $e^{a} = \frac{1}{b}$ **(B)** $e^{a} = \ln b$ **(C)** $e^{a+b} = 1$ **(D)** $\ln(ab) = 1$

5. Num referencial o. n. $Oxyz$, qual das seguintes condições define uma recta paralela ao eixo Oz?

(A) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ **(B)** $(x, y, z) = (1, 2, 0) + k\,(1, 1, 0)\ ,\ \ k \in \mathbb{R}$

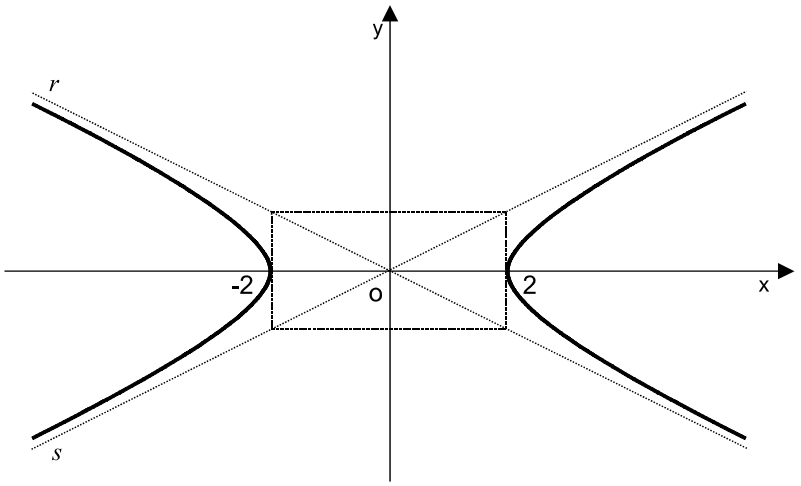
(C) $z = 1$ **(D)** $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = z$

6. Num referencial o. n. $Oxyz$, a condição $\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 2 \\ \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} \end{cases}$ define

(A) um ponto **(B)** o conjunto vazio

(C) uma recta **(D)** um plano

7. Na figura abaixo está representada graficamente uma hipérbole.



Os vértices da hipérbole são os pontos $(2, 0)$ e $(-2, 0)$.

As assimptotas da hipérbole são as rectas r e s, de equações $y = -\frac{x}{2}$ e $y = \frac{x}{2}$, respectivamente.

Qual das condições seguintes é uma equação desta hipérbole?

(A) $y^2 - x^2 = 2$ **(B)** $x^2 - 4\,y^2 = 4$

(C) $2\,x^2 - y^2 = 8$ **(D)** $x^2 - y^2 = 4$

8. De quantas maneiras se podem sentar três raparigas e quatro rapazes, num banco de sete lugares, sabendo que em cada um dos extremos fica uma rapariga?

(A) 120 **(B)** 240 **(C)** 720 **(D)** 5040

9. Acabou o tempo de um jogo de basquetebol, e uma das equipas está a perder por um ponto, mas tem ainda direito a dois lances livres.
O Manuel vai tentar encestar.
Sabendo que este jogador concretiza, em média, 70% dos lances livres que efectua e que cada lance livre concretizado corresponde a um ponto, qual é a probabilidade de o jogo terminar empatado?

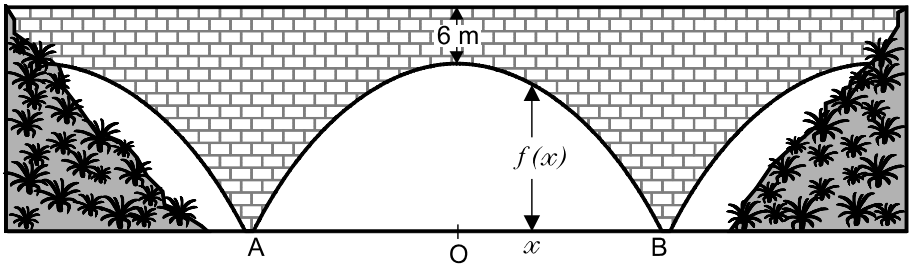
(A) $0,14$ **(B)** $0,21$ **(C)** $0,42$ **(D)** $0,7$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações que entender necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. A figura representa uma ponte sobre um rio.



A distância mínima do **arco central** da ponte ao tabuleiro é 6 metros.

Sejam A e B os pontos de intersecção do **arco central** da ponte com o nível da água do rio, e seja O o ponto médio de $[AB]$.

Considere a recta AB como um eixo orientado da esquerda para a direita, com origem no ponto O e onde uma unidade corresponde a um metro.

Para cada ponto situado entre A e B, de abcissa x, a altura do arco, em metros, é dada por

$$f(x) = 36 - 9\,(\,e^{0{,}06\,x} + e^{-0{,}06\,x}\,)$$

1.1. Recorrendo ao estudo da derivada da função f, mostre que, tal como a figura sugere, é no ponto de abcissa zero que a altura do arco é máxima.

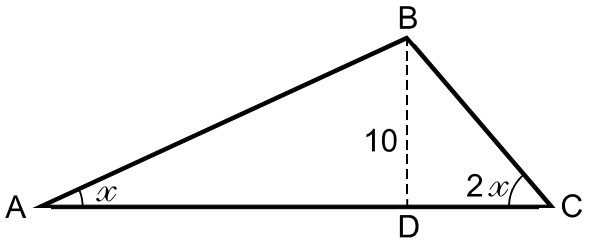
1.2. Uma empresa está a estudar a hipótese de construir uma barragem neste rio. Se tal empreendimento se concretizasse, o nível das águas no local da ponte subiria 27 metros.
Nesse caso, a ponte ficaria totalmente submersa? Justifique a sua resposta.

1.3. Mostre que a distância, em metros, entre A e B é um valor compreendido entre 43 e 44.

2. Na figura está representado um triângulo $[ABC]$.

Tem-se que:

- x designa a amplitude do ângulo BAC
- a amplitude do ângulo BCA é igual ao dobro da amplitude do ângulo BAC
- a altura $\overline{BD}$ é igual a 10



Seja $g(x) = \dfrac{75 - 25\ \text{tg}^2\, x}{\text{tg}\ x}$

2.1. Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é dada por $g(x)$, para qualquer $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$

2.2. Considere o triângulo $[ABC]$ quando $x = \frac{\pi}{4}$

Classifique-o quanto aos ângulos e quanto aos lados e prove que a sua área ainda é dada por $g(x)$.

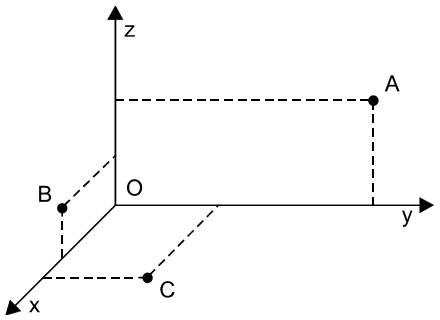
3. Para representar Portugal num campeonato internacional de hóquei em patins foram seleccionados dez jogadores: dois guarda-redes, quatro defesas e quatro avançados.

3.1. Sabendo que o treinador da selecção nacional opta por que Portugal jogue sempre com um guarda-redes, dois defesas e dois avançados, quantas equipas diferentes pode ele constituir?

3.2. Um patrocinador da selecção nacional oferece uma viagem a cinco dos dez jogadores seleccionados, escolhidos ao acaso.

Qual é a probabilidade de os dois guarda-redes serem contemplados com essa viagem? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4. Na figura estão representados três pontos, em referencial o. n. $Oxyz$



Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(0, 5, 2)$
- o ponto B pertence ao plano xOz
- o ponto C pertence ao plano xOy
- a recta BC tem equação vectorial $(x, y, z) = (5, 4, -1) + k\,(1, 2, -1),\ k \in \mathbb{R}$

4.1. Mostre que o ponto B tem coordenadas $(3, 0, 1)$ e que o ponto C tem coordenadas $(4, 2, 0)$.

4.2. Mostre que o triângulo $[ABC]$ é rectângulo em C.

4.3. Considere a superfície esférica de centro em A, cuja intersecção com o plano xOy é uma circunferência de raio 3. Determine uma equação dessa superfície esférica.

FIM

Formulário

$\text{sen}\,(2x) = 2\,.\,\text{sen}\,x\,.\,\cos x$ $\qquad$ $\cos(2x) = \cos^2 x - \text{sen}^2\,x$ $\qquad$ $\text{tg}\,(2x) = \dfrac{2\,\text{tg}\,x}{1-\text{tg}^2\,x}$

COTAÇÕES

Primeira Parte..... **81**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1. 35
1.1. 12
1.2. 10
1.3. 13

2. 26
2.1. 14
2.2. 12

3. 22
3.1. 10
3.2. 12

4. 36
4.1. 12
4.2. 12
4.3. 12

TOTAL **200**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.° Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.° 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **2.ª FASE**
1999

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Primeira Parte **81**

Cada resposta certa	+9
Cada resposta errada	- 3
Cada questão não respondida ou anulada	0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1. ..... **35**
- **1.1.** **12**
- **1.2.** **10**
- **1.3.** **13**

2. ..... **26**
- **2.1.** **14**
- **2.2.** **12**

3. ..... **22**
- **3.1.** **10**
- **3.2.** **12**

4. ..... **36**
- **4.1.** **12**
- **4.2.** **12**
- **4.3.** **12**

TOTAL **200**

V.S.F.F.

135/C/1

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Primeira Parte

A não indicação da versão da prova implica a anulação da primeira parte.

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Versão 1	C	D	C	A	A	A	B	C	C
Versão 2	B	D	B	B	C	D	A	D	C

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, nesta primeira parte, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas / Resp. certas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3	0	0		
3	27	24	21	18	15	12	9			
4	36	33	30	27	24	21				
5	45	42	39	36	33					
6	54	51	48	45						
7	63	60	57							
8	72	69								
9	81									

Segunda Parte

Critérios gerais

A cotação a atribuir em cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Critérios específicos

1.1. ..... **12**

Calcular $f'(x)$ 4

$f'(x) = -9(e^{0,06x} + e^{-0,06x})'$ 1

$f'(x) = -9(0,06e^{0,06x} - 0,06e^{-0,06x})$ 3

Determinar o zero de f' **(ver nota 1)** 4

$-9(0,06e^{0,06x} - 0,06e^{-0,06x}) = 0$

$\Leftrightarrow 0,06e^{0,06x} - 0,06e^{-0,06x} = 0$ 1

$\Leftrightarrow e^{0,06x} = e^{-0,06x}$ 1

$\Leftrightarrow 0,06x = -0,06x$ 1

$\Leftrightarrow x = 0$ 1

Verificar que 0 é o valor de x para o qual f toma o seu valor máximo **(ver nota 2)** 4

Notas:

1. Caso o examinando se limite a verificar que $f'(0) = 0$, não prova que f' tem um único zero, pelo que deve ser cotado em apenas 2 dos 4 pontos previstos para a determinação do zero de f'.

2. O examinando pode mostrar que 0 é o valor de x para o qual f toma o seu valor máximo por, pelo menos, dois processos:

   - através do estudo da variação do sinal de f', que pode ser apresentado por meio de um quadro;

   - através do gráfico da função. Neste caso, o examinando deverá apresentar uma justificação do tipo:

     «Da análise do gráfico, verifica-se que f é crescente até um certo ponto e decrescente depois desse ponto. Logo, o único valor que anula f' é o ponto onde f toma o seu valor máximo (como a função f é diferenciável, se ela tivesse outro máximo, a sua derivada não teria apenas um zero).»

     ou, mais simplesmente,

     «Da análise do gráfico, verifica-se que o único valor que anula f' é o ponto onde f é máximo (como a função f é diferenciável, se ela tivesse outro máximo, a sua derivada não teria apenas um zero).»

V.S.F.F.
135/C/3

1.2. ..... **10**

$f(0) = 18$ 5

Altura do tabuleiro $= 24$ m 2

Concluir que a ponte ficaria totalmente submersa 3

1.3. ..... **13**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º Processo

Equacionar o problema (escrever a equação $f(x) = 0$) 4

Resolver (analiticamente) a equação $f(x) = 0$ 6

$f(x) = 0$

$\Leftrightarrow e^{0,06x} + e^{-0,06x} = 4$ 1

$\Leftrightarrow (e^{0,06x})^2 - 4\,e^{0,06x} + 1 = 0$ 1

$\Leftrightarrow e^{0,06x} = 2 \pm \sqrt{3}$ 1

$\Leftrightarrow 0,06\,x = \ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$ 1

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right)}{0,06}$ 1

$\Rightarrow x \approx \pm\, 21,95$ 1

Conclusão ($\overline{AB} \approx 43,9$) 3

2.º Processo

Equacionar o problema (escrever a equação $f(x) = 0$) ou referir que as abcissas dos pontos A e B são os zeros de f 4

Utilizar a calculadora gráfica para encontrar valores aproximados dos zeros de f (os valores deverão ter, no mínimo, uma casa decimal, tendo em vista a conclusão pretendida) 6

Conclusão ($\overline{AB} \approx 43,9$) 3

3.º Processo

$43 < \overline{AB} < 44 \Leftrightarrow 21,5 < \overline{OB} < 22$ 2

$21,5 < \overline{OB} < 22 \Leftrightarrow$ a abcissa de B pertence a $]21,5\,;\,22[$ 4

Como f é estritamente decrescente em $\mathbb{R}^+$ (a sua derivada é negativa em $\mathbb{R}^+$), e como $f(21,5) > 0$ e $f(22) < 0$, vem que o único zero de f em $\mathbb{R}^+$ está compreendido entre $21,5$ e 22, pelo que a abcissa de B pertence, efectivamente, a $]21,5\,;\,22[$ **(ver notas 1 e 2)**..... 7

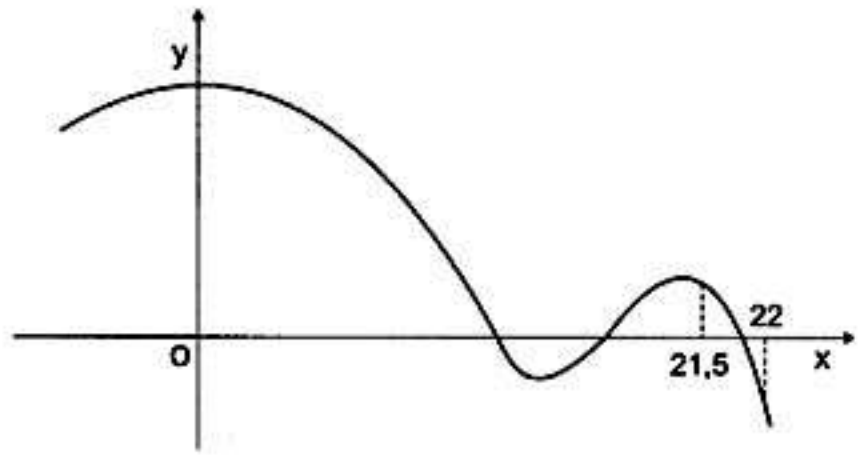
Notas:

1. Designámos por f a função definida em $\mathbb{R}$ por $36 - 9(e^{0,06\,x} + e^{-0,06\,x})$, ou seja, designámos por f uma extensão a $\mathbb{R}$ da função f do enunciado, a qual está definida entre as abcissas dos pontos A e B. Trata-se, evidentemente, de um abuso de notação que não tem qualquer inconveniente.

2. Note-se que não está completa uma resolução do tipo:

   «Como f é contínua e se tem $f(21,5) > 0$ e $f(22) < 0$, vem, pelo Teorema de Bolzano, que f tem um zero em $]21,5;22[$, pelo que a abcissa de B está neste intervalo.»

   É necessário, em complemento, garantir a unicidade do zero de f em $\mathbb{R}^+$, o que pode ser feito através do estudo da monotonia de f. De facto, como a figura abaixo ilustra, se f tivesse mais do que um zero em $\mathbb{R}^+$, como se poderia afirmar que aquele que nos interessa está compreendido entre $21,5$ e 22?



Note-se, por outro lado, que **não é necessário evocar o Teorema de Bolzano, nem a continuidade** de f. A existência de um zero da função em $\mathbb{R}^+$ está garantida pelo enunciado (é a abcissa do ponto B). Só temos de provar que esse zero está compreendido entre $21,5$ e 22. Para isso, basta garantir que f é estritamente decrescente em $\mathbb{R}^+$ e que $f(21,5) > 0$ e $f(22) < 0$ (se, em $\mathbb{R}^+$, o zero de f, que sabemos que existe, não estivesse entre $21,5$ e 22, a função não seria estritamente decrescente).

Se o examinando basear a sua resolução no Teorema de Bolzano e não provar que, em $\mathbb{R}^+$, f só tem um zero, deverá ser cotado em 4 dos 7 pontos previstos para esta parte da resolução do problema. Por outro lado, se o examinando se limitar a determinar valores aproximados de $f(21,5)$ e de $f(22)$ e não acrescentar mais nada, deverá ser cotado em 2 desses 7 pontos.

V.S.F.F.

2.1. ..... **14**

Área do triângulo $= \frac{\overline{AC} \times \overline{BD}}{2}$ 1

$\overline{AD} = \frac{10}{\text{tg } x}$ 3

$\overline{CD} = \frac{10}{\text{tg } (2x)}$ 3

$\overline{AC} = \frac{10}{\text{tg } x} + \frac{10}{\text{tg } (2x)}$ 1

Restantes cálculos **(ver nota)** 6

Nota:
Existem muitos processos possíveis para chegar à expressão pretendida. Apresentam-se a seguir dois desses processos, com a respectiva distribuição dos 6 pontos.

$\overline{AC} = \frac{15-5\,\text{tg}^2\,x}{\text{tg } x}$ 3

$g(x) = 5 \times \frac{15-5\,\text{tg}^2\,x}{\text{tg } x}$ 2

$g(x) = \frac{75-25\,\text{tg}^2\,x}{\text{tg } x}$ 1

ou

$g(x) = \left(\frac{10}{\text{tg } x} + \frac{10}{\text{tg } (2x)}\right) \times 5$ 2

$g(x) = \frac{50}{\text{tg } x} + \frac{50\,(1-\text{tg}^2\,x)}{2\,\text{tg } x}$ 2

$g(x) = \frac{75-25\,\text{tg}^2\,x}{\text{tg } x}$ 2

2.2. ..... **12**

Classificar o triângulo 6
- Referir que o triângulo é rectângulo 3
- Referir que o triângulo é isósceles 3

Referir que a área do triângulo é $\frac{10 \times 10}{2} = 50$ 2

$g(\frac{\pi}{4}) = 50$ 4
- $\text{tg}\,(\frac{\pi}{4}) = 1$ 2
- Restantes cálculos 2

3.1. ..... **10**

Número de maneiras de escolher o guarda-redes $= {}^{2}C_{1}$ (ou 2) 1

Número de maneiras de escolher os dois defesas $= {}^{4}C_{2}$ 1

Número de maneiras de escolher os dois avançados $= {}^{4}C_{2}$ 1

Número pedido $= {}^{2}C_{1} \times {}^{4}C_{2} \times {}^{4}C_{2}$ 5

${}^{2}C_{1} \times {}^{4}C_{2} \times {}^{4}C_{2} = 72$ 2

3.2. ..... **12**

A probabilidade pedida pode ser obtida por, pelo menos, dois processos, consoante o modelo adoptado para formar o espaço de acontecimentos.

1.º Processo

O espaço de acontecimentos é a colecção de conjuntos $\{a, b, c, d, e\}$, em que a, b, c, d e e designam cinco dos dez jogadores.

Número de casos possíveis $= {}^{10}C_{5}$

Número de casos favoráveis $= {}^{8}C_{3}$ (ou ${}^{2}C_{2} \times {}^{8}C_{3}$)

2.º Processo

O espaço de acontecimentos é o conjunto das sequências (a, b, c, d, e), sem elementos repetidos, em que a, b, c, d e e designam cinco dos dez jogadores.

Número de casos possíveis $= {}^{10}A_{5}$

Número de casos favoráveis $= {}^{5}C_{2} \times 2 \times {}^{8}A_{3}$ (ou ${}^{5}A_{2} \times {}^{8}A_{3}$)

Qualquer que seja o modelo adoptado para formar o espaço de acontecimentos, a distribuição das cotações deve ser feita como segue:

Número de casos possíveis 5

Número de casos favoráveis 5

Fracção (Regra de Laplace) 1

Resultado na forma de fracção irredutível 1

Notas:

1. Qualquer que seja o modelo adoptado, não se exige que o examinando explicite o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis.

   Por exemplo, numa resposta como $\frac{{}^{8}C_{3}}{{}^{10}C_{5}} = \frac{2}{9}$ está implícita a contagem correcta dos casos possíveis e dos casos favoráveis.

V.S.F.F.

2. Se o examinando considerar o número de casos possíveis de acordo com um dos modelos e o número de casos favoráveis de acordo com outro modelo, deverá ser cotado em 5 dos 10 pontos previstos para o conjunto dos dois números.

   Por exemplo, uma resposta como $\frac{^8C_3}{^{10}A_5} = \frac{1}{540}$ deve ser cotada com 7 pontos (5+1+1).

3. Se o examinando se **limitar a apresentar um resultado**, como por exemplo $\frac{2}{9}$, deverá ser cotado com 0 pontos.

4.1. ..... **12**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, cinco processos:

1.º Processo

Escrever a equação $4 + 2k = 0$ 3

$4 + 2k = 0 \Leftrightarrow k = -2$ 1

Concluir que B tem coordenadas $(3, 0, 1)$ 2

Escrever a equação $-1 - k = 0$ 3

$-1 - k = 0 \Leftrightarrow k = -1$ 1

Concluir que C tem coordenadas $(4, 2, 0)$ 2

2.º Processo

Escrever a condição $\frac{x-5}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+1}{-1}$ (ou outra equivalente) 2

Atribuir a y o valor 0, na condição $\frac{x-5}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+1}{-1}$ 3

Concluir que B tem coordenadas $(3, 0, 1)$ 2

Atribuir a z o valor 0, na condição $\frac{x-5}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+1}{-1}$ 3

Concluir que C tem coordenadas $(4, 2, 0)$ 2

3.º Processo

Mostrar que o ponto $(3,0,1)$ pertence à recta de equação $(x,y,z) = (5,4,-1) + k(1,2,-1),\ k \in \mathbb{R}$ 3

Referir que o ponto $(3,0,1)$ pertence ao plano xOz, pelo facto de ter ordenada nula 2

Concluir que $(3,0,1)$ é o ponto B 1

Mostrar que o ponto $(4,2,0)$ pertence à recta de equação $(x,y,z) = (5,4,-1) + k(1,2,-1),\ k \in \mathbb{R}$ 3

Referir que o ponto $(4,2,0)$ pertence ao plano xOy, pelo facto de ter cota nula 2

Concluir que $(4,2,0)$ é o ponto C 1

4.º Processo

Referir que o ponto $(3,0,1)$ pertence ao plano xOz, pelo facto de ter ordenada nula 2

Referir que o ponto $(4,2,0)$ pertence ao plano xOy, pelo facto de ter cota nula 2

Determinar o vector $(4,2,0) - (3,0,1) = (1,2,-1)$ 2

Referir que esse vector é o vector director da recta BC 2

Mostrar que os pontos $(4,2,0)$, $(3,0,1)$ e $(5,4,-1)$ são colineares 4

5.º Processo

Referir que o ponto $(3,0,1)$ pertence ao plano xOz, pelo facto de ter ordenada nula 2

Referir que o ponto $(4,2,0)$ pertence ao plano xOy, pelo facto de ter cota nula 2

Determinar uma condição que defina a recta que contém os pontos $(3,0,1)$ e $(4,2,0)$ 3

Mostrar que essa condição é equivalente à equação $(x,y,z) = (5,4,-1) + k(1,2,-1),\ k \in \mathbb{R}$ 5

V.S.F.F.

4.2. ..... **12**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Determinar as coordenadas do vector $\overrightarrow{AC}$ 3

Determinar as coordenadas do vector $\overrightarrow{BC}$ 3

Verificar que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ 5

Conclusão 1

2.º Processo

Determinar $\overline{AB}$ 3

Determinar $\overline{AC}$ 3

Determinar $\overline{BC}$ 3

Verificar que $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ 2

Conclusão 1

4.3. ..... **12**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Determinar o raio da superfície esférica, por aplicação do
Teorema de Pitágoras **(ver nota 1)** 8

Escrever uma equação da superfície esférica **(ver nota 2)** 4

Notas:

1. O examinando deverá complementar a aplicação do Teorema de Pitágoras com:
   - um desenho ou um esquema que mostre de uma forma clara o triângulo em relação ao qual o Teorema de Pitágoras é aplicado (um dos catetos no plano yOz, de comprimento 2, e o outro no plano xOy, de comprimento 3);

   ou

   - uma referência ao facto de o centro da circunferência de intersecção da superfície esférica com o plano xOy ser o ponto $(0, 5, 0)$.

   Se não fizer nenhuma das coisas, deverá ser penalizado em 2 pontos.

2. Determinam-se a seguir algumas penalizações a atribuir pela escrita incorrecta da condição $x^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2 = 13$.
   - Escrever " $<$ " ou " $\leq$ " em vez de " $=$ ": penalização de 2 pontos.
   - Escrever $\sqrt{13}$ em vez de 13 : penalização de 3 pontos.
   - Escrever $(y+5)^2$ e/ou $(z+2)^2$: penalização de 3 pontos.

2.º Processo

Escrever o sistema $\begin{cases} x^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2 = r^2 \\ z = 0 \end{cases}$ 2

$\begin{cases} x^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2 = r^2 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y-5)^2 = r^2 - 4 \\ z = 0 \end{cases}$ 2

Escrever a equação $r^2 - 4 = 9 \quad (3^2)$ 6

Concluir que $r^2 = 13$ 1

Escrever a equação $x^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2 = 13$ 1

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos de Carácter Geral e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **MILITARES**
1999

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Considere a função f definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = \ln x$ ($\ln$ designa logaritmo de base e).

Seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Qual é o valor de $\lim f(u_n)$?

(A) $+\infty$ **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** e

2. Seja g uma função definida por $g(x) = \text{tg } x$.
Qual dos seguintes conjuntos poderá ser o domínio de g ?

(A) $\left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right[$ **(B)** $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$

(C) $]0, \pi[$ **(D)** $]\pi, 2\pi[$

3. Considere uma função h de domínio $\mathbb{R}^+$.

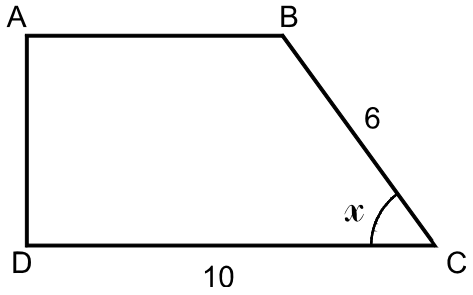
A recta de equação $y = -2$ é assimptota do gráfico de h.

Seja h' a função derivada de h.

Indique qual dos seguintes pode ser o valor de $\lim_{x \to +\infty} h'(x)$

(A) 0 **(B)** -2 **(C)** $+\infty$ **(D)** $-\infty$

4. A figura representa um trapézio rectângulo $[ABCD]$.
Tem-se que $\overline{BC} = 6$ e $\overline{CD} = 10$.



Seja $x \in]0, \pi[$ a amplitude do ângulo BCD e seja $f(x) = \overline{AB}$ (f é, portanto, a função que, a cada x, associa o comprimento da base $[AB]$ do trapézio, quando a amplitude do ângulo BCD é x).

Qual das afirmações seguintes sobre a função f é verdadeira?

(A) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$ **(B)** $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6$

(C) $\lim_{x \to 0} f(x) = 4$ **(D)** $\lim_{x \to 0} f(x) = 6$

5. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, as superfícies esféricas de equações

$x^2 + y^2 + (z - 10)^2 = 9$ e $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 9$

A intersecção das duas superfícies esféricas é

(A) um ponto. **(B)** uma circunferência.
(C) uma superfície esférica. **(D)** o conjunto vazio.

6. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, dois planos concorrentes, de equações

$x - y + 3z = 1$ e $x + y - 7z = 7$

Seja r a recta de intersecção dos dois planos.

Qual dos pontos seguintes pertence à recta r ?

(A) $(5, 5, 0)$ **(B)** $(1, 0, 0)$ **(C)** $(0, 0, -1)$ **(D)** $(4, 3, 0)$

7. Considere, num referencial o. n. xOy, a elipse tal que:

- os seus focos são os pontos $(-3, 0)$ e $(3, 0)$
- um dos pontos de intersecção da elipse com o eixo Oy é o ponto $(0, 4)$

Qual das condições seguintes é uma equação desta elipse?

(A) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ **(B)** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

(C) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ **(D)** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

8. Sete amigos vão ao futebol ver um desafio entre o clube Alfa e o clube Beta.
Três deles são adeptos do clube Alfa e quatro são adeptos do clube Beta.
No estádio sentam-se na mesma fila, uns ao lado dos outros, distribuidos ao acaso.
Qual é a probabilidade de os adeptos do clube Alfa ficarem todos juntos e os adeptos do clube Beta ficarem também todos juntos ?

(A) $\frac{3! \times 4!}{7!}$ **(B)** $\frac{2 \times 3! \times 4!}{7!}$

(C) $\frac{2}{3! \times 4!}$ **(D)** $\frac{1}{3! \times 4!}$

9. Um dos termos do desenvolvimento de $(\pi + e)^n$ é $120\,\pi^7 e^3$
Indique o valor de n.

(A) 10 **(B)** 12 **(C)** 20 **(D)** 21

Segunda Parte

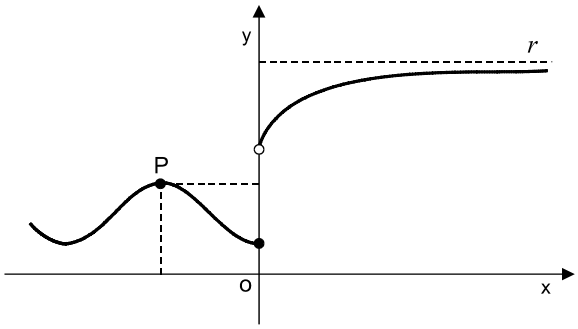
Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações que entender necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Considere a função f, definida por $f(x) = \begin{cases} 2 - \cos x & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{7x+4}{x+1} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$

Na figura junta estão representados:

- parte do gráfico de f
- a recta r, assimptota do gráfico de f
- o ponto P, cuja abcissa é o maior dos maximizantes da restrição de f a $\mathbb{R}_{\circ}^{-}$



1.1. Determine as coordenadas do ponto P.

1.2. Determine o contradomínio da função f.

2. Um pára-quedista salta de um avião. Ao fim de cinco segundos, o pára-quedas abre. Um minuto depois de ter saltado, o pára-quedista atinge o solo.

Admita que a velocidade do pára-quedista, medida em metros por segundo, t segundos após ele ter saltado do avião, é dada, para um certo valor de k, por

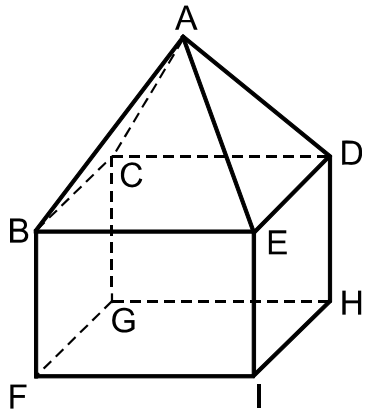
$$v(t) = \begin{cases} 55\left(1 - e^{k\,t}\right) & \text{se } t < 5 \\ 6 + 27\,e^{-1{,}7\,(t-5)} & \text{se } t \geq 5 \end{cases}$$

2.1. Sabendo que a função v é contínua, determine o valor de k (apresente o resultado arredondado às milésimas).

2.2. Estude a função quanto à monotonia, para $t \geq 5$. Interprete a conclusão a que chegou.

2.3. Comente a seguinte afirmação: *Após a abertura do pára-quedas, a velocidade tem uma variação acentuada nos primeiros quatro segundos, após os quais estabiliza, permanecendo praticamente constante até à chegada ao solo*.

3. Na figura está representado o sólido $[ABCDEFGHI]$



Dispomos de cinco cores (*amarelo, branco, castanho, preto* e *vermelho*) para colorir as suas nove faces.
Cada face é colorida por uma única cor.

3.1. De quantas maneiras diferentes podemos colorir o sólido, supondo que as quatro faces triangulares só podem ser coloridas de *amarelo*, de *branco* ou de *castanho*, e que as cinco faces rectangulares só podem ser coloridas de *preto* ou de *vermelho*?

3.2. Admita agora que o sólido vai ser colorido ao acaso, podendo qualquer cor colorir qualquer face.
Determine a probabilidade de exactamente cinco faces ficarem coloridas de branco e as restantes faces com cores todas distintas.
Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas de milésima.

4. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, os pontos $A(2,3,10)$ e $B(10,13,25)$.
Um tiro é disparado de A, de tal forma que o projéctil passa pelo ponto B.

4.1. Pretende-se atingir um alvo situado no ponto $C(98,123,190)$.
Mostre que, se o projéctil seguir uma trajectória rectilínea, o alvo é atingido.

4.2. A trajectória rectilínea só é garantida se o alvo se encontrar a menos de 300 unidades do local onde o projéctil é disparado.
Prove que, no caso presente, a trajectória rectilínea está garantida.

4.3. Justifique que existe um e um só plano α que contém a origem do referencial e os pontos A, B e C.
Averigúe se esse plano é perpendicular ao plano xOy.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte..... **81**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1. 22
1.1. 10
1.2. 12

2. 39
2.1. 12
2.2. 15
2.3. 12

3. 22
3.1. 11
3.2. 11

4. 36
4.1. 12
4.2. 12
4.3. 12

TOTAL **200**

PROVA N.º 135/7 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei nº 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos de Carácter Geral e Cursos Tecnológicos

Duração da Prova: 120 minutos **PROVA MODELO**
1999

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

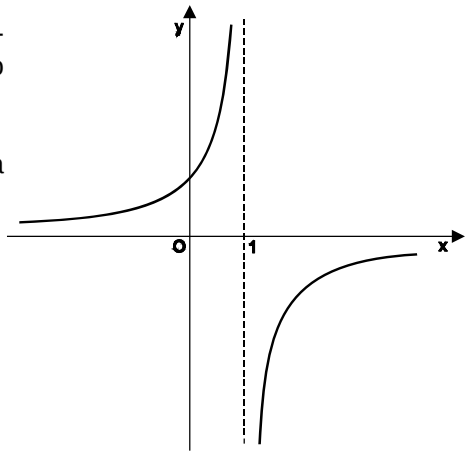
Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.

Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, ou se a letra transcrita for ilegível, a questão será anulada.
- Não apresente cálculos.

1. Na figura está desenhada parte da representação gráfica de uma função f, cujo domínio é $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.



A recta de equação $x = 1$ é uma assimptota vertical do gráfico de f.

Considere a sucessão de termo geral

$$x_n = 1 + \frac{1}{n}$$

Seja $u_n = f(x_n)$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\lim u_n = -\infty$

(B) $\lim u_n = +\infty$

(C) $\lim u_n = 1$

(D) Não existe $\lim u_n$

2. Seja $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = \log_2\left(2 \,.\, \sqrt[3]{x}\right)$

Indique qual das expressões seguintes também pode definir a função g.

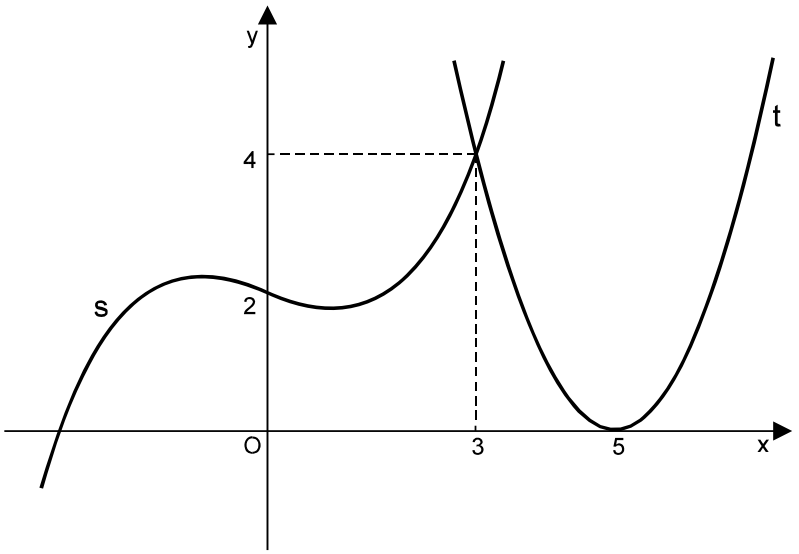
(A) $2 + \log_2\left(\sqrt[3]{x}\right)$

(B) $2\log_2\left(\sqrt[3]{x}\right)$

(C) $\frac{3+\log_2 x}{3}$

(D) $\frac{1+\log_2 x}{2}$

3. Na figura estão representadas graficamente as funções s e t.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A função t não tem zeros

(B) 2 é um zero da função s

(C) 5 é um zero da função $\frac{s}{t}$

(D) 3 é um zero da função $s - t$

4. De uma função h, **contínua** em $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- $h(-2) = 3$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$
- A recta de equação $y = -4$ é assimptota do gráfico de h
- h é estritamente crescente no intervalo $]-\infty, -2]$ e estritamente decrescente no intervalo $[-2, +\infty[$

Qual das afirmações seguintes é **falsa**?

(A) A função h tem dois zeros

(B) O contradomínio de h é $]-\infty, 3]$

(C) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -4$

(D) $h(0) < -4$

5. Num referencial o. n. xOy, considere as elipses definidas pelas equações:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \qquad \text{e} \qquad \frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

As duas elipses têm

(A) o mesmo centro.

(B) os mesmos focos.

(C) os mesmos vértices.

(D) a mesma excentricidade.

6. Num referencial o. n. $Oxyz$, considere o plano α, de equação $x+y=4$

O plano α é

(A) paralelo ao plano xOy

(B) perpendicular ao plano xOy

(C) paralelo ao eixo Ox

(D) perpendicular ao eixo Ox

7. Num referencial o. n. $Oxyz$, considere:

- a esfera definida pela condição $x^2+y^2+z^2\leq 25$
- o plano de equação $z=4$

Qual é a área da intersecção da esfera com o plano?

(A) π **(B)** 3π **(C)** $6\,\pi$ **(D)** $9\,\pi$

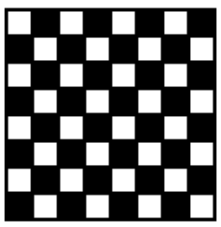
8. Considere duas linhas consecutivas do triângulo de Pascal, das quais se reproduzem alguns elementos:

.....	36	a	126	.....
.....	120	b	.....	

Indique o valor de b.

(A) 164 **(B)** 198 **(C)** 210 **(D)** 234

9. Admita que tem à sua frente um tabuleiro de xadrez, no qual pretende colocar os dois cavalos brancos, de tal modo que fiquem na mesma fila horizontal.
De quantas maneiras diferentes pode colocar os dois cavalos no tabuleiro, respeitando a condição indicada?



(A) $8\times {}^{8}C_{2}$ **(B)** ${}^{64}C_{2}$ **(C)** $\dfrac{{}^{64}C_{2}}{8}$ **(D)** ${}^{8}A_{2}$

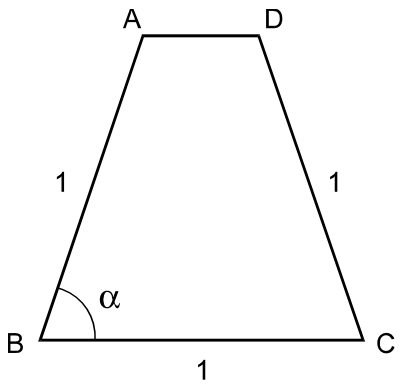
Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações que entender necessárias.

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \text{sen}\,(x) - \frac{1}{2}\,\text{sen}\,(2\,x)$

1.1. Recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto, determine $f'(0)$.

1.2. $[ABCD]$ é um trapézio isósceles; os lados $[AD]$ e $[BC]$ são paralelos.



Tem-se que:

- $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 1$
- $\overline{AD} \leq 1$

Seja α a amplitude do ângulo ABC $\left(\alpha \in \left]\, \frac{\pi}{3}\,,\, \frac{\pi}{2}\,\right]\right)$.

1.2.1. Mostre que, para cada $\alpha \in \left]\, \frac{\pi}{3}\,,\, \frac{\pi}{2}\,\right]$, a área do trapézio é igual a $f\,(\alpha)$.

1.2.2. Determine $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e interprete geometricamente o resultado obtido, caracterizando o quadrilátero que se obtém para $\alpha = \frac{\pi}{2}$

2. Foi administrado um medicamento a um doente às 9 horas da manhã de um certo dia.
A concentração desse medicamento, em miligrama por mililitro de sangue, t **horas** após ter sido administrado, é dada por

$$C(t) = 2\,t\,e^{-0,3\,t}$$

2.1. Utilize o Teorema de Bolzano para mostrar que houve um instante, entre as 9 h 30 min e as 10 h, em que a concentração do medicamento foi de 1 mg/ml.

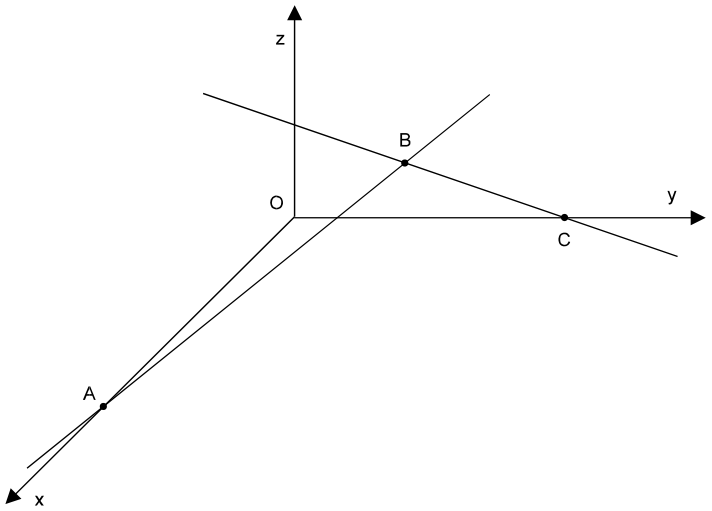
2.2. Recorrendo à derivada da função C, determine o instante em que a concentração de medicamento no sangue do doente foi máxima. Apresente o resultado em horas e minutos.

3. Lança-se três vezes um dado equilibrado com as faces numeradas de 1 a 6.
Indique, justificando, qual dos dois acontecimentos seguintes é mais provável:

- *nunca sair o número 6;*
- *saírem números todos diferentes.*

4. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$:

- o ponto $A(10, 0, 0)$
- o ponto $B(0, 2, 1)$
- o ponto $C(0, 5, 0)$
- a recta AB
- a recta BC



4.1. Justifique que as rectas AB e BC são complanares e mostre que o plano α por elas definido admite como equação $x + 2y + 6z = 10$.

4.2. Determine uma equação vectorial da recta de intersecção do plano α com o plano xOz.

4.3. Calcule o volume da pirâmide $[OBCA]$.

Formulário

$\text{sen}\,(2\,x) = 2\,.\,\text{sen}\,x\,.\,\cos x$ $\qquad$ $\cos(2\,x) = \cos^2 x - \text{sen}^2\,x$ $\qquad$ $\text{tg}\,(2\,x) = \dfrac{2\,\text{tg}\,x}{1-\text{tg}^2\,x}$

Volume da Pirâmide $= \frac{1}{3} \times$ *Área da Base* $\times$ *Altura*

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte..... **81**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1. 38
1.1. 12
1.2. 26
1.2.1. 15
1.2.2. 11

2. 25
2.1. 10
2.2. 15

3. 20

4. 36
4.1. 12
4.2. 12
4.3. 12

TOTAL **200**

PONTO 135/7 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **Reserva**
1999

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.

Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$, estritamente decrescente.

Os eixos coordenados são assimptotas do gráfico de f.

Seja (x_n) a sucessão de termo geral $x_n = \frac{1}{n}$

Indique o valor de $\lim f(x_n)$

(A) $+\infty$ **(B)** $-\infty$ **(C)** 0 **(D)** 1

2. Seja g uma função tal que o gráfico de g'' (segunda derivada de g) é uma recta de declive positivo que intersecta o eixo Oy no ponto $(0\,,1)$.

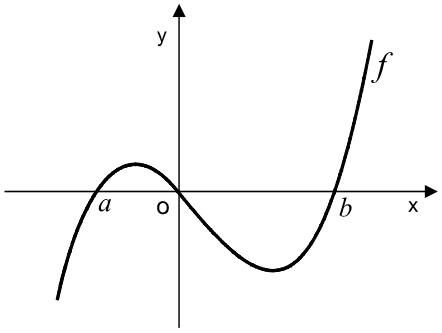
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) O gráfico de g tem um ponto de inflexão de abcissa positiva
(B) O gráfico de g tem um ponto de inflexão de abcissa negativa
(C) O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $\mathbb{R}^+$
(D) O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $\mathbb{R}^-$

3. Num cilindro, a altura é igual ao diâmetro da base.
Qual das expressões seguintes permite calcular a área lateral desse cilindro em função da sua altura, h ?

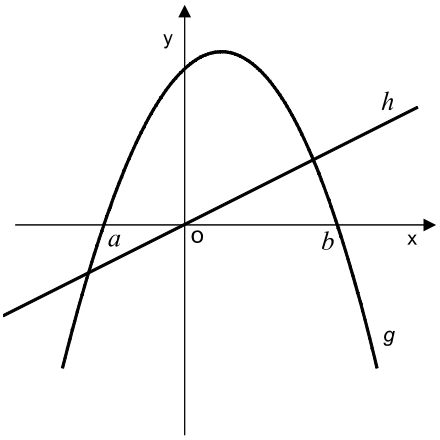
(A) $2\,\pi\,h^2$ **(B)** $\pi\,h^2$ **(C)** $\frac{\pi\,h^2}{2}$ **(D)** $\frac{\pi\,h^2}{4}$

4. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$.

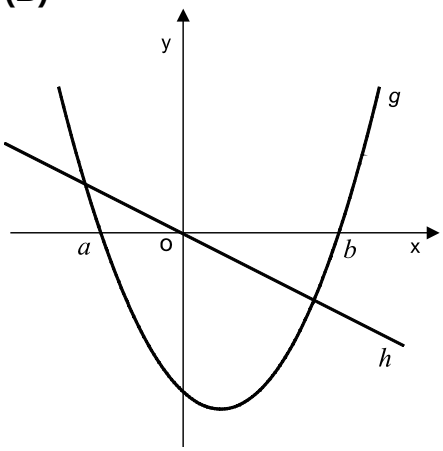


Em qual das figuras seguintes poderá estar representada parte dos gráficos de duas funções, g e h, de domínio $\mathbb{R}$, tais que $f = g \times h$?

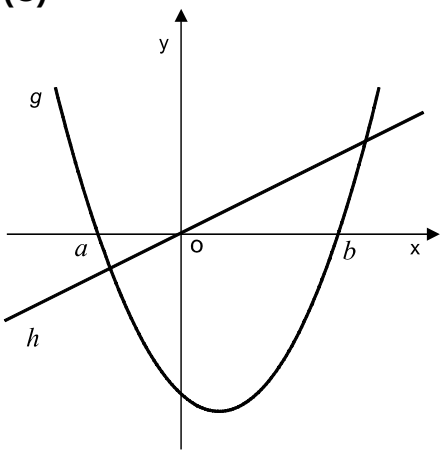
(A)



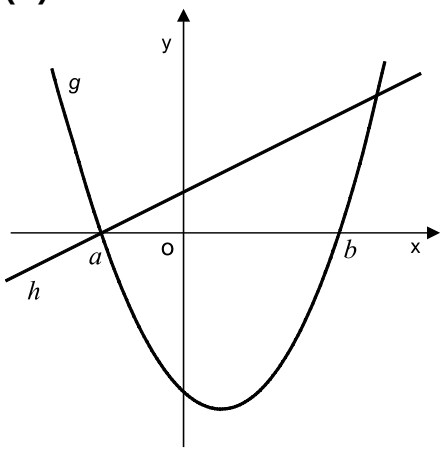
(B)



(C)



(D)



5. Num referencial o. n. $Oxyz$, considere as rectas r e s, definidas por:

$r : \ x-2=y-1=z-3$

$s : \ (x,y,z)=(2,1,3)+k\,(1,0,1)\,, \ k \in \mathbb{R}$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) r e s são concorrentes
(B) r e s são não complanares
(C) r e s são paralelas
(D) r e s são perpendiculares

6. Num referencial o. n. $Oxyz$, qual das seguintes equações define uma superfície esférica tangente ao plano yOz?

(A) $(x-2)^2+y^2+z^2=1$
(B) $(x-2)^2+y^2+z^2=4$
(C) $(x-2)^2+y^2+z^2=9$
(D) $x^2+(y-2)^2+(z-2)^2=1$

7. Num referencial o. n. xOy, considere a elipse cujo centro é o ponto $(4,0)$ e em que dois dos seus vértices são os pontos $(1,0)$ e $(4,1)$.
Qual das seguintes equações define uma recta que intersecta a elipse em dois pontos?

(A) $x=7$ **(B)** $y=1$

(C) $y=x+2$ **(D)** $y=x-2$

8. Uma certa linha do triângulo de Pascal tem quinze elementos.
Qual é o sexto elemento dessa linha?

(A) ${}^{14}C_5$ **(B)** ${}^{15}C_5$ **(C)** ${}^{14}C_6$ **(D)** ${}^{15}C_6$

9. A Sandra tem dez fichas de plástico, três das quais são verdes e as restantes, vermelhas. A Sandra empilha as dez fichas aleatoriamente, umas em cima das outras.
Qual é a probabilidade de as fichas verdes ficarem em cima?

(A) $\frac{{}^{10}C_3}{{}^{10}A_3}$ **(B)** $\frac{1}{{}^{10}A_3}$ **(C)** $\frac{3!}{10!}$ **(D)** $\frac{3!\times 7!}{10!}$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações que entender necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{x} & se\ x < 0 \\ \operatorname{sen}(2x) - \cos x & se\ x \geq 0 \end{cases}$

1.1. Estude a função f quanto à existência de assimptotas verticais ao seu gráfico.

1.2. Verifique se a função f tem máximo no intervalo $]-\infty, 0[$ e, em caso afirmativo, determine-o.

1.3. Determine os zeros de f no intervalo $]-3, 3[$.

2. A magnitude aparente (m) e a magnitude absoluta (M) de uma estrela são grandezas utilizadas em Astronomia para calcular a distância (d) a que essa estrela se encontra da Terra.

As três variáveis estão relacionadas pela fórmula $10^{0,4(m-M)} = \dfrac{d^2}{100}$

(d é medida em *parsec*, unidade utilizada em Astronomia para grandes distâncias.)

2.1. A Estrela Polar tem magnitude aparente $m = 2$, sendo a sua magnitude absoluta $M = -4,6$.

Qual é a distância da Terra à Estrela Polar? (Apresente o resultado em *parsec*, arredondado às unidades.)

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

2.2. Prove que $m = M - 5\left(1 - \log_{10} d\right)$

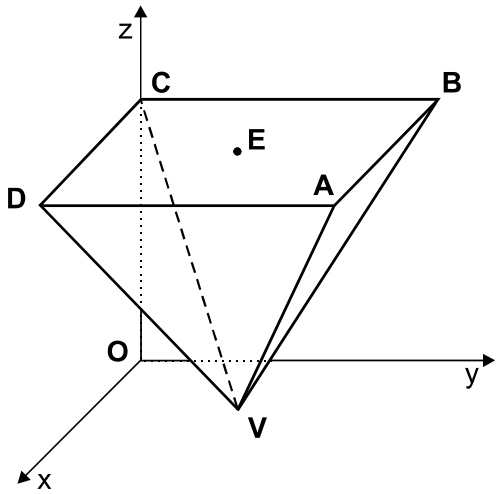
3. O João e a irmã querem telefonar a um amigo.
Ele lembra-se de que o número de telefone do amigo tem sete algarismos: um 2, dois 5, dois 7, dois 8.

3.1. Quantos números existem nestas condições?

3.2. A irmã do João também se lembra de que o número de telefone do amigo começa por 857.
Se eles digitarem os restantes algarismos ao acaso, qual é a probabilidade de acertarem à primeira tentativa?

4. Na figura está representada, em referencial o. n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular.

- A base da pirâmide é paralela ao plano xOy
- O ponto A tem coordenadas $(8, 8, 7)$
- O ponto B pertence ao plano yOz
- O ponto C pertence ao eixo Oz
- O ponto D pertence ao plano xOz
- O ponto E é o centro da base da pirâmide
- O vértice V da pirâmide pertence ao plano xOy



4.1. Determine o perímetro de uma face lateral da pirâmide.

4.2. Determine a amplitude do ângulo DVB.
Apresente o resultado em graus, com aproximação à décima de grau.

4.3. Seja α o plano que contém o ponto E e é paralelo ao plano AVB.
Mostre que o eixo Ox está contido em α.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte..... **81**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1. 42
1.1. 12
1.2. 16
1.3. 14

2. 19
2.1. 7
2.2. 12

3. 22
3.1. 11
3.2. 11

4. 36
4.1. 12
4.2. 12
4.3. 12

TOTAL **200**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei nº 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos de Carácter Geral e Cursos Tecnológicos

Duração da Prova: 120 minutos **ÉPOCA ESPECIAL**
1999

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

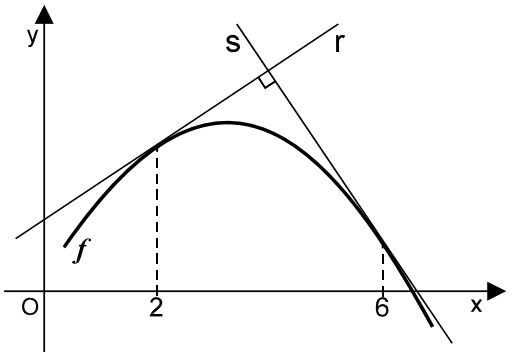
1. Considere a sucessão de termo geral $u_n = log_2\left(\frac{1}{n}\right)$

Indique o valor de $lim\ u_n$

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

2. Na figura estão representados:

- o gráfico de uma função f
- a recta r, tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2 e de equação $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{4}$
- a recta s, tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 6



Sabendo que as rectas r e s são perpendiculares, indique o valor de $f'(6)$, derivada da função f no ponto 6.

(A) $-\frac{3}{2}$ **(B)** $-\frac{4}{5}$ **(C)** $-\frac{2}{5}$ **(D)** $\frac{5}{3}$

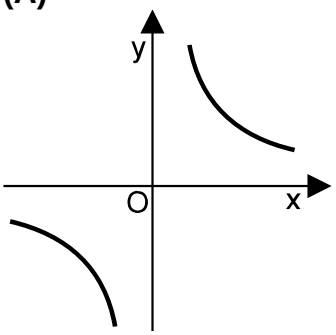
3. Seja D o domínio de uma função g tal que $g(x) = \frac{1}{1 - tg\, x}$

Indique qual das afirmações seguintes é **necessariamente falsa**.

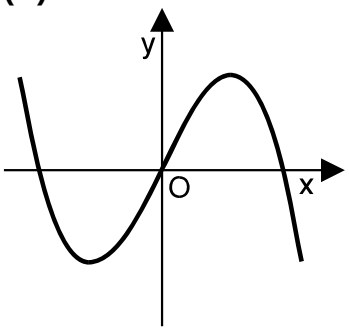
(A) $0 \in D$ **(B)** $\frac{3\pi}{4} \in D$ **(C)** $\pi \in D$ **(D)** $\frac{5\pi}{4} \in D$

4. Indique qual dos gráficos seguintes pode ser o de uma função ímpar e injectiva.

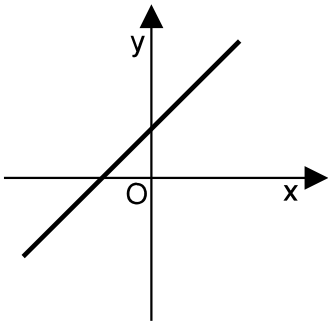
(A)



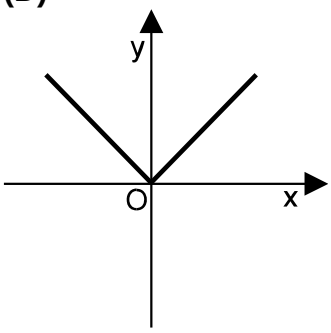
(B)



(C)



(D)



5. Seja h uma função de domínio $\mathbb{R}$ cujo gráfico é uma parábola tal que:
- o vértice é o ponto $(0, 0)$;
- a directriz é a recta de equação $y = -1$.

Indique qual das igualdades seguintes é verdadeira para qualquer x pertencente a $\mathbb{R}$.

(A) $h(x) = x^2$ **(B)** $h(x) = 2\, x^2$ **(C)** $h(x) = \frac{x^2}{4}$ **(D)** $h(x) = -\frac{x^2}{6}$

6. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, a esfera $\mathcal{E}$ definida pela condição $x^2 + (y-7)^2 + z^2 \leq 9$
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) Na esfera $\mathcal{E}$ existem pontos do eixo Ox
(B) Na esfera $\mathcal{E}$ existem pontos do eixo Oy
(C) O ponto $(7,7,0)$ pertence à esfera $\mathcal{E}$
(D) O ponto $(0,0,7)$ pertence à esfera $\mathcal{E}$

7. Num referencial o. n. $Oxyz$, a condição $\begin{cases} x = 0 \\ z = 3 \end{cases}$ define

(A) o conjunto vazio
(B) um ponto
(C) uma recta
(D) um plano

8. Escolhem-se aleatoriamente dois vértices distintos de um cubo.
Qual é a probabilidade de o centro do cubo ser o ponto médio do segmento por eles definido?

(A) $\frac{1}{{}^8C_2}$ **(B)** $\frac{4}{{}^8C_2}$ **(C)** $\frac{1}{8!}$ **(D)** $\frac{4}{8!}$

9. Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira.

(A) $(10^{20}+1)^6 = 10^{120} + 6 \times 10^{20} + 1$
(B) $(10^{20}+1)^7 = 10^{140} + 1$
(C) $(10^{20}+1)^8 > 10^{160} + 8 \times 10^{20} + 1$
(D) $(10^{20}+1)^9 < 10^{180} + 1$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações que entender necessárias.

1. Considere a função $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = ln(1+x) - x$

a) Recorrendo à função derivada de g, mostre que g é decrescente.

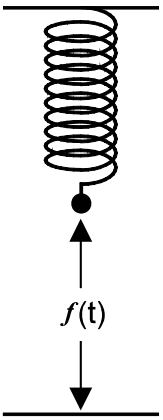
b) Tendo em conta a alínea anterior e o valor de $g(0)$, indique, justificando, se é verdadeira ou falsa a afirmação: $g(x) < 0, \ \forall \ x \in \mathbb{R}^+$

2. Uma bola suspensa de uma mola oscila verticalmente.

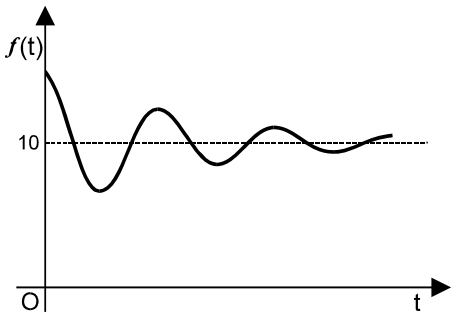
Admita que a distância (em cm) da bola ao solo, t segundos após um certo instante inicial, é dada por

$$f(t) = 10 + 5\,e^{-0,1\,t}\,cos\left(\frac{\pi\,t}{4}\right)$$

com $t \in [0, +\infty[$



Na figura abaixo, apresenta-se parte da representação gráfica da função f.



a) Indique o valor de $\lim\limits_{t \rightarrow +\infty} f(t)$. Interprete esse valor em termos do movimento da bola.

b) Mostre que existe pelo menos um instante, entre o terceiro e o quarto segundos, em que a bola se encontra a sete centímetros do solo.

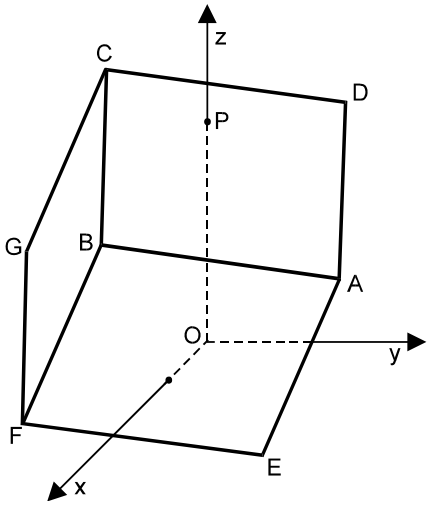
c) Resolva a equação $f(t) = 10$.
A partir do conjunto solução obtido, indique quantas vezes, nos primeiros quinze segundos, a bola passa a dez centímetros do solo. Justifique a sua resposta.

3. Um grupo de jovens, formado por cinco rapazes e cinco raparigas, vai dividir-se em duas equipas, de cinco elementos cada uma, para disputarem um jogo de basquetebol.
Supondo que a divisão dos dez jovens pelas duas equipas é feita ao acaso, determine a probabilidade de as equipas ficarem constituídas por elementos do mesmo sexo, isto é, de uma das equipas ficar só com rapazes e a outra, só com raparigas.

Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às milésimas.

4. A figura abaixo representa um cubo, em referencial o. n. $Oxyz$.

- $[ABCD]$ é uma face do cubo
- $[EFGH]$ é a face oposta à face $[ABCD]$ (o ponto H não está representado na figura)
- $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ e $[DH]$ são quatro arestas do cubo
- O ponto A tem coordenadas $(3, 5, 3)$
- O ponto D tem coordenadas $(-3, 3, 6)$
- O ponto E tem coordenadas $(1, 2, -3)$



a) Determine o volume do cubo.

b) Determine as coordenadas do ponto H e comente a seguinte afirmação: o ponto H pertence a um dos eixos coordenados.

c) O ponto P é o ponto de intersecção do eixo Oz com a face $[ABCD]$.
Determine as coordenadas de P.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte.....**81**

Cada questão certa ..... +9
Cada questão errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1 23
a) 12
b).....11

2 38
a) 10
b).....14
c).....14

3 20

4 38
a) 12
b).....12
c).....14

TOTAL **200**

2000

PROVA 135/7 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **1.ª Fase**
2000 **1.ª Chamada**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.

Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

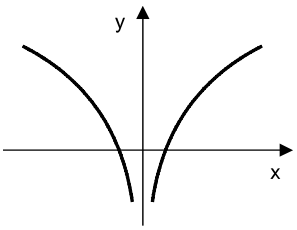
(A) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x = 0$

(B) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x = +\infty$

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x = 1$

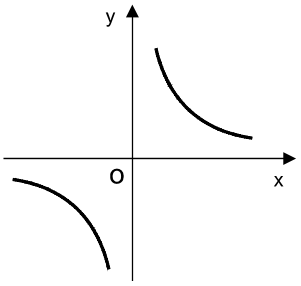
(D) Não existe $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$

2. Na figura ao lado está parte da representação gráfica de uma função g, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

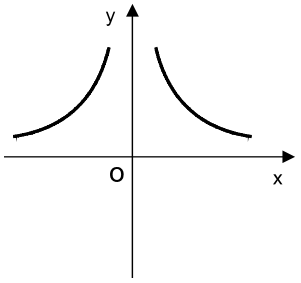


Qual das figuras seguintes poderá ser parte da representação gráfica da função g', **derivada** de g?

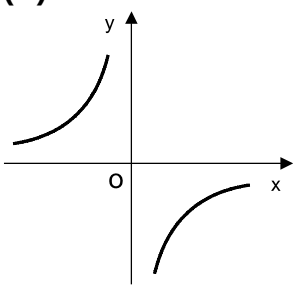
(A)



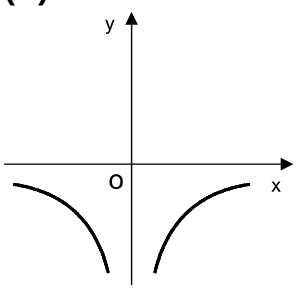
(B)



(C)

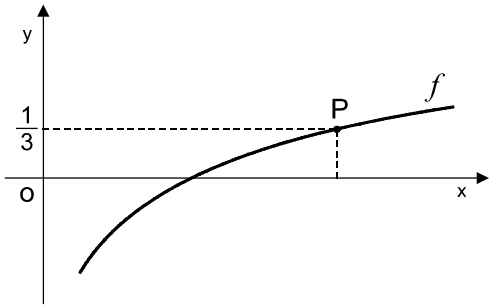


(D)



3. Na figura está parte da representação gráfica da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \log_8 x$

P é um ponto do gráfico de f, que tem ordenada $\frac{1}{3}$



Qual é a abcissa do ponto P ?

(A) $\frac{8}{3}$ **(B)** 1 **(C)** $\ln\left(\frac{8}{3}\right)$ **(D)** 2

4. Um tanque tem a forma de um paralelepípedo rectângulo, com $7\ m$ de comprimento, $5\ m$ de largura e $4\ m$ de altura.
Admita que o tanque está vazio. Num certo instante, é aberta uma torneira que verte água para o tanque, à taxa de $2\ m^3$ por hora, até este ficar cheio.
Qual é a função que dá a **altura**, em metros, da água no tanque, t horas após a abertura da torneira?

(A) $h(t) = 4 - 2t\ ,\ t \in [0, 70]$ **(B)** $h(t) = \frac{2t}{35}\ ,\ t \in [0, 70]$

(C) $h(t) = 4 - 2t\ ,\ t \in [0, 140]$ **(D)** $h(t) = \frac{2t}{35}\ ,\ t \in [0, 140]$

5. Considere, num referencial o.n. xOy, uma elipse de eixo maior paralelo ao eixo Oy e cujo centro é o ponto de intersecção das rectas $x = -1$ e $y = 2$.
Qual das seguintes equações pode definir esta elipse?

(A) $(x-1)^2 + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ **(B)** $\frac{(x+1)^2}{9} + (y-2)^2 = 1$

(C) $(x+1)^2 + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ **(D)** $(x+1)^2 - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

6. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere os pontos $P(0,0,4)$ e $Q(0,4,0)$.
Qual dos seguintes pontos pertence ao plano mediador do segmento de recta $[PQ]$?

(A) $A(1,0,0)$ **(B)** $B(1,2,0)$ **(C)** $C(2,1,0)$ **(D)** $D(1,0,2)$

7. Num referencial o.n. $Oxyz$, qual das seguintes rectas intersecta os três planos coordenados (xOy, xOz e yOz) ?

(A) $(x, y, z) = (1, 1, 1) + k\ (1, 0, 0),\ k \in \mathbb{R}$
(B) $(x, y, z) = (1, 1, 1) + k\ (0, 2, 0),\ k \in \mathbb{R}$
(C) $(x, y, z) = (1, 1, 1) + k\ (1, 2, 0),\ k \in \mathbb{R}$
(D) $(x, y, z) = (1, 1, 1) + k\ (1, 2, 3),\ k \in \mathbb{R}$

8. Um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, é lançado três vezes.
Qual é a probabilidade de saírem três números ímpares?

(A) $\frac{1}{27}$ **(B)** $\frac{1}{8}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

9. Uma turma de uma escola secundária tem nove rapazes e algumas raparigas.
Escolhendo ao acaso um aluno da turma, a probabilidade de ele ser um rapaz é $\frac{1}{3}$
Quantas raparigas tem a turma?

(A) 27 **(B)** 18 **(C)** 15 **(D)** 12

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x (x^2 + x)$
Recorrendo exclusivamente a processos analíticos (ou seja, **sem** utilização da calculadora), resolva as alíneas seguintes:

1.1. Verifique que $f'(x) = e^x (x^2 + 3x + 1)$ e determine uma equação da recta tangente ao gráfico de f, no ponto de abcissa 0.

1.2. Estude f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

1.3. Estude a função f quanto à existência de assimptotas verticais e horizontais do seu gráfico.



2. No presente ano civil, em Lisboa, o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do Sol, no dia de ordem n do ano, é dado em horas, aproximadamente, por

$$f(n) = 12{,}2 + 2{,}64 \text{ sen } \frac{\pi\,(n-81)}{183} \qquad n \in \{1, 2, 3, ..., 366\}$$

(o argumento da função seno está expresso em radianos).

Por exemplo: no dia 3 de Fevereiro, trigésimo quarto dia do ano, o tempo que decorreu entre o nascer e o pôr do Sol foi de $f(34) \approx 10{,}3$ horas.

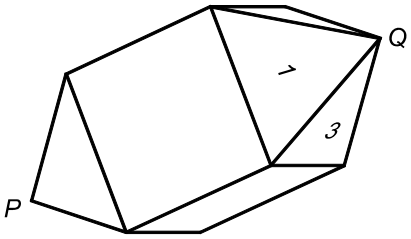
2.1. No dia 24 de Março, Dia Nacional do Estudante, o Sol nasceu às seis e meia da manhã. Em que instante ocorreu o pôr do Sol? Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

Notas:

- Recorde que, no presente ano, o mês de Fevereiro teve 29 dias.
- Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2.2. Sem recorrer à calculadora, determine em quantos dias do ano é que o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do Sol é de $12{,}2$ horas.

3. Na figura está representado um poliedro com doze faces, que pode ser decomposto num cubo e em duas pirâmides quadrangulares regulares.

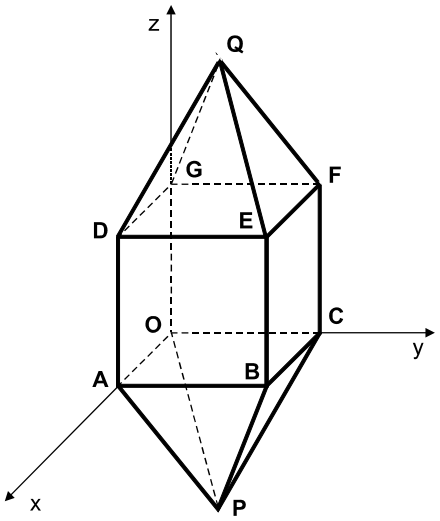


3.1. Pretende-se numerar as doze faces do poliedro, com os números de 1 a 12 (um número diferente em cada face).
Como se vê na figura, duas das faces do poliedro já estão numeradas, com os números 1 e 3.

3.1.1. De quantas maneiras podemos numerar as outras dez faces, com os restantes dez números?

3.1.2. De quantas maneiras podemos numerar as outras dez faces, com os restantes dez números, de forma a que, nas faces de uma das pirâmides, fiquem só números ímpares e, nas faces da outra pirâmide, fiquem só números pares?

3.2. Considere agora o poliedro num referencial o. n. $Oxyz$.
Sabe-se que:
- o vértice O do poliedro é a origem do referencial;
- o vértice E do poliedro tem coordenadas $(2, 2, 2)$;
- a altura de cada uma das pirâmides é igual ao comprimento da aresta do cubo.



3.2.1. Justifique que o ponto F não pertence à superfície esférica de diâmetro $[PQ]$.

3.2.2. Mostre que a recta EG é perpendicular ao plano ADQ.

3.2.3. Determine a área da secção definida no poliedro pelo plano ADQ.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte..... **81**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1. 39
1.1. 11
1.2. 14
1.3. 14

2. 22
2.1. 10
2.2. 12

3. 58
3.1. 22
3.1.1. 7
3.1.2. 15
3.2. 36
3.2.1. 12
3.2.2. 12
3.2.3. 12

TOTAL **200**

PROVA 435/11 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **1.ª Fase**
2000 **1.ª Chamada**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.

Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.

Primeira Parte

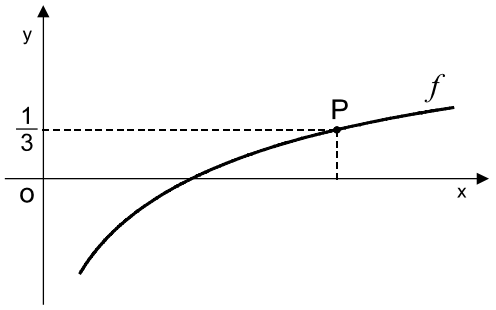
- As sete questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x = 0$ **(B)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x = +\infty$

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x = 1$ **(D)** Não existe $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$

2. Na figura está parte da representação gráfica da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \log_8 x$

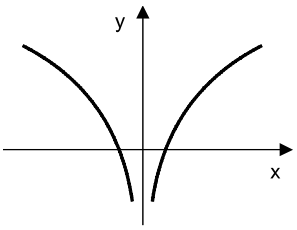


P é um ponto do gráfico de f, que tem ordenada $\frac{1}{3}$

Qual é a abcissa do ponto P ?

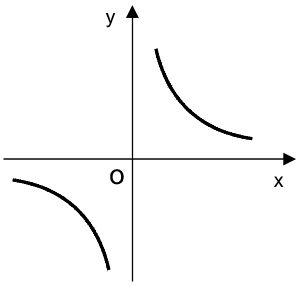
(A) $\frac{8}{3}$ **(B)** 1 **(C)** $\ln\left(\frac{8}{3}\right)$ **(D)** 2

3. Na figura ao lado está parte da representação gráfica de uma função g, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

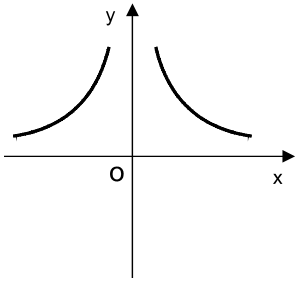


Qual das figuras seguintes poderá ser parte da representação gráfica da função g', **derivada** de g?

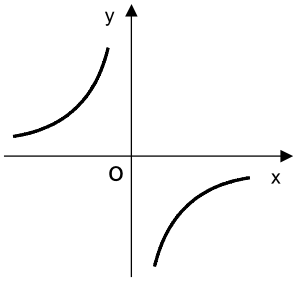
(A)



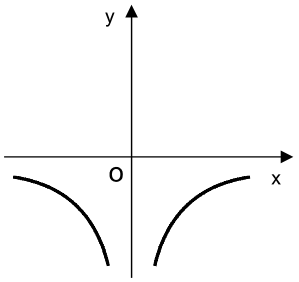
(B)



(C)



(D)



4. Um tanque tem a forma de um paralelepípedo rectângulo, com $7\ m$ de comprimento, $5\ m$ de largura e $4\ m$ de altura.

Admita que o tanque está vazio.

Num certo instante, é aberta uma torneira que verte água para o tanque, à taxa de $2\ m^3$ por hora, até este ficar cheio.

Qual é a função que dá a **altura**, em metros, da água no tanque, t horas após a abertura da torneira?

(A) $h(t) = 4 - 2t\ ,\ t \in [0, 70]$

(B) $h(t) = \frac{2t}{35}\ ,\ t \in [0, 70]$

(C) $h(t) = 4 - 2t\ ,\ t \in [0, 140]$

(D) $h(t) = \frac{2t}{35}\ ,\ t \in [0, 140]$

5. Seja A um acontecimento possível, cuja probabilidade é diferente de 1.
Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A|A)$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** $P(A)$ **(D)** $[P(A)]^2$

6. Lança-se um dado com as faces numeradas de 1 a 6.
Considere os acontecimentos:
A: «sair face ímpar»;
B: «sair face de número maior ou igual a 4».

Qual é o acontecimento **contrário** de $A \cup B$?

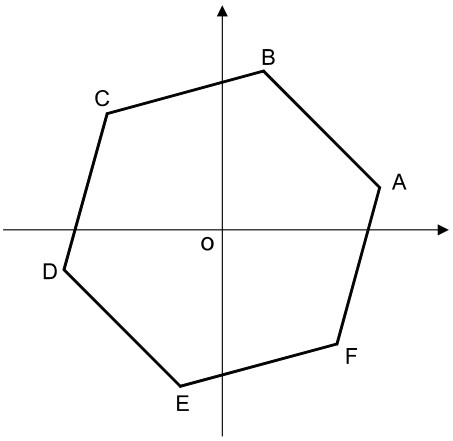
(A) sair a face 1 ou a face 5

(B) sair a face 4 ou a face 6

(C) sair a face 2

(D) sair a face 5

7. Na figura está representado um hexágono cujos vértices são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes de índice 6 de um certo número complexo.



O vértice C é a imagem geométrica do número complexo

$$\sqrt{2}\ cis\ \frac{3\pi}{4}$$

Qual dos seguintes números complexos tem por imagem geométrica o vértice D ?

(A) $\sqrt{2}\ cis\ \frac{7\pi}{6}$

(B) $\sqrt{2}\ cis\ \frac{13\pi}{12}$

(C) $\sqrt[6]{2}\ cis\ \frac{7\pi}{6}$

(D) $\sqrt[6]{2}\ cis\ \frac{13\pi}{12}$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Seja A o conjunto dos números complexos cuja imagem, no plano complexo, é o interior do círculo de centro na origem do referencial e raio 1.

1.1. Defina, por meio de uma condição em $\mathbb{C}$, a parte de A contida no segundo quadrante (excluindo os eixos do referencial).

1.2. Sem recorrer à calculadora, mostre que o número complexo $\frac{1+\sqrt{3}\,i}{4\,cis\,\frac{\pi}{6}}$ pertence ao conjunto A.

2. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x(x^2 + x)$

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos (ou seja, **sem** utilização da calculadora), resolva as alíneas seguintes:

2.1. Verifique que $f'(x) = e^x(x^2 + 3x + 1)$ e determine uma equação da recta tangente ao gráfico de f, no ponto de abcissa 0.

2.2. Estude f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.



3. No presente ano civil, em Lisboa, o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do Sol, no dia de ordem n do ano, é dado em horas, aproximadamente, por

$$f(n) = 12{,}2 + 2{,}64 \text{ sen } \frac{\pi\,(n-81)}{183} \qquad n \in \{1, 2, 3, ..., 366\}$$

(o argumento da função seno está expresso em radianos).

Por exemplo: no dia 3 de Fevereiro, trigésimo quarto dia do ano, o tempo que decorreu entre o nascer e o pôr do Sol foi de $f(34) \approx 10{,}3$ horas.

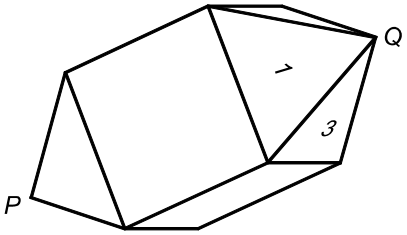
3.1. No dia 24 de Março, Dia Nacional do Estudante, o Sol nasceu às seis e meia da manhã. Em que instante ocorreu o pôr do Sol? Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

Notas:

- Recorde que, no presente ano, o mês de Fevereiro teve 29 dias.
- Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3.2. Em alguns dias do ano, o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do Sol é superior a $14{,}7$ horas. Recorrendo à sua calculadora, determine em quantos dias do ano é que isso acontece. Indique como procedeu.

4. Na figura está representado um poliedro com doze faces, que pode ser decomposto num cubo e em duas pirâmides quadrangulares regulares.



4.1. Pretende-se numerar as doze faces do poliedro, com os números de 1 a 12 (um número diferente em cada face).
Como se vê na figura, duas das faces do poliedro já estão numeradas, com os números 1 e 3.

4.1.1. De quantas maneiras podemos numerar as outras dez faces, com os restantes dez números?

4.1.2. De quantas maneiras podemos numerar as outras dez faces, com os restantes dez números, de forma a que, nas faces de uma das pirâmides, fiquem só números ímpares e, nas faces da outra pirâmide, fiquem só números pares?

4.2. Considere agora o poliedro num referencial o. n. $Oxyz$, de tal forma que o vértice P coincida com a origem do referencial, e o vértice Q esteja no semieixo positivo Oy.
Escolhidos ao acaso três vértices distintos, qual é a probabilidade de estes definirem um plano paralelo ao plano de equação $y = 0$? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

5. Considere uma função f de domínio $\mathbb{R}^+$. Admita que f é positiva e que o eixo Ox é assimptota do gráfico de f. Mostre que o gráfico da função $\frac{1}{f}$ não tem assimptota horizontal.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte..... **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **137**

1. 21
1.1. 9
1.2. 12

2. 33
2.1. 15
2.2. 18

3. 33
3.1. 15
3.2. 18

4. 32
4.1. 18
4.1.1. 7
4.1.2. 11
4.2. 14

5. 18

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Círculo: $\pi\ r^2 \qquad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\ r\ g$
$(r - raio\ da\ base;\ g - geratriz)$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\,r^2$
$(r - raio)$

Volumes

Prisma: *Área da base* × *Altura*

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3 \qquad (r - raio)$

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\,.\cos b + \text{sen}\,b\,.\cos a$

$\cos\,(a+b) = \cos\,a\,.\cos b - \text{sen}\,a\,.\,\text{sen}\,b$

$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a\,.\,\text{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho\,cis\,\theta)\,.\,(\rho'\,cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta + \theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\,cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\,cis\,\theta)^n\ = \rho^n\,cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\,cis\,\theta}\ = \sqrt[n]{\rho}\ cis\,\frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\,u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\,\text{sen}\,u$

$(\text{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln\,(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos — Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos **1.ª FASE**
2000 **1.ª CHAMADA**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Primeira Parte **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada ..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **137**

1. 21
1.1. 9
1.2. 12

2. 33
2.1. 15
2.2. 18

3. 33
3.1. 15
3.2. 18

4. 32
4.1. 18
4.1.1. 7
4.1.2. 11
4.2. 14

5. 18

TOTAL **200**

V.S.F.F.

435/C/1

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Primeira Parte

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Versão 1	D	D	A	B	B	C	B
Versão 2	C	D	B	D	A	A	D

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, nesta primeira parte, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas **Resp. certas**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

Segunda Parte

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Critérios específicos

1.1. 9

Escrever uma condição em $\mathbb{C}$ que defina o interior do círculo de centro na origem e raio 1. Exemplo: $|z| < 1$ 4

Escrever uma condição em $\mathbb{C}$ que defina o segundo quadrante, excluindo os eixos. Exemplo: $Re(z) < 0 \wedge Im(z) > 0$ 4

Indicar a conjunção das duas condições 1

1.2. 12

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º Processo:

Determinar o módulo do numerador: $\sqrt{1 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$ 3

Referir que o módulo do denominador é 4 3

Concluir que o módulo do quociente é $1/2$ 3

Concluir que, pelo facto de o seu módulo ser inferior a 1, o número complexo dado pertence, efectivamente, ao conjunto A 3

2.º Processo:

$\frac{1+\sqrt{3}\,i}{4\,cis\,\frac{\pi}{6}} = \frac{2\,cis\,\frac{\pi}{3}}{4\,cis\,\frac{\pi}{6}}$ 3

$\frac{2\,cis\,\frac{\pi}{3}}{4\,cis\,\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}\,cis\,\frac{\pi}{6}$ 3

Referir que o módulo do quociente é $1/2$ 3

Concluir que, pelo facto de o seu módulo ser inferior a 1, o número complexo dado pertence, efectivamente, ao conjunto A 3

3.º Processo:

$\frac{1+\sqrt{3}i}{4\,cis\,\frac{\pi}{6}} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}+2i}$ 3

$\frac{1+\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}+2i} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$ 3

Determinar o módulo de $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$ 3

Concluir que, pelo facto de o seu módulo ser inferior a 1, o número complexo dado pertence, efectivamente, ao conjunto A 3

2.1. ..... **15**

Verificar que $f'(x) = e^x(x^2+3x+1)$ 5

$f'(x) =$

$= e^x(x^2+x) + e^x(2x+1)$ 4

$= e^x(x^2+3x+1)$ 1

$f'(0) = 1$ 3

$f(0) = 0$ 3

Escrever uma equação da recta pedida 4

2.2. ..... **18**

Determinar $f''(x)$ 4

$f''(x) = e^x(x^2+3x+1) + e^x(2x+3)$ 3

$= e^x(x^2+5x+4)$ 1

Determinar os zeros de f'' 4

$e^x(x^2+5x+4) = 0 \Leftrightarrow x^2+5x+4 = 0$ 2

$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = -1$ 2

5. ..... **18**

Concluir que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ 5

Concluir que $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ (**ver nota 1**)..... 5

Concluir que o gráfico de $\frac{1}{f}$ não tem assimptota horizontal 5

Clareza e rigor (**ver nota 2**)..... 3

Notas:

1. O examinando não necessita, para a conclusão pretendida, de referir o sinal do infinito. Portanto, se não colocar qualquer sinal, não deverá ser penalizado.

   Por outro lado, se o examinando escrever $+\infty$, não se exige que ele justifique o sinal $+$ (a justificação é evidente, pelo que o examinando pode não sentir necessidade de a fazer).

   Se o examinando escrever $-\infty$, ou $\pm\infty$, deverá ser penalizado em 2 pontos.

2. Deverão ser valorizadas as respostas formalmente correctas e reveladoras de um raciocínio bem estruturado.

Notas:

1. O examinando pode começar por indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis e só depois escrever a fracção.
   No entanto, se não o fizer, isto é, se escrever directamente a fracção, não deverá ser penalizado.

2. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da fracção, com a respectiva cotação a atribuir.
   Esta discriminação é feita apenas para o primeiro processo; no caso de o examinando utilizar o segundo processo, a situação é análoga, com a única diferença de se considerarem *arranjos* em vez de *combinações*.

   $\frac{2 \times {}^{4}C_{3}}{{}^{10}C_{3}}$ (fracção correcta)..... 13

   $\frac{{}^{4}C_{3}}{{}^{10}C_{3}}$ 8

   $\frac{{}^{4}C_{3} \times {}^{4}C_{3}}{{}^{10}C_{3}}$ 7

   $\frac{{}^{8}C_{3}}{{}^{10}C_{3}}$ 6

   Outras fracções com denominador ${}^{10}C_{3}$ 5

3. Se o examinando indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído à sua resposta menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

4. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos possíveis, deverão ser atribuídos 4 pontos à sua resposta.

5. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos favoráveis, deverão ser atribuídos 8 pontos à sua resposta.

V.S.F.F.

435/C/9

4.1.2. ..... **11**

Número pedido $= {}^4A_2 \times {}^6A_4 \times 4!$ **(ver nota)** 10

Número pedido $= 103\,680$ 1

Nota:
Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, com a respectiva cotação a atribuir. Caberá ao corrector fazer as extrapolações necessárias para outras situações.

${}^4A_2 \times {}^6A_4$ 7

${}^4C_2 \times {}^6C_4 \times 4!$ 6

${}^4C_2 \times {}^6C_4$ 3

4.2. ..... **14**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:
O espaço de resultados é a colecção de conjuntos $\{a, b, c\}$, onde a, b e c designam quaisquer três dos dez vértices do poliedro.

Número de casos possíveis $= {}^{10}C_3$

Número de casos favoráveis $= 2 \times {}^4C_3$

Probabilidade pedida $= \frac{2 \times {}^4C_3}{{}^{10}C_3} = \frac{1}{15}$

2.º Processo:
O espaço de resultados é o conjunto de sequências (a, b, c), com $a \neq b$, $a \neq c$ e $b \neq c$, onde a, b e c designam quaisquer três dos dez vértices do poliedro.

Número de casos possíveis $= {}^{10}A_3$

Número de casos favoráveis $= 2 \times {}^4A_3$

Probabilidade pedida $= \frac{2 \times {}^4A_3}{{}^{10}A_3} = \frac{1}{15}$

Qualquer que seja o processo utilizado pelo examinando, as cotações devem ser atribuídas de acordo com o seguinte critério:

Escrita da fracção **(ver notas 1, 2, 3, 4 e 5)** 13

Simplificação da fracção 1

4. O processo gráfico, referido na nota anterior, para obter os valores $153{,}4$ e $191{,}6$ é o mais esperado e o mais natural, de acordo com o espírito do programa.
No entanto, também é possível que o examinando apresente uma resolução que não se apoie nas capacidades gráficas da calculadora, como a que se exemplifica a seguir:

$$12{,}2 + 2{,}64 \operatorname{sen} \frac{\pi(n-81)}{183} > 14{,}7 \Leftrightarrow \operatorname{sen} \frac{\pi(n-81)}{183} > \frac{2{,}5}{2{,}64} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2{,}5}{2{,}64}\right) < \frac{\pi(n-81)}{183} < \pi - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2{,}5}{2{,}64}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 81 + \frac{183}{\pi} \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2{,}5}{2{,}64}\right) < n < 81 + \frac{183}{\pi}\left[\pi - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2{,}5}{2{,}64}\right)\right]$$

Tem-se, então, que $153{,}445 < n < 191{,}555$

5. O examinando pode obter directamente o conjunto solução da inequação, $\{154, 155, \ldots\ldots, 191\}$, sem passar pelo passo anterior, se utilizar, por exemplo, a ferramenta *table* da calculadora.

6. Qualquer que seja o método utilizado pelo examinando, ele deverá ser explicitado (tal é exigido no enunciado).
Se o examinando não explicar como obteve o conjunto solução da inequação, deverá ser cotado em zero dos catorze pontos previstos para a resolução da mesma.

7. Pode acontecer que o examinando, depois de obter a condição $153{,}4 < n < 191{,}6$, escreva $191{,}6 - 153{,}4 = 38{,}2$, concluindo então que o número pedido é 38 (arredondando a diferença obtida, ou ignorando a parte decimal da mesma).
Note-se que, apesar de o resultado estar certo, o método é incorrecto. Basta pensar que o resultado final estaria mal se os números fossem $153{,}1$ e $191{,}9$ e arredondássemos a diferença, ou se os números fossem $153{,}6$ e $191{,}4$ e ignorássemos a parte decimal da diferença.
Se o examinando cometer este erro, deverão ser atribuídos zero dos sete pontos (5 + 2) previstos para a obtenção do conjunto solução da inequação e para a conclusão.

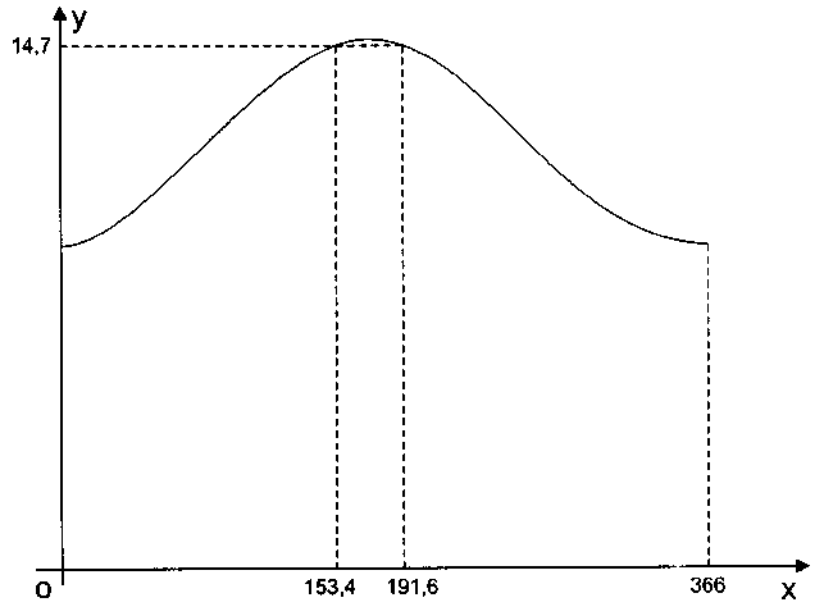
4.1.1. ..... **7**

Número pedido $= 10!$ 6
Número pedido $= 3\,628\,800$ 1

Notas:

1. Se o examinando não escrever esta inequação, mas, na sua resposta, existir evidência de que ele procura as suas soluções, estes 2 pontos deverão ser atribuídos.

2. Os valores $153{,}4$ e $191{,}6$ podem ser obtidos graficamente, com a calculadora, utilizando, por exemplo, as ferramentas *zoom* e *trace*, ou a ferramenta *intersect*.



Nesta situação, uma utilização não totalmente correcta da calculadora pode conduzir a aproximações grosseiras dos valores pretendidos (partes inteiras diferentes de 153 e/ou de 191). Se tal acontecer, deverão ser atribuídos zero, ou cinco, dos nove pontos previstos para este passo da resolução do problema, conforme o examinando tiver errado uma, ou duas, das aproximações.

3. Pode igualmente acontecer que o examinando escreva $153 < n < 191$, em vez de $153{,}4 < n < 191{,}6$.
Note-se que a condição $153 < n < 191$ conduz à solução errada 37.
Nesta situação, deverão ser atribuídos cinco dos nove pontos previstos para este passo da resolução do problema.

Estudar o sinal de f'' 4

Concluir que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -4]$ e em $[-1, +\infty[$ e voltada para baixo em $[-4, -1]$ (ver **nota**)..... 4

Concluir que o gráfico de f tem dois pontos de inflexão 2

Nota:
Se o examinando apresentar os intervalos abertos, não deverá ser penalizado.

3.1. 15

$n = 84$ 4
$f(84) \approx 12{,}336$ 3
Concluir que o pôr do Sol ocorreu às $18\,h\ 50\,m$..... 8

$12{,}336\,h \approx 12\,h\ 20\,m$ 4
$6\,h\ 30\,m + 12\,h\ 20\,m = 18\,h\ 50\,m$..... 4

ou

$6{,}5 + 12{,}336 = 18{,}836$..... 4
$18{,}836\,h \approx 18\,h\ 50\,m$ 4

3.2. 18

Traduzir o problema por uma inequação: $f(n) > 14{,}7$ **(ver nota 1)**..... 2

Resolver a inequação (utilizando a calculadora) 14

$f(n) > 14{,}7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 153{,}4 < n < 191{,}6$ **(ver notas 2, 3 e 4)** 9

$\Leftrightarrow\ n \in \{154, 155, ..., 191\}$ **(ver notas 5 e 6)** 5

Conclusão (número pedido $= 38$) **(ver nota 7)** 2

V.S.F.F.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos — Programa «antigo»

Duração da prova: 120 minutos — **1.ª FASE**
2000 — **1.ª CHAMADA**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Primeira Parte **81**

Cada resposta certa	+9
Cada resposta errada	- 3
Cada questão não respondida ou anulada	0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1.	39
1.1.	11
1.2.	14
1.3.	14
2.	22
2.1.	10
2.2.	12
3.	58
3.1.	22
3.1.1.	7
3.1.2.	15
3.2.	36
3.2.1.	12
3.2.2.	12
3.2.3.	12

TOTAL **200**

V.S.F.F.

135/C/1

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Primeira Parte

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Versão 1	D	A	D	B	C	A	D	B	B
Versão 2	C	D	B	D	D	A	A	C	C

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, nesta primeira parte, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas / **Resp. certas**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3	0	0		
3	27	24	21	18	15	12	9			
4	36	33	30	27	24	21				
5	45	42	39	36	33					
6	54	51	48	45						
7	63	60	57							
8	72	69								
9	81									

Segunda Parte

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Critérios específicos

1.1. 11

Verificar que $f'(x) = e^x(x^2 + 3x + 1)$ 4

$f'(x) =$

$= e^x(x^2 + x) + e^x(2x + 1)$ 3

$= e^x(x^2 + 3x + 1)$ 1

$f'(0) = 1$ 2

$f(0) = 0$ 2

Escrever uma equação da recta pedida 3

1.2. 14

Determinar $f''(x)$ 3

$f''(x) =$

$= e^x(x^2 + 3x + 1) + e^x(2x + 3)$ 2

$= e^x(x^2 + 5x + 4)$ 1

Determinar os zeros de f'' 3

$e^x(x^2 + 5x + 4) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = 0$ 1

$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = -1$ 2

Estudar o sinal de f'' 4

Concluir que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -4]$ e em $[-1, +\infty[$ e voltada para baixo em $[-4, -1]$ (ver **nota**)..... 3

Concluir que o gráfico de f tem dois pontos de inflexão 1

Nota:
Se o examinando apresentar os intervalos abertos, não deverá ser penalizado.

1.3. ..... **14**

Referir que, pelo facto de f ser contínua em $\mathbb{R}$, não existem assimptotas verticais do gráfico de f 2

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ **(ver nota 1)** 4

Concluir que não existe assimptota horizontal do gráfico de f, quando $x \to +\infty$ 1

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ **(ver nota 2)** 6

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x(x^2 + x) =$ **(ver nota 3)**

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2+x}{e^{-x}}$ 2

$= 0$ 4

Concluir que a recta de equação $y = 0$ é assimptota horizontal do gráfico de f, quando $x \to -\infty$ 1

Notas:

1. O examinando pode determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, em vez de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, e, verificando que o limite é $+\infty$, concluir, correctamente, que não existe assimptota horizontal do gráfico de f, quando $x \to +\infty$

2. O examinando pode:
   - começar por determinar $m = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$
   - concluir que $m = 0$
   - determinar, em seguida, $b = \lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - m\,x] = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

   Se o examinando optar por este processo, os 6 pontos previstos para o cálculo de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ devem ser distribuídos de acordo com o seguinte critério:

   $m = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ 3

   $b = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ 3

A distribuição de cada um destes três pontos é idêntica à distribuição dos seis pontos, indicada acima para o cálculo de $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, com a diferença de que, em vez de ser 2 + 4, deverá ser 1 + 2.

3. O examinando pode indicar (ou não) que se está perante a indeterminação $0 \times \infty$. Se não o fizer, não deverá ser penalizado. Se o fizer, e não prosseguir o cálculo, ou prosseguir incorrectamente, deverá receber 1 ponto por essa indicação.

2.1. 10

$n = 84$ 2
$f(84) \approx 12{,}336$ 2
Concluir que o pôr do Sol ocorreu às $18\,h\ 50\,m$ 6

$12{,}336\,h \approx 12\,h\ 20\,m$ 3
$6\,h\ 30\,m + 12\,h\ 20\,m = 18\,h\ 50\,m$ 3

ou

$6{,}5 + 12{,}336 = 18{,}836$ 3
$18{,}836\,h \approx 18\,h\ 50\,m$ 3

2.2. 12

Traduzir o problema por uma equação: $f(n) = 12{,}2$ 2

Resolver a equação 9

$12{,}2 + 2{,}64 \operatorname{sen} \frac{\pi\,(n-81)}{183} = 12{,}2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen} \frac{\pi\,(n-81)}{183} = 0 \Leftrightarrow$ 2

$\Leftrightarrow \frac{\pi\,(n-81)}{183} = k\,\pi \quad (k \text{ inteiro}) \Leftrightarrow$ 2

$\Leftrightarrow n = 81 + 183\,k$ 2

$\Leftrightarrow n = 81 \vee n = 264$ 3

Conclusão (número pedido $= 2$) 1

3.1.1. ..... **7**

Número pedido $= 10!$ 6

Número pedido $= 3\,628\,800$ 1

3.1.2. ..... **15**

Número pedido $= {}^4A_2 \times {}^6A_4 \times 4!$ **(ver nota)** 14

Número pedido $= 103\,680$ 1

Nota:
Indicam-se a seguir possíveis respostas **incorrectas** do examinando, com a respectiva cotação a atribuir. Caberá ao corrector fazer as extrapolações necessárias para outras situações.

${}^4A_2 \times {}^6A_4$ 10
${}^4C_2 \times {}^6C_4 \times 4!$ 8
${}^4C_2 \times {}^6C_4$ 4

3.2.1. ..... **12**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:
$\overline{PQ} = 6$ 2
Raio da superfície esférica $= 3$ 2
Coordenadas do centro da superfície esférica: $(1, 1, 1)$ 2
Coordenadas do ponto F: $(0, 2, 2)$ 2
Distância do ponto F ao centro da superfície esférica $= \sqrt{3}$ 2
Justificação pedida 2

2.º Processo:
$\overline{PQ} = 6$ 2
Raio da superfície esférica $= 3$ 2
Coordenadas do centro da superfície esférica: $(1, 1, 1)$ 2
Equação que define a superfície esférica:
$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$ 2
Coordenadas do ponto F: $(0, 2, 2)$ 2
Verificação de que $(0, 2, 2)$ não satisfaz a equação que define a superfície esférica 2

3.2.2. ..... **12**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Referir que a recta EG é perpendicular à recta DF 4

Referir que a recta EG é perpendicular à recta PQ 4

Conclusão (A recta EG é perpendicular a duas rectas concorrentes contidas no plano ADQ, pelo que a recta EG é perpendicular a este plano.) 4

2.º Processo:

$\overrightarrow{EG} = (-2, -2, 0)$ 2

$\overrightarrow{AD} = (0, 0, 2)$ 2

$\overrightarrow{DQ} = (-1, 1, 2)$ 2

$\overrightarrow{EG} . \overrightarrow{AD} = 0$ 2

$\overrightarrow{EG} . \overrightarrow{DQ} = 0$ 2

Conclusão 2

3.2.3. ..... **12**

Evidência de que o examinando compreendeu que a secção definida no poliedro pelo plano ADQ é o polígono $[ADQFCP]$ 3

Área do rectângulo $[ADFC]$ 3

Área do triângulo $[DQF]$ 3

Área da secção 3

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos — Programa «antigo»

Duração da prova: 120 minutos
2000

1.ª FASE
2.ª CHAMADA
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

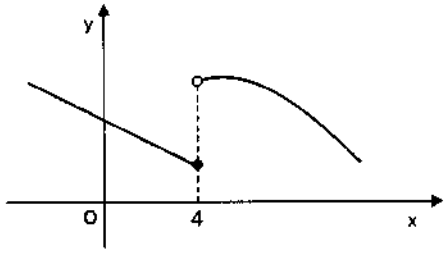
Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.

Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$.



Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $\lim_{x \to 4^-} f(x) = f(4)$ e $\lim_{x \to 4^+} f(x) = f(4)$

(B) $\lim_{x \to 4^-} f(x) = f(4)$ e $\lim_{x \to 4^+} f(x) \neq f(4)$

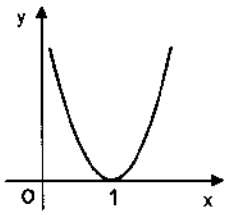
(C) $\lim_{x \to 4^-} f(x) \neq f(4)$ e $\lim_{x \to 4^+} f(x) = f(4)$

(D) $\lim_{x \to 4^-} f(x) \neq f(4)$ e $\lim_{x \to 4^+} f(x) \neq f(4)$

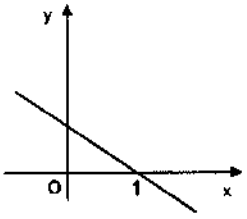
2. Seja g uma função cujo gráfico tem um ponto de inflexão de abcissa 1.

Qual dos seguintes gráficos poderá ser o da **segunda derivada** de g ?

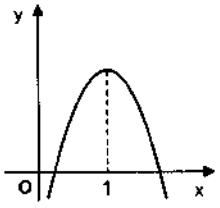
(A)



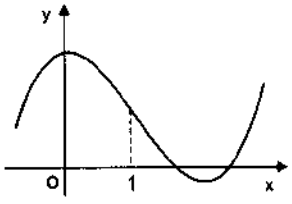
(B)



(C)



(D)



3. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $[-3, 2]$.

Qual é o contradomínio de $|f|$?

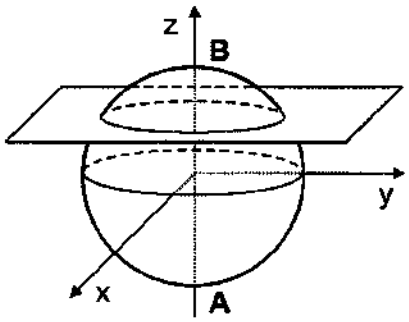
(A) $[2, 3]$ **(B)** $[-2, 3]$

(C) $[0, 2]$ **(D)** $[0, 3]$

4. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, a esfera definida pela condição $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Admita que um ponto P se desloca ao longo do diâmetro $[AB]$, que está contido no eixo Oz.

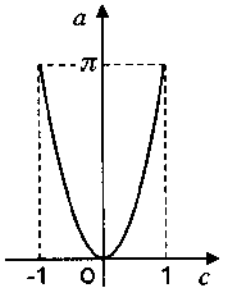
Para cada posição do ponto P, considere o plano que contém P e é paralelo ao plano xOy.



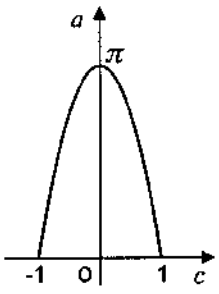
Seja g a função que faz corresponder, à cota c do ponto P, a área a da secção produzida na esfera pelo referido plano.

Qual dos seguintes pode ser o gráfico da função g ?

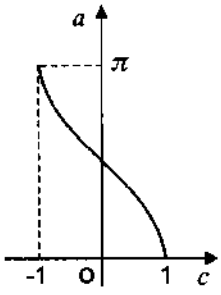
(A)



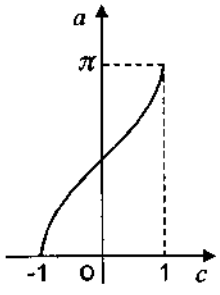
(B)



(C)



(D)



5. Num referencial o.n. xOy, considere uma parábola cuja directriz tem equação $x = 1$.
P é um ponto da parábola, de abcissa 4.
Qual é a distância de P ao foco da parábola?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5

V.S.F.F.

6. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere o plano α, de equação $x = y$.

Qual dos seguintes pontos é o simétrico do ponto $P(1,0,0)$, em relação ao plano α?

(A) $A(-1,0,0)$ **(B)** $B(1,-1,0)$

(C) $C(1,0,1)$ **(D)** $D(0,1,0)$

7. Considere dois planos concorrentes α e β.
Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vectores normais a α e a β, respectivamente.
Seja $\vec{r}$ um vector com a direcção da recta de intersecção de α e β.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\vec{r}$ é paralelo a $\vec{a}$ e $\vec{r}$ é paralelo a $\vec{b}$
(B) $\vec{r}$ é paralelo a $\vec{a}$ e $\vec{r}$ é perpendicular a $\vec{b}$
(C) $\vec{r}$ é perpendicular a $\vec{a}$ e $\vec{r}$ é paralelo a $\vec{b}$
(D) $\vec{r}$ é perpendicular a $\vec{a}$ e $\vec{r}$ é perpendicular a $\vec{b}$

8. Considere todos os números de seis algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9.
Destes números, quantos têm exactamente um algarismo 4?

(A) 8^5 **(B)** 9^5 **(C)** 6×8^5 **(D)** $6 \times {}^8A_5$

9. O António escolhe, ao acaso, uma página de um jornal de oito páginas.
A Ana escolhe, ao acaso, uma página de uma revista de quarenta páginas.
Qual é a probabilidade de ambos escolherem a página 5?

(A) $\frac{1}{320}$ **(B)** $\frac{3}{20}$ **(C)** $\frac{1}{48}$ **(D)** $\frac{5}{48}$

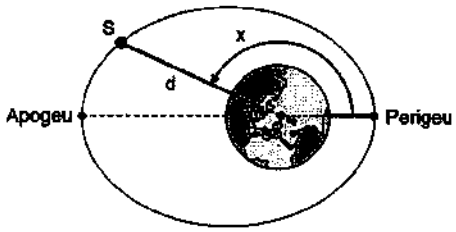
Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Um satélite **S** tem uma órbita elíptica em torno da Terra, tal como se representa na figura. Tenha em atenção que os elementos nela desenhados não estão na mesma escala.

Na elipse estão assinalados dois pontos:
- o *apogeu*, que é o ponto da órbita mais afastado do centro da Terra;
- o *perigeu*, que é o ponto da órbita mais próximo do centro da Terra.



O ângulo x, assinalado na figura, tem o seu vértice no centro da Terra; o seu lado origem passa no *perigeu*, o seu lado extremidade passa no satélite e a sua amplitude está compreendida entre 0 e 360 graus.

A distância d, em km, do satélite ao **centro** da Terra, é dada por $d = \frac{7\,820}{1+0{,}07\cos x}$

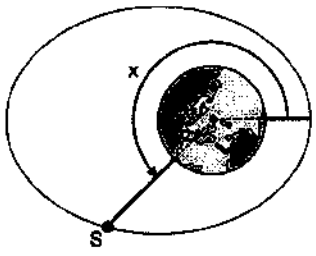
Considere que a Terra é uma esfera de raio $6\,378$ km.

1.1. Determine a altitude do satélite (distância à **superfície** da Terra) quando este se encontra no *apogeu*. Apresente o resultado em km, arredondado às unidades.

1.2. Num certo instante, o satélite está na **posição indicada na figura junta**.

A distância do satélite ao **centro** da Terra é, então, de $8\,200$ km.

Determine o valor de x, em graus, arredondado às unidades.



V.S.F.F.

2. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, definida por $f(x)=\frac{e^x}{x-1}$

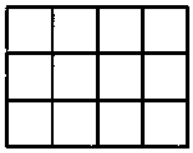
Recorrendo exclusivamente a processos analíticos (ou seja, **sem** utilização da calculadora), resolva as alíneas seguintes:

2.1. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

2.2. Resolva a equação $\ln[f(x)]=x$ (ln designa *logaritmo* de base e)

2.3. Estude a função f quanto à existência de assimptotas verticais e horizontais do seu gráfico.

3. Uma caixa tem doze compartimentos para colocar iogurtes (ver figura). Em cada compartimento cabe apenas um iogurte.



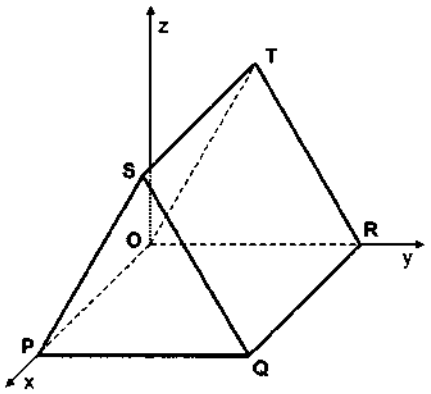
3.1. De quantas maneiras diferentes podemos colocar nove iogurtes nessa caixa, sabendo que seis iogurtes são naturais (e portanto indistinguíveis) e os restantes três são de frutas (um de morango, um de banana e um de ananás) ?

3.2. Colocando ao acaso, na caixa vazia, quatro iogurtes, qual é a probabilidade de ficarem todos na mesma fila? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um prisma triangular regular.

Sabe-se que:

- o vértice O coincide com a origem do referencial
- o vértice P pertence ao semieixo positivo Ox
- o vértice R pertence ao semieixo positivo Oy
- o segmento $[QR]$ tem comprimento 6



4.1. Indique, justificando, o valor do produto escalar $\overrightarrow{TS} \cdot \overrightarrow{TR}$

4.2. Determine uma equação vectorial da recta de intersecção do plano PQS com o plano de equação $x + y + z = 5$

4.3. Sabendo que a área lateral do prisma é 72, determine as coordenadas do ponto S.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte **81**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada ..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1. 25
1.1. 11
1.2. 14

2. 39
2.1. 14
2.2. 11
2.3. 14

3. 22
3.1. 11
3.2. 11

4. 33
4.1. 11
4.2. 11
4.3. 11

TOTAL **200**

PROVA 435/11 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **1.ª Fase**
2000 **2.ª Chamada**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.

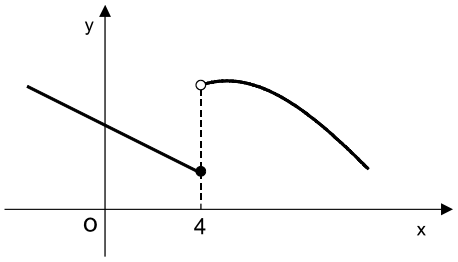
A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.

Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.

Primeira Parte

- As sete questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$.



Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = f(4)$ e $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = f(4)$

(B) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = f(4)$ e $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) \neq f(4)$

(C) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) \neq f(4)$ e $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = f(4)$

(D) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) \neq f(4)$ e $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) \neq f(4)$

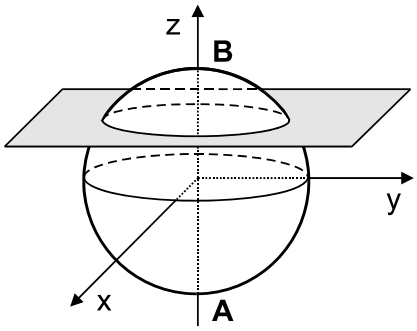
2. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $[-3, 2]$.

Qual é o contradomínio de $|f|$?

(A) $[2, 3]$ **(B)** $[-2, 3]$

(C) $[0, 2]$ **(D)** $[0, 3]$

3. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, a esfera definida pela condição $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.



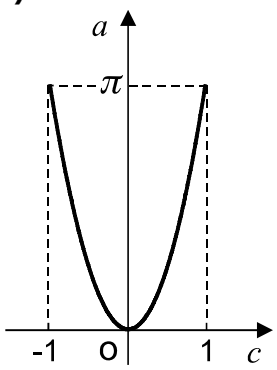
Admita que um ponto P se desloca ao longo do diâmetro $[AB]$, que está contido no eixo Oz.

Para cada posição do ponto P, considere o plano que contém P e que é paralelo ao plano xOy.

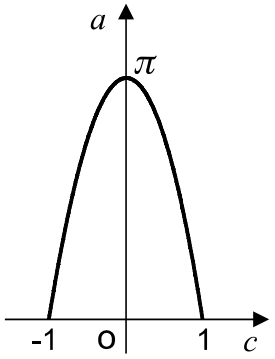
Seja g a função que faz corresponder, à cota $\boldsymbol{c}$ do ponto P, a área $\boldsymbol{a}$ da secção produzida na esfera pelo referido plano.

Qual dos seguintes pode ser o gráfico da função g ?

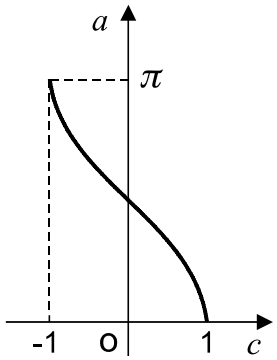
(A)



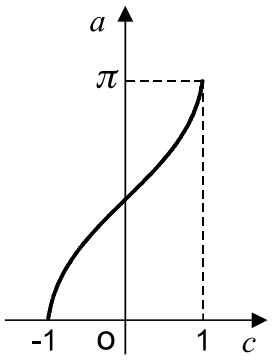
(B)



(C)



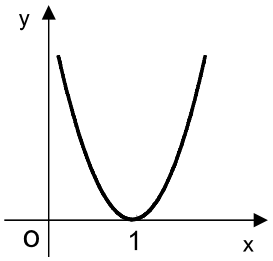
(D)



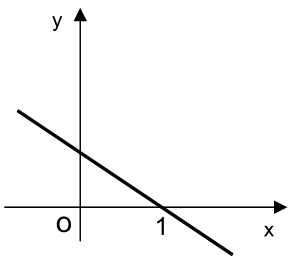
4. Seja g uma função cujo gráfico tem um ponto de inflexão de abcissa 1.

Qual dos seguintes gráficos poderá ser o da **segunda derivada** de g ?

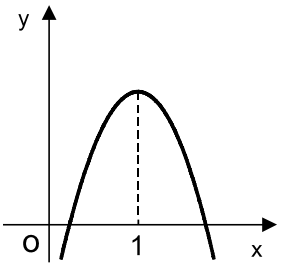
(A)



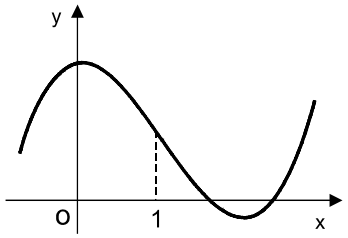
(B)



(C)



(D)



5. Considere todos os números de seis algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9.
Destes números, quantos têm exactamente um algarismo 4 ?

(A) 8^5 **(B)** 9^5 **(C)** 6×8^5 **(D)** $6 \times {}^8A_5$

6. O António escolhe, ao acaso, uma página de um jornal de oito páginas.
A Ana escolhe, ao acaso, uma página de uma revista de quarenta páginas.
Qual é a probabilidade de ambos escolherem a página 5 ?

(A) $\frac{1}{320}$ **(B)** $\frac{3}{20}$ **(C)** $\frac{1}{48}$ **(D)** $\frac{5}{48}$

7. Seja z um número complexo de argumento $\frac{\pi}{5}$
Qual poderá ser um argumento do **simétrico** de z ?

(A) $-\frac{\pi}{5}$ **(B)** $\pi + \frac{\pi}{5}$ **(C)** $\pi - \frac{\pi}{5}$ **(D)** $2\pi + \frac{\pi}{5}$

Segunda Parte

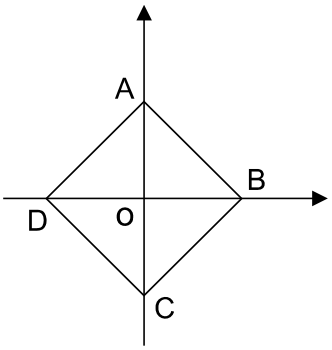
Nas questões desta segunda parte, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Considere, no plano complexo, o quadrado $[ABCD]$.

Os pontos A e C pertencem ao eixo imaginário, e os pontos B e D pertencem ao eixo real.

Estes quatro pontos encontram-se à distância de uma unidade da origem do referencial.



1.1. Sejam $w = 1 - i$ e $z = 2\ cis\ \frac{3\pi}{2}$

Sem recorrer à calculadora, mostre que as raízes quartas do complexo $\frac{w^2}{z}$ têm por imagens geométricas os pontos A, B, C e D.

1.2. Defina, por meio de uma condição em $\mathbb{C}$, a circunferência **inscrita** no quadrado $[ABCD]$.

2. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, definida por $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos (ou seja, **sem** utilização da calculadora), resolva as alíneas seguintes:

2.1. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

2.2. Resolva a equação $\ln[f(x)] = x$ ($\ln$ designa *logaritmo* de base e)

2.3. Estude a função f quanto à existência de assimptotas verticais e horizontais do seu gráfico.

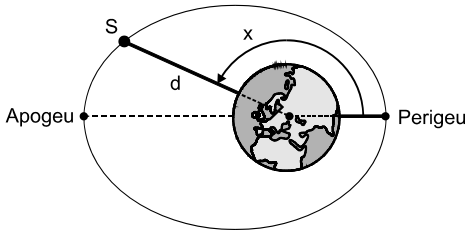
3. Um satélite **S** tem uma órbita elíptica em torno da Terra, tal como se representa na figura.

Tenha em atenção que os elementos nela desenhados não estão na mesma escala.

Na elipse estão assinalados dois pontos:

- o *apogeu*, que é o ponto da órbita mais afastado do centro da Terra;

- o *perigeu*, que é o ponto da órbita mais próximo do centro da Terra.



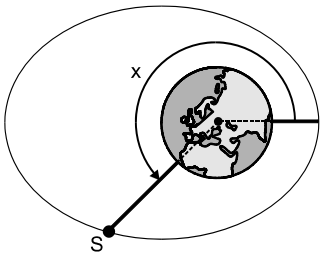
O ângulo x, assinalado na figura, tem o seu vértice no centro da Terra; o seu lado origem passa no *perigeu*, o seu lado extremidade passa no satélite e a sua amplitude está compreendida entre 0 e 360 graus.

A distância d, em km, do satélite ao **centro** da Terra, é dada por $d = \frac{7\,820}{1+0{,}07\,\cos x}$

Considere que a Terra é uma esfera de raio $6\,378$ km.

3.1. Determine a altitude do satélite (distância à **superfície** da Terra) quando este se encontra no *apogeu*. Apresente o resultado em km, arredondado às unidades.

3.2. Num certo instante, o satélite está na **posição indicada na figura**.



A distância do satélite ao **centro** da Terra é, então, de $8\,200$ km.

Determine o valor de x, em graus, arredondado às unidades.

4.

4.1. Um estudo feito a uma certa marca de iogurtes revelou que:

- se um iogurte está dentro do prazo de validade, a probabilidade de estar estragado é $0{,}005$;
- se um iogurte está fora do prazo de validade, a probabilidade de estar estragado é $0{,}65$.

Considere que, num certo dia, uma mercearia tem dez iogurtes dessa marca, dos quais dois estão fora de prazo.

Escolhendo, ao acaso, um desses dez iogurtes, qual é a probabilidade de ele estar estragado?

4.2. A banda desenhada retrata um episódio de uma aula de Matemática.
A professora propõe um problema à turma, e o João e a Joana são os primeiros a responder.



Ambas as respostas ao problema proposto estão certas.
Numa pequena composição (quinze a vinte linhas, aproximadamente) explique o raciocínio de cada um dos dois alunos.

Nota: o número de linhas referido não tem um carácter vinculativo; pretende apenas dar uma indicação do grau de desenvolvimento pretendido.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte..... **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **137**

1. 21
1.1. 11
1.2. 10

2. 50
2.1. 17
2.2. 15
2.3. 18

3. 34
3.1. 16
3.2. 18

4. 32
4.1. 16
4.2. 16

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Círculo: $\pi\ r^2 \qquad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Prisma: *Área da base* × *Altura*

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3 \qquad (r - raio)$

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\,.\cos b + \text{sen}\,b\,.\cos a$

$\cos\,(a+b) = \cos\,a\,.\cos b - \text{sen}\,a\,.\text{sen}\,b$

$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a\,.\,\text{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho\, cis\,\theta)\,.\,(\rho'\, cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta + \theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\,\theta)^n\ = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta}\ = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'\,.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\,u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\,\text{sen}\,u$

$(\text{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos — Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos — **1.ª FASE**
2000 — **2.ª CHAMADA**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Primeira Parte **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada ..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **137**

1. 21
1.1. 11
1.2. 10

2. 50
2.1. 17
2.2. 15
2.3. 18

3. 34
3.1. 16
3.2. 18

4. 32
4.1. 16
4.2. 16

TOTAL **200**

V.S.F.F.

435/C/1

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Primeira Parte

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Versão 1	B	D	B	B	C	A	B
Versão 2	D	A	D	C	B	D	C

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, nesta primeira parte, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas **Resp. certas**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

Segunda Parte

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Critérios específicos

1.1. 11

$\frac{(1-i)^2}{2\ cis\ \frac{3\pi}{2}} = 1$ 5

$\frac{(1-i)^2}{2\ cis\ \frac{3\pi}{2}} = \frac{1-2i+i^2}{2\ cis\ \frac{3\pi}{2}}$ 1

$= \frac{-2i}{2\ cis\ \frac{3\pi}{2}}$ 1

$= \frac{-2i}{-2i}$ 2

$= 1$ 1

ou

$\frac{(1-i)^2}{2\ cis\ \frac{3\pi}{2}} = \frac{\left(\sqrt{2}\ cis\ \frac{7\pi}{4}\right)^2}{2\ cis\ \frac{3\pi}{2}}$ 2

$= \frac{2\ cis\ \frac{3\pi}{2}}{2\ cis\ \frac{3\pi}{2}}$ 2

$= 1$ (ou $cis\,0$) 1

Conclusão 6

$\sqrt[4]{cis\,0} = cis\ \frac{2k\pi}{4}$, $k = 0, 1, 2, 3$ 2

As raízes quartas de 1 são $1, i, -1, -i$ 2

Identificação de $1, i, -1, -i$ com os vértices do quadrado $[ABCD]$ 2

ou

Identificação de $1, i, -1, -i$ com os vértices do quadrado $[ABCD]$ 2

$1^4 = i^4 = (-1)^4 = (-i)^4 = 1$ 4

V.S.F.F.

1.2. ..... **10**

Determinar o raio da circunferência **(ver nota)**.....5

Escrever a condição $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (ou outra equivalente) 5

Nota:
Indicam-se a seguir quatro processos possíveis para obter o raio da circunferência, com os respectivos desdobramentos dos 5 pontos:

Lado do quadrado $= \sqrt{2}$ 3

Raio da circunferência $= \frac{\sqrt{2}}{2}$ 2

ou

$x^2 + x^2 = 1$ (x é o raio da circunferência).....3

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 2

ou

sen $45^\circ = \frac{x}{1}$ (x é o raio da circunferência).....3

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 2

ou

Raio da circunferência $=$
$=$ Distância da origem ao ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.....3

Raio da circunferência $= \frac{\sqrt{2}}{2}$ 2

2.1. ..... **17**

$f'(x) =$

$= \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2}$ 3

$= \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$ 2

Determinar o zero de f' 2

Estudar o sinal de f' 4

Concluir que f é decrescente em $]-\infty, 1[$ e em $]1, 2]$ **(ver nota)**..... 3

Concluir que f é crescente em $[2, +\infty[$ 2

Concluir que f tem mínimo relativo para $x = 2$ 1

Nota:
Se o examinando escrever que f é decrescente em $]-\infty, 1[\cup]1, 2]$ ou em $]-\infty, 2]$, deverá ter, neste passo, a cotação de zero pontos.

2.2. ..... **15**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Para $x > 1$, tem-se:

$\ln\left(\frac{e^x}{x-1}\right) = x$

$\Leftrightarrow \ln(e^x) - \ln(x-1) = x$ 5

$\Leftrightarrow x - \ln(x-1) = x$ 4

$\Leftrightarrow \ln(x-1) = 0$ 1

$\Leftrightarrow x - 1 = 1$ 4

$\Leftrightarrow x = 2$ 1

2.º Processo

Para $x > 1$, tem-se:

$\ln\left(\frac{e^x}{x-1}\right) = x$

$\Leftrightarrow \frac{e^x}{x-1} = e^x$ 8

$\Leftrightarrow x - 1 = 1$ 6

$\Leftrightarrow x = 2$ 1

Nota:
Se, qualquer que seja o processo utilizado, o examinando não referir que as equivalências são válidas apenas para $x > 1$, ou não verificar que 2 é, efectivamente, solução da equação, deverá ser penalizado em 2 pontos.

2.3. 18

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ e/ou $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ **(ver nota 1)** 3

Concluir que a recta de equação $x = 1$ é assimptota vertical do gráfico de f 3

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ **(ver nota 2)** 3

Concluir que não existe assimptota horizontal do gráfico de f, quando $x \to +\infty$ 3

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ **(ver nota 3)** 3

Concluir que a recta de equação $y = 0$ é assimptota horizontal do gráfico de f, quando $x \to -\infty$ 3

Notas:

1. O examinando só tem de indicar o valor de um dos limites; no entanto, se determinar ambos os limites e se enganar num deles, deverá ser cotado com 2 dos 3 pontos.

2. O examinando pode determinar $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, em vez de $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, e, verificando que o limite é $+\infty$, concluir, correctamente, que não existe assímptota horizontal do gráfico de f, quando $x \to +\infty$

3. O examinando pode:

   • começar por determinar $m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$

   • concluir que $m = 0$

   • determinar, em seguida, $b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - m\,x] = \lim_{x \to -\infty} f(x)$

   Se o examinando optar por este processo, os 3 pontos previstos para o cálculo de $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ devem ser distribuídos de acordo com o seguinte critério:

   $m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ 2

   $b = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ 1

3.1. ..... **16**

Substituir x por $180°$ **(ver notas 1 e 2)** 6

$\cos 180° = -1$ 2

Distância do satélite (no apogeu) ao centro da Terra 3

Distância pedida **(ver nota 3)** 5

Notas:

1. Apesar de, no enunciado, se explicitar que se considera o grau como unidade de medida do ângulo x, não deve ser penalizada a eventual substituição de x por π (radianos), na fórmula que relaciona as variáveis x e d.

2. Pode acontecer que o examinando não se aperceba da seguinte evidência geométrica: o satélite está no *apogeu* se e só se $x = 180°$.

   Nesse caso, o examinando poderá começar por derivar a função definida pela expressão $\frac{7\,820}{1+0{,}07\cos x}$, para então concluir que é para $x = \pi$ (radianos) que a função é máxima.

   A derivação da função deve ser valorizada em 3 pontos.

   A conclusão de que a função é máxima para $x = \pi$ (radianos) deve receber mais 3 pontos, perfazendo, assim, a cotação prevista para a substituição de x por $180°$ (6 pontos).

3. O examinando poderá, com recurso à calculadora gráfica, determinar o valor pedido (determinando graficamente o máximo de $\frac{7\,820}{1+0{,}07\cos x}$ e subtraindo 6378 ao valor obtido, ou determinando directamente o máximo de $\frac{7\,820}{1+0{,}07\cos x} - 6378$).
   Nesse caso, o examinando deve explicar como procedeu, referindo algo que evidencie a utilização da calculadora na procura do valor pedido. Tal pode ser feito reproduzindo ou descrevendo o rectângulo de visualização da calculadora.

   A cotação **máxima** a atribuir **deverá ter em conta o grau de precisão do valor obtido**, de acordo com o seguinte critério:

   Valor obtido correcto (2031) 16
   Valor obtido igual a 2030 14
   Valor obtido igual a 2029 ou a 2032 8
   Outros valores inteiros 0

   Caso o examinando não apresente o resultado final arredondado às unidades, deverá ter a cotação máxima de 15 pontos.

3.2. ..... **18**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Equacionar o problema $\left(\frac{7\,820}{1+0{,}07\cos x} = 8200\right)$ 4

$\cos x = -0{,}662$ 4

Conclusão: $x \approx 229°$ **(ver notas 1 e 4)** 10

2.º Processo

Equacionar o problema **(ver nota 2)** 4

Resolver a equação graficamente e concluir que $x \approx 229°$ **(ver notas 3 e 4)** 14

Notas:

1. Se o examinando indicar apenas a outra solução da equação $\cos(x) = -0{,}662$, no intervalo $[0°, 360°]$, que é $131°$, deverá ser cotado em 3 dos 10 pontos previstos para a conclusão.
   Se o examinando indicar as duas soluções da referida equação, $131°$ e $229°$, e não referir que apenas a segunda corresponde à posição do satélite indicada no enunciado, deverá ser cotado em 5 dos 10 pontos previstos para a conclusão.

2. Se o examinando não escrever esta equação, mas, na sua resposta, existir evidência de que ele procura graficamente a solução da mesma, estes 4 pontos deverão ser-lhe atribuídos.

3. O examinando deve explicar como procedeu, referindo algo que evidencie a utilização da calculadora na procura do valor pedido. Tal pode ser feito reproduzindo ou descrevendo o rectângulo de visualização da calculadora.

   A cotação **máxima** a atribuir **deverá ter em conta o grau de precisão do valor obtido**, de acordo com o seguinte critério:

   Valor obtido correcto $(229°)$ 14

   Valor obtido igual a $228°$ 12

   Valor obtido igual a $227°$ ou a $230°$ 8

   Outros valores inteiros 0

   Se o examinando, utilizando este processo (gráfico), indicar apenas a outra solução $(131°)$, deverá ser cotado, no máximo, em 4 dos 14 pontos previstos para a conclusão.

Se o examinando indicar as duas soluções da referida equação, $131°$ e $229°$, e não referir que apenas a segunda corresponde à posição do satélite indicada no enunciado, deverá ser cotado, no máximo, em 7 dos 14 pontos previstos para a conclusão.

4. Caso o examinando não apresente o resultado final arredondado às unidades, deverá ter a cotação máxima de 17 pontos.

4.1. 16

Sejam os acontecimentos:
E – o iogurte está estragado
D – o iogurte está dentro do prazo de validade
$\overline{D}$ – o iogurte está fora do prazo de validade

A forma de apresentar a resolução deste exercício pode ser feita por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

$P(E) = P(E \cap D) + P(E \cap \overline{D})$ 1

$P(E \cap D) = P(E|D) \times P(D)$ 1

$P(E \cap \overline{D}) = P(E|\overline{D}) \times P(\overline{D})$ 1

$P(E) = 0{,}005 \times 0{,}8 + 0{,}65 \times 0{,}2$ 12

$P(E|D) = 0{,}005$ 3
$P(D) = 0{,}8$ 3
$P(E|\overline{D}) = 0{,}65$ 3
$P(\overline{D}) = 0{,}2$ 3

$P(E) = 0{,}134$ 1

2.º Processo

Construção e preenchimento de uma tabela de dupla entrada
(E, $\overline{E}$ por D, $\overline{D}$) ou de um diagrama em árvore **(ver nota 1)**..... 12

$P(E \cap D) = 0{,}005 \times 0{,}8$ **(ver nota 2)**..... 6
$P(E \cap \overline{D}) = 0{,}65 \times 0{,}2$ **(ver nota 3)**..... 6

$P(E) = 0{,}134$ 4

Notas:

1. Não se exige o preenchimento de toda a tabela (ou de todo o diagrama). Apenas são necessárias as probabilidades $P(E \cap D)$ e $P(E \cap \overline{D})$.

2. Se o examinando interpretar erradamente $P(E \cap D)$ como sendo $P(E|D)$, deverão ser atribuídos 3 ou 0 pontos, conforme exista, ou não, evidência de que o examinando concluiu que $P(D) = 0{,}8$.

3. Se o examinando interpretar erradamente $P(E \cap \overline{D})$ como sendo $P(E|\overline{D})$, deverão ser atribuídos 3 ou 0 pontos, conforme exista, ou não, evidência de que o examinando concluiu que $P(\overline{D}) = 0{,}2$.

4.2. 16

Apresenta-se a seguir um exemplo de resposta:

Raciocínio do João:
Existem $^{12}C_7$ *maneiras diferentes de escolher os sete compartimentos onde se vão colocar os sete iogurtes.*
Para cada selecção destes compartimentos, existem $^{7}A_3$ *maneiras diferentes de colocar neles os três iogurtes de frutas (dado que estes iogurtes são distintos, interessa a ordem pela qual ficam dispostos na caixa).*
Colocados os iogurtes de frutas, existe apenas uma maneira de colocar os quatro iogurtes naturais nos quatro lugares disponíveis.
Existem, assim, $^{12}C_7 \times {}^{7}A_3$ *maneiras de colocar os sete iogurtes na caixa.*

Raciocínio da Joana:
Existem $^{12}C_4$ *maneiras diferentes de colocar os iogurtes naturais (dado que estes iogurtes são indistinguíveis, não interessa a ordem pela qual ficam dispostos na caixa).*
Colocados os iogurtes naturais, sobram oito compartimentos para colocar os três iogurtes de frutas. Portanto, para cada uma das maneiras de colocar os iogurtes naturais, existem $^{8}A_3$ *maneiras diferentes de colocar os três iogurtes de frutas na caixa (dado que estes iogurtes são distintos, interessa a ordem pela qual ficam dispostos na caixa).*
Existem, assim, $^{12}C_4 \times {}^{8}A_3$ *maneiras de colocar os sete iogurtes na caixa.*

Na tabela seguinte, indica-se como esta alínea deve ser cotada:

Forma / Conteúdo	Nível 1 (*)	Nível 2 (*)	Nível 3 (*)
O examinando explica completamente os dois raciocínios. **(ver nota)**	16	14	12
O examinando explica completamente um dos raciocínios e explica o outro parcialmente.	14	12	10
O examinando explica completamente um dos raciocínios.	12	10	8
O examinando explica parcialmente os dois raciocínios.	10	8	6
O examinando explica parcialmente um dos raciocínios.	8	6	4

(*) **Nível 1** - Redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).

Nível 2 - Redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecte a inteligibilidade.

Nível 3 - Redacção confusa, sem estruturação aparente, presença de erros graves, com perturbação frequente da inteligibilidade.

Pode acontecer que uma composição não se enquadre completamente num dos três níveis descritos e/ou contenha características presentes em mais do que um deles. Nesse caso, deverá ser atribuída uma pontuação intermédia.

Nota:

Para que a explicação dos dois raciocínios se possa considerar completa, o examinando deve referir os seguintes aspectos:

No raciocínio do João:

- $^{12}C_7$ é o número de maneiras diferentes de escolher sete compartimentos de entre doze;
- $^{7}A_3$ é o número de maneiras diferentes de colocar os três iogurtes de frutas nos sete compartimentos seleccionados na etapa anterior (o examinando deverá referir que, como os três iogurtes são distintos, interessa a ordem pela qual ficam dispostos na caixa);
- colocados os iogurtes de frutas em três dos sete compartimentos, existe apenas uma maneira de colocar os quatro iogurtes naturais nos quatro compartimentos disponíveis.

No raciocínio da Joana:

- $^{12}C_4$ é o número de maneiras diferentes de colocar os quatro iogurtes naturais nos doze compartimentos da caixa (o examinando deverá referir que, como os quatro iogurtes naturais são indistinguíveis, não interessa a ordem pela qual ficam dispostos na caixa);
- $^{8}A_3$ é o número de maneiras diferentes de colocar os três iogurtes de frutas nos oito compartimentos disponíveis (o examinando deverá referir que, como os três iogurtes são distintos, interessa a ordem pela qual ficam dispostos nesses oito compartimentos).

Se o examinando não explicitar o porquê da multiplicação, não deverá ser penalizado. Por outras palavras: não se exige que o examinando utilize, na sua composição, uma expressão do tipo da que vem mencionada no exemplo de resposta: *para cada ....., existem ..... .*

Como é referido no enunciado, o número de linhas sugerido para a composição (quinze a vinte) não tem carácter vinculativo. Por isso, o examinando não deverá ser penalizado se não seguir essa sugestão.

V.S.F.F.

435/C/13

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.° Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.° 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos — Programa «antigo»

Duração da prova: 120 minutos **1.ª FASE**
2000 **2.ª CHAMADA**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Primeira Parte **81**

Cada resposta certa	+9
Cada resposta errada	- 3
Cada questão não respondida ou anulada	0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1.	25
1.1.	11
1.2.	14
2.	39
2.1.	14
2.2.	11
2.3.	14
3.	22
3.1.	11
3.2.	11
4.	33
4.1.	11
4.2.	11
4.3.	11

TOTAL **200**

V.S.F.F.

135/C/1

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Primeira Parte

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Versão 1	B	B	D	B	B	D	D	C	A
Versão 2	D	C	A	D	B	B	C	B	D

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, nesta primeira parte, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas **Resp. certas**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3	0	0		
3	27	24	21	18	15	12	9			
4	36	33	30	27	24	21				
5	45	42	39	36	33					
6	54	51	48	45						
7	63	60	57							
8	72	69								
9	81									

Segunda Parte

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

3.1. ..... **11**

Número pedido $= {}^{12}A_3 \times {}^{9}C_6$ **(ver nota)** 10

Número pedido $= 110\,880$ 1

Nota:

Existem várias formas correctas de escrever o número pedido. Apresentam-se a seguir mais alguns exemplos:

$${}^{12}C_6 \times {}^{6}A_3 \ , \quad {}^{12}C_9 \times {}^{9}A_3 \ , \quad {}^{12}C_9 \times {}^{9}C_6 \times 3!$$

Indicam-se também possíveis respostas **incorrectas** do examinando, com a respectiva cotação a atribuir. Caberá ao corrector fazer as extrapolações necessárias para outras situações.

${}^{12}C_6 \times {}^{6}C_3$ 7

${}^{12}C_6 \times {}^{12}A_3$ 4

${}^{12}C_6 \times {}^{12}C_3$ 2

3.2. ..... **11**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo
O espaço de resultados é a colecção de conjuntos $\{a, b, c, d\}$, onde a, b, c e d designam quatro dos doze compartimentos da caixa (os compartimentos onde são colocados os quatro iogurtes, supostos indistinguíveis).

Número de casos possíveis $= {}^{12}C_4$

Número de casos favoráveis $= 3$

Probabilidade pedida $= \frac{3}{{}^{12}C_4} = \frac{1}{165}$

2.º Processo
O espaço de resultados é o conjunto de sequências (a, b, c, d), onde a, b, c e d designam quatro dos doze compartimentos da caixa (os compartimentos onde são colocados os quatro iogurtes, supostos distinguíveis).

Número de casos possíveis $= {}^{12}A_4$

Número de casos favoráveis $= 3 \times 4!$

Probabilidade pedida $= \frac{3 \times 4!}{{}^{12}A_4} = \frac{1}{165}$

2.3. ..... **14**

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ e/ou $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ **(ver nota 1)** 3

Concluir que a recta de equação $x = 1$ é assimptota vertical do gráfico de f 2

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ **(ver nota 2)** 2

Concluir que não existe assimptota horizontal do gráfico de f, quando $x \to +\infty$ 2

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ **(ver nota 3)** 3

Concluir que a recta de equação $y = 0$ é assimptota horizontal do gráfico de f, quando $x \to -\infty$ 2

Notas:

1. O examinando só tem de indicar o valor de um dos limites; no entanto, se determinar ambos os limites e se enganar num deles, deverá ser cotado com 2 dos 3 pontos.

2. O examinando pode determinar $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, em vez de $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, e, verificando que o limite é $+\infty$, concluir, correctamente, que não existe assimptota horizontal do gráfico de f, quando $x \to +\infty$

3. O examinando pode:

   - começar por determinar $m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$
   - concluir que $m = 0$
   - determinar, em seguida, $b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - m\,x] = \lim_{x \to -\infty} f(x)$

   Se o examinando optar por este processo, os 3 pontos previstos para o cálculo de $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ devem ser distribuídos de acordo com o seguinte critério:

   $m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ 2

   $b = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ 1

2.2. ..... **11**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Para $x > 1$, tem-se:

$\ln\left(\frac{e^x}{x-1}\right) = x$

$\Leftrightarrow \ln(e^x) - \ln(x-1) = x$ 3

$\Leftrightarrow x - \ln(x-1) = x$ 3

$\Leftrightarrow \ln(x-1) = 0$ 1

$\Leftrightarrow x - 1 = 1$ 3

$\Leftrightarrow x = 2$ 1

2.º Processo

Para $x > 1$, tem-se:

$\ln\left(\frac{e^x}{x-1}\right) = x$

$\Leftrightarrow \frac{e^x}{x-1} = e^x$ 6

$\Leftrightarrow x - 1 = 1$ 4

$\Leftrightarrow x = 2$ 1

Nota:
Se, qualquer que seja o processo utilizado, o examinando não referir que as equivalências são válidas apenas para $x > 1$, ou não verificar que 2 é, efectivamente, solução da equação, deverá ser penalizado em 2 pontos.

2. Se o examinando não escrever esta equação, mas, na sua resposta, existir evidência de que ele procura graficamente a solução da mesma, estes 3 pontos deverão ser-lhe atribuídos.

3. O examinando deve explicar como procedeu, referindo algo que evidencie a utilização da calculadora na procura do valor pedido. Tal pode ser feito reproduzindo ou descrevendo o rectângulo de visualização da calculadora.

   A cotação **máxima** a atribuir **deverá ter em conta o grau de precisão do valor obtido**, de acordo com o seguinte critério:

   Valor obtido correcto $(229°)$ 11
   Valor obtido igual a $228°$ 9
   Valor obtido igual a $227°$ ou a $230°$ 6
   Outros valores inteiros 0

   Se o examinando, utilizando este processo (gráfico), indicar apenas a outra solução $(131°)$, deverá ser cotado, no máximo, em 3 dos 11 pontos previstos para a conclusão.

   Se o examinando indicar as duas soluções da referida equação, $131°$ e $229°$, e não referir que apenas a segunda corresponde à posição do satélite indicada no enunciado, deverá ser cotado, no máximo, em 6 dos 11 pontos previstos para a conclusão.

4. Caso o examinando não apresente o resultado final arredondado às unidades, deverá ter a cotação máxima de 13 pontos.

2.1. 14

$f'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2}$ 3

$= \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$ 2

Determinar o zero de f' 2

Estudar o sinal de f' 3

Concluir que f é decrescente em $]-\infty, 1[$ e em $]1, 2]$ **(ver nota)**..... 2

Concluir que f é crescente em $[2, +\infty[$ 1

Concluir que f tem mínimo relativo para $x = 2$ 1

Nota:
Se o examinando escrever que f é decrescente em $]-\infty, 1[\cup]1, 2]$ ou em $]-\infty, 2]$, deverá ter, neste passo, a cotação de zero pontos.

Nesse caso, o examinando deve explicar como procedeu, referindo algo que evidencie a utilização da calculadora na procura do valor pedido. Tal pode ser feito reproduzindo ou descrevendo o rectângulo de visualização da calculadora.

A cotação **máxima** a atribuir **deverá ter em conta o grau de precisão do valor obtido**, de acordo com o seguinte critério:

Valor obtido correcto (2031) 11
Valor obtido igual a 2030 9
Valor obtido igual a 2029 ou a 2032 6
Outros valores inteiros 0

Caso o examinando não apresente o resultado final arredondado às unidades, deverá ter a cotação máxima de 10 pontos.

1.2. 14

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Equacionar o problema $\left(\frac{7\,820}{1+0{,}07\cos x} = 8200\right)$ 3

$\cos x = -0{,}662$ 3

Conclusão: $x \approx 229°$ **(ver notas 1 e 4)** 8

2.º Processo

Equacionar o problema **(ver nota 2)** 3

Resolver a equação graficamente e concluir que $x \approx 229°$ **(ver notas 3 e 4)** 11

Notas:

1. Se o examinando indicar apenas a outra solução da equação $\cos(x) = -0{,}662$, no intervalo $[0°, 360°]$, que é $131°$, deverá ser cotado em 2 dos 8 pontos previstos para a conclusão.
   Se o examinando indicar as duas soluções da referida equação, $131°$ e $229°$, e não referir que apenas a segunda corresponde à posição do satélite indicada no enunciado, deverá ser cotado em 4 dos 8 pontos previstos para a conclusão.

Critérios específicos

1.1. 11

Substituir x por $180°$ **(ver notas 1 e 2)** 5

$\cos 180° = -1$ 1

Distância do satélite (no apogeu) ao centro da Terra 2

Distância pedida **(ver nota 3)** 3

Notas:

1. Apesar de, no enunciado, se explicitar que se considera o grau como unidade de medida do ângulo x, não deve ser penalizada a eventual substituição de x por π (radianos), na fórmula que relaciona as variáveis x e d.

2. Pode acontecer que o examinando não se aperceba da seguinte evidência geométrica: o satélite está no *apogeu* se e só se $x = 180°$.

   Nesse caso, o examinando poderá começar por derivar a função definida pela expressão $\frac{7\,820}{1+0{,}07\cos x}$, para então concluir que é para $x = \pi$ (radianos) que a função é máxima.

   A derivação da função deve ser valorizada em 3 pontos.

   A conclusão de que a função é máxima para $x = \pi$ (radianos) deve receber mais 2 pontos, perfazendo, assim, a cotação prevista para a substituição de x por $180°$ (5 pontos).

3. O examinando poderá, com recurso à calculadora gráfica, determinar o valor pedido (determinando graficamente o máximo de $\frac{7\,820}{1+0{,}07\cos x}$ e subtraindo 6378 ao valor obtido, ou determinando directamente o máximo de $\frac{7\,820}{1+0{,}07\cos x} - 6378$).

Qualquer que seja o processo utilizado pelo examinando, as cotações devem ser atribuídas de acordo com o seguinte critério:

Escrita da fracção **(ver notas 1, 2, 3, 4 e 5)** 10

Simplificação da fracção 1

Notas:

1. O examinando pode começar por indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis e só depois escrever a fracção.
   No entanto, se não o fizer, isto é, se escrever directamente a fracção, não deverá ser penalizado.

2. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da fracção, com a respectiva cotação a atribuir.

   $\frac{3}{{}^{12}C_4}$ ou $\frac{3\times 4!}{{}^{12}A_4}$ (fracção correcta)..... 10

   $\frac{3\times 4!}{{}^{12}C_4}$ 6

   $\frac{3}{{}^{12}A_4}$ 6

   Outras fracções com denominador ${}^{12}C_4$ ou ${}^{12}A_4$ 4

3. Se o examinando indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído à sua resposta menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

4. Se o examinando indicar apenas o número de casos possíveis, ${}^{12}C_4$ ou ${}^{12}A_4$, deverão ser atribuídos 3 pontos à sua resposta.

5. Se o examinando indicar apenas o número de casos favoráveis, 3 ou $3 \times 4!$, deverão ser atribuídos 3 pontos à sua resposta.

4.1. ..... **11**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Referir que $\overrightarrow{TS} \cdot \overrightarrow{TR} = 0$ 4
Justificar esse facto, com base na perpendicularidade dos dois vectores
(não se exige a justificação da perpendicularidade) 7

2.º Processo

$\overrightarrow{TS} = (6, 0, 0)$ 4

$\overrightarrow{TR} = (0, a, b)$ 4

$\overrightarrow{TS} \cdot \overrightarrow{TR} = 0$ 3

4.2. ..... **11**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Escrever uma equação do plano PQS (por exemplo, $x = 6$) 3

Escrever o sistema $x = 6 \wedge x + y + z = 5$ 2

Obter um sistema equivalente, com base no qual se possa escrever imediatamente uma equação vectorial da recta (por exemplo, $x = 6 \wedge \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$) 3

Escrever uma equação vectorial da recta 3

2.º Processo

Escrever uma equação do plano PQS (por exemplo, $x = 6$) 3

Escrever o sistema $x = 6 \wedge x + y + z = 5$ 2

Obter as coordenadas de dois pontos da recta 2

Obter as coordenadas de um vector com a direcção da recta 2

Escrever uma equação vectorial da recta 2

4.3. ..... **11**

Área de uma face lateral $= 72/3 = 24$ 2

Comprimento de uma aresta da base $= 4$ 2

Abcissa de $S = 6$ 1

Ordenada de $S = 2$ 2

Cota de $S = 2\sqrt{3}$ 4

PROVA 135/7 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **2.ª FASE**
2000

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

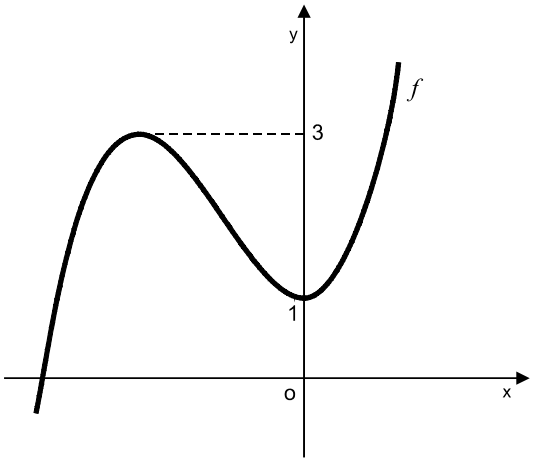
Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.

Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Seja f uma função polinomial de terceiro grau, cujo gráfico se encontra parcialmente representado na figura.



Quantas são as soluções da equação $f(x) = 2$?

(A) uma **(B)** duas **(C)** três **(D)** quatro

2. Considere a função h definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = \text{sen } x$

Qual das seguintes equações pode definir uma recta tangente ao gráfico de h ?

(A) $y = 2\,x + \pi$ **(B)** $y = -2$

(C) $y = \sqrt{2}\ x - 9$ **(D)** $y = x$

3. O coeficiente de ampliação A de uma certa lupa é dado, em função da distância d (em decímetros) da lupa ao objecto, por

$$A(d) = \frac{5}{5-d}$$

Indique a que distância do objecto tem de estar a lupa para que o coeficiente de ampliação seja igual a 5.

(A) $2\ dm$ **(B)** $4\ dm$ **(C)** $6\ dm$ **(D)** $8\ dm$

4. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- o gráfico de g é uma recta, que designamos por s
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$

Qual das afirmações seguintes é **necessariamente verdadeira** ?

(A) A recta s é tangente ao gráfico de f

(B) A recta s é secante ao gráfico de f

(C) A recta s não intersecta o gráfico de f

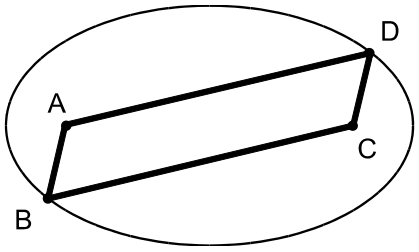
(D) A recta s é uma assimptota do gráfico de f

5. Na figura junta estão representados uma elipse e um paralelogramo $[ABCD]$.

Os vértices A e C são os focos da elipse.

Os vértices B e D são pontos da elipse.

O perímetro do paralelogramo é 30.



Qual é o comprimento do eixo maior da elipse?

(A) 12 **(B)** 15 **(C)** 18 **(D)** 20

6. Considere um vector $\overrightarrow{AB}$ tal que $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 1$

Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{BA}$?

(A) 1 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** 2

7. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere os planos definidos pelas equações $z = 1$ e $z = 5$.

Qual das equações seguintes define uma superfície esférica tangente aos dois planos?

(A) $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 25$

(B) $x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 25$

(C) $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 4$

(D) $x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 4$

8. Três rapazes e duas raparigas vão dar um passeio de automóvel.

Qualquer um dos cinco jovens pode conduzir.

De quantas maneiras podem ocupar os cinco lugares, dois à frente e três atrás, de modo a que o condutor seja uma rapariga e a seu lado viaje um rapaz?

(A) 36 **(B)** 120 **(C)** 12 **(D)** 72

9. Lança-se duas vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

Qual é a probabilidade de sair face 6 em exactamente um dos dois lançamentos?

(A) $\frac{1}{36}$ **(B)** $\frac{5}{36}$ **(C)** $\frac{1}{18}$ **(D)** $\frac{5}{18}$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2\,x - \cos x$

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, ou seja, **sem** utilizar a calculadora, resolva as alíneas seguintes:

1.1. Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que a função f tem, pelo menos, um zero, no intervalo $]\,0, \pi\,[$.

1.2. Seja f' a função derivada de f. Mostre que $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, e justifique que o zero de f, cuja existência é garantida pelo enunciado da alínea anterior, é o único zero desta função.

1.3. A recta de equação $y = 2x - \frac{1}{2}$ intersecta o gráfico de f em infinitos pontos. A abcissa de um desses pontos pertence ao intervalo $[\,3\pi, 4\pi]$. Determine-a.

2. A pressão atmosférica de cada local da Terra depende da altitude a que este se encontra. Admita que a pressão atmosférica P (medida em quilopascal) é dada, em função da altitude h (em **quilómetros**), por

$$P(h) = 101\ e^{-\,0{,}12\,h}$$

2.1. A montanha mais alta de Portugal é o Pico, na ilha do Pico - Açores.
A altitude do cume do Pico é 2350 metros.

Qual é o valor da pressão atmosférica, nesse local? Apresente o resultado em quilopascal, arredondado às unidades.



2.2. Determine x tal que, para qualquer h, $P(h + x) = \frac{1}{2}\,P(h)$. Apresente o resultado arredondado às décimas.

Interprete o valor obtido, no contexto desta igualdade.

3. Um baralho de cartas completo é constituído por cinquenta e duas cartas, repartidas por quatro naipes de treze cartas cada: espadas, copas, ouros e paus.

3.1. Num certo jogo de cartas, utiliza-se um baralho completo e dão-se treze cartas a cada jogador.
Imagine que está a participar nesse jogo.
Qual é a probabilidade de, nas treze cartas que vai receber, haver exactamente seis cartas do naipe de espadas? Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

3.2. De um baralho completo extraem-se, sucessivamente e sem reposição, duas cartas.
Qual é a probabilidade de pelo menos uma das cartas extraídas ser do naipe de espadas? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4. Na figura abaixo está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular.

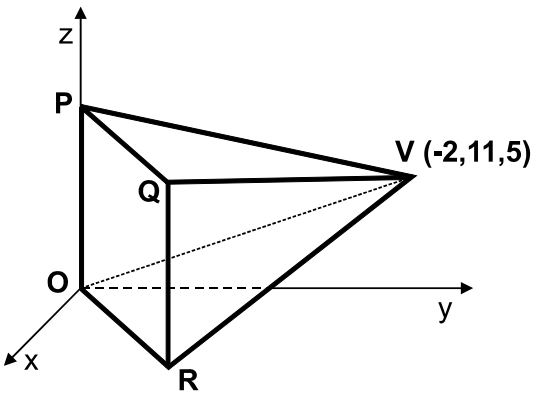
O vértice O é a origem do referencial

O vértice P pertence ao eixo Oz

O vértice R pertence ao plano xOy

O vértice V tem coordenadas $(-2, 11, 5)$

Uma equação vectorial da recta que contém a altura da pirâmide é
$(x, y, z) = (7, -1, 5) + k(6, -8, 0),\ k \in \mathbb{R}$



4.1. Mostre que a base da pirâmide está contida no plano de equação $3x - 4y = 0$

4.2. Justifique que o centro da base da pirâmide é o ponto de coordenadas $(4, 3, 5)$.

4.3. Determine o volume da pirâmide.

Volume da pirâmide $= \frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte..... **81**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1. 37
1.1. 11
1.2. 13
1.3. 13

2. 24
2.1. 10
2.2. 14

3. 22
3.1. 11
3.2. 11

4. 36
4.1. 12
4.2. 12
4.3. 12

TOTAL **200**

PROVA 435/11 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **2.ª FASE**
2000

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.

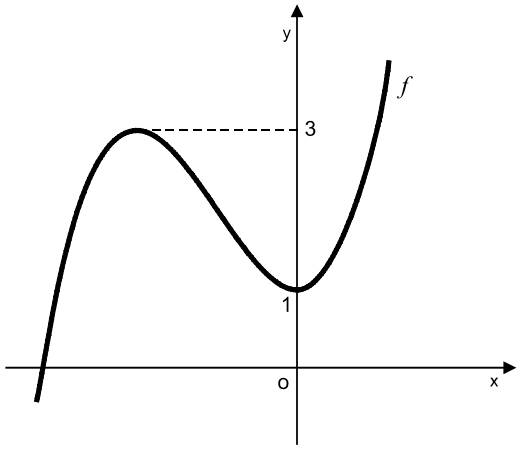
A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.

Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.

Primeira Parte

- As sete questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Seja f uma função polinomial de terceiro grau, cujo gráfico se encontra parcialmente representado na figura.



Quantas são as soluções da equação $f(x) = 2$?

(A) uma **(B)** duas **(C)** três **(D)** quatro

2. Considere a função h definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = \text{sen } x$

Qual das seguintes equações pode definir uma recta tangente ao gráfico de h ?

(A) $y = 2x + \pi$ **(B)** $y = -2$

(C) $y = \sqrt{2}\ x - 9$ **(D)** $y = x$

3. O coeficiente de ampliação A de uma certa lupa é dado, em função da distância d (em decímetros) da lupa ao objecto, por

$$A(d) = \frac{5}{5-d}$$

Indique a que distância do objecto tem de estar a lupa para que o coeficiente de ampliação seja igual a 5.

(A) $2\ dm$ **(B)** $4\ dm$

(C) $6\ dm$ **(D)** $8\ dm$

4. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- o gráfico de g é uma recta, que designamos por s
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$

Qual das afirmações seguintes é **necessariamente verdadeira** ?

(A) A recta s é tangente ao gráfico de f

(B) A recta s é secante ao gráfico de f

(C) A recta s não intersecta o gráfico de f

(D) A recta s é uma assimptota do gráfico de f

5. Três rapazes e duas raparigas vão dar um passeio de automóvel.

Qualquer um dos cinco jovens pode conduzir.

De quantas maneiras podem ocupar os cinco lugares, dois à frente e três atrás, de modo a que o condutor seja uma rapariga e a seu lado viaje um rapaz?

(A) 36 **(B)** 120 **(C)** 12 **(D)** 72

6. Lança-se duas vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

Seja X o número de vezes que sai a face 6 nos dois lançamentos.

Qual é a distribuição de probabilidades da variável X ?

(A)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$2 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^2$

(B)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\left(\frac{1}{6}\right)^2$	$2 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2$

(C)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

(D)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$

7. Qual das seguintes condições define uma recta no plano complexo ?

(A) $\left|z - 1\right| = 4$

(B) $arg(z) = \frac{\pi}{2}$

(C) $3\,z + 2\,i = 0$

(D) $\left|z - 1\right| = \left|z + i\right|$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

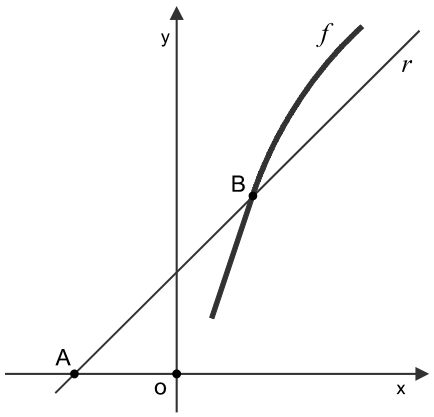
1. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x - \cos x$

1.1. Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que a função f tem, pelo menos, um zero, no intervalo $]0, \pi[$.

1.2. Seja f' a função derivada de f. Mostre que $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, e justifique que o zero de f, cuja existência é garantida pelo enunciado da alínea anterior, é o único zero desta função.

1.3. Na figura abaixo estão representadas:

- parte do gráfico da função f
- parte de uma recta r, cuja inclinação é $45°$, que contém o ponto $A(-3, 0)$ e que intersecta o gráfico da função f no ponto B



Recorrendo à sua calculadora, determine a área do triângulo $[AOB]$, onde O designa a origem do referencial. Apresente o resultado arredondado às unidades.

Nota: sempre que, nos valores intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, uma casa decimal.

2. A pressão atmosférica de cada local da Terra depende da altitude a que este se encontra. Admita que a pressão atmosférica P (medida em quilopascal) é dada, em função da altitude h (em **quilómetros**), por

$$P(h) = 101\ e^{-0{,}12\,h}$$

2.1. A montanha mais alta de Portugal é o Pico, na ilha do Pico - Açores.
A altitude do cume do Pico é 2350 metros.



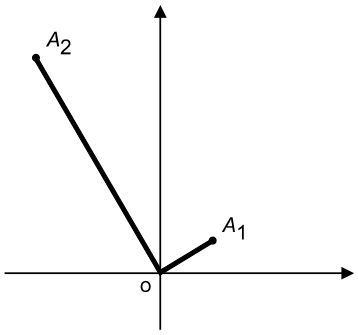
Qual é o valor da pressão atmosférica, nesse local? Apresente o resultado em quilopascal, arredondado às unidades.

2.2. Determine x tal que, para qualquer h, $P(h+x) = \frac{1}{2}\,P(h)$. Apresente o resultado arredondado às décimas.

Interprete o valor obtido, no contexto desta igualdade.

3. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos, e sejam z_1 e z_2 dois elementos de $\mathbb{C}$.
Sabe-se que:

- z_1 tem argumento $\frac{\pi}{6}$
- $z_2 = z_1^{\,4}$
- A_1 e A_2 são as imagens geométricas de z_1 e de z_2, respectivamente



3.1. Justifique que o ângulo $A_1 O\, A_2$ é recto (O designa a origem do referencial).

3.2. Considere, no plano complexo, a circunferência $\mathscr{C}$ definida pela condição $|z| = |z_1|$. Sabendo que o perímetro de $\mathscr{C}$ é $4\,\pi$, represente, na **forma algébrica**, o número complexo z_1

4.

4.1. Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam E_1 e E_2 dois acontecimentos possíveis ($E_1 \subset S$ e $E_2 \subset S$).

Prove que $P\left(\overline{E_1} \cup \overline{E_2}\right) = 1 - P(E_1) \times P(E_2 \mid E_1)$

(P designa probabilidade, $\overline{E_1}$ e $\overline{E_2}$ designam os acontecimentos contrários de E_1 e de E_2, e $P(E_2 \mid E_1)$ designa a probabilidade de E_2, se E_1).

4.2. Um baralho de cartas completo é constituído por cinquenta e duas cartas, repartidas por quatro naipes de treze cartas cada: espadas, copas, ouros e paus.

De um baralho completo extraem-se, sucessivamente e sem reposição, duas cartas.

Qual é a probabilidade de pelo menos uma das cartas extraídas não ser do naipe de espadas? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

Nota: se o desejar, utilize a igualdade referida na alínea anterior; neste caso, deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos E_1 e E_2, no contexto da situação apresentada.

4.3. Num certo jogo de cartas, utiliza-se um baralho completo e dão-se treze cartas a cada jogador.

Imagine que está a participar nesse jogo.

Qual é a probabilidade de, nas treze cartas que vai receber, haver exactamente seis cartas do naipe de espadas? Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte..... **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **137**

1. 51
1.1. 16
1.2. 17
1.3. 18

2. 33
2.1. 15
2.2. 18

3. 21
3.1. 11
3.2. 10

4. 32
4.1. 12
4.2. 10
4.3. 10

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Círculo: $\pi\ r^2 \qquad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\ r\ g$
$(r - raio\ da\ base;\ g - geratriz)$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\,r^2$
$(r - raio)$

Volumes

Prisma: *Área da base* × *Altura*

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3 \qquad (r - raio)$

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\,.\cos b + \text{sen}\,b\,.\cos a$

$\cos\,(a+b) = \cos\,a\,.\cos b - \text{sen}\,a\,.\,\text{sen}\,b$

$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a\,.\,\text{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho\,cis\,\theta)\,.\,(\rho'\,cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta + \theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\,cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\,cis\,\theta)^n\ = \rho^n\,cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\,cis\,\theta}\ = \sqrt[n]{\rho}\ cis\,\frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\,u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\,\text{sen}\,u$

$(\text{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln\,(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos — Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos
2000

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Primeira Parte **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada ..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **137**

1. 51
1.1. 16
1.2. 17
1.3. 18

2. 33
2.1. 15
2.2. 18

3. 21
3.1. 11
3.2. 10

4. 32
4.1. 12
4.2. 10
4.3. 10

TOTAL **200**

V.S.F.F.

435/C/1

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Primeira Parte

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Versão 1	C	D	B	D	A	A	D
Versão 2	B	B	A	B	C	D	B

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, nesta primeira parte, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas **Resp. certas**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

Segunda Parte

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Critérios específicos

1.1. 16

Justificar a continuidade de f em $[0, \pi]$ 2

Calcular $f(0)$ 3

Calcular $f(\pi)$ 3

Conclusão (como f é contínua em $[0, \pi]$ e como $f(0)$ e $f(\pi)$ têm sinais contrários, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe, pelo menos, um zero da função no intervalo $]0, \pi[$)..... 8

1.2. 17

$f'(x) = 2 + \operatorname{sen} x$ 4

Justificar que $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ 5

$2 + \operatorname{sen} x > 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x > -2$ 2

Justificar que $\operatorname{sen} x > -2, \forall x \in \mathbb{R}$ 3

ou

Referir que $\operatorname{sen} x \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$ 3

$\operatorname{sen} x \geq -1 \Rightarrow f'(x) \geq 1$ 2

ou

Justificar que f' não tem zeros.....2

Justificar que f' não muda de sinal 1
(por exemplo: porque f' é contínua e não tem zeros)

Concluir que $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ 2
(por exemplo: porque f' não muda de sinal e $f'(0) > 0$)

Concluir que f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ 4

Referir que uma função estritamente crescente não pode ter mais do que um zero 4

1.3. ..... **18**

Escrever uma equação da recta r 4

Utilizar a calculadora para obter um valor aproximado da ordenada de B **(ver nota 1)** 6

Determinar a área pedida **(ver notas 2 e 3)** 8

Notas:

1. Uma utilização deficiente da calculadora poderá conduzir a uma aproximação grosseira para o valor da ordenada de B. O valor correcto, com uma casa decimal, é $5{,}3$.
   Apresenta-se a seguir a forma como deve ser cotado o valor obtido pelo examinando:

   Valor pertencente a $[5{,}1\ ;\ 5{,}5]$ 6

   Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente a $[4{,}9\ ;\ 5{,}7]$ 3

   Valor fora do intervalo anterior 0

2. Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às unidades (8), ou se o resultado estiver mal arredondado, deverá ser penalizado em 2 pontos.

3. O processo mais natural para a obtenção da área pedida é considerar a base $\overline{OA}$, sendo a altura correspondente a ordenada de B, donde resulta que a área do triângulo é

$$\frac{3 \times 5{,}3}{2} \approx 8$$

   Pode, contudo, acontecer que o examinando considere a base $\overline{AB}$, sendo a altura correspondente a distância da origem à recta AB.
   Neste caso, os 8 pontos relativos à determinação da área pedida devem ser distribuídos como a seguir se indica:

   $\overline{AB} \approx 7{,}5$ 2

   Altura correspondente $\approx 2{,}1$ 2

   Área pedida ≈ 8 4

2.1. ..... **15**

Substituir, na expressão de $P(h)$, h por $2{,}35$ 10

$P(2{,}35) \approx 76$ 5

Notas:

1. Se o examinando substituir h por 2350, a sua resposta deverá ser cotada com um máximo de 4 pontos.

2. Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às unidades, ou se o resultado estiver mal arredondado, deverá ser penalizado em 1 ponto.

2.2. ..... **18**

Determinar x tal que $P(h+x) = \frac{1}{2}\,P(h)$ 12

$P(h+x) = \frac{1}{2}\,P(h)$

$\Leftrightarrow 101 \,.\, e^{-0{,}12(h+x)} = \frac{1}{2} \,.\, 101 \,.\, e^{-0{,}12\,h}$ 2

$\Leftrightarrow e^{-0{,}12\,x} = \frac{1}{2}$ 4

$\Leftrightarrow -0{,}12\,x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ 3

$\Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-0{,}12}$ 1

Conclusão: $x \approx 5{,}8$ **(ver nota)** 2

Interpretar o resultado obtido 6

O examinando deverá referir que, quando se sobe 5,8 Km (em altitude), a pressão atmosférica passa para metade.

Nota:
Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às décimas, ou se o resultado estiver mal arredondado, deverá ser penalizado em 1 ponto.

V.S.F.F.

3.1. ..... **11**

$z_2 = (z_1)^4 = \left(\rho\, cis\, \frac{\pi}{6}\right)^4$ **(ver nota)** 2

$z_2 = \rho^4\, cis\, \frac{4\pi}{6}$ **(ver nota)** 5

Amplitude do ângulo $A_1OA_2 = \frac{4\pi}{6} - \frac{\pi}{6}$ 3

Conclusão 1

Nota:

Não se exige que o examinando explicite estes dois passos. O examinando pode limitar-se a referir que, sendo um argumento de z_1 igual a $\frac{\pi}{6}$, resulta que um argumento de z_2 é igual a $\frac{4\pi}{6}$.

3.2. ..... **10**

Referir que a condição $|z| = |z_1|$ define a circunferência de centro na origem e raio $\overline{OA_1}$ 3

Perímetro da circunferência $= 4\pi \Leftrightarrow \overline{OA_1} = 2$ 2

$z_1 = 2\, cis\, \frac{\pi}{6}$ 2

$z_1 = \sqrt{3} + i$ 3

4.1. ..... **12**

O examinando deve utilizar:

- Leis de De Morgan
- Probabilidade do acontecimento contrário (ou probabilidade do acontecimento certo e probabilidade da união disjunta de acontecimentos)
- Probabilidade da intersecção de dois acontecimentos:
  $P(E_2 \cap E_1) = P(E_1) \times P(E_2 \mid E_1)$

Indica-se a seguir a forma como esta alínea deve ser cotada:

O examinando utiliza as três propriedades e prova a igualdade pretendida 12

O examinando utiliza as três propriedades, mas não prova a igualdade pretendida 9

O examinando utiliza apenas duas propriedades 5

O examinando utiliza apenas uma propriedade 2

4.2. 10

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º Processo (utilizando a igualdade da alínea anterior):

Caracterizar os acontecimentos E_1 e E_2
(E_1 - a primeira carta extraída é de espadas;
E_2 - a segunda carta extraída é de espadas) 2

$P(E_1) = \frac{1}{4}$ 2

$P(E_2 \mid E_1) = \frac{12}{51}$ 2

$P(\overline{E_1} \cup \overline{E_2}) = 1 - \frac{1}{4} \times \frac{12}{51}$ 2

$P(\overline{E_1} \cup \overline{E_2}) = \frac{16}{17}$ 2

2.º Processo:

Probabilidade pedida $= 1 - \frac{^{13}C_2}{^{52}C_2}$ $\left(\text{ou } 1 - \frac{^{13}A_2}{^{52}A_2}\right)$ 8

Probabilidade pedida $= \frac{16}{17}$ 2

3.º Processo:

Probabilidade pedida $= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{39}{51}$ 8
(A primeira carta não é de espadas, ou a primeira é, e a segunda não é)

Probabilidade pedida $= \frac{16}{17}$ 2

4.3. ..... **10**

Probabilidade pedida $= \frac{{}^{13}C_6 \times {}^{39}C_7}{{}^{52}C_{13}}$ **(ver notas 1, 2, 3, 4 e 5)** 9

Probabilidade pedida $\approx 4\%$ 1

Notas:

1. O examinando pode começar por indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis e só depois escrever a fracção.
   No entanto, se não o fizer, isto é, se escrever directamente a fracção, não deverá ser penalizado.

2. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da fracção, com a respectiva cotação a atribuir.

   $\frac{{}^{13}C_6 \times {}^{39}C_7}{{}^{52}C_{13}}$ (fracção correcta).....9

   $\frac{{}^{13}C_6}{{}^{52}C_{13}}$ 5

   Outras fracções com denominador ${}^{52}C_{13}$ 3

3. Se o examinando indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído à sua resposta menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

4. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos possíveis, deverão ser atribuídos 2 pontos à sua resposta.

5. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos favoráveis, deverão ser atribuídos 6 pontos à sua resposta.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.° Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.° 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos — Programa «antigo»

Duração da prova: 120 minutos
2000

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Primeira Parte **81**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada ..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1. 37
1.1. 11
1.2. 13
1.3. 13

2. 24
2.1. 10
2.2. 14

3. 22
3.1. 11
3.2. 11

4. 36
4.1. 12
4.2. 12
4.3. 12

TOTAL **200**

V.S.F.F.
135/C/1

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Primeira Parte

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Versão 1	C	D	B	D	B	B	C	A	D
Versão 2	B	B	A	B	D	B	D	C	C

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, nesta primeira parte, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas **Resp. certas**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3	0	0		
3	27	24	21	18	15	12	9			
4	36	33	30	27	24	21				
5	45	42	39	36	33					
6	54	51	48	45						
7	63	60	57							
8	72	69								
9	81									

Segunda Parte

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Critérios específicos

1.1. 11

Justificar a continuidade de f em $[0, \pi]$ 1

Calcular $f(0)$ 2

Calcular $f(\pi)$ 2

Conclusão (como f é contínua em $[0, \pi]$ e como $f(0)$ e $f(\pi)$ têm sinais contrários, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe, pelo menos, um zero da função no intervalo $]0, \pi[$) 6

1.2. 13

$f'(x) = 2 + \operatorname{sen} x$ 3

Justificar que $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ 4

$2 + \operatorname{sen} x > 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x > -2$ 2

Justificar que $\operatorname{sen} x > -2, \forall x \in \mathbb{R}$ 2

ou

Referir que $\operatorname{sen} x \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$ 2

$\operatorname{sen} x \geq -1 \Rightarrow f'(x) \geq 1$ 2

ou

Justificar que f' não tem zeros 2

Justificar que f' não muda de sinal 1
(por exemplo: porque f' é contínua e não tem zeros)

Concluir que $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ 1
(por exemplo: porque f' não muda de sinal e $f'(0) > 0$)

Concluir que f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ 3

Referir que uma função estritamente crescente não pode ter mais do que um zero 3

1.3. ..... **13**

Escrever a equação $2\,x - \cos x = 2\,x - \frac{1}{2}$ 5

$2\,x - \cos x = 2\,x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ 1

$x = \frac{11\pi}{3}$ **(ver nota)** 7

Nota:

Se o examinando começar por escrever a expressão geral das soluções, em $\mathbb{R}$, da equação $\cos x = \frac{1}{2}$, os 7 pontos previstos para este passo devem ser distribuídos da seguinte forma:

Expressão geral das soluções 3

Abcissa pedida 4

2.1. ..... **10**

Substituir, na expressão de $P(h)$, h por $2{,}35$ 7

$P(2{,}35) \approx 76$ 3

Notas:

1. Se o examinando substituir h por 2350, a sua resposta deverá ser cotada com um máximo de 4 pontos.

2. Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às unidades, ou se o resultado estiver mal arredondado, deverá ser penalizado em 1 ponto.

2.2. ..... **14**

Determinar x tal que $P(h+x) = \frac{1}{2}\,P(h)$ 9

$P(h+x) = \frac{1}{2}\,P(h)$

$\Leftrightarrow 101\,.\,e^{-0{,}12(h+x)} = \frac{1}{2}\,.\,101\,.\,e^{-0{,}12\,h}$ 1

$\Leftrightarrow e^{-0{,}12\,x} = \frac{1}{2}$ 3

$\Leftrightarrow\ -0{,}12\,x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ 2

$\Leftrightarrow\ x = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-0{,}12}$ 1

Conclusão: $x \approx 5{,}8$ **(ver nota)** 2

Interpretar o resultado obtido 5

O examinando deverá referir que, quando se sobe 5,8 Km (em altitude), a pressão atmosférica passa para metade.

Nota:
Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às décimas, ou se o resultado estiver mal arredondado, deverá ser penalizado em 1 ponto.

3.1. ..... **11**

Probabilidade pedida $= \frac{{}^{13}C_6 \times {}^{39}C_7}{{}^{52}C_{13}}$ **(ver notas 1, 2, 3, 4 e 5)** 9

Probabilidade pedida $\approx 4\,\%$ 2

Notas:

1. O examinando pode começar por indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis e só depois escrever a fracção.
   No entanto, se não o fizer, isto é, se escrever directamente a fracção, não deverá ser penalizado.

2. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da fracção, com a respectiva cotação a atribuir.

$\frac{^{13}C_6 \times {}^{39}C_7}{^{52}C_{13}}$ (fracção correcta)..... 9

$\frac{^{13}C_6}{^{52}C_{13}}$ 5

Outras fracções com denominador $^{52}C_{13}$ 3

3. Se o examinando indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído à sua resposta menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

4. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos possíveis, deverão ser atribuídos 2 pontos à sua resposta.

5. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos favoráveis, deverão ser atribuídos 6 pontos à sua resposta.

3.2. ..... **11**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Probabilidade pedida $= 1 - \frac{^{39}C_2}{^{52}C_2}$ $\left(\text{ou } 1 - \frac{^{39}A_2}{^{52}A_2}\right)$ 9

Probabilidade pedida $= \frac{15}{34}$ 2

2.º Processo:

Probabilidade pedida $=$

$= \frac{^{13}C_2 + 13 \times 39}{^{52}C_2}$ $\left(\text{ou } \frac{^{13}A_2 + 2 \times 13 \times 39}{^{52}A_2}\right)$ 9

Probabilidade pedida $= \frac{15}{34}$ 2

4.1. ..... **12**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Referir que o vector $(6, -8, 0)$ é perpendicular ao plano 2

Referir que o plano contém a origem do referencial 2

Escrever uma equação do plano, tendo em conta que o vector $(6, -8, 0)$ é perpendicular ao plano e que a origem do referencial pertence ao plano 6

Referir que a equação obtida é equivalente à equação dada 2

2.º Processo:

Referir que o vector $(3, -4, 0)$ é colinear ao vector $(6, -8, 0)$ 5

Referir que $(0, 0, 0)$ satisfaz a equação $3x - 4y = 0$ 5

Conclusão (a origem do referencial é um ponto do plano definido pela equação $3x - 4y = 0$, o vector $(6, -8, 0)$ é perpendicular a esse plano, e o plano que contém a base da pirâmide é o único que satisfaz estas duas condições) 2

4.2. ..... **12**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Mostrar que o ponto $(4, 3, 5)$ pertence ao plano que contém a base da pirâmide 4

Mostrar que o ponto $(4, 3, 5)$ pertence à recta que contém a altura da pirâmide 8

2.º Processo:

Traduzir o problema por meio de um sistema 4

Resolver o sistema 8

4.3. ..... **12**

Determinar a altura da pirâmide: distância do ponto $(4, 3, 5)$ ao ponto $(-2, 11, 5)$ 5

Determinar a área da base da pirâmide 5

Determinar o volume da pirâmide 2

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **Militares**
2000

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. O conjunto dos zeros de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, é $\{1, 2\}$.
Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = g(x) \,.\, (x-3)^2$
Quais são os zeros da função h?

(A) $1, 2$ e 3 **(B)** $1, 4$ e 9

(C) $1, \sqrt{3}$ e 4 **(D)** $-\sqrt{3}$, 1, $\sqrt{3}$ e 2

2. Considere uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{x+a}$, onde a designa um certo número real.
O gráfico de f intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada 2.
Indique o valor de a.

(A) $\ln 2$ **(B)** 2 **(C)** e^2 **(D)** $e + \ln 2$

3. De uma certa função g sabe-se que:

$$\lim_{x \to 3^-} g(x) = +\infty \qquad g(3) = 1 \qquad \lim_{x \to 3^+} g(x) = 2$$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

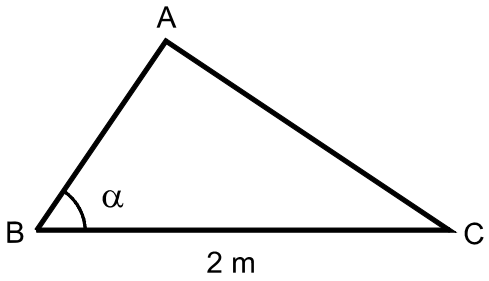
(A) O contradomínio da função g é o intervalo $[2, +\infty[$

(B) A recta de equação $x = 3$ é assimptota do gráfico da função g

(C) 3 não pertence ao domínio da função g

(D) Existe $\lim_{x \to 3} g(x)$

4. Na figura está representado um triângulo rectângulo $[ABC]$, cuja hipotenusa mede $2\ m$.



Qual das expressões seguintes dá a área (em m^2) do triângulo $[ABC]$, em função da amplitude, α, do ângulo ABC?

(A) $2 \,.\, \text{sen}\,\alpha \,.\, \cos\alpha$

(B) $2 \,.\, \text{sen}\,\alpha \,.\, \text{tg}\,\alpha$

(C) $4 \,.\, \text{sen}\,\alpha \,.\, \cos\alpha$

(D) $4 \,.\, \text{sen}\,\alpha \,.\, \text{tg}\,\alpha$

5. Considere, num referencial o.n. xOy, uma elipse cujo eixo maior está contido no eixo Ox.

Qual das seguintes equações pode definir esta elipse?

(A) $\frac{x^2}{4} + (y-2)^2 = 1$

(B) $\frac{(x-2)^2}{4} + y^2 = 1$

(C) $x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

(D) $(x-2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

6. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere os pontos $P(1,0,0)$, $Q(0,1,0)$ e $R(0,0,1)$.
Qual das condições seguintes define uma recta perpendicular ao plano PQR?

(A) $x = 1 \ \wedge \ y = 1 \ \wedge \ z = 1$
(B) $x = 1 \ \wedge \ y = 1$
(C) $x - 1 = y - 2 = z - 3$
(D) $x + y + z = 1$

7. Num referencial o.n. $Oxyz$, a condição

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25 \quad \wedge \quad x = y$$

define

(A) uma circunferência
(B) um ponto
(C) um segmento de recta
(D) o conjunto vazio

8. Um frigorífico tem cinco prateleiras.
Pretende-se guardar, nesse frigorífico, um iogurte, um chocolate e um queijo.
De quantas maneiras diferentes se podem guardar os três produtos no frigorífico, sabendo que devem ficar em prateleiras distintas?

(A) ${}^5C_3$ **(B)** ${}^5A_3$ **(C)** 5^3 **(D)** 3^5

9. No Triângulo de Pascal, existe uma linha com onze elementos.
Seja a o maior número dessa linha.
Qual é o valor de a?

(A) ${}^{10}C_5$ **(B)** ${}^{10}C_6$ **(C)** ${}^{11}C_5$ **(D)** ${}^{11}C_6$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \\ \frac{\text{sen } x}{2\,x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

1.1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes:

1.1.1. Estude a função g quanto à continuidade no ponto 0.
(Deve indicar, justificando, se a função g é contínua nesse ponto, e no caso de não ser, se se verifica a continuidade à esquerda, ou à direita, nesse mesmo ponto).

1.1.2. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por $h(x) = \frac{1}{3\,x}$
Justifique que, no intervalo $[-1\,,\,1000\,\pi]$, os gráficos de g e de h intersectam-se em 1001 pontos.

1.2. Dos 1001 pontos referidos na alínea anterior, seja A o que tem menor abcissa positiva. Utilizando a sua calculadora, determine as coordenadas desse ponto (apresente os valores na forma de dízima, com aproximação às décimas).

2. Em Malmequeres de Baixo, povoação com **cinco mil** habitantes, ocorreu um acidente, que foi testemunhado por algumas pessoas.

Admita que, t horas depois do acidente, o número (expresso em **milhares**) de habitantes de Malmequeres de Baixo que sabem do ocorrido é, aproximadamente,

$$f(t) = \frac{5}{1 + 124\, e^{-0{,}3\, t}} \ , \quad t \geq 0$$

2.1. Que percentagem da população de Malmequeres de Baixo testemunhou o acidente?

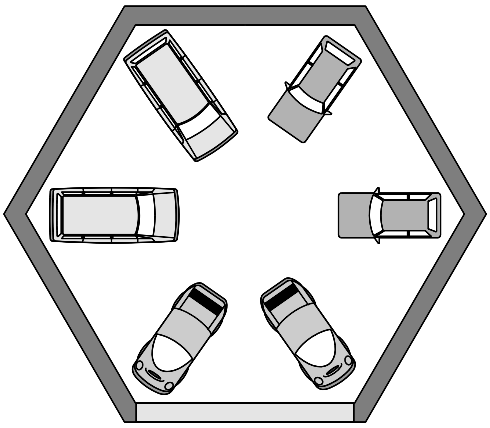
2.2. Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de assimptotas ao seu gráfico. Interprete as conclusões a que chegou, no contexto do problema.

3. O *AUTO-HEXÁGONO* é um stand de venda de automóveis.
Num certo dia, este stand tem para exibição seis automóveis diferentes, de três tipos (dois utilitários, dois desportivos e dois comerciais).

3.1. Este stand, de forma hexagonal, tem uma montra que se situa num dos lados do hexágono (ver figura).

Pretende-se arrumar os seis automóveis, de tal forma que cada automóvel fique voltado para um vértice do hexágono.

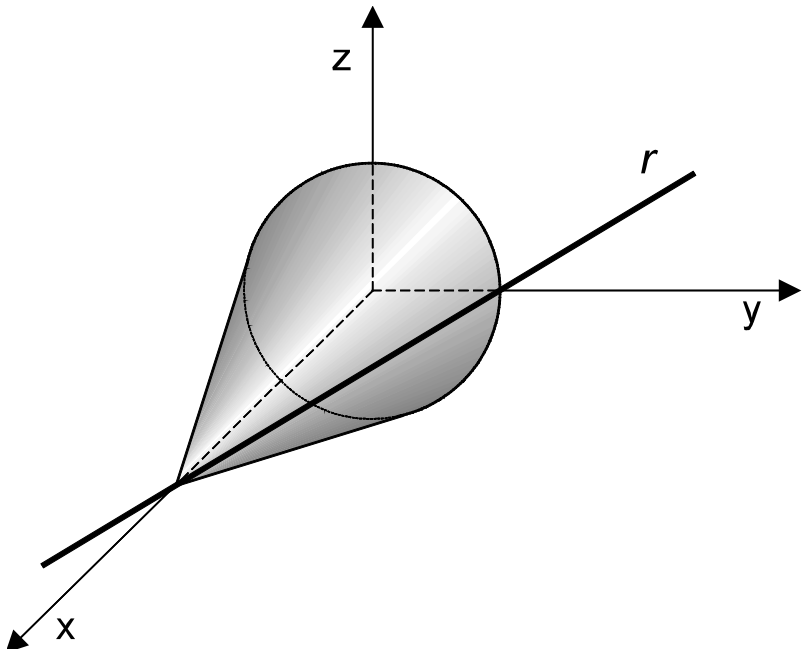
Supondo que se arrumam os seis automóveis ao acaso, qual é a probabilidade de os dois desportivos ficarem voltados para os vértices que se encontram nas extremidades da montra? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.



Montra

3.2. Nesse mesmo dia, o gerente do stand pretende oferecer dois automóveis a uma instituição.
Supondo que os dois automóveis vão ser escolhidos ao acaso, de entre os seis automóveis em exibição, qual é a probabilidade de os dois automóveis seleccionados serem de tipos diferentes? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere um cone cuja base está contida no plano yOz e cujo vértice pertence ao semieixo positivo Ox.
A base tem raio 3 e centro em O, origem do referencial.
A recta r, de equação $(x, y, z) = (0, 3, 0) + k\,(3, -1, 0),\ k \in \mathbb{R}$, contém uma geratriz do cone.



4.1. Mostre que a altura do cone é 9.

4.2. Determine uma equação do plano que contém o vértice do cone e é perpendicular à recta r.

4.3. Determine a área do polígono que resulta da intersecção do cone com o plano de equação $z = 0$.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte..... **81**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1. 36
1.1. 24
1.1.1. 11
1.1.2. 13
1.2. 12

2. 25
2.1. 11
2.2. 14

3. 22
3.1. 11
3.2. 11

4. 36
4.1. 12
4.2. 12
4.3. 12

TOTAL **200**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **Militares**
2000

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

Primeira Parte

- As sete questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. O conjunto dos zeros de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, é $\{1, 2\}$.
Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = g(x) \,.\, (x-3)^2$
Quais são os zeros da função h?

(A) $1, 2$ e 3 **(B)** $1, 4$ e 9

(C) $1, \sqrt{3}$ e 4 **(D)** $-\sqrt{3}$, 1, $\sqrt{3}$ e 2

2. Considere uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{x+a}$, onde a designa um certo número real.
O gráfico de f intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada 2.
Indique o valor de a.

(A) $\ln 2$ **(B)** 2 **(C)** e^2 **(D)** $e + \ln 2$

3. De uma certa função g sabe-se que:

$\lim_{x \to 3^-} g(x) = +\infty$ $\qquad$ $g(3) = 1$ $\qquad$ $\lim_{x \to 3^+} g(x) = 2$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

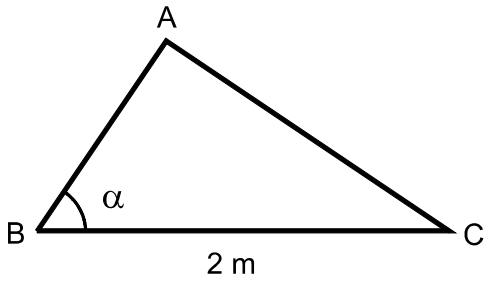
(A) O contradomínio da função g é o intervalo $[2, +\infty[$

(B) 3 não pertence ao domínio da função g

(C) A recta de equação $x = 3$ é assimptota do gráfico da função g

(D) Existe $\lim_{x \to 3} g(x)$

4. Na figura está representado um triângulo rectângulo $[ABC]$, cuja hipotenusa mede $2\ m$.



Qual das expressões seguintes dá a área (em m^2) do triângulo $[ABC]$, em função da amplitude, α, do ângulo ABC?

(A) $2 \,.\, \text{sen}\,\alpha \,.\, \cos\alpha$ $\qquad$ **(B)** $2 \,.\, \text{sen}\,\alpha \,.\, \text{tg}\,\alpha$

(C) $4 \,.\, \text{sen}\,\alpha \,.\, \cos\alpha$ $\qquad$ **(D)** $4 \,.\, \text{sen}\,\alpha \,.\, \text{tg}\,\alpha$

5. Um frigorífico tem cinco prateleiras.

Pretende-se guardar, nesse frigorífico, um iogurte, um chocolate e um queijo.

De quantas maneiras diferentes se podem guardar os três produtos no frigorífico, sabendo que devem ficar em prateleiras distintas?

(A) ${}^5C_3$ $\qquad$ **(B)** ${}^5A_3$ $\qquad$ **(C)** 5^3 $\qquad$ **(D)** 3^5

6. Seja S o conjunto de resultados (com um número finito de elementos) associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos, contidos em S, nenhum deles impossível, nem certo.

Sabe-se que $A \subset B$.

Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira (P designa probabilidade e $\overline{A}$ e $\overline{B}$ designam os acontecimentos contrários de A e de B, respectivamente).

(A) $P(A) > P(B)$

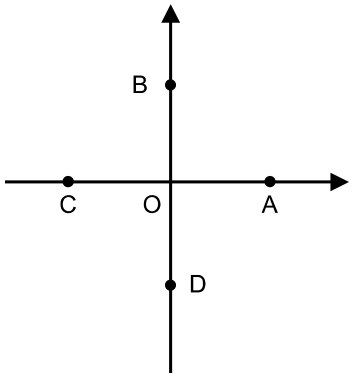
(B) $P(A \cap B) = 0$

(C) $P(A \cup B) = 1$

(D) $P(\overline{A}) \geq P(\overline{B})$

7. Seja $z = y\,i$, com $y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, um número complexo ($i$ designa a unidade imaginária).

Qual dos quatro pontos representados na figura abaixo pode ser a imagem geométrica de z^4?



(A) O ponto A

(B) O ponto B

(C) O ponto C

(D) O ponto D

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. O *AUTO-HEXÁGONO* é um stand de venda de automóveis.

1.1. Efectuou-se um estudo sobre as vendas de automóveis neste stand, o qual revelou que:

- 15% dos clientes compram automóvel com alarme e com rádio;
- 20% dos clientes compram automóvel sem alarme e sem rádio;
- 45% dos clientes compram automóvel com alarme (com ou sem rádio).

Um cliente acaba de comprar um automóvel.

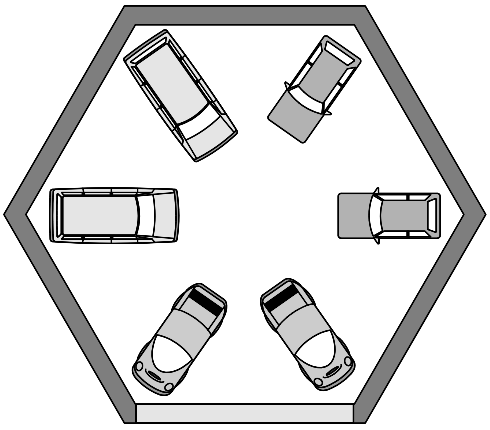
1.1.1. A Marina, empregada do stand, que nada sabia das preferências desse cliente e não tomou conhecimento do equipamento do automóvel que ele tinha comprado, apostou que esse automóvel estava equipado com rádio, mas não tinha alarme.
Qual é a probabilidade de a Marina acertar? Apresente o resultado na forma de percentagem.

1.1.2. Alguém informou depois a Marina que o referido automóvel vinha equipado com alarme. Ela apostou, então, que o automóvel também tinha rádio.
Qual é a probabilidade de a Marina ganhar esta nova aposta? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

1.2. Este stand, de forma hexagonal, tem uma montra que se situa num dos lados do hexágono (ver figura).

Pretende-se arrumar seis automóveis diferentes (dois utilitários, dois desportivos e dois comerciais), de tal forma que cada automóvel fique voltado para um vértice do hexágono.

Supondo que se arrumam os seis automóveis ao acaso, qual é a probabilidade de os dois desportivos ficarem voltados para os vértices que se encontram nas extremidades da montra? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.



Montra

2. Em Malmequeres de Baixo, povoação com **cinco mil** habitantes, ocorreu um acidente, que foi testemunhado por algumas pessoas.

Admita que, t horas depois do acidente, o número (expresso em **milhares**) de habitantes de Malmequeres de Baixo que sabem do ocorrido é, aproximadamente,

$$f(t) = \frac{5}{1 + 124\, e^{-0{,}3\, t}} \ , \quad t \geq 0$$

2.1. Que percentagem da população de Malmequeres de Baixo testemunhou o acidente?

2.2. Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de assimptotas ao seu gráfico. Interprete as conclusões a que chegou, no contexto do problema.

3. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \\ \frac{\text{sen } x}{2\, x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

3.1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes:

3.1.1. Estude a função g quanto à continuidade no ponto 0.
(Deve indicar, justificando, se a função g é contínua nesse ponto, e no caso de não ser, se se verifica a continuidade à esquerda, ou à direita, nesse mesmo ponto).

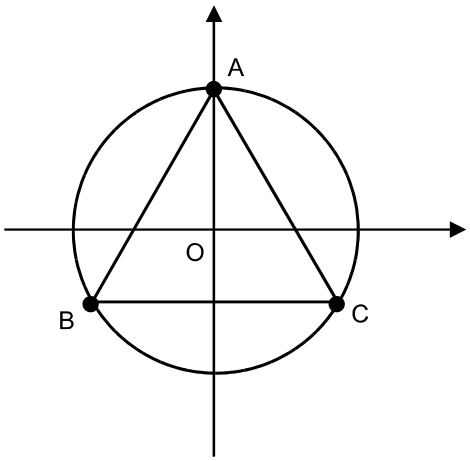
3.1.2. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por $h(x) = \frac{1}{3\, x}$

Justifique que, no intervalo $[-1\, ,\, 1000\, \pi]$, os gráficos de g e de h intersectam-se em 1001 pontos.

3.2. Dos 1001 pontos referidos na alínea anterior, seja A o que tem menor abcissa positiva. Utilizando a sua calculadora, determine as coordenadas desse ponto (apresente os valores na forma de dízima, arredondados às décimas).

4. Na figura junta está representado, no plano complexo, um triângulo equilátero $[ABC]$, inscrito numa circunferência centrada na origem do referencial.

O ponto A é a imagem geométrica de $2i$.



4.1. Escreva uma condição em $\mathbb{C}$ que defina a referida circunferência.

4.2. Determine, na forma algébrica, o número complexo w cuja imagem geométrica é o ponto B.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte..... **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **137**

1. 32
1.1. 20
1.1.1. 10
1.1.2. 10
1.2. 12

2. 35
2.1. 15
2.2. 20

3. 49
3.1. 33
3.1.1. 15
3.1.2. 18
3.2. 16

4. 21
4.1. 9
4.2. 12

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Círculo: $\pi\ r^2 \qquad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\,r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Prisma: *Área da base* × *Altura*

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3 \qquad (r - raio)$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a\,.\cos b + \operatorname{sen} b\,.\cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\,.\cos b - \operatorname{sen} a\,.\operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a\,.\operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\,\theta)\,.\,(\rho'\, cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta+\theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta-\theta')$

$(\rho\, cis\,\theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta+2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **Época Especial**
2000

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

Primeira Parte

- As sete questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. O conjunto dos zeros de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, é $\{1, 2\}$.
Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = g(x) \,.\, (x-3)^2$
Quais são os zeros da função h?

(A) $1, 2$ e 3 **(B)** $1, 4$ e 9

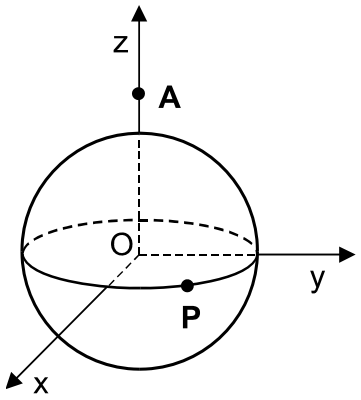
(C) $1, \sqrt{3}$ e 4 **(D)** $-\sqrt{3}$, 1, $\sqrt{3}$ e 2

2. Indique o valor de $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{sen} x}$

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

3. Na figura estão representados, em referencial o. n. $Oxyz$:

- o ponto A, de coordenadas $(0, 0, 4)$
- a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
- a circunferência que resulta da intersecção dessa superfície esférica com o plano xOy

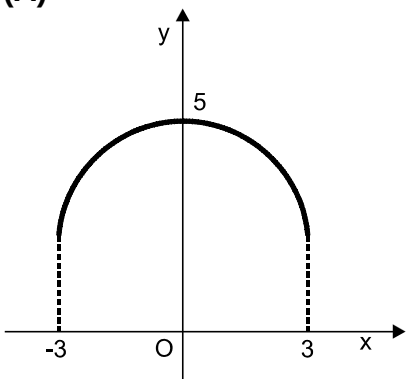


Um ponto P percorre essa circunferência, dando uma volta completa.

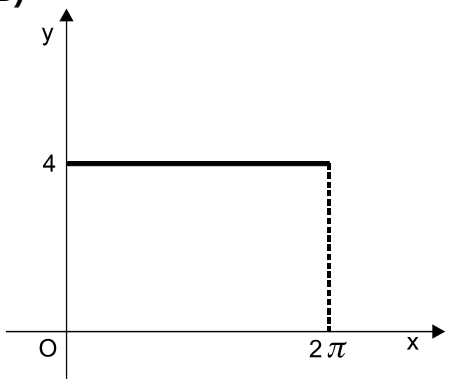
Considere a função f que faz corresponder, à **abcissa** do ponto P, a **distância** de P a A.

Qual dos seguintes é o gráfico da função f ?

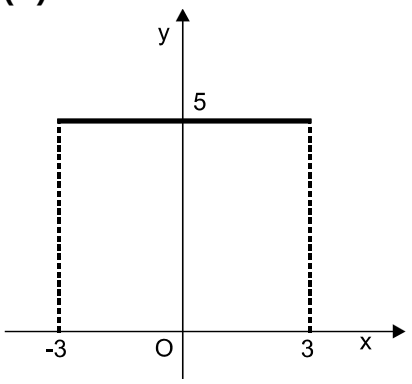
(A)



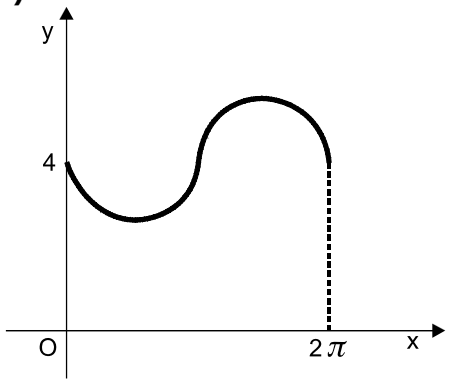
(B)



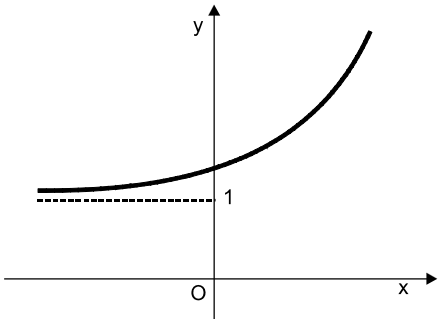
(C)



(D)

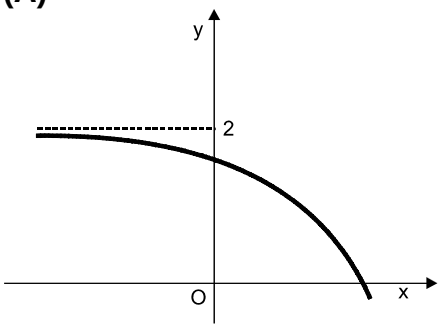


4. Na figura está parte da representação gráfica de uma certa função g, de domínio $\mathbb{R}$.

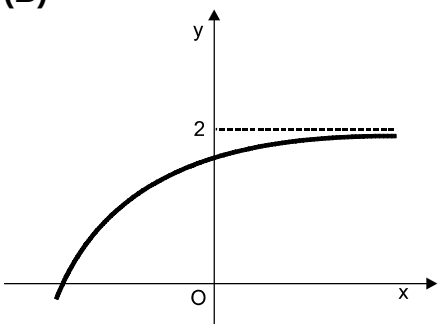


Em qual das figuras seguintes está parte da representação gráfica da função h, definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = -g(x) + 1$?

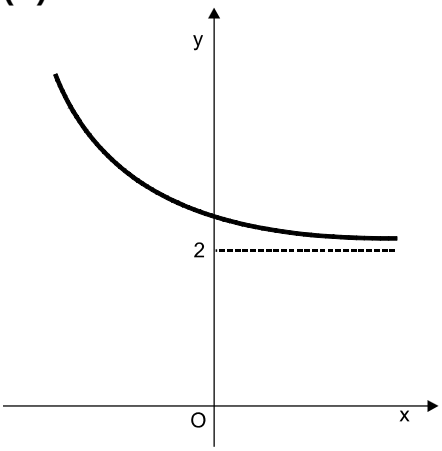
(A)



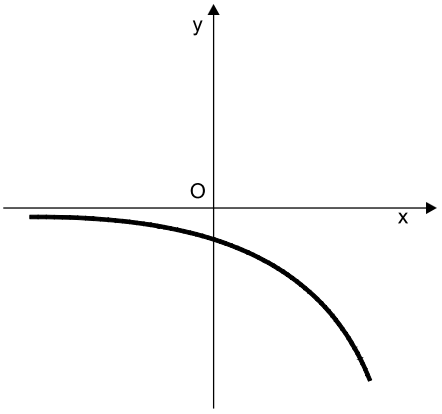
(B)



(C)



(D)



5. Admita que, numa certa escola, a variável «*altura das alunas do 12.º ano de escolaridade*» segue uma distribuição aproximadamente normal, de média 170 cm.

Escolhe-se, ao acaso, uma aluna do 12.º ano dessa escola.

Relativamente a essa rapariga, qual dos seguintes acontecimentos é o mais provável?

(A) A sua altura é superior a 180 cm

(B) A sua altura é inferior a 180 cm

(C) A sua altura é superior a 155 cm

(D) A sua altura é inferior a 155 cm

6. Seja S o conjunto de resultados (com um número finito de elementos) associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos, contidos em S, nenhum deles impossível, nem certo.

Sabe-se que $A \subset B$.

Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira (P designa probabilidade e $\overline{A}$ e $\overline{B}$ designam os acontecimentos contrários de A e de B, respectivamente).

(A) $P(A) > P(B)$

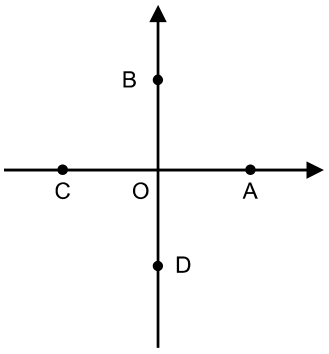
(B) $P(A \cap B) = 0$

(C) $P(A \cup B) = 1$

(D) $P(\overline{A}) \geq P(\overline{B})$

7. Seja $z = y\,i$, com $y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, um número complexo ($i$ designa a unidade imaginária).

Qual dos quatro pontos representados na figura junta (A, B, C ou D) pode ser a imagem geométrica de z^4?



(A) O ponto A

(B) O ponto B

(C) O ponto C

(D) O ponto D

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. O *AUTO-HEXÁGONO* é um stand de venda de automóveis.

1.1. Efectuou-se um estudo sobre as vendas de automóveis neste stand, o qual revelou que:

- 15% dos clientes compram automóvel com alarme e com rádio;
- 20% dos clientes compram automóvel sem alarme e sem rádio;
- 45% dos clientes compram automóvel com alarme (com ou sem rádio).

Um cliente acaba de comprar um automóvel.

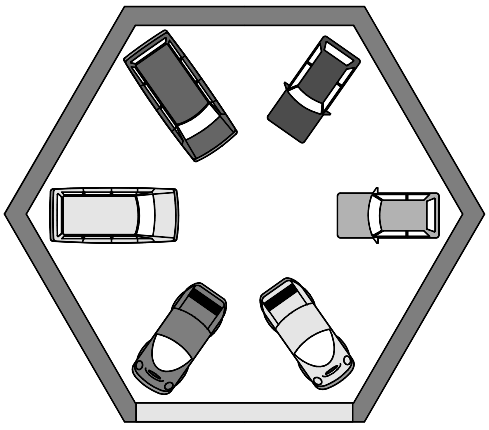
1.1.1. A Marina, empregada do stand, que nada sabia das preferências desse cliente e não tomou conhecimento do equipamento do automóvel que ele tinha comprado, apostou que esse automóvel estava equipado com rádio, mas não tinha alarme.
Qual é a probabilidade de a Marina acertar? Apresente o resultado na forma de percentagem.

1.1.2. Alguém informou depois a Marina que o referido automóvel vinha equipado com alarme. Ela apostou, então, que o automóvel também tinha rádio.
Qual é a probabilidade de a Marina ganhar esta nova aposta? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

1.2. Este stand, de forma hexagonal, tem uma montra que se situa num dos lados do hexágono (ver figura).

Pretende-se arrumar seis automóveis **diferentes** (dois utilitários, dois desportivos e dois comerciais), de tal forma que cada automóvel fique junto de um vértice do hexágono.

Supondo que se arrumam os seis automóveis ao acaso, qual é a probabilidade de os dois desportivos ficarem junto dos vértices que se encontram nas extremidades da montra? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.



Montra

2. Em Malmequeres de Baixo, povoação com **cinco mil** habitantes, ocorreu um acidente, que foi testemunhado por algumas pessoas.

Admita que, t horas depois do acidente, o número (expresso em **milhares**) de habitantes de Malmequeres de Baixo que sabem do ocorrido é, aproximadamente,

$$f(t) = \frac{5}{1 + 124\, e^{-0{,}3\, t}} \ , \quad t \geq 0$$

2.1. Sabendo que o acidente ocorreu às sete e um quarto da manhã de um certo dia, mostre que, à meia-noite desse mesmo dia, mais de metade da população de Malmequeres de Baixo já sabia do ocorrido.

2.2. Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de assimptotas ao seu gráfico. Interprete as conclusões a que chegou, no contexto do problema.

3. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \\ \frac{\text{sen } x}{2\, x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

3.1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes:

3.1.1. Estude a função g quanto à continuidade no ponto 0.
(Deve indicar, justificando, se a função g é contínua nesse ponto, e no caso de não ser, se se verifica a continuidade à esquerda, ou à direita, nesse mesmo ponto.)

3.1.2. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por $h(x) = \frac{1}{3\, x}$

Mostre que, no intervalo $[-1\, ,\, 1000\, \pi]$, os gráficos de g e de h se intersectam em 1001 pontos.

3.2. Dos 1001 pontos referidos na alínea anterior, seja A o que tem menor **abcissa positiva**. Utilizando a sua calculadora, determine as coordenadas desse ponto (apresente os valores na forma de dízima, arredondados às décimas).

4. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$z_1 = 7 + 24\,i$ (i designa a unidade imaginária)

4.1. Um certo ponto P é a imagem geométrica, no plano complexo, de uma das raízes quadradas de z_1. Sabendo que o ponto P tem abcissa 4, determine a sua ordenada.

4.2. Seja $z_2 = cis\,\alpha$ com $\alpha \in \left]\frac{3\,\pi}{4}\,,\,\pi\right[$

Indique, justificando, em que quadrante se situa a imagem geométrica de $z_1 \times z_2$

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte..... **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **137**

1. 32
1.1. 20
1.1.1. 10
1.1.2. 10
1.2. 12

2. 35
2.1. 15
2.2. 20

3. 49
3.1. 33
3.1.1. 15
3.1.2. 18
3.2. 16

4. 21
4.1. 10
4.2. 11

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Círculo: $\pi\ r^2 \qquad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\,r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Prisma: *Área da base* × *Altura*

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3 \qquad (r - raio)$

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\,.\cos b + \text{sen}\,b\,.\cos a$

$\cos\,(a+b) = \cos\,a\,.\cos b - \text{sen}\,a\,.\text{sen}\,b$

$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a\,.\,\text{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho\,cis\,\theta)\,.\,(\rho'\,cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta+\theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\,cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta-\theta')$

$(\rho\,cis\,\theta)^n\ = \rho^n\,cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\,cis\,\theta}\ = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta+2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'\,.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\,u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -u'.\text{sen}\,u$

$(\text{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.e^u$

$(a^u)' = u'.a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **Militares**
2000

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Uma função f tem domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}^+$.

Qual das seguintes pode ser a expressão analítica da função f ?

(A) $\operatorname{sen} x$ **(B)** e^x

(C) $1 + x^2$ **(D)** $\ln x$

2. Considere uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{x+a}$, onde a designa um certo número real.

O gráfico de f intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada 2.

Indique o valor de a.

(A) $\ln 2$ **(B)** 2 **(C)** e^2 **(D)** $e + \ln 2$

3. De uma certa função g sabe-se que:

$$\lim_{x \to 3^-} g(x) = +\infty \qquad g(3) = 1 \qquad \lim_{x \to 3^+} g(x) = 2$$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

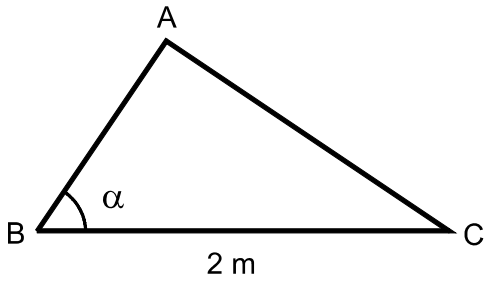
(A) O contradomínio da função g é o intervalo $[2, +\infty[$

(B) A recta de equação $x = 3$ é assimptota do gráfico da função g

(C) 3 não pertence ao domínio da função g

(D) Existe $\lim_{x \to 3} g(x)$

4. Na figura está representado um triângulo rectângulo $[ABC]$, cuja hipotenusa mede $2\ m$.



Qual das expressões seguintes dá a área (em m^2) do triângulo $[ABC]$, em função da amplitude, α, do ângulo ABC?

(A) $2 \,.\, \text{sen}\,\alpha \,.\, \cos\alpha$

(B) $2 \,.\, \text{sen}\,\alpha \,.\, \text{tg}\,\alpha$

(C) $4 \,.\, \text{sen}\,\alpha \,.\, \cos\alpha$

(D) $4 \,.\, \text{sen}\,\alpha \,.\, \text{tg}\,\alpha$

5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, uma recta r, perpendicular ao plano yOz.
Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?

(A) A recta r é perpendicular ao plano xOy

(B) A recta r está contida no plano xOy

(C) A recta r é perpendicular ao eixo Ox

(D) A recta r é paralela ao eixo Ox

6. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica S, de equação $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=2$

Qual das equações seguintes define um plano cuja intersecção com a superfície esférica não é vazia?

(A) $x=-1$ **(B)** $x=0$ **(C)** $x=3$ **(D)** $x=4$

7. Considere, num referencial o.n. xOy, a elipse E, de equação $\frac{(x-1)^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$

Qual das equações seguintes define uma elipse geometricamente igual à elipse E ?

(A) $\frac{(x-1)^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$ **(B)** $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

(C) $\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{(y-1)^2}{3}=1$ **(D)** $\frac{x^2}{6}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$

8. Quando se altera a ordem dos algarismos do número 35142, obtém-se outro número.

Considere todos os números que se podem obter por alteração da ordem dos algarismos de 35142 .

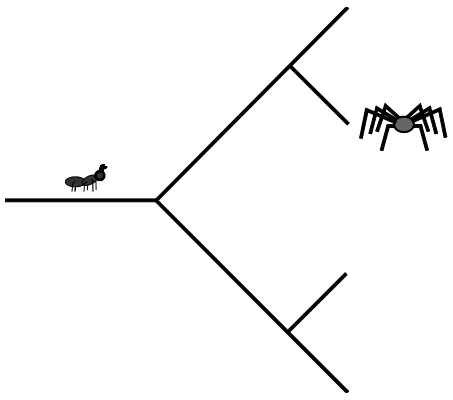
Quantos desses números são múltiplos de 5 ?

(A) 12 **(B)** 24 **(C)** 60 **(D)** 120

9. Uma formiga desloca-se ao longo de um caminho que, como a figura mostra, vai apresentando bifurcações.

A formiga nunca inverte a sua marcha. Ao chegar a uma bifurcação, opta 70% das vezes pelo caminho da esquerda.

Qual é a probabilidade de a formiga ser apanhada pela aranha?



(A) $0,14$ **(B)** $0,21$ **(C)** $0,42$ **(D)** $0,49$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Um recipiente contém uma certa quantidade de açúcar.
Para dissolver o açúcar, enche-se o recipiente com água.
Admita que a massa, em gramas, de açúcar ainda não dissolvido, t **minutos** após o início do processo de dissolução, é dada por

$$M(t) = 50\, e^{-0{,}02\, t} \ , \quad t \geq 0$$

1.1. Determine a massa de açúcar dissolvido ao longo da primeira **hora**.
Apresente o resultado em gramas, arredondado às unidades.

1.2. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, estude a função M quanto à monotonia e quanto à existência de assimptotas ao seu gráfico. Interprete as conclusões a que chegou, no contexto do problema.

2. Considere a função f, de domínio $[0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1{,}2 + \operatorname{tg} x & \text{se } \ 0 \leq x \leq 1 \\ 2\,x - \ln x & \text{se } \ x > 1 \end{cases}$$

($\ln$ designa *logaritmo* de base e).

2.1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, estude a função f quanto à continuidade.

2.2. Recorrendo ao estudo analítico da segunda derivada, estude a função f quanto ao sentido da concavidade do seu gráfico, no intervalo $]1, +\infty[$

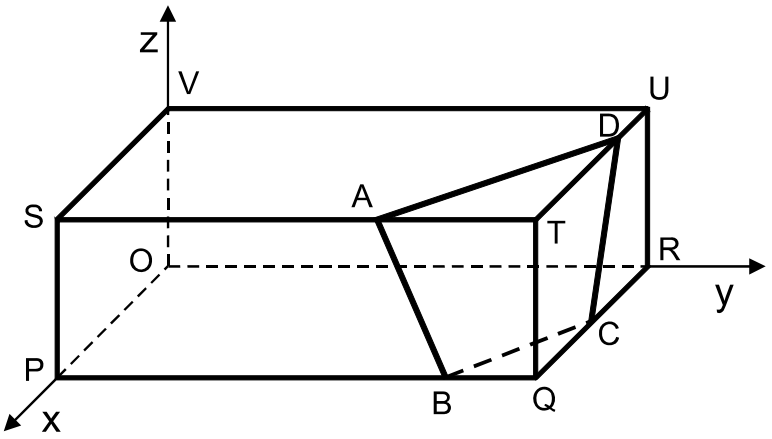
2.3. Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que a equação $f(x) = 2 + f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ tem, no intervalo $]2, 3[$, pelo menos uma solução.

3. Um saco contém seis bolas, três verdes e três azuis.

3.1. Extraem-se, aleatoriamente, e de uma só vez, duas bolas do saco.
Qual é a probabilidade de as duas bolas serem da mesma cor?
Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3.2. Considere agora que todas as bolas estão novamente no saco.
Extraem-se, ao acaso, uma a uma, e sem reposição, as seis bolas do saco.
À medida que as bolas vão sendo retiradas do saco, vão sendo dispostas em cima de uma mesa, em fila, da esquerda para a direita.
Qual é a probabilidade de as três bolas azuis ficarem juntas?
Apresente o resultado na forma de percentagem.

4. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere um paralelepípedo rectângulo $[OPQRSTUV]$.



Os pontos P, R e V pertencem aos semieixos positivos Ox, Oy e Oz, respectivamente.

O quadrilátero $[ABCD]$ é a secção obtida no paralelepípedo pelo plano de equação $2x + 3y + z = 22$, que é perpendicular à recta OT.

O ponto R tem ordenada 6.

4.1. Justifique que o ponto T tem coordenadas $(4, 6, 2)$

4.2. Determine uma equação do plano que é paralelo ao plano ABC e que contém o ponto Q.

4.3. Determine as coordenadas do ponto D.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte..... **81**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1. 26
1.1. 10
1.2. 16

2. 35
2.1. 7
2.2. 14
2.3. 14

3. 22
3.1. 11
3.2. 11

4. 36
4.1. 12
4.2. 12
4.3. 12

TOTAL **200**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **Militares**
2000

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

Primeira Parte

- As sete questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Uma função f tem domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}^+$.

Qual das seguintes pode ser a expressão analítica da função f ?

(A) $\operatorname{sen} x$ **(B)** e^x

(C) $1 + x^2$ **(D)** $\ln x$

2. Considere uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{x+a}$, onde a designa um certo número real.

O gráfico de f intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada 2.

Indique o valor de a.

(A) $\ln 2$ **(B)** 2 **(C)** e^2 **(D)** $e + \ln 2$

3. De uma certa função g sabe-se que:

$$\lim_{x \to 3^-} g(x) = +\infty \qquad g(3) = 1 \qquad \lim_{x \to 3^+} g(x) = 2$$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

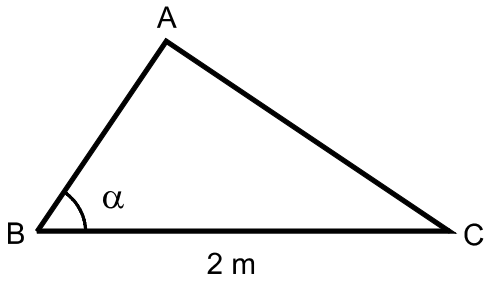
(A) O contradomínio da função g é o intervalo $[2, +\infty[$

(B) 3 não pertence ao domínio da função g

(C) A recta de equação $x = 3$ é assimptota do gráfico da função g

(D) Existe $\lim_{x \to 3} g(x)$

4. Na figura está representado um triângulo rectângulo $[ABC]$, cuja hipotenusa mede $2\ m$.



Qual das expressões seguintes dá a área (em m^2) do triângulo $[ABC]$, em função da amplitude, α, do ângulo ABC?

(A) $4 \,.\, \text{sen}\,\alpha \,.\, \text{tg}\,\alpha$ **(B)** $2 \,.\, \text{sen}\,\alpha \,.\, \text{tg}\,\alpha$

(C) $4 \,.\, \text{sen}\,\alpha \,.\, \cos\alpha$ **(D)** $2 \,.\, \text{sen}\,\alpha \,.\, \cos\alpha$

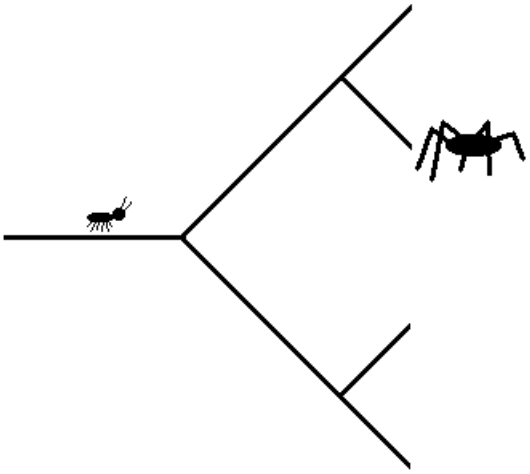
5. Quando se altera a ordem dos algarismos do número 35142, obtém-se outro número.
Considere todos os números que se podem obter por alteração da ordem dos algarismos de 35142.
Quantos desses números são múltiplos de 5?

(A) 12 **(B)** 24 **(C)** 60 **(D)** 120

6. Uma formiga desloca-se ao longo de um caminho que, como a figura mostra, vai apresentando bifurcações.

A formiga nunca inverte a sua marcha.

Ao chegar a uma bifurcação, opta 70% das vezes pelo caminho da esquerda.



Qual é a probabilidade de a formiga ser apanhada pela aranha?

(A) $0,14$ **(B)** $0,21$ **(C)** $0,42$ **(D)** $0,49$

7. Considere o número complexo $z_1 = 3\sqrt{2}\ cis\ \frac{3\pi}{4}$

A imagem geométrica de z_1 pertence à região do plano complexo definida pela condição

(A) $|z| > 3$ **(B)** $0 < arg(z) < \frac{\pi}{4}$

(C) $Re(z) = 3\sqrt{2}$ **(D)** $Im(z) = \frac{3\pi}{4}$

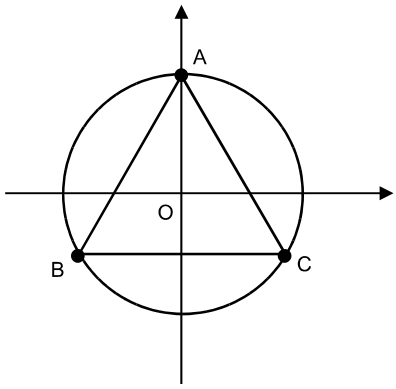
Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Na figura junta está representado, no plano complexo, um triângulo equilátero $[ABC]$, inscrito numa circunferência centrada na origem do referencial.

O ponto A é a imagem geométrica de $2\,i$.



1.1. Escreva uma condição em $\mathbb{C}$ que defina a referida circunferência.

1.2. Determine, na forma algébrica, o número complexo w cuja imagem geométrica é o ponto B.

2. Um recipiente contém uma certa quantidade de açúcar.
Para dissolver o açúcar, enche-se o recipiente com água.
Admita que a massa, em gramas, de açúcar ainda não dissolvido, t **minutos** após o início do processo de dissolução, é dada por

$$M(t) = 50\,e^{-0{,}02\,t}\ , \quad t \geq 0$$

2.1. Determine a massa de açúcar dissolvido ao longo da primeira **hora**.
Apresente o resultado em gramas, arredondado às unidades.

2.2. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, estude a função M quanto à monotonia e quanto à existência de assimptotas ao seu gráfico. Interprete as conclusões a que chegou, no contexto do problema.

3. Para cada número real k, pertencente ao intervalo $\left]\, 0\,,\, \frac{\pi}{2}\,\right[$, a expressão

$$f(x) = \begin{cases} 1,2 + \text{tg}\ x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq k \\ \\ 2\,x - \ln x & \text{se} \quad x > k \end{cases}$$

define uma função f, de domínio $[\,0,\, +\infty\,[$ (ln designa *logaritmo* de base e).

3.1. Nas duas alíneas que se seguem (3.1.1. e 3.1.2.), **considere** $\boldsymbol{k = 1}$.

3.1.1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, estude a função f quanto ao sentido da concavidade do seu gráfico, no intervalo $]\,1,\, +\infty[$

3.1.2. Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que a equação $f(x) = 2 + f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ tem, no intervalo $]\,2, 3[$, pelo menos uma solução.

3.2. Existe um número real k para o qual a função f é contínua em $[\,0,\, +\infty\,[$.
Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine um valor aproximado desse número k (arredondado às décimas).

4. Um saco contém seis bolas, numeradas de 1 a 6.
As bolas que têm números pares estão pintadas de verde.
As bolas que têm números ímpares estão pintadas de azul.
Extraem-se, aleatoriamente, e de uma só vez, duas bolas do saco.

Sejam A e B os seguintes acontecimentos:
A – As duas bolas são da mesma cor.
B – O produto dos números das duas bolas é ímpar.

4.1. Determine $P\,(A)$ (P designa probabilidade)
Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4.2. Indique, justificando, o valor da probabilidade condicionada $P\,(A \,|\, B)$

5. Seja S o conjunto de resultados (com um número finito de elementos) associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos (A e B são, portanto, subconjuntos de S).

Sabe-se que:

$$P(A) = 2\,P(B)$$
$$P(A \cup B) = 3\,P(B) \qquad (P \text{ designa probabilidade}).$$

Prove que os acontecimentos A e B são incompatíveis.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte..... **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **137**

1. 21
1.1. 9
1.2. 12

2. 34
2.1. 14
2.2. 20

3. 50
3.1. 34
3.1.1. 17
3.1.2. 17
3.2. 16

4. 20
4.1. 10
4.2. 10

5. 12

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Círculo: $\pi\ r^2 \qquad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\,r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Prisma: *Área da base* × *Altura*

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3 \qquad (r - raio)$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a\,.\cos b + \operatorname{sen} b\,.\cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\,.\cos b - \operatorname{sen} a\,.\operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a\,.\operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\,\theta)\,.\,(\rho'\, cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta+\theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta-\theta')$

$(\rho\, cis\,\theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta+2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

PONTO 435/8 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **Prova Modelo**
2000

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.

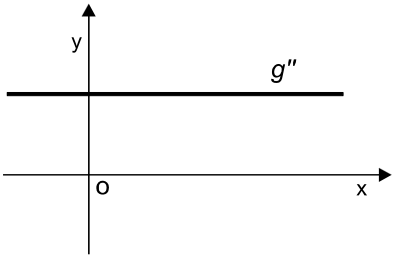
Primeira Parte

- As sete questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Sejam a, b e c três números reais tais que $\log_a(b) = c$
Qual é o valor de $\log_a(a\,b)$?

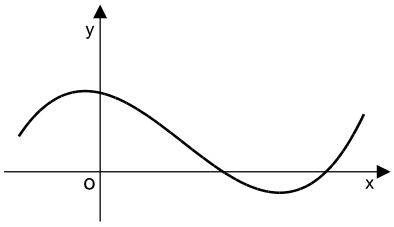
(A) $1 + c$ **(B)** $a + c$ **(C)** $a\,c$ **(D)** $a + b\,c$

2. Na figura ao lado está representado o gráfico de g'', segunda derivada de uma certa função g.

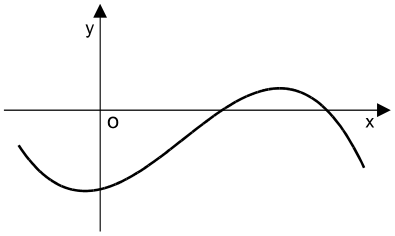


Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função g ?

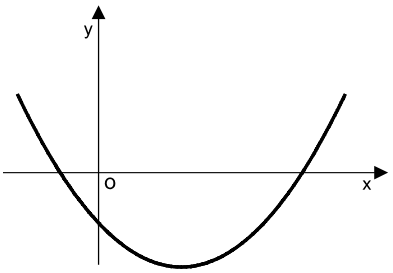
(A)



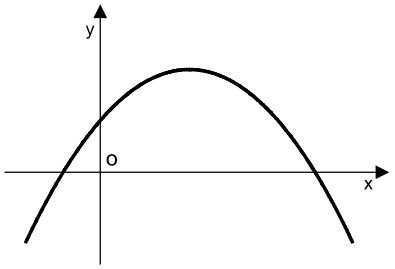
(B)



(C)



(D)



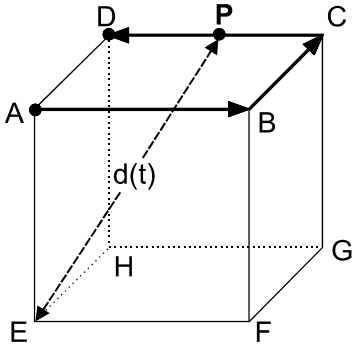
3. De uma função f, contínua em $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- f é estritamente crescente
- $f(0) = 1$
- O eixo Ox e a bissectriz dos quadrantes ímpares são assimptotas do gráfico de f

Qual é o contradomínio de f ?

(A) $[1, +\infty[$ **(B)** $]-\infty, 1]$ **(C)** $]0, +\infty[$ **(D)** $]-\infty, 0[$

4. Na figura está representado um cubo.



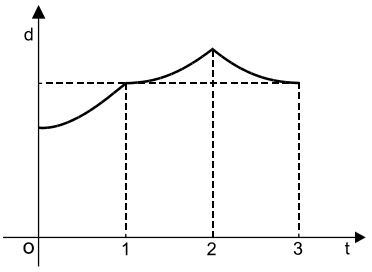
Considere que um ponto **P** se desloca ao longo do trajecto que a figura sugere: **P** parte de A e percorre sucessivamente as arestas $[AB]$, $[BC]$ e $[CD]$, terminando o percurso em D.

O ponto **P** demora um segundo a percorrer cada uma das arestas.

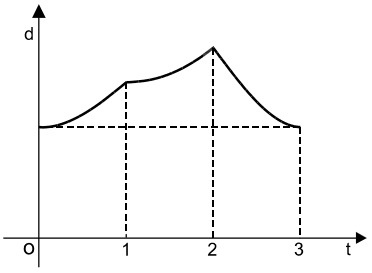
Seja $d(t)$ a distância do ponto **P** ao ponto E, t segundos após a partida.

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função d ?

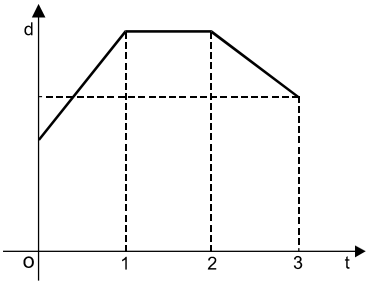
(A)



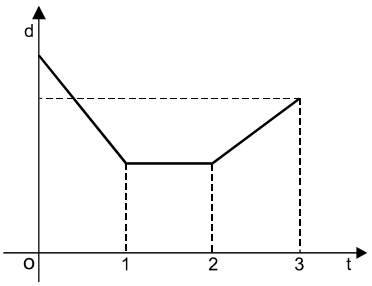
(B)



(C)



(D)



5. Cada uma de seis pessoas lança um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6. Qual é a probabilidade de os números saídos serem todos diferentes?

(A) $\frac{6!}{6^6}$ **(B)** $\frac{1}{6^6}$ **(C)** $\frac{1}{6!}$ **(D)** $\frac{1}{6}$

6. Uma caixa contém cinco bolas brancas e cinco bolas pretas, indistinguíveis ao tacto. Tiram-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da caixa.
Considere os seguintes acontecimentos:
B_1 – a bola retirada em primeiro lugar é branca;
B_2 – a bola retirada em segundo lugar é branca.

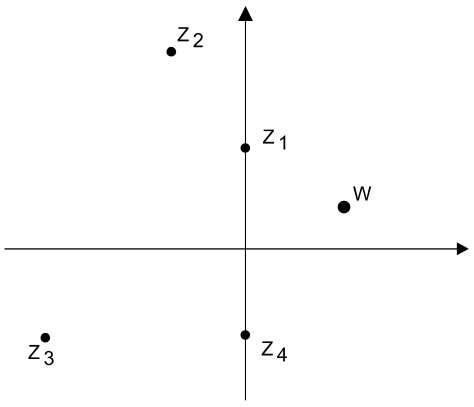
Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(B_2|B_1)$?

(A) $\frac{1}{2} \times \frac{4}{9}$ **(B)** $\frac{1}{2} \times \frac{5}{9}$ **(C)** $\frac{4}{9}$ **(D)** $\frac{5}{9}$

7. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de cinco números complexos:

w, z_1, z_2, z_3 e z_4



Qual é o número complexo que pode ser igual a $2\,i\,w$?

(A) z_1 **(B)** z_2 **(C)** z_3 **(D)** z_4

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

1.1. Considere o polinómio $x^3 - 3x^2 + 6x - 4$
Determine analiticamente as suas raízes em $\mathbb{C}$, sabendo que uma delas é 1.
Apresente-as na forma algébrica, simplificando-as o mais possível.

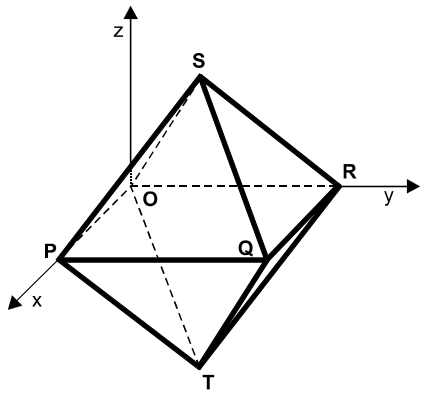
1.2. Seja z um número complexo de módulo 2 e $\overline{z}$ o seu conjugado.
No plano complexo, considere os pontos A e B tais que A é a imagem geométrica de z, e B a imagem geométrica de $\overline{z}$.
Sabe-se que:
- o ponto A está situado no primeiro quadrante
- o ângulo AOB é recto (O designa a origem do referencial)

Determine $\frac{z}{i}$, apresentando o resultado na forma algébrica.

2. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um octaedro regular.

Sabe-se que:

- um dos vértices do octaedro é a origem O do referencial
- a recta ST é paralela ao eixo Oz
- o ponto P pertence ao semieixo positivo Ox
- o ponto R pertence ao semieixo positivo Oy
- a aresta do octaedro tem comprimento 1

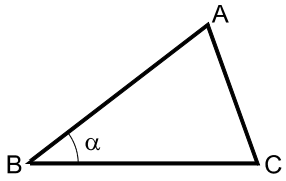


2.1. Escolhidos ao acaso dois vértices do octaedro, qual é a probabilidade de estes definirem uma recta contida no plano de equação $x = y$?
Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

2.2. Seja A um ponto pertencente à aresta $[RS]$. Considere a secção produzida no octaedro por um plano que contém A e que é paralelo ao plano xOy.
Seja $\boldsymbol{a}$ a distância de A a R.
Considere a função f que faz corresponder, a cada valor de $\boldsymbol{a}$, a área da referida secção.
Caracterize a função f, indicando domínio e expressão analítica.

3.

3.1. Seja $[ABC]$ um triângulo isósceles em que $\overline{BA} = \overline{BC}$.
Seja α a amplitude do ângulo ABC.
Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é dada por
$\frac{\overline{BC}^{\,2}}{2} \times \text{sen } \alpha \qquad (\alpha \in]0, \pi[)$



3.2. Considere agora um polígono regular de n lados, inscrito numa circunferência de raio 1. Utilize o resultado da alínea anterior para mostrar que a área do polígono é dada por

$$A_n = \frac{n}{2} \text{ sen } \left(\frac{2\,\pi}{n} \right)$$

3.3. Determine e interprete o valor de $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n$

4. Um laboratório farmacêutico lançou no mercado um novo analgésico: o *AntiDor*.
A concentração deste medicamento, em decigramas por litro de sangue, t horas após ser administrado a uma pessoa, é dada por

$$C(t) = t^2\, e^{-0,6\,t} \quad (t \geq 0)$$

4.1. Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, determine o valor de t para o qual é máxima a concentração de *AntiDor* no sangue de uma pessoa que o tenha tomado.
Calcule o valor dessa concentração máxima, apresentando o resultado na unidade considerada, com aproximação às décimas.

4.2. O mesmo laboratório realizou uma campanha de promoção deste medicamento, baseada no *slogan*: «***AntiDor - Acção rápida e prolongada!***»
Numa breve composição, de sessenta a cento e vinte palavras, comente o *slogan*, tendo em conta que:

- para a maioria das dores, o *AntiDor* só produz efeito se a sua concentração for superior a 1 decigrama por litro de sangue;
- de acordo com uma associação de defesa do consumidor, um bom analgésico deve começar a produzir efeito, no máximo, meia hora após ter sido tomado, e a sua acção deve permanecer durante, pelo menos, cinco horas (após ter começado a produzir efeito).

Nota: na resolução desta questão, deve utilizar as capacidades gráficas da sua calculadora e enriquecer a sua composição com o traçado de um ou mais gráficos.

5. Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos (A e B são, portanto, subconjuntos de S).
Prove que

$$P(A) + P(B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 + P(A \cap B)$$

(P designa probabilidade e $\overline{A}$ e $\overline{B}$ designam os acontecimentos contrários de A e de B).

FIM

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Círculo: $\pi\ r^2\ \ (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Prisma: *Área da base* × *Altura*

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3\ \ (r - raio)$

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\,.\cos b + \text{sen}\,b\,.\cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\,.\cos b - \text{sen}\,a\,.\,\text{sen}\,b$

$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a\,.\,\text{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho\, cis\,\theta)\,.\,(\rho'\, cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta+\theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ \ cis\,(\theta-\theta')$

$(\rho\, cis\,\theta)^n\ = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta}\ = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + v'.\,u$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - v'.\,u}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\,u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\,\text{sen}\,u$

$(\text{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

COTAÇÕES

Primeira Parte..... **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **137**

1. 21
1.1. 11
1.2. 10

2. 31
2.1. 16
2.2. 15

3. 41
3.1. 14
3.2. 14
3.3. 13

4. 29
4.1. 14
4.2. 15

5. 15

TOTAL **200**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos
2000

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Primeira Parte **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada ..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **137**

1. 21
   - **1.1.** 11
   - **1.2.** 10

2. 31
   - **2.1.** 16
   - **2.2.** 15

3. 41
   - **3.1.** 14
   - **3.2.** 14
   - **3.3.** 13

4. 29
   - **4.1.** 14
   - **4.2.** 15

5. 15

TOTAL **200**

V.S.F.F.
435/C/1

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Primeira Parte

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	A	C	C	A	A	C	B
Versão 2	D	B	A	A	B	C	C

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, nesta primeira parte, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas / Resp. certas	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

Segunda Parte

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Critérios específicos

1.1. 11

Dividir $x^3 - 3x^2 + 6x - 4$ por $x - 1$ 3

Aplicar a fórmula resolvente da equação do segundo grau para obter $x = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2}$ 2

Apresentar as raízes na forma algébrica, simplificando-as o mais possível 6

$\frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} =$

$= \frac{2 \pm i\sqrt{12}}{2}$ 3

$= 1 \pm i\sqrt{3}$ 3

1.2. 10

Indicar o valor de z 5

Na tabela seguinte, apresenta-se a forma como deve ser cotada a indicação do valor de z :

	Justifica (*)	Não justifica
Valor correcto (**)	5	4
Apenas o argumento está correcto (***)	3	2
Apenas o módulo está correcto (****)	1	1

(*) A justificação pode ser feita por meio de um desenho.

(**) $z = 2\,cis\,\frac{\pi}{4}$ ou $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

(***) Exemplos: $z = cis\,\frac{\pi}{4}$, $z = 1 + i$, $z = 2 + 2i$

(****) Exige-se que a imagem geométrica de z esteja no primeiro quadrante. Exemplo: $z = 2\,cis\,\frac{\pi}{6}$

Determinar $\frac{z}{i}$ na forma algébrica 5

Escrever i na forma trigonométrica 1
Efectuar a divisão na forma trigonométrica 2
Escrever $\frac{z}{i}$ na forma algébrica 2

ou

$\frac{z}{i} = -iz$ 1
$-iz = \overline{z}$ (por transformações geométricas) 2
Escrever $\overline{z}$ na forma algébrica 2

ou

Escrever z na forma algébrica **(ver nota)** 2
Efectuar a divisão na forma algébrica 2
Simplificar o resultado 1

Nota:
Se o examinando, na primeira etapa da resolução deste exercício (indicação do valor de z), escrever directamente o respectivo valor na forma algébrica, $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, devem ser atribuídos os mesmos dois pontos.

2.1. 16

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:
O espaço de resultados é a colecção de conjuntos $\{a, b\}$, onde a e b designam dois quaisquer dos seis vértices do octaedro.

Número de casos possíveis $= {}^6C_2$
Número de casos favoráveis $= {}^4C_2$
Probabilidade pedida $= \frac{{}^4C_2}{{}^6C_2} = \frac{2}{5}$

ou, atendendo a que cada conjunto de dois vértices define uma e uma só recta,

Número de casos possíveis $= 15$
(doze rectas que contêm as arestas do octaedro + três rectas que contêm as diagonais espaciais do octaedro).

Número de casos favoráveis $= 6$
(quatro rectas que contêm os lados do quadrado $[OSQT]$ + duas rectas que contêm as diagonais desse quadrado).

Probabilidade pedida $= \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

2.º Processo:

O espaço de resultados é o conjunto de pares ordenados (a, b), com $a \neq b$, onde a e b designam dois quaisquer dos seis vértices do octaedro.

Número de casos possíveis $= {}^6A_2$

Número de casos favoráveis $= {}^4A_2$

Probabilidade pedida $= \frac{{}^4A_2}{{}^6A_2} = \frac{2}{5}$

Qualquer que seja o processo utilizado pelo examinando, as cotações devem ser atribuídas de acordo com o seguinte critério:

O examinando resolve correctamente o problema **(ver nota 1)**. 16

O examinando indica correctamente o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis. Aplica correctamente a Regra de Laplace, mas não apresenta o resultado na forma de fracção irredutível, ou simplifica mal a fracção. 15

O examinando indica correctamente o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis. Não aplica a Regra de Laplace, ou aplica-a incorrectamente. 12

O examinando indica o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas, de acordo com um dos modelos, apenas um deles está correcto. Aplica correctamente a Regra de Laplace. 7

O examinando indica o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas, de acordo com um dos modelos, apenas um deles está correcto. Não aplica a Regra de Laplace, ou aplica-a incorrectamente. 6

O examinando indica, correctamente, apenas o número de casos possíveis, ou apenas o número de casos favoráveis. 6

O examinando erra a contagem, quer dos casos possíveis, quer dos casos favoráveis, mas esboça uma estratégia correcta de contagem **(ver nota 2)**. Aplica correctamente a Regra de Laplace. 5

O examinando erra a contagem, quer dos casos possíveis, quer dos casos favoráveis, mas esboça uma estratégia correcta de contagem. Não aplica a Regra de Laplace, ou aplica-a incorrectamente. 4

O examinando utiliza correctamente a Regra de Laplace, mas erra a contagem, quer dos casos possíveis, quer dos casos favoráveis, não esboçando qualquer estratégia correcta de contagem. 1

Notas:

1. Qualquer que seja o modelo adoptado, não se exige que o examinando explicite o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis.

   Por exemplo, uma resposta como $\frac{{}^4C_2}{{}^6C_2} = \frac{2}{5}$ está totalmente correcta.

2. Indicam-se a seguir algumas situações que exemplificam o que se deve entender por *esboça uma estratégia correcta de contagem*:
   - esquema ou diagrama incompleto;
   - tentativa, não totalmente conseguida, de contagem exaustiva.

2.2. ..... **15**

Domínio de $f = [0, 1]$ 3

Expressão analítica de f: $f(a) = (1 - a)^2$ 12

A expressão analítica de f pode ser obtida por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Referir que a secção em causa é semelhante ao quadrado $[OPQR]$ 3

Referir que a razão das áreas (da secção e do quadrado $[OPQR]$) é $\left(\frac{\overline{AS}}{\overline{RS}}\right)^2 = (1 - a)^2$ 8

Concluir que a área da secção é igual a $(1 - a)^2$ 1

2.º Processo:

Existe evidência de que o examinando reconhece que a secção em causa é um quadrado **(ver nota 1)**, excepto no caso em que A coincide com S **(ver nota 2)** 2

Área do quadrado $= (1 - a)^2$ 10

$\overline{AR} = a \Rightarrow \overline{AS} = 1 - a$ 2

Lado do quadrado $= \overline{AS}$ 7

Referir esta igualdade 3

Justificá-la correctamente **(ver nota 3)** 4

Área do quadrado $= (1 - a)^2$ 1

ou

Sejam:

A' - projecção de A no plano xOy

C' - projecção de C no plano xOy

$\overline{AR} = a \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{A'R} = \frac{\sqrt{2}}{2} a$ 3

$\Rightarrow \overline{A'C'} = \sqrt{2} - \sqrt{2}\, a$ 3

$\Rightarrow$ Diagonal do quadrado $=$

$= \sqrt{2} - \sqrt{2}\, a$ 1

Área do quadrado $= (1 - a)^2$ 3

Notas:

1. Ao longo dos critérios de classificação deste segundo processo, designaremos este quadrado por $[ABCD]$, sendo:
   A - vértice pertencente à aresta $[RS]$;
   B - vértice pertencente à aresta $[QS]$;
   C - vértice pertencente à aresta $[PS]$;
   D - vértice pertencente à aresta $[OS]$.

2. Não se exige que o examinando refira este caso degenerado.

3. O examinando deverá referir que:
   - as faces do octaedro são triângulos equiláteros;
   - sendo $[QRS]$ um triângulo equilátero, o triângulo $[ABS]$ é também equilátero, pois os segmentos $[QR]$ e $[AB]$ são paralelos.

3.1. ..... **14**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

$\text{sen}\ \alpha = \frac{h}{\overline{BA}}$ 8

$h = \overline{BC} \,.\, \text{sen}\ \alpha$ (pois $\overline{BA} = \overline{BC}$) 4

Área do triângulo $= \frac{\overline{BC} \,.\, \overline{BC} \,.\, \text{sen}\ \alpha}{2}$ 1

Área do triângulo $= \frac{\overline{BC}^{\,2}}{2} \,.\, \text{sen}\ \alpha$ 1

2.º Processo

Designando por h a altura do triângulo relativa ao vértice B, tem-se:

$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{h}{\overline{BC}}$ $\left(\text{ou } \frac{h}{\overline{BA}}\right)$ 4

$h = \overline{BC} \,.\, \cos \frac{\alpha}{2}$ 1

$\text{sen}\ \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{AC}/2}{\overline{BC}}$ $\left(\text{ou } \frac{\overline{AC}/2}{\overline{BA}}\right)$ 4

$\overline{AC} = 2 \,.\, \overline{BC} \,.\, \text{sen}\ \frac{\alpha}{2}$ 1

Área do triângulo $= \frac{2 \,.\, \overline{BC} \,.\, \text{sen}\ \frac{\alpha}{2} \,.\, \overline{BC} \,.\, \cos \frac{\alpha}{2}}{2}$ 1

Área do triângulo $= \frac{\overline{BC}^{\,2}}{2} \,.\, 2 \,.\, \text{sen}\ \frac{\alpha}{2} \,.\, \cos \frac{\alpha}{2}$ 1

Área do triângulo $= \frac{\overline{BC}^{\,2}}{2} \,.\, \text{sen}\ \alpha$ 2

3.2. ..... **14**

O examinando deve referir os seguintes aspectos:

- O polígono pode ser decomposto em n triângulos isósceles com um vértice comum (o centro da circunferência).
- A amplitude do ângulo ao centro correspondente a cada um dos lados do polígono é $\frac{2\pi}{n}$.
- Pela alínea anterior, a área de cada triângulo isósceles é $\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.
- A área do polígono é n vezes a área de cada triângulo isósceles.

Na tabela seguinte, indica-se como esta alínea deve ser cotada:

Forma / Conteúdo	Resposta bem estruturada	Resposta mal estruturada
O examinando refere os quatro aspectos	14	11
O examinando refere três aspectos	10	8
O examinando refere dois aspectos	6	5
O examinando refere um aspecto	2	2

3.3. ..... **13**

$\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \pi$ (determinação analítica do limite) 6

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2}{n}} = \text{.....2}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\pi \times \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}}\right) = \text{.....2}$$

$$= \pi \times 1 = \pi \text{.....2}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} A_n =$ Área do círculo (interpretação geométrica) 7

Nota:
Deve ser atribuída a cotação máxima (13 pontos) a uma resolução do tipo:
Como $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n =$ *Área do círculo, e como a área do círculo é* π, *resulta que* $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \pi$.

4.1. ..... **14**

Calcular $C'(t)$ 4

$C'(t) = (t^2)' e^{-0,6t} + t^2 (e^{-0,6t})'$ 2

$C'(t) = 2t e^{-0,6t} - 0,6t^2 e^{-0,6t}$ 2

Determinar os zeros de C' 4

$2t e^{-0,6t} - 0,6t^2 e^{-0,6t} = 0$

$\Leftrightarrow e^{-0,6t}(2t - 0,6t^2) = 0$ 1

$\Leftrightarrow 2t - 0,6t^2 = 0$ 1

$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{10}{3}$ 2

ou

$2t e^{-0,6t} - 0,6t^2 e^{-0,6t} = 0$

$\Leftrightarrow t(2e^{-0,6t} - 0,6\, t e^{-0,6t}) = 0$ 1

$\Leftrightarrow t = 0 \vee 2e^{-0,6t} - 0,6\, t e^{-0,6t} = 0$ 1

$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{10}{3}$ 2

Verificar que $\frac{10}{3}$ é o valor de t para o qual C toma o seu valor máximo **(ver nota 1)** 4

$f(\frac{10}{3}) \approx 1,5$ **(ver nota 2)** 2

Notas:

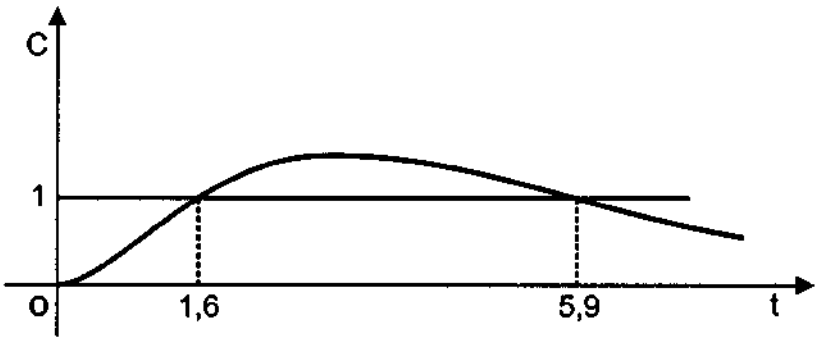
1. O examinando deverá mostrar que $\frac{10}{3}$ é o valor de t para o qual C toma o seu valor máximo através do estudo da variação do sinal de C', o qual pode ser apresentado por meio de um quadro.

2. Se o examinando não apresentar o valor com a aproximação pedida, ou apresentar o valor mal arredondado, deverá ser penalizado em 1 ponto.

4.2. 15

Apresenta-se a seguir um exemplo de resposta (composição com noventa e nove palavras, enriquecida com o traçado de um gráfico):

Na figura encontra-se um esboço de parte do gráfico da concentração do medicamento, após ter sido tomado por uma pessoa. Na mesma figura, a recta horizontal de ordenada 1 corresponde ao limiar da acção do analgésico.



$$5,9 - 1,6 = 4,3$$

Deste gráfico ressalta que o «slogan» é enganoso. A acção do medicamento não é rápida, nem prolongada. Os efeitos só se começam a sentir ao fim de mais de uma hora e meia, ultrapassando largamente a meia hora recomendada pela associação de defesa do consumidor, e duram menos de quatro horas e meia, ficando, assim, aquém das cinco horas preconizadas pela referida associação.

Na tabela seguinte, indica-se como esta alínea deve ser cotada:

Forma / Conteúdo	Redacção clara e sem erros (∗)	Redacção clara, mas com um ou dois erros (∗)	Redacção clara, mas com mais de dois erros (∗)	Redacção pouco clara
O examinando conclui que a acção do medicamento não é rápida nem prolongada. **(ver nota 1)**	15	14	12	10
O examinando conclui apenas que a acção do medicamento não é prolongada. **(ver nota 2)**	12	11	9	7
O examinando conclui apenas que a acção do medicamento não é rápida. **(ver nota 3)**	10	9	7	5

(∗) Erros de ortografia e/ou de sintaxe. O mesmo erro de ortografia, repetido ao longo da composição, conta como **um** erro.

Notas:

1. A conclusão de que a acção do medicamento não é rápida nem prolongada pressupõe que o examinando cumpra os seguintes passos:
   - Reprodução ou descrição do gráfico da função obtido com a calculadora.
   - Determinação de valores aproximados dos objectos cuja imagem é 1 (aceitam-se valores entre $1,5$ e $1,7$ e entre $5,8$ e 6).
   - Cálculo da diferença entre estes dois valores.

   Na composição, o examinando deve confrontar o valor aproximado que obteve para o menor dos objectos cuja imagem é 1 e a referida diferença com as duas recomendações da associação de defesa do consumidor.

   O grau de desenvolvimento da composição deve respeitar os limites indicados no enunciado (entre sessenta e cento e vinte palavras). Se não respeitar, deve ser aplicada uma penalização de 2 pontos.

2. A conclusão de que a acção do medicamento não é prolongada também pressupõe que o examinando cumpra os passos referidos na nota anterior.

   Na composição, o examinando deve confrontar a diferença entre os valores aproximados dos objectos cuja imagem é 1 com a recomendação da associação de defesa do consumidor de que a acção do medicamento deve permanecer durante, pelo menos, cinco horas (após ter começado a produzir efeito).

   Se, neste caso, a composição tiver menos do que quarenta palavras, deve ser aplicada uma penalização de 2 pontos.

3. A conclusão de que a acção do medicamento não é rápida pressupõe apenas os seguintes passos:
   - Reprodução ou descrição do gráfico da função obtido com a calculadora.
   - Determinação de um valor aproximado do menor dos dois objectos cuja imagem é 1 (aceitam-se valores entre $1,5$ e $1,7$).

   Na composição, o examinando deve confrontar esse valor com a recomendação da associação de defesa do consumidor de que a acção do medicamento deve começar a produzir efeito, no máximo, meia hora após ter sido tomado.

   Se, neste caso, a composição tiver menos do que quarenta palavras, deve ser aplicada uma penalização de 2 pontos.

4. Se o examinando não tiver efectuado uma composição, ou se esta não incluir as confrontações referidas acima, mas tiver cumprido, na totalidade ou em parte, os passos referidos na nota 1, a sua resposta deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

   Cumpriu todos os passos referidos na nota 1 5
   Cumpriu apenas os dois primeiros passos referidos na nota 1 3
   Cumpriu apenas o primeiro passo referido na nota 1 1

V.S.F.F.
435/C/11

5. ..... **15**

O examinando deve utilizar:

- Leis de De Morgan
- Probabilidade da união de dois acontecimentos
- Probabilidade do acontecimento contrário (ou probabilidade do acontecimento certo e probabilidade da união disjunta de acontecimentos)

Indica-se a seguir a forma como esta alínea deve ser cotada:

O examinando utiliza as três propriedades e prova a igualdade pretendida 15

O examinando utiliza as três propriedades, mas não prova a igualdade pretendida 10

O examinando utiliza apenas duas propriedades 6

O examinando utiliza apenas uma propriedade 3

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **Reserva 2**
2000

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Uma função f tem domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}^+$.

Qual das seguintes pode ser a expressão analítica da função f ?

(A) $\operatorname{sen} x$ **(B)** e^x

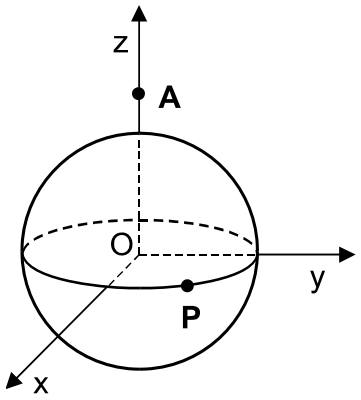
(C) $1 + x^2$ **(D)** $\ln x$

2. Indique o valor de $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{sen} x}$

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

3. Na figura estão representados, em referencial o. n. $Oxyz$:

- o ponto A, de coordenadas $(0, 0, 4)$
- a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
- a circunferência que resulta da intersecção dessa superfície esférica com o plano xOy

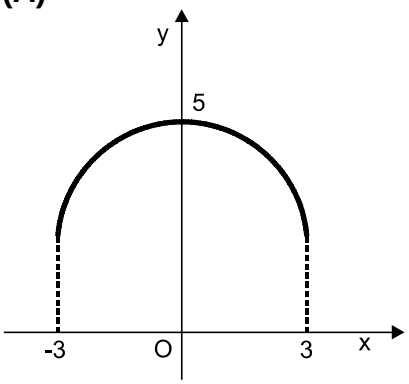


Um ponto P percorre essa circunferência, dando uma volta completa.

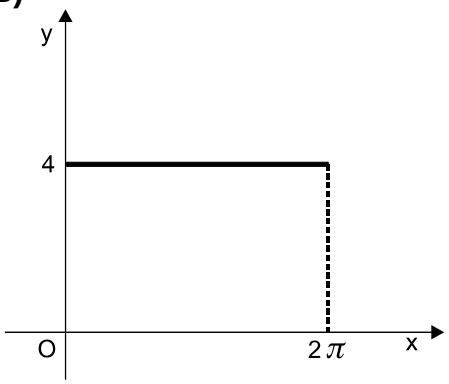
Considere a função f que faz corresponder, à **abcissa** do ponto P, a **distância** de P a A.

Qual dos seguintes é o gráfico da função f?

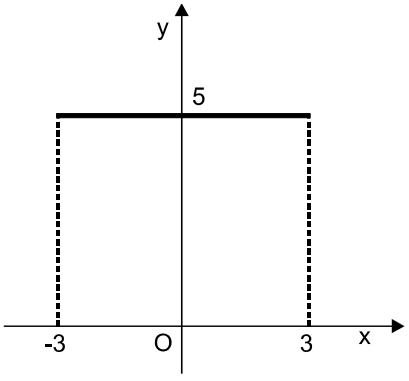
(A)



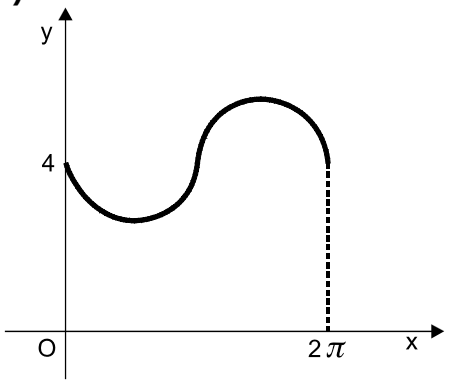
(B)



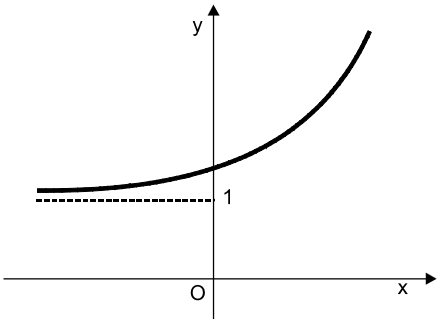
(C)



(D)

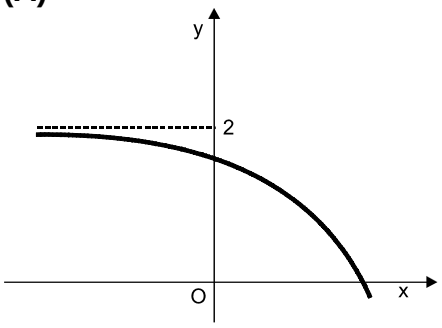


4. Na figura está parte da representação gráfica de uma certa função g, de domínio $\mathbb{R}$.

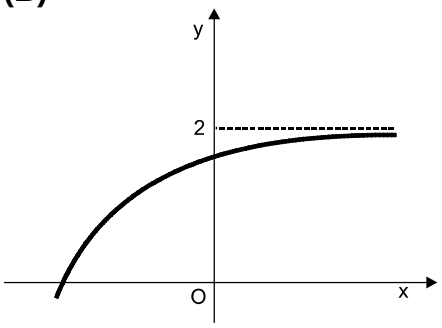


Em qual das figuras seguintes está parte da representação gráfica da função h, definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = -g(x) + 1$?

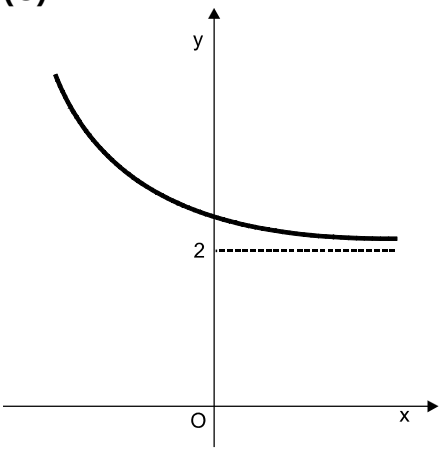
(A)



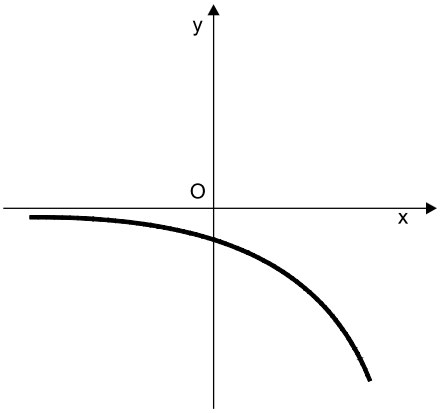
(B)



(C)



(D)



5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, uma recta r, perpendicular ao plano yOz.
Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?

(A) A recta r é perpendicular ao plano xOy
(B) A recta r está contida no plano xOy
(C) A recta r é perpendicular ao eixo Ox
(D) A recta r é paralela ao eixo Ox

6. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica S, de equação $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=2$

Qual das equações seguintes define um plano cuja intersecção com a superfície esférica não é vazia?

(A) $x=-1$ **(B)** $x=0$ **(C)** $x=3$ **(D)** $x=4$

7. Considere, num referencial o.n. xOy, a elipse E, de equação $\frac{(x-1)^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$

Qual das equações seguintes define uma elipse geometricamente igual à elipse E ?

(A) $\frac{(x-1)^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$ **(B)** $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

(C) $\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{(y-1)^2}{3}=1$ **(D)** $\frac{x^2}{6}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$

8. Quando se altera a ordem dos algarismos do número 35142, obtém-se outro número.

Considere todos os números que se podem obter por alteração da ordem dos algarismos de 35142 .

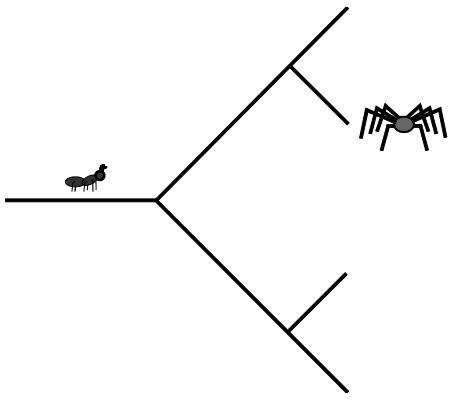
Quantos desses números são múltiplos de 5 ?

(A) 12 **(B)** 24 **(C)** 60 **(D)** 120

9. Uma formiga desloca-se ao longo de um caminho que, como a figura mostra, vai apresentando bifurcações.

A formiga nunca inverte a sua marcha. Ao chegar a uma bifurcação, opta 70% das vezes pelo caminho da esquerda.

Qual é a probabilidade de a formiga ser apanhada pela aranha?



(A) $0,14$ **(B)** $0,21$ **(C)** $0,42$ **(D)** $0,49$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Um recipiente contém uma certa quantidade de açúcar.
Para dissolver o açúcar, enche-se o recipiente com água.
Admita que a massa, em gramas, de açúcar ainda não dissolvido, t **minutos** após o início do processo de dissolução, é dada por

$$M(t) = 50\, e^{-0{,}02\, t} \ , \quad t \geq 0$$

1.1. Determine a massa de açúcar dissolvido ao longo da primeira **hora**.
Apresente o resultado em gramas, arredondado às unidades.

1.2. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, estude a função M quanto à monotonia e quanto à existência de assimptotas ao seu gráfico. Interprete as conclusões a que chegou, no contexto do problema.

2. Considere a função f, de domínio $[0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1{,}2 + \operatorname{tg} x & \text{se } \ 0 \leq x \leq 1 \\ 2\,x - \ln x & \text{se } \ x > 1 \end{cases}$$

($\ln$ designa *logaritmo* de base e).

2.1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, estude a função f quanto à continuidade.

2.2. Recorrendo ao estudo analítico da segunda derivada, estude a função f quanto ao sentido da concavidade do seu gráfico, no intervalo $]1, +\infty[$

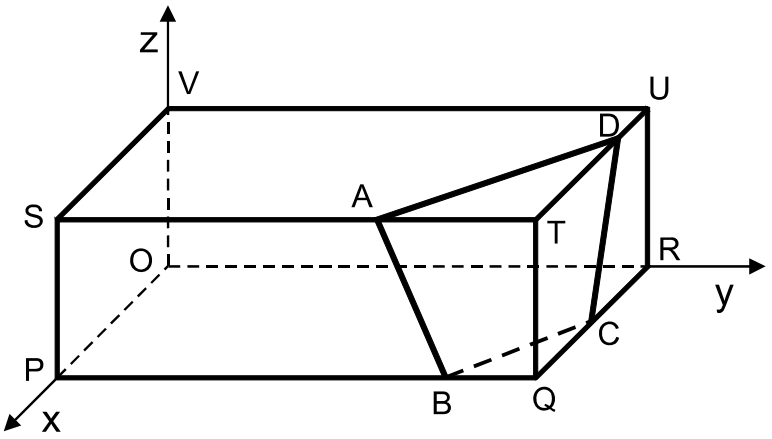
2.3. Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que a equação $f(x) = 2 + f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ tem, no intervalo $]2, 3[$, pelo menos uma solução.

3. Um saco contém seis bolas, três verdes e três azuis.

3.1. Extraem-se, aleatoriamente, e de uma só vez, duas bolas do saco.
Qual é a probabilidade de as duas bolas serem da mesma cor?
Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3.2. Considere agora que todas as bolas estão novamente no saco.
Extraem-se, ao acaso, uma a uma, e sem reposição, as seis bolas do saco.
À medida que as bolas vão sendo retiradas do saco, vão sendo dispostas em cima de uma mesa, em fila, da esquerda para a direita.
Qual é a probabilidade de as três bolas azuis ficarem juntas?
Apresente o resultado na forma de percentagem.

4. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere um paralelepípedo rectângulo $[OPQRSTUV]$.



Os pontos P, R e V pertencem aos semieixos positivos Ox, Oy e Oz, respectivamente.

O quadrilátero $[ABCD]$ é a secção obtida no paralelepípedo pelo plano de equação $2x + 3y + z = 22$, que é perpendicular à recta OT.

O ponto R tem ordenada 6.

4.1. Justifique que o ponto T tem coordenadas $(4, 6, 2)$

4.2. Determine uma equação do plano que é paralelo ao plano ABC e que contém o ponto Q.

4.3. Determine as coordenadas do ponto D.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte..... **81**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1. 26
1.1. 10
1.2. 16

2. 35
2.1. 7
2.2. 14
2.3. 14

3. 22
3.1. 11
3.2. 11

4. 36
4.1. 12
4.2. 12
4.3. 12

TOTAL **200**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **Reserva 2**
2000

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

Primeira Parte

- As sete questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Uma função f tem domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}^+$.

Qual das seguintes pode ser a expressão analítica da função f ?

(A) $\operatorname{sen} x$ **(B)** e^x

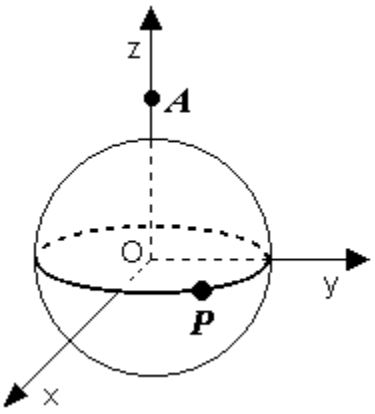
(C) $1 + x^2$ **(D)** $\ln x$

2. Indique o valor de $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{sen} x}$

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

3. Na figura estão representados, em referencial o. n. $Oxyz$:

- o ponto A, de coordenadas $(0, 0, 4)$
- a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
- a circunferência que resulta da intersecção dessa superfície esférica com o plano xOy

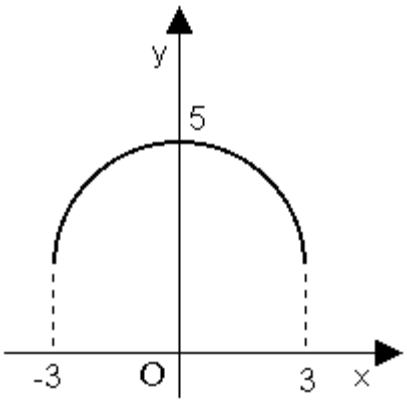


Um ponto P percorre essa circunferência, dando uma volta completa.

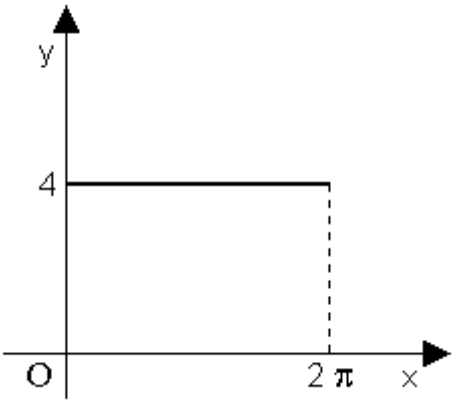
Considere a função f que faz corresponder, à **abcissa** do ponto P, a **distância** de P a A.

Qual dos seguintes é o gráfico da função f?

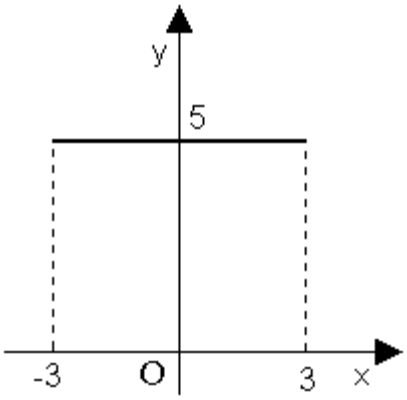
(A)



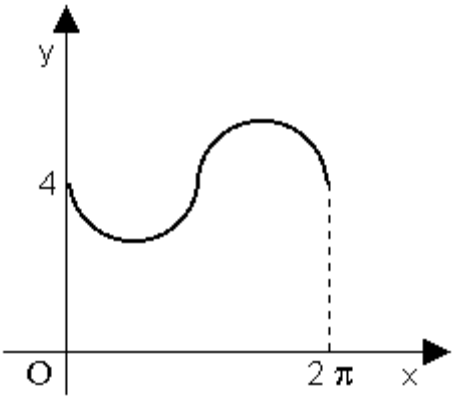
(B)



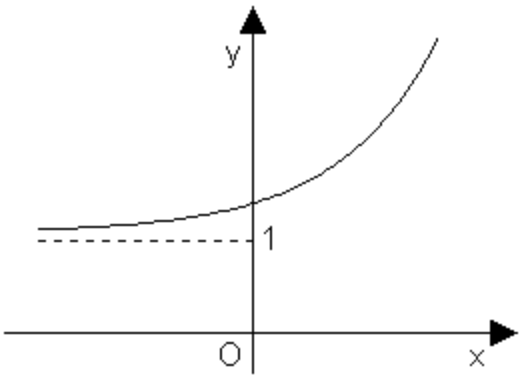
(C)



(D)

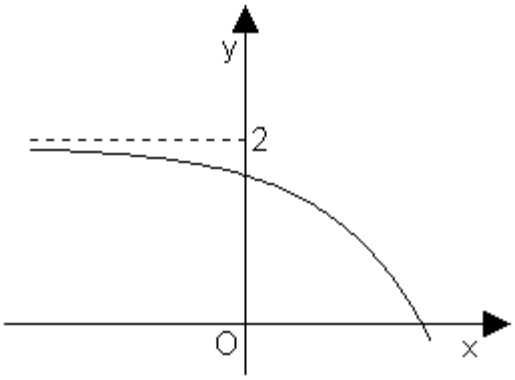


4. Na figura está parte da representação gráfica de uma certa função g, de domínio $\mathbb{R}$.

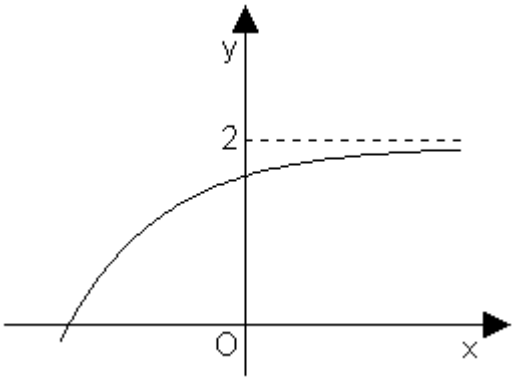


Em qual das figuras seguintes está parte da representação gráfica da função h, definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = -g(x) + 1$?

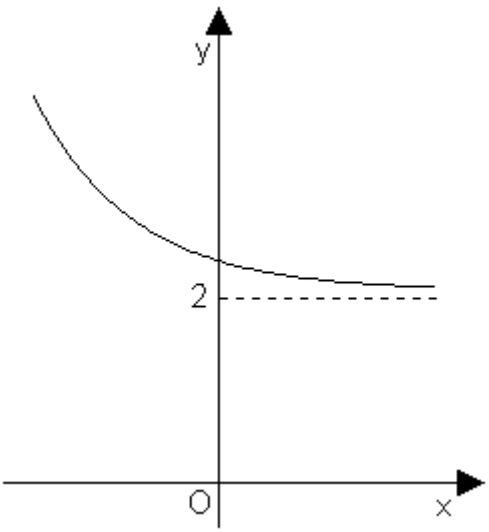
(A)



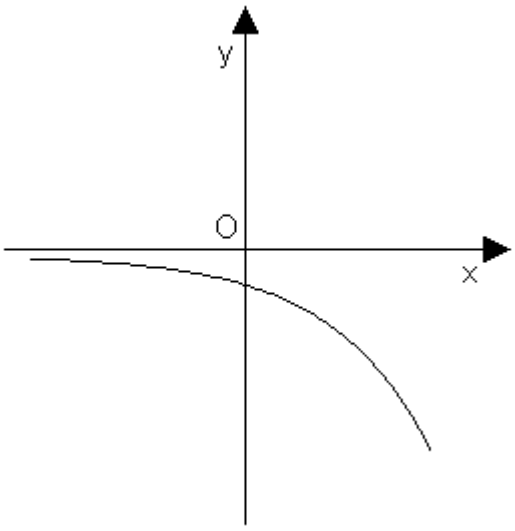
(B)



(C)



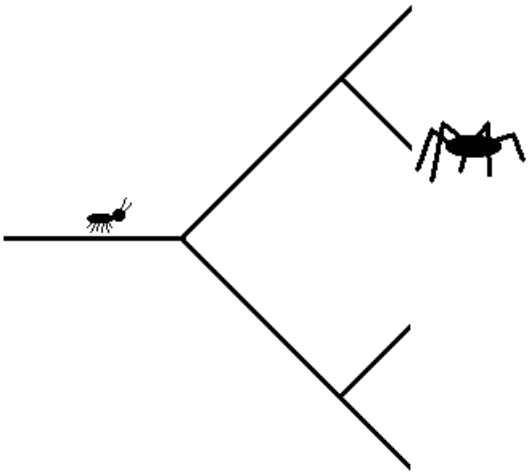
(D)



5. Quando se altera a ordem dos algarismos do número 35142, obtém-se outro número.
Considere todos os números que se podem obter por alteração da ordem dos algarismos de 35142 .
Quantos desses números são múltiplos de 5 ?

(A) 12 **(B)** 24 **(C)** 60 **(D)** 120

6. Uma formiga desloca-se ao longo de um caminho que, como a figura mostra, vai apresentando bifurcações. A formiga nunca inverte a sua marcha. Ao chegar a uma bifurcação, opta 70% das vezes pelo caminho da esquerda.



Qual é a probabilidade de a formiga ser apanhada pela aranha?

(A) $0,14$ **(B)** $0,21$ **(C)** $0,42$ **(D)** $0,49$

7. Considere o número complexo $z_1 = 3\sqrt{2}\ cis\ \frac{3\pi}{4}$
A imagem geométrica de z_1 pertence à região do plano complexo definida pela condição

(A) $|z| > 3$ **(B)** $0 < arg(z) < \frac{\pi}{4}$

(C) $Re(z) = 3\sqrt{2}$ **(D)** $Im(z) = \frac{3\pi}{4}$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = 7 + 24\,i \qquad (i \text{ designa a unidade imaginária})$$

1.1. Um certo ponto P é a imagem geométrica, no plano complexo, de uma das raízes quadradas de z_1. Sabendo que o ponto P tem abcissa 4, determine a sua ordenada.

1.2. Seja $z_2 = cis\,\alpha$ com $\alpha \in \left]\frac{3\,\pi}{4}\,,\,\pi\right[$

Indique, justificando, em que quadrante se situa a imagem geométrica de $z_1 \times z_2$

2. Um recipiente contém uma certa quantidade de açúcar.
Para dissolver o açúcar, enche-se o recipiente com água.
Admita que a massa, em gramas, de açúcar ainda não dissolvido, t **minutos** após o início do processo de dissolução, é dada por

$$M(t) = 50\,e^{-0{,}02\,t}\ , \quad t \geq 0$$

2.1. Determine a massa de açúcar dissolvido ao longo da primeira **hora**.
Apresente o resultado em gramas, arredondado às unidades.

2.2. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, estude a função M quanto à monotonia e quanto à existência de assimptotas ao seu gráfico. Interprete as conclusões a que chegou, no contexto do problema.

3. Para cada número real k, pertencente ao intervalo $\left]\, 0\,,\, \frac{\pi}{2}\,\right[$, a expressão

$$f(x) = \begin{cases} 1,2 + \text{tg}\ x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq k \\ \\ 2\,x - \ln x & \text{se} \quad x > k \end{cases}$$

define uma função f, de domínio $[\,0,\, +\infty\,[$ (ln designa *logaritmo* de base e).

3.1. Nas duas alíneas que se seguem (3.1.1. e 3.1.2.), **considere** $\boldsymbol{k = 1}$.

3.1.1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, estude a função f quanto ao sentido da concavidade do seu gráfico, no intervalo $]\,1,\, +\infty[$

3.1.2. Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que a equação $f(x) = 2 + f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ tem, no intervalo $]\,2, 3[$, pelo menos uma solução.

3.2. Existe um número real k para o qual a função f é contínua em $[\,0,\, +\infty\,[$.
Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine um valor aproximado desse número k (arredondado às décimas).

4. Um saco contém seis bolas, numeradas de 1 a 6.
As bolas que têm números pares estão pintadas de verde.
As bolas que têm números ímpares estão pintadas de azul.
Extraem-se, aleatoriamente, e de uma só vez, duas bolas do saco.

Sejam A e B os seguintes acontecimentos:
A – As duas bolas são da mesma cor.
B – O produto dos números das duas bolas é ímpar.

4.1. Determine $P\,(A)$ (P designa probabilidade)
Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4.2. Indique, justificando, o valor da probabilidade condicionada $P\,(A \,|\, B)$

5. Seja S o conjunto de resultados (com um número finito de elementos) associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos (A e B são, portanto, subconjuntos de S).

Sabe-se que:

$$P(A) = 2\,P(B)$$
$$P(A \cup B) = 3\,P(B) \qquad (P \text{ designa probabilidade}).$$

Prove que os acontecimentos A e B são incompatíveis.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte..... **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **137**

1. 21
- **1.1.** 10
- **1.2.** 11

2. 34
- **2.1.** 14
- **2.2.** 20

3. 50
- **3.1.** 34
  - **3.1.1.** 17
  - **3.1.2.** 17
- **3.2.** 16

4. 20
- **4.1.** 10
- **4.2.** 10

5. 12

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Círculo: $\pi\ r^2 \qquad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Prisma: *Área da base* × *Altura*

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3 \qquad (r - raio)$

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\,.\cos b + \text{sen}\,b\,.\cos a$

$\cos\,(a+b) = \cos\,a\,.\cos b - \text{sen}\,a\,.\text{sen}\,b$

$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a\,.\,\text{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho\, cis\,\theta)\,.\,(\rho'\, cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta + \theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\,\theta)^n\ = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta}\ = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\,u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\,\text{sen}\,u$

$(\text{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **Época Especial**
2000

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. O conjunto dos zeros de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, é $\{1, 2\}$.
Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = g(x) \,.\, (x-3)^2$
Quais são os zeros da função h?

(A) $1, 2$ e 3 **(B)** $1, 4$ e 9

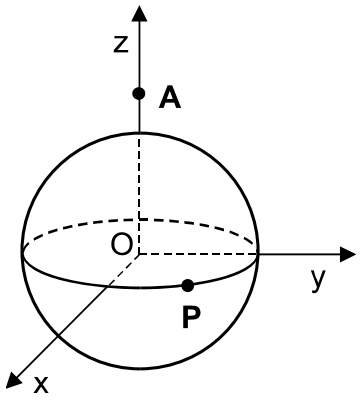
(C) $1, \sqrt{3}$ e 4 **(D)** $-\sqrt{3}$, 1, $\sqrt{3}$ e 2

2. Indique o valor de $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{sen} x}$

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

3. Na figura estão representados, em referencial o. n. $Oxyz$:

- o ponto A, de coordenadas $(0, 0, 4)$
- a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
- a circunferência que resulta da intersecção dessa superfície esférica com o plano xOy

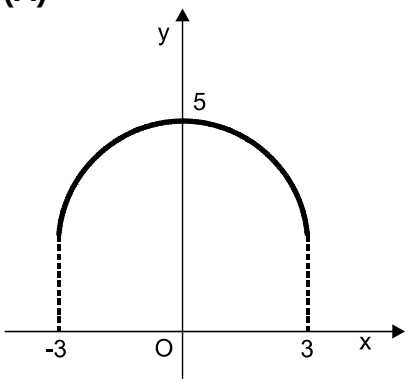


Um ponto P percorre essa circunferência, dando uma volta completa.

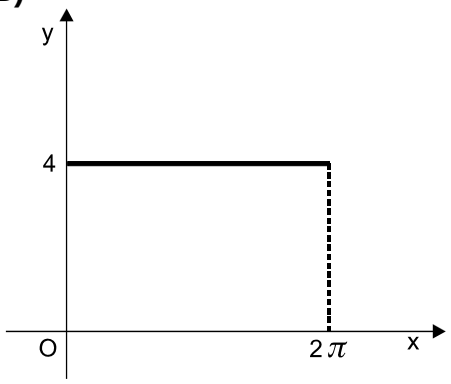
Considere a função f que faz corresponder, à **abcissa** do ponto P, a **distância** de P a A.

Qual dos seguintes é o gráfico da função f ?

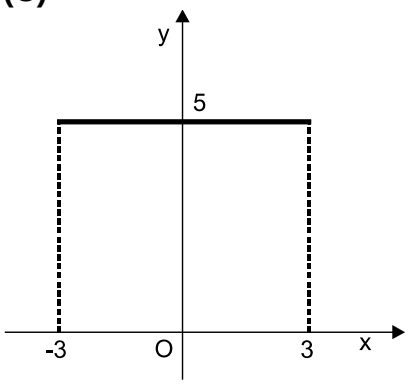
(A)



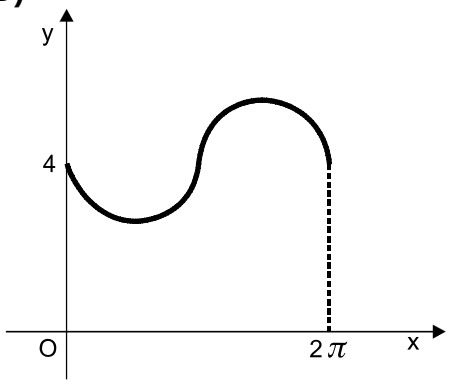
(B)



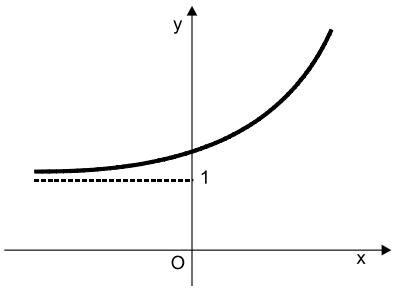
(C)



(D)

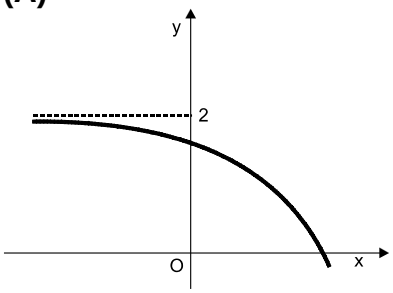


4. Na figura junta está parte da representação gráfica de uma certa função g, de domínio $\mathbb{R}$.

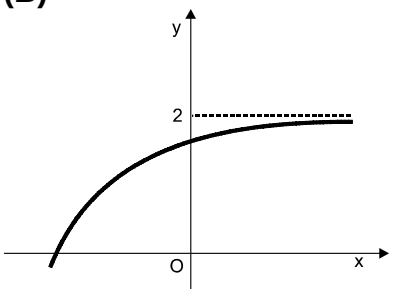


Em qual das figuras seguintes está parte da representação gráfica da função h, definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = -g(x) + 1$?

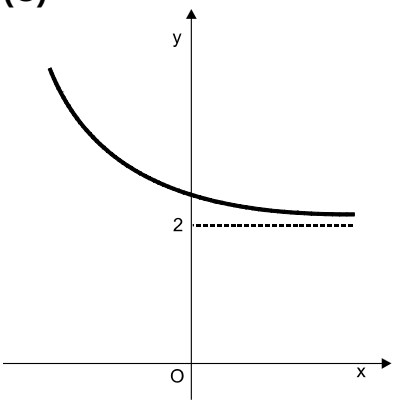
(A)



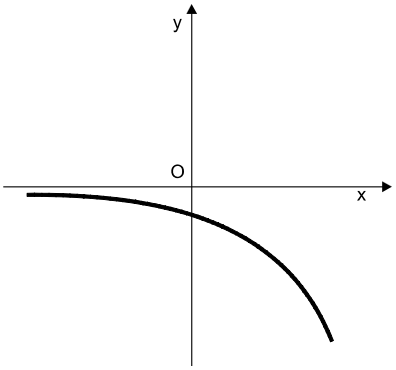
(B)



(C)



(D)



5. Considere, num referencial o.n. xOy, uma elipse cujo eixo maior está contido no eixo Ox.

Qual das seguintes equações pode definir esta elipse?

(A) $\frac{x^2}{4} + (y-2)^2 = 1$

(B) $\frac{(x-2)^2}{4} + y^2 = 1$

(C) $x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

(D) $(x-2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

6. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere os pontos $P(1,0,0)$, $Q(0,1,0)$ e $R(0,0,1)$.
Qual das condições seguintes define uma recta perpendicular ao plano PQR?

(A) $x = 1 \ \wedge \ y = 1 \ \wedge \ z = 1$
(B) $x = 1 \ \wedge \ y = 1$
(C) $x - 1 = y - 2 = z - 3$
(D) $x + y + z = 1$

7. Num referencial o.n. $Oxyz$, a condição

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25 \quad \wedge \quad x = y$$

define

(A) uma circunferência
(B) um ponto
(C) um segmento de recta
(D) o conjunto vazio

8. Um frigorífico tem cinco prateleiras.
Pretende-se guardar, nesse frigorífico, um iogurte, um chocolate e um queijo.
De quantas maneiras diferentes se podem guardar os três produtos no frigorífico, sabendo que devem ficar em prateleiras distintas?

(A) ${}^5C_3$ **(B)** ${}^5A_3$ **(C)** 5^3 **(D)** 3^5

9. No Triângulo de Pascal, existe uma linha com onze elementos.
Seja a o maior número dessa linha.
Qual é o valor de a?

(A) ${}^{10}C_5$ **(B)** ${}^{10}C_6$ **(C)** ${}^{11}C_5$ **(D)** ${}^{11}C_6$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{\text{sen } x}{2\,x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

1.1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes:

1.1.1. Estude a função g quanto à continuidade no ponto 0.
(Deve indicar, justificando, se a função g é contínua nesse ponto, e no caso de não ser, se se verifica a continuidade à esquerda, ou à direita, nesse mesmo ponto.)

1.1.2. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por $h(x) = \dfrac{1}{3\,x}$

Mostre que, no intervalo $[-1\,,\,1000\,\pi]$, os gráficos de g e de h se intersectam em 1001 pontos.

1.2. Dos 1001 pontos referidos na alínea anterior, seja A o que tem menor **abcissa positiva**. Utilizando a sua calculadora, determine as coordenadas desse ponto (apresente os valores na forma de dízima, com aproximação às décimas).

2. Em Malmequeres de Baixo, povoação com **cinco mil** habitantes, ocorreu um acidente, que foi testemunhado por algumas pessoas.

Admita que, t horas depois do acidente, o número (expresso em **milhares**) de habitantes de Malmequeres de Baixo que sabem do ocorrido é, aproximadamente,

$$f(t) = \frac{5}{1 + 124\, e^{-0{,}3\, t}} \ , \quad t \geq 0$$

2.1. Que percentagem da população de Malmequeres de Baixo testemunhou o acidente?

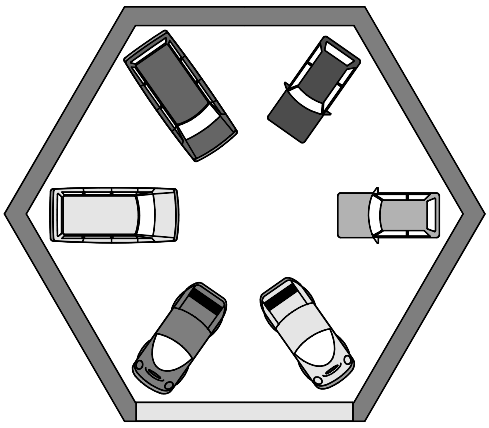
2.2. Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de assimptotas ao seu gráfico. Interprete as conclusões a que chegou, no contexto do problema.

3. O *AUTO-HEXÁGONO* é um stand de venda de automóveis.
Num certo dia, este stand tem para exibição seis automóveis diferentes, de **três tipos** (dois utilitários, dois desportivos e dois comerciais).

3.1. Este stand, de forma hexagonal, tem uma montra que se situa num dos lados do hexágono (ver figura).

Pretende-se arrumar os seis automóveis, de tal forma que cada automóvel fique junto de um vértice do hexágono.

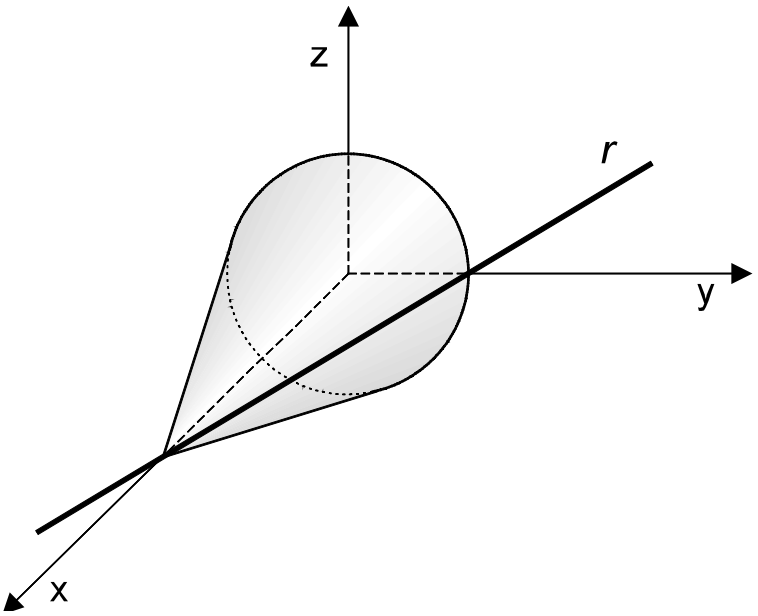
Supondo que se arrumam os seis automóveis ao acaso, qual é a probabilidade de os dois desportivos ficarem junto dos vértices que se encontram nas extremidades da montra? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.



Montra

3.2. O gerente do stand pretende oferecer dois automóveis a uma instituição.
Supondo que os dois automóveis vão ser escolhidos ao acaso, de entre os seis automóveis em exibição, qual é a probabilidade de os dois automóveis seleccionados serem de **tipos diferentes**? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere um cone cuja base está contida no plano yOz e cujo vértice pertence ao semieixo positivo Ox.
A base tem raio 3 e centro em O, origem do referencial.
A recta r, de equação $(x, y, z) = (0, 3, 0) + k\,(3, -1, 0),\ k \in \mathbb{R}$, contém uma geratriz do cone.



4.1. Mostre que a altura do cone é 9.

4.2. Determine uma equação do plano que contém o vértice do cone e é perpendicular à recta r.

4.3. Determine a área do polígono que resulta da intersecção do cone com o plano de equação $z = 0$.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte..... **81**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1. 36
- **1.1.** 24
  - **1.1.1.** 11
  - **1.1.2.** 13
- **1.2.** 12

2. 25
- **2.1.** 11
- **2.2.** 14

3. 22
- **3.1.** 11
- **3.2.** 11

4. 36
- **4.1.** 12
- **4.2.** 12
- **4.3.** 12

TOTAL **200**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **Época Especial**
2000

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

Primeira Parte

- As sete questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. O conjunto dos zeros de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, é $\{1, 2\}$.
Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = g(x) \,.\, (x-3)^2$
Quais são os zeros da função h?

(A) $1, 2$ e 3 **(B)** $1, 4$ e 9

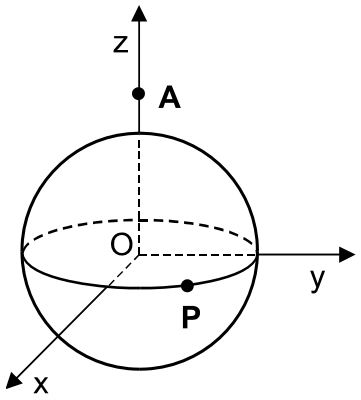
(C) $1, \sqrt{3}$ e 4 **(D)** $-\sqrt{3}$, 1, $\sqrt{3}$ e 2

2. Indique o valor de $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{sen} x}$

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

3. Na figura estão representados, em referencial o. n. $Oxyz$:

- o ponto A, de coordenadas $(0, 0, 4)$
- a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
- a circunferência que resulta da intersecção dessa superfície esférica com o plano xOy

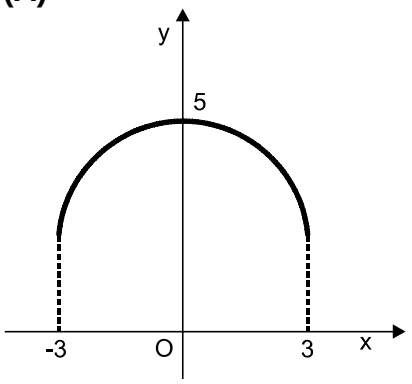


Um ponto P percorre essa circunferência, dando uma volta completa.

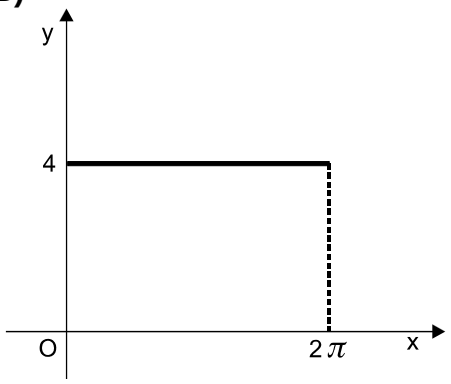
Considere a função f que faz corresponder, à **abcissa** do ponto P, a **distância** de P a A.

Qual dos seguintes é o gráfico da função f ?

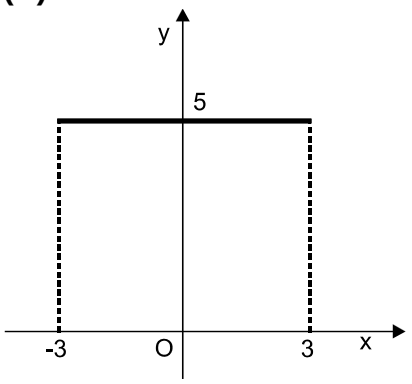
(A)



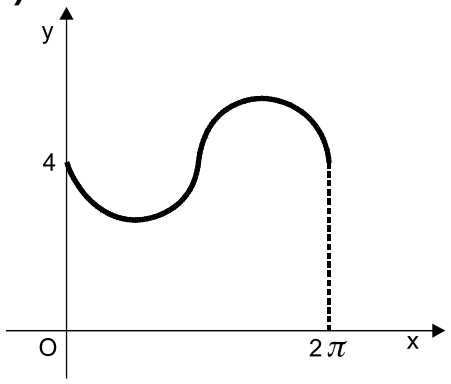
(B)



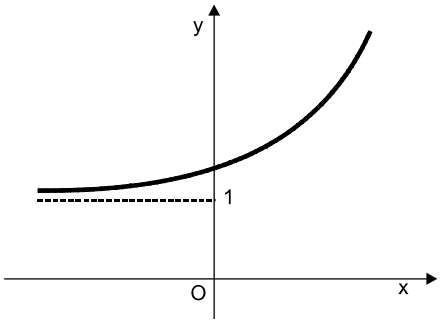
(C)



(D)

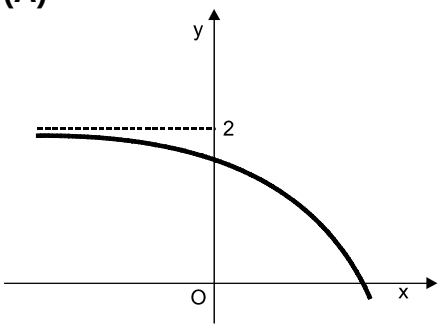


4. Na figura está parte da representação gráfica de uma certa função g, de domínio $\mathbb{R}$.

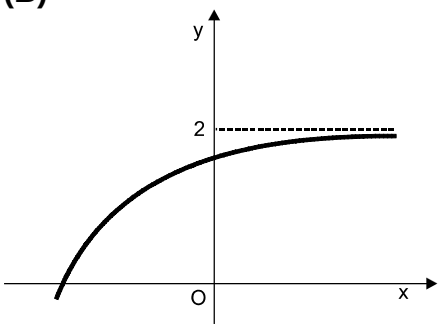


Em qual das figuras seguintes está parte da representação gráfica da função h, definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = -g(x) + 1$?

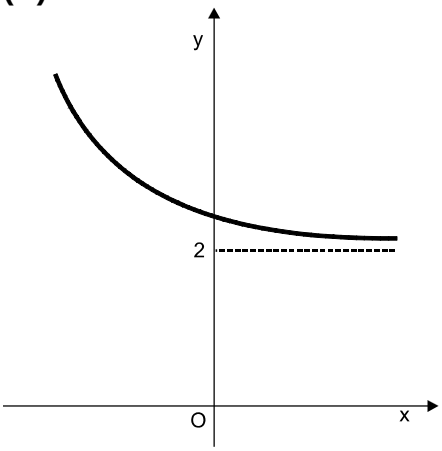
(A)



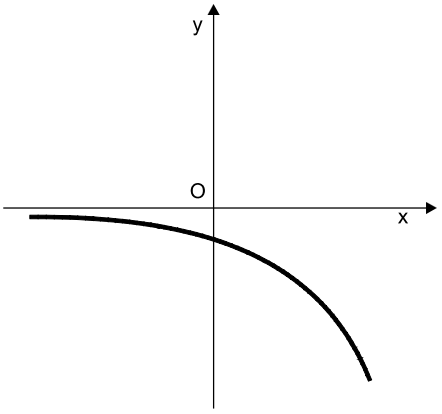
(B)



(C)



(D)



5. Admita que, numa certa escola, a variável «*altura das alunas do 12.º ano de escolaridade*» segue uma distribuição aproximadamente normal, de média 170 cm.

Escolhe-se, ao acaso, uma aluna do 12.º ano dessa escola.

Relativamente a essa rapariga, qual dos seguintes acontecimentos é o mais provável?

(A) A sua altura é superior a 180 cm

(B) A sua altura é inferior a 180 cm

(C) A sua altura é superior a 155 cm

(D) A sua altura é inferior a 155 cm

6. Seja S o conjunto de resultados (com um número finito de elementos) associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos, contidos em S, nenhum deles impossível, nem certo.

Sabe-se que $A \subset B$.

Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira (P designa probabilidade e $\overline{A}$ e $\overline{B}$ designam os acontecimentos contrários de A e de B, respectivamente).

(A) $P(A) > P(B)$

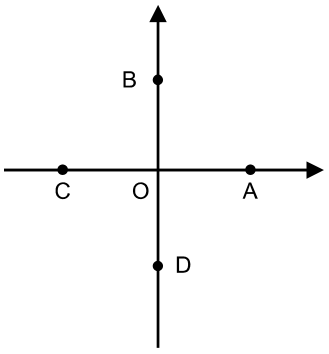
(B) $P(A \cap B) = 0$

(C) $P(A \cup B) = 1$

(D) $P(\overline{A}) \geq P(\overline{B})$

7. Seja $z = y\,i$, com $y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, um número complexo ($i$ designa a unidade imaginária).

Qual dos quatro pontos representados na figura junta (A, B, C ou D) pode ser a imagem geométrica de z^4?



(A) O ponto A

(B) O ponto B

(C) O ponto C

(D) O ponto D

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. O *AUTO-HEXÁGONO* é um stand de venda de automóveis.

1.1. Efectuou-se um estudo sobre as vendas de automóveis neste stand, o qual revelou que:

- 15% dos clientes compram automóvel com alarme e com rádio;
- 20% dos clientes compram automóvel sem alarme e sem rádio;
- 45% dos clientes compram automóvel com alarme (com ou sem rádio).

Um cliente acaba de comprar um automóvel.

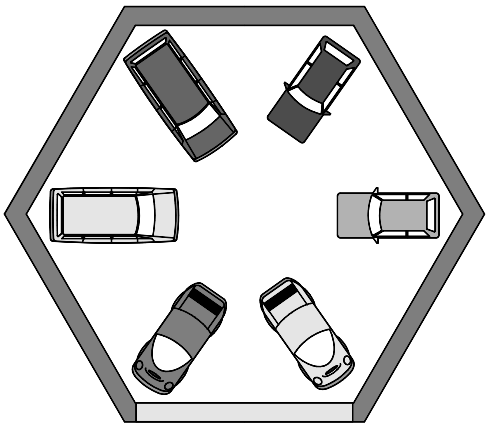
1.1.1. A Marina, empregada do stand, que nada sabia das preferências desse cliente e não tomou conhecimento do equipamento do automóvel que ele tinha comprado, apostou que esse automóvel estava equipado com rádio, mas não tinha alarme.
Qual é a probabilidade de a Marina acertar? Apresente o resultado na forma de percentagem.

1.1.2. Alguém informou depois a Marina que o referido automóvel vinha equipado com alarme. Ela apostou, então, que o automóvel também tinha rádio.
Qual é a probabilidade de a Marina ganhar esta nova aposta? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

1.2. Este stand, de forma hexagonal, tem uma montra que se situa num dos lados do hexágono (ver figura).

Pretende-se arrumar seis automóveis **diferentes** (dois utilitários, dois desportivos e dois comerciais), de tal forma que cada automóvel fique junto de um vértice do hexágono.

Supondo que se arrumam os seis automóveis ao acaso, qual é a probabilidade de os dois desportivos ficarem junto dos vértices que se encontram nas extremidades da montra? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.



Montra

2. Em Malmequeres de Baixo, povoação com **cinco mil** habitantes, ocorreu um acidente, que foi testemunhado por algumas pessoas.

Admita que, t horas depois do acidente, o número (expresso em **milhares**) de habitantes de Malmequeres de Baixo que sabem do ocorrido é, aproximadamente,

$$f(t) = \frac{5}{1 + 124\, e^{-0{,}3\, t}} \ , \quad t \geq 0$$

2.1. Sabendo que o acidente ocorreu às sete e um quarto da manhã de um certo dia, mostre que, à meia-noite desse mesmo dia, mais de metade da população de Malmequeres de Baixo já sabia do ocorrido.

2.2. Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de assimptotas ao seu gráfico. Interprete as conclusões a que chegou, no contexto do problema.

3. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \\ \frac{\text{sen } x}{2\, x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

3.1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes:

3.1.1. Estude a função g quanto à continuidade no ponto 0.
(Deve indicar, justificando, se a função g é contínua nesse ponto, e no caso de não ser, se se verifica a continuidade à esquerda, ou à direita, nesse mesmo ponto.)

3.1.2. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por $h(x) = \frac{1}{3\, x}$

Mostre que, no intervalo $[-1\, ,\, 1000\, \pi]$, os gráficos de g e de h se intersectam em 1001 pontos.

3.2. Dos 1001 pontos referidos na alínea anterior, seja A o que tem menor **abcissa positiva**. Utilizando a sua calculadora, determine as coordenadas desse ponto (apresente os valores na forma de dízima, arredondados às décimas).

4. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$z_1 = 7 + 24\,i$ (i designa a unidade imaginária)

4.1. Um certo ponto P é a imagem geométrica, no plano complexo, de uma das raízes quadradas de z_1. Sabendo que o ponto P tem abcissa 4, determine a sua ordenada.

4.2. Seja $z_2 = cis\,\alpha$ com $\alpha \in \left]\frac{3\,\pi}{4}\,,\,\pi\right[$

Indique, justificando, em que quadrante se situa a imagem geométrica de $z_1 \times z_2$

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte..... **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **137**

1. 32
1.1. 20
1.1.1. 10
1.1.2. 10
1.2. 12

2. 35
2.1. 15
2.2. 20

3. 49
3.1. 33
3.1.1. 15
3.1.2. 18
3.2. 16

4. 21
4.1. 10
4.2. 11

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Círculo: $\pi\ r^2 \qquad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\,r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Prisma: *Área da base* × *Altura*

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3 \qquad (r - raio)$

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\,.\cos b + \text{sen}\,b\,.\cos a$

$\cos\,(a+b) = \cos\,a\,.\cos b - \text{sen}\,a\,.\text{sen}\,b$

$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a\,.\,\text{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho\,cis\,\theta)\,.\,(\rho'\,cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta+\theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\,cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta-\theta')$

$(\rho\,cis\,\theta)^n\ = \rho^n\,cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\,cis\,\theta}\ = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta+2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'\,.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\,u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -u'.\text{sen}\,u$

$(\text{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.e^u$

$(a^u)' = u'.a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

PROVA 135/7 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **ÉPOCA ESPECIAL**
2000 **(SETEMBRO)**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.

Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Qual das seguintes pode ser a expressão analítica de uma função de domínio $\mathbb{R}$?

(A) $\operatorname{tg} x$ **(B)** $\ln x$ **(C)** $\frac{x-1}{e^x}$ **(D)** $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

2. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$, estritamente decrescente.

Os eixos coordenados são assimptotas do gráfico de f.

Seja (x_n) a sucessão de termo geral $x_n = \frac{1}{n}$

Indique o valor de $\lim f(x_n)$

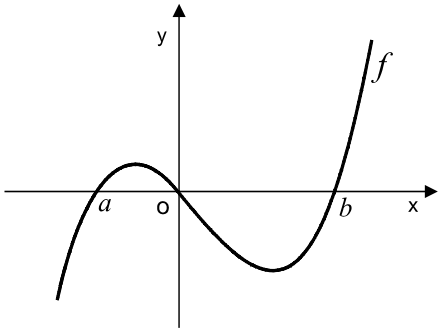
(A) $+\infty$ **(B)** $-\infty$ **(C)** 0 **(D)** 1

3. Seja g uma função tal que o gráfico de g'' (segunda derivada de g) é uma recta de declive positivo que intersecta o eixo Oy no ponto $(0,1)$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

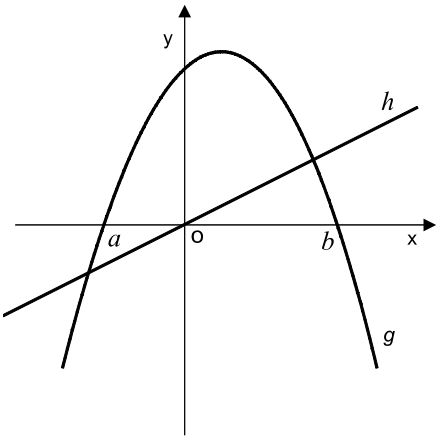
(A) O gráfico de g tem um ponto de inflexão de abcissa positiva
(B) O gráfico de g tem um ponto de inflexão de abcissa negativa
(C) O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $\mathbb{R}^+$
(D) O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $\mathbb{R}^-$

4. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$.

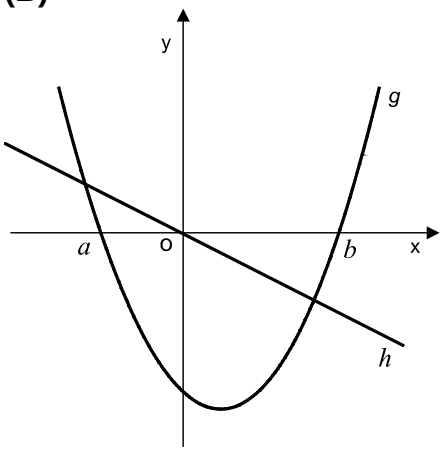


Em qual das figuras seguintes poderá estar representada parte dos gráficos de duas funções, g e h, de domínio $\mathbb{R}$, tais que $f = g \times h$?

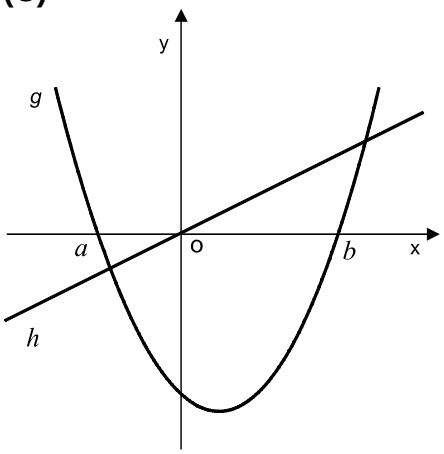
(A)



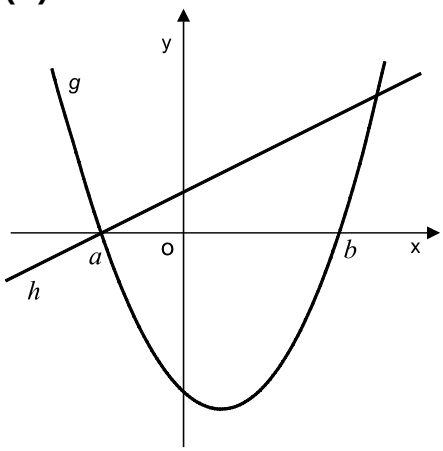
(B)



(C)



(D)



5. Num referencial o. n. $Oxyz$, considere as rectas r e s, definidas por:

$r : \ x-2=y-1=z-3$

$s : \ (x,y,z)=(2,1,3)+k\,(1,0,1)\,, \ k \in \mathbb{R}$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) r e s são concorrentes
(B) r e s são não complanares
(C) r e s são estritamente paralelas
(D) r e s são coincidentes

6. Num referencial o. n. $Oxyz$, qual das seguintes equações define uma superfície esférica tangente ao plano yOz?

(A) $(x-2)^2+y^2+z^2=1$
(B) $(x-2)^2+y^2+z^2=2$
(C) $(x-2)^2+y^2+z^2=4$
(D) $(x-2)^2+y^2+z^2=9$

7. Num referencial o. n. xOy, considere a elipse cujo centro é o ponto $(4,0)$ e em que dois dos seus vértices são os pontos $(1,0)$ e $(4,1)$.
Qual das seguintes equações define uma recta que intersecta a elipse em dois pontos?

(A) $x=7$ **(B)** $y=1$

(C) $y=x+2$ **(D)** $y=x-2$

8. Uma certa linha do triângulo de Pascal tem quinze elementos.
Qual é o sexto elemento dessa linha?

(A) ${}^{14}C_5$ **(B)** ${}^{15}C_5$ **(C)** ${}^{14}C_6$ **(D)** ${}^{15}C_6$

9. A Sandra tem dez fichas de plástico, três das quais são verdes, sendo as restantes vermelhas. A Sandra empilha as dez fichas, aleatoriamente, umas em cima das outras.
Qual é a probabilidade de as três fichas verdes ficarem em cima?

(A) $\frac{{}^{10}C_3}{{}^{10}A_3}$ **(B)** $\frac{1}{{}^{10}A_3}$ **(C)** $\frac{3!}{10!}$ **(D)** $\frac{3!\times 7!}{10!}$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações que entender necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{x} & se\ x < 0 \\ \operatorname{sen}(2x) - \cos x & se\ x \geq 0 \end{cases}$

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos (ou seja, **sem** utilização da calculadora), resolva as alíneas seguintes:

1.1. Estude a função f quanto à existência de assimptotas verticais ao seu gráfico.

1.2. Verifique se a função f tem máximo no intervalo $]-\infty, 0[$ e, em caso afirmativo, determine-o.

1.3. Determine os zeros de f no intervalo $]-3, 3[$.

2. A magnitude aparente (m) e a magnitude absoluta (M) de uma estrela são grandezas utilizadas em Astronomia para calcular a distância (d) a que essa estrela se encontra da Terra.

As três variáveis estão relacionadas pela fórmula $10^{0,4(m-M)} = \frac{d^2}{100}$

(d é medida em *parsec*, unidade utilizada em Astronomia para grandes distâncias.)

2.1. A Estrela Polar tem magnitude aparente $m = 2$, sendo a sua magnitude absoluta $M = -4{,}6$.

Qual é a distância da Terra à Estrela Polar? (Apresente o resultado em *parsec*, arredondado às unidades.)

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

2.2. Prove que, para quaisquer m, M e d, se tem: $m = M - 5\left(1 - \log_{10} d\right)$

3. O João e a irmã Alice querem telefonar a um amigo.

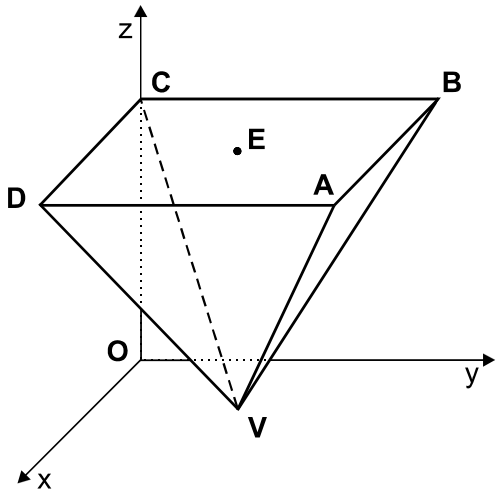
Ele lembra-se de que o número de telefone do amigo começa por 21 e tem mais sete algarismos: um 3, dois 5, dois 7, dois 8.

3.1. Quantos números existem nestas condições?

3.2. A Alice também se lembra de que o número de telefone do amigo termina em 857. Se eles digitarem ao acaso os restantes quatro algarismos, qual é a probabilidade de acertarem à primeira tentativa? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4. Na figura está representada, em referencial o. n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular.

- A base da pirâmide é paralela ao plano xOy
- O ponto A tem coordenadas $(8, 8, 7)$
- O ponto B pertence ao plano yOz
- O ponto C pertence ao eixo Oz
- O ponto D pertence ao plano xOz
- O ponto E é o centro da base da pirâmide
- O vértice V da pirâmide pertence ao plano xOy



4.1. Determine o perímetro de uma face lateral da pirâmide.

4.2. Determine a amplitude do ângulo DVB.
Apresente o resultado em graus, com aproximação à décima de grau.

4.3. Seja α o plano que contém o ponto E e que é paralelo ao plano AVB.
Mostre que o eixo Ox está contido em α.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte..... **81**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1. 42
- **1.1.** 12
- **1.2.** 16
- **1.3.** 14

2. 19
- **2.1.** 7
- **2.2.** 12

3. 22
- **3.1.** 11
- **3.2.** 11

4. 36
- **4.1.** 12
- **4.2.** 12
- **4.3.** 12

TOTAL **200**

PROVA 435/8 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **ÉPOCA ESPECIAL**
2000 **(SETEMBRO)**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.

Na página 8 deste enunciado encontra-se um formulário.

Primeira Parte

- As sete questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Qual das seguintes pode ser a expressão analítica de uma função de domínio $\mathbb{R}$?

(A) $\operatorname{tg} x$ **(B)** $\ln x$ **(C)** $\frac{x-1}{e^x}$ **(D)** $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

2. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$, estritamente decrescente.

Os eixos coordenados são assimptotas do gráfico de f.

Seja (x_n) a sucessão de termo geral $x_n = \frac{1}{n}$

Indique o valor de $\lim f(x_n)$

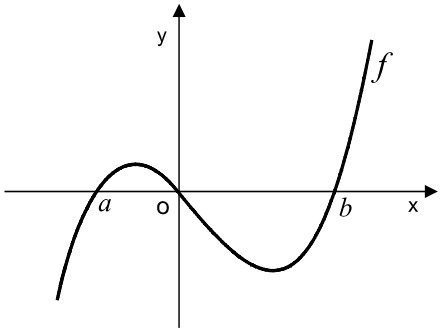
(A) $+\infty$ **(B)** $-\infty$ **(C)** 0 **(D)** 1

3. Seja g uma função tal que o gráfico de g'' (segunda derivada de g) é uma recta de declive positivo que intersecta o eixo Oy no ponto $(0,1)$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

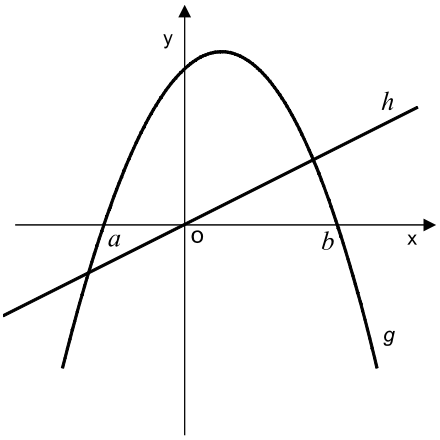
(A) O gráfico de g tem um ponto de inflexão de abcissa positiva
(B) O gráfico de g tem um ponto de inflexão de abcissa negativa
(C) O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $\mathbb{R}^+$
(D) O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $\mathbb{R}^-$

4. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$.

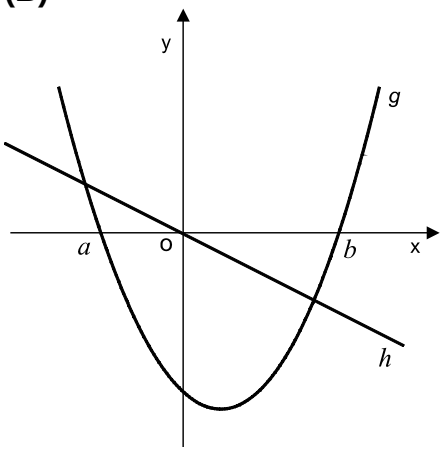


Em qual das figuras seguintes poderá estar representada parte dos gráficos de duas funções, g e h, de domínio $\mathbb{R}$, tais que $f = g \times h$?

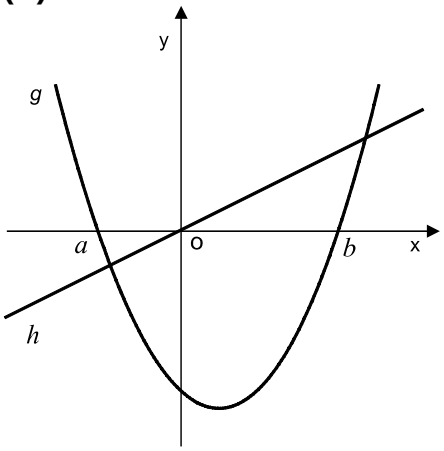
(A)



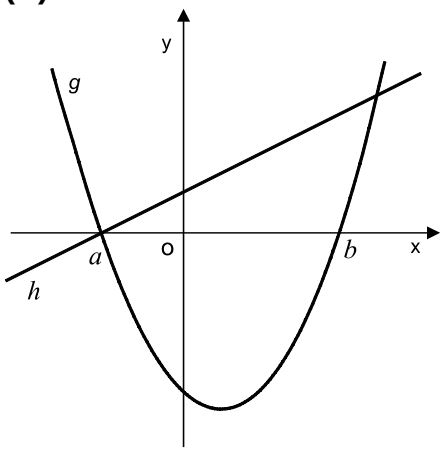
(B)



(C)



(D)



5. Uma certa linha do triângulo de Pascal tem quinze elementos.
Qual é o sexto elemento dessa linha?

(A) $^{14}C_5$ **(B)** $^{15}C_5$

(C) $^{14}C_6$ **(D)** $^{15}C_6$

6. A Sandra tem dez fichas de plástico, três das quais são verdes, sendo as restantes vermelhas. A Sandra empilha as dez fichas, aleatoriamente, umas em cima das outras.
Qual é a probabilidade de as três fichas verdes ficarem em cima?

(A) $\frac{^{10}C_3}{^{10}A_3}$ **(B)** $\frac{1}{^{10}A_3}$

(C) $\frac{3!}{10!}$ **(D)** $\frac{3!\times 7!}{10!}$

7. Seja z um número complexo de argumento $\frac{9\pi}{5}$

Indique um argumento de $\overline{z}$, conjugado de z.

(A) $\frac{\pi}{5}$ **(B)** $\frac{3\pi}{5}$

(C) $\frac{4\pi}{5}$ **(D)** $\frac{6\pi}{5}$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações que entender necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Considere o número complexo $z = 1 + 2\,i$

1.1. Sabe-se que z é uma raiz cúbica de um certo número complexo w.
Sem recorrer à calculadora, determine w, na forma algébrica.

1.2. Designando por α um argumento de z, determine, na forma trigonométrica, o número complexo $i\,z^2$, apresentando o argumento em função de α.

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{x} & se\ x < 0 \\ \operatorname{sen}(2\,x) - \cos x & se\ x \geq 0 \end{cases}$

2.1. Recorrendo exclusivamente a processos analíticos (ou seja, **sem** utilização da calculadora), resolva as alíneas seguintes:

2.1.1. Estude a função f quanto à existência de assimptotas verticais ao seu gráfico.

2.1.2. Verifique se a função f tem máximo no intervalo $]-\infty, 0[$ e, em caso afirmativo, determine-o.

2.1.3. Determine os zeros de f no intervalo $]-3, 3[$.

2.2. Recorrendo à sua calculadora, determine as soluções **inteiras** da inequação $f(x) > x - 4$ pertencentes ao intervalo $[-6, 6]$. Explique como procedeu.

3. A magnitude aparente (m) e a magnitude absoluta (M) de uma estrela são grandezas utilizadas em Astronomia para calcular a distância (d) a que essa estrela se encontra da Terra.

As três variáveis estão relacionadas pela fórmula $10^{0,4(m-M)} = \frac{d^2}{100}$

(d é medida em *parsec*, unidade utilizada em Astronomia para grandes distâncias.)

3.1. A Estrela Polar tem magnitude aparente $m = 2$, sendo a sua magnitude absoluta $M = -4{,}6$.

Qual é a distância da Terra à Estrela Polar? (Apresente o resultado em *parsec*, arredondado às unidades.)

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

3.2. Prove que, para quaisquer m, M e d, se tem: $m = M - 5\left(1 - \log_{10} d\right)$

4. O João e a irmã Alice querem telefonar a um amigo.

Ele lembra-se de que o número de telefone do amigo começa por 21 e tem mais sete algarismos: um 3, dois 5, dois 7, dois 8.

4.1. Quantos números existem nestas condições?

4.2. A Alice também se lembra de que o número de telefone do amigo termina em 857. Se eles digitarem ao acaso os restantes quatro algarismos, qual é a probabilidade de acertarem à primeira tentativa? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte..... **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **137**

1. 21
1.1. 10
1.2. 11

2. 61
2.1. 45
2.1.1. 13
2.1.2. 17
2.1.3. 15
2.2. 16

3. 23
3.1. 8
3.2. 15

4. 32
4.1. 16
4.2. 16

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Círculo: $\pi\ r^2 \qquad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\ r\ g$
$(r - raio\ da\ base;\ g - geratriz)$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\,r^2$
$(r - raio)$

Volumes

Prisma: *Área da base* × *Altura*

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3 \qquad (r - raio)$

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\,.\cos b + \text{sen}\,b\,.\cos a$

$\cos\,(a+b) = \cos\,a\,.\cos b - \text{sen}\,a\,.\,\text{sen}\,b$

$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a\,.\,\text{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho\,cis\,\theta)\,.\,(\rho'\,cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta + \theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\,cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\,cis\,\theta)^n\ = \rho^n\,cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\,cis\,\theta}\ = \sqrt[n]{\rho}\ cis\,\frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\,u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\,\text{sen}\,u$

$(\text{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

2001

PROVA 135/8 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa «antigo»

Duração da prova: 120 minutos
2001

1.ª FASE
1.ª CHAMADA
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui nove questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui quatro questões de resposta aberta, subdivididas em alíneas, num total de dez.

Grupo I

- As nove questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. De uma função f, contínua no intervalo $[1,3]$, sabe-se que $f(1)=7$ e $f(3)=4$

Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?

(A) A função f tem pelo menos um zero no intervalo $[1,3]$

(B) A função f não tem zeros no intervalo $[1,3]$

(C) A equação $f(x)=5$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[1,3]$

(D) A equação $f(x)=5$ não tem solução no intervalo $[1,3]$

2. Qual das seguintes expressões é, para qualquer número real positivo a, igual a $e^{2\ln a}$? ($\ln$ designa logaritmo de base e)

(A) $2\,a$ **(B)** $2+a$ **(C)** 2^a **(D)** a^2

3. A recta de equação $y=x$ é tangente ao gráfico de uma certa função f, no ponto de abcissa 0.

Qual das seguintes expressões pode definir a função f ?

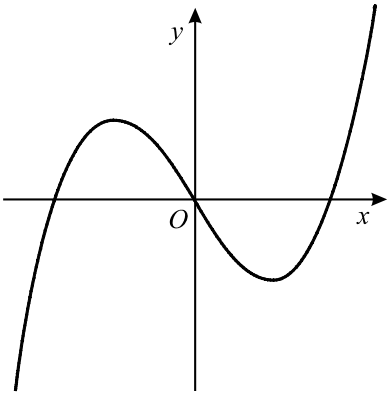
(A) x^2+x **(B)** $x^2+2\,x$ **(C)** $x^2+2\,x+1$ **(D)** x^2+x+1

4. Seja g uma função, de domínio $\mathbb{R}$, tal que a sua **segunda derivada** é definida por

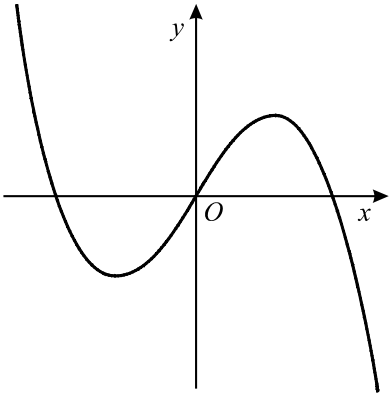
$$g''(x) = 1 - x^2$$

Em qual das figuras seguintes poderá estar parte da representação gráfica da **função** g ?

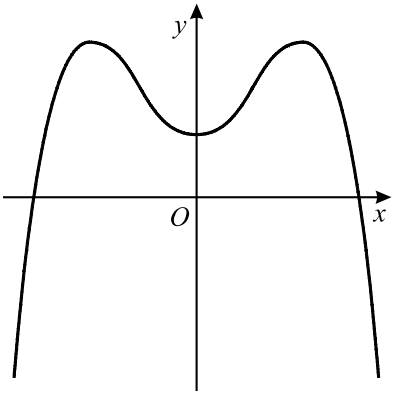
(A)



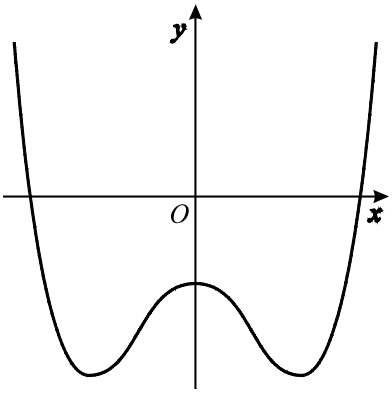
(B)



(C)



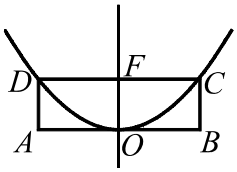
(D)



5. Qual das seguintes equações define, num referencial o. n. $Oxyz$, uma superfície esférica tangente aos planos de equações $x = 4$ e $y = 0$?

(A) $(x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$
(B) $(x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 16$
(C) $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$
(D) $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 16$

6. Na figura está representada parte de uma parábola, bem como um rectângulo $[ABCD]$.



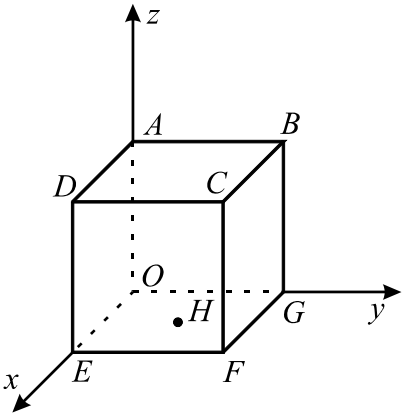
- D , C e O são pontos da parábola
- $[DC]$ contém o foco F da parábola e é perpendicular ao eixo de simetria OF
- $\overline{OF} = 1$

Qual é a área do rectângulo $[ABCD]$?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 6

7. Na figura está representado, em referencial o. n. $Oxyz$, um cubo.

- O vértice O é a origem do referencial
- O vértice A pertence ao eixo Oz
- O vértice G pertence ao eixo Oy
- O vértice E pertence ao eixo Ox
- H é o centro da face $[OGFE]$
- Uma equação do plano que contém os pontos D, B e H é $x + y = 10$



Qual é a medida da aresta do cubo ?

(A) 5 **(B)** 10 **(C)** $5\sqrt{2}$ **(D)** $10\sqrt{2}$

8. *Capicua* é uma sequência de algarismos cuja leitura da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita dá o mesmo número.

Por exemplo, 75957 e 30003 são *capicuas*.

Quantas *capicuas* existem com cinco algarismos, sendo o primeiro algarismo ímpar ?

(A) 300 **(B)** 400 **(C)** 500 **(D)** 600

9. **Quantas** são as soluções da equação $(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + x + 1$?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = 3x - 2\ln x$ ($\ln$ designa logaritmo de base e).

Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as três alíneas seguintes.

1.1. Estude f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico.

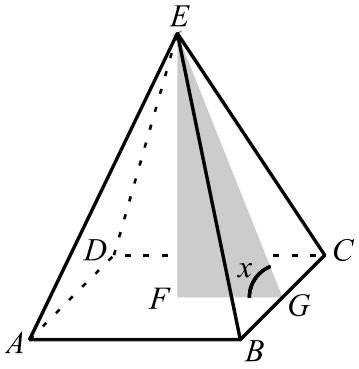
1.2. Mostre que a função f tem um único mínimo.

1.3. O gráfico de f contém um único ponto cuja ordenada é o triplo da abcissa. Determine a abcissa desse ponto.

2. Na figura está representada uma pirâmide quadrangular regular.

Sabe-se que:

- A base da pirâmide tem centro F e lado 2
- G é o ponto médio da aresta $[BC]$
- x designa a amplitude do ângulo FGE



2.1. Mostre que a área total da pirâmide é dada, em função de x, por $A(x) = \frac{4\cos x + 4}{\cos x}$ $\left(x \in]0, \frac{\pi}{2}[\right)$

2.2. Calcule $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} A(x)$ e interprete geometricamente o valor obtido.

3. Num saco existem quinze bolas, indistinguíveis ao tacto.
Cinco bolas são amarelas, cinco são verdes e cinco são brancas.
Para cada uma das cores, as bolas estão numeradas de 1 a 5.

3.1. Retirando todas as bolas do saco e dispondo-as, ao acaso, numa fila, qual é a probabilidade de as bolas da mesma cor ficarem todas juntas?
Apresente o resultado na forma de dízima, com sete casas decimais.

3.2. Admita que as quinze bolas são novamente colocadas no saco.
Extraindo simultaneamente três bolas, ao acaso, qual é a probabilidade de elas terem cores e números diferentes?
Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, duas rectas, r e s, de equações

$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = z$ e $(x, y, z) = (1, -1, 0) + k\,(2, 1, -1)\ ,\ k \in \mathbb{R}$,

respectivamente.

4.1. Justifique que as rectas r e s definem um plano.

4.2. Mostre que o plano definido pelas rectas r e s é paralelo ao plano de equação $x - y + z = 10$

4.3. Determine a amplitude do ângulo formado pelas rectas r e s.
Apresente o resultado em graus, aproximado às unidades.
Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **81**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **119**

1. 37
1.1. 12
1.2. 13
1.3. 12

2. 24
2.1. 12
2.2. 12

3. 22
3.1. 11
3.2. 11

4. 36
4.1. 12
4.2. 12
4.3. 12

TOTAL **200**

PROVA 435/11 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos
2001

1.ª FASE
1.ª CHAMADA
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de dez.

Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. De uma função f, contínua no intervalo $[1,3]$, sabe-se que $f(1)=7$ e $f(3)=4$

Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?

(A) A função f tem pelo menos um zero no intervalo $[1,3]$

(B) A função f não tem zeros no intervalo $[1,3]$

(C) A equação $f(x)=5$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[1,3]$

(D) A equação $f(x)=5$ não tem solução no intervalo $[1,3]$

2. Qual das seguintes expressões é, para qualquer número real positivo a, igual a $e^{2\ln a}$?
($\ln$ designa logaritmo de base e)

(A) $2\,a$ **(B)** $2+a$ **(C)** 2^a **(D)** a^2

3. A recta de equação $y=x$ é tangente ao gráfico de uma certa função f, no ponto de abcissa 0.

Qual das seguintes expressões pode definir a função f?

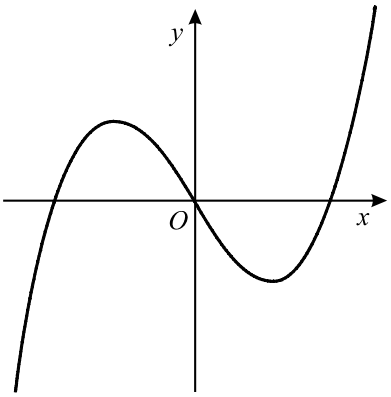
(A) x^2+x **(B)** $x^2+2\,x$ **(C)** $x^2+2\,x+1$ **(D)** x^2+x+1

4. Seja g uma função, de domínio $\mathbb{R}$, tal que a sua **segunda derivada** é definida por

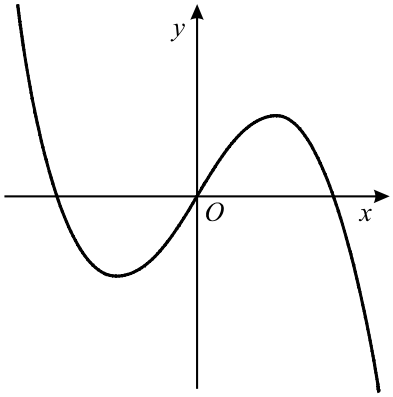
$$g''(x) = 1 - x^2$$

Em qual das figuras seguintes poderá estar parte da representação gráfica da **função** g ?

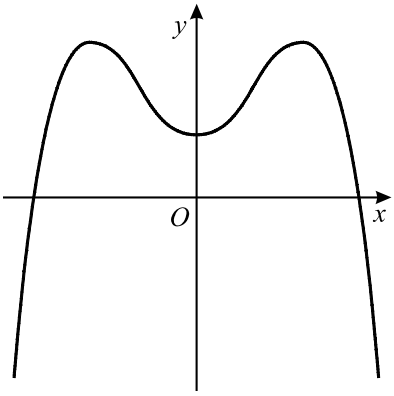
(A)



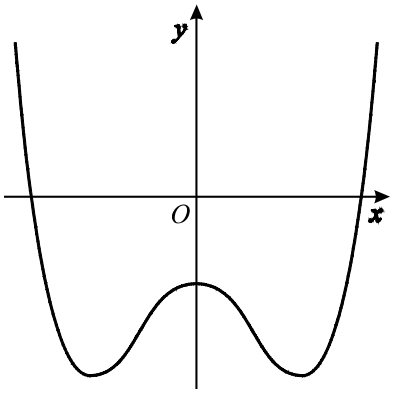
(B)



(C)



(D)



5. *Capicua* é uma sequência de algarismos cuja leitura da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita dá o mesmo número.

Por exemplo, 75957 e 30003 são *capicuas*.

Quantas *capicuas* existem com cinco algarismos, sendo o primeiro algarismo ímpar ?

(A) 300 **(B)** 400 **(C)** 500 **(D)** 600

6. Uma caixa tem cinco bombons, dos quais apenas dois têm licor.

Tira-se da caixa, ao acaso, uma amostra de três bombons.

Considere que X designa a variável «*número de bombons* ***com licor*** *existentes nessa amostra*».

Qual das seguintes distribuições de probabilidades pode ser a da variável X ?

(A)

x_i	0	1	2
$P\,(X = x_i)$	$\frac{1}{{}^5C_3}$	$\frac{6}{{}^5C_3}$	$\frac{3}{{}^5C_3}$

(B)

x_i	0	1	2
$P\,(X = x_i)$	$\frac{3}{{}^5C_3}$	$\frac{6}{{}^5C_3}$	$\frac{1}{{}^5C_3}$

(C)

x_i	1	2	3
$P\,(X = x_i)$	$\frac{1}{{}^5C_3}$	$\frac{6}{{}^5C_3}$	$\frac{3}{{}^5C_3}$

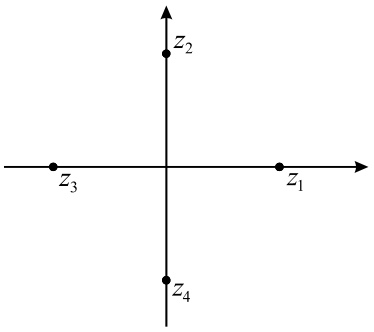
(D)

x_i	1	2	3
$P\,(X = x_i)$	$\frac{3}{{}^5C_3}$	$\frac{6}{{}^5C_3}$	$\frac{1}{{}^5C_3}$

7. Seja w um número complexo diferente de 0, cuja imagem geométrica, no plano complexo, está no primeiro quadrante e pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares.

Seja $\overline{w}$ o conjugado de w.

Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de quatro números complexos: z_1, z_2, z_3 e z_4.



Qual deles pode ser igual a $\frac{w}{\overline{w}}$?

(A) z_1 **(B)** z_2 **(C)** z_3 **(D)** z_4

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

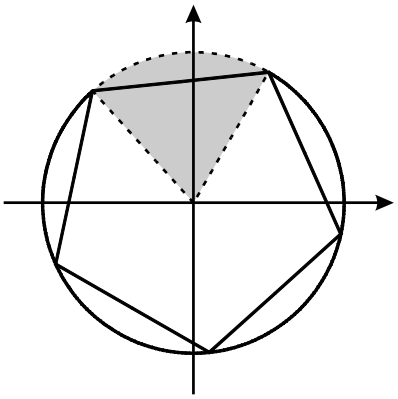
Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z_1 = 2\,cis\,\frac{\pi}{3}$

1.1. Sem recorrer à calculadora, verifique que $\frac{z_1^3 + 2}{i}$ é um imaginário puro.

1.2. No plano complexo, a imagem geométrica de z_1 é um dos cinco vértices do pentágono regular representado na figura. Este pentágono está inscrito numa circunferência centrada na origem do referencial.

Defina, por meio de uma condição em $\mathbb{C}$, a região sombreada, excluindo a fronteira.



2. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = 3x - 2\ln x$

($\ln$ designa logaritmo de base e).

2.1. Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as duas alíneas seguintes.

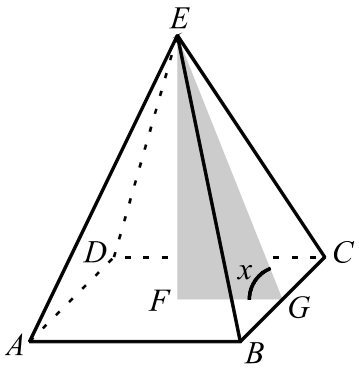
2.1.1. Estude f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico.

2.1.2. Mostre que a função f tem um único mínimo.

2.2. O gráfico de f contém um único ponto cuja ordenada é o quadrado da abcissa. Recorrendo à calculadora, determine um valor aproximado para a abcissa desse ponto (apresente o resultado arredondado às décimas).

Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).

3. Na figura está representada uma pirâmide quadrangular regular.



Sabe-se que:

- A base da pirâmide tem centro F e lado 2
- G é o ponto médio da aresta $[BC]$
- x designa a amplitude do ângulo FGE

3.1. Mostre que a área total da pirâmide é dada, em função de x, por

$$A(x) = \frac{4\cos x + 4}{\cos x} \qquad \left(x \in]0, \frac{\pi}{2}[\right)$$

3.2. Calcule $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} A(x)$ e interprete geometricamente o valor obtido.

4. Num saco existem quinze bolas, indistinguíveis ao tacto.
Cinco bolas são amarelas, cinco são verdes e cinco são brancas.
Para cada uma das cores, as bolas estão numeradas de 1 a 5.

4.1. Retirando todas as bolas do saco e dispondo-as, ao acaso, numa fila, qual é a probabilidade de as bolas da mesma cor ficarem todas juntas?
Apresente o resultado na forma de dízima, com sete casas decimais.

4.2. Suponha agora que, no saco, estão apenas **algumas** das quinze bolas.
Nestas novas condições, admita que, ao retirarmos, ao acaso, uma bola do saco, se tem:

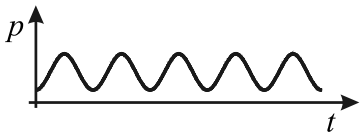
- a probabilidade de essa bola ser amarela é $50\,\%$
- a probabilidade de essa bola ter o número 1 é $25\,\%$
- a probabilidade de essa bola ser amarela ou ter o número 1 é $62{,}5\,\%$

Prove que a bola amarela número 1 está no saco.

5. A Joana está a encher um balão.



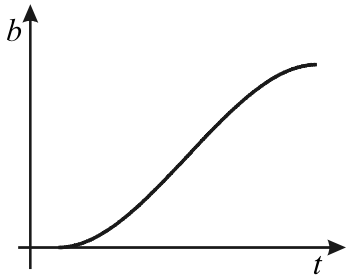
Na figura abaixo está o gráfico da função que dá a massa p de ar, nos pulmões da Joana, t segundos após o instante em que ela, pela primeira vez, começa a inspirar o ar, para encher o balão.



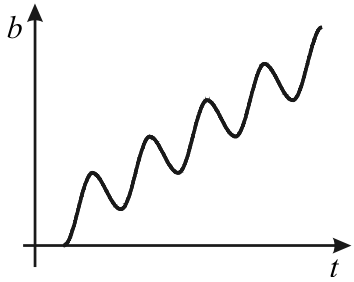
Para encher o balão, a Joana precisa de inspirar várias vezes, mas, de cada vez que inspira, mantém o pipo apertado, evitando assim que o ar saia do balão.

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função que dá a massa b de ar no balão, t segundos após o referido instante (aquele em que, pela primeira vez, a Joana começa a inspirar o ar, para encher o balão)?

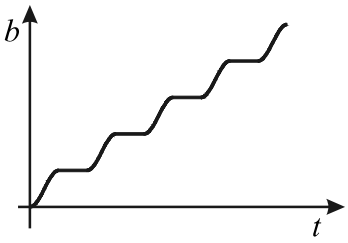
(A)



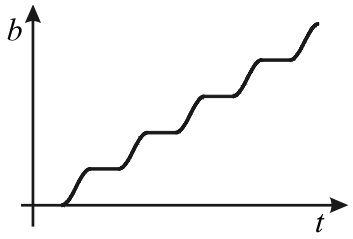
(B)



(C)



(D)



Numa pequena composição, de dez a quinze linhas, aproximadamente, justifique a sua resposta.

Note bem:
Não explique por que razão considera adequado o gráfico por si escolhido como correcto.
Deve limitar-se a explicar por que é que os outros três estão incorrectos, apresentando, para cada um deles, uma razão pela qual o rejeita.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 11
1.2. 10

2. 43
2.1. 30
2.1.1. 15
2.1.2. 15
2.2. 13

3. 26
3.1. 13
3.2. 13

4. 32
4.1. 16
4.2. 16

5. 15

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Círculo: $\pi\ r^2 \qquad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - raio\ da\ base;\ g - geratriz)$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - raio)$

Volumes

Prisma: *Área da base* × *Altura*

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3 \qquad (r - raio)$

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\,.\cos b + \text{sen}\,b\,.\cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\,.\cos b - \text{sen}\,a\,.\,\text{sen}\,b$

$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a\,.\,\text{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho\, cis\,\theta)\,.\,(\rho'\, cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta+\theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\,\theta)^n\ = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta}\ = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\,u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\,\text{sen}\,u$

$(\text{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos
2001

1.ª FASE
1.ª CHAMADA

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 11
1.2. 10

2. 43
2.1. 30
2.1.1. 15
2.1.2. 15
2.2. 13

3. 26
3.1. 13
3.2. 13

4. 32
4.1. 16
4.2. 16

5. 15

TOTAL **200**

V.S.F.F.

435/C/1

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Versão 1	C	D	A	C	C	A	B
Versão 2	D	A	C	A	C	B	A

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, no primeiro grupo, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas **Resp. certas**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

Grupo II

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Critérios específicos

1.1. 11

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

$\frac{z_1^3 + 2}{i} =$

$= \frac{\left(2 cis \frac{\pi}{3}\right)^3 + 2}{i}$ 1

$= \frac{8 cis\, \pi + 2}{i}$ 4

$= \frac{-6}{i}$ 3

$= 6i$ 2

Referir que $6i$ é um imaginário puro 1

2.º Processo

$\frac{z_1^3 + 2}{i} =$

$= \frac{\left(2 cis \frac{\pi}{3}\right)^3 + 2}{i}$ 1

$= \frac{\left(1 + \sqrt{3}i\right)^3 + 2}{i}$ 3

$= \frac{1 + 3\sqrt{3}i - 9 - 3\sqrt{3}i + 2}{i}$ 3

$= \frac{-6}{i}$ 1

$= 6i$ 2

Referir que $6i$ é um imaginário puro 1

V.S.F.F.

435/C/3

1.2. ..... **10**

Condição que define o interior do círculo
(por exemplo $|z| < 2$) **(ver nota)** 3

Condição que define a região compreendida
entre as duas semi-rectas, excluindo-as 5

$\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{5} = \frac{11\pi}{15}$ 3

Escrever a condição $\frac{\pi}{3} < arg(z) < \frac{11\pi}{15}$
(ou equivalente) **(ver nota)** 2

Condição que define a região sombreada 2

Nota:
Se o examinando escrever o símbolo $\leq$, em vez do símbolo $<$, deverá ser penalizado em 1 ponto por cada símbolo incorrecto, até um total de 3 pontos.

2.1.1. ..... **15**

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ 3

Concluir que a recta de equação $x = 0$ é assimptota do gráfico de f 2

Referir que, pelo facto de f ser contínua em $\mathbb{R}^+$, o seu gráfico não
tem outras assimptotas verticais 1

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ 4

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 3x] = \lim_{x \to +\infty} (-2 \ln x) = -\infty$ 3

Concluir que não existe assimptota do gráfico de f quando
$x \to +\infty$ 2

Nota:
O examinando pode, ao estudar a existência de assimptota do gráfico de f, quando $x \to +\infty$, começar por estudar a existência de assimptota horizontal. Neste caso, as cotações relativas às três últimas etapas passam a ser 3, 2 e 1 pontos, transitando os 3 pontos retirados para:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ 2

Concluir que não existe assimptota horizontal do gráfico
de f quando $x \to +\infty$ 1

2.1.2. ..... **15**

$f'(x) = 3 - \frac{2}{x}$ 5

$3 - \frac{2}{x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$ 4

Estudar o sinal de f' **(ver nota)** 4

Concluir que $f\left(\frac{2}{3}\right)$ é o único mínimo de f **(ver nota)** 2

Nota:

O examinando pode apresentar o estudo do sinal de f' e o estudo da monotonia de f, para concluir que $f\left(\frac{2}{3}\right)$ é o único mínimo de f, por meio de um quadro.

2.2. ..... **13**

Equacionar o problema ($3x - 2\ln x = x^2$ ou equivalente) 3

Explicação do método utilizado para resolver graficamente a equação **(ver nota 1)** 6

Indicação do valor da abcissa pedida **(ver nota 2)** 4

Notas:

1. A explicação do método utilizado deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

   O examinando apresenta o gráfico da função f e a parábola de equação $y = x^2$ e assinala correctamente o ponto de intersecção (ou apresenta o gráfico da função definida por $3x - 2\ln x - x^2$ e assinala correctamente o seu zero) 6

   O examinando não apresenta qualquer gráfico, mas refere a utilização de ferramentas da calculadora (por exemplo: *Intersect*, *Zoom*, *Trace*, ...) ou de algo que evidencie a procura do referido ponto de intersecção (ou do referido zero) 3

   O examinando não apresenta qualquer gráfico nem qualquer explicação, ou limita-se a apresentar uma referência do tipo «Vi na calculadora» 0

2. A escrita da abcissa do ponto de intersecção deve ser cotada, independentemente de o examinando ter, ou não, explicado o método utilizado, de acordo com o seguinte critério:

1.º Caso (apresentação do resultado arredondado às décimas, de acordo com o enunciado):

Resposta $2{,}3$ 4

Resposta $2{,}2$ ou $2{,}4$ 3

Resposta $2{,}1$ ou $2{,}5$ 2

Resposta $2{,}0$ ou $2{,}6$ 1

Outros resultados 0

2.º Caso (apresentação do resultado com aproximação superior às décimas):

Valor no intervalo $[2{,}26\ ;\ 2{,}30]$ 3

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[2{,}20\ ;\ 2{,}36]$ 2

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[2{,}10\ ;\ 2{,}46]$ 1

Outros resultados 0

3.º Caso (apresentação do resultado arredondado às unidades):

Valor igual a 2 1

Outros resultados 0

3.1. ..... **13**

$\overline{FG} = 1$ 1

$\cos x = \frac{1}{\overline{EG}}$ 2

$\overline{EG} = \frac{1}{\cos x}$ 2

Área de uma face lateral $= \frac{1}{\cos x}$ 4

Área lateral $= \frac{4}{\cos x}$ 1

Área total $= 4 + \frac{4}{\cos x}$ 2

Área total $= \frac{4\cos x + 4}{\cos x}$ 1

3.2. ..... **13**

$\lim_{x \to \frac{3}{2}^-} A(x) = +\infty$ 6

Interpretação (A área total pode ser tão grande quanto se queira, desde que o ângulo em questão se aproxime suficientemente do ângulo recto.) 7

4.1. ..... **16**

Escrita da fracção $\frac{(5!)^3 \times 3!}{15!}$ **(ver notas 1, 2, 3, 4 e 5)** 13

Probabilidade pedida $= 0{,}0000079$ **(ver notas 6, 7, 8 e 9)** 3

Notas:

1. O examinando pode começar por indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis e só depois escrever a fracção.
   No entanto, se não o fizer, isto é, se escrever directamente a fracção, não deverá ser penalizado.

2. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da fracção, com a respectiva cotação a atribuir.

   $\frac{(5!)^3 \times 3!}{15!}$ (fracção correcta) 13

   $\frac{(5!)^3}{15!}$ 8

   $\frac{3! \times 5!}{15!}$ 6

   $\frac{3!}{15!}$ 5

   Outras fracções com denominador $15!$ 4

3. Se o examinando indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído à sua resposta menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

4. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos possíveis, deverão ser atribuídos 3 pontos à sua resposta.

5. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos favoráveis, deverão ser atribuídos 9 pontos à sua resposta.

6. Se o examinando apresentar o resultado $0{,}000007$ ou $0{,}000008$, deverá ser penalizado em 1 ponto.

7. Se o examinando apresentar o resultado correcto na forma de dízima, mas com mais de sete casas decimais, também deverá ser penalizado em 1 ponto.

8. Se o examinando apresentar o resultado correcto, mas na forma de notação científica (tal como é apresentado na calculadora), deverá ser penalizado em 2 pontos.

9. Qualquer outra forma de apresentação do resultado final deverá ser cotada com 0 pontos.

4.2. ..... **16**

No que se segue, vamos designar por $P(A)$ a probabilidade de «sair bola amarela» e por $P(B)$ a probabilidade de «sair bola com o número 1».
Como é evidente, o examinando poderá escolher outras designações. Também poderá apresentar o seu raciocínio através de um diagrama ou de um esquema.

Identificar $P(A \cup B)$ como sendo a probabilidade de «sair bola amarela ou com o número 1» 2

Identificar $P(A \cap B)$ como sendo a probabilidade de «sair a bola amarela número 1» 2

Aplicar a fórmula $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ para concluir que $P(A \cap B) = 12{,}5\%$ 4

Concluir que, sendo positiva a probabilidade de «sair a bola amarela número 1», tal significa que é possível retirar essa bola do saco, pelo que ela lá está **(ver nota)**..... 8

Nota:
O examinando deverá referir **explicitamente** o facto de ser positiva a probabilidade de «sair a bola amarela número 1», ou, em alternativa, que, como $P(A \cap B) = 12{,}5\%$, esse acontecimento é possível. Se não o fizer, os 8 pontos previstos para a conclusão não deverão ser atribuídos.

5. ..... **15**

Apresenta-se a seguir um exemplo de resposta.

O gráfico A não se adequa à situação descrita, pois a massa de ar no balão não aumenta durante cada inspiração da Joana, pelo que a função não pode ser estritamente crescente.
O gráfico B também não é o correcto, uma vez que a Joana não deixa sair ar do balão e, como tal, a massa de ar dentro deste nunca pode diminuir.
O gráfico C também não traduz a situação descrita, porque, tal como o gráfico da função que dá a massa de ar nos pulmões da Joana ilustra, o processo inicia-se com uma inspiração, durante a qual a massa de ar existente no balão permanece nula, ao contrário do que este gráfico nos mostra.
Portanto, o gráfico correcto é o gráfico D.

Na tabela seguinte, indica-se como devem ser atribuídos os 15 pontos.

Forma / **Conteúdo**	Nível 1 (*)	Nível 2 (**)	Nível 3 (***)
Rejeita os três gráficos incorrectos.	15	13	11
Rejeita dois gráficos incorrectos.	10	8	6
Rejeita apenas um gráfico incorrecto.	5	4	3

(*) **Nível 1** - Redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).

(**) **Nível 2** - Redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecte a inteligibilidade.

(***) **Nível 3** - Redacção confusa, sem estruturação aparente, presença de erros graves, com perturbação frequente da inteligibilidade.

Pode acontecer que uma composição não se enquadre completamente num dos três níveis descritos e/ou contenha características presentes em mais do que um deles. Nesse caso, deverá ser atribuída uma pontuação intermédia, desde que respeite a indicação, dada nos critérios gerais, de que a cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Alunos Externos e Autopropostos — alunos que obtiveram aprovação no ano de 1999/2000 no programa «antigo» do 12.º ano

Duração da prova: 120 minutos
2001

1.ª FASE
1.ª CHAMADA

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I **81**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada ..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **119**

1. 37
1.1. 12
1.2. 13
1.3. 12

2. 24
2.1. 12
2.2. 12

3. 22
3.1. 11
3.2. 11

4. 36
4.1. 12
4.2. 12
4.3. 12

TOTAL **200**

V.S.F.F.

135/C/1

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Versão 1	C	D	A	C	A	C	B	C	B
Versão 2	D	A	C	A	B	C	C	B	C

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, no primeiro grupo, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas **Resp. certas**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3	0	0		
3	27	24	21	18	15	12	9			
4	36	33	30	27	24	21				
5	45	42	39	36	33					
6	54	51	48	45						
7	63	60	57							
8	72	69								
9	81									

Grupo II

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Critérios específicos

1.1. 12

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ 2

Concluir que a recta de equação $x = 0$ é assimptota do gráfico de f 1

Referir que, pelo facto de f ser contínua em $\mathbb{R}^+$, o seu gráfico não tem outras assimptotas verticais 1

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ 3

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 3x] = \lim_{x \to +\infty} (-2 \ln x) = -\infty$ 3

Concluir que não existe assimptota do gráfico de f quando $x \to +\infty$ 2

Nota:
O examinando pode, ao estudar a existência de assimptota do gráfico de f, quando $x \to +\infty$, começar por estudar a existência de assimptota horizontal. Neste caso, as cotações relativas às três últimas etapas passam a ser 2, 2 e 1 pontos, transitando os 3 pontos retirados para:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ 2

Concluir que não existe assimptota horizontal do gráfico de f quando $x \to +\infty$ 1

1.2. 13

$f'(x) = 3 - \frac{2}{x}$ 4

$3 - \frac{2}{x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$ 3

Estudar o sinal de f' **(ver nota)** 4

Concluir que $f\left(\frac{2}{3}\right)$ é o único mínimo de f **(ver nota)** 2

Nota:

O examinando pode apresentar o estudo do sinal de f' e o estudo da monotonia de f, para concluir que $f\left(\frac{2}{3}\right)$ é o único mínimo de f, por meio de um quadro.

1.3. ..... **12**

Equacionar o problema ($3x - 2\ln x = 3x$) 6

$3x - 2\ln x = 3x \Leftrightarrow \ln x = 0$ 2

$x = 1$ 4

Nota:
O examinando poderá não equacionar o problema, referindo que a abcissa pedida é 1, dado que $3 \times 1 - 2\ln 1 = 3 \times 1$. Neste caso, deverá ser atribuída a cotação máxima (12 pontos).

2.1. ..... **12**

$\overline{FG} = 1$ 1

$\cos x = \frac{1}{\overline{EG}}$ 2

$\overline{EG} = \frac{1}{\cos x}$ 2

Área de uma face lateral $= \frac{1}{\cos x}$ 3

Área lateral $= \frac{4}{\cos x}$ 1

Área total $= 4 + \frac{4}{\cos x}$ 2

Área total $= \frac{4\cos x + 4}{\cos x}$ 1

2.2. ..... **12**

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} A(x) = +\infty$ 6

Interpretação (A área total pode ser tão grande quanto se queira, desde que o ângulo em questão se aproxime suficientemente do ângulo recto.) 6

3.1. ..... **11**

Escrita da fracção $\frac{(5!)^3 \times 3!}{15!}$ **(ver notas 1, 2, 3, 4 e 5)** 8

Probabilidade pedida $= 0{,}0000079$ **(ver notas 6, 7, 8 e 9)**..... 3

Notas:

1. O examinando pode começar por indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis e só depois escrever a fracção.
   No entanto, se não o fizer, isto é, se escrever directamente a fracção, não deverá ser penalizado.

2. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da fracção, com a respectiva cotação a atribuir.

   $\frac{(5!)^3 \times 3!}{15!}$ (fracção correcta)..... 8

   $\frac{(5!)^3}{15!}$ 5

   $\frac{3! \times 5!}{15!}$ 4

   $\frac{3!}{15!}$ 3

   Outras fracções com denominador $15!$ 2

3. Se o examinando indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído à sua resposta menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

4. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos possíveis, deverá ser atribuído 1 ponto à sua resposta.

5. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos favoráveis, deverão ser atribuídos 6 pontos à sua resposta.

6. Se o examinando apresentar o resultado $0{,}000007$ ou $0{,}000008$, deverá ser penalizado em 1 ponto.

7. Se o examinando apresentar o resultado correcto na forma de dízima, mas com mais de sete casas decimais, também deverá ser penalizado em 1 ponto.

8. Se o examinando apresentar o resultado correcto, mas na forma de notação científica (tal como é apresentado na calculadora), deverá ser penalizado em 2 pontos.

9. Qualquer outra forma de apresentação do resultado final deverá ser cotada com 0 pontos.

3.2. ..... **11**

Número de casos possíveis $= {}^{15}C_3$
Número de casos favoráveis $= 5 \times 4 \times 3$
Probabilidade pedida $= \frac{12}{91}$

As cotações devem ser atribuídas de acordo com o seguinte critério:

Escrita da fracção $\frac{5\times4\times3}{{}^{15}C_3}$ **(ver notas 1, 2, 3, 4 e 5)** 10

Resultado final 1

Notas:

1. O examinando pode começar por indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis e só depois escrever a fracção.
   No entanto, se não o fizer, isto é, se escrever directamente a fracção, não deverá ser penalizado.

2. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da fracção, com a respectiva cotação a atribuir.

   $\frac{5\times4\times3}{{}^{15}C_3}$ (fracção correcta)..... 10

   Outras fracções com denominador ${}^{15}C_3$ 3

3. Se o examinando indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído à sua resposta menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

4. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos possíveis, deverão ser atribuídos 2 pontos à sua resposta.

5. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos favoráveis, deverão ser atribuídos 7 pontos à sua resposta.

4.1. ..... **12**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:
Referir que o ponto $(1, -1, 0)$ pertence às rectas r e s 4
Mostrar que as rectas r e s não têm a mesma direcção 4
Concluir que as rectas r e s são concorrentes 3
Concluir que as rectas r e s definem um plano 1

2.º Processo:
Escrever uma condição cartesiana que defina a recta s 2
Resolver o sistema formado pelas condições cartesianas que definem as rectas r e s 6
Concluir que as rectas r e s são concorrentes 3
Concluir que as rectas r e s definem um plano 1

4.2. ..... **12**

Encontrar um vector normal às rectas r e s (ou mostrar que o vector $(1, -1, 1)$ é perpendicular às rectas r e s) 7

Justificar que o plano definido pelas rectas r e s é paralelo ao plano de equação $x - y + z = 10$ 5

4.3. ..... **12**

$\cos\alpha = \dfrac{|2\times2+3\times1+1\times(-1)|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}\times\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}$ 4

$\cos\alpha \approx 0,65$ 4

$\alpha \approx 49°$ 4

Nota:
Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às unidades, ou se o arredondamento estiver incorrecto, deverá ser penalizado em 1 ponto.

V.S.F.F.

PROVA 135/9 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa «antigo»

Duração da prova: 120 minutos
2001

1.ª FASE
2.ª CHAMADA
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui nove questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui quatro questões de resposta aberta, subdivididas em alíneas, num total de dez.

Grupo I

- As nove questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} 1 + e^x & se\ x < 0 \\ 2 & se\ x = 0 \\ 3\,x + 2 & se\ x > 0 \end{cases}$$

Relativamente à continuidade da função h, no ponto 0, qual das afirmações seguintes é verdadeira?

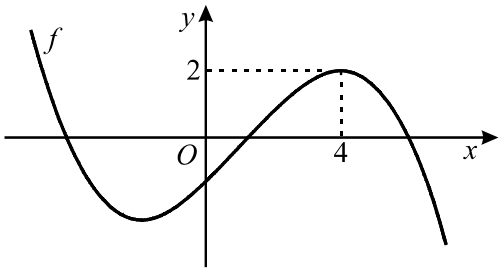
(A) É contínua
(B) É contínua à esquerda e descontínua à direita
(C) É contínua à direita e descontínua à esquerda
(D) É descontínua à esquerda e à direita

2. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f, polinomial do terceiro grau.

2 é um máximo relativo da função f.

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) - 2$

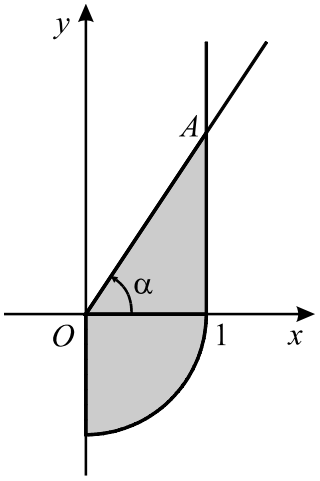
Quantos são os zeros da função g?



(A) um **(B)** dois **(C)** três **(D)** quatro

3. Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy :

- um quarto de círculo, de centro na origem e raio 1
- uma semi-recta paralela ao eixo Oy, com origem no ponto $(1, 0)$
- um ponto A pertencente a esta semi-recta
- um ângulo de amplitude α, cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semi-recta $\dot{O}A$



Qual das expressões seguintes dá a área da região sombreada, em função de α ?

(A) $\frac{\pi}{4} + \frac{\text{tg } \alpha}{2}$ **(B)** $\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\text{tg } \alpha}$

(C) $\pi + \frac{\text{tg } \alpha}{2}$ **(D)** $\pi + \frac{2}{\text{tg } \alpha}$

4. Considere as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por

$$f(x) = 2^x \qquad \text{e} \qquad g(x) = 3^x$$

Qual é o conjunto solução da inequação $f(x) > g(x)$?

(A) Conjunto vazio **(B)** $\mathbb{R}^-$ **(C)** $\mathbb{R}^+$ **(D)** $\mathbb{R}$

5. Os focos de uma hipérbole coincidem com os focos de uma elipse.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) Os vértices da hipérbole coincidem com dois dos vértices da elipse

(B) Os vértices da hipérbole pertencem ao eixo menor da elipse

(C) Os vértices da hipérbole pertencem ao eixo maior da elipse

(D) Os vértices da hipérbole pertencem ao exterior da elipse

6. Para um certo número real k, as rectas r e s, definidas, em referencial o.n. $Oxyz$, pelas condições

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{3} \qquad s: \frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-k}{3}$$

são **coincidentes**. Qual é o valor de k?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

7. Considere, em referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica centrada na origem do referencial e cuja intersecção com o plano de equação $z = 3$ é uma circunferência de perímetro 8π.

Qual das seguintes é uma equação desta superfície esférica?

(A) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ **(B)** $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

(C) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ **(D)** $x^2 + y^2 + z^2 = 36$

8. A soma dos dois últimos elementos de uma certa linha do triângulo de Pascal é 21.

Qual é a soma dos três primeiros elementos dessa linha?

(A) 121 **(B)** 151 **(C)** 181 **(D)** 211

9. Num curso superior existem dez disciplinas de índole literária, das quais três são de literatura contemporânea.

Um estudante pretende inscrever-se em seis disciplinas desse curso.

Quantas escolhas pode ele fazer se tiver de se inscrever em, pelo menos, duas disciplinas de literatura contemporânea?

(A) ${}^3C_2 + {}^7C_4 \times {}^7C_3$ **(B)** ${}^3C_2 + {}^7C_4 + {}^7C_3$

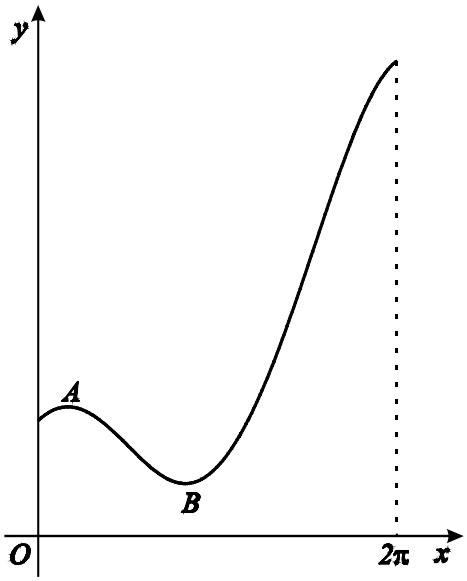
(C) ${}^3C_2 \times {}^7C_4 \times {}^7C_3$ **(D)** ${}^3C_2 \times {}^7C_4 + {}^7C_3$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Na figura está representado o gráfico da função f, de domínio $[0, 2\pi]$, definida por $f(x) = x + 2\cos x$



A e B são pontos do gráfico cujas ordenadas são extremos relativos de f

Sem recorrer à calculadora, resolva as três alíneas seguintes.

1.1. Mostre que a ordenada do ponto A é $\frac{\pi + 6\sqrt{3}}{6}$ e que a do ponto B é $\frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{6}$

1.2. Qual é o contradomínio de f ?

1.3. Considere agora a função g, extensão de f, definida, em $\mathbb{R}$, por $g(x) = x + 2\cos x$

Seja S a região do plano xOy compreendida entre as rectas de equações $y = x - 2$ e $y = x + 2$ (incluindo a fronteira).

Mostre que o gráfico de g está contido em S.

2. Considere que a altura A (em metros) de uma criança do sexo masculino pode ser expressa, aproximadamente, em função do seu peso p (em quilogramas), por

$$A(p) = -0{,}52 + 0{,}55 \ln(p) \qquad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

Recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora para efectuar cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes.

2.1. O Ricardo tem $1{,}4\ m$ de altura. Admitindo que a altura e o peso do Ricardo estão de acordo com a igualdade referida, qual será o seu peso?
Apresente o resultado em quilogramas, arredondado às unidades.
Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

2.2. Verifique que, para qualquer valor de p, a diferença $A(2p) - A(p)$ é constante. Determine um valor aproximado dessa constante (com duas casas decimais) e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

3. Três casais, os Nunes, os Martins e os Santos, vão ao cinema.

3.1. Ficou decidido que uma mulher, escolhida ao acaso de entre as três mulheres, paga três bilhetes, e que um homem, escolhido igualmente ao acaso de entre os três homens, paga outros três bilhetes.
Qual é a probabilidade de o casal Nunes pagar os seis bilhetes? Apresente o resultado na forma de fracção.

3.2. Depois de terem comprado os bilhetes, todos para a mesma fila e em lugares consecutivos, as seis pessoas distribuem-nos ao acaso entre si. Supondo que cada pessoa se senta no lugar correspondente ao bilhete que lhe saiu, qual é a probabilidade de os membros de cada casal ficarem juntos, com o casal Martins no meio? Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

4. Na figura está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular.

A base da pirâmide está contida no plano de equação $z = 4$.

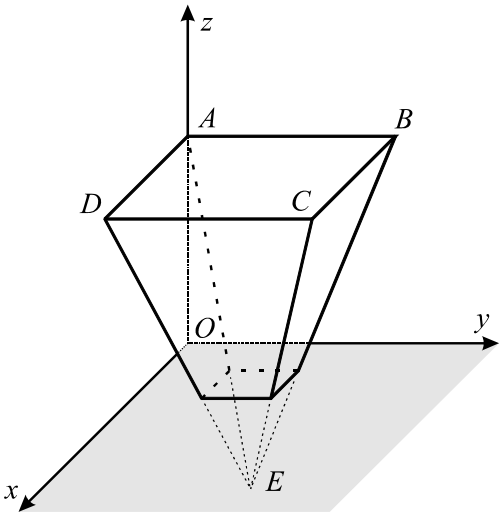
O vértice A pertence ao eixo Oz.

O vértice B pertence ao plano yOz.

O vértice D pertence ao plano xOz.

O vértice C tem coordenadas $(4, 4, 4)$.

A altura da pirâmide é 6.



4.1. Mostre que uma condição que define a recta DE é $x - 4 = -y = \frac{z-4}{3}$

4.2. Determine uma equação do plano que contém o ponto B e é perpendicular à recta DE.

4.3. Determine a área da secção produzida na pirâmide pelo plano xOy.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **81**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **119**

1. 37
1.1. 13
1.2. 12
1.3. 12

2. 24
2.1. 12
2.2. 12

3. 22
3.1. 10
3.2. 12

4. 36
4.1. 12
4.2. 12
4.3. 12

TOTAL **200**

PROVA 435/11 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos
2001

1.ª FASE
2.ª CHAMADA
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de dez.

Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} 1 + e^x & se\ x < 0 \\ 2 & se\ x = 0 \\ 3\,x + 2 & se\ x > 0 \end{cases}$$

Relativamente à continuidade da função h, no ponto 0, qual das afirmações seguintes é verdadeira?

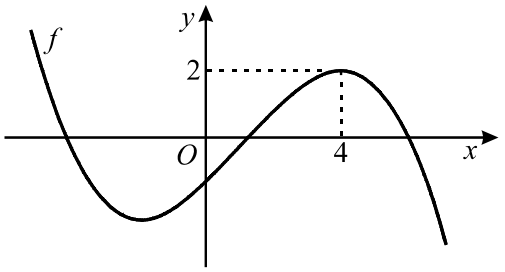
(A) É contínua
(B) É contínua à esquerda e descontínua à direita
(C) É contínua à direita e descontínua à esquerda
(D) É descontínua à esquerda e à direita

2. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f, polinomial do terceiro grau.

2 é um máximo relativo da função f.

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) - 2$

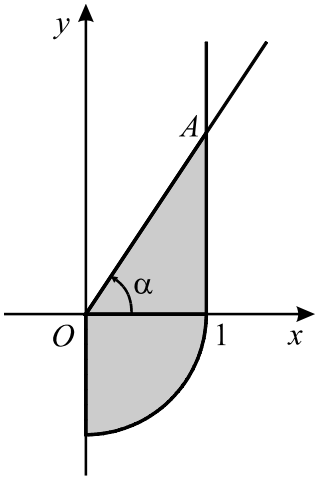
Quantos são os zeros da função g?



(A) um **(B)** dois **(C)** três **(D)** quatro

3. Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy :

- um quarto de círculo, de centro na origem e raio 1
- uma semi-recta paralela ao eixo Oy, com origem no ponto $(1, 0)$
- um ponto A pertencente a esta semi-recta
- um ângulo de amplitude α, cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semi-recta $\dot{O}A$



Qual das expressões seguintes dá a área da região sombreada, em função de α ?

(A) $\frac{\pi}{4} + \frac{\text{tg } \alpha}{2}$ **(B)** $\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\text{tg } \alpha}$

(C) $\pi + \frac{\text{tg } \alpha}{2}$ **(D)** $\pi + \frac{2}{\text{tg } \alpha}$

4. Considere as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por

$$f(x) = 2^x \qquad \text{e} \qquad g(x) = 3^x$$

Qual é o conjunto solução da inequação $f(x) > g(x)$?

(A) Conjunto vazio **(B)** $\mathbb{R}^-$ **(C)** $\mathbb{R}^+$ **(D)** $\mathbb{R}$

5. Num curso superior existem dez disciplinas de índole literária, das quais três são de literatura contemporânea.

Um estudante pretende inscrever-se em seis disciplinas desse curso.

Quantas escolhas pode ele fazer se tiver de se inscrever em, pelo menos, duas disciplinas de literatura contemporânea?

(A) ${}^3C_2 + {}^7C_4 \times {}^7C_3$ **(B)** ${}^3C_2 + {}^7C_4 + {}^7C_3$

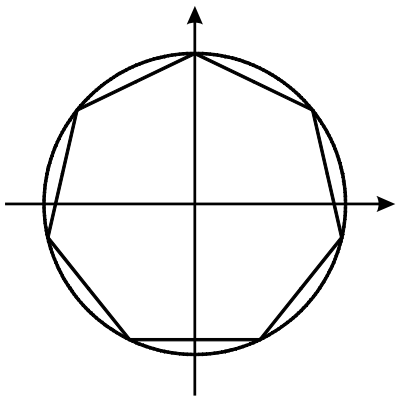
(C) ${}^3C_2 \times {}^7C_4 \times {}^7C_3$ **(D)** ${}^3C_2 \times {}^7C_4 + {}^7C_3$

6. Seja E o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$).
Tem-se que:
$P(A \cap B) = 10\%$
$P(A) = 60\%$
$P(A \cup B) = 80\%$

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$?

(A) $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

7. Na figura está representado, no plano complexo, um heptágono regular inscrito numa circunferência de centro na origem e raio 1. Um dos vértices do heptágono pertence ao eixo imaginário.



Os vértices do heptágono são, para um certo número natural n, as imagens geométricas das raízes de índice n de um número complexo z.

Qual é o valor de z ?

(A) $1+i$ **(B)** $1-i$ **(C)** i **(D)** $-i$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja

$z_1 = 4\,i$ (i designa a unidade imaginária).

1.1. No plano complexo, a imagem geométrica de z_1 é um dos quatro vértices de um losango de perímetro 20, centrado na origem do referencial. Determine os números complexos cujas imagens geométricas são os restantes vértices do losango.

1.2. Sem recorrer à calculadora, resolva a equação $\left(\sqrt{2}\,cis\,\frac{\pi}{4}\right)^2 . z = 2 + z_1$

Apresente o resultado na forma algébrica.

2. Considere que a altura A (em metros) de uma criança do sexo masculino pode ser expressa, aproximadamente, em função do seu peso p (em quilogramas), por

$A(p) = -0{,}52 + 0{,}55 \ln(p)$ ($\ln$ designa logaritmo de base e)

Recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora para efectuar cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes.

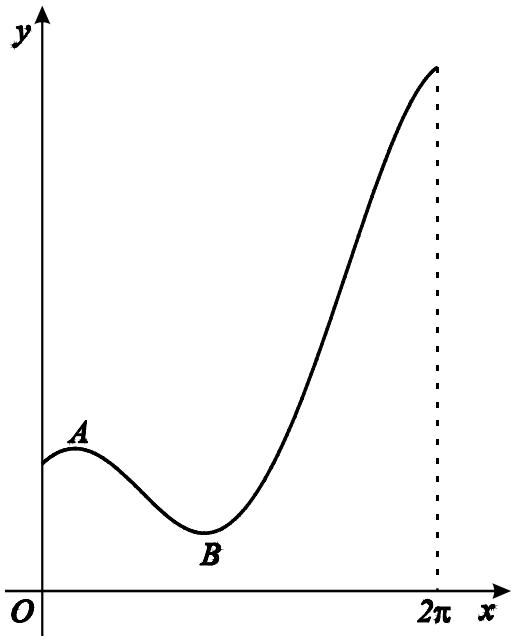
2.1. O Ricardo tem $1{,}4$ m de altura. Admitindo que a altura e o peso do Ricardo estão de acordo com a igualdade referida, qual será o seu peso?

Apresente o resultado em quilogramas, arredondado às unidades.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

2.2. Verifique que, para qualquer valor de p, a diferença $A(2p) - A(p)$ é constante. Determine um valor aproximado dessa constante (com duas casas decimais) e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

3. Na figura está representado o gráfico da função f, de domínio $[0, 2\pi]$, definida por $f(x) = x + 2\cos x$



A e B são pontos do gráfico cujas ordenadas são extremos relativos de f

3.1. Sem recorrer à calculadora, resolva as duas alíneas seguintes.

3.1.1. Mostre que a ordenada do ponto A é $\frac{\pi + 6\sqrt{3}}{6}$ e que a do ponto B é $\frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{6}$

3.1.2. Qual é o contradomínio de f ?

3.2. Considere a recta tangente ao gráfico de f no ponto A.
Esta recta intersecta o gráfico num outro ponto C.
Recorrendo à calculadora, determine um valor aproximado para a abcissa do ponto C (apresente o resultado arredondado às décimas).
Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).

4. De uma função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que a bissectriz dos quadrantes ímpares é uma assimptota do seu gráfico.

Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

Prove que o eixo Ox é uma assimptota do gráfico de h.

5. Três casais, os Nunes, os Martins e os Santos, vão ao cinema.

5.1. Ficou decidido que uma mulher, escolhida ao acaso de entre as três mulheres, paga três bilhetes, e que um homem, escolhido igualmente ao acaso de entre os três homens, paga outros três bilhetes.

Qual é a probabilidade de o casal Nunes pagar os seis bilhetes? Apresente o resultado na forma de fracção.

5.2. Considere o seguinte problema:

Depois de terem comprado os bilhetes, todos para a mesma fila e em lugares consecutivos, as seis pessoas distribuem-nos ao acaso entre si. Supondo que cada pessoa se senta no lugar correspondente ao bilhete que lhe saiu, qual é a probabilidade de os membros de cada casal ficarem juntos, com o casal Martins no meio?

Numa pequena composição, com cerca de quinze linhas, explique por que razão $\frac{2^4}{6!}$ é uma resposta correcta a este problema.

Deve organizar a sua composição de acordo com os seguintes tópicos:

- referência à Regra de Laplace;
- explicação do número de casos possíveis;
- explicação do número de casos favoráveis.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 10
1.2. 11

2. 28
2.1. 14
2.2. 14

3. 41
3.1. 28
3.1.1. 14
3.1.2. 14
3.2. 13

4. 15

5. 32
5.1. 14
5.2. 18

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Círculo: $\pi\ r^2 \qquad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - raio\ da\ base;\ g - geratriz)$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - raio)$

Volumes

Prisma: *Área da base* × *Altura*

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3 \qquad (r - raio)$

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\,.\cos b + \text{sen}\,b\,.\cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\,.\cos b - \text{sen}\,a\,.\,\text{sen}\,b$

$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a\,.\,\text{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho\, cis\,\theta)\,.\,(\rho'\, cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta+\theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\,\theta)^n\ = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta}\ = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\,u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\,\text{sen}\,u$

$(\text{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos — **1.ª FASE**
2001 — **2.ª CHAMADA**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada ..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 10
1.2. 11

2. 28
2.1. 14
2.2. 14

3. 41
3.1. 28
3.1.1. 14
3.1.2. 14
3.2. 13

4. 15

5. 32
5.1. 14
5.2. 18

TOTAL **200**

V.S.F.F.

435/C/1

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Versão 1	A	B	A	B	D	C	D
Versão 2	D	C	D	C	B	B	A

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, no primeiro grupo, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas **Resp. certas**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

Grupo II

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Critérios específicos

1.1. 10

Indicar o complexo $-4i$ 2

Lado do losango $= 5$ 2

Aplicar o Teorema de Pitágoras 2

Indicar o complexo 3 2

Indicar o complexo -3 2

1.2. 11

$\left(\sqrt{2}\,cis\,\frac{\pi}{4}\right)^2 = 2i$ 6

$\left(\sqrt{2}\,cis\,\frac{\pi}{4}\right)^2 =$

$= (1+i)^2$ 3

$= 2i$ 3

ou

$\left(\sqrt{2}\,cis\,\frac{\pi}{4}\right)^2 =$

$= 2\,cis\,\frac{\pi}{2}$ 3

$= 2i$ 3

$z = \frac{2+4i}{2i}$ 1

$z = 2 - i$ 4

2.1. 14

Equacionar o problema $(1{,}4 = -0{,}52 + 0{,}55\ln(p))$ 5

$\ln(p) \approx 3{,}49$ 2

$p \approx e^{3{,}49}$ 5

$p \approx 33$ **(ver nota)** 2

Nota:

Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às unidades, ou se o arredondamento estiver incorrecto, deverá ser penalizado em 1 ponto.

V.S.F.F.

435/C/3

2.2. ..... **14**

$A(2p) = -0,52 + 0,55 \ln(2p)$ 2

$A(2p) - A(p) = 0,55 \ln 2$ 5

$A(2p) - A(p) \approx 0,38$ **(ver nota 1)** 2

Interpretação **(ver nota 2)** 5

Notas:

1. Se o examinando não apresentar o resultado com duas casas decimais, deverá ser penalizado em 1 ponto.

2. Apresentam-se a seguir duas interpretações possíveis:

   «Se o peso de um rapaz é o dobro do peso de outro, a diferença entre as suas alturas é, aproximadamente, $38\,cm$.»

   «Se o peso de um rapaz duplica, a sua altura aumenta, aproximadamente, $38\,cm$.»

3.1.1. ..... **14**

$f'(x) = 1 - 2\operatorname{sen} x$ 3

$1 - 2\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$ 3

Referir que $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ é a ordenada de A 1

Referir que $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ é a ordenada de B 1

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{6}$ 3

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + 2\cos\frac{\pi}{6}$ 1

$= \frac{\pi}{6} + 2\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ 1

$= \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{6}$ 1

$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{6}$ 3

$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6} + 2\cos\frac{5\pi}{6}$ 1

$= \frac{5\pi}{6} - 2\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ 1

$= \frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{6}$ 1

3.1.2. ..... **14**

$f(2\pi) = 2\pi + 2$ 5

Indicação do contradomínio $\left(\left[\frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{6} , 2\pi + 2 \right] \right)$ 9

3.2. ..... **13**

Equacionar o problema ($f(x) = \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{6}$ ou equivalente) 3

Explicação do método utilizado para resolver graficamente a equação **(ver nota 1)**..... 6

Indicação do valor aproximado da abcissa do ponto C **(ver nota 2)**..... 4

Notas:

1. A explicação do método utilizado deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

   O examinando apresenta o gráfico da função f e a recta de equação $y = \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{6}$ e assinala correctamente o ponto C (ou apresenta o gráfico da função definida por $f(x) - \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{6}$ e assinala correctamente o seu segundo zero)..... 6

   O examinando não apresenta qualquer gráfico, mas refere a utilização de ferramentas da calculadora (por exemplo: *Intersect*, *Zoom*, *Trace*, ...) ou de algo que evidencie a procura do referido ponto de intersecção (ou do referido zero) 3

   O examinando não apresenta qualquer gráfico nem qualquer explicação, ou limita-se a apresentar uma referência do tipo «Vi na calculadora»..... 0

2. A escrita da abcissa do ponto de intersecção deve ser cotada, independentemente de o examinando ter, ou não, explicado o método utilizado, de acordo com o seguinte critério:

1.º Caso (apresentação do resultado arredondado às décimas, de acordo com o enunciado):

Resposta $3{,}8$ 4

Resposta $3{,}7$ ou $3{,}9$ 3

Resposta $3{,}6$ ou $4{,}0$ 2

Outros resultados 0

2.º Caso (apresentação do resultado com aproximação superior às décimas):

Valor no intervalo $[3{,}80\ ;\ 3{,}84]$ 3

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[3{,}74\ ;\ 3{,}90]$ 2

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[3{,}65\ ;\ 3{,}99]$ 1

Outros resultados 0

3.º Caso (apresentação do resultado arredondado às unidades):

Valor igual a 4 2

Outros resultados 0

4. ..... **15**

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x^2} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{g(x)}{x} \times \frac{1}{x} \right)$ 6

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{g(x)}{x} \right) \times \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} \right)$ 2

$= 1 \times 0$ ..... 5 (3+2)

Concluir que o eixo Ox é assimptota do gráfico de f 2

5.1. ..... **14**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Escrita da expressão $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ 13

Resultado final 1

2.º Processo

Número de casos possíveis $= 3^2$
Número de casos favoráveis $= 1$
Probabilidade pedida $= \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

Neste segundo processo, as cotações devem ser atribuídas de acordo com o seguinte critério:

Escrita da fracção $\frac{1}{3^2}$ **(ver notas 1, 2, 3 e 4)** 13

Resultado final 1

Notas:

1. O examinando pode começar por indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis e só depois escrever a fracção.
   No entanto, se não o fizer, isto é, se escrever directamente a fracção, não deverá ser penalizado.

2. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da fracção, com a respectiva cotação a atribuir.

$\frac{1}{3^2}$ (fracção correcta)..... 13

Outras fracções com denominador 3^2 4

3. Se o examinando indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído à sua resposta menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

4. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos possíveis ou apenas o número de casos favoráveis, deverão ser atribuídos 3 pontos à sua resposta.

5.2. 18

Apresenta-se a seguir um exemplo de resposta:

De acordo com a Regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis à realização desse acontecimento e o número de casos possíveis, se estes forem todos equiprováveis.
O número de casos possíveis é $6!$ *(número de maneiras de seis pessoas permutarem).*
O número de casos favoráveis é 2^4*. De facto, ficando o casal Martins no meio, ou os Nunes se sentam à direita dos Martins, e os Santos à esquerda, ou vice-versa. Para cada uma destas duas maneiras de os três casais se sentarem, existem* $2 \times 2 \times 2$ *maneiras de as seis pessoas ocuparem os seus lugares (para cada casal, há duas maneiras de as duas pessoas se sentarem).*
A probabilidade pedida é, portanto, $\frac{2^4}{6!}$.

Tal como o exemplo ilustra, para que a composição possa ser considerada completa, deverá contemplar os seguintes pontos:

Regra de Laplace

1. referência ao facto de que a probabilidade de um acontecimento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis à realização desse acontecimento e o número de casos possíveis;
2. referência à necessidade de equiprobabilidade dos casos possíveis.

Casos possíveis

3. explicação do número de casos possíveis.

Casos favoráveis

4. explicação de que, ficando o casal Martins no meio, ou os Nunes se sentam à direita dos Martins, e os Santos à esquerda, ou vice-versa;
5. explicação de que, para cada casal, há duas maneiras de as duas pessoas se sentarem.

Na tabela seguinte, indica-se como esta alínea deve ser cotada.

Forma **Conteúdo**	Nível 1 (*)	Nível 2 (**)	Nível 3 (***)
A composição contempla os cinco pontos.	18	16	14
A composição contempla quatro pontos.	14	12	10
A composição contempla três pontos.	10	8	6
A composição contempla dois pontos.	6	5	4
A composição contempla um ponto.	2	1	0

(*) **Nível 1** - Redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).

(**) **Nível 2** - Redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecte a inteligibilidade.

(***) **Nível 3** - Redacção confusa, sem estruturação aparente, presença de erros graves, com perturbação frequente da inteligibilidade.

Pode acontecer que uma composição não se enquadre completamente num dos três níveis descritos e/ou contenha características presentes em mais do que um deles. Nesse caso, deverá ser atribuída uma pontuação intermédia, desde que respeite a indicação, dada nos critérios gerais, de que a cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

V.S.F.F.

435/C/9

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Alunos Externos e Autopropostos — alunos que obtiveram aprovação no ano de 1999/2000 no programa «antigo» do 12.º ano

Duração da prova: 120 minutos — **1.ª FASE**
2001 — **2.ª CHAMADA**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I **81**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada ..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **119**

1. 37
1.1. 13
1.2. 12
1.3. 12

2. 24
2.1. 12
2.2. 12

3. 22
3.1. 10
3.2. 12

4. 36
4.1. 12
4.2. 12
4.3. 12

TOTAL **200**

V.S.F.F.

135/C/1

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Versão 1	A	B	A	B	C	C	C	D	D
Versão 2	D	C	D	C	C	B	D	B	A

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, no primeiro grupo, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas / Resp. certas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3	0	0		
3	27	24	21	18	15	12	9			
4	36	33	30	27	24	21				
5	45	42	39	36	33					
6	54	51	48	45						
7	63	60	57							
8	72	69								
9	81									

Grupo II

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Critérios específicos

1.1. 13

$f'(x) = 1 - 2\operatorname{sen} x$ 2

$1 - 2\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$ 3

Referir que $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ é a ordenada de A 1

Referir que $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ é a ordenada de B 1

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{6}$ 3

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) =$

$= \frac{\pi}{6} + 2\cos\frac{\pi}{6}$ 1

$= \frac{\pi}{6} + 2\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ 1

$= \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{6}$ 1

$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{6}$ 3

$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) =$

$= \frac{5\pi}{6} + 2\cos\frac{5\pi}{6}$ 1

$= \frac{5\pi}{6} - 2\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ 1

$= \frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{6}$ 1

1.2. 12

$f(2\pi) = 2\pi + 2$ 4

Indicação do contradomínio $\left(\left[\frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{6}\,,\ 2\pi + 2\right]\right)$ 8

V.S.F.F.

1.3. ..... **12**

$-1 \leq \cos x \leq 1$ 4

$-2 \leq 2\cos x \leq 2$ 4

$x-2 \leq x+2\cos x \leq x+2$ 4

2.1. ..... **12**

Equacionar o problema $(1{,}4 = -0{,}52 + 0{,}55 \ln(p))$ 4

$\ln(p) \approx 3{,}49$ 2

$p \approx e^{3{,}49}$ 4

$p \approx 33$ **(ver nota)** 2

Nota:

Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às unidades, ou se o arredondamento estiver incorrecto, deverá ser penalizado em 1 ponto.

2.2. ..... **12**

$A(2p) = -0{,}52 + 0{,}55 \ln(2p)$ 2

$A(2p) - A(p) = 0{,}55 \ln 2$ 4

$A(2p) - A(p) \approx 0{,}38$ **(ver nota 1)** 2

Interpretação **(ver nota 2)** 4

Notas:

1. Se o examinando não apresentar o resultado com duas casas decimais, deverá ser penalizado em 1 ponto.

2. Apresentam-se a seguir duas interpretações possíveis:

   «Se o peso de um rapaz é o dobro do peso de outro, a diferença entre as suas alturas é, aproximadamente, $38\,cm$.»

   «Se o peso de um rapaz duplica, a sua altura aumenta, aproximadamente, $38\,cm$.»

3.1. ..... **10**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Escrita da expressão $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ 9

Resultado final 1

2.º Processo

Número de casos possíveis $= 3^2$
Número de casos favoráveis $= 1$
Probabilidade pedida $= \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

Neste segundo processo, as cotações devem ser atribuídas de acordo com o seguinte critério:

Escrita da fracção $\frac{1}{3^2}$ **(ver notas 1, 2, 3 e 4)** 9
Resultado final **1**

Notas:

1. O examinando pode começar por indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis e só depois escrever a fracção.
   No entanto, se não o fizer, isto é, se escrever directamente a fracção, não deverá ser penalizado.

2. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da fracção, com a respectiva cotação a atribuir.

   $\frac{1}{3^2}$ (fracção correcta)..... 9

   Outras fracções com denominador 3^2 3

3. Se o examinando indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído à sua resposta menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

4. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos possíveis ou apenas o número de casos favoráveis, deverão ser atribuídos 2 pontos à sua resposta.

3.2. ..... **12**

Número de casos possíveis $= 6!$
Número de casos favoráveis $= 2^4$
Probabilidade pedida $\approx 2\,\%$

As cotações devem ser atribuídas de acordo com o seguinte critério:

Escrita da fracção $\frac{2^4}{6!}$ **(ver notas 1, 2, 3, 4 e 5)** 10

Resultado final **(ver nota 6)**..... 2

Notas:

1. O examinando pode começar por indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis e só depois escrever a fracção.
   No entanto, se não o fizer, isto é, se escrever directamente a fracção, não deverá ser penalizado.

2. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da fracção, com a respectiva cotação a atribuir.

   $\frac{2^4}{6!}$ (fracção correcta)..... 10

   $\frac{2^3}{6!}$ 6

   $\frac{2}{6!}$ 5

   Outras fracções com denominador $6!$ 4

3. Se o examinando indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído à sua resposta menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

4. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos possíveis, deverão ser atribuídos 3 pontos à sua resposta.

5. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos favoráveis, deverão ser atribuídos 6 pontos à sua resposta.

6. Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às unidades, deverá ser penalizado em 1 ponto.

4.1. 12

$D = (4, 0, 4)$ 2

$E = (2, 2, -2)$ 4

Conclusão 6

4.2. 12

$B = (0, 4, 4)$ 2

Escrever $2x - 2(y - 4) + 6(z - 4) = 0$

ou $x - (y - 4) + 3(z - 4) = 0$ 10

ou

$B = (0, 4, 4)$ 2

Escrever $2x - 2y + 6z + d = 0$ ou $x - y + 3z + d = 0$ 5

Substituir x por 0, y por 4 e z por 4 4

Determinar o valor de d 1

4.3. 12

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º Processo

Área da base da pirâmide $= 16$ 1

Referir que a parte da pirâmide situada no 5º octante é uma nova pirâmide, semelhante à dada e cuja altura é $1/3$ da altura da primeira 4

Concluir que a área da base da nova pirâmide é $1/9$ da área da base da pirâmide inicial 6

Área pedida $= \frac{16}{9}$ 1

2.º Processo

Comprimento de metade da aresta da base da pirâmide $= 2$ 1

Estabelecer a proporção $\frac{6}{2} = \frac{2}{x}$ 7

Concluir que metade do lado da secção é $2/3$ 2

Concluir que o lado da secção é $4/3$ 1

Área pedida $= \frac{16}{9}$ 1

3.º Processo

Determinar as coordenadas do ponto de intersecção da recta DE com o plano xOy 4

Concluir que o lado da secção é $4/3$ (ou que a diagonal é $4\sqrt{2}/3$) 7

Área pedida $= \frac{16}{9}$ 1

PROVA 135/9 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa «antigo»

Duração da prova: 120 minutos **2.ª FASE**

2001

VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui nove questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui quatro questões de resposta aberta, subdivididas em alíneas, num total de dez.

Grupo I

- As nove questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Para um certo valor de k, é contínua em $\mathbb{R}$ a função f definida por

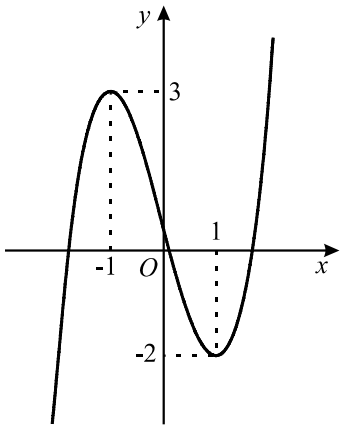
$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \leq 0 \\ \ln(x + k) & se \quad x > 0 \end{cases}$$

($\ln$ designa logaritmo de base e)

Qual é o valor de k ?

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** 2

2. Na figura está parte da representação gráfica de uma função g, polinomial do terceiro grau.



A função g admite máximo relativo igual a 3 para $x = -1$ e admite mínimo relativo igual a -2 para $x = 1$.

Qual é o conjunto dos valores de b para os quais a equação $g(x) = b$ tem três soluções distintas?

(A) $]-\infty, 3[$ **(B)** $]-2, +\infty[$ **(C)** $[-2, 3]$ **(D)** $]-2, 3[$

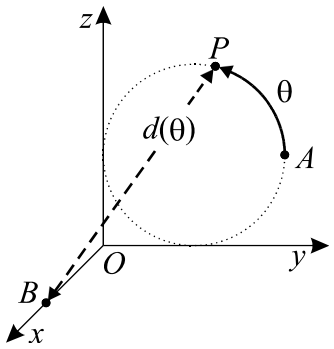
3. Seja f uma função tal que a sua derivada, no ponto 3, é igual a 4.

Indique o valor de $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x^2 - 9}$

(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{3}{2}$ **(C)** 4 **(D)** 0

4. Na figura estão representados, em referencial o.n. $Oxyz$:

- uma circunferência de raio 1, centrada no ponto $(0, 1, 1)$ e contida no plano yOz
- o ponto $A(0, 2, 1)$
- o ponto B, pertencente ao semieixo positivo Ox

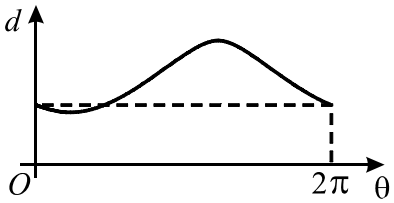


Considere que um ponto P, partindo de A, se desloca sobre essa circunferência, dando uma volta completa, no sentido indicado na figura.

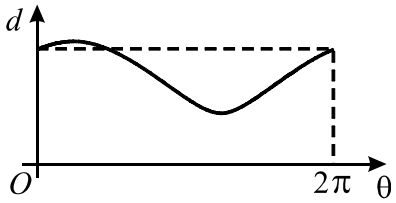
Para cada posição do ponto P, seja θ a amplitude, em radianos, do arco AP ($\theta \in [0, 2\pi]$) e seja $\boldsymbol{d(\theta)}$ **a distância de** $\boldsymbol{P}$ **ao ponto** $\boldsymbol{B}$.

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função d ?

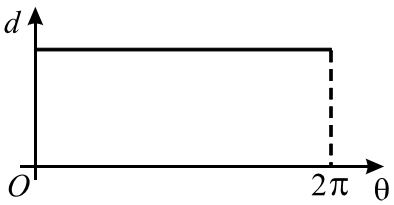
(A)



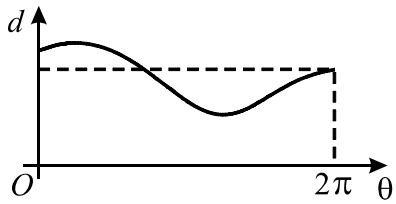
(B)



(C)



(D)



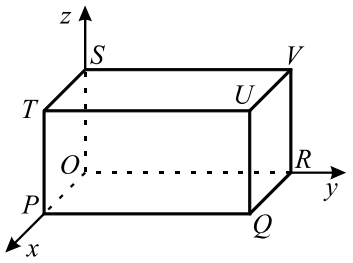
5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, um plano α, de equação $x + 2y - z = 2$.
Seja β o plano que é paralelo a α e que contém o ponto $(0, 1, 2)$.

Qual das condições seguintes é uma equação do plano β?

(A) $x + 2y - z = 1$ **(B)** $x + z = 2$

(C) $-x - 2y + z = 0$ **(D)** $x - y + z = 1$

6. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um paralelepípedo rectângulo.

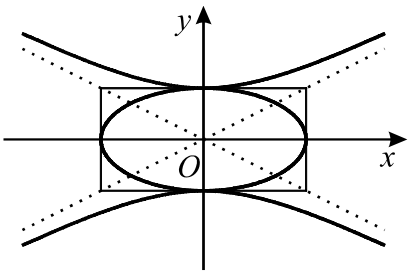


O vértice O é a origem do referencial.
O vértice P pertence ao eixo Ox.
O vértice R pertence ao eixo Oy.
O vértice S pertence ao eixo Oz.
O vértice U tem coordenadas $(2, 4, 2)$.

Seja r a recta de equação $(x, y, z) = (2, 0, 2) + k\,(0, 0, 1)$, $k \in \mathbb{R}$
Qual é o ponto de intersecção da recta r com o plano OUV?

(A) O ponto P **(B)** O ponto T **(C)** O ponto U **(D)** O ponto V

7. Na figura estão representadas, em referencial o.n. xOy, uma elipse, inscrita num rectângulo, e parte de uma hipérbole.



As assimptotas da hipérbole, representadas a tracejado, contêm as diagonais do rectângulo.

Os vértices da hipérbole coincidem com dois dos vértices da elipse.

Uma equação da elipse é $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

Qual das condições seguintes é uma equação da hipérbole?

(A) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ **(B)** $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$

(C) $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ **(D)** $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

8. Num certo país existem três empresas operadoras de telecomunicações móveis: A, B e C.
Independentemente do operador, os números de telemóvel têm nove algarismos.
Os números do operador A começam por **51**, os do B por **52** e os do C por **53**.

Quantos números de telemóvel constituídos **só por algarismos ímpares** podem ser atribuídos nesse país?

(A) $139\,630$ **(B)** $143\,620$ **(C)** $156\,250$ **(D)** $165\,340$

9. Considere:
- uma caixa com nove bolas, indistinguíveis ao tacto, numeradas de 1 a 9;
- um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

Lança-se o dado e tira-se, ao acaso, uma bola da caixa.

Qual é a probabilidade de os números saídos serem **ambos menores que** 4?

(A) $\frac{1}{9}$ **(B)** $\frac{1}{6}$ **(C)** $\frac{5}{27}$ **(D)** $\frac{5}{54}$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Um petroleiro, que navegava no oceano Atlântico, encalhou numa rocha e sofreu um rombo no casco. Em consequência disso, começou a derramar crude. Admita que, às t horas do dia a seguir ao do acidente, a área, em km^2, de crude espalhado sobre o oceano é dada por

$$A(t) = 16\, e^{0,1\,t} \quad , \quad t \in [0, 24]$$

1.1. Verifique que, para qualquer valor de t, $\frac{A(t+1)}{A(t)}$ é constante.
Determine um valor aproximado dessa constante (arredondado às décimas) e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

1.2. Admita que a mancha de crude é circular, com centro no local onde o petroleiro encalhou. Sabendo que esse local se encontra a sete quilómetros da costa, determine a que horas, do dia a seguir ao do acidente, a mancha de crude atingirá a costa.
Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

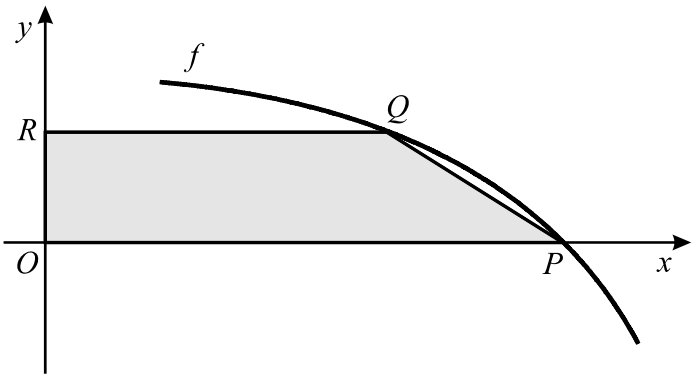
2. Considere a função f, de domínio $]-\pi, \pi[$, definida por $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \cos x}$

Sem recorrer à calculadora, resolva as três alíneas seguintes.

2.1. Estude a função quanto à existência de assimptotas do seu gráfico.

2.2. Mostre que a função f tem um máximo e determine-o.

2.3. Na figura está representada, em referencial o.n. xOy, uma parte do gráfico da função f.



Na mesma figura está também representado um trapézio $[OPQR]$.
O ponto O é a origem do referencial, e os pontos P e R pertencem aos eixos Ox e Oy, respectivamente.
Os pontos P e Q pertencem ao gráfico de f.

Sabendo que o ponto R tem ordenada $\frac{1}{3}$, determine a área do trapézio.

3. Uma turma do 12.º ano é constituída por vinte e cinco alunos (quinze raparigas e dez rapazes). Nessa turma, vai ser escolhida uma comissão para organizar uma viagem de finalistas.
A comissão será formada por três pessoas: um **presidente**, um **tesoureiro** e um responsável pelas **relações públicas**.

3.1. Se o delegado de turma tivesse obrigatoriamente de fazer parte da comissão, podendo ocupar qualquer um dos três cargos, quantas comissões distintas poderiam ser formadas?

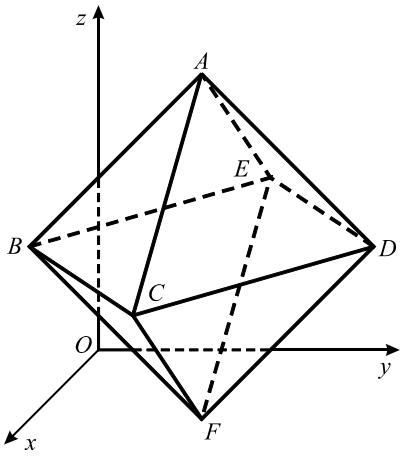
3.2. Admita agora que o delegado de turma pode, ou não, fazer parte da comissão.
Quantas comissões mistas distintas podem ser formadas?

Nota: Entenda-se por comissão mista uma comissão constituída por jovens que não são todos do mesmo sexo.

4. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um octaedro $[ABCDEF]$.

Sabe-se que:

- o vértice B tem coordenadas $(1, 0, 1)$
- o vértice E tem coordenadas $(0, 1, 1)$
- o vértice F pertence ao plano xOy
- o vértice A tem coordenadas $(1, 1, 2)$



4.1. Mostre que a recta definida pela condição $x = y = z$ é perpendicular ao plano ACD.

4.2. Determine uma equação da superfície esférica que contém os seis vértices do octaedro.

4.3. Seja α o plano definido pelo eixo Oz e pelo ponto A.
A secção produzida no octaedro pelo plano α é um quadrilátero.
Caracterize esse quadrilátero e determine o seu perímetro.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **81**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **119**

1. 24
1.1. 12
1.2. 12

2. 37
2.1. 12
2.2. 13
2.3. 12

3. 22
3.1. 11
3.2. 11

4. 36
4.1. 12
4.2. 12
4.3. 12

TOTAL **200**

PROVA 435/11 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos **2.ª FASE**
2001

VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de onze.

Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Para um certo valor de k, é contínua em $\mathbb{R}$ a função f definida por

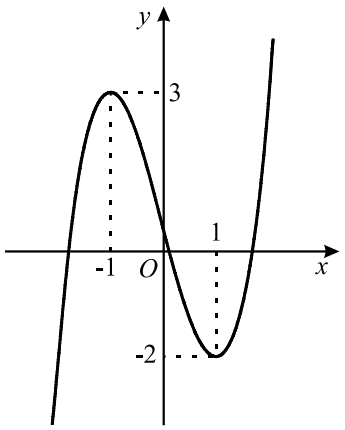
$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \leq 0 \\ \ln(x + k) & se \quad x > 0 \end{cases}$$

($\ln$ designa logaritmo de base e)

Qual é o valor de k ?

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** 2

2. Na figura está parte da representação gráfica de uma função g, polinomial do terceiro grau.



A função g admite máximo relativo igual a 3 para $x = -1$ e admite mínimo relativo igual a -2 para $x = 1$.

Qual é o conjunto dos valores de b para os quais a equação $g(x) = b$ tem três soluções distintas?

(A) $]-\infty, 3[$ **(B)** $]-2, +\infty[$ **(C)** $[-2, 3]$ **(D)** $]-2, 3[$

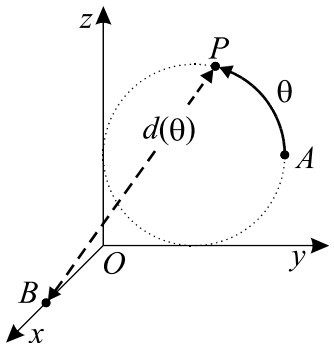
3. Seja f uma função tal que a sua derivada, no ponto 3, é igual a 4.

Indique o valor de $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x^2 - 9}$

(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{3}{2}$ **(C)** 4 **(D)** 0

4. Na figura estão representados, em referencial o.n. $Oxyz$:

- uma circunferência de raio 1, centrada no ponto $(0, 1, 1)$ e contida no plano yOz
- o ponto $A(0, 2, 1)$
- o ponto B, pertencente ao semieixo positivo Ox

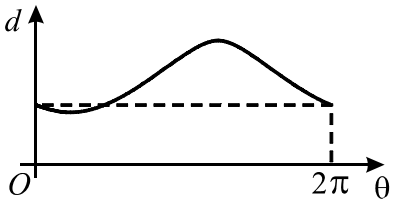


Considere que um ponto P, partindo de A, se desloca sobre essa circunferência, dando uma volta completa, no sentido indicado na figura.

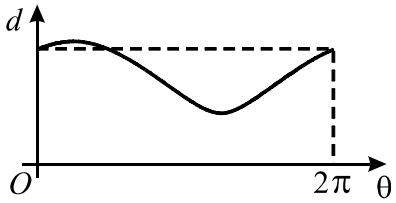
Para cada posição do ponto P, seja θ a amplitude, em radianos, do arco AP ($\theta \in [0, 2\pi]$) e seja $\boldsymbol{d(\theta)}$ **a distância de** $\boldsymbol{P}$ **ao ponto** $\boldsymbol{B}$.

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função d ?

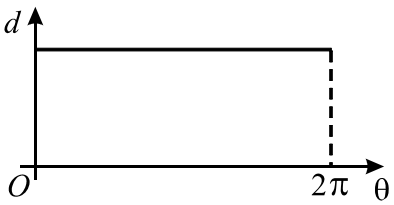
(A)



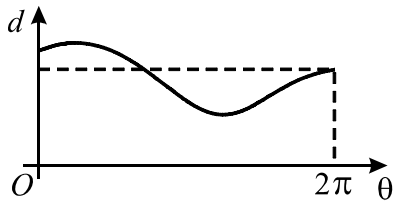
(B)



(C)



(D)



5. Num certo país existem três empresas operadoras de telecomunicações móveis: A, B e C.
Independentemente do operador, os números de telemóvel têm nove algarismos.
Os números do operador A começam por **51**, os do B por **52** e os do C por **53**.

Quantos números de telemóvel constituídos **só por algarismos ímpares** podem ser atribuídos nesse país?

(A) $139\,630$ **(B)** $143\,620$ **(C)** $156\,250$ **(D)** $165\,340$

6. Considere:
- uma caixa com nove bolas, indistinguíveis ao tacto, numeradas de 1 a 9;
- um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

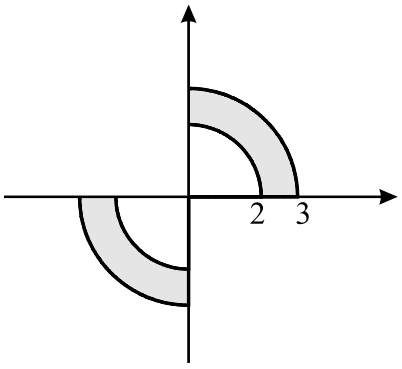
Lança-se o dado e tira-se, ao acaso, uma bola da caixa.

Qual é a probabilidade de os números saídos serem **ambos menores que** 4?

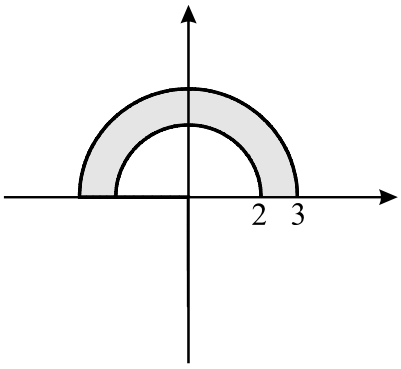
(A) $\frac{1}{9}$ **(B)** $\frac{1}{6}$ **(C)** $\frac{5}{27}$ **(D)** $\frac{5}{54}$

7. Qual das seguintes regiões do plano complexo (indicadas a sombreado) contém as imagens geométricas das **raízes quadradas** de $3 + 4i$?

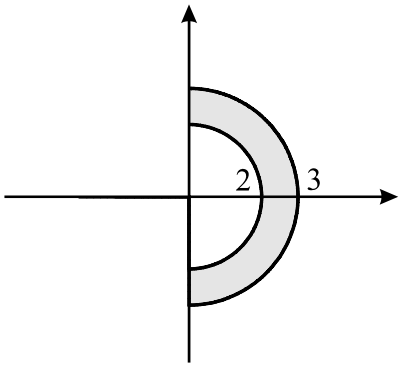
(A)



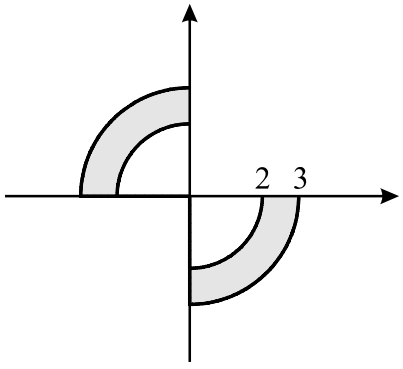
(B)



(C)



(D)



Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$w = 2 + i$ (i designa a unidade imaginária).

1.1. Determine $(w - 2)^{11}\,(1 + 3\,i)^2$ na forma algébrica.

1.2. Averigúe se o inverso de w é, ou não, $\sqrt{2}\ cis\ \frac{3\,\pi}{4}$

2. Um petroleiro, que navegava no oceano Atlântico, encalhou numa rocha e sofreu um rombo no casco. Em consequência disso, começou a derramar crude. Admita que, às t horas do dia a seguir ao do acidente, a área, em km^2, de crude espalhado sobre o oceano é dada por

$$A(t) = 16\ e^{0,1\,t} \quad , \quad t \in [0, 24]$$

2.1. Verifique que, para qualquer valor de t, $\frac{A(t+1)}{A(t)}$ é constante.

Determine um valor aproximado dessa constante (arredondado às décimas) e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

2.2. Admita que a mancha de crude é circular, com centro no local onde o petroleiro encalhou. Sabendo que esse local se encontra a sete quilómetros da costa, determine a que horas, do dia a seguir ao do acidente, a mancha de crude atingirá a costa.

Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

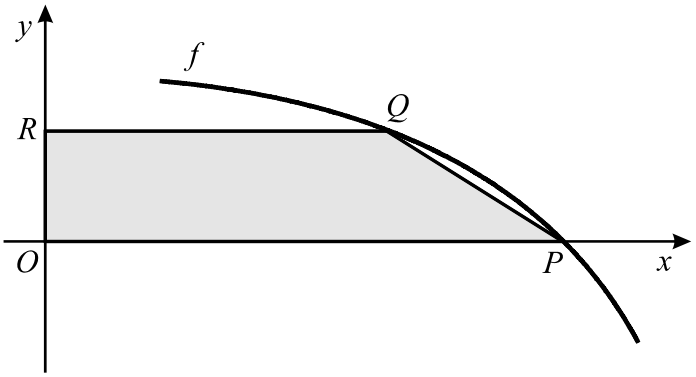
3. Considere a função f, de domínio $]-\pi, \pi[$, definida por $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \cos x}$

Sem recorrer à calculadora, resolva as três alíneas seguintes.

3.1. Estude a função quanto à existência de assimptotas do seu gráfico.

3.2. Mostre que a função f tem um máximo e determine-o.

3.3. Na figura está representada, em referencial o.n. xOy, uma parte do gráfico da função f.



Na mesma figura está também representado um trapézio $[OPQR]$.
O ponto O é a origem do referencial, e os pontos P e R pertencem aos eixos Ox e Oy, respectivamente.
Os pontos P e Q pertencem ao gráfico de f.

Sabendo que o ponto R tem ordenada $\frac{1}{3}$, determine a área do trapézio.

4. De uma função g, contínua em $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- 1 é zero de g;
- $g(3) > 0$.

Prove que a equação $g(x) = \frac{g(3)}{2}$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1, 3[$

5. Uma turma do 12.º ano é constituída por vinte e cinco alunos (quinze raparigas e dez rapazes). Nessa turma, vai ser escolhida uma comissão para organizar uma viagem de finalistas.

A comissão será formada por três pessoas: um **presidente**, um **tesoureiro** e um responsável pelas **relações públicas**.

5.1. Se o delegado de turma tivesse obrigatoriamente de fazer parte da comissão, podendo ocupar qualquer um dos três cargos, quantas comissões distintas poderiam ser formadas?

5.2. Admita agora que o delegado de turma pode, ou não, fazer parte da comissão.

5.2.1. Quantas comissões mistas distintas podem ser formadas?

Nota: Entenda-se por comissão mista uma comissão constituída por jovens que não são todos do mesmo sexo.

5.2.2. Suponha que a escolha dos três elementos vai ser feita por sorteio, da seguinte forma:

Cada aluno escreve o seu nome numa folha de papel. As vinte e cinco folhas são dobradas e introduzidas num saco. Em seguida, retiram-se do saco, sucessivamente, três folhas de papel. O primeiro nome a sair corresponde ao do presidente, o segundo, ao do tesoureiro, e o terceiro, ao do responsável pelas relações públicas.

Sejam A, B e C os acontecimentos:

A: «o presidente é uma rapariga»;

B: «o tesoureiro é uma rapariga»;

C: «a comissão é formada só por raparigas».

Indique o valor da probabilidade condicionada $P\big(C|(A \cap B)\big)$ e, numa pequena composição, com cerca de dez linhas, justifique a sua resposta.

Nota: Não aplique a fórmula da probabilidade condicionada. O valor pedido deverá resultar **exclusivamente** da interpretação de $P\big(C|(A \cap B)\big)$, no contexto do problema.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 10
1.2. 11

2. 28
2.1. 14
2.2. 14

3. 42
3.1. 14
3.2. 14
3.3. 14

4. 14

5. 32
5.1. 10
5.2. 22
5.2.1. 10
5.2.2. 12

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Círculo: $\pi\ r^2 \qquad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - raio\ da\ base;\ g - geratriz)$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - raio)$

Volumes

Prisma: *Área da base* × *Altura*

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3 \qquad (r - raio)$

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\,.\cos b + \text{sen}\,b\,.\cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\,.\cos b - \text{sen}\,a\,.\,\text{sen}\,b$

$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a\,.\,\text{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho\, cis\,\theta)\,.\,(\rho'\, cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta+\theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\,\theta)^n\ = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta}\ = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\,u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\,\text{sen}\,u$

$(\text{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **2.ª FASE**
2001

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada ..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 10
1.2. 11

2. 28
2.1. 14
2.2. 14

3. 42
3.1. 14
3.2. 14
3.3. 14

4. 14

5. 32
5.1. 10
5.2. 22
5.2.1. 10
5.2.2. 12

TOTAL **200**

V.S.F.F.

435/C/1

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Versão 1	C	D	A	B	C	B	A
Versão 2	B	C	D	D	A	B	A

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, no primeiro grupo, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas **Resp. certas**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

Grupo II

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Critérios específicos

1.1. 10

$(w-2)^{11}(1+3i)^2 =$

$= -i(-8+6i)$ ..... 8 (4+4)

$= 6+8i$ 2

1.2. 11

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, seis processos:

1.º Processo

$\frac{1}{2+i} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$ 5

$\sqrt{2}\,cis\,\frac{3\pi}{4} = -1+i$ 4

Conclusão 2

2.º Processo

$\sqrt{2}\,cis\,\frac{3\pi}{4} = -1+i$ 4

$\frac{1}{-1+i} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ 5

Conclusão 2

3.º Processo

$\sqrt{2}\,cis\,\frac{3\pi}{4} = -1+i$ 4

$(-1+i)(2+i) = -3+i$ 5

Conclusão 2

V.S.F.F.

435/C/3

4.º Processo

$|w| = \sqrt{5}$ 3

$\frac{1}{\sqrt{5}} \neq \sqrt{2}$ 6

Conclusão 2

5.º Processo

$\frac{1}{2+i} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$ **(ver nota)** 5

Referir que a imagem geométrica de $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$ pertence ao 4.º quadrante, enquanto a imagem geométrica de $\sqrt{2}\,cis\,\frac{3\pi}{4}$ pertence ao 2.º quadrante 4

Conclusão 2

Nota:
Em vez de determinar o inverso de w, o examinando pode referir que, como a imagem geométrica de w pertence ao 1.º quadrante, a imagem geométrica do inverso de w pertence ao 4.º quadrante.

6.º Processo

$\frac{1}{\sqrt{2}\,cis\,\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,cis\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ **(ver nota)** 5

Referir que a imagem geométrica de $\frac{1}{\sqrt{2}}\,cis\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ pertence ao 3.º quadrante, enquanto a imagem geométrica de w pertence ao 1.º quadrante 4

Conclusão 2

Nota:
Em vez de determinar o inverso de $\sqrt{2}\,cis\,\frac{3\pi}{4}$, o examinando pode referir que, como a imagem geométrica de $\sqrt{2}\,cis\,\frac{3\pi}{4}$ pertence ao 2.º quadrante, a imagem geométrica do seu inverso pertence ao 3.º quadrante.

2.1. ..... **14**

$\frac{A(t+1)}{A(t)} = \frac{16\ e^{0,1\,(t+1)}}{16\ e^{0,1\,t}}$ 3

$\frac{16\ e^{0,1\,(t+1)}}{16\ e^{0,1\,t}} = e^{0,1}$ 4

$e^{0,1} \approx 1,1$ 2

Interpretação («Se a mancha de crude tem uma certa área num dado instante, passada uma hora, essa área vem multiplicada por $1,1$» **ou** «A área de crude espalhado sobre o oceano aumenta à razão de $1,1$ por hora» **ou** «A área de crude espalhado sobre o oceano aumenta 10% por hora») 5

2.2. ..... **14**

Determinar a área do círculo de raio 7 2

Equacionar o problema 2

Resolver a equação analiticamente ou graficamente (recorrendo às capacidades gráficas da calculadora) 7

$16\ e^{0,1\,t} = 49\,\pi$

$\Leftrightarrow\ e^{0,1\,t} = \frac{49\,\pi}{16}$ 1

$\Leftrightarrow\ 0,1\,t = \ln\left(\frac{49\,\pi}{16}\right)$ 4

$\Leftrightarrow\ t = \frac{\ln\left(\frac{49\,\pi}{16}\right)}{0,1}$ 1

$t \approx 22,640$ 1

ou

Explicação do método utilizado para resolver graficamente a equação **(ver nota 1)** 4

$t \approx 22,640$ **(ver nota 2)** 3

Solução pedida (22 horas e 38 minutos) 3

V.S.F.F.
435/C/5

Notas:

1. A explicação do método utilizado deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

   O examinando apresenta o gráfico da função A e a recta de equação $y = 49\pi$ e assinala correctamente o ponto de intersecção, **ou** não apresenta qualquer gráfico, mas refere a utilização de ferramentas da calculadora (por exemplo: *Intersect*, *Zoom*, *Trace*...) que evidenciem a procura do referido ponto 4

   O examinando não apresenta qualquer gráfico nem qualquer explicação, ou limita-se a apresentar uma referência do tipo «Vi na calculadora» 0

2. A solução da equação deve ser cotada, independentemente de o examinando ter, ou não, explicado o método utilizado, de acordo com o seguinte critério:

   Solução pertencente ao intervalo $[22{,}639\,;\ 22{,}640]$ 3

   Solução fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[22{,}635\,;\ 22{,}645]$ 2

   Solução fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[22{,}630\,;\ 22{,}650]$ 1

   Outros resultados 0

3.1. ..... **14**

$\lim\limits_{x \to -\pi^+} f(x) = -\infty$ 4

Concluir que a recta de equação $x = -\pi$ é assimptota vertical do gráfico de f 2

$\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = -\infty$ 4

Concluir que a recta de equação $x = \pi$ é assimptota vertical do gráfico de f 2

Justificar que o gráfico de f não tem outras assimptotas 2

3.2. ..... **14**

$f'(x) = \dfrac{-\operatorname{sen} x\,(1+\cos x) + \operatorname{sen} x \cos x}{(1+\cos x)^2}$ 3

$f'(x) = \dfrac{-\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^2}$ 1

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ 3

Estudar o sinal de f' (que pode ser apresentado através de um quadro) 5

$f(0) = \dfrac{1}{2}$ 2

3.3. ..... **14**

Abcissa de $P = \dfrac{\pi}{2}$ 6

Escrever a equação $f(x) = 0$ 2
Solução positiva da equação 4

Abcissa de $Q = \dfrac{\pi}{3}$ 6

Escrever a equação $f(x) = \dfrac{1}{3}$ 2
Solução positiva da equação 4

Área pedida $= \dfrac{5\pi}{36}$ 2

4. ..... **14**

Referir que $0 < \dfrac{g(3)}{2} < g(3)$ 7

Evocar o Teorema de Bolzano para concluir o pretendido 7

5.1. ..... **10**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Número pedido $= 3 \times {}^{24}A_2$ **(ver nota)** 9

Número pedido $= 1\,656$ 1

V.S.F.F.

435/C/7

2.º Processo

Número pedido $= {}^{24}C_2 \times 3!$ **(ver nota)** 9

Número pedido $= 1\,656$ 1

Nota:

Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita do número pedido, com a respectiva cotação a atribuir.

Número correcto 9

${}^{24}A_2$ 5

${}^{24}C_2$ 3

5.2.1. ..... **10**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º Processo

Número pedido $= {}^{25}A_3 - \left({}^{15}A_3 + {}^{10}A_3\right)$ **(ver nota)** 9

Número pedido $= 10\,350$ 1

2.º Processo

Número pedido $= 3 \times 15 \times {}^{10}A_2 + 3 \times 10 \times {}^{15}A_2$ **(ver nota)** 9

Número pedido $= 10\,350$ 1

3.º Processo

Número pedido $= 15 \times {}^{10}C_2 \times 3! + 10 \times {}^{15}C_2 \times 3!$ **(ver nota)** 9

Número pedido $= 10\,350$ 1

Nota:

Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita do número pedido, com a respectiva cotação a atribuir.

Número correcto 9

$15 \times {}^{10}A_2 + 10 \times {}^{15}A_2$ 6

$15 \times {}^{10}C_2 + 10 \times {}^{15}C_2$ 5

${}^{10}A_2 + {}^{15}A_2$ 3

${}^{10}C_2 + {}^{15}C_2$ 2

${}^{10}A_3 + {}^{15}A_3$ 2

Apresentam-se a seguir dois exemplos de resposta:

Exemplo 1

$P(C \mid (A \cap B))$ *significa «probabilidade de a comissão ser formada só por raparigas, sabendo que, para presidente e para tesoureiro, foram sorteadas duas raparigas».*

Tem-se, assim, que:

O número de casos possíveis é 23 (número de alunos que restam, após o sorteio para os cargos de presidente e tesoureiro).

O número de casos favoráveis é 13 (número de raparigas que restam, após o sorteio para os cargos de presidente e tesoureiro).

A probabilidade pedida é, por aplicação da regra de Laplace, $\frac{13}{23}$.

Exemplo 2

$P(C \mid (A \cap B))$ *significa «probabilidade de a comissão ser formada só por raparigas, sabendo que, para presidente e para tesoureiro, foram sorteadas duas raparigas».*

Tem-se, assim, que:

O número de casos possíveis é $15 \times 14 \times 23$ *(número de sequências* $M_1 M_2 A$*, em que* M_1 *designa uma rapariga, sorteada para presidente,* M_2 *designa uma rapariga, sorteada para tesoureira, e* A *designa um aluno qualquer, sorteado para relações públicas).*

O número de casos favoráveis é $15 \times 14 \times 13$ *(número de sequências* $M_1 M_2 M_3$ *, em que* M_1 *designa uma rapariga, sorteada para presidente,* M_2 *designa uma rapariga, sorteada para tesoureira, e* M_3 *designa uma rapariga qualquer, sorteada para relações públicas).*

A probabilidade pedida é, por aplicação da regra de Laplace, $\frac{15 \times 14 \times 13}{15 \times 14 \times 23} = \frac{13}{23}$

Tal como os exemplos atrás ilustram, para que a composição possa ser considerada completa deverá contemplar os seguintes pontos:

- o significado de $P(C \mid (A \cap B))$, no contexto da situação descrita
- a explicação do número de casos possíveis
- a explicação do número de casos favoráveis
- a conclusão, fundamentada nos três pontos anteriores, de que a probabilidade pedida é $\frac{13}{23}$

Na tabela seguinte, indica-se como esta alínea deve ser cotada.

Forma / **Conteúdo**	Nível 1 (*)	Nível 2 (**)	Nível 3 (***)
A composição contempla os quatro pontos.	12	10	8
A composição contempla três pontos.	9	7	5
A composição contempla dois pontos.	7	5	3
A composição contempla um ponto.	3	2	1

(*) **Nível 1** - Redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).

(**) **Nível 2** - Redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecte a inteligibilidade.

(***) **Nível 3** - Redacção confusa, sem estruturação aparente, presença de erros graves, com perturbação frequente da inteligibilidade.

Pode acontecer que uma composição não se enquadre completamente num dos três níveis descritos e/ou contenha características presentes em mais do que um deles. Nesse caso, deverá ser atribuída uma pontuação intermédia.

Nota:

Se o examinando apresentar o valor da probabilidade pedida $\left(\frac{13}{23}\right)$, sem qualquer justificação, deverá ser atribuído 1 ponto à sua resposta.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Alunos Externos e Autopropostos — alunos que obtiveram aprovação no ano de 1999/2000 no programa «antigo» do 12.º ano

Duração da prova: 120 minutos **2.ª FASE**
2001

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I **81**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **119**

1. 24
1.1. 12
1.2. 12

2. 37
2.1. 12
2.2. 13
2.3. 12

3. 22
3.1. 11
3.2. 11

4. 36
4.1. 12
4.2. 12
4.3. 12

TOTAL **200**

V.S.F.F.

135/C/1

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Versão 1	C	D	A	B	C	A	B	C	B
Versão 2	B	C	D	A	D	D	A	D	B

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, no primeiro grupo, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas / **Resp. certas**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3	0	0		
3	27	24	21	18	15	12	9			
4	36	33	30	27	24	21				
5	45	42	39	36	33					
6	54	51	48	45						
7	63	60	57							
8	72	69								
9	81									

Grupo II

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Critérios específicos

1.1. ..... **12**

$\frac{A(t+1)}{A(t)} = \frac{16\ e^{0,1\,(t+1)}}{16\ e^{0,1\,t}}$ 2

$\frac{16\ e^{0,1\,(t+1)}}{16\ e^{0,1\,t}} = e^{0,1}$ 4

$e^{0,1} \approx 1,1$ 2

Interpretação («Se a mancha de crude tem uma certa área num dado instante, passada uma hora, essa área vem multiplicada por $1,1$» **ou** «A área de crude espalhado sobre o oceano aumenta à razão de $1,1$ por hora» **ou** «A área de crude espalhado sobre o oceano aumenta 10% por hora») 4

1.2. ..... **12**

Determinar a área do círculo de raio 7 2

Equacionar o problema 2

Resolver a equação analiticamente ou graficamente (recorrendo às capacidades gráficas da calculadora) 6

$16\ e^{0,1\,t} = 49\,\pi$

$\Leftrightarrow\ e^{0,1\,t} = \frac{49\,\pi}{16}$ 1

$\Leftrightarrow\ 0,1\,t = \ln\left(\frac{49\,\pi}{16}\right)$ 3

$\Leftrightarrow\ t = \frac{\ln\left(\frac{49\,\pi}{16}\right)}{0,1}$ 1

$t \approx 22,640$ 1

ou

Explicação do método utilizado para resolver graficamente a equação **(ver nota 1)** 3

$t \approx 22,640$ **(ver nota 2)** 3

Solução pedida (22 horas e 38 minutos) 2

V.S.F.F.

135/C/3

Notas:

1. A explicação do método utilizado deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

   O examinando apresenta o gráfico da função A e a recta de equação $y = 49\pi$ e assinala correctamente o ponto de intersecção, **ou** não apresenta qualquer gráfico, mas refere a utilização de ferramentas da calculadora (por exemplo: *Intersect*, *Zoom*, *Trace*...) que evidenciem a procura do referido ponto 3

   O examinando não apresenta qualquer gráfico nem qualquer explicação, ou limita-se a apresentar uma referência do tipo «Vi na calculadora» 0

2. A solução da equação deve ser cotada, independentemente de o examinando ter, ou não, explicado o método utilizado, de acordo com o seguinte critério:

   Solução pertencente ao intervalo $[22{,}639\,;\,22{,}640]$ 3

   Solução fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[22{,}635\,;\,22{,}645]$ 2

   Solução fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[22{,}630\,;\,22{,}650]$ 1

   Outros resultados 0

2.1. ..... **12**

$\lim\limits_{x \to -\pi^+} f(x) = -\infty$ 3

Concluir que a recta de equação $x = -\pi$ é assimptota vertical do gráfico de f 2

$\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = -\infty$ 3

Concluir que a recta de equação $x = \pi$ é assimptota vertical do gráfico de f 2

Justificar que o gráfico de f não tem outras assimptotas 2

2.2. ..... **13**

$f'(x) = \dfrac{-\operatorname{sen} x\,(1+\cos x)+\operatorname{sen} x\cos x}{(1+\cos x)^2}$ 3

$f'(x) = \dfrac{-\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^2}$ 1

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ 2

Estudar o sinal de f' (que pode ser apresentado através de um quadro) 5

$f(0) = \dfrac{1}{2}$ 2

2.3. ..... **12**

Abcissa de $P = \dfrac{\pi}{2}$ 5

Escrever a equação $f(x) = 0$ 2
Solução positiva da equação 3

Abcissa de $Q = \dfrac{\pi}{3}$ 5

Escrever a equação $f(x) = \dfrac{1}{3}$ 2
Solução positiva da equação 3

Área pedida $= \dfrac{5\pi}{36}$ 2

3.1. ..... **11**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Número pedido $= 3 \times {}^{24}A_2$ **(ver nota)** 10

Número pedido $= 1\,656$ 1

2.º Processo

Número pedido $= {}^{24}C_2 \times 3!$ **(ver nota)** 10

Número pedido $= 1\,656$ 1

V.S.F.F.

Nota:

Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita do número pedido, com a respectiva cotação a atribuir.

Número correcto 10

$^{24}A_2$ 6

$^{24}C_2$ 4

3.2. ..... **11**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º Processo

Número pedido $= {}^{25}A_3 - \left({}^{15}A_3 + {}^{10}A_3\right)$ **(ver nota)** 10

Número pedido $= 10\,350$ 1

2.º Processo

Número pedido $= 3 \times 15 \times {}^{10}A_2 + 3 \times 10 \times {}^{15}A_2$ **(ver nota)** 10

Número pedido $= 10\,350$ 1

3.º Processo

Número pedido $= 15 \times {}^{10}C_2 \times 3! + 10 \times {}^{15}C_2 \times 3!$ **(ver nota)** 10

Número pedido $= 10\,350$ 1

Nota:

Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita do número pedido, com a respectiva cotação a atribuir.

Número correcto 10

$15 \times {}^{10}A_2 + 10 \times {}^{15}A_2$ 7

$15 \times {}^{10}C_2 + 10 \times {}^{15}C_2$ 6

$^{10}A_2 + {}^{15}A_2$ 4

$^{10}C_2 + {}^{15}C_2$ 3

$^{10}A_3 + {}^{15}A_3$ 3

4.1. ..... **12**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Indicar as coordenadas de C 1

Indicar as coordenadas de D 1

Determinar as coordenadas de dois vectores paralelos ao plano ACD 3

Indicar as coordenadas de um vector director da recta 3

Verificar que o vector director da recta é perpendicular aos dois vectores do plano 4

2.º Processo

Indicar as coordenadas de C 1

Indicar as coordenadas de D 1

Determinar as coordenadas de dois vectores paralelos ao plano ACD 3

Determinar as coordenadas de um vector normal ao plano ACD 2

Indicar as coordenadas de um vector director da recta 3

Verificar que o vector director da recta é colinear com o vector normal ao plano 2

4.2. ..... **12**

Coordenadas do centro do octaedro 4

Raio da superfície esférica 4

Equação pedida 4

4.3. ..... **12**

Caracterização do quadrilátero (losango) 3

Aresta do octaedro = $\sqrt{2}$ 3

Altura de uma face do octaedro = $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ou $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 5

Perímetro pedido $= 4\sqrt{\frac{3}{2}}$ ou $2\sqrt{6}$ 1

PROVA 435/9 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos **Militares**
2001

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, subdivididas em alíneas, num total de onze.

Na página 9 deste enunciado encontra-se um formulário.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Seja f uma função par, de domínio $\mathbb{R}$, que não admite zeros.

Qual das seguintes expressões pode definir a função f?

(A) $f(x) = x^2$ **(B)** $f(x) = e^x$

(C) $f(x) = \cos x$ **(D)** $f(x) = \pi$

2. Considere uma função g, de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $[-4, 1]$.

Seja h a função definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = |g(x) + 1|$

Qual é o contradomínio de h?

(A) $[0, 2]$ **(B)** $[0, 3]$

(C) $[0, 4]$ **(D)** $[-2, 3]$

3. Seja f uma função de domínio $[0, +\infty[$

Na figura 1 está parte da representação gráfica da função f' e, na figura 2, parte da representação gráfica da função f'', respectivamente **primeira** e **segunda** derivadas de f.

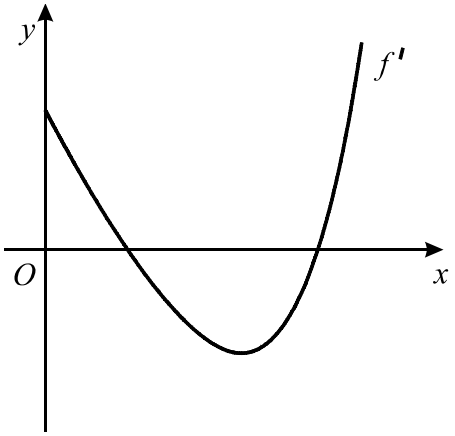


Figura 1

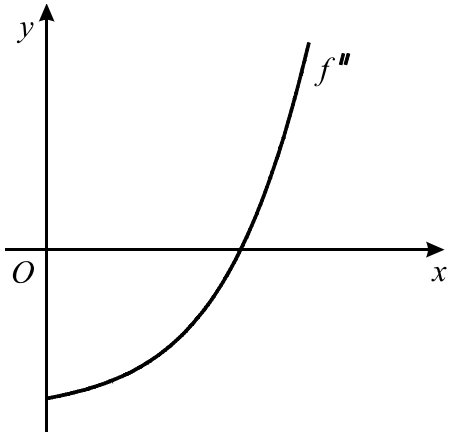
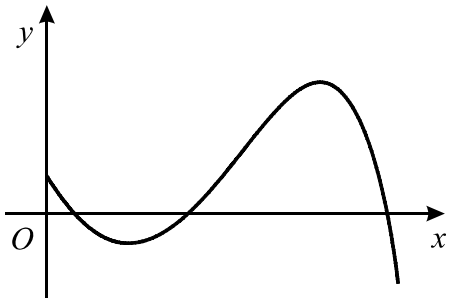


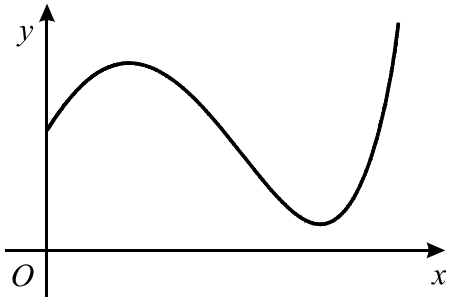
Figura 2

Em qual das figuras seguintes pode estar parte da representação gráfica da função f ?

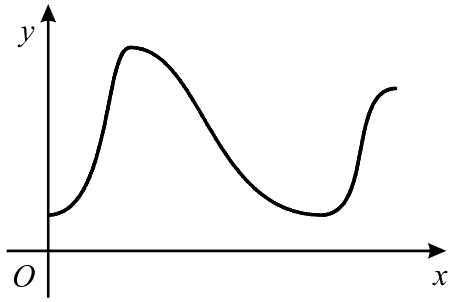
(A)



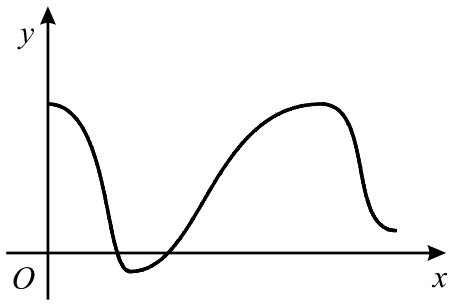
(B)



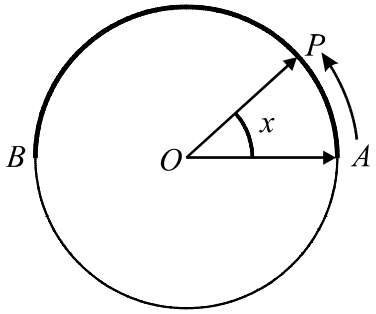
(C)



(D)



4. Na figura abaixo está representada uma circunferência de centro O e raio 1.
Os pontos A e B são extremos de um diâmetro da circunferência.
Considere que um ponto P, partindo de A, se desloca sobre o arco AB, terminando o seu percurso em B.

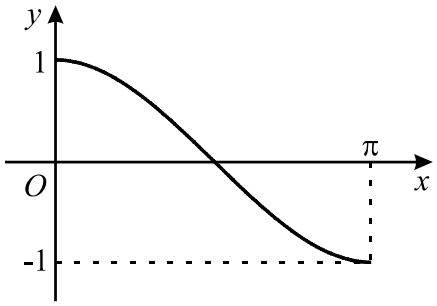


Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo AOP.

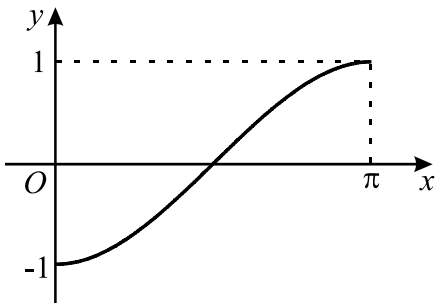
Seja f a função que, a cada valor de $x \in [0, \pi]$, faz corresponder o valor do produto escalar $\overrightarrow{OA} \,.\, \overrightarrow{OP}$

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função f ?

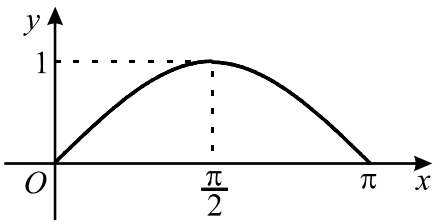
(A)



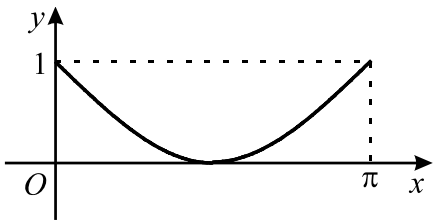
(B)



(C)



(D)



5. A soma dos três primeiros elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 121. Qual é o terceiro elemento da linha seguinte?

(A) 78 **(B)** 91

(C) 120 **(D)** 136

6. Os alunos de uma turma fizeram as seguintes opções, em relação à escolha das línguas estrangeiras:

- 25% dos estudantes escolheram a disciplina de Inglês (podendo, ou não, ter escolhido Alemão);
- 15% escolheram a disciplina de Alemão (podendo, ou não, ter escolhido Inglês);
- 10% escolheram ambas as disciplinas.

Um estudante dessa turma é seleccionado aleatoriamente. Sabendo que ele escolheu Inglês, qual é a probabilidade de ter escolhido também Alemão?

(A) $\frac{4}{5}$ **(B)** $\frac{3}{5}$

(C) $\frac{2}{5}$ **(D)** $\frac{1}{5}$

7. Qual dos seguintes números complexos tem a sua imagem geométrica no interior do círculo de centro na origem e de raio 1 ?

(A) $\left(\frac{1}{2}\ cis\ \frac{\pi}{7}\right)^3$ **(B)** $\left(2\ cis\ \frac{\pi}{7}\right)^3$

(C) $1+i$ **(D)** $2\,i$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$$z_1 = \rho\, cis\, \frac{\pi}{3} \qquad (\rho \in \mathbb{R}^+)$$

$$z_2 = 2\,i \times z_1$$

1.1. Determine, na forma trigonométrica, as raízes quadradas de $\dfrac{z_1}{|z_1|}$

1.2. Sejam A e B as imagens geométricas, no plano complexo, de z_1 e de z_2, respectivamente. Seja O a origem do referencial.
Sabendo que a área do triângulo $[OAB]$ é igual a 16, determine, na forma algébrica, o número complexo z_1

2. Considere a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x + \text{sen}\, \frac{\pi}{x}$

2.1. Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as três alíneas seguintes:

2.1.1. Estude a função f quanto à existência de assimptotas não verticais do seu gráfico.

2.1.2. Determine uma equação da recta tangente ao gráfico de f, no ponto de abcissa 2.

2.1.3. Prove que, no intervalo $]1, +\infty[$, a função f não tem zeros.

2.2. Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine o número de zeros da função f, no intervalo $\left[\ \frac{1}{4}\ ,\ +\infty\ \right[$
Explique como procedeu, apresentando o gráfico, ou gráficos, em que se baseou para dar a sua resposta.

3. A Sofia preparou um pudim, para servir como sobremesa ao jantar. Depois de o ter confeccionado, a Sofia colocou o pudim a arrefecer, na bancada da cozinha. Uma hora depois, colocou-o no frigorífico, para ficar bem frio.
Admita que a temperatura do pudim, em graus centígrados, t minutos depois de ter sido colocado na bancada, é dada, para um certo valor de A, por

$$f(t) = \begin{cases} 20 + 80 \times 2^{-0{,}05\,t}, & 0 \leq t < 60 \\ 6 + A \times 2^{-0{,}05\,(t-60)}, & t \geq 60 \end{cases}$$

Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes:

3.1. Atendendo a que a função f é contínua, mostre que $A = 24$

3.2. Quanto tempo deverá o pudim estar **no frigorífico**, para que a sua temperatura fique igual a doze graus? Apresente o resultado em minutos.

4. Uma caixa contém bolas brancas e bolas pretas, num total de doze bolas. Considere a experiência aleatória que consiste na extracção sucessiva, **com reposição**, de duas bolas.

Seja X a variável que representa o número de **bolas brancas** extraídas. Na tabela seguinte encontra-se representada a distribuição de probabilidades da variável X.

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$

4.1. Represente, através de uma tabela, a distribuição de probabilidades da variável Y: «número de **bolas pretas** extraídas»**.**

4.2. Quantas bolas brancas e quantas bolas pretas tem a caixa? Justifique a sua resposta.

5. Considere o seguinte problema:
Utilizando os cinco algarismos do número $41\,123$*, quantos números podem ser formados?*

${}^5C_2 \times 3!$ e ${}^5A_3$ são duas respostas correctas.

Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explique o raciocínio que conduziu a cada uma dessas respostas.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21

1.1. 10
1.2. 11

2. 56

2.1. 42
2.1.1. 14
2.1.2. 14
2.1.3. 14

2.2. 14

3. 28

3.1. 14
3.2. 14

4. 20

4.1. 10
4.2. 10

5. 12

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Círculo: $\pi\ r^2 \qquad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - raio\ da\ base;\ g - geratriz)$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - raio)$

Volumes

Prisma: *Área da base* $\times$ *Altura*

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3 \qquad (r - raio)$

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\,.\cos b + \text{sen}\,b\,.\cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\,.\cos b - \text{sen}\,a\,.\,\text{sen}\,b$

$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a\,.\,\text{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho\, cis\,\theta)\,.\,(\rho'\, cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta + \theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\,\theta)^n\ = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta}\ = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\,u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\,\text{sen}\,u$

$(\text{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

PROVA 135/8 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa «antigo»

Duração da prova: 120 minutos Prova Modelo
2001

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

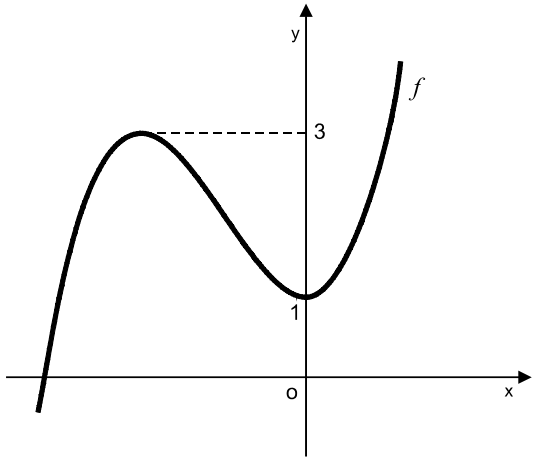
A Prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui nove questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui quatro questões de resposta aberta, subdivididas em alíneas, num total de dez.

Grupo I

- As nove questões deste primeiro grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Seja f uma função polinomial de terceiro grau, cujo gráfico se encontra parcialmente representado na figura.



Quantas são as soluções da equação $f(x) = 2$?

(A) uma **(B)** duas **(C)** três **(D)** quatro

2. Considere a função h definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = \text{sen } x$

Qual das seguintes equações pode definir uma recta tangente ao gráfico de h ?

(A) $y = 2\,x + \pi$ **(B)** $y = -2$

(C) $y = \sqrt{2}\ x - 9$ **(D)** $y = x$

3. O coeficiente de ampliação A de uma certa lupa é dado, em função da distância d (em decímetros) da lupa ao objecto, por

$$A(d) = \frac{5}{5-d}$$

Indique a que distância do objecto tem de estar a lupa para que o coeficiente de ampliação seja igual a 5.

(A) $2\ dm$ **(B)** $4\ dm$ **(C)** $6\ dm$ **(D)** $8\ dm$

4. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- o gráfico de g é uma recta, que designamos por s
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$

Qual das afirmações seguintes é **necessariamente verdadeira** ?

(A) A recta s é tangente ao gráfico de f

(B) A recta s é secante ao gráfico de f

(C) A recta s não intersecta o gráfico de f

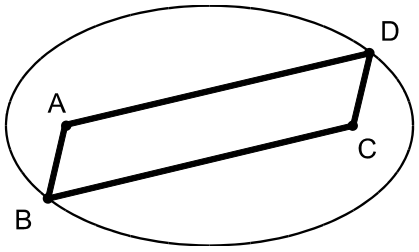
(D) A recta s é uma assimptota do gráfico de f

5. Na figura junta estão representados uma elipse e um paralelogramo $[ABCD]$.

Os vértices A e C são os focos da elipse.

Os vértices B e D são pontos da elipse.

O perímetro do paralelogramo é 30.



Qual é o comprimento do eixo maior da elipse?

(A) 12 **(B)** 15 **(C)** 18 **(D)** 20

6. Considere um vector $\overrightarrow{AB}$ tal que $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 1$

Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{BA}$?

(A) 1 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** 2

7. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere os planos definidos pelas equações $z = 1$ e $z = 5$.

Qual das equações seguintes define uma superfície esférica tangente aos dois planos?

(A) $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 25$

(B) $x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 25$

(C) $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 4$

(D) $x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 4$

8. Três rapazes e duas raparigas vão dar um passeio de automóvel.

Qualquer um dos cinco jovens pode conduzir.

De quantas maneiras podem ocupar os cinco lugares, dois à frente e três atrás, de modo a que o condutor seja uma rapariga e a seu lado viaje um rapaz?

(A) 36 **(B)** 120 **(C)** 12 **(D)** 72

9. Lança-se duas vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

Qual é a probabilidade de sair face 6 em exactamente um dos dois lançamentos?

(A) $\frac{1}{36}$ **(B)** $\frac{5}{36}$ **(C)** $\frac{1}{18}$ **(D)** $\frac{5}{18}$

Grupo II

Nas questões do segundo grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2\,x - \cos x$

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, ou seja, **sem** utilizar a calculadora, resolva as alíneas seguintes:

1.1. Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que a função f tem, pelo menos, um zero, no intervalo $]\,0, \pi[$.

1.2. Seja f' a função derivada de f. Mostre que $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, e justifique que o zero de f, cuja existência é garantida pelo enunciado da alínea anterior, é o único zero desta função.

1.3. A recta de equação $y = 2x - \frac{1}{2}$ intersecta o gráfico de f em infinitos pontos. A abcissa de um desses pontos pertence ao intervalo $[\,3\pi, 4\pi]$. Determine-a.

2. A pressão atmosférica de cada local da Terra depende da altitude a que este se encontra. Admita que a pressão atmosférica P (medida em quilopascal) é dada, em função da altitude h (em **quilómetros**), por

$$P(h) = 101\ e^{-0{,}12\,h}$$

2.1. A montanha mais alta de Portugal é o Pico, na ilha do Pico - Açores.
A altitude do cume do Pico é 2350 metros.

Qual é o valor da pressão atmosférica, nesse local? Apresente o resultado em quilopascal, arredondado às unidades.



2.2. Determine x tal que, para qualquer h, $P(h + x) = \frac{1}{2}\,P(h)$. Apresente o resultado arredondado às décimas.

Interprete o valor obtido, no contexto desta igualdade.

3. Um baralho de cartas completo é constituído por cinquenta e duas cartas, repartidas por quatro naipes de treze cartas cada: espadas, copas, ouros e paus.

3.1. Num certo jogo de cartas, utiliza-se um baralho completo e dão-se treze cartas a cada jogador.
Imagine que está a participar nesse jogo.
Qual é a probabilidade de, nas treze cartas que vai receber, haver exactamente seis cartas do naipe de espadas? Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

3.2. De um baralho completo extraem-se, sucessivamente e sem reposição, duas cartas.
Qual é a probabilidade de pelo menos uma das cartas extraídas ser do naipe de espadas? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4. Na figura abaixo está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular.

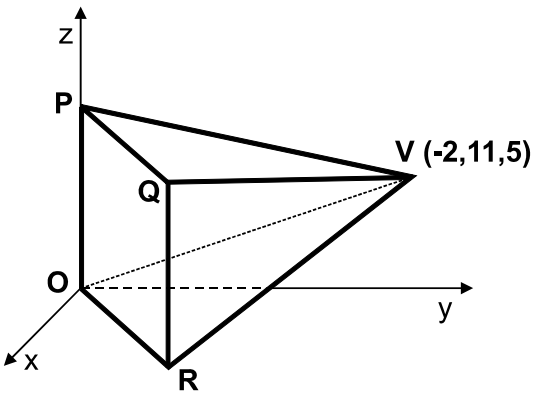
O vértice O é a origem do referencial

O vértice P pertence ao eixo Oz

O vértice R pertence ao plano xOy

O vértice V tem coordenadas $(-2, 11, 5)$

Uma equação vectorial da recta que contém a altura da pirâmide é
$(x, y, z) = (7, -1, 5) + k(6, -8, 0),\ k \in \mathbb{R}$



4.1. Mostre que a base da pirâmide está contida no plano de equação $3x - 4y = 0$

4.2. Justifique que o centro da base da pirâmide é o ponto de coordenadas $(4, 3, 5)$.

4.3. Determine o volume da pirâmide.

Volume da pirâmide $= \frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **81**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **119**

1. 37
1.1. 11
1.2. 13
1.3. 13

2. 24
2.1. 10
2.2. 14

3. 22
3.1. 11
3.2. 11

4. 36
4.1. 12
4.2. 12
4.3. 12

TOTAL **200**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos Prova Modelo
2001

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A Prova é constituída por dois Grupos, I e II.

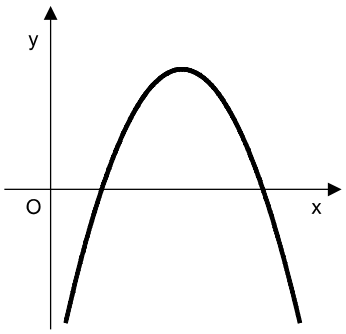
- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de doze.

Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário.

Grupo I

- As sete questões do primeiro grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Na figura está representada parte de uma parábola, que é o gráfico de uma certa função g, de domínio $\mathbb{R}$.



Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = g(x) \,.\, (x+3)^2$

Qual pode ser o conjunto dos zeros da função h?

(A) $\{2,\ 3,\ 4\}$ **(B)** $\{-3,\ 1,\ 4\}$

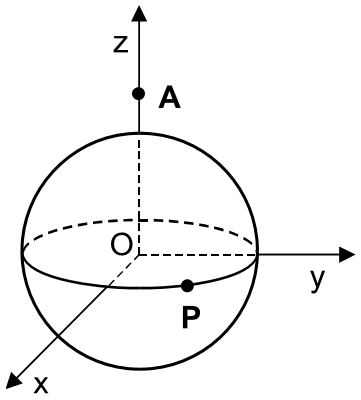
(C) $\{-3,\ 2,\ 3,\ 5\}$ **(D)** $\{-1,\ 5,\ 9\}$

2. Indique o valor de $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{sen} x}$

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

3. Na figura estão representados, em referencial o. n. $Oxyz$:

- o ponto A, de coordenadas $(0, 0, 4)$
- a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
- a circunferência que resulta da intersecção dessa superfície esférica com o plano xOy

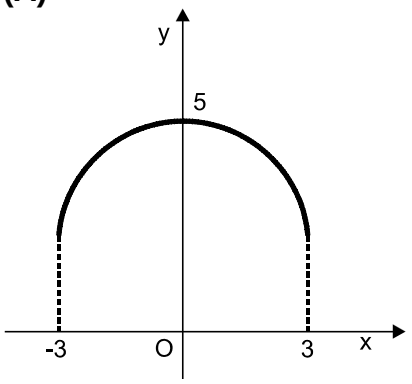


Um ponto P percorre essa circunferência, dando uma volta completa.

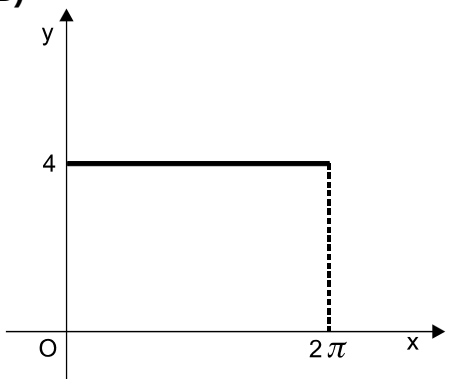
Considere a função f que faz corresponder, à **abcissa** do ponto P, a **distância** de P a A.

Qual dos seguintes é o gráfico da função f ?

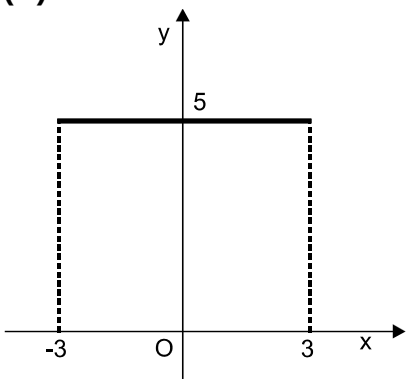
(A)



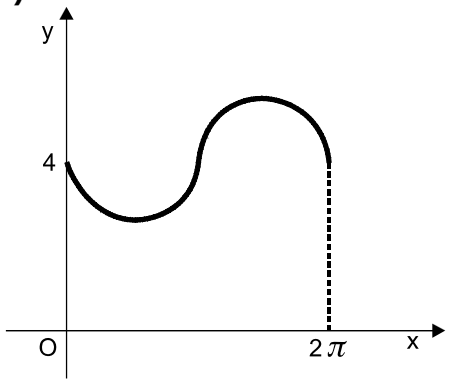
(B)



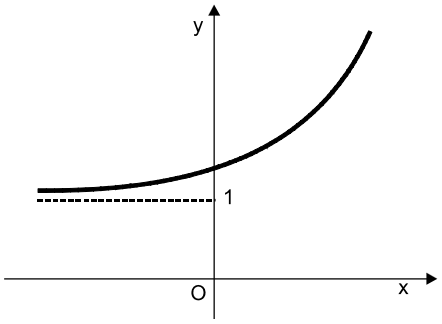
(C)



(D)

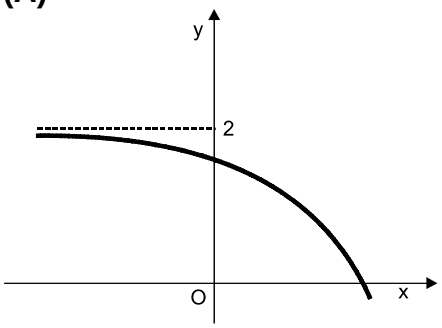


4. Na figura está parte da representação gráfica de uma certa função g, de domínio $\mathbb{R}$.

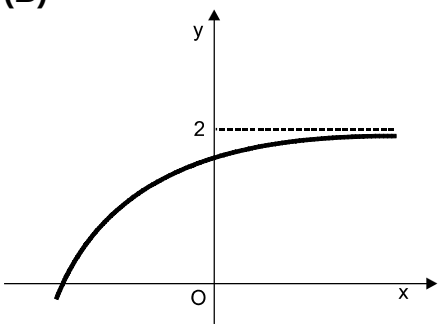


Em qual das figuras seguintes está parte da representação gráfica da função h, definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = -g(x) + 1$?

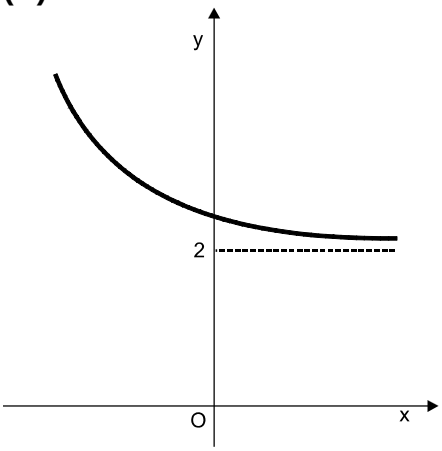
(A)



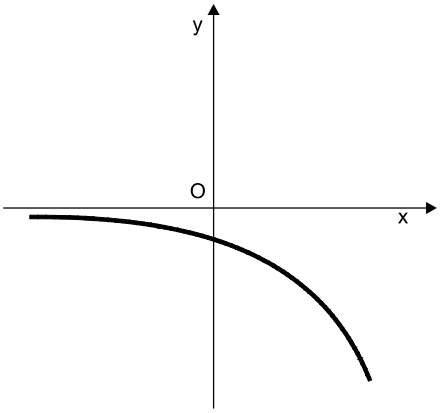
(B)



(C)



(D)



5. Admita que, numa certa escola, a variável «*altura das alunas do 12.º ano de escolaridade*» segue uma distribuição aproximadamente normal, de média 170 cm.

Escolhe-se, ao acaso, uma aluna do 12.º ano dessa escola.

Relativamente a essa rapariga, qual dos seguintes acontecimentos é o mais provável?

(A) A sua altura é superior a 180 cm. **(B)** A sua altura é inferior a 180 cm.

(C) A sua altura é superior a 155 cm. **(D)** A sua altura é inferior a 155 cm.

6. Seja S o conjunto de resultados (com um número finito de elementos) associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos, contidos em S, nenhum deles impossível, nem certo.

Sabe-se que $A \subset B$.

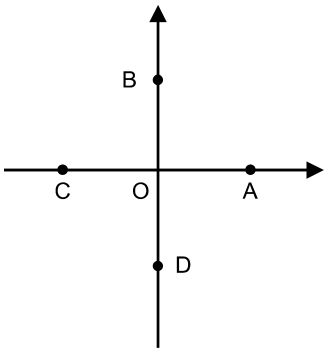
Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira (P designa probabilidade, e $\overline{A}$ e $\overline{B}$ designam os acontecimentos contrários de A e de B, respectivamente).

(A) $P(A) > P(B)$ **(B)** $P(A \cap B) = 0$

(C) $P(A \cup B) = 1$ **(D)** $P(\overline{A}) \geq P(\overline{B})$

7. Seja $z = y\,i$, com $y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, um número complexo ($i$ designa a unidade imaginária).

Qual dos quatro pontos representados na figura junta (A, B, C ou D) pode ser a imagem geométrica de z^4?



(A) O ponto A **(B)** O ponto B

(C) O ponto C **(D)** O ponto D

Grupo II

Nas questões do segundo grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. O *AUTO-HEXÁGONO* é um *stand* de venda de automóveis.

1.1. Efectuou-se um estudo sobre as vendas de automóveis nesse *stand*, o qual revelou que:

- 15% dos clientes compram automóvel com alarme e com rádio;
- 20% dos clientes compram automóvel sem alarme e sem rádio;
- 45% dos clientes compram automóvel com alarme (com ou sem rádio).

Um cliente acaba de comprar um automóvel.

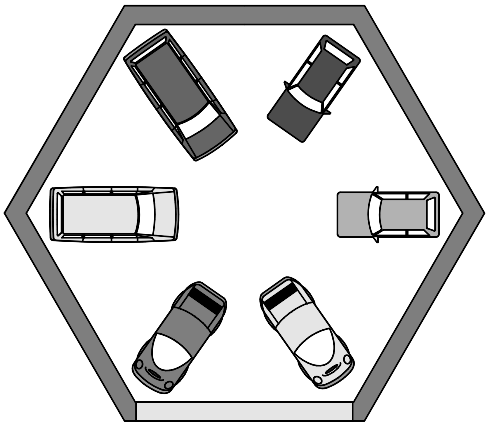
1.1.1. A Marina, empregada do *stand*, que nada sabia das preferências desse cliente e não tomou conhecimento do equipamento do automóvel que ele tinha comprado, apostou que esse automóvel estava equipado com rádio, mas não tinha alarme.
Qual é a probabilidade de a Marina acertar? Apresente o resultado na forma de percentagem.

1.1.2. Alguém informou depois a Marina de que o referido automóvel vinha equipado com alarme. Ela apostou, então, que o automóvel também tinha rádio.
Qual é a probabilidade de a Marina ganhar esta nova aposta? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

1.2. O *stand*, de forma hexagonal, tem uma montra que se situa num dos lados do hexágono (ver figura).

Pretende-se arrumar seis automóveis **diferentes** (dois utilitários, dois desportivos e dois comerciais), de tal forma que cada automóvel fique junto de um vértice do hexágono.

Supondo que se arrumam os seis automóveis ao acaso, qual é a probabilidade de os dois desportivos ficarem junto dos vértices que se encontram nas extremidades da montra? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.



Montra

2. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$z_1 = 7 + 24\,i$ (i designa a unidade imaginária)

2.1. Um certo ponto P é a imagem geométrica, no plano complexo, de uma das raízes quadradas de z_1. Sabendo que o ponto P tem abcissa 4, determine a sua ordenada.

2.2. Seja $z_2 = cis\,\alpha$ com $\alpha \in \left]\frac{3\,\pi}{4}\,,\,\pi\right[$

Indique, justificando, em que quadrante se situa a imagem geométrica de $z_1 \times z_2$

3. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \\ \frac{\text{sen } x}{2\,x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

3.1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes:

3.1.1. Estude a função h quanto à continuidade no ponto 0.
(Deve indicar, justificando, se a função h é contínua nesse ponto e, no caso de não ser, se se verifica a continuidade à esquerda, ou à direita, nesse mesmo ponto.)

3.1.2. Considere a função j, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por $j(x) = \frac{1}{3\,x}$

Mostre que, no intervalo $[-1\,,\,1000\,\pi]$, os gráficos de j e de h se intersectam em 1001 pontos.

3.2. Dos 1001 pontos referidos na alínea anterior, seja A o que tem menor abcissa positiva. Determine as coordenadas desse ponto (apresente os valores na forma de dízima, com aproximação às décimas).

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{x + 3\,\text{sen}\,\frac{x}{2}}{\ln(e^x + 4)}$

4.1. Sabe-se que existe $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ e que o seu valor é um número inteiro. Recorrendo à sua calculadora, conjecture-o. Explique como procedeu.

4.2. Será conclusivo, para a determinação do valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, um método que se baseie exclusivamente na utilização da calculadora? Justifique a sua resposta.

5. Malmequeres de Baixo é uma povoação com **cinco mil** habitantes.

5.1. Num certo dia, ocorreu um acidente em Malmequeres de Baixo, que foi testemunhado por algumas pessoas. Admita que, t horas depois do acidente, o número (expresso em **milhares**) de habitantes de Malmequeres de Baixo que sabiam do ocorrido era, aproximadamente,

$$f(t) = \frac{5}{1 + 124\,e^{-0{,}3\,t}} \quad , \quad t \geq 0$$

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de assimptotas do seu gráfico. Interprete as conclusões a que chegou, no contexto do problema.

5.2. Alguns dias depois, ocorreu outro acidente no mesmo local, testemunhado pelas mesmas pessoas. No entanto, neste segundo acidente, a notícia propagou-se mais depressa, no sentido em que, decorrido o mesmo tempo após o acidente, mais pessoas sabiam do ocorrido. Admita que, t horas depois deste segundo acidente, o número (expresso em **milhares**) de habitantes de Malmequeres de Baixo que sabiam do ocorrido era, aproximadamente,

$$g(t) = \frac{5}{1 + a\,e^{-b\,t}} \quad , \quad t \geq 0 \qquad \text{(para certos valores de } a \text{ e } b\text{)}.$$

Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, refira o que pode garantir sobre os valores de a e de b, comparando cada um deles com o valor da constante correspondente da expressão analítica de f.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 32
- **1.1.** 20
  - **1.1.1.** 10
  - **1.1.2.** 10
- **1.2.** 12

2. 21
- **2.1.** 10
- **2.2.** 11

3. 36
- **3.1.** 28
  - **3.1.1.** 12
  - **3.1.2.** 16
- **3.2.** 8

4. 16
- **4.1.** 8
- **4.2.** 8

5. 32
- **5.1.** 17
- **5.2.** 15

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Círculo: $\pi\ r^2 \qquad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Prisma: *Área da base* × *Altura*

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3 \qquad (r - raio)$

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\,.\cos b + \text{sen}\,b\,.\cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\,.\cos b - \text{sen}\,a\,.\,\text{sen}\,b$

$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a\,.\,\text{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho\, cis\,\theta)\,.\,(\rho'\, cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta+\theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta-\theta')$

$(\rho\, cis\,\theta)^n\ = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta}\ = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\,u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\,\text{sen}\,u$

$(\text{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos **PROVA MODELO**

2001

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada ..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 32
- **1.1.** 20
  - **1.1.1.** 10
  - **1.1.2.** 10
- **1.2.** 12

2. 21
- **2.1.** 10
- **2.2.** 11

3. 36
- **3.1.** 28
  - **3.1.1.** 12
  - **3.1.2.** 16
- **3.2.** 8

4. 16
- **4.1.** 8
- **4.2.** 8

5. 32
- **5.1.** 17
- **5.2.** 15

TOTAL **200**

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Versão 1	B	A	C	D	C	D	A
Versão 2	A	B	C	D	A	A	B

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, no primeiro grupo, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas **Resp. certas**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

Grupo II

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Critérios específicos

1.1.1. 10

Escrever correctamente os dados do problema numa tabela (ou num diagrama em árvore, ou num diagrama de Venn, ...), como se exemplifica a seguir 4

	A	$\overline{A}$	Total
R	15%		
$\overline{R}$		20%	
Total	45%		

Probabilidade pedida $= 35\%$ 6

$P(A \cap \overline{R}) = 30\%$ 1

$P(\overline{R}) = 50\%$ 1

$P(R) = 50\%$ 2

$P(\overline{A} \cap R) = 35\%$ 2

ou

$P(A \cap \overline{R}) = 30\%$ 1

$P(\overline{A} \cap R) = 100\% - (30\% + 15\% + 20\%)$ 4

$P(\overline{A} \cap R) = 35\%$ 1

ou

$P(\overline{A}) = 55\%$ 3

$P(\overline{A} \cap R) = 35\%$ 3

Nota:
Se o examinando não apresentar o resultado na forma de percentagem, deverá ser penalizado em 1 ponto.

1.1.2. ..... **10**

Identificar a probabilidade pedida com $P(R|A)$ 3

$P(R|A) = \frac{P(R \cap A)}{P(A)}$ 3

$P(R|A) = \frac{0{,}15}{0{,}45}$ 3

$P(R|A) = \frac{1}{3}$ 1

1.2. ..... **12**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º Processo

Número de casos possíveis $= 6!$

Número de casos favoráveis $= 2 \times 4!$

Probabilidade pedida $= \frac{2 \times 4!}{6!} = \frac{1}{15}$

2.º Processo

Número de casos possíveis $= {}^{6}A_{2}$

Número de casos favoráveis $= 2$

Probabilidade pedida $= \frac{2}{{}^{6}A_{2}} = \frac{1}{15}$

3.º Processo

Número de casos possíveis $= {}^{6}C_{2}$

Número de casos favoráveis $= 1$

Probabilidade pedida $= \frac{1}{{}^{6}C_{2}} = \frac{1}{15}$

Qualquer que seja o processo utilizado pelo examinando, as cotações devem ser atribuídas de acordo com o seguinte critério:

Escrita da fracção **(ver notas 1, 2, 3 e 4)** 11

Simplificação da fracção 1

Notas:
(Estas notas têm como referência o primeiro processo. Caberá ao corrector fazer as extrapolações necessárias, caso o examinando opte por outro processo, como por exemplo o segundo ou o terceiro processos indicados na página C/4.)

1. O examinando pode começar por indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis e só depois escrever a fracção.
   No entanto, se não o fizer, isto é, se escrever directamente a fracção, não deverá ser penalizado.

2. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da fracção, com a respectiva cotação a atribuir.

   $\frac{2 \times 4!}{6!}$ (fracção correcta)..... 11

   $\frac{4!}{6!}$ ou $\frac{2}{6!}$ 6

   Outras fracções com denominador $6!$ 3

3. Se o examinando indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído à sua resposta menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

4. Se o examinando indicar apenas o número de casos possíveis, ou apenas o número de casos favoráveis, deverão ser atribuídos 2 pontos à sua resposta.

2.1. ..... **10**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

$7+24\,i\ =(4+y\,i)^2$ 3

$7+24\,i\ =16-y^2+8\,y\,i$ 2

$16-y^2=7\ \wedge\ 8\,y=24$ 3

$y=3$ 2

2.º Processo

$7+24\,i\ =(x+y\,i)^2$ 2

$7+24\,i\ =x^2-y^2+2\,x\,y\,i$ 2

$x^2-y^2=7\ \wedge\ 2\,x\,y=24$ 2

Substituir x por 4 2

$y=3$ 2

2.2. ..... **11**

Referir que um argumento de $z_1\times z_2$ é igual à soma de α com um argumento de z_1 4

Referir que um argumento de z_1 pertence ao intervalo $\left]\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$ 3

Concluir que um argumento de $z_1\times z_2$ pertence ao intervalo $\left]\pi\,,\,\frac{3\,\pi}{2}\right[$ 3

Concluir que a imagem geométrica de $z_1\times z_2$ pertence ao terceiro quadrante 1

3.1.1. ..... **12**

$\lim_{x \to 0^-} g(x) = -\infty$ 4

$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \frac{1}{2}$ 4

Conclusão 4

Não continuidade da função no ponto 0 2

Continuidade à direita, no ponto 0 2

3.1.2. ..... **16**

Justificar que existe um ponto de intersecção em $[-1, 0[$
(por exemplo, resolvendo a equação $\frac{x+1}{x} = \frac{1}{3x}$).....4

Justificar que, em cada intervalo da forma $[2(k-1)\pi,\ 2k\pi[$, k natural,
existem dois pontos de intersecção (as soluções da equação $\operatorname{sen} x = \frac{2}{3}$)
nesse intervalo 8

Conclusão 4

3.2. ..... **8**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Determinar a abcissa do ponto pedido 5

Equacionar o problema: $\frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \frac{1}{3x}$ 2

$\frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \frac{1}{3x} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{2}{3}$ 1

$x \approx 0,7$ **(ver nota 1)**.....2

Determinar a ordenada do ponto pedido $(y \approx 0,5)$ **(ver nota 1)**..... 3

2.º Processo

Determinar as coordenadas do ponto pedido com recurso à calculadora gráfica **(ver notas 1 e 2)** 8

Notas:

1. Pode acontecer que o examinando não apresente algum dos valores pedidos (abcissa e ordenada) arredondado às décimas, conforme indicado no enunciado. Neste caso, deverá ser penalizado em 1 ponto por cada valor não arredondado às décimas.

2. O examinando deve explicar como procedeu, referindo algo que evidencie a forma como utilizou a calculadora na procura das coordenadas pedidas. Tal pode ser feito reproduzindo ou descrevendo o rectângulo de visualização da calculadora. Devem ser cotadas com 0 (zero) todas as respostas sem qualquer justificação, ou que se limitem a apresentar justificações vazias de significado, como, por exemplo, «Vi na calculadora».

   A cotação **máxima** a atribuir **deverá ter em conta o grau de precisão dos valores obtidos**, de acordo com o seguinte critério:

   Abcissa

   Valor obtido correcto: $0,7$ 4
   Valor obtido igual a $0,6$ ou a $0,8$ 2
   Outros valores 0

   Ordenada

   Valor obtido correcto: $0,5$ 4
   Valor obtido igual a $0,4$ 2
   Valor obtido igual a $0,3$ ou a $0,6$ 1
   Outros valores 0

4.1. ..... **8**

Conjectura do valor do limite (que é igual a 1) **(ver nota 1)**..... 2

Explicação do processo utilizado **(ver nota 2)** 6

Notas:

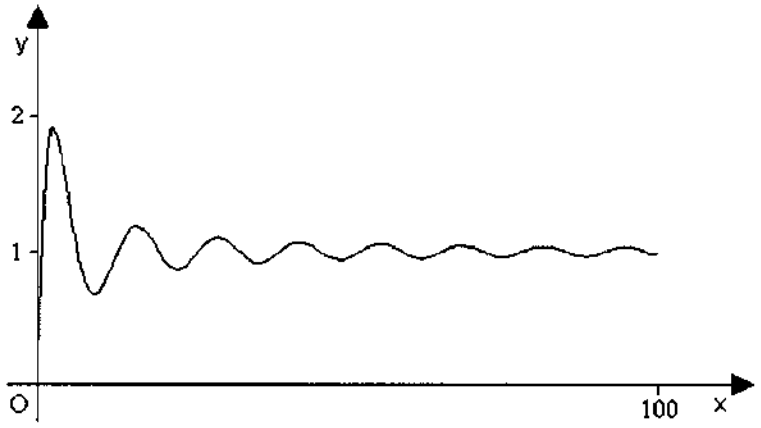
1. Estes 2 pontos só deverão ser atribuídos se o examinando apresentar alguma justificação, ainda que incompleta.

2. O processo utilizado na conjectura pode ser gráfico, pode ser baseado numa tabela, etc. As respostas deverão ser tanto mais valorizadas, quanto mais revelem a percepção clara do *conceito intuitivo* de limite de uma função, quando a variável independente tende para $+\infty$.

Apresentam-se a seguir dois exemplos de resposta:

Exemplo 1 (método gráfico)

Na figura está representado o gráfico da função, no rectângulo de visualização $[0, 100] \times [0, 3]$



Da análise do gráfico, podemos dizer que a recta de equação $y = 1$ *parece ser uma assimptota do gráfico de* f.
É, assim, plausível a seguinte conjectura: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

Exemplo 2 (tabela)

Apresenta-se a seguir a tabela da função f, *para valores de* x *compreendidos entre* 0 *e* 220, *com passo* 20 *(os valores de* $f(x)$ *estão arredondados às milésimas).*

x	$f(x)$
0	0,000
20	0,918
40	1,068
60	0,951
80	1,028
100	0,992
120	0,992
140	1,017
160	0,981
180	1,015
200	0,992
220	0,999

Da leitura da tabela, podemos dizer que, à medida que x *aumenta,* $f(x)$ *parece tender para* 1.
É, assim, plausível a seguinte conjectura: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

4.2. ..... **8**

Afirmar que não é conclusivo 2

Justificar 6

Notas:

1. Se o examinando afirmar que, para a determinação de um limite, é conclusivo um processo baseado exclusivamente na utilização da calculadora, deverá ser cotado com 0 (zero) pontos, independentemente da justificação que dê para a sua resposta.

2. Apresentam-se a seguir dois exemplos de justificação:

   Exemplo 1

   Uma tabela como a que apresentámos acima dá-nos as imagens de uma sequência finita de valores de x, *e não de uma sucessão de valores de* x *tendendo para* $+\infty$. *Além disso, não basta conhecer o comportamento das imagens de uma sucessão particular.*
   De acordo com a definição de limite de uma função, segundo Heine, para se poder garantir que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$, *é necessário que, qualquer que seja a sucessão de objectos tendendo para* $+\infty$, *a correspondente sucessão das imagens tenda para* 1.
   Tal é impossível de verificar com uma calculadora, pois há infinitas sucessões naquelas circunstâncias, e cada uma delas tem infinitos termos.

   Exemplo 2 (adoptando uma linguagem mais informal)

   O comportamento da função até um certo valor de x, *por muito grande que seja, não permite garantir o comportamento da função, desse valor em diante.*
   Neste caso, vimos que, à medida que x *aumenta,* $f(x)$ *parece tender para* 1. *Mas só experimentámos valores de* x *da ordem das dezenas e das centenas.*
   A simples utilização da calculadora não permite garantir o que se passa para valores de x *muito maiores, até porque a calculadora começa a dar erro. Mas, mesmo que não desse erro, nada se poderia concluir, pois nunca seria possível experimentar uma infinidade de valores.*

5.1. 17

Estudo da função quanto à monotonia 6

$f'(t) = \dfrac{-5 \times 124 \times e^{-0,3t} \times (-0,3)}{(1+124\,e^{-0,3t})^2}$ 1

$f'(t) = \dfrac{186\,e^{-0,3t}}{(1+124\,e^{-0,3t})^2}$ 1

$f'(t) > 0,\ \forall t \in [0, +\infty[$ 2

Concluir que f é estritamente crescente 2

ou

Referir que a função $t \longrightarrow -0,3t$ é estritamente decrescente 1

Referir que a função exponencial de base e é estritamente crescente 1

Concluir que a função $t \longrightarrow e^{-0,3t}$ é estritamente decrescente 1

Concluir que a função $t \longrightarrow 1+124\,e^{-0,3t}$ é estritamente decrescente 1

Concluir que f é estritamente crescente 2

Estudo da função quanto à existência de assimptotas 6

Justificar a não existência de assimptotas verticais 2

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$ **(ver nota)** 2

Concluir que a recta de equação $y = 5$ é assimptota horizontal do gráfico de f 2

Interpretação 5

O examinando deverá referir que, à medida que o tempo passa, o número de pessoas que sabe do acidente é cada vez maior (2 pontos), verificando-se a tendência para que todos os habitantes da povoação fiquem a saber do ocorrido (3 pontos).

Nota:

O examinando pode:

- começar por determinar $m = \lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t}$
- concluir que $m = 0$
- determinar, em seguida, $b = \lim_{t \to +\infty} [f(t) - m\,t] = \lim_{t \to +\infty} f(t)$

Se o examinando optar por este processo, os 2 pontos previstos para o cálculo de $\lim_{t \to +\infty} f(t)$ devem ser distribuídos de acordo com o seguinte critério:

$m = \lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t} = 0$ 1

$b = \lim_{t \to +\infty} f(t) = 5$ 1

5.2. ..... **15**

Apresenta-se a seguir um exemplo de resposta:

O segundo acidente foi testemunhado pelas mesmas pessoas que já tinham testemunhado o primeiro acidente. Portanto, o número de pessoas que testemunharam o primeiro acidente é igual ao número de pessoas que testemunharam o segundo, ou seja, $f(0) = g(0)$.

Ora, $f(0) = g(0) \Leftrightarrow \frac{5}{1+124\,e^{0}} = \frac{5}{1+a\,e^{0}} \Leftrightarrow a = 124$

Por outro lado, a progressão da notícia é mais rápida no caso do segundo acidente. Tal implica que, para cada t *positivo, se tem* $g(t) > f(t)$.

Ora, $g(t) > f(t) \Leftrightarrow \frac{5}{1+124\,e^{-bt}} > \frac{5}{1+124\,e^{-0,3t}} \Leftrightarrow b > 0,3$

Concluímos, assim, que a constante a *é igual à constante correspondente da função* f *e que a constante* b *é maior do que a constante correspondente da função* f.

Tal como o exemplo acima ilustra, para que a composição possa ser considerada completa, deverá contemplar os seguintes pontos:

- a explicação da razão pela qual se tem $f(0) = g(0)$
- a conclusão de que $a = 124$
- a explicação da razão pela qual se tem $g(t) > f(t)$, para cada t positivo
- a conclusão de que $b > 0,3$

Na tabela seguinte, indica-se como esta alínea deve ser cotada:

Forma / **Conteúdo**	Nível 1 (*)	Nível 2 (**)	Nível 3 (***)
A composição contempla os quatro pontos.	15	13	11
A composição contempla três pontos.	12	10	8
A composição contempla dois pontos.	9	7	5
A composição contempla um ponto.	6	4	2

(*) **Nível 1** - Redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).

(**) **Nível 2** - Redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecte a inteligibilidade.

(***) **Nível 3** - Redacção confusa, sem estruturação aparente, presença de erros graves, com perturbação frequente da inteligibilidade.

Pode acontecer que uma composição não se enquadre completamente num dos três níveis descritos e/ou contenha características presentes em mais do que um deles. Nesse caso, deverá ser atribuída uma pontuação intermédia.

PROVA 135/8 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa «antigo»

Duração da prova: 120 minutos **Reserva**
2001

(não usada)

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui nove questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui quatro questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de dez.

Grupo I

- As nove questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, estritamente crescente.

Qual das seguintes afirmações é **necessariamente** verdadeira?

(A) A função f não pode ter mais do que um zero.
(B) A função f tem contradomínio $\mathbb{R}$.
(C) O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima.
(D) O gráfico da função f é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

2. Para um certo número real a, o gráfico da função g, definida por $g(x) = ax^2 + 3$, tem, no ponto de abcissa 1, uma recta tangente com declive 4.

Qual é o valor de a?

(A) 4 **(B)** 2 **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{3}{2}$

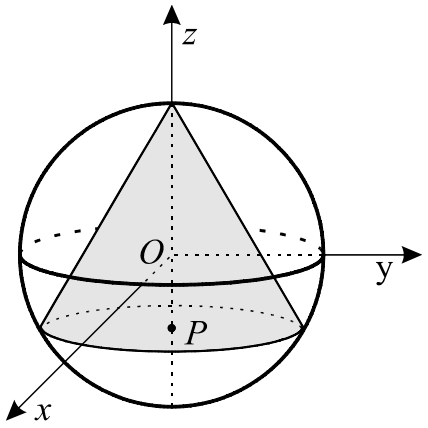
3. Considere uma função h, **contínua** em $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$, tal que:

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = 5 \qquad \lim_{x\to-3} h(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) O gráfico da função h não tem assimptotas verticais.
(B) O gráfico da função h não tem assimptotas horizontais.
(C) A função h tem mínimo absoluto.
(D) A equação $h(x) = 2$ tem pelo menos uma solução.

4. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$



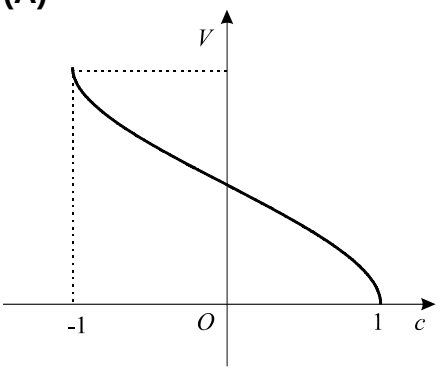
Um ponto P desloca-se sobre o diâmetro que está contido no eixo Oz.

Para cada posição do ponto P, considere o cone, inscrito na superfície esférica, que tem por base o círculo cujo centro é o ponto P e que tem por vértice o ponto $(0, 0, 1)$.

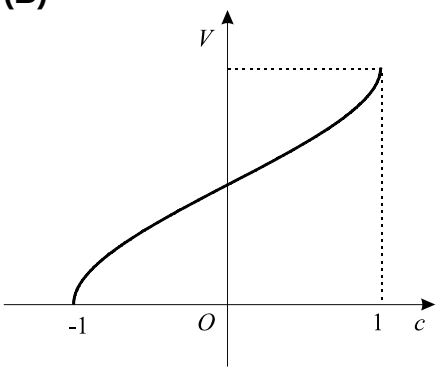
Seja f a função que faz corresponder, à **cota** c do ponto P, o **volume** V do referido cone.

Qual dos seguintes gráficos pode ser o da função f ?

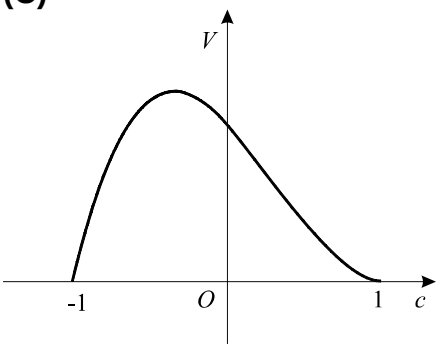
(A)



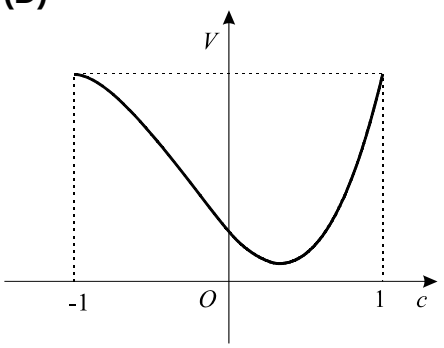
(B)



(C)

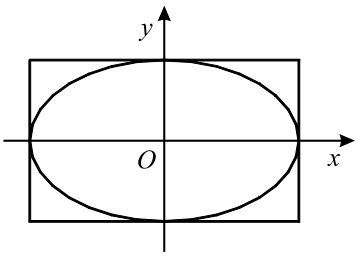


(D)



5. Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy:

- um rectângulo de comprimento 10 e largura 6, centrado na origem do referencial;
- uma elipse inscrita nesse rectângulo.



Quais são as coordenadas dos focos dessa elipse?

(A) $(2,0)$ e $(-2,0)$ **(B)** $(4,0)$ e $(-4,0)$

(C) $(0,2)$ e $(0,-2)$ **(D)** $(0,4)$ e $(0,-4)$

6. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, as superfícies esféricas definidas pelas equações $x^2+(y-2)^2+z^2=2$ e $x^2+(y-3)^2+z^2=2$

A intersecção destas superfícies esféricas é ...

(A) um ponto. **(B)** uma circunferência.

(C) o conjunto vazio. **(D)** um segmento de recta.

7. Num referencial o.n. $Oxyz$, um plano α é perpendicular ao plano xOz.
Qual das seguintes pode ser uma equação do plano α?

(A) $z=x+2$ **(B)** $z=x+y$

(C) $z=y$ **(D)** $y=2$

8. Uma estante tem oito prateleiras. Pretende-se expor, nessa estante, seis peças de porcelana: duas jarras iguais e quatro pratos diferentes.
De quantas maneiras podem ser expostas as seis peças nas oito prateleiras, de tal modo que não fique mais do que uma peça em cada prateleira?

(A) ${}^8C_2 \times {}^6A_4$ **(B)** ${}^8A_2 \times 4!$

(C) ${}^8C_2 \times {}^8A_4$ **(D)** ${}^8A_2 \times {}^6C_4$

9. Considere seis pontos distintos $(A, B, C, D, E$ e $F)$, pertencentes a uma circunferência.
Escolhidos três desses pontos ao acaso, qual é a probabilidade de eles definirem um triângulo que contenha o lado $[AB]$?

(A) $\frac{1}{6}$ **(B)** $\frac{1}{5}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{1}{3}$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Considere a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

($\ln$ designa logaritmo de base e)

Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as três alíneas seguintes:

1.1. Estude a função f quanto à existência de assimptotas verticais.

1.2. Investigue se a função f tem máximo e, em caso afirmativo, determine-o.

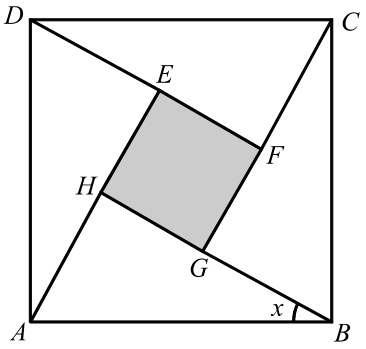
1.3. Considere ainda a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \frac{1}{2x}$

Determine os valores de x para os quais se verifica $f(x) \leq g(x)$

Apresente o conjunto solução na forma de intervalo de números reais.

2. Na figura,

- $[ABCD]$ é um quadrado de lado 1;
- $[AHB]$, $[BGC]$, $[CFD]$ e $[DEA]$ são triângulos rectângulos iguais;
- x designa a amplitude do ângulo HBA.



2.1. Mostre que a área da superfície sombreada é dada, em função de x, por

$$f(x) = 1 - \text{sen}\,(2x) \qquad \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$$

2.2. Calcule $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e interprete geometricamente o valor obtido (deve incluir, na sua interpretação, a figura que se obtém para $x = \frac{\pi}{4}$).

3. Um saco contém sete bolas, numeradas de 1 a 7, indistinguíveis ao tacto. Retiram-se sucessivamente, de forma aleatória, **duas** bolas do saco, repondo-se a primeira bola antes de se retirar a segunda.

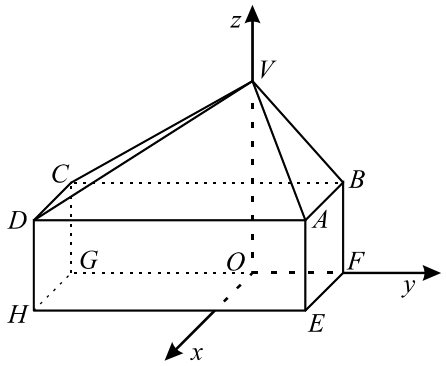
3.1. Qual é a probabilidade de os números saídos serem ambos pares? Apresente o resultado na forma de fracção.

3.2. Qual é a probabilidade de saírem dois números cuja soma seja igual a quatro? Apresente o resultado na forma de fracção.

4. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um sólido formado por um paralelepípedo rectângulo $[ABCDEFGH]$ e uma pirâmide $[ABCDV]$.

A base $[EFGH]$ do paralelepípedo está contida no plano xOy e a base da pirâmide coincide com a face superior do paralelepípedo.

A aresta $[GF]$ está contida no eixo Oy.



Uma equação da superfície esférica com centro $A(1,1,1)$ e que contém G é

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=11$

4.1. Verifique que o ponto H tem coordenadas $(1,\ -2, 0)$

4.2. Mostre que uma equação do plano AGH é $y-3z+2=0$

4.3. Designando por c a cota do ponto V, mostre que o volume do sólido é $2+c$

Formulário

$\text{sen}\,(2x) = 2\,.\,\text{sen}\,x\,.\,\cos x$

$\cos(2x) = \cos^2 x - \text{sen}^2\,x$

Volume da Pirâmide $= \frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **81**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **119**

1. 39
1.1. 13
1.2. 13
1.3. 13

2. 22
2.1. 11
2.2. 11

3. 22
3.1. 11
3.2. 11

4. 36
4.1. 12
4.2. 12
4.3. 12

TOTAL **200**

PROVA 135/8 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa «antigo»

Duração da prova: 120 minutos **Época Especial**
2001 **Julho/Agosto**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui nove questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui quatro questões de resposta aberta, subdivididas em alíneas, num total de dez.

Grupo I

- As nove questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Considere a equação $3\,y = \log_2 x \qquad (x > 0)$

Qual das seguintes condições é equivalente a esta equação?

(A) $x = 8^y$ **(B)** $x = 3\,y^2$ **(C)** $y = 9^x$ **(D)** $y = \left(\frac{x}{3}\right)^2$

2. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.
Sabe-se que a sua **derivada**, f', é tal que $f'(x) = x - 2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

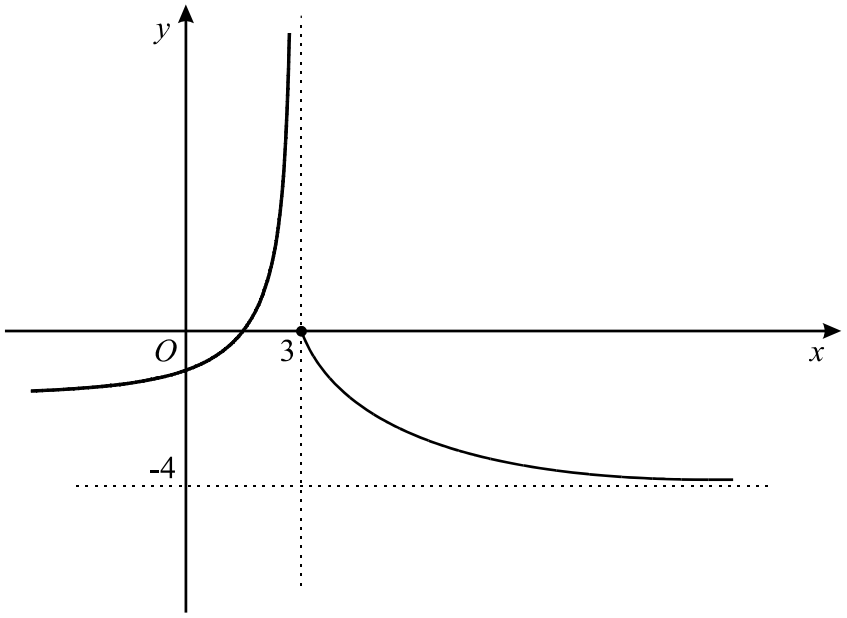
Relativamente à **função** f, qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) f é crescente em $\mathbb{R}$
(B) f é decrescente em $\mathbb{R}$
(C) f tem um mínimo para $x = 2$
(D) f tem um máximo para $x = 2$

3. Considere, num referencial o.n. xOy, um ponto P, distinto da origem e pertencente à recta de equação $y = 2\,x$.
Seja Q o simétrico de P, em relação à origem do referencial.
Considere o rectângulo de lados paralelos aos eixos do referencial e tal que uma das suas diagonais é o segmento $[PQ]$.
Qual das expressões seguintes dá a área desse rectângulo, em função da abcissa x do ponto P?

(A) $2\,x^2$ **(B)** $6\,x^2$ **(C)** $8\,x^2$ **(D)** $12\,x^2$

4. Na figura está representada parte do gráfico de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, contínua em $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.
As rectas de equações $x = 3$ e $y = -4$ são as únicas assimptotas do gráfico de g.



Seja (x_n) uma sucessão tal que $\lim g(x_n) = +\infty$

Qual das expressões seguintes pode ser o termo geral da sucessão (x_n)?

(A) $3 - \frac{1}{n}$ **(B)** $3 + \frac{1}{n}$

(C) $-4 - \frac{1}{n}$ **(D)** $-4 + \frac{1}{n}$

5. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere um ponto A pertencente ao semieixo positivo Ox e um ponto B pertencente ao semieixo positivo Oy.
Quais das seguintes podem ser as coordenadas do vector $\overrightarrow{AB}$?

(A) $(-2, 0, 1)$ **(B)** $(2, 0, -1)$ **(C)** $(-2, 1, 0)$ **(D)** $(2, -1, 0)$

6. Considere duas rectas distintas, r e s, perpendiculares a um mesmo plano.
Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

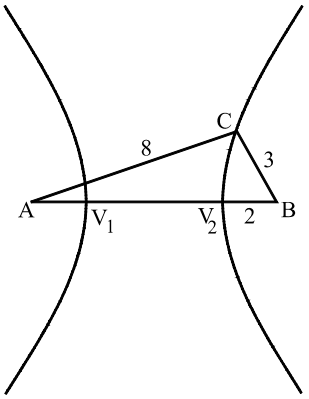
(A) r é perpendicular a s
(B) r e s são concorrentes, mas não perpendiculares
(C) r é paralela a s
(D) r e s não são complanares

7. Na figura está representada parte de uma hipérbole, cujos focos são os pontos A e B e cujos vértices são os pontos V_1 e V_2.

Tem-se ainda que:

- C é um ponto da hipérbole
- $\overline{AC} = 8$
- $\overline{BC} = 3$
- $\overline{V_2B} = 2$

Indique o perímetro do triângulo $[ABC]$.



(A) 19 **(B)** 20 **(C)** 21 **(D)** 22

8. Numa turma com doze raparigas e sete rapazes, vão ser escolhidos cinco elementos para formar uma comissão.

Pretende-se que essa comissão seja constituída por alunos **dos dois sexos**, mas tenha mais raparigas do que rapazes.

Nestas condições, quantas comissões diferentes se podem formar?

(A) ${}^{19}C_5 \times {}^{5}C_3 + {}^{19}C_5 \times {}^{5}C_2$ **(B)** ${}^{12}C_4 \times {}^{7}C_1 + {}^{8}C_3 \times {}^{6}C_2$

(C) ${}^{19}C_{12} \times {}^{12}C_3 + {}^{19}C_7 \times {}^{7}C_2$ **(D)** ${}^{12}C_4 \times {}^{7}C_1 + {}^{12}C_3 \times {}^{7}C_2$

9. A soma dos dois últimos números de uma certa linha do triângulo de Pascal é 11.

Qual é a soma dos três primeiros números dessa linha?

(A) 54 **(B)** 56 **(C)** 58 **(D)** 60

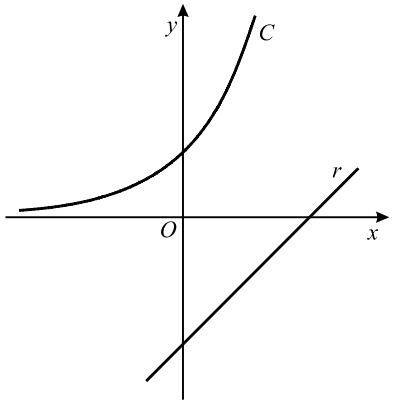
Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Na figura estão representadas, em referencial o. n. xOy:

- uma curva C, gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x$
- uma recta r, gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x - 2$

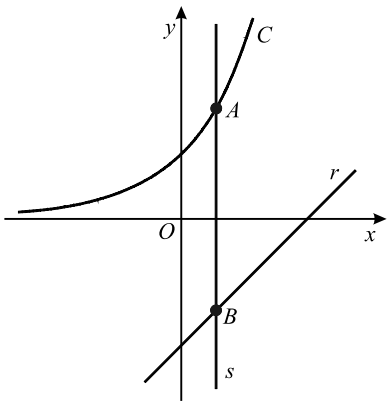


Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as alíneas seguintes:

1.1. Determine uma equação da recta paralela à recta r e tangente à curva C.

1.2. Estude a função $f + g$ quanto à existência de assimptotas do seu gráfico.

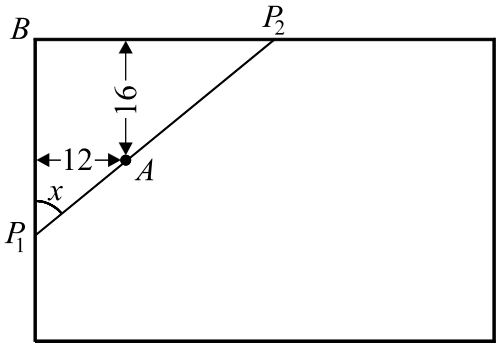
1.3. Considere agora que se acrescentou à figura anterior uma recta s, paralela ao eixo Oy.
Sejam A e B os pontos de intersecção da recta s com a curva C e com a recta r, respectivamente.
Imagine que a recta s se desloca, mantendo-se sempre paralela ao eixo Oy. Os pontos A e B acompanham, naturalmente, o deslocamento da recta s.



Seja x a abcissa do ponto A.

Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que existe $x \in [0, 2]$ tal que $\overline{AB} = 5$.

2. Na figura está representado um lago artificial de forma rectangular.



Pretende-se construir uma ponte, ligando duas margens do lago, entre os pontos P_1 e P_2, tal como a figura ilustra.

A ponte tem um ponto de apoio A, situado a $12\ m$ de uma das margens e a $16\ m$ da outra.

Seja x a amplitude do ângulo $P_2\,P_1B$.

2.1. Mostre que o comprimento da ponte, em metros, é dado por

$$c(x) = \frac{16\,\text{sen}\,x\ +\ 12\cos x}{\text{sen}\,x\ \cdot\ \cos x}$$

2.2. Considerando que a localização de P_1 e de P_2 pode variar, determine o comprimento da ponte para o qual se tem $\overline{BP_1} = \overline{BP_2}$
Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.

3. Considere:

- uma caixa com seis bolas, todas brancas;
- seis bolas pretas, fora da caixa;
- um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

Lança-se duas vezes o dado.
Tiram-se, da caixa, tantas bolas brancas quantas o número saído no primeiro lançamento.
Colocam-se, na caixa, tantas bolas pretas quantas o número saído no segundo lançamento.

3.1. Qual é a probabilidade de a caixa ficar com seis bolas? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3.2. Admita agora que, no primeiro lançamento do dado, saiu a face 5.
Qual é a probabilidade de, no final, ficarem, na caixa, mais bolas pretas do que brancas? Justifique a sua resposta.

4. Na figura estão representados, em referencial o. n. $Oxyz$, um prisma e uma pirâmide quadrangulares regulares, com a mesma altura.

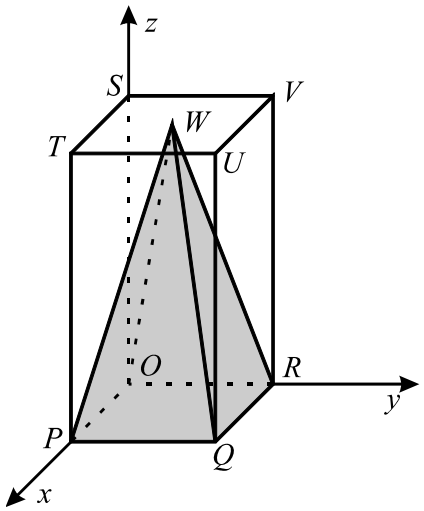
A base do prisma, que coincide com a base da pirâmide, está contida no plano xOy.

O vértice P pertence ao eixo Ox.

O vértice R pertence ao eixo Oy.

O vértice S pertence ao eixo Oz.

O vértice U tem coordenadas $(2, 2, 4)$.



4.1. Escreva uma condição que define a recta TU.

4.2. Calcule a amplitude do ângulo WQV. Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

4.3. Considere o plano de equação $x = y$.
Determine a área da região compreendida entre as secções produzidas, por esse plano, no prisma e na pirâmide.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **81**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **119**

1. 37
1.1. 12
1.2. 13
1.3. 12

2. 24
2.1. 12
2.2. 12

3. 22
3.1. 11
3.2. 11

4. 36
4.1. 12
4.2. 12
4.3. 12

TOTAL **200**

PROVA 435/9 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos **Época Especial**
2001 **Julho/Agosto**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui quatro questões de resposta aberta, subdivididas em alíneas, num total de dez.

Na página 9 deste enunciado encontra-se um formulário.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Considere a equação $3\,y = \log_2 x \qquad (x > 0)$

Qual das seguintes condições é equivalente a esta equação?

(A) $x = 8^y$ **(B)** $x = 3\,y^2$ **(C)** $y = 9^x$ **(D)** $y = \left(\frac{x}{3}\right)^2$

2. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.
Sabe-se que a sua **derivada**, f', é tal que $f'(x) = x - 2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

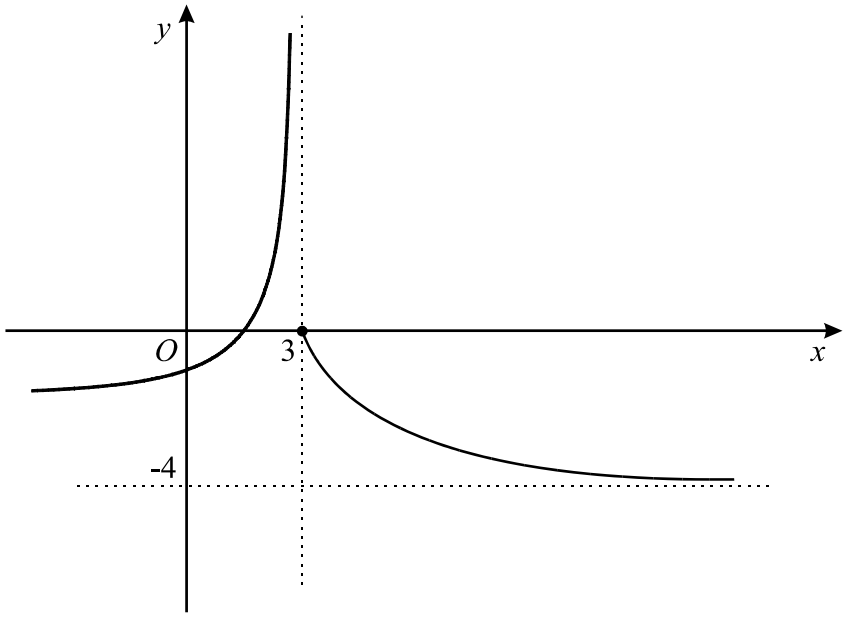
Relativamente à **função** f, qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) f é crescente em $\mathbb{R}$
(B) f é decrescente em $\mathbb{R}$
(C) f tem um mínimo para $x = 2$
(D) f tem um máximo para $x = 2$

3. Considere, num referencial o.n. xOy, um ponto P, distinto da origem e pertencente à recta de equação $y = 2\,x$.
Seja Q o simétrico de P, em relação à origem do referencial.
Considere o rectângulo de lados paralelos aos eixos do referencial e tal que uma das suas diagonais é o segmento $[PQ]$.
Qual das expressões seguintes dá a área desse rectângulo, em função da abcissa x do ponto P?

(A) $2\,x^2$ **(B)** $6\,x^2$ **(C)** $8\,x^2$ **(D)** $12\,x^2$

4. Na figura está representada parte do gráfico de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, contínua em $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.
As rectas de equações $x = 3$ e $y = -4$ são as únicas assimptotas do gráfico de g.



Seja (x_n) uma sucessão tal que $\lim g(x_n) = +\infty$

Qual das expressões seguintes pode ser o termo geral da sucessão (x_n)?

(A) $3 - \frac{1}{n}$ **(B)** $3 + \frac{1}{n}$

(C) $-4 - \frac{1}{n}$ **(D)** $-4 + \frac{1}{n}$

5. Numa turma com doze raparigas e sete rapazes, vão ser escolhidos cinco elementos para formar uma comissão.
Pretende-se que essa comissão seja constituída por alunos **dos dois sexos**, mas tenha mais raparigas do que rapazes.
Nestas condições, quantas comissões diferentes se podem formar?

(A) ${}^{19}C_5 \times {}^{5}C_3 + {}^{19}C_5 \times {}^{5}C_2$ **(B)** ${}^{12}C_4 \times {}^{7}C_1 + {}^{8}C_3 \times {}^{6}C_2$

(C) ${}^{19}C_{12} \times {}^{12}C_3 + {}^{19}C_7 \times {}^{7}C_2$ **(D)** ${}^{12}C_4 \times {}^{7}C_1 + {}^{12}C_3 \times {}^{7}C_2$

6. Dois atiradores, António e Belmiro, disparam simultaneamente sobre um alvo.

A probabilidade de o António acertar no alvo é $0{,}7$.

A probabilidade de o Belmiro acertar no alvo é $0{,}6$.

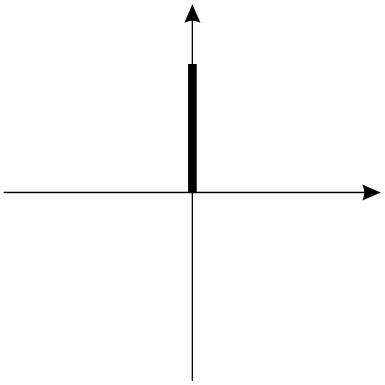
Admita que são independentes os acontecimentos «*O António acerta no alvo*» e «*O Belmiro acerta no alvo*».

Qual é a probabilidade de o alvo ser atingido?

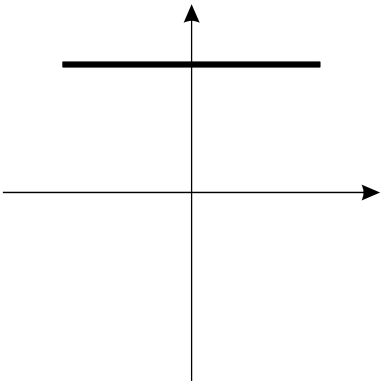
(A) $0{,}86$ **(B)** $0{,}88$ **(C)** $0{,}90$ **(D)** $0{,}92$

7. Qual das figuras seguintes pode ser a representação geométrica, no plano complexo, do conjunto $\left\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 \ \wedge \ \arg(z) = \frac{\pi}{2}\right\}$?

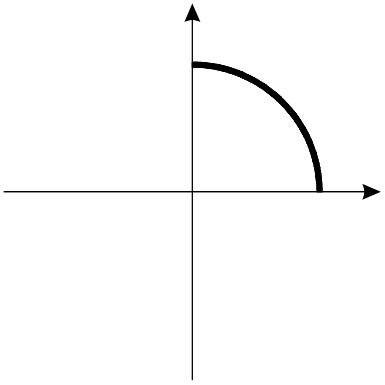
(A)



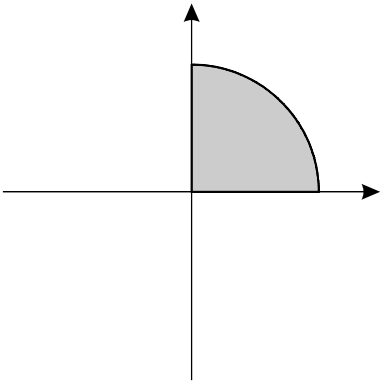
(B)



(C)



(D)



Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja

$z_1 = 1 + i$ (i designa a unidade imaginária).

1.1. Sem recorrer à calculadora, determine o valor de $\dfrac{z_1 + i^{23} + 4}{2 - i}$

Apresente o resultado na forma algébrica.

1.2. Prove que, qualquer que seja o número natural n, a imagem geométrica de z_1^{4n+1} pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares.

2. Considere:

- uma caixa com seis bolas, todas brancas;
- seis bolas pretas, fora da caixa;
- um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

Lança-se duas vezes o dado.

Tiram-se, da caixa, tantas bolas brancas quantas o número saído no primeiro lançamento.

Colocam-se, na caixa, tantas bolas pretas quantas o número saído no segundo lançamento.

2.1. Qual é a probabilidade de a caixa ficar com seis bolas? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

2.2. Sejam A e B os acontecimentos:

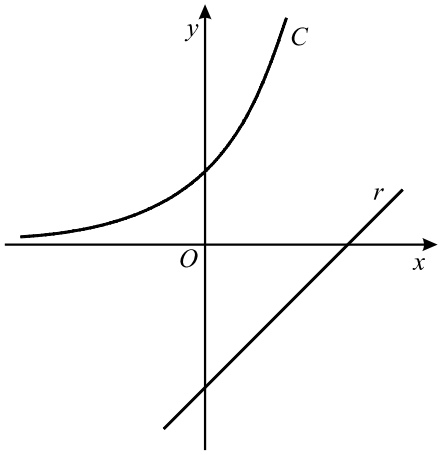
A - «*Sai face 5 no primeiro lançamento do dado*.»

B - «*Ficam, na caixa, menos bolas brancas do que pretas*.»

Indique, justificando, o valor da probabilidade condicionada $P(B|A)$. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3. Na figura estão representadas, em referencial o. n. xOy:

- uma curva C, gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x$
- uma recta r, gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x - 2$

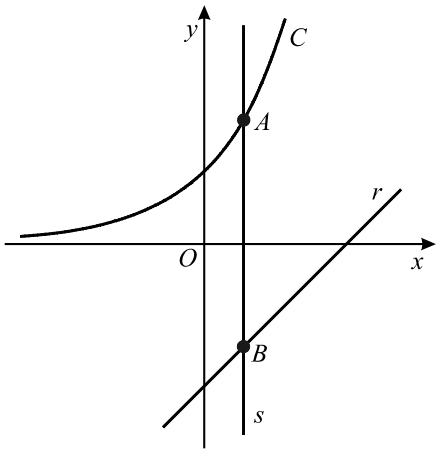


3.1. Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as duas alíneas seguintes:

3.1.1. Determine uma equação da recta paralela à recta r e tangente à curva C.

3.1.2. Estude a função $f + g$ quanto à existência de assimptotas do seu gráfico.

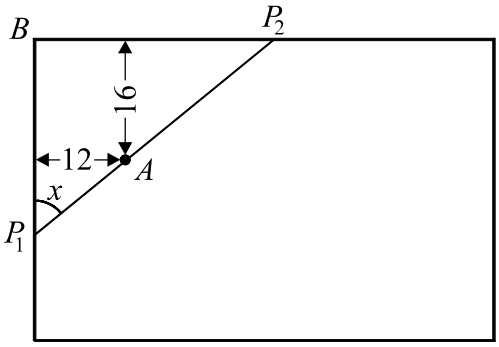
3.2. Considere agora que se acrescentou à figura anterior uma recta s, paralela ao eixo Oy.
Sejam A e B os pontos de intersecção da recta s com a curva C e com a recta r, respectivamente.
Imagine que a recta s se desloca, mantendo-se sempre paralela ao eixo Oy. Os pontos A e B acompanham, naturalmente, o deslocamento da recta s.



Seja x a abcissa do ponto A.

Recorrendo à calculadora, determine $x \in [0, 2]$ tal que $\overline{AB} = 5$. Apresente o resultado aproximado às décimas. Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).

4. Na figura está representado um lago artificial de forma rectangular.



Pretende-se construir uma ponte, ligando duas margens do lago, entre os pontos P_1 e P_2, tal como a figura ilustra.

A ponte tem um ponto de apoio A, situado a $12\ m$ de uma das margens e a $16\ m$ da outra.

Seja x a amplitude do ângulo $P_2\,P_1\,B$.

4.1. Mostre que o comprimento da ponte, em metros, é dado por

$$c(x) = \frac{16\,\text{sen}\,x\ +\ 12\cos x}{\text{sen}\,x\ \cdot\ \cos x}$$

4.2. Considerando que a localização de P_1 e de P_2 pode variar, determine o comprimento da ponte para o qual se tem $\overline{BP_1} = \overline{BP_2}$

Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.

4.3. Admita que, num dia de Verão, a temperatura da água do lago, em graus centígrados, pode ser dada, aproximadamente, por

$$f(t) = 17 + 4\cos\left[\frac{\pi\,(t+7)}{12}\right]$$

onde t designa o tempo, em horas, decorrido desde as zero horas desse dia.

(Considere que o argumento da função co-seno está expresso em radianos.)

Numa pequena composição, com cerca de quinze linhas, indique como varia a temperatura da água do lago, ao longo do dia.

Não deixe de referir os seguintes aspectos:

- quando é que a temperatura aumenta, e quando é que diminui;
- a que horas é que a temperatura é máxima, e qual é o valor desse máximo;
- a que horas é que a temperatura é mínima, e qual é o valor desse mínimo;
- as melhores horas para se tomar banho, admitindo que um banho só é realmente bom se a temperatura da água não for inferior a 19 graus.

Utilize a calculadora, se considerar que lhe pode ser útil.

Se o desejar, pode enriquecer a sua composição com o traçado de um ou mais gráficos.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 10
1.2. 11

2. 32
2.1. 16
2.2. 16

3. 42
3.1. 29
3.1.1. 14
3.1.2. 15
3.2. 13

4. 42
4.1. 13
4.2. 14
4.3. 15

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Círculo: $\pi\ r^2 \qquad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - raio\ da\ base;\ g - geratriz)$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\,r^2$
$(r - raio)$

Volumes

Prisma: *Área da base* $\times$ *Altura*

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3 \qquad (r - raio)$

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\,.\cos b + \text{sen}\,b\,.\cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\,.\cos b - \text{sen}\,a\,.\,\text{sen}\,b$

$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a\,.\,\text{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho\,cis\,\theta)\,.\,(\rho'\,cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta+\theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\,cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\,cis\,\theta)^n\ = \rho^n\,cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\,cis\,\theta}\ = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\,u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\,\text{sen}\,u$

$(\text{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

PROVA 435/9 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos **Época Especial**
2001 **Setembro**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui seis questões de resposta aberta, subdivididas em alíneas, num total de dez.

Na página 9 deste enunciado encontra-se um formulário.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, estritamente crescente.
Qual das seguintes afirmações é **necessariamente** verdadeira?

(A) A função f não pode ter mais do que um zero.
(B) A função f tem contradomínio $\mathbb{R}$.
(C) O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima.
(D) O gráfico da função f é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

2. Para um certo número real a, o gráfico da função g, definida por $g(x) = ax^2 + 3$, tem, no ponto de abcissa 1, uma recta tangente com declive 4.

Qual é o valor de a?

(A) 4 **(B)** 2 **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{3}{2}$

3. Considere uma função h, **contínua** em $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$, tal que:

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = 5 \qquad \lim_{x\to-3} h(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$$

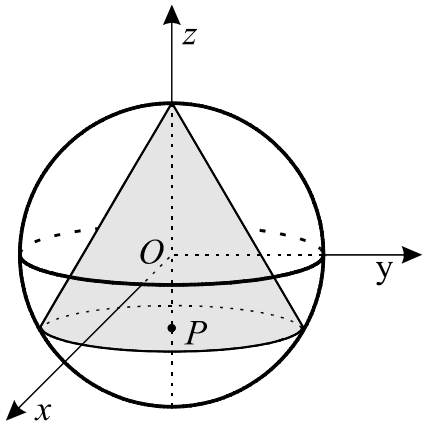
Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) O gráfico da função h não tem assimptotas verticais.
(B) O gráfico da função h não tem assimptotas horizontais.
(C) A função h tem mínimo absoluto.
(D) A equação $h(x) = 2$ tem pelo menos uma solução.

4. Num referencial o. n. $Oxyz$, considere a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Um ponto P desloca-se sobre o diâmetro que está contido no eixo Oz.

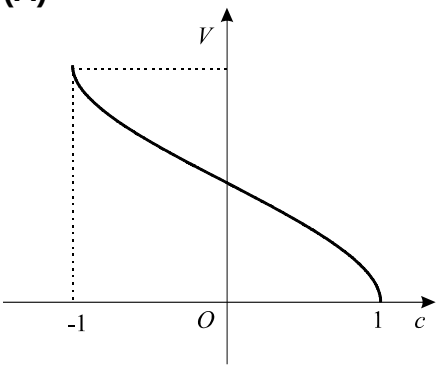
Para cada posição do ponto P, considere o cone, inscrito na superfície esférica, que tem por base o círculo cujo centro é o ponto P e que tem por vértice o ponto $(0, 0, 1)$.



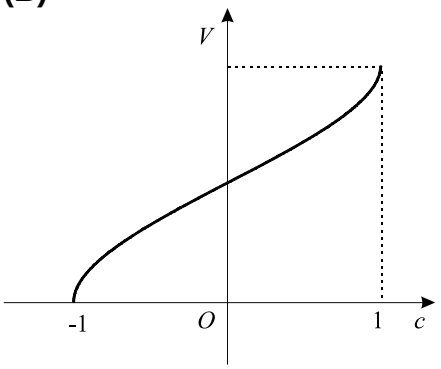
Seja f a função que faz corresponder, à **cota** c do ponto P, o **volume** V do referido cone.

Qual dos seguintes gráficos pode ser o da função f ?

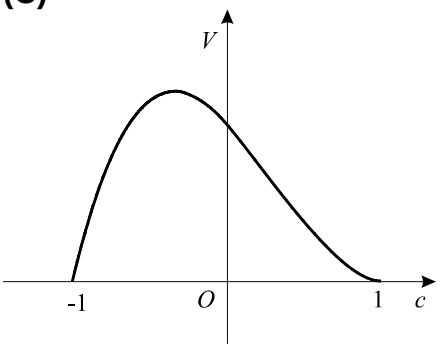
(A)



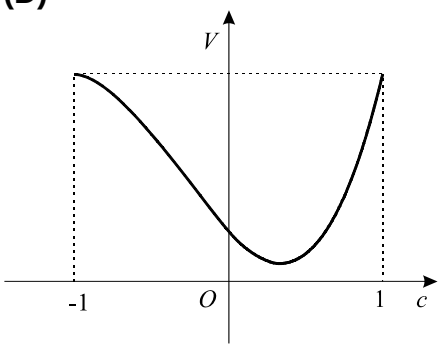
(B)



(C)



(D)



5. Uma estante tem oito prateleiras. Pretende-se expor, nessa estante, seis peças de porcelana: duas jarras iguais e quatro pratos diferentes.
De quantas maneiras podem ser expostas as seis peças nas oito prateleiras, de tal modo que não fique mais do que uma peça em cada prateleira?

(A) $^8C_2 \times {}^6A_4$ **(B)** $^8A_2 \times 4!$

(C) $^8C_2 \times {}^8A_4$ **(D)** $^8A_2 \times {}^6C_4$

6. Uma turma M tem sete rapazes e cinco raparigas.
Uma turma N tem seis rapazes e seis raparigas.
Escolhe-se, ao acaso, uma turma e, seguidamente, um elemento dessa turma.

Considere os acontecimentos:
X : «a turma escolhida é a turma M»;
Y : «o elemento escolhido é rapariga».

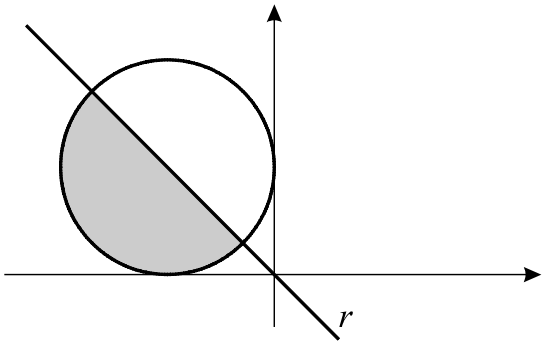
Indique o valor da probabilidade condicionada $P(Y|X)$.

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{5}{12}$ **(C)** $\frac{7}{12}$ **(D)** $\frac{11}{24}$

7. Considere, no plano complexo, o conjunto representado na figura.

A circunferência tem raio 2 e é tangente aos eixos.

A recta r contém a origem do referencial e o centro da circunferência.



Qual das condições seguintes, definidas em $\mathbb{C}$, define a região sombreada, incluindo a fronteira?

(A) $|z+2-2i| \leq 2 \quad \wedge \quad \frac{3\pi}{4} \leq arg(z) \leq \pi$

(B) $|z-1+i| \leq 2 \quad \wedge \quad \frac{3\pi}{4} \leq arg(z) \leq \pi$

(C) $|z-1+i| \leq 2 \quad \wedge \quad \frac{\pi}{2} \leq arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$

(D) $|z+2-2i| \leq 2 \quad \wedge \quad \frac{\pi}{2} \leq arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 16\ cis\ \frac{\pi}{4}$

Sem recorrer à calculadora, resolva as duas alíneas seguintes:

1.1. Mostre que z_1 é solução da equação $iz = -\overline{z}$
(i designa a unidade imaginária e $\overline{z}$ designa o conjugado de z).

1.2. Determine a área do polígono cujos vértices são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes quartas de z_1.

2. Um saco contém sete bolas, numeradas de 1 a 7, indistinguíveis ao tacto. Retiram-se sucessivamente, de forma aleatória, **duas** bolas do saco, repondo-se a primeira bola antes de se retirar a segunda.
Qual é a probabilidade de saírem dois números cuja soma seja igual a quatro?
Apresente o resultado na forma de fracção.

3. Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Sabendo que A e B são independentes, prove que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \times P(\overline{A})$$

(P designa probabilidade e $\overline{A}$ designa o acontecimento contrário de A).

4. Considere a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

($\ln$ designa logaritmo de base e)

4.1. Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as duas alíneas seguintes:

4.1.1. Estude a função f quanto à existência de assimptotas verticais.

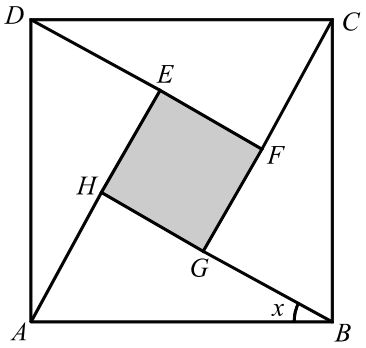
4.1.2. Investigue se a função f tem máximo e, em caso afirmativo, determine-o.

4.2. A equação $f(x) = x - 12$ tem exactamente duas soluções. Recorrendo à sua calculadora, resolva **graficamente** esta equação. Apresente as soluções com aproximação às décimas.

Explique como procedeu, apresentando o gráfico, ou gráficos, em que se baseou para dar a sua resposta.

5. Na figura

- $[ABCD]$ é um quadrado de lado 1.
- $[AHB]$, $[BGC]$, $[CFD]$ e $[DEA]$ são triângulos rectângulos iguais.
- x designa a amplitude do ângulo HBA.



5.1. Mostre que a área da superfície sombreada é dada, em função de x, por

$$f(x) = 1 - 2\operatorname{sen} x \cos x \qquad \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$$

5.2. Calcule $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e interprete geometricamente o valor obtido (deve incluir, na sua interpretação, a figura que se obtém para $x = \frac{\pi}{4}$).

6. Uma criança, sentada num baloiço, é largada de uma certa altura. Suponha que a criança não dá balanço, apenas aguarda que o baloiço pare.
De entre os gráficos seguintes, apenas um deles corresponde à função que dá a distância do baloiço ao chão, t segundos após o início do movimento.

Gráfico 1

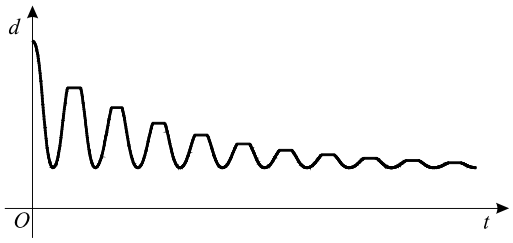


Gráfico 2

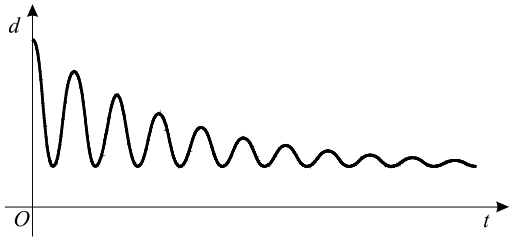


Gráfico 3

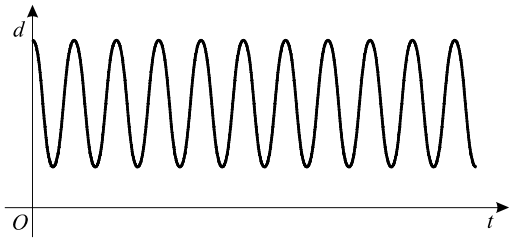
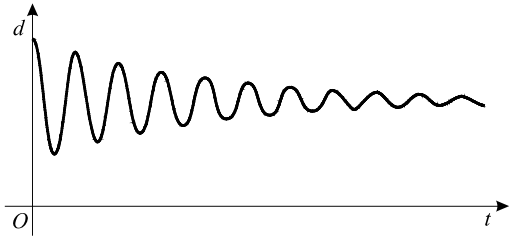


Gráfico 4



Qual é o gráfico correcto? Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explique as razões que o levam a rejeitar os outros três.

Note bem:
Não necessita de explicar por que razão considera adequado o gráfico por si escolhido como correcto. Deve limitar-se a explicar o que o leva a afirmar que os outros estão incorrectos, indicando três razões diferentes (uma por cada gráfico rejeitado). Mais precisamente: para cada um dos gráficos que considera incorrecto, deve explicitar uma (e só uma) razão pela qual o rejeita, explicando a sua inadequação, relativamente à situação descrita.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21

1.1. 10
1.2. 11

2. 15

3. 15

4. 45

4.1. 30
4.1.1. 15
4.1.2. 15
4.2. 15

5. 26

5.1. 13
5.2. 13

6. 15

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Círculo: $\pi\ r^2 \qquad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - raio\ da\ base;\ g - geratriz)$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - raio)$

Volumes

Prisma: *Área da base* × *Altura*

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3 \qquad (r - raio)$

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\,.\cos b + \text{sen}\,b\,.\cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\,.\cos b - \text{sen}\,a\,.\,\text{sen}\,b$

$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a\,.\,\text{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho\, cis\,\theta)\,.\,(\rho'\, cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta+\theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\,\theta)^n\ = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta}\ = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\,u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\,\text{sen}\,u$

$(\text{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

2002

PROVA 435/11 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos
2002

1.ª FASE
1.ª CHAMADA
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui quatro questões de resposta aberta, subdivididas em alíneas, num total de onze.

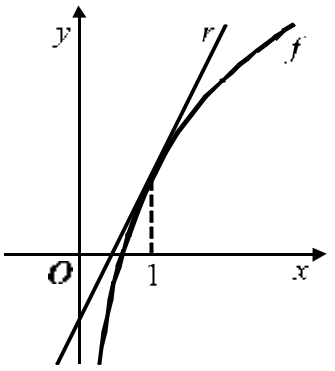
Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Na figura estão representadas, num referencial o. n. xOy:

- parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = 1 + 2\ln x$.
- a recta r, tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1



Qual é o declive da recta r?

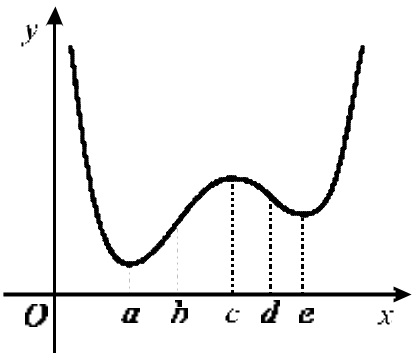
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

2. Seja h uma função **contínua**, de domínio $\mathbb{R}$.

Qual dos seguintes conjuntos **não pode** ser o contradomínio de h?

(A) $\mathbb{R}$ **(B)** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ **(C)** $\mathbb{R}^-$ **(D)** $]0,1[$

3. Na figura junta está representada parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$.



Numa das alternativas seguintes estão os quadros de sinais de f' e de f'', respectivamente primeira e segunda derivadas de f.

Em qual delas?

(A)

x		a		c		e	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

x		b		d	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

(B)

x		a		c		e	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

x		b		d	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

(C)

x		a		c		e	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

x		b		d	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

(D)

x		a		c		e	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

x		b		d	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

4. O gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 0{,}1 + 0{,}2\, e^{0{,}3\,x}$, tem uma única assimptota.

Qual das condições seguintes é uma equação dessa assimptota?

(A) $y = 0$ **(B)** $y = 0{,}1$

(C) $y = 0{,}2$ **(D)** $y = 0{,}3$

5. Um saco contém cinco cartões, numerados de 1 a 5.

A Joana retira sucessivamente, ao acaso, os cinco cartões do saco e alinha-os, da esquerda para a direita, pela ordem de saída, de maneira a formar um número de cinco algarismos.

Qual é a probabilidade de esse número ser par e de ter o algarismo das dezenas também par?

(A) $\frac{{}^5C_2}{{}^5A_2}$ **(B)** $\frac{{}^5C_2}{5!}$ **(C)** $\frac{2\times 3!}{{}^5A_2}$ **(D)** $\frac{2\times 3!}{5!}$

6. A tabela de distribuição de probabilidade de uma variável aleatória X é:

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	a	$2\,a$	a

Qual é o valor de a?

(A) $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

7. Qual das seguintes condições define, no plano complexo, o eixo imaginário?

(A) $z + \overline{z} = 0$ **(B)** $\mathrm{Im}(z) = 1$

(C) $|z| = 0$ **(D)** $z - \overline{z} = 0$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Em $\mathbb{C}$, considere os números complexos: $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = \sqrt{2}\ cis\ \frac{3}{4}\pi$

1.1. Verifique que z_1 e z_2 são raízes quartas de um mesmo número complexo. Determine esse número, apresentando-o na forma algébrica.

1.2. Considere, no plano complexo, os pontos A, B e O em que:
- A é a imagem geométrica de z_1
- B é a imagem geométrica de z_2
- O é a origem do referencial.

Determine o perímetro do triângulo $[AOB]$.

2.

2.1. Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$).
Prove que

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) - P(B) + P(A|B) \times P(B)$$

(P designa probabilidade, $\overline{A}$ e $\overline{B}$ designam os acontecimentos contrários de A e de B, respectivamente, e $P(A|B)$ designa a probabilidade de A, se B).

2.2. Das raparigas que moram em Vale do Rei, sabe-se que:
- a quarta parte tem olhos verdes;
- a terça parte tem cabelo louro;
- das que têm cabelo louro, metade tem olhos verdes.

2.2.1. Escolhendo aleatoriamente uma rapariga de Vale do Rei, qual é a probabilidade de ela não ser loura nem ter olhos verdes?
Sugestão: se lhe for útil, pode utilizar a igualdade enunciada na alínea 2.1. para resolver o problema.

2.2.2. Admita agora que em Vale do Rei moram cento e vinte raparigas.
Pretende-se formar uma comissão de cinco raparigas, para organizar um baile.
Quantas comissões diferentes se podem formar com exactamente duas raparigas louras?

3. Doses terapêuticas iguais de um certo antibiótico são administradas, pela primeira vez, a duas pessoas: a Ana e o Carlos.
Admita que, durante as doze primeiras horas após a tomada simultânea do medicamento pela Ana e pelo Carlos, as concentrações de antibiótico, medidas em miligramas por litro de sangue, são dadas, respectivamente, por

$$A(t) = 4t^3\, e^{-t} \qquad \text{e} \qquad C(t) = 2t^3\, e^{-0,7\,t}$$

A variável t designa o tempo, medido em **horas**, que decorre desde o instante em que o medicamento é tomado ($t \in [0, 12]$).

3.1. Recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora para efectuar cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes.

3.1.1. Determine o valor da concentração deste antibiótico no sangue da Ana, quinze **minutos** depois de ela o ter tomado. Apresente o resultado, em miligramas por litro de sangue, arredondado às centésimas.
Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3.1.2. No instante em que as duas pessoas tomam o medicamento, as concentrações são iguais (por serem nulas). Determine quanto tempo depois as concentrações voltam a ser iguais. Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).
Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3.2. Considere as seguintes questões:

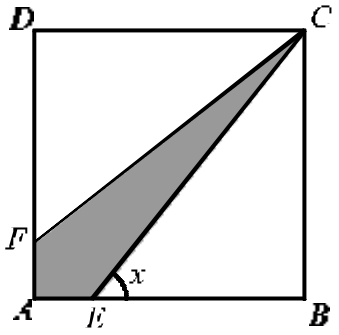
1. *Quando a concentração ultrapassa 7,5 miligramas por litro de sangue, o medicamento pode ter efeitos secundários indesejáveis. Esta situação ocorrerá, neste caso, com alguma destas duas pessoas? Caso afirmativo, com quem? E em quantos miligramas por litro o referido limiar será ultrapassado?*

2. *Depois de atingir o nível máximo, a concentração começa a diminuir. Quando fica inferior a 1 miligrama por litro de sangue, é necessário tomar nova dose do medicamento. Quem deve tomá-la em primeiro lugar, a Ana ou o Carlos? E quanto tempo antes do outro?*

Utilize as capacidades gráficas da sua calculadora para investigar estas duas questões.

Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explicite as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente. Apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos (coordenadas arredondadas às décimas).

4. Na figura está representado um quadrado $[ABCD]$, de lado 1.



O ponto E desloca-se sobre o lado $[AB]$, e o ponto F desloca-se sobre o lado $[AD]$, de tal forma que se tem sempre $\overline{AE}=\overline{AF}$.

Para cada posição do ponto E, seja x a amplitude do ângulo BEC $\left(x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, resolva as três alíneas seguintes:

4.1. Mostre que o **perímetro** do quadrilátero $[CEAF]$ é dado, em função de x, por $f(x)=2-\frac{2}{\operatorname{tg} x}+\frac{2}{\operatorname{sen} x}$

4.2. Calcule $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x)$ e interprete geometricamente o valor obtido.

4.3. Mostre que $f'(x)=\frac{2-2\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$ e estude a função f quanto à monotonia.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 11
1.2. 10

2. 32
2.1. 11
2.2. 21
2.2.1. 11
2.2.2. 10

3. 43
3.1. 27
3.1.1. 13
3.1.2. 14
3.2. 16

4. 41
4.1. 13
4.2. 12
4.3. 16

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal maior \times Diagonal menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base maior + Base menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Círculo: $\pi\, r^2 \qquad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - \textit{raio da base};\ g - \textit{geratriz})$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - raio)$

Volumes

Prisma: *Área da base* × *Altura*

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3 \qquad (r - raio)$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\,\theta) \cdot (\rho'\, cis\,\theta') = \rho\,\rho'\, cis\,(\theta + \theta')$

$\dfrac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\ cis\,\theta'} = \dfrac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\,\theta)^n = \rho^n\, cis(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\,\dfrac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ , k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\, v + u\,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\, v - u\,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\, u^{n-1}\,.\, u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\, e^u$

$(a^u)' = u'.\, a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos — **1.ª FASE**
2002 — **1.ª CHAMADA**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
- **1.1.** 11
- **1.2.** 10

2. 32
- **2.1.** 11
- **2.2.** 21
  - **2.2.1.** 11
  - **2.2.2.** 10

3. 43
- **3.1.** 27
  - **3.1.1.** 13
  - **3.1.2.** 14
- **3.2.** 16

4. 41
- **4.1.** 13
- **4.2.** 12
- **4.3.** 16

TOTAL **200**

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

Pode acontecer que o examinando não respeite a indicação, expressa no enunciado, de que deverá escrever apenas a letra correspondente à alternativa seleccionada. Por exemplo: pode acontecer que ele apresente cálculos; pode acontecer que escreva, para além da letra, a resposta que lhe corresponde; pode acontecer que se esqueça de escrever a letra e escreva apenas a resposta; etc. Deverão ser consideradas (como certas ou como erradas) todas as questões em que não haja qualquer dúvida sobre a alternativa que o examinando seleccionou, mesmo que, formalmente, desrespeitem a referida indicação. Deverão ser anuladas todas as questões onde existam dúvidas sobre a alternativa seleccionada.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Versão 1	B	B	C	B	D	B	A
Versão 2	C	C	B	A	C	D	D

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, no primeiro grupo, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas **Resp. certas**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

Grupo II

Critérios gerais

1. A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro, não negativo, de pontos.

2. Se, numa alínea em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, o examinando se limitar a apresentar o resultado final, deverão ser atribuídos zero pontos a essa alínea.

3. Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

4. Existem alíneas cuja cotação está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para as resolver.

- Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.
- Caso a resolução da etapa esteja incompleta, ou contenha incorrecções, cabe ao classificador decidir a cotação a atribuir a essa etapa, tendo em conta o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:
  - erros de contas ocasionais devem ser penalizados em um ponto;
  - erros graves, que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades, devem ser penalizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa.
- No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.
- Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.
- Pode acontecer que o examinando, ao resolver uma questão, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

5. Existem alíneas em que estão previstos alguns erros que o examinando pode cometer. Para cada caso, é indicada a cotação a atribuir. O examinando pode, contudo, utilizar um processo não contemplado nos critérios e/ou cometer um erro não previsto. Cabe ao classificador adaptar as referências dadas a todas as situações não previstas.

6. Se, na resolução de uma alínea, o examinando utilizar simbologia inequivocamente incorrecta (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), tal deve ser penalizado em um ponto, na cotação total a atribuir a essa alínea.

Critérios específicos

1.1. 11

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, cinco processos:

1.º Processo

$z_1^4 = -4$ (cálculo efectuado na forma algébrica) 7

$z_2^4 = 4cis(3\pi)$ 2

Conclusão 2

2.º Processo

$|z_1| = \sqrt{2}$ 2

Determinar um argumento de z_1 (por exemplo, $\frac{\pi}{4}$).....2

$z_1^4 = 4cis\,\pi$ 2

$z_2^4 = 4cis(3\pi)$ 2

$4cis\,\pi = 4cis(3\pi) = -4$ .....3 (1+2)

3.º Processo

$|z_1| = \sqrt{2}$ 2

Determinar um argumento de z_1 (por exemplo, $\frac{\pi}{4}$).....2

Conclusão (como $|z_1| = |z_2|$ e $\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$,

z_1 e z_2 são raízes quartas de um mesmo número complexo) 3

Número pedido $= -4$ 4

4.º Processo

$z_2^4 = 4cis(3\pi)$ 2

Escrever a expressão geradora das raízes quartas de z_2^4 2

Verificar que z_1 é uma das raízes 5

$4cis(3\pi) = -4$ 2

5.º Processo

Evidenciar que as representações geométricas de z_1 e de z_2 são vértices de um quadrado de centro na origem, pelo que z_1 e z_2 são raízes quartas de um mesmo número complexo 7

Número pedido $= -4$ 4

1.2. 10

Indicar os comprimentos dos lados do triângulo .....9 (3×3)

Perímetro do triângulo $= 2 + 2\sqrt{2}$.....1

Notas:

1. Não se exige o desenho do triângulo cujo perímetro é pedido.

2. Se o examinando se limitar a esboçar correctamente o triângulo, deverão ser atribuídos 4 pontos à sua resposta.

2.1. 11

O examinando deve utilizar

- Leis de De Morgan
- Propriedade relativa à probabilidade do acontecimento contrário
- Propriedade relativa à probabilidade da união de dois acontecimentos
- $P(A \cap B) = P(A \mid B) \times P(B)$

e deve concluir que

- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) - P(B) + P(A \mid B) \times P(B)$

Na tabela seguinte, indica-se como esta alínea deve ser cotada:

Forma / **Conteúdo**	Nível 1 ($*$)	Nível 2 ($**$)
O examinando utiliza as quatro propriedades e conclui o pretendido.	11	10
O examinando utiliza as quatro propriedades, mas não conclui.	8	7
O examinando utiliza apenas três propriedades.	6	5
O examinando utiliza apenas duas propriedades.	4	3
O examinando utiliza apenas uma propriedade.	2	1

($*$) **Nível 1** - Resposta bem estruturada e correcta do ponto de vista formal.

($**$) **Nível 2** - Resposta mal estruturada e/ou com alguns erros formais.

2.2.1. 11

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, quatro processos:

No que se segue, vamos designar por A o acontecimento «ter olhos verdes» e por B o acontecimento «ter cabelo louro».
Como é evidente, o examinando poderá escolher outras designações.

1.º Processo

$P(A)=\frac{1}{4}$ 1

$P(B)=\frac{1}{3}$ 1

$P(A|B)=\frac{1}{2}$ 2

$P(\overline{A})=\frac{3}{4}$ 1

Aplicar a fórmula ($P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{3}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$).....4

$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{7}{12}$.....2

2.º Processo

$P(A)=\frac{1}{4}$ 1

$P(B)=\frac{1}{3}$ 1

$P(A|B)=\frac{1}{2}$ 2

$P(A\cap B)=\frac{1}{6}$ 2

$P(A\cup B)=\frac{5}{12}$ 3

$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{7}{12}$.....2

Nota:
Neste processo, o examinando pode utilizar um diagrama de Venn.

3.º Processo

(Através de uma tabela)

Preencher a célula relativa a $P(A)$ com o valor $\frac{1}{4}$ 1

Preencher a célula relativa a $P(B)$ com o valor $\frac{1}{3}$ 1

Obter o valor $\frac{1}{6}$, da célula relativa a $P(A\cap B)$ 4

Obter o valor $\frac{7}{12}$, da célula relativa a $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ 5

4.º Processo

(Através de um diagrama em árvore)

Preencher o ramo relativo a $P(B)$ com o valor $\frac{1}{3}$ 1

Preencher o ramo relativo a $P(A|B)$ com o valor $\frac{1}{2}$ 2

Obter o valor $\frac{1}{6}$, do ramo relativo a $P(A \cap B)$ 3

Obter o valor $\frac{7}{12}$, do ramo relativo a $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ 5

2.2.2. 10

Número de raparigas com cabelos louros $=40$ 2

Número pedido $= {}^{40}C_2 \times {}^{80}C_3$ **(ver nota)**.....7

Número pedido $=64084800$ 1

Nota:

Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, com a respectiva cotação a atribuir.

${}^{40}C_2 \times {}^{80}C_3$ (número correcto).....7

${}^{40}A_2 \times {}^{80}A_3$ 2

3.1.1. 13

Identificar o pedido com $A\left(\frac{1}{4}\right)$ 7

$A\left(\frac{1}{4}\right) \approx 0,05$ **(ver nota)** 6

Nota:

Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às centésimas, ou se o arredondamento estiver incorrecto, deverá ser penalizado em 1 ponto.

3.1.2. 14

Equacionar o problema $(4\,t^3e^{-t} = 2\,t^3e^{-0,7t})$ 3

$4\,t^3e^{-t} = 2\,t^3e^{-0,7t} \Leftrightarrow e^{-0,3t} = \frac{1}{2}$ (para $t > 0$)

ou

$4\,t^3e^{-t} = 2\,t^3e^{-0,7t} \Leftrightarrow t = 0 \ \vee \ e^{-0,3t} = \frac{1}{2}$ 5

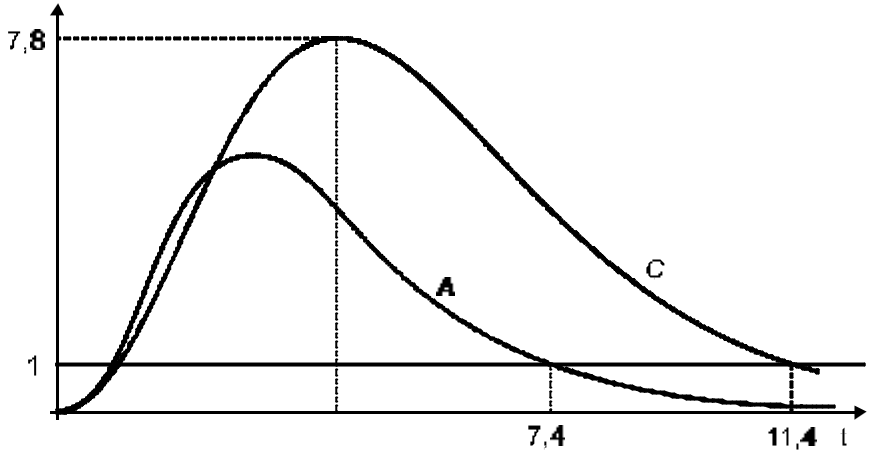
Tempo pedido $= \frac{\ln(1/2)}{-0,3}$ 3

Tempo pedido $\approx 2,31$ 1

Tempo pedido $\approx 2\,\text{h}\ \ 19\,\text{m}$ 2

3.2. 16

Apresenta-se a seguir um exemplo de resposta.



O nível máximo de concentração do antibiótico no sangue do Carlos ultrapassa, em 0,3 miligramas por litro de sangue, o limiar a partir do qual o medicamento pode causar efeitos secundários. De facto, como se pode concluir da análise do gráfico da função C, o nível máximo de concentração do medicamento no sangue do Carlos é de 7,8 miligramas por litro.
Por simples observação dos gráficos, verifica-se claramente que, no caso da Ana, essa situação não ocorre.
A partir das abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos com a recta de equação $y = 1$, pode concluir-se que a Ana deve tomar nova dose do medicamento cerca de 7,4 horas depois de ter tomado a primeira, enquanto o Carlos deverá fazê-lo 4 horas depois, ou seja, 11,4 horas depois de ter tomado a sua primeira dose.

Esta alínea deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

Apresentação da informação recolhida na utilização da calculadora **(ver nota 1)** 6

Composição **(ver notas 2 e 3)** 10

Notas:

1. Indica-se a seguir como deve ser cotada a apresentação da informação recolhida na utilização da calculadora:

O examinando reproduz os gráficos obtidos na calculadora e indica as coordenadas relevantes para responder às duas questões colocadas 6

O examinando reproduz os gráficos obtidos na calculadora e indica as coordenadas relevantes para responder a uma das questões colocadas 4

O examinando limita-se a reproduzir os gráficos obtidos na calculadora 2

2. Na tabela seguinte, indica-se como deve ser cotada a composição.

Forma / **Conteúdo**	Nível 1 $(*)$	Nível 2 $(**)$	Nível 3 $(***)$
Analisa correctamente as duas questões colocadas.	10	8	6
Analisa correctamente apenas a segunda questão.	6	5	4
Analisa correctamente apenas a primeira questão.	4	3	2

$(*)$ **Nível 1** - Redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).

$(**)$ **Nível 2** - Redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecte a inteligibilidade.

$(***)$ **Nível 3** - Redacção confusa, sem estruturação aparente, presença de erros graves, com perturbação frequente da inteligibilidade.

Pode acontecer que uma composição não se enquadre completamente num dos três níveis descritos e/ou contenha características presentes em mais do que um deles. Nesse caso, deverá ser atribuída uma pontuação intermédia, desde que respeite a indicação, dada nos critérios gerais, de que a cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

3. Pode acontecer que o examinando se engane a introduzir a expressão das funções na calculadora. Nestas circunstâncias, cabe ao classificador adaptar as indicações dadas na tabela acima, tendo em conta os seguintes parâmetros:
- plausibilidade dos gráficos obtidos, face à situação em estudo;
- correcção matemática das afirmações produzidas, face aos gráficos obtidos.

4.1. 13

O examinando deve

- Mostrar que $\overline{CE} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$
- Mostrar que $\overline{EB} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$
- Evidenciar que $\overline{AE} = 1 - \overline{EB}$
- Evidenciar que o perímetro pedido é igual a $2 \times \overline{AE} + 2 \times \overline{CE}$

e deve concluir que $f(x) = 2 - \frac{2}{\operatorname{tg} x} + \frac{2}{\operatorname{sen} x}$

Na tabela seguinte, indica-se como esta alínea deve ser cotada:

Forma **Conteúdo**	Nível 1 $(*)$	Nível 2 $(**)$
O examinando percorre as quatro etapas e conclui o pretendido.	13	12
O examinando percorre as quatro etapas, mas não conclui o pretendido.	11	10
O examinando percorre apenas três etapas, não podendo, portanto, concluir o pretendido.	8	7
O examinando percorre apenas duas etapas, não podendo, portanto, concluir o pretendido.	5	4
O examinando percorre apenas uma etapa, não podendo, portanto, concluir o pretendido.	2	1

$(*)$ **Nível 1** - Resposta bem estruturada e correcta do ponto de vista formal.

$(**)$ **Nível 2** - Resposta mal estruturada e/ou com alguns erros formais.

4.2. 12

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=4$ 7

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \dfrac{2}{\operatorname{tg} x}=0$ **(ver nota 1)** 4

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \dfrac{2}{\operatorname{sen} x}=2$ **(ver nota 2)** 2

Conclusão 1

Interpretação **(ver nota 3)**.....5

Notas:

1. Se o examinando não explicitar este passo, estes 4 pontos não devem ser atribuídos.

2. Se o examinando não explicitar este passo, estes 2 pontos não devem ser atribuídos.

3. A interpretação deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

Interpretação correcta, utilizando uma linguagem correcta (Exemplo: quando $x \to \frac{\pi}{2}$, o quadrilátero tende a coincidir com o quadrado $[ABCD]$, pelo que o seu perímetro tende para o perímetro do quadrado) 5

Interpretação com incorrecções de linguagem (Exemplo: a figura tende para o perímetro do quadrado) 3

Interpretação incorrecta (Inclui-se o caso em que o examinando obtém, para o limite, um valor menor ou igual a zero, ou infinito, e tenta interpretá-lo) 0

4.3. 16

$\left(\frac{2}{\operatorname{tg} x}\right)' = \frac{\frac{-2}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x}$ 2

$\left(\frac{2}{\operatorname{sen} x}\right)' = \frac{-2\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$ 2

Mostrar que $f'(x) = \frac{2 - 2\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$ 4

Referir que $f'(x) > 0$ **(ver notas 1 e 2)** 4

Concluir que a função f é crescente **(ver nota 1)** 4

Notas:

1. A análise do sinal de f' e a conclusão podem ser apresentadas através de um quadro.

2. Se, no quadro, o examinando não indicar correctamente o domínio da função, deverá ser penalizado em 2 pontos.

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA (PROVA 435)

(1ª FASE—1ª CHAMADA)

Grupo I

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	B	B	C	B	D	B	A
Versão 2	C	C	B	A	C	D	D

Grupo II

(Proposta de Resolução)

1.1. $z_1 = \sqrt{2}\,\text{cis}\ \pi/4$ dado que $|z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ e $\text{Arg}\ z_1 = \pi/4$, uma vez que $\text{Re}\ z_1 = \text{Im}\ z_1$ e ambos os números são positivos.

$$z_1^4 = (\sqrt{2})^4 \text{cis}\ \frac{4\pi}{4} = 4\text{cis}\ \pi = -4$$

$$z_2^4 = (\sqrt{2})^4 \text{cis}\ \left(4 \times \frac{3\pi}{4}\right) = 4\text{cis}\ (3\pi) = 4\text{cis}\ \pi = -4$$

Portanto, z_1 e z_2 são raízes quartas de -4.

1.2. Os comprimentos dos lados $[OA]$ e $[OB]$ medem $\sqrt{2}$, atendendo ao valor de $|z_1|$ e $|z_2|$.

Como $\text{Arg}\ (z_2) - \text{Arg}\ (z_1) = \pi/2$, conclui-se que o triângulo $[AOB]$ é rectângulo em O.

Donde $\overline{AB} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = 2$.

O perímetro do triângulo $[AOB]$ é, pois, $2 + 2\sqrt{2}$.

2.1.

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] =$$
$$= [1 - P(A)] - P(B) + P(A \cap B) = P(\overline{A}) - P(B) + P(A|B) \times P(B)$$

c.q.d.

2.2.1. Sejam A e B os acontecimentos, respectivamente, *ter olhos verdes* e *ter cabelo louro*.

A probabilidade pedida é dada por $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

De acordo com o enunciado,

$$P(A) = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad P(A|B) = \frac{1}{2}.$$

Pela alínea anterior,

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

2.2.2. Número de raparigas com cabelos louros: $1/3 \times 120 = 40$.

Cada comissão tem exactamente 2 raparigas louras e 3 raparigas não louras.

Número de comissões: ${}^{40}C_2 \times {}^{80}C_3 = 64084800$.

3.1.1. Dado que 15 minutos correspondem a um quarto de hora, basta calcular

$$A(0,25) = 4 \times 0.25^3 \times e^{-0,25}$$

O valor da concentração do antibiótico, em miligramas por litro de sangue, com a aproximação pedida é $0,05$.

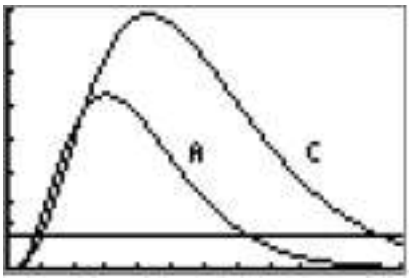
3.1.2. $A(t) = C(t) \Leftrightarrow 4t^3e^{-t} = 2t^3e^{-0,7t} \Leftrightarrow t = 0 \vee 2e^{-t} = e^{-0,7t}$.

Dado que $t > 0$, vem

$$\frac{e^{-0,7t}}{e^{-t}} = 2 \Leftrightarrow e^{0,3t} = 2 \Leftrightarrow 0,3t = \ln 2 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{0,3} \approx 2,31.$$

As concentrações voltam a ser iguais 2 horas e 19 minutos após a administração do medicamento.

3.2. Na calculadora foram inseridas as funções dadas e a função constante $y = 1$.



Analisando os gráficos na janela de visualização $[0,12] \times [0,8]$, verifica-se que o máximo da função A corresponde ao ponto (4,3;7,8); isto permite concluir que apenas o Carlos corre riscos de sofrer efeitos secundários indesejáveis, uma vez que a concentração máxima do medicamento no sangue excede em 3 décimos de miligrama por litro o limiar fixado.

Além disso, os gráficos das funções A e C intersectam a recta $y = 1$ nos pontos de abcissa $7,4$ e $11,4$, respectivamente; constata-se, por isso, que a Ana deve tomar nova dose de medicamento 7 horas e 24 minutos após a ingestão da dose anterior enquanto que o Carlos só o deverá fazer 4 horas depois da Ana o ter feito.

4.1.

$$\overline{AE} = 1 - \overline{BE} = 1 - \frac{\overline{BC}}{\operatorname{tg} x} = 1 - \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$\overline{CE} = \frac{\overline{BC}}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

$$f(x) = 2(\overline{AE} + \overline{CE}) = 2\left(1 - \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) = 2 - \frac{2}{\operatorname{tg} x} + \frac{2}{\operatorname{sen} x}$$

4.2. Dado que $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \operatorname{tg} x = +\infty$ e $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \operatorname{sen} x = 1$, então

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = 2 - 0 + 2 = 4.$$

Interpretação geométrica: quando x se aproxima de $\pi/2$, por valores inferiores, os pontos E e F tendem para B e D, respectivamente; logo, o perímetro do quadrilátero $[CEAF]$ tende para o perímetro do quadrado $[ABCD]$, que é igual a 4.

4.3.

$$f'(a) = -\frac{-2 \times (1/\cos^2 x)}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{2\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= \frac{2}{\cos^2 x \operatorname{tg}^2 x} - \frac{2\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{2}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{2\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{2 - 2\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

No intervalo $I =]\pi/4, \pi/2[$, $\cos x \in]0,1[$, donde $2 - 2\cos x$ toma valores em $]0,2[$, logo positivos; por outro lado, $\operatorname{sen}^2 x > 0$, para qualquer $x \in I$.

Conclui-se que $f'(x) > 0$, para qualquer $x \in I$ e, portanto, f é crescente em I.

PROVA 435/11 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos
2002

1.ª FASE
2.ª CHAMADA
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de onze.

Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- $f(5)=0$
- f é uma função par

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=f(x+3)$.

Qual dos seguintes pode ser o conjunto dos zeros de g?

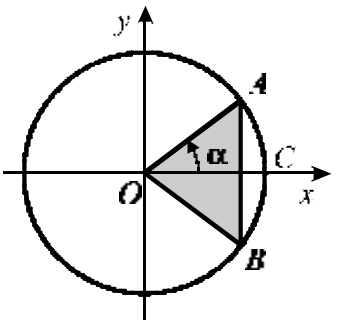
(A) $\{0,3\}$ **(B)** $\{3,5\}$ **(C)** $\{-8,2\}$ **(D)** $\{2,8\}$

2. Na figura estão representados, em referencial o. n. xOy, o círculo trigonométrico e um triângulo $[OAB]$.

Os pontos A e B pertencem à circunferência.

O segmento $[AB]$ é perpendicular ao semieixo positivo Ox.

O ponto C é o ponto de intersecção da circunferência com o semieixo positivo Ox.



Seja α a amplitude do ângulo COA. $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

Qual das expressões seguintes dá a área do triângulo $[OAB]$, em função de α?

(A) $\operatorname{sen}\alpha \,.\, \cos\alpha$ **(B)** $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha \,.\, \cos\alpha}{2}$

(C) $\operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{sen}\alpha$ **(D)** $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{sen}\alpha}{2}$

3. De uma função h, de domínio $\mathbb{R}^-$, sabe-se que a recta de equação $y = 2$ é assimptota do seu gráfico.

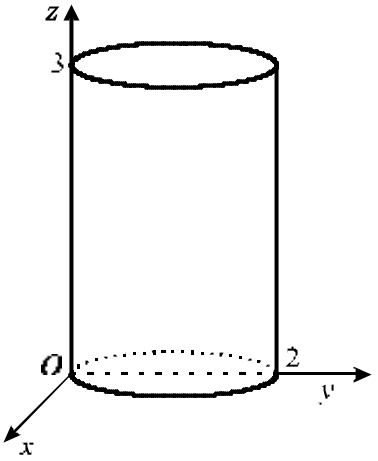
Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{h(x)}{e^x}$?

(A) $+\infty$ **(B)** $-\infty$ **(C)** 0 **(D)** 2

4. Na figura está representado, em referencial o. n. $Oxyz$, um cilindro de revolução.

Tem-se que:

- a altura do cilindro é 3
- uma das bases está contida no plano xOy, sendo o seu centro o ponto $(0,1,0)$ e o seu raio igual a 1



Seja $b \in]0,2[$ e seja f a função que, a cada valor de b, faz corresponder o perímetro da secção produzida no cilindro pelo plano de equação $y = b$.

Qual é o máximo da função f ?

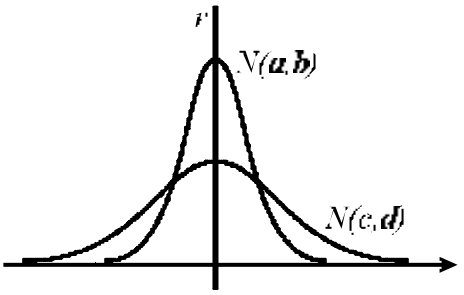
(A) 9 **(B)** 10 **(C)** 11 **(D)** 12

5. Na figura estão representados os gráficos de duas distribuições normais.

Uma das distribuições tem valor médio a e desvio padrão b.

A outra distribuição tem valor médio c e desvio padrão d.

Os gráficos são simétricos em relação à mesma recta r.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $a = c$ e $b > d$ **(B)** $a = c$ e $b < d$

(C) $a > c$ e $b = d$ **(D)** $a < c$ e $b = d$

6. O João utiliza, por vezes, o autocarro para ir de casa para a escola.

Seja A o acontecimento: «O João vai de autocarro para a escola».
Seja B o acontecimento: «O João chega atrasado à escola».

Uma das igualdades abaixo indicadas traduz a seguinte afirmação: «*Metade dos dias em que vai de autocarro para a escola, o João chega atrasado*».

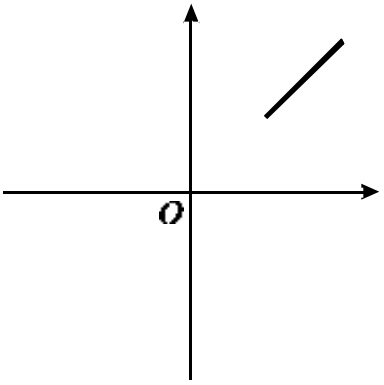
Qual é essa igualdade?

(A) $P(A \cap B) = 0{,}5$ **(B)** $P(A \cup B) = 0{,}5$

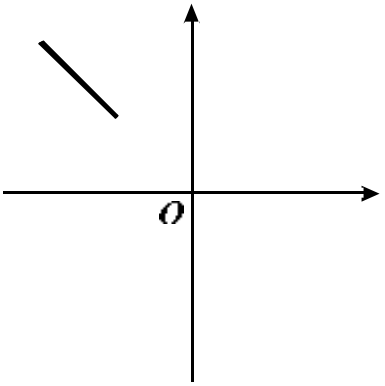
(C) $P(A|B) = 0{,}5$ **(D)** $P(B|A) = 0{,}5$

7. Qual das figuras seguintes pode ser a representação geométrica, no plano complexo, do conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z+1| = |z-i| \ \wedge \ 2 \leq Im(z) \leq 4\}$?

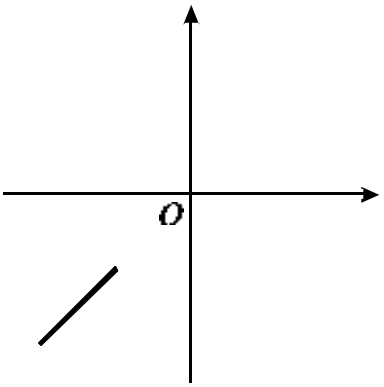
(A)



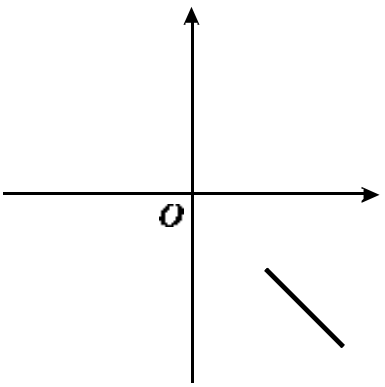
(B)



(C)



(D)



Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. De dois números complexos z_1 e z_2 sabe-se que:

• um argumento de z_1 é $\frac{\pi}{3}$

• o módulo de z_2 é 4

1.1. Seja $w = \frac{-1+i}{i}$

Justifique que w é diferente de z_1 e de z_2

1.2. z_1 e z_2 são duas das raízes quartas de um certo número complexo z.

Sabendo que, no plano complexo, a imagem geométrica de z_2 pertence ao segundo quadrante, determine z_2 na forma algébrica.

2. O **nível** N de um som, medido em decibéis, é função da sua **intensidade** I, medida em watt por metro quadrado, de acordo com a igualdade

$$N = 10 \log_{10}\left(10^{12} I\right) \quad , \quad \text{para} \quad I > 0$$

Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes.

2.1. Verifique que $N = 120 + 10 \log_{10} I$

2.2. Admita que o nível de ruído de um avião a jacto, ouvido por uma pessoa que se encontra na varanda de um aeroporto, é de 140 decibéis.

Determine a intensidade desse som, em watt por metro quadrado.

3. De uma função f, de domínio $[-\pi, \pi]$, sabe-se que a sua **derivada** f' está definida igualmente no intervalo $[-\pi, \pi]$ eé dada por

$$f'(x) = x + 2\cos x$$

3.1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes:

3.1.1. Determine o valor de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$

3.1.2. Estude a função f quanto às concavidades do seu gráfico e determine as abcissas dos pontos de inflexão.

3.2. O gráfico de f contém um único ponto onde a recta tangente é paralela ao eixo Ox. Recorrendo à sua calculadora, determine um valor arredondado às centésimas para a abcissa desse ponto.
Explique como procedeu.

4. Seja f uma função contínua, de domínio $[0,5]$ e contradomínio $[3,4]$.

Seja g a função, de domínio $[0,5]$, definida por $g(x) = f(x) - x$.

Prove que a função g tem, pelo menos, um zero.

5. Considere todos os números de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9.

5.1. Escolhe-se, ao acaso, um desses números.

5.1.1. Determine a probabilidade de o número escolhido ter exactamente dois algarismos iguais a 1. Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

5.1.2. Determine a probabilidade de o número escolhido ter os algarismos todos diferentes e ser maior do que 9800. Apresente o resultado na forma de dízima, com três casas decimais.

5.2. Considere o seguinte problema:

«*De todos os números de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9, alguns deles cumprem as três condições seguintes:*

- *começam por 9;*
- *têm os algarismos todos diferentes;*
- *a soma dos quatro algarismos é par.*

Quantos são esses números?»

Uma resposta correcta a este problema é $3 \times 4 \times {}^{4}A_{2} + {}^{4}A_{3}$

Numa pequena composição, com cerca de vinte linhas, explique porquê.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 10
1.2. 11

2. 28
2.1. 13
2.2. 15

3. 41
3.1. 26
3.1.1. 10
3.1.2. 16
3.2. 15

4. 15

5. 32
5.1. 16
5.1.1. 8
5.1.2. 8
5.2. 16

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal maior \times Diagonal menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base maior + Base menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Círculo: $\pi\, r^2 \qquad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - \textit{raio da base};\ g - \textit{geratriz})$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - raio)$

Volumes

Prisma: *Área da base* × *Altura*

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3 \qquad (r - raio)$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\,\theta) \cdot (\rho'\, cis\,\theta') = \rho\,\rho'\, cis\,(\theta + \theta')$

$\frac{\rho\, cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\,\theta)^n = \rho^n\, cis(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\,\frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ , k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\, v + u\,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\, v - u\,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\, u^{n-1}\,.\, u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\, e^u$

$(a^u)' = u'.\, a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos **1.ª FASE**
2002 **2.ª CHAMADA**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 10
1.2. 11

2. 28
2.1. 13
2.2. 15

3. 41
3.1. 26
3.1.1. 10
3.1.2. 16
3.2. 15

4. 15

5. 32
5.1. 16
5.1.1. 8
5.1.2. 8
5.2. 16

TOTAL **200**

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

Pode acontecer que o examinando não respeite a indicação, expressa no enunciado, de que deverá escrever apenas a letra correspondente à alternativa seleccionada. Por exemplo: pode acontecer que ele apresente cálculos; pode acontecer que escreva, para além da letra, a resposta que lhe corresponde; pode acontecer que se esqueça de escrever a letra e escreva apenas a resposta; etc. Deverão ser consideradas (como certas ou como erradas) todas as questões em que não haja qualquer dúvida sobre a alternativa que o examinando seleccionou, mesmo que, formalmente, desrespeitem a referida indicação. Deverão ser anuladas todas as questões onde existam dúvidas sobre a alternativa seleccionada.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Versão 1	C	A	A	B	B	D	B
Versão 2	C	B	B	D	D	B	A

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, no primeiro grupo, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas **Resp. certas**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

Grupo II

Critérios gerais

1. A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro, não negativo, de pontos.

2. Se, numa alínea em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, o examinando se limitar a apresentar o resultado final, deverão ser atribuídos zero pontos a essa alínea.

3. Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

4. Existem alíneas cuja cotação está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para as resolver.

- Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.
- Caso a resolução da etapa esteja incompleta, ou contenha incorrecções, cabe ao classificador decidir a cotação a atribuir a essa etapa, tendo em conta o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:
  - erros de contas ocasionais devem ser penalizados em um ponto;
  - erros graves, que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades, devem ser penalizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa.
- No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.
- Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.
- Pode acontecer que o examinando, ao resolver uma questão, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

5. Existem alíneas em que estão previstos alguns erros que o examinando pode cometer. Para cada caso, é indicada a cotação a atribuir. O examinando pode, contudo, utilizar um processo não contemplado nos critérios e/ou cometer um erro não previsto. Cabe ao classificador adaptar as referências dadas a todas as situações não previstas.

6. Se, na resolução de uma alínea, o examinando utilizar simbologia inequivocamente incorrecta (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), tal deve ser penalizado em um ponto, na cotação total a atribuir a essa alínea.

Critérios específicos

1.1. 10

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

$\frac{-1+i}{i} =$

$= \frac{\sqrt{2}cis\ \frac{3\pi}{4}}{cis\ \frac{\pi}{2}}$ .....6 (3+3)

$= \sqrt{2}cis\ \frac{\pi}{4}$ 2

Conclusão 2

2.º Processo

$\frac{-1+i}{i} = 1+i$ 3

$|w| = \sqrt{2}$ 2

Um argumento de w é $\frac{\pi}{4}$ 3

Conclusão 2

1.2. 11

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Um argumento de z_2 é $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$ 5

$z_2 = 4cis\ \frac{5\pi}{6}$ 2

$z_2 = -2\sqrt{3} + 2i$ 4

2.º Processo

$z_1 = 4cis\ \frac{\pi}{3}$ 2

$z = \left(4cis\ \frac{\pi}{3}\right)^4$ 1

$z = 4^4\ cis\ \frac{4\pi}{3}$ 1

$\sqrt[4]{z} = 4cis\ \frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4}$, $k = 0,1,2,3$ 1

$z_2 = 4cis\ \frac{5\pi}{6}$ 2

$z_2 = -2\sqrt{3} + 2i$ 4

2.1. 13

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

$N = 10\ \left[\log_{10}\left(10^{12}\right) + \log_{10} I\right]$ 6

$N = 10\ \left(12 + \log_{10} I\right)$ 6

$N = 120 + 10\log_{10} I$ 1

2.º Processo

$N = \log_{10}\left(10^{12}\ I\right)^{10}$ 1

$N = \log_{10}\left(10^{120}\ I^{10}\right)$ 1

$N = \log_{10}\left(10^{120}\right)\ +\ \log_{10}\left(I^{10}\right)$ 6

$N = 120 + 10\log_{10} I$ 5

2.2. 15

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º Processo

Equacionar o problema: $140 = 120 + 10 \log_{10} I$ 5

$\log_{10} I = 2$ 4

$I = 100$ 6

2.º Processo

Equacionar o problema: $140 = 10 \log_{10} \left(10^{12} I\right)$ 5

$\log_{10} \left(10^{12} I\right) = 14$ 1

$10^{12} I = 10^{14}$ 6

$I = 100$ 3

3.º Processo

Equacionar o problema: $140 = 10 \log_{10} \left(10^{12} I\right)$ 5

$140 = \log_{10} \left(10^{12} I\right)^{10}$ 2

$10^{120} I^{10} = 10^{140}$ 6

$I^{10} = 10^{20}$ 1

$I = 100$ 1

3.1.1. 10

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$.....7

$f'(0) = 2$ 3

3.1.2. 16

$f''(x) = 1 - 2\operatorname{sen} x$ **(ver nota 1)** 3

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ 2

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$ .....3 (1+2)

Análise do sinal de f'' **(ver notas 2 e 3)** 3

Concluir que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $\left[-\pi, \frac{\pi}{6}\right]$ e em $\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ **(ver notas 2 e 4)**.....3

Concluir que o gráfico de f tem dois pontos de inflexão, de abcissas $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$ **(ver nota 2)**.....2

Notas:

1. Se existir evidência de que o examinando pretende determinar a expressão de f'', a cotação mínima a atribuir a esta etapa é de 1 ponto.

2. A análise do sinal de f'' e as duas conclusões podem ser apresentadas através de um quadro.

3. Se, no quadro, o examinando não indicar correctamente o domínio da função, deverá ser penalizado em 1 ponto.

4. Se o examinando apresentar os intervalos abertos, não deverá ser penalizado. É ainda de salientar que o examinando não necessita sequer de explicitar os intervalos, tal como se depreende da nota **2**.

3.2. 15

Equacionar o problema: $f'(x) = 0$ **(ver nota 1)**..... 8

Explicação do método utilizado para resolver a equação **(ver nota 2)**..... 3

Indicação do valor da abcissa pedida **(ver nota 3)**.....4

Notas:

1. O examinando poderá não escrever explicitamente esta equação. Se existir evidência da procura do zero de f', estes 8 pontos deverão ser atribuídos.

2. A explicação do método utilizado deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

O examinando apresenta o gráfico da função f' e assinala correctamente o seu zero.

ou

O examinando não apresenta qualquer gráfico, mas refere a utilização de ferramentas da calculadora, evidenciando a procura do referido zero 3

O examinando não apresenta qualquer gráfico nem qualquer explicação, ou limita-se a apresentar uma referência do tipo «Vi na calculadora».....0

3. A escrita da abcissa do ponto pedido deve ser cotada, independentemente de o examinando ter, ou não, explicado o método utilizado, de acordo com o seguinte critério:

1.º Caso (apresentação do resultado arredondado às centésimas, de acordo com o enunciado):

Resposta $-1{,}03$ 4

Resposta $-1{,}02$ ou $-1{,}04$ 2

Resposta $-1{,}01$ ou $-1{,}05$ 1

Outros resultados 0

2.º Caso (apresentação do resultado com aproximação superior às centésimas):

Valor no intervalo $[-1{,}031\ ;\ -1{,}029]$ 3

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[-1{,}040\ ;\ -1{,}020]$ 2

Outros resultados 0

3.º Caso (apresentação do resultado arredondado às unidades ou às décimas):

Valor igual a -1 (ou $-1{,}0$) 1

Outros resultados 0

4. 15

Justificar que g é contínua (por ser a diferença de duas funções contínuas) **(ver nota 1)**.....2

Justificar que $g(0)>0$
($g(0)=f(0)$ e $f(0)\in[3,4]$) **(ver nota 2)**.....5

Justificar que $g(5)<0$
($g(5)=f(5)-5$ e $f(5)\in[3,4]$) **(ver nota 3)**.....6

Evocar o Teorema de Bolzano (ou o seu corolário), para concluir o pretendido 2

Notas:

1. Se o examinando se limitar a referir a continuidade de g, sem justificar, deverá ser atribuída, nesta etapa, a cotação de 1 ponto, dos 2 previstos.

2. Se o examinando escrever $f(0)=3$, deverá ser atribuída, nesta etapa, a cotação de 0 pontos.

3. Se o examinando escrever $f(5)=4$, deverá ser atribuída, nesta etapa, a cotação de 0 pontos.

5.1.1. 8

Escrita da fracção $\dfrac{{}^4C_2\times 8^2}{9^4}$ **(ver notas 1, 2, 3, 4 e 5)** 7

Probabilidade pedida $\approx 6\%$ 1

Notas:

1. O examinando pode começar por indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis e só depois escrever a fracção.
No entanto, se não o fizer, isto é, se escrever directamente a fracção, não deverá ser penalizado.

2. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da fracção, com a respectiva cotação a atribuir.

$\dfrac{{}^4C_2\times 8^2}{9^4}$ ou $\dfrac{6\times 8^2}{9^4}$ (fracção correcta).....7

$\dfrac{{}^4C_2\times {}^8A_2}{9^4}$ 4

$\dfrac{8^2}{9^4}$ ou $\dfrac{6}{9^4}$ 3

3. Se o examinando indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído à sua resposta menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

4. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos possíveis, deverá ser atribuído 1 ponto à sua resposta.

5. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos favoráveis, deverão ser atribuídos 4 pontos à sua resposta.

5.1.2. 8

Escrita da fracção $\frac{^7A_2}{9^4}$ **(ver notas 1, 2, 3, 4 e 5)** 7

Probabilidade pedida $\approx 0{,}006$ 1

Notas:

1. O examinando pode começar por indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis e só depois escrever a fracção.
No entanto, se não o fizer, isto é, se escrever directamente a fracção, não deverá ser penalizado.

2. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da fracção, com a respectiva cotação a atribuir.

$\frac{^7A_2}{9^4}$ ou $\frac{7\times 6}{9^4}$ (fracção correcta).....7

$\frac{7^2}{9^4}$ 5

$\frac{9\times 8}{9^4}$ 4

$\frac{9^2}{9^4}$ 3

3. Se o examinando indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído à sua resposta menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

4. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos possíveis, deverá ser atribuído 1 ponto à sua resposta.

5. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos favoráveis, deverão ser atribuídos 4 pontos à sua resposta.

5.2. 16

Apresenta-se a seguir um exemplo de resposta:

Pretende-se saber quantos números da forma 9 _ _ _ existem, com algarismos todos diferentes (escolhidos de entre os algarismos de 1 a 9) e tal que a soma dos seus quatro algarismos seja par.
Ora, para que a soma dos quatro algarismos seja par, é necessário que a soma dos três últimos seja ímpar.
Para que a soma destes três algarismos seja ímpar, dois casos se podem dar: ou são todos ímpares, ou dois deles são pares e o outro é ímpar.
No primeiro caso, temos de escolher ordenadamente três de quatro algarismos ímpares (1, 3, 5 e 7), o que pode ser feito de $^4A_3$ *maneiras diferentes.*
No segundo caso, temos de começar por escolher a posição do algarismo ímpar, o que pode ser feito de 3 *maneiras diferentes. Para cada uma destas, existem* 4 *maneiras de escolher esse algarismo ímpar (1, 3, 5 ou 7). Para cada posição do algarismo ímpar e para cada valor deste, existem* $^4A_2$ *maneiras diferentes de escolher ordenadamente dois de quatro algarismos pares (2, 4, 6 e 8) Assim, neste segundo caso, existem* $3 \times 4 \times {}^4A_2$ *números diferentes, nas condições requeridas.*
Logo, o número pedido é $3 \times 4 \times {}^4A_2 + {}^4A_3$

Tal como o exemplo acima ilustra, o examinando deverá:

- referir que a soma dos três últimos algarismos tem de ser ímpar;
- referir que, para que isso aconteça, dois casos se podem dar: ou os três algarismos referidos são ímpares, ou dois deles são pares e o terceiro é ímpar;
- explicar correctamente o valor $^4A_3$ (número de maneiras de escolher ordenadamente três de quatro algarismos ímpares);
- explicar correctamente o valor 3 (número de maneiras de escolher a posição do algarismo ímpar);
- explicar correctamente o valor 4 (número de maneiras de escolher um de quatro algarismos ímpares);
- explicar correctamente o valor $^4A_2$ (número de maneiras de escolher ordenadamente dois de quatro algarismos pares).

Na tabela seguinte, indica-se como deve ser atribuída a cotação desta alínea.

Forma **Conteúdo**	Nível 1 (∗)	Nível 2 (∗∗)	Nível 3 (∗∗∗)
O examinando refere os seis pontos	16	14	12
O examinando refere cinco pontos	12	10	8
O examinando refere quatro pontos	8	7	6
O examinando refere três pontos	6	5	4
O examinando refere dois pontos	4	3	2
O examinando refere um ponto	2	1	1

(∗) **Nível 1** - Redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).

(∗∗) **Nível 2** - Redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecte a inteligibilidade.

(∗∗∗) **Nível 3** - Redacção confusa, sem estruturação aparente, presença de erros graves, com perturbação frequente da inteligibilidade.

Pode acontecer que uma composição não se enquadre completamente num dos três níveis descritos e/ou contenha características presentes em mais do que um deles. Nesse caso, deverá ser atribuída uma pontuação intermédia, desde que respeite a indicação, dada nos critérios gerais, de que a cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

CORRECÇÃO DO EXAME NACIONAL DE MATEMÁTICA

1ª Fase—2ª Chamada

Grupo I

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	C	A	A	B	B	D	B
Versão 2	C	B	B	D	D	B	A

Grupo II

1.1.

$$w = \frac{-1+i}{i} = \frac{-1}{i} + 1 = i + 1$$

$$|w| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

O argumento positivo mínimo de w é $\pi/4$, pois $\mathrm{Re}(w) = \mathrm{Im}(w) > 0$.
Donde $w \neq z_1$, porque os argumentos são diferentes, e $w \neq z_2$, porque os módulos são diferentes.

1.2. Como z_1 e z_2 são raízes quartas de um mesmo número complexo z, $z_1 \in 1^{\text{o}}Q$ e $z_2 \in 2^{\text{o}}Q$, então

$$\arg(z_2) = \arg(z_1) + \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}.$$

Logo,

$$z_2 = 4\,cis\,\frac{5\pi}{6} = 4 \times \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\frac{5\pi}{6}\right) = 4 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{3} + 2i.$$

2.1.

$$N = 10 \cdot \log_{10}(10^{12} I) = 10[\log_{10}(10^{12}) + \log_{10} I] =$$
$$= 10[12 + \log_{10} I] = 120 + 10 \cdot \log_{10} I \qquad c.q.d.$$

2.2. Sendo $N = 140$ decibéis, vem:

$$140 = 120 + 10 \cdot \log_{10} I \Leftrightarrow 20 = 10 \cdot \log_{10} I \Leftrightarrow 2 = \log_{10} I \Leftrightarrow I = 10^2 \Leftrightarrow I = 100$$

R: O som tem a intensidade de 100 watt por metro quadrado.

3.1.1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0+2\cos(0)=0+2\times 1=2.$$

3.1.2.

$$f''(x)=1-2\,\mathrm{sen}(x)$$

Como $x\in[-\pi,\pi]$,

$$f''(x)=0\Leftrightarrow 1-2\,\mathrm{sen}(x)=0\Leftrightarrow \mathrm{sen}(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}\vee x=\frac{5\pi}{6}$$

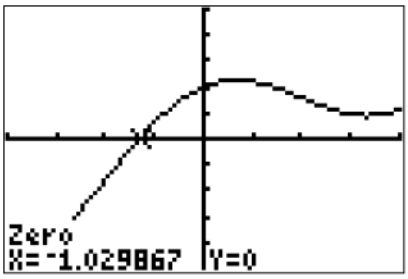
	$-\pi$	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$	π
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	p.i.	$\cap$	p.i.	$\cup$

A análise do sinal da função f'' decorre do facto de $\mathrm{sen}(x)$ ser superior a $1/2$ entre $\pi/6$ e $5\pi/6$ e inferior a $1/2$ nos outros intervalos assinalados no quadro.

As abcissas dos pontos de inflexão são $x=\pi/6$ e $x=5\pi/6$.

A função tem a concavidade voltada para cima nos intervalos $[-\pi,\pi/6]$ e $[5\pi/6,\pi]$ e a concavidade voltada para baixo no intervalo $[\pi/6,5\pi/6]$.

3.2. Para que uma recta paralela ao eixo Ox (cujo declive é 0) seja tangente ao gráfico de f num dado ponto, a derivada no mesmo terá que ser zero. Fazendo a representação gráfica da função f' na calculadora e adequando a janela de visualização (p.e. $[-pi,\pi]\times[-5,5]$) verifica-se que o zero desta função ocorre para $x\approx -1.03$ que é a abcissa do ponto pretendido.



4. A função g é contínua no intervalo $[0,5]$, uma vez que se trata da diferença de duas funções contínuas (a função f e a função identidade).

Calculando $g(0)$ e $g(5)$, vem:

$$g(0)=f(0)-0=f(0)>0,\quad \text{pois } f(0)\in[3,4]$$

$$g(5) = f(5) - 5 < 0, \quad \text{uma vez que } 3 \leq f(5) \leq 4.$$

Como $g(0) \times g(5) < 0$, então o corolário do Teorema de Bolzano garante a existência de pelo menos um zero da função g no intervalo $[0, 5]$.

5.1.1. Número de casos possíveis: ${}^{9}A'_{4} = 9^4 = 6561$.

Número de casos favoráveis: ${}^{4}C_{2} \times {}^{8}A'_{2} = 6 \times 8^2 = 384$, uma vez que os dois algarismos fixados ocupam 2 das 4 casas disponíveis e restam 8 algarismos para completar o número.

$$P = \frac{384}{6561} \approx 0.06, \quad \text{ou seja } 6\%.$$

5.1.2. Número de casos possíveis: ${}^{9}A'_{4} = 9^4 = 6561$.

Número de casos favoráveis: ${}^{7}A_{2} = 42$, uma vez que nas condições exigidas, os dois primeiros algarismos são fixos, restando 7 algarismos para preencher os dois últimos lugares.

$$P = \frac{42}{6561} \approx 0.006.$$

5.2. Para que um número de 4 algarismos tenha como soma dos mesmos um número par é necessário que se verifique uma das três hipóteses:

1ª— Os algarismos são todos pares;

2ª— Dois algarismos são pares e dois são ímpares;

3ª— Os algarismos são todos ímpares.

A primeira hipótese está posta de parte uma vez que o número tem de começar por 9. Para a segunda hipótese se verificar, o outro algarismo ímpar terá que ser um dos 4 ímpares restantes e pode ocupar uma das 3 posições disponíveis (4×3). Os outros 2 algarismos terão que ser escolhidos ordenadamente de entre os 4 algarismos pares (${}^{4}A_{2}$). Assim obtém-se: $3 \times 4 \times {}^{4}A_{2}$.

Finalmente, na hipótese de serem todos ímpares, por o primeiro já o ser, restam 4 algarismos ímpares para ocupar ordenadamente as 3 posições seguintes (${}^{4}A_{3}$). Tendo em conta as 2 hipóteses possíveis, uma resposta correcta a este problema é: $3 \times 4 \times {}^{4}A_{2} + {}^{4}A_{3}$.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos **2.ª FASE**
2002 **VERSÃO 1**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

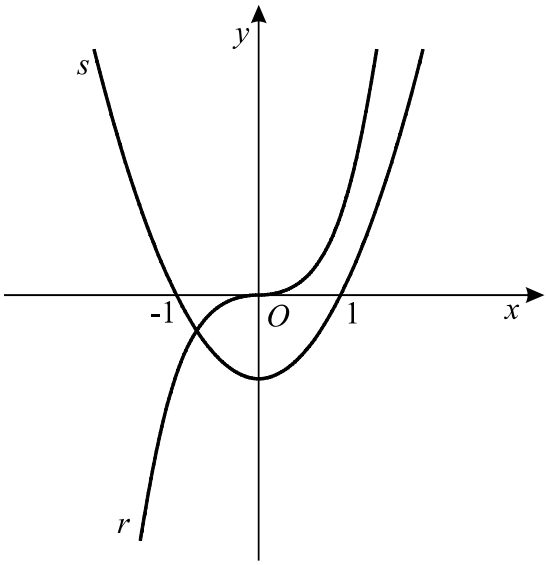
- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de dez.

Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Na figura estão parcialmente representados os gráficos de duas funções polinomiais, r e s.



Qual dos seguintes conjuntos pode ser o domínio da função $\frac{r}{s}$?

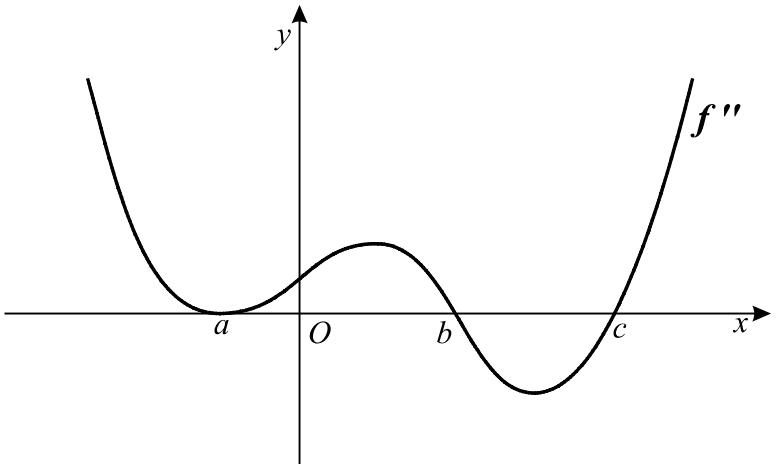
(A) $\mathbb{R}$

(B) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

(C) $\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$

(D) $\mathbb{R}\setminus\{-1, 0, 1\}$

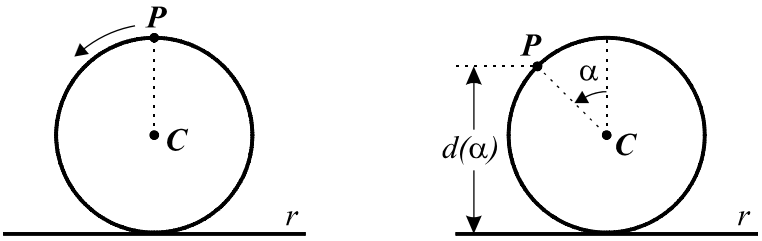
2. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.
Na figura está representada parte do gráfico de f'', **segunda derivada** da função f.



Relativamente ao gráfico da **função** f, qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) O ponto de abcissa a é um ponto de inflexão.
(B) O ponto de abcissa c é um ponto de inflexão.
(C) A concavidade está voltada para baixo no intervalo $[0, b]$.
(D) A concavidade está sempre voltada para cima.

3. Considere uma circunferência de centro C e raio 1, tangente a uma recta r.
Um ponto P começa a deslocar-se sobre a circunferência, no sentido indicado na figura. Inicialmente, o ponto P encontra-se à distância de 2 unidades da recta r.

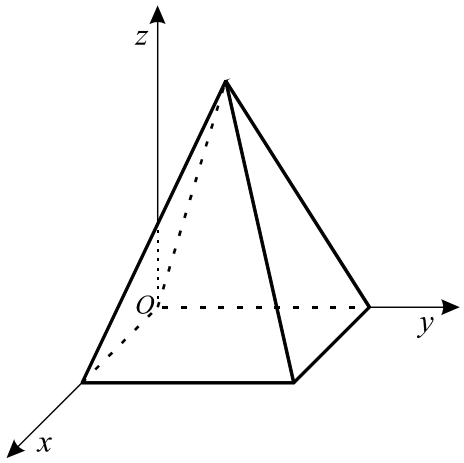


Seja $d(\alpha)$ a distância de P a r, após uma rotação de amplitude α.

Qual das igualdades seguintes é verdadeira para qualquer número real positivo α?

(A) $d(\alpha) = 1 + \cos\alpha$
(B) $d(\alpha) = 2 + \operatorname{sen}\alpha$
(C) $d(\alpha) = 1 - \cos\alpha$
(D) $d(\alpha) = 2 - \operatorname{sen}\alpha$

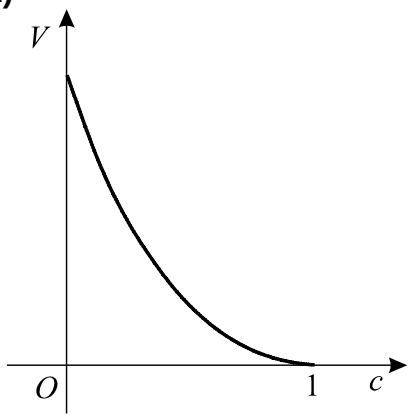
4. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular, de altura 1, cuja base está contida no plano xOy.



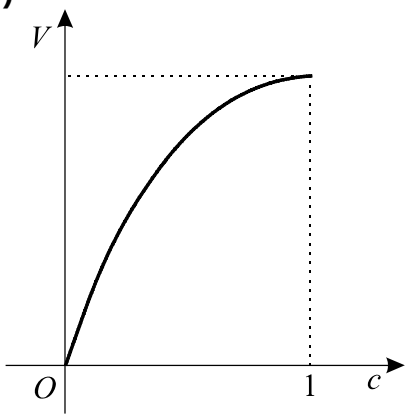
Para cada $c \in [0, 1]$, seja $V(c)$ o volume da parte da pirâmide constituída pelos pontos cuja cota é **superior ou igual** a c.

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função V ?

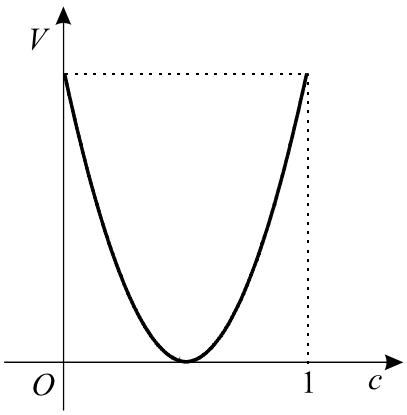
(A)



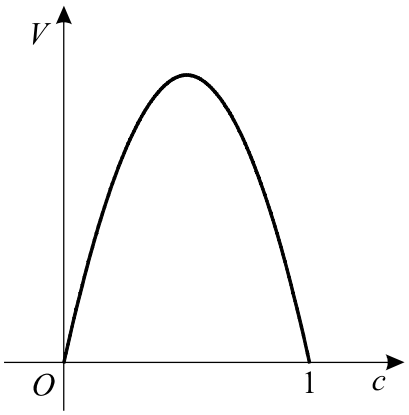
(B)



(C)



(D)



5. Pretende-se dispor, numa prateleira de uma estante, seis livros, dois dos quais são de Astronomia.
De quantas maneiras diferentes o podemos fazer, de tal forma que os dois primeiros livros, do lado esquerdo, sejam os de Astronomia?

(A) 24 **(B)** 36 **(C)** 48 **(D)** 60

6. Na figura A está representado um dado equilibrado, cuja planificação se apresenta esquematizada na figura B.

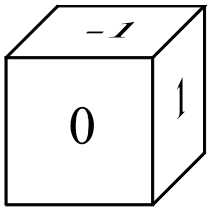


Figura A

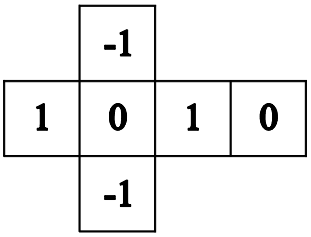


Figura B

Lança-se este dado duas vezes.
Considere as seguintes variáveis aleatórias, associadas a esta experiência:

X_1 : número saído no primeiro lançamento.
X_2 : quadrado do número saído no segundo lançamento.
X_3 : soma dos números saídos nos dois lançamentos.
X_4 : produto dos números saídos nos dois lançamentos.

Uma destas quatro variáveis tem a seguinte distribuição de probabilidades:

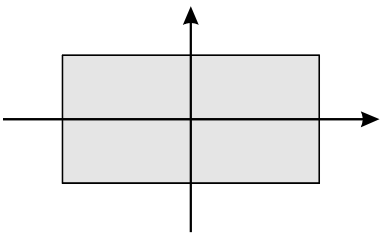
Valores da variável	-1	0	1
Probabilidades	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

Qual delas?

(A) X_1 **(B)** X_2 **(C)** X_3 **(D)** X_4

7. Na figura está representado um rectângulo, de comprimento 4 e largura 2, centrado na origem do plano complexo.

Seja z um número complexo qualquer, cuja imagem geométrica está situada no interior do rectângulo.



Qual dos seguintes números complexos tem também, necessariamente, a sua imagem geométrica no interior do rectângulo?

(A) z^{-1} **(B)** $\overline{z}$ **(C)** z^2 **(D)** $2\,z$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$z_1 = 1 + i$ (i designa a unidade imaginária).

1.1. Determine os números reais b e c para os quais z_1 é raiz do polinómio $x^2 + b\,x + c$.

1.2. Seja $z_2 = cis\,\alpha$.
Calcule o valor de α, pertencente ao intervalo $[0,\ 2\,\pi]$, para o qual $z_1 \times \overline{z_2}$ é um número real negativo ($\overline{z_2}$ designa o conjugado de z_2).

2. Considere as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por

$f(x) = \frac{1}{3} + 2\,e^{1-x}$ $\qquad$ $g(x) = 2\,\text{sen}\,x - \cos x$

2.1. Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as duas alíneas seguintes:

2.1.1. Estude a função f quanto à existência de assimptotas paralelas aos eixos coordenados.

2.1.2. Resolva a equação $f(x) = g(\pi)$, apresentando a solução na forma $\ln(k\,e)$, onde k representa um número real positivo.
($\ln$ designa logaritmo de base e)

2.2. Recorrendo à calculadora, determine as soluções inteiras da inequação $f(x) > g(x)$, no intervalo $[0, 2\,\pi]$. Explique como procedeu.

3. Uma nova empresa de refrigerantes pretende lançar no mercado embalagens de sumo de fruta, com capacidade de **dois litros**. Por questões de *marketing*, as embalagens deverão ter a forma de um **prisma quadrangular regular**.



3.1. Mostre que a área total da embalagem é dada por

$$A(x) = \frac{2\,x^3 + 8}{x}$$

(x é o comprimento da aresta da base, em dm)

Nota: recorde que $1\ litro = 1\,dm^3$

3.2. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, mostre que existe um valor de x para o qual a área total da embalagem é mínima e determine-o.

4. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, com derivada finita em todos os pontos do domínio, e **crescente**.
Sejam a e b dois quaisquer números reais. Considere as rectas r e s, tangentes ao gráfico de f nos pontos de abcissas a e b, respectivamente.
Prove que as rectas r e s **não** podem ser perpendiculares.

5. Um baralho de cartas completo é constituído por cinquenta e duas cartas, repartidas por quatro naipes de treze cartas cada: Espadas, Copas, Ouros e Paus. Cada naipe tem **três figuras**: Rei, Dama e Valete.

5.1. Retirando, ao acaso, seis cartas de um baralho completo, qual é a probabilidade de, entre elas, haver um e um só Rei? Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às milésimas.

5.2. De um baralho completo extraem-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas cartas. Sejam E_1, C_2 e F_2 os acontecimentos:

E_1: *sair Espadas na primeira extracção*;
C_2: *sair Copas na segunda extracção*;
F_2: *sair uma figura na segunda extracção*.

Sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, indique o valor de $P\big((F_2 \cap C_2) \,|\, E_1\big)$. Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explicite o raciocínio que efectuou. O valor pedido deverá resultar **apenas** da interpretação do significado de $P\big((F_2 \cap C_2) \,|\, E_1\big)$, no contexto da situação descrita.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 10
1.2. 11

2. 49
2.1. 33
2.1.1. 16
2.1.2. 17
2.2. 16

3. 27
3.1. 10
3.2. 17

4. 10

5. 30
5.1. 15
5.2. 15

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Círculo: $\pi\ r^2 \qquad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - raio\ da\ base;\ g - geratriz)$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - raio)$

Volumes

Prisma: *Área da base* × *Altura*

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3 \qquad (r - raio)$

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\,.\cos b + \text{sen}\,b\,.\cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\,.\cos b - \text{sen}\,a\,.\,\text{sen}\,b$

$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a\,.\,\text{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho\, cis\,\theta)\,.\,(\rho'\, cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta+\theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\,\theta)^n\ = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta}\ = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\,u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\,\text{sen}\,u$

$(\text{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **2.ª FASE**
2002

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada ..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 10
1.2. 11

2. 49
2.1. 33
2.1.1. 16
2.1.2. 17
2.2. 16

3. 27
3.1. 10
3.2. 17

4. 10

5. 30
5.1. 15
5.2. 15

TOTAL **200**

V.S.F.F.

435/C/1

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

Pode acontecer que o examinando não respeite a indicação, expressa no enunciado, de que deverá escrever apenas a letra correspondente à alternativa seleccionada. Por exemplo: pode acontecer que ele apresente cálculos; pode acontecer que escreva, para além da letra, a resposta que lhe corresponde; pode acontecer que se esqueça de escrever a letra e escreva apenas a resposta; etc. Deverão ser consideradas (como certas ou como erradas) todas as questões em que não haja qualquer dúvida sobre a alternativa que o examinando seleccionou, mesmo que, formalmente, desrespeitem a referida indicação. Deverão ser anuladas todas as questões onde existam dúvidas sobre a alternativa seleccionada.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Versão 1	C	B	A	A	C	D	B
Versão 2	A	C	B	C	D	C	D

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, no primeiro grupo, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas / **Resp. certas**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

Grupo II

Critérios gerais

1. A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro, não negativo, de pontos.

2. Se, numa alínea em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, o examinando se limitar a apresentar o resultado final, deverão ser atribuídos zero pontos a essa alínea.

3. Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

4. Existem alíneas cuja cotação está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para as resolver.

   - Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.
   - Caso a resolução da etapa esteja incompleta, ou contenha incorrecções, cabe ao classificador decidir a cotação a atribuir a essa etapa, tendo em conta o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:
     - erros de contas ocasionais devem ser penalizados em um ponto;
     - erros graves, que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades, devem ser penalizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa.
   - No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.
   - Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.
   - Pode acontecer que o examinando, ao resolver uma questão, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

5. Existem alíneas em que estão previstos alguns erros que o examinando pode cometer. Para cada caso, é indicada a cotação a atribuir. O examinando pode, contudo, utilizar um processo não contemplado nos critérios e/ou cometer um erro não previsto. Cabe ao classificador adaptar as referências dadas a todas as situações não previstas.

6. Se, na resolução de uma alínea, o examinando utilizar simbologia inequivocamente incorrecta (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), tal deve ser penalizado em um ponto, na cotação total a atribuir a essa alínea.

V.S.F.F.

435/C/3

Critérios específicos

1.1. 10

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Escrever a igualdade $(1+i)^2+b(1+i)+c=0$ 2

Mostrar que $b=-2 \wedge c=2$ 8

$(1+i)^2+b(1+i)+c=0$

$\Leftrightarrow 2i+b(1+i)+c=0$ 2

$\Leftrightarrow b+c+(b+2)i=0$ 2

$\Leftrightarrow b+c=0 \wedge b+2=0$ 2

$\Leftrightarrow b=-2 \wedge c=2$ 2

2.º Processo:

$x^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$ 1

Concluir que $\frac{-b}{2}=1$ e que $\frac{\sqrt{b^2-4c}}{2}=i$ 2

Concluir que $b=-2$ e que $c=2$ ..... 7 (1+6)

1.2. 11

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º Processo:

Referir que um argumento de z_1 é $\frac{\pi}{4}$ 2

Concluir que um argumento de $\overline{z_2}$ é, por exemplo, $\frac{3\pi}{4}$ 4

Concluir que $\alpha=\frac{5\pi}{4}$ **(ver nota)** 5

Nota:

Se o examinando escrever $\alpha=-\frac{3\pi}{4}$, em vez de $\alpha=\frac{5\pi}{4}$, deverá ser penalizado em 3 dos 5 pontos previstos para este passo.

2.º Processo:

$z_1 = \sqrt{2}\,cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 2

$\overline{z_2} = cis(-\alpha)$ 1

$z_1 \times \overline{z_2} = \sqrt{2}\,cis\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ 2

$\frac{\pi}{4} - \alpha = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **(ver nota)** 3

$\alpha = \frac{5\pi}{4}$ **(ver nota)** 3

Nota:

Se o examinando escrever $\frac{\pi}{4} - \alpha = \pi$, em vez de $\frac{\pi}{4} - \alpha = \pi + 2k\pi$, e daí concluir que $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$, deverá ser penalizado em 3 dos 6 pontos previstos para estes dois passos, a menos que adicione 2π a $-\frac{3\pi}{4}$, de forma a obter a solução correcta.

3.º Processo:

$\overline{z_2} = \cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha$ 1

$z_1 \times \overline{z_2} = (\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha) + i\,(\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha)$ 2

$\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha < 0 \ \wedge \ \cos\alpha - \text{sen}\,\alpha = 0$ ..... 3 (1+2)

$\alpha = \frac{5\pi}{4}$ **(ver nota)** 5

Nota:

Se o examinando escrever $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$, em vez de $\alpha = \frac{5\pi}{4}$, deverá ser penalizado em 3 dos 5 pontos previstos para este passo.

V.S.F.F.

2.1.1. ..... **16**

Justificar a não existência de assimptotas verticais (pelo facto de f ser uma função contínua em $\mathbb{R}$) 3

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ 4

Concluir que o gráfico de f não tem assimptota horizontal, quando $x \to -\infty$ 2

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{3}$ 4

Concluir que a recta de equação $y = \frac{1}{3}$ é assimptota horizontal do gráfico de f, quando $x \to +\infty$ 3

2.1.2. ..... **17**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Neste processo, usa-se a informação dada no enunciado de que a solução da equação é da forma $\ln(ke)$.

Calcular $g(\pi)$ 2

$\frac{1}{3} + 2e^{1-x} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} + 2e^{1-\ln(ke)} = 1$ 2

$\Leftrightarrow e^{1-\ln(ke)} = \frac{1}{3}$ 2

$\Leftrightarrow \frac{e}{ke} = \frac{1}{3}$ **(ver nota)** 9

$\Leftrightarrow k = 3$ 2

Nota:

O examinando pode obter esta igualdade, a partir da anterior, por aplicação da propriedade $e^{a-b} = e^a / e^b$, ou por aplicação da função logaritmo a ambos os membros da igualdade anterior. Neste último caso, estes 9 pontos deverão ser distribuídos da seguinte forma:

$1 - \ln(k\,e) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$ 3

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{e}{k\,e}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$ 4

$\Leftrightarrow \frac{e}{k\,e} = \frac{1}{3}$ 2

2.º Processo:

Calcular $g(\pi)$ 2

Resolver a equação $\frac{1}{3} + 2e^{1-x} = 1$ 9

$\frac{1}{3} + 2e^{1-x} = 1$

$\Leftrightarrow e^{1-x} = \frac{1}{3}$ 2

$\Leftrightarrow 1 - x = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$ 5

$\Leftrightarrow x = 1 - \ln\left(\frac{1}{3}\right)$ 2

Apresentar a solução na forma $\ln(k\,e)$ 6

$x = 1 + \ln(3)$ 2

$x = \ln(e) + \ln(3)$ 2

$x = \ln(3e)$ 2

ou

$x = \ln(e) - \ln\left(\frac{1}{3}\right)$ 2

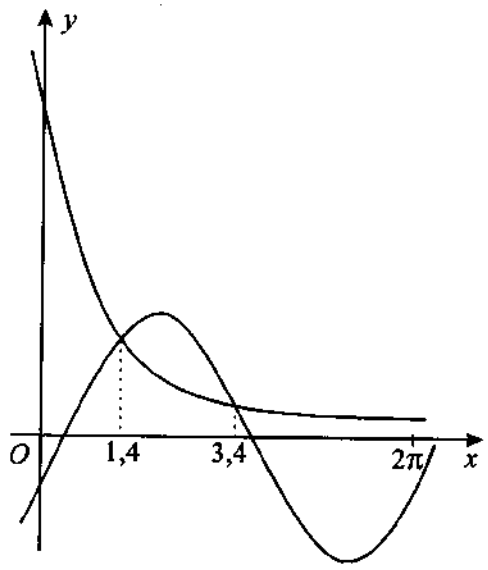
$x = \ln\left(\frac{e}{1/3}\right)$ 3

$x = \ln(3e)$ 1

2.2. ..... **16**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo (graficamente, como se exemplifica a seguir):



Conclusão: as soluções pedidas são 0, 1, 4, 5 e 6.

2.º Processo (por meio de uma tabela, como se exemplifica a seguir):

x	$f(x)$	$g(x)$
0	5,77	-1
1	2,33	1,14
2	1,07	2,23
3	0,60	1,27
4	0,43	$-0,86$
5	0,37	$-2,20$
6	0,35	$-1,52$

Conclusão: as soluções pedidas são 0, 1, 4, 5 e 6.

Qualquer que seja o processo utilizado pelo examinando, as cotações devem ser atribuídas de acordo com o seguinte critério:

Apresentar um gráfico ou uma tabela **(ver notas 1, 2 e 3)** 6
Conclusão **(ver nota 4)** 10

Notas:

1. O examinando deve explicar como procedeu, referindo algo que evidencie a forma como utilizou a calculadora na resolução do exercício. Tal pode ser feito **reproduzindo** ou **descrevendo** os gráficos e/ou tabelas utilizados, como se exemplificou atrás.

2. O examinando pode calcular, por meio das funções f e g, as imagens dos inteiros entre 0 e 2π, e não organizar os dados numa tabela. Este processo é equivalente à apresentação de uma tabela, pelo que deve ser cotado da mesma forma.

3. Pode acontecer que o examinando comece por estabelecer a equivalência $f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) > 0$, procurando depois os valores de x inteiros que, no intervalo $[0, 2\pi]$, têm imagem positiva, por meio de $f - g$.

4. Por cada solução não indicada, ou por cada valor indicado que não seja solução, deverão ser descontados 3 pontos, até um desconto máximo de 10 pontos.

5. Todas as respostas sem qualquer justificação, ou que se limitem a apresentar justificações vazias de significado, como, por exemplo, «Vi na calculadora», devem ser cotadas entre 0 e 5 pontos, de acordo com o seguinte critério:

   Cada solução correcta 1
   Cada solução incorrecta ..... -3

3.1. 10

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Área de uma das bases do prisma $= x^2$ 1

Área das duas bases do prisma $= 2x^2$ 1

Altura do prisma $= \frac{2}{x^2}$ **(ver notas 1 e 2)** 5

Área lateral $= 4 \,.\, x \,.\, \frac{2}{x^2}$ 2

$A(x) = \frac{2x^3 + 8}{x}$ 1

ou

$A(x) = 2x^2 + 4 \,.\, x \,.\, y$ 4

$y = \frac{2}{x^2}$ **(ver notas 1 e 2)** 5

$A(x) = \frac{2x^3 + 8}{x}$ 1

2.º Processo:

$\frac{2x^3+8}{x} = 2x^2 + \frac{8}{x}$ 1

Referir que $2x^2$ é a área das duas bases do prisma 2

Concluir que a área lateral deverá ser $\frac{8}{x}$ 1

Provar que a área lateral é, de facto, $\frac{8}{x}$ 6

Altura do prisma $= \frac{2}{x^2}$ **(ver notas 1 e 2)** 5

Restantes cálculos 1

Notas:

1. Qualquer que seja o processo utilizado pelo examinando, **exige-se a explicitação da expressão que dá a altura do prisma**.
   Se o examinando não a apresentar, deverão ser atribuídos 0 (zero) dos cinco pontos previstos para tal explicitação.

2. A obtenção da expressão que dá a altura do prisma pode, eventualmente, resultar de uma equação do tipo $x^2 . y = 2$.
   No entanto, **não se exige** que o examinando apresente uma equação para justificar como obteve a referida expressão (o examinando pode concluir, mentalmente, que, sendo o volume igual a 2 e a área da base igual a x^2, a altura terá de ser $2/x^2$).

3.2. ..... **17**

$A'(x) = \frac{6x^2 . x - (2x^3+8)}{x^2}$ 3

$A'(x) = \frac{4x^3 - 8}{x^2}$ 2

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 8 = 0$ 3

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$ 2

Estudar o sinal de A' (que pode ser apresentado através de um quadro) 5

Conclusão 2

4. ..... **10**

Referir que os declives das rectas r e s são, respectivamente, iguais a $f'(a)$ e a $f'(b)$ 3

Referir que, pelo facto de f ser uma função crescente, se tem $f'(a) \geq 0$ e $f'(b) \geq 0$ 3

Conclusão: como não é verdade que $f'(b) = -\frac{1}{f'(a)}$, as rectas r e s não podem ser perpendiculares 4

5.1. ..... **15**

A probabilidade pedida pode ser obtida por, pelo menos, dois processos, consoante o modelo adoptado para formar o espaço de resultados.

1.º Processo:

O espaço de resultados é o conjunto das colecções de 6 cartas, extraídas de um baralho de 52 cartas.

Número de casos possíveis $= {}^{52}C_6$

Número de casos favoráveis $= 4 \times {}^{48}C_5$

Probabilidade pedida $= \frac{4 \times {}^{48}C_5}{{}^{52}C_6}$

2.º Processo:

O espaço de resultados é o conjunto das sequências de 6 cartas, extraídas de um baralho de 52 cartas.

Número de casos possíveis $= {}^{52}A_6$

Número de casos favoráveis $= 4 \times 6 \times {}^{48}A_5$

Probabilidade pedida $= \frac{4 \times 6 \times {}^{48}A_5}{{}^{52}A_6}$

Qualquer que seja o processo utilizado, as cotações devem ser atribuídas de acordo com o seguinte critério:

Escrita da fracção **(ver notas 1, 2, 3, 4 e 5)** 14

Resultado final 1

Notas:

1. O examinando pode começar por indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis e só depois escrever a fracção.
   No entanto, se não o fizer, isto é, se escrever directamente a fracção, não deverá ser penalizado.

2. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da fracção, com a respectiva cotação a atribuir.

   $\frac{4 \times {}^{48}C_5}{{}^{52}C_6}$ ou $\frac{4 \times 6 \times {}^{48}A_5}{{}^{52}A_6}$ (fracção correcta)..... 14

   $\frac{4 \times {}^{48}A_5}{{}^{52}A_6}$ 11

   $\frac{{}^{48}C_5}{{}^{52}C_6}$ ou $\frac{6 \times {}^{48}A_5}{{}^{52}A_6}$ 8

   $\frac{{}^{48}A_5}{{}^{52}A_6}$ 6

3. Se o examinando indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído à sua resposta menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

4. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos possíveis (${}^{52}C_6$ ou ${}^{52}A_6$), deverão ser atribuídos 2 pontos à sua resposta.

5. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos favoráveis ($4 \times {}^{48}C_5$ ou $4 \times 6 \times {}^{48}A_5$), deverão ser atribuídos 11 pontos à sua resposta.

Apresentam-se a seguir dois exemplos de resposta:

Exemplo 1

$P((C_2 \cap F_2) \mid E_1)$ *significa «probabilidade de sair figura de copas na segunda extracção, sabendo que saiu uma carta de espadas na primeira extracção».*

Tem-se, assim, que:

O número de casos possíveis é 51 (número de cartas existentes no baralho, após a extracção da primeira carta).

O número de casos favoráveis é 3 (número de figuras de copas existentes no baralho, após a extracção da primeira carta, a qual, por ser de espadas, não é figura de copas).

A probabilidade pedida é, por aplicação da regra de Laplace, $\frac{3}{51}$.

Exemplo 2

$P((C_2 \cap F_2) \mid E_1)$ *significa «probabilidade de sair figura de copas na segunda extracção, sabendo que saiu uma carta de espadas na primeira extracção».*

Tem-se, assim, que:

O número de casos possíveis é 13×51 *(número de sequências* $e_1\, q_2$ *, em que* e_1 *designa uma carta de espadas, extraída na primeira tiragem, e* q_2 *designa uma carta qualquer, extraída na segunda tiragem).*

O número de casos favoráveis é 13×3 *(número de sequências* $e_1\, f_2$ *, em que* e_1 *designa uma carta de espadas, extraída na primeira tiragem, e* f_2 *designa uma figura de copas, extraída na segunda tiragem).*

A probabilidade pedida é, por aplicação da regra de Laplace, $\frac{13 \times 3}{13 \times 51} = \frac{3}{51}$

Tal como os exemplos acima ilustram, para que a composição possa ser considerada completa, deverá contemplar os seguintes pontos:

- o significado de $P((C_2 \cap F_2) \mid E_1)$, no contexto da situação descrita
- a explicação do número de casos possíveis
- a explicação do número de casos favoráveis
- a conclusão, fundamentada nos três pontos anteriores, de que a probabilidade pedida é $\frac{3}{51}$

V.S.F.F.

435/C/13

Na tabela seguinte, indica-se como esta alínea deve ser cotada:

Forma / **Conteúdo**	Nível 1 (*)	Nível 2 (**)	Nível 3 (***)
A composição contempla os quatro pontos.	15	13	11
A composição contempla três pontos.	11	9	7
A composição contempla dois pontos.	7	5	3
A composição contempla um ponto.	3	2	1

(*) **Nível 1** - Redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).

(**) **Nível 2** - Redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecte a inteligibilidade.

(***) **Nível 3** - Redacção confusa, sem estruturação aparente, presença de erros graves, com perturbação frequente da inteligibilidade.

Pode acontecer que uma composição não se enquadre completamente num dos três níveis descritos e/ou contenha características presentes em mais do que um deles. Nesse caso, deverá ser atribuída uma pontuação intermédia.

Nota:

Se o examinando apresentar o valor da probabilidade pedida $\left(\frac{3}{51}\right)$, sem qualquer justificação, deverão ser atribuídos 0 (zero) pontos à sua resposta.

PROVA 435/9 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **Militares**
2002

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de dez.

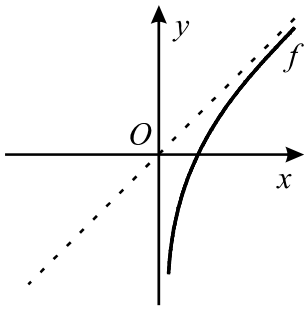
Na página 9 deste enunciado encontra-se um formulário.

Grupo I

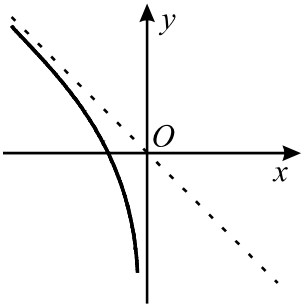
- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Na figura ao lado está a representação gráfica de uma função f e, a tracejado, parte da recta de equação $y = x$.

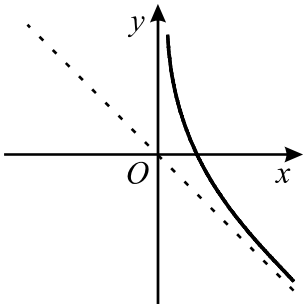
Em qual das figuras seguintes pode estar a representação gráfica da função f^{-1}, função inversa de f?



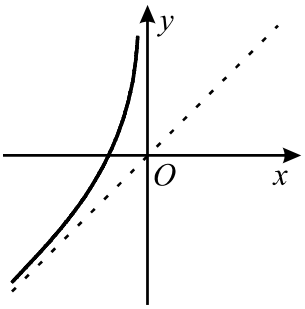
(A)



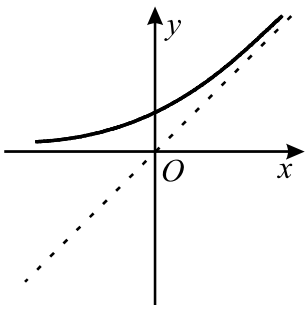
(B)



(C)



(D)



2. De uma função f, de domínio $[0, +\infty[$, sabe-se que as rectas de equações $y = 1$ e $x = 2$ são assimptotas do seu gráfico.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A função f é contínua em todo o seu domínio.

(B) A função $|f|$ tem máximo absoluto.

(C) O gráfico de f não tem assimptota oblíqua.

(D) O gráfico de $-f$ não tem assimptota vertical.

3. Sejam a e b dois números reais positivos.
Qual das seguintes igualdades é equivalente a $\ln a = -\ln b$?

(A) $a + b = 1$

(B) $\frac{a}{b} = 1$

(C) $a \times b = 1$

(D) $a - b = 1$

4. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ e a um ponto do domínio de f tal que $f'(a) = 0$

Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?

(A) a é zero de f

(B) $f(a)$ é extremo relativo de f

(C) $(a, f(a))$ é ponto de inflexão do gráfico de f

(D) A recta de equação $y = f(a)$ é tangente ao gráfico de f

5. A Joana comprou dez discos, todos diferentes, sendo três deles de música clássica e os restantes de Jazz. Pretende oferecer esses dez discos aos seus dois irmãos, o Ricardo e o Paulo, de modo a que

- cada irmão fique com o mesmo número de discos;
- o Ricardo fique com exactamente dois discos de música clássica.

De quantas maneiras o poderá fazer?

(A) ${}^3C_2 \times {}^7C_3$ **(B)** ${}^3C_2 \times {}^7C_3 \times {}^3C_1 \times {}^7C_4$

(C) ${}^3C_2 + {}^7C_3$ **(D)** ${}^3C_2 \times {}^7C_3 + {}^3C_1 \times {}^7C_4$

6. Numa caixa há bolas de duas cores: verdes e pretas.

O número de bolas verdes é seis.

De forma aleatória extraem-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da caixa.

A probabilidade de a segunda bola extraída ser preta, sabendo que a primeira bola extraída foi verde, é $\frac{1}{2}$.

Quantas bolas pretas havia inicialmente na caixa?

(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 7

7. Seja w um número complexo cuja representação geométrica pertence à parte negativa do eixo real.

As representações geométricas das raízes quadradas de w pertencem a uma das rectas abaixo indicadas.

A qual delas?

(A) Eixo real
(B) Eixo imaginário
(C) Bissectriz dos quadrantes pares
(D) Bissectriz dos quadrantes ímpares

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja

$z_1 = 1 - i$ (i designa a unidade imaginária).

1.1. Determine, na forma trigonométrica, os valores, não nulos, de z para os quais $z^2 = \overline{z} \times z_1$

1.2. Represente, no plano complexo, a região do plano definida por

$0 \leq \arg(z - z_1) \leq \frac{3\pi}{4} \quad \wedge \quad |z - z_1| \leq 1$

2. Numa turma de vinte e cinco jovens, as suas idades e sexos estão distribuídos como indica a tabela:

Idade	Rapazes	Raparigas
15	4	2
16	5	4
17	6	4

2.1. Pretende-se escolher um jovem para representar a turma. Sabendo que esse representante é escolhido ao acaso, qual é a probabilidade de que tenha dezasseis anos ou seja uma rapariga? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

2.2. Ao escolher dois jovens ao acaso, qual é a probabilidade de eles serem de sexo diferente e terem a mesma idade? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3. Considere as funções $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = \ln x \qquad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

$$g(x) = x^2 - 3$$

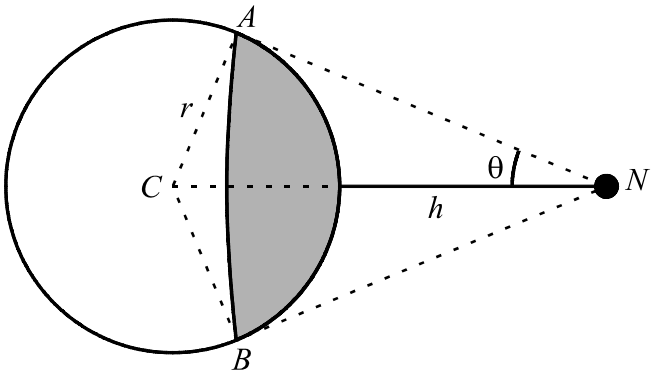
3.1. Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, estude, quanto à monotonia, a função $f - g$

3.2. Utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora, investigue se todo o número x do intervalo $[0{,}1\,;\,1{,}8]$ é solução da inequação $f(x) > g(x)$. Indique a conclusão a que chegou e explique como procedeu. Deverá incluir na sua explicação os gráficos obtidos na sua calculadora.

4. Na figura está representada a Terra e uma nave espacial N.

Considere que a Terra é uma esfera de centro C e raio r.

A área da superfície da terra visível da nave, representada a sombreado na figura, é dada, em função do ângulo θ, por $f(\theta) = 2\pi r^2 (1 - \operatorname{sen}\theta)$ $(\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[)$.



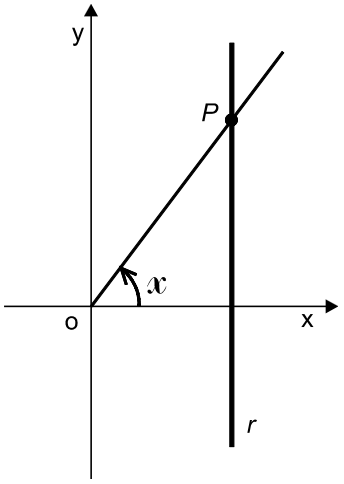
4.1. Determine o valor de θ para o qual é visível, da nave, a quarta parte da superfície terrestre.

4.2. Designando por h a distância da nave à Terra, mostre que a área da superfície da terra visível da nave é dada, em função de h, por $g(h) = \frac{2\pi r^2 h}{r+h}$

Sugestão: tenha em conta que o ângulo CAN é recto.

4.3. Calcule $\lim\limits_{h \to +\infty} g(h)$ e interprete o resultado obtido no contexto da situação descrita.

5. Na figura está representada, em referencial o. n. xOy, uma recta r paralela ao eixo Oy.



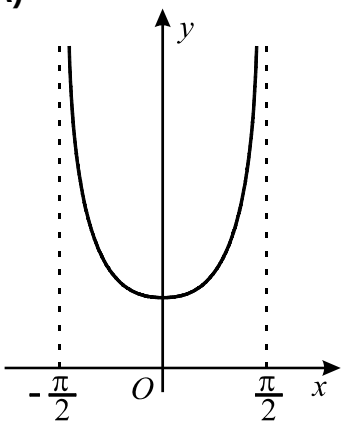
Considere que um ponto P se desloca ao longo de toda a recta r.

Sejam:

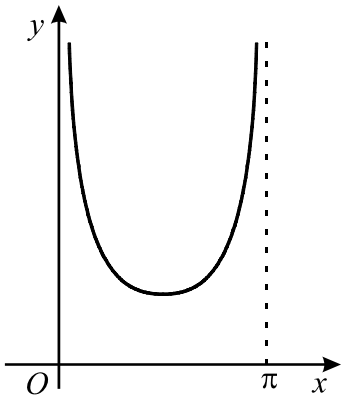
- x a amplitude, em radianos, do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semi-recta $\dot{O}P$;
- f a função que dá, para cada x, a distância de P à origem O do referencial.

Dos gráficos seguintes, apenas um deles pode ser o da função f. Qual?
Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explique por que é que os outros três estão incorrectos, apresentando, para cada um deles, uma razão pela qual o rejeita.

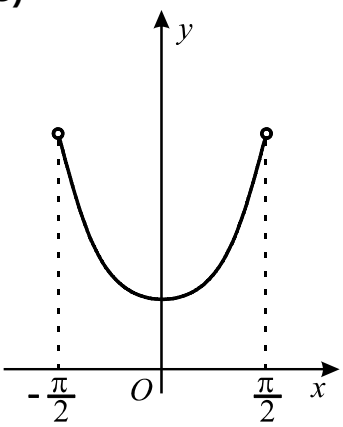
(A)



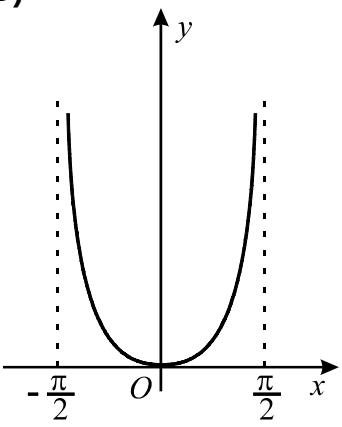
(B)



(C)



(D)



FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 11
1.2. 10

2. 32
2.1. 16
2.2. 16

3. 28
3.1. 14
3.2. 14

4. 41
4.1. 14
4.2. 14
4.3. 13

5. 15

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Círculo: $\pi\ r^2 \qquad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - raio\ da\ base;\ g - geratriz)$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\,r^2$
$(r - raio)$

Volumes

Prisma: *Área da base* $\times$ *Altura*

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3 \qquad (r - raio)$

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\,.\cos b + \text{sen}\,b\,.\cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\,.\cos b - \text{sen}\,a\,.\,\text{sen}\,b$

$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a\,.\,\text{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho\,cis\,\theta)\,.\,(\rho'\,cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta+\theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\,cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\,cis\,\theta)^n\ = \rho^n\,cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\,cis\,\theta}\ = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\,u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\,\text{sen}\,u$

$(\text{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

Resolução Exame de Matemática (código 435) 2002

Militares

Grupo I

1. (D) porque o gráfico de f^{-1} é simétrico do de f em relação à bissectriz dos quadrantes ímpares.

2. (C) o gráfico de f não tem assimptota obliqua porque se só está definida em $[0,+\infty[$ e tem uma assimptota horizontal já não pode ter oblíqua, pois, nesse caso não estaríamos perante uma função por haver objectos com mais do que uma imagem (uma próximo de 2 e outra próxima de $(\pm)\infty$.

3. (C) porque $\ln a = -\ln b \Leftrightarrow \ln a + \ln b = 0 \Leftrightarrow \ln(a \times b) = 0 \Leftrightarrow a \times b = e^0 \Leftrightarrow a \times b = 1$.

4. (D) porque o declive da recta tangente à curva no ponto de abcissa a é $f'(a) = 0$ o que significa que a recta é horizontal e porque passa no ponto $(a, f(a))$ a sua equação é y = f(a).

5. (A) porque depois da Joana escolher os discos que vai dar ao Ricardo, o Paulo fica com os restantes.

6. (B) porque se p representa o número de bolas pretas a probabilidade de a segunda bola extraída ser preta sabendo que a primeira foi verde é dada por $\frac{p}{6+p-1}$, logo $\frac{p}{6+p-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2p = 5 + p \Leftrightarrow p = 5$.

7. (B) sendo $w = \rho \operatorname{cis} \pi$ então $\sqrt{w} = \sqrt{\rho} \operatorname{cis} \frac{\pi + 2k\pi}{2}, k \in \{0,1\} \Leftrightarrow \sqrt{w} = \sqrt{\rho} \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \vee \vee \sqrt{w} = \sqrt{\rho} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$. As soluções são representadas geometricamente no eixo imaginário.

Grupo II

1. $z_1 = 1 - i$

1.1. Sendo $z = \rho \text{cis}\theta$, $z^2 = \bar{z} \times z_1 \Leftrightarrow \rho^2 \text{cis}(2\theta) = \rho \text{cis}(-\theta) \times \sqrt{2}\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ porque

$|z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ e porque $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\text{sen}\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\theta \in 4^{\text{o}}$ quadrante e será $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

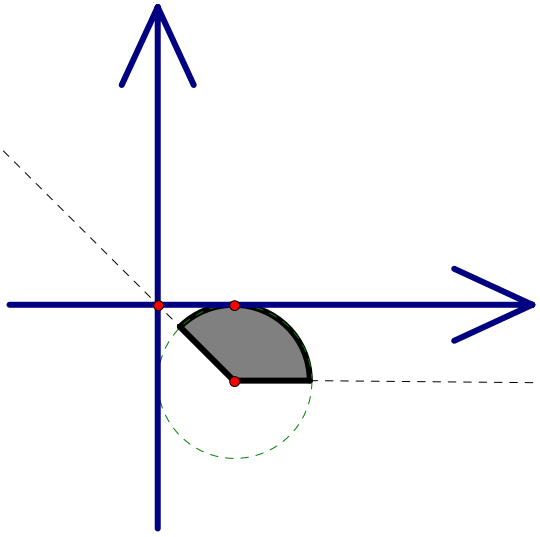
$$\rho^2 \text{cis}(2\theta) = \rho \text{cis}(-\theta) \times \sqrt{2}\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \rho^2 \text{cis}(2\theta) = \left(\sqrt{2}\rho\right)\text{cis}\left(-\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = \sqrt{2}\rho \\ 2\theta = -\theta - \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho(\rho - \sqrt{2}) = 0 \\ 3\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 0 \vee \rho = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}, k \in \{0,1,2\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \theta = -\frac{\pi}{12} \end{cases} \vee \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{7\pi}{12} \end{cases} \vee \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{12}\right) \vee z = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{7\pi}{12}\right) \vee z = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$$

1.2.



2.

2.1. P(ser rapariga $\cup$ ter 16 anos) = P(ser rapariga) + P(ter 16 anos) – P(ser rapariga $\cap$ ter 16 anos) = $\frac{9}{25} + \frac{10}{25} - \frac{4}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$

2.2. $P = \frac{2(4\times 2+5\times 4+6\times 4)}{25\times 24} = \frac{2(8+20+24)}{25\times 24} = \frac{104}{600} = \frac{13}{75}$

ou $P = \frac{4\times 2+5\times 4+6\times 4}{{}^{25}C_2} = \frac{13}{75}$

3. Seja $h(x)= (f - g)(x) = \ln x - x^2 + 3$

3.1. $Dh = IR^+$ e $h'(x) = \frac{1}{x} - 2x = \frac{1-2x^2}{x}$

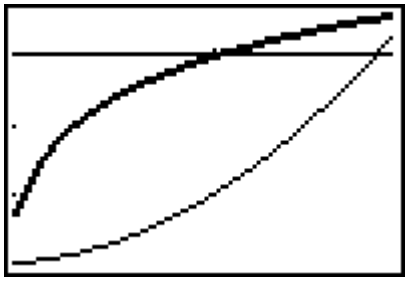
$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x^2}{x} = 0 \wedge x \in IR^+ \Leftrightarrow 1-2x^2 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$

$x^2 = \frac{1}{2} \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
f'	+	0	-
f	↗	M	↘

A função h é crescente em $\left]0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ e é decrescente em $\left]\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right[$ e tem um máximo em $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.2. Da observação do gráfico ao lado, onde a função f está representada a traço mais grosso no intervalo $[0,1; 1,8]$ posso concluir que, de facto, todos os números x do intervalo $[0,1; 1,8]$ são solução da inequação $f(x)>g(x)$.



4. $f(\theta) = 2\pi r^2(1-\text{sen}\theta),\ \theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

4.1. Área da superfície esférica = $4\pi r^2$

$\frac{4\pi r^2}{4} = 2\pi r^2(1-\text{sen}\theta) \Leftrightarrow 1-\text{sen}\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{sen}\theta = \frac{1}{2}$

$\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\wedge \text{sen}\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

4.2. $g(h) = 2\pi r^2\left(1-\frac{r}{r+h}\right) = 2\pi r^2 - \frac{2\pi r^3}{r+h} = \frac{2\pi r^3 + 2\pi r^2 h - 2\pi r^3}{r+h} = \frac{2\pi r^2 h}{r+h}$, logo

$g(h) = \frac{2\pi r^2 h}{r+h}$ como queríamos provar.

4.3. $\lim_{h\to+\infty} \frac{2\pi r^2 h}{r+h} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{h\to+\infty} \frac{2\pi r^2 h}{h} = 2\pi r^2$

Quando $h \to +\infty$, os raios NA aproximam-se da horizontal e a parte visível da superfície da terra tende para metade da área da superfície esférica.

Isto condiz com o resultado obtido pois A=$\frac{4\pi r^2}{2} = 2\pi r^2$.

5. O gráfico **(A)** é o correcto.

O gráfico **(B)** não serve porque o ângulo é orientado logo o domínio da função será $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

O gráfico **(C)** não serve porque quando x tende para $-\frac{\pi}{2}$ ou para $\frac{\pi}{2}$ a distância de P à origem tende para $+\infty$.

O gráfico **(D)** não serve porque quando x = 0 a distância de P à origem é a distância da origem à recta r e não zero como mostra este gráfico.

PROVA 435/9 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos **Época Especial**
2002

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, subdivididas em alíneas, num total de onze.

Na página 9 deste enunciado encontra-se um formulário.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que a recta de equação $y = -2x + 1$ é assimptota do seu gráfico.

Qual é o valor de $\lim_{x \to +\infty} f(x)$?

(A) $-\infty$ **(B)** -2

(C) 1 **(D)** $+\infty$

2. Seja g uma função contínua de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- g tem mínimo **absoluto** igual a 3, para $x = 2$
- g tem máximo **absoluto** igual a 7, para $x = 5$

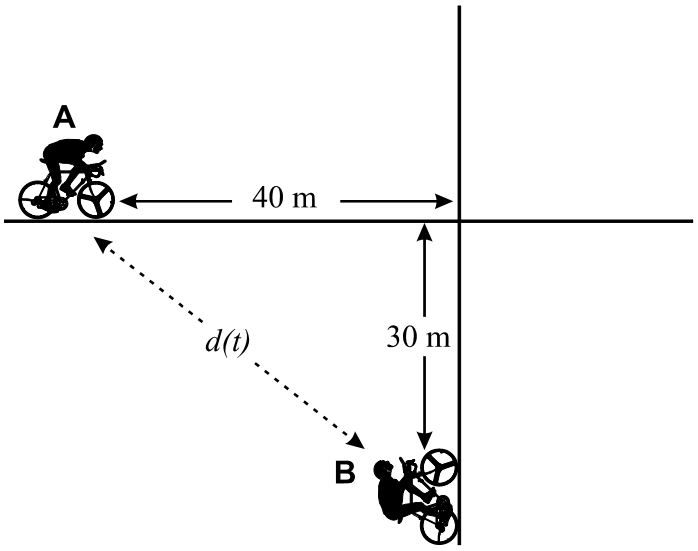
Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?

(A) g é crescente em $[2, 5]$
(B) O contradomínio de g é $[3, 7]$
(C) g tem derivada nula em $x = 2$ e em $x = 5$
(D) g tem pelo menos um zero

3. Na figura estão representados dois ciclistas, A e B, pedalando a caminho de um cruzamento. Ao chegarem ao cruzamento, ambos continuam em frente.

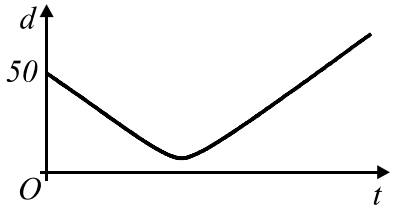
No instante $t = 0$, os ciclistas A e B encontram-se, respectivamente, a 40 metros e a 30 metros do cruzamento.

Os ciclistas pedalam ambos à mesma velocidade, que se mantém constante.

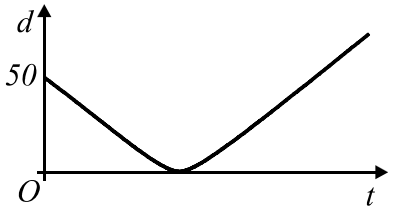


Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função que, para cada valor de t, dá a distância $d(t)$ entre os dois ciclistas, no instante t ?

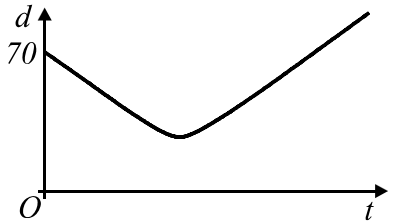
(A)



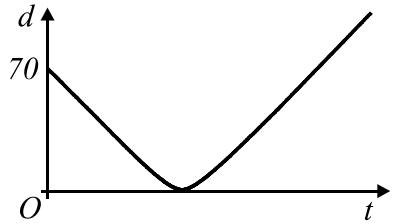
(B)



(C)



(D)



4. De uma função f sabe-se que $f(x) + f''(x) = 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Qual das seguintes pode ser a expressão analítica da função f?

(A) $\text{sen}\, x$ **(B)** e^x

(C) x **(D)** $\ln x$

5. Nos jogos de futebol entre a equipa X e a equipa Y, a estatística revela que:
- em 20% dos jogos, a equipa X é a primeira a marcar;
- em 50% dos jogos, a equipa Y é a primeira a marcar.

Qual é a probabilidade de, num jogo entre a equipa X e a equipa Y, não se marcarem golos?

(A) 10% **(B)** 25% **(C)** 30% **(D)** 35%

6. Extrai-se, ao acaso, uma bola de uma caixa que contém vinte bolas, numeradas de 1 a 20.
Considere os acontecimentos:
A - «A bola extraída tem número par».
B - «A bola extraída tem número múltiplo de 5».

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(B|A)$?

(A) $0{,}1$ **(B)** $0{,}2$ **(C)** $0{,}3$ **(D)** $0{,}4$

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número complexo i satisfaz uma das condições a seguir indicadas.

Qual delas?

(A) $\frac{z}{i} = z - i$ **(B)** $\frac{z}{|z|} = i$ **(C)** $arg(z) = 0$ **(D)** $z^2 = z$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Seja A o conjunto dos números complexos que satisfazem a condição

$$|z| = 1 \quad \wedge \quad Re(z) \geq 0$$

1.1. Mostre que o número complexo $\frac{-1+i}{\sqrt{2}\,cis\,\pi}$ pertence a A

1.2. A representação geométrica, no plano complexo, da condição

$$z \in A \quad \wedge \quad -\frac{\pi}{4} \leq arg(z) \leq \frac{\pi}{4}$$

é uma linha.

Represente graficamente essa linha e determine o seu comprimento.

2. Seja B o conjunto dos números de quatro algarismos **diferentes**, menores que 3000, que se podem formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

2.1. Verifique que o conjunto B tem 240 elementos.

2.2. Escolhe-se, ao acaso, um elemento de B.
Qual é a probabilidade de que esse elemento seja um número par? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

2.3. Escolhem-se, ao acaso, três elementos de B.
Qual é a probabilidade de todos eles serem maiores do que 2000? Apresente o resultado na forma de dízima, com duas casas decimais.

3. Considere a função f, de domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por

$$f(x) = 2\,x - \operatorname{tg} x$$

Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as duas alíneas seguintes:

3.1. Estude f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico.

3.2. Estude f quanto à monotonia e existência de extremos relativos.

4. Uma pastilha elástica é tanto mais saborosa quanto maior for a quantidade de aromatizante nela presente.
Admita que a quantidade de aromatizante presente numa pastilha elástica da marca *MastiBom*, t minutos após ter sido colocada na boca, é dada, em certa unidade de medida, por

$$A(t) = 5\,e^{-0,1\,t} \ , \ t \in [0, +\infty[$$

4.1. Utilizando métodos analíticos e recorrendo à calculadora para efectuar cálculos numéricos, determine ao fim de quanto tempo, após ter sido colocada na boca, a quantidade de aromatizante presente numa pastilha *MastiBom* se reduz a metade.
Apresente o resultado em minutos, arredondado às unidades.

4.2. Suponha que é o responsável pelo laboratório da empresa produtora das pastilhas *MastiBom*.
Admita que a concorrência acabou de lançar no mercado três tipos de pastilhas e que a gerência da sua empresa o encarregou de analisar essas pastilhas, para ver se algumas delas poderiam colocar em risco a posição de líder de mercado das pastilhas *MastiBom*.
Da análise que efectuou, concluiu que a quantidade de aromatizante presente em cada uma delas, t minutos após ter sido colocada na boca, é dada por:

Pastilha X: $B_1(t) = 4\ e^{-0,15\,t}$, $t \in [0, +\infty[$

Pastilha Y: $B_2(t) = 7\ e^{-0,2\,t}$, $t \in [0, +\infty[$

Pastilha Z: $B_3(t) = 6\ e^{-0,1\,t}$, $t \in [0, +\infty[$

Recorrendo à sua calculadora, compare, **no intervalo $[0, 15]$**, cada uma destas três funções com a função A, definida acima (admita que, ao fim de quinze minutos, a quantidade de aromatizante presente em cada uma das pastilhas já não lhes dá sabor).

Elabore um relatório, com cerca de dez linhas, que possa ser apresentado à gerência da sua empresa, em que mencione, para cada uma das pastilhas concorrentes, durante quanto tempo é que, nos primeiros quinze minutos, ela é mais saborosa do que a *MastiBom* (Sempre? Nunca? A partir de um certo instante? Qual? Até um determinado instante? Qual?).
Apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos (coordenadas arredondadas às décimas).

5. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} x^2\,, & se\ \ x \neq 0 \\ 1\,, & se\ \ x = 0 \end{cases}$$

5.1. Justifique que g não é contínua no ponto 0.

5.2. Mostre que é falsa a seguinte afirmação:
«Qualquer que seja a função h, de domínio $\mathbb{R}$, a função $h + g$ não é contínua no ponto 0.»

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 11
1.2. 10

2. 32
2.1. 10
2.2. 11
2.3. 11

3. 29
3.1. 13
3.2. 16

4. 30
4.1. 14
4.2. 16

5. 25
5.1. 10
5.2. 15

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Círculo: $\pi\ r^2 \qquad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - raio\ da\ base;\ g - geratriz)$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - raio)$

Volumes

Prisma: *Área da base* × *Altura*

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3 \qquad (r - raio)$

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\,.\cos b + \text{sen}\,b\,.\cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\,.\cos b - \text{sen}\,a\,.\,\text{sen}\,b$

$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a\,.\,\text{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho\, cis\,\theta)\,.\,(\rho'\, cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta+\theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\,\theta)^n\ = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta}\ = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\,u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\,\text{sen}\,u$

$(\text{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

PROVA 435/9 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **Época Especial**
2002 **Outubro**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui seis questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de onze.

Na página 9 deste enunciado encontra-se um formulário.

Grupo I

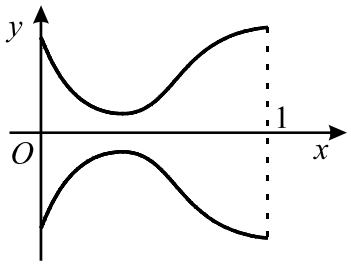
- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. De duas funções f e g, de domínio $[0,1]$, sabe-se que

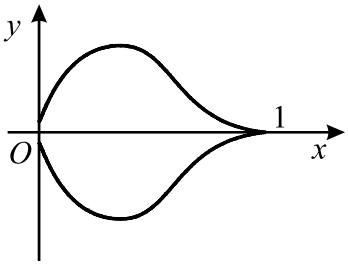
$$f'(x) = g'(x)\ ,\ \forall\, x \in [0,1]$$

Em qual das figuras seguintes podem estar representados os gráficos de f e de g?

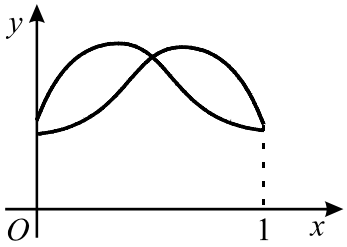
(A)



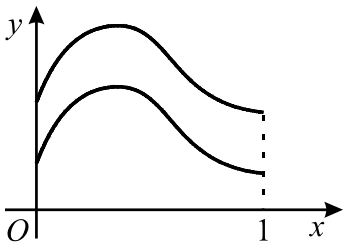
(B)



(C)

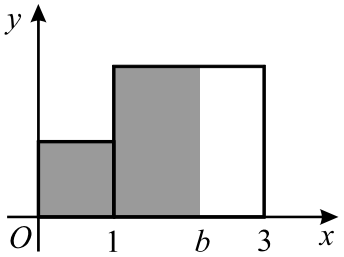


(D)



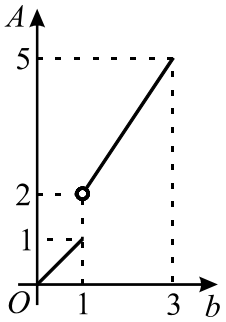
2. Na figura estão representados, em referencial o. n. xOy, dois quadrados.

Considere, para cada valor de $b \in [0, 3]$, a área $A(b)$ da região sombreada (região interior à figura formada pelos dois quadrados e compreendida entre o eixo das ordenadas e a recta de equação $x = b$)

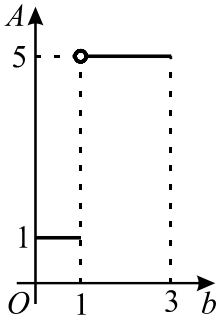


Qual dos gráficos seguintes é o da função A?

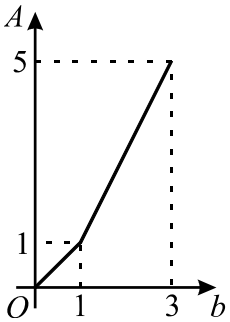
(A)



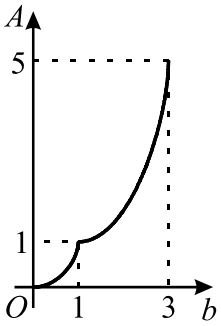
(B)



(C)



(D)

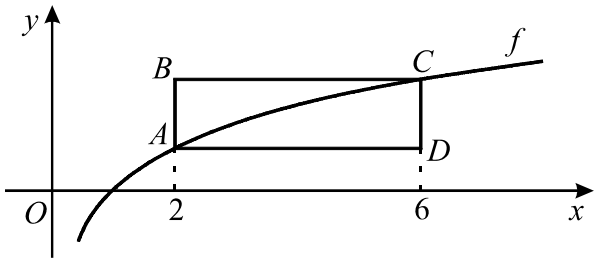


3. Seja h a função, de domínio $[-3, 2]$, definida por $h(x) = x^2 + 1$

Qual é o contradomínio de h?

(A) $[-8, 5]$ **(B)** $[5, 10]$ **(C)** $[0, 5]$ **(D)** $[1, 10]$

4. Na figura está parte da representação gráfica da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \ln x$ ($\ln$ designa logaritmo de base e).



Os pontos A e C, que pertencem ao gráfico da função f, são vértices de um rectângulo $[ABCD]$, de lados paralelos aos eixos do referencial.
As abcissas de A e de C são 2 e 6, respectivamente.

Qual é a área do rectângulo $[ABCD]$?

(A) $\ln 64$ **(B)** $\ln 72$ **(C)** $\ln 81$ **(D)** $\ln 93$

5. Uma certa variável aleatória X tem a seguinte distribuição de probabilidades:

x_i	1	2
$P(X = x_i)$	a	b

Qual é a média desta variável aleatória?

(A) $a + b$ **(B)** $\frac{a+b}{2}$ **(C)** $a + 2\,b$ **(D)** $2\,a + b$

6. Sejam A e B dois acontecimentos associados a uma certa experiência aleatória.
Sabe-se que A e B são independentes, que $P(A) = 0{,}2$ e $P(B) = 0{,}5$.
Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$?

(A) $0{,}2$ **(B)** $0{,}3$ **(C)** $0{,}5$ **(D)** $0{,}7$

7. Qual das condições a seguir indicadas define, no plano complexo, uma recta paralela à semi-recta definida por $arg(z) = \frac{\pi}{4}$?

(A) $Re(z) = \frac{\pi}{4}$ **(B)** $Im(z) = \frac{3\,\pi}{4}$

(C) $|z| = |z - 1 + i|$ **(D)** $|z + 1| = |z - i|$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$$z_1 = \sqrt{2}\ cis\ \frac{3\pi}{4} \qquad \text{e} \qquad z_2 = 2 + 3i$$

1.1. Determine, na forma algébrica, $z_1 + z_2^{\,2}$

1.2. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^3 = z_1^{\,2}$

Apresente as soluções na forma trigonométrica.

2. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

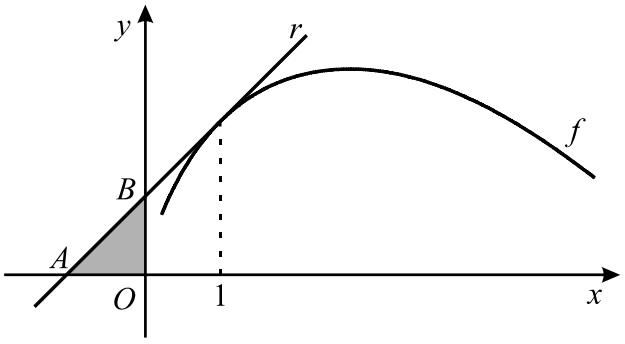
$$f(x) = 2x - x \ln x \qquad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as três alíneas seguintes:

2.1. Determine a abcissa do ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo Ox.

2.2. Estude f quanto à existência de assimptotas não verticais do seu gráfico.

2.3. Na figura está, em referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função f.



A recta r, tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1, intersecta o eixo Oy no ponto B e o eixo Ox no ponto A.

Determine a área do triângulo $[AOB]$.

3. A figura A representa um cubo de aresta 2.
Considere, para cada vértice, os pontos das arestas que estão à distância x $(0 < x \leq 1)$ desse vértice. Seccionando o cubo por planos que contêm esses pontos, obtemos o poliedro (*cubo truncado)* representado na figura B.

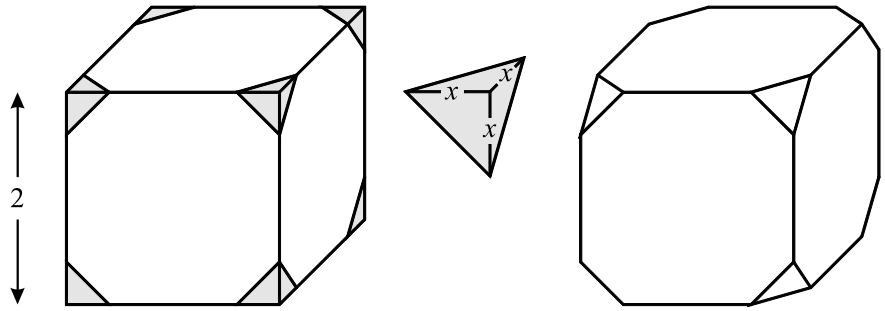


Figura A Figura B

3.1. Mostre que o volume do *cubo truncado* é dado, em função de x, por

$$V(x) = \frac{24 - 4\,x^3}{3} \qquad (\,x \in]0, 1]\,)$$

3.2. Determine o valor de x para o qual o volume do *cubo truncado* é mínimo. Para esse valor de x, indique, justificando, quantas arestas tem o poliedro.

4. Considere um conjunto de 4 casais.

4.1. Escolhendo ao acaso quatro dessas oito pessoas, qual é a probabilidade de serem escolhidos dois homens e duas mulheres? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4.2. Escolhendo ao acaso uma pessoa de cada casal, qual é a probabilidade de serem escolhidos dois homens e duas mulheres? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

5. Seja S um espaço de resultados, finito, associado a uma experiência aleatória.
Mostre que é falsa a seguinte afirmação:
«Quaisquer que sejam os acontecimentos A e B ($A \subset S$ e $B \subset S$),
se $P(A) + P(B) = 1$ então $A \cup B$ é um acontecimento certo.»

6. Num certo dia de Verão, as temperaturas, em graus centigrados, fora e dentro de uma determinada habitação, são dadas, respectivamente, por:

$$f(t) = 25 + 10 \cos \frac{\pi (t+10)}{12} \qquad \text{e} \qquad d(t) = 21{,}5 + 3{,}5 \cos \frac{\pi (t+9)}{12}$$

(t designa o tempo, em horas, contado a partir das 0 horas desse dia)

Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, recolha os dados que lhe permitam calcular:

- a amplitude térmica (diferença entre o valor da temperatura máxima e o valor da temperatura mínima) dentro de casa;

- a amplitude térmica fora de casa;

- o desfasamento térmico (tempo que decorre entre as ocorrências das temperaturas máximas, fora e dentro de casa).

Transcreva para a sua folha de prova os gráficos obtidos, bem como os valores encontrados.
Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, refira o que se pode concluir acerca das condições de isolamento da referida habitação (admita que uma habitação se considera bem isolada se a amplitude térmica dentro de casa for inferior à terça parte da amplitude térmica fora de casa e se o desfasamento térmico for superior a uma hora e meia).

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 11
1.2. 10

2. 39
2.1. 13
2.2. 13
2.3. 13

3. 30
3.1. 14
3.2. 16

4. 20
4.1. 10
4.2. 10

5. 12

6. 15

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Círculo: $\pi\ r^2 \qquad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - raio\ da\ base;\ g - geratriz)$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - raio)$

Volumes

Prisma: *Área da base* × *Altura*

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3 \qquad (r - raio)$

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\,.\cos b + \text{sen}\,b\,.\cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\,.\cos b - \text{sen}\,a\,.\,\text{sen}\,b$

$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a\,.\,\text{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho\, cis\,\theta)\,.\,(\rho'\, cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta+\theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\,\theta)^n\ = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta}\ = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\,u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\,\text{sen}\,u$

$(\text{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

2003

PROVA 435/9 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **DATA ESPECIAL**

2003

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas subdivididas em alíneas, num total de nove.

Na página 9 deste enunciado encontra-se um formulário.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

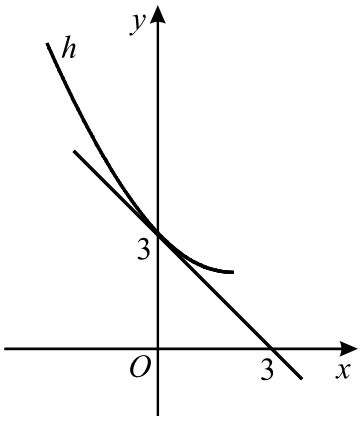
1. Uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, tem um zero no intervalo $[-1, 2]$.

Qual das expressões seguintes define uma função que tem, necessariamente, um zero no intervalo $[-5, -2]$?

(A) $f(x+4)$ **(B)** $|f(x)| + 4$

(C) $f(x) - 4$ **(D)** $f(x-4)$

2. Na figura está representada parte do gráfico de uma função h, de domínio $\mathbb{R}$, bem como parte da recta tangente ao gráfico de h, no ponto $(0, 3)$. Esta recta intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa 3.



Qual das expressões seguintes pode definir h', função derivada de h ?

(A) $2 - \frac{x}{3}$ **(B)** $1 - \frac{x}{2}$ **(C)** $\frac{x}{3} - 2$ **(D)** $\frac{x}{2} - 1$

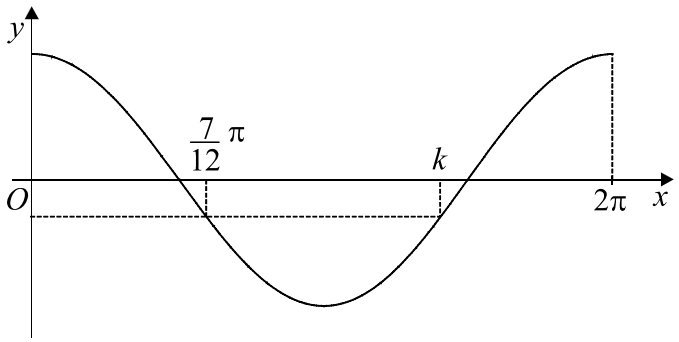
3. Indique qual das expressões seguintes é, para qualquer número real a superior a 1, igual a $a^{2+\log_a 3}$

(A) $3\,a^2$ **(B)** $2\,a^3$

(C) $3 + a^2$ **(D)** $2 + a^3$

4. Na figura está a representação gráfica da função f, definida, no intervalo $[0, 2\,\pi]$, por $f(x) = \cos x$.

Tem-se que $f(k) = f\left(\frac{7\,\pi}{12}\right)$



Qual é o valor de k?

(A) $\frac{11\,\pi}{12}$ **(B)** $\frac{14\,\pi}{12}$

(C) $\frac{17\,\pi}{12}$ **(D)** $\frac{19\,\pi}{12}$

5. Numa conferência de alto nível, encontram-se doze políticos de quatro países, sendo três de cada país (o Presidente da República, o Primeiro-Ministro e o Ministro dos Negócios Estrangeiros).

De quantas maneiras diferentes se podem dispor as doze pessoas, em fila, para uma fotografia, de tal modo que os representantes de cada país fiquem juntos?

(A) $13\,198$ **(B)** $21\,106$ **(C)** $31\,104$ **(D)** $41\,162$

6. Seja Ω o espaço de resultados (com um número finito de elementos) associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que o valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$ é igual a 1.

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) Os acontecimentos A e B são incompatíveis.

(B) Os acontecimentos A e B são independentes.

(C) Se A se realiza, então B também se realiza.

(D) Se B se realiza, então A também se realiza.

7. Seja w um número complexo.

A imagem geométrica, no plano complexo, de uma das raízes cúbicas de w pertence à região definida pela condição $0 < arg\,(z) < \frac{\pi}{6}$

A que quadrantes pertencem as imagens geométricas das outras raízes cúbicas de w ?

(A) Primeiro e terceiro.

(B) Segundo e terceiro.

(C) Segundo e quarto.

(D) Terceiro e quarto.

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}\ i \qquad\qquad z_2 = cis\left(-\ \frac{\pi}{5}\right)$$

1.1. Resolva a equação $(1+2\,i)\,z = 6 + z_1 \times \overline{z_1}$

Apresente a solução na forma algébrica.

1.2. Determine o menor valor de n natural para o qual $(z_1 \times z_2)^n$ é um número real positivo.

2. Numa turma do 12.º ano, a distribuição dos alunos por idades e sexo é a seguinte:

	Raparigas	Rapazes
16 anos	5	6
17 anos	7	8

Para formar uma comissão que vai preparar um baile de finalistas, vão ser sorteados três rapazes e duas raparigas desta turma.

2.1. Qual é a probabilidade de a comissão ficar constituída apenas por jovens de 16 anos? Apresente o resultado na forma de dízima, com quatro casas decimais.

2.2. Admita agora que já estão sorteados **quatro** dos cinco jovens que vão constituir a comissão: **os três rapazes e uma das raparigas, a qual tem 16 anos de idade**. Para a comissão ficar completa, falta, portanto, escolher aleatoriamente uma rapariga.
Seja X a variável aleatória: *número de raparigas de 17 anos que a comissão vai incluir*.
Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X. Apresente as probabilidades na forma de fracção.

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3-\sqrt{9-x}} & se \quad x < 0 \\ 6 & se \quad x = 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)+5x}{x} & se \quad x > 0 \end{cases}$

3.1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, estude a função f quanto à continuidade.

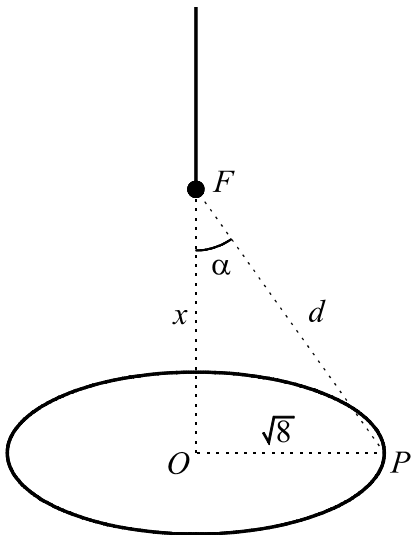
3.2. A equação $f(x) = x^2$ tem exactamente duas soluções. Utilizando a sua calculadora, determine-as **graficamente**. Apresente os valores arredondados às décimas. Explique como procedeu, apresentando o gráfico, ou gráficos, obtido(s) na calculadora.

4. Numa sala de laboratório está a decorrer uma experiência de óptica.

Na figura ao lado está um esquema dessa experiência.

Nela estão representadas:

- uma fonte luminosa F, que se encontra suspensa do tecto da sala (essa fonte pode subir e descer, pelo que a sua distância x ao chão da sala pode variar);
- uma circunferência de raio $\sqrt{8}$, traçada no chão da referida sala (o seu centro O está sob a fonte luminosa, no prolongamento do fio que a suspende do tecto).



Admita que a intensidade I da luz recebida num ponto P dessa circunferência é dada, numa certa unidade de medida, por:

$$I = \frac{\cos\alpha}{d^2}$$

α é o ângulo de incidência, assinalado na figura, e d é a distância do ponto P à fonte luminosa.

4.1. Mostre que a intensidade da luz recebida no ponto P é dada, em função de x, por

$$I(x) = \frac{x}{(x^2+8)^{\frac{3}{2}}}$$

4.2. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, determine o valor de x para o qual é máxima a intensidade da luz recebida no ponto P.

5. Para estudar a evolução das marcas obtidas pelos vencedores da prova da Maratona (masculina), nos Jogos Olímpicos da Era Moderna, representaram-se, num referencial xOy, tantos pontos quantas as provas sobre as quais existem registos do tempo do vencedor (cada ponto corresponde a uma prova).

Para cada ponto,

- a abcissa corresponde ao ano em que a prova se realizou (tomando para origem o ano 1896, ano em que se realizaram os primeiros Jogos Olímpicos da Era Moderna);
- a ordenada é o tempo, medido em horas, feito pelo vencedor.

Por exemplo, o ponto correspondente à Maratona dos Jogos Olímpicos de 1984 tem abcissa 88 (número de anos decorridos desde 1896) e ordenada $2{,}156$ (tempo, em horas, obtido pelo vencedor, o atleta português Carlos Lopes).

Depois de representados os pontos, obteve-se a recta de regressão (recta ajustada a esse conjunto de pontos). Essa recta, que designaremos por r, é o gráfico de uma função afim f, que se pode utilizar como modelo da situação em estudo.

Considere agora as seguintes questões:

- O declive da recta r é negativo. Porquê?
- Em 1916, 1940 e 1944 não se realizaram Jogos Olímpicos, em virtude das duas Guerras Mundiais. Como poderemos utilizar a função f para estimar o tempo que os vencedores teriam feito se os jogos se tivessem realizado?
- Admitindo que os Jogos Olímpicos se vão realizar durante vários milénios, será que a função f é um bom modelo para prever, a muito longo prazo, a evolução do tempo do vencedor da Maratona? Porquê?

Analise as três questões colocadas e, numa pequena composição, com cerca de quinze linhas, refira a sua opinião sobre cada uma delas.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21

1.1. 10
1.2. 11

2. 32

2.1. 16
2.2. 16

3. 33

3.1. 17
3.2. 16

4. 34

4.1. 17
4.2. 17

5. 17

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Círculo: $\pi\ r^2 \qquad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - raio\ da\ base;\ g - geratriz)$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - raio)$

Volumes

Prisma: *Área da base* $\times$ *Altura*

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3 \qquad (r - raio)$

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\,.\cos b + \text{sen}\,b\,.\cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\,.\cos b - \text{sen}\,a\,.\,\text{sen}\,b$

$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a\,.\,\text{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho\, cis\,\theta)\,.\,(\rho'\, cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta+\theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\,\theta)^n\ = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta}\ = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\,u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\,\text{sen}\,u$

$(\text{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

PROVA 435/11 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos
2003

1.ª FASE
1.ª CHAMADA
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui seis questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de onze.

Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.

Grupo I

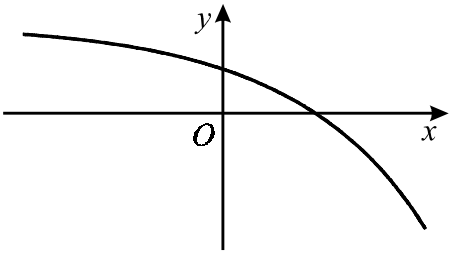
- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.

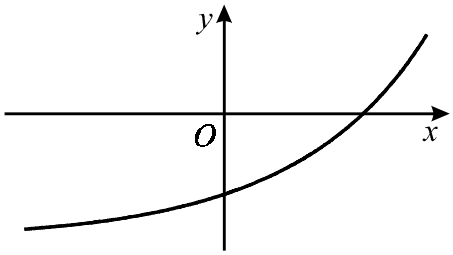
Sabe-se que a primeira e a segunda derivadas de f são negativas em $\mathbb{R}$.

Em qual das figuras seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f ?

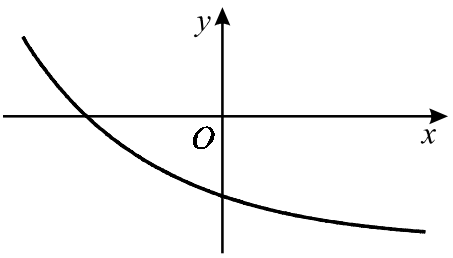
(A)



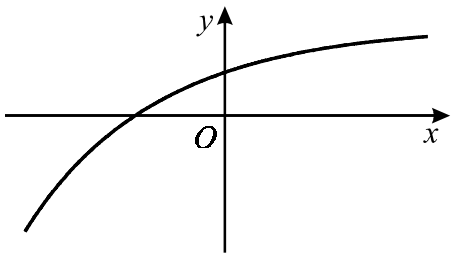
(B)



(C)



(D)



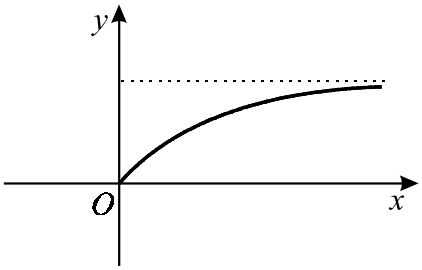
2. Considere uma função g, de domínio $[0, +\infty[$, contínua em todo o seu domínio.

Sabe-se que:

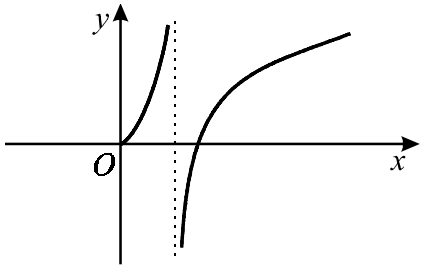
- O gráfico de g tem uma única assimptota
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \dfrac{1}{2}$

Em qual das alternativas seguintes podem estar representadas, em referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função g e, a tracejado, a sua assimptota?

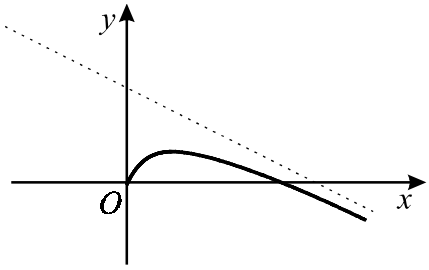
(A)



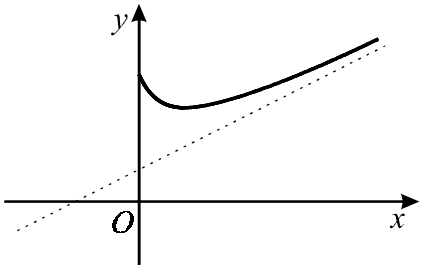
(B)



(C)

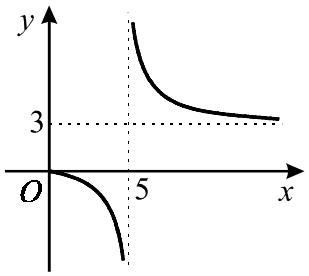


(D)



3. Na figura está representada parte do gráfico de uma função h, de domínio $[0, 5[\cup]5, +\infty[$

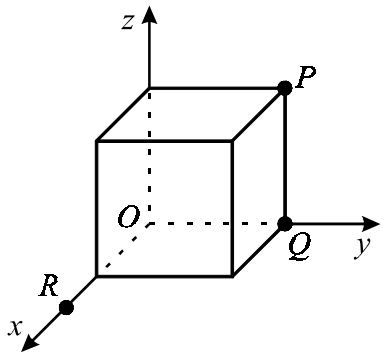
As rectas de equações $x = 5$ e $y = 3$ são as únicas assimptotas do gráfico de h.



Indique o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{3 + e^{-x}}$

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 5 **(D)** $+\infty$

4. Na figura está representado um cubo, em referencial o. n. $Oxyz$.



Três das arestas do cubo estão contidas nos eixos do referencial.

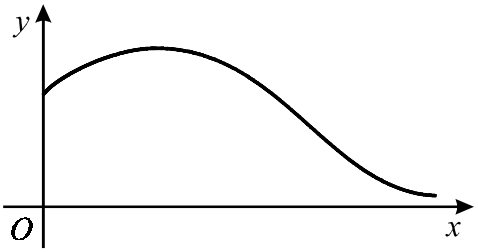
Os pontos P e Q são dois dos vértices do cubo, pertencentes ao plano yOz.

Admita que um ponto R, partindo da origem do referencial, se desloca ao longo do semieixo positivo Ox.

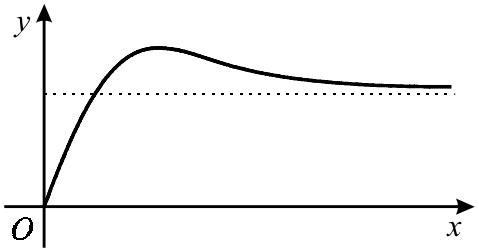
Seja g a função que faz corresponder, à abcissa x do ponto R, a área da secção produzida no cubo pelo plano PQR.

Qual dos seguintes pode ser o gráfico da função g ?

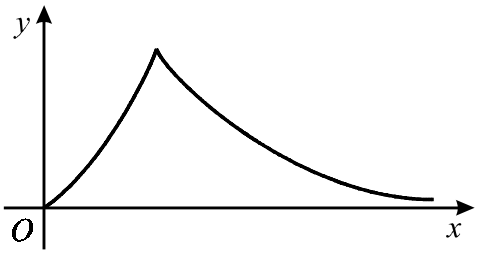
(A)



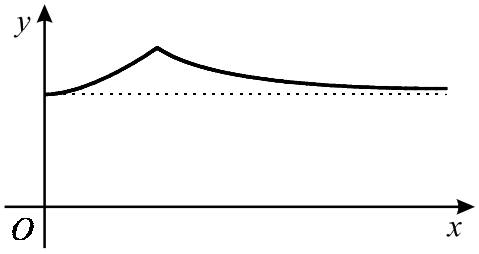
(B)



(C)



(D)



5. Seja E o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$).
Tem-se que:

$$P(A) = 0{,}3 \quad \text{e} \quad P(B) = 0{,}5$$

Qual dos números seguintes pode ser o valor de $P(A \cup B)$?

(A) $0{,}1$ **(B)** $0{,}4$ **(C)** $0{,}6$ **(D)** $0{,}9$

6. Numa caixa estão três cartões, numerados de 1 a 3.

Extraem-se ao acaso, e em simultâneo, dois cartões da caixa.

Seja X o **maior** dos números saídos.

Qual é a distribuição de probabilidades da variável aleatória X?

(A)

x_i	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

(B)

x_i	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(C)

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(D)

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

7. Seja w um número complexo diferente de zero, cuja imagem geométrica pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares.

A imagem geométrica de w^4 pertence a uma das rectas a seguir indicadas.

A qual delas?

(A) Eixo real

(B) Eixo imaginário

(C) Bissectriz dos quadrantes pares

(D) Bissectriz dos quadrantes ímpares

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = 2 - 2i\,, \qquad z_2 = \sqrt{2}\ cis\ \frac{5\pi}{4} \qquad \text{e} \qquad z_3 = -1 + i$$

1.1. **Sem recorrer à calculadora**, determine $\frac{z_1}{z_2}$ apresentando o resultado na forma algébrica.

1.2. Escreva uma condição em $\mathbb{C}$ que defina, no plano complexo, a circunferência que tem centro na imagem geométrica de z_1 e que passa na imagem geométrica de z_3

2. Num laboratório, foi colocado um purificador de ar.
Num determinado dia, o purificador foi ligado às zero horas e desligado algum tempo depois.
Ao longo desse dia, o nível de poluição do ar **diminuiu**, enquanto o purificador esteve ligado.
Uma vez o purificador desligado, o nível de poluição do ar **começou de imediato a aumentar**.
Admita que o nível de poluição do ar no laboratório, medido em mg/l de ar, às t horas desse dia, pode ser dado por

$$P(t) = 1 - \frac{\ln(t+1)}{t+1}\,, \quad t \in [\,0, 24] \qquad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

Nas duas alíneas seguintes, sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2.1. Qual é o nível de poluição à uma hora e trinta minutos **da tarde**?
Apresente o resultado na unidade considerada, arredondado às décimas.

2.2. **Sem recorrer à calculadora**, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva o seguinte problema:

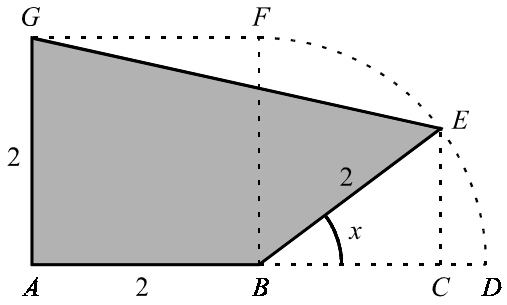
Quanto tempo esteve o purificador de ar ligado?

Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

3. Na figura está representado a sombreado um polígono $[ABEG]$.

Tem-se que:

- $[ABFG]$ é um quadrado de lado 2
- FD é um arco de circunferência de centro em B; o ponto E move-se ao longo desse arco; em consequência, o ponto C desloca-se sobre o segmento $[BD]$, de tal forma que se tem sempre $[EC] \perp [BD]$
- x designa a amplitude, em radianos, do ângulo CBE $\left(x \in \left[0\,,\ \frac{\pi}{2}\right] \right)$



3.1. Mostre que a área do polígono $[ABEG]$ é dada, em função de x, por

$A(x) = 2\,(1 + \operatorname{sen} x + \cos x)$

(Sugestão: pode ser-lhe útil considerar o trapézio $[ACEG]$)

3.2. Determine $A(0)$ e $A\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Interprete geometricamente cada um dos valores obtidos.

3.3. Recorra à calculadora para determinar **graficamente** as soluções da equação que lhe permite resolver o seguinte problema:

Quais são os valores de x para os quais a área do polígono $[ABEG]$ é $4{,}3$?

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o **gráfico**, ou **gráficos**, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos. Apresente os valores pedidos na forma de dízima, arredondados às décimas.

4. Prove que, para qualquer função quadrática g, existe um e um só ponto do gráfico onde a recta tangente é paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares.

5. No balcão de uma geladaria existe um recipiente com dez compartimentos, cinco à frente e cinco atrás, para colocar gelado. Em cada compartimento só é colocado um sabor, e nunca existem dois compartimentos com o mesmo sabor.
Num certo dia, a geladaria tem sete sabores disponíveis: cinco são de fruta (morango, ananás, pêssego, manga e framboesa) e os outros dois são baunilha e chocolate.

5.1. De quantas maneiras distintas se podem colocar os sete sabores no recipiente?

5.2. De quantas maneiras distintas se podem colocar os sete sabores no recipiente, de tal forma que os cinco de fruta preencham a fila da frente?

6. Considere duas caixas: caixa A e caixa B.
A caixa A contém duas bolas verdes e cinco bolas amarelas.
A caixa B contém seis bolas verdes e uma bola amarela.

Lança-se um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.
Se sair face 1, tira-se, ao acaso, uma bola da caixa A.
Caso contrário, tira-se, ao acaso, uma bola da caixa B.

Considere os acontecimentos:
X : *Sair face par no lançamento do dado*
Y : *Sair bola verde*

Sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada, indique o valor de $P(Y|X)$ e, numa pequena composição (cinco a dez linhas), justifique a sua resposta.
Nota: comece por indicar o significado de $P(Y|X)$, no contexto da situação descrita.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 11
1.2. 10

2. 28
2.1. 12
2.2. 16

3. 42
3.1. 14
3.2. 14
3.3. 14

4. 14

5. 20
5.1. 10
5.2. 10

6. 12

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Círculo: $\pi\ r^2 \qquad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\ r\ g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\,r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Prisma: *Área da base* × *Altura*

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3 \qquad (r - raio)$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a\,.\cos b + \operatorname{sen} b\,.\cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\,.\cos b - \operatorname{sen} a\,.\operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a\,.\operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\,cis\,\theta)\,.\,(\rho'\,cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta+\theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\,cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta-\theta')$

$(\rho\,cis\,\theta)^n = \rho^n\,cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\,cis\,\theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\,\frac{\theta+2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **1.ª FASE**

2003 **1.ª CHAMADA**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
- **1.1.** 11
- **1.2.** 10

2. 28
- **2.1.** 12
- **2.2.** 16

3. 42
- **3.1.** 14
- **3.2.** 14
- **3.3.** 14

4. 14

5. 20
- **5.1.** 10
- **5.2.** 10

6. 12

TOTAL **200**

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Versão 1	A	D	B	D	C	A	A
Versão 2	D	C	A	C	B	C	C

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, no primeiro grupo, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas **Resp. certas**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

Grupo II

Critérios gerais

1. A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro, não negativo, de pontos.

2. Se, numa alínea em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, o examinando se limitar a apresentar o resultado final, deverão ser atribuídos zero pontos a essa alínea.

3. Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

4. Existem alíneas cuja cotação está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para as resolver.

4.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.

4.2. Caso a resolução da etapa esteja incompleta, ou contenha incorrecções, cabe ao classificador decidir a cotação a atribuir a essa etapa, tendo em conta o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:
- erros de contas ocasionais devem ser penalizados em um ponto;
- erros graves, que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades, devem ser penalizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa.

4.3. No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.

4.4. Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.

4.5. Pode acontecer que o examinando, ao resolver uma questão, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

5. Existem alíneas em que estão previstos alguns erros que o examinando pode cometer. Para cada caso, é indicada a cotação a atribuir. O examinando pode, contudo, utilizar um processo não contemplado nos critérios e/ou cometer um erro não previsto. Cabe ao classificador adaptar as referências dadas a todas as situações não previstas.

6. Se, na resolução de uma alínea, o examinando utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), deve ser penalizado em um ponto, na cotação total a atribuir a essa alínea. Esta penalização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas cotadas com 0 (zero) pontos.

7. Se, na resolução de uma alínea, o examinando não respeitar uma eventual instrução, relativa ao método a utilizar (por exemplo, se o enunciado vincular o examinando a uma resolução analítica, sem calculadora, e o examinando a utilizar), a etapa da resolução em que se dá o referido desrespeito bem como todas as subsequentes que dela dependam devem ser cotadas com 0 (zero) pontos.

8. Tudo o que o examinando escrever fora de contexto e que não resulte de trabalho anterior (por exemplo, num exercício de probabilidades, a escrita de uma fracção que não tenha nada a ver com o problema, ou, num exercício de estudo da monotonia de uma função, a apresentação de um quadro fora do contexto) deve ser cotado com 0 (zero) pontos. Todas as etapas subsequentes que dependam do que o examinando escreveu fora de contexto devem ser igualmente cotadas com 0 (zero) pontos.

Critérios específicos

Para cada item são apresentados:

- a cotação total do item;
- para cada processo de resolução apresentado, uma subdivisão da cotação total em cotações parcelares;
- exemplos de possíveis respostas dos examinandos, com a respectiva cotação a atribuir, devidamente explicada.

1.1. 11

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Determinar $|z_1|$ 2

Determinar um argumento de z_1 2

Escrever z_1 na forma trigonométrica **(ver nota)**..... 1

Calcular $\frac{z_1}{z_2}$ na forma trigonométrica 3

Escrever $\frac{z_1}{z_2}$ na forma algébrica 3

Nota:

O examinando pode começar por determinar o módulo e um argumento de z_1 e só depois escrever este número complexo na forma trigonométrica.

No entanto, se não o fizer, isto é, se escrever directamente z_1 na forma trigonométrica, não deverá ser penalizado.

2.º Processo:

$\cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2

$\text{sen} \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2

$z_2 = -1 - i$ 2

Cálculo de $\frac{z_1}{z_2}$ 5

Multiplicação de ambos os termos da fracção pelo conjugado de z_2 1

Restantes cálculos 4

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$z_1 = \sqrt{8}\, cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{8}\, cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\, cis\left(\frac{5\pi}{4}\right)} = 2\, cis\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 2i$$

Cotação a atribuir (1.º processo): $(2+2+1)^{(*)} + 3 + 3 = 11$

(*) Ver nota

Exemplo 2

$$z_2 = \sqrt{2}\, cis\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 - i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1-i}{2-2\,i} = \frac{(-1-i)\,(2+2\,i)}{8} =$$

$$= \frac{-2-2\,i-2\,i+2}{8} = \frac{-4\,i}{8} = -\frac{1}{2}\,i$$

Cotação a atribuir (2.º processo): $2 + 2 + 2 + 4^{(*)} = 10$

(*) Erro de distracção (o examinando trocou o numerador com o denominador), que se considerou equivalente a um erro ocasional de contas - ver critério geral 4.2.

Exemplo 3

$$\theta = \frac{5\pi}{4} \qquad \theta \in 2^{\text{o}}\, Quadrante \qquad \theta = \frac{5\pi}{4} - \pi = \frac{\pi}{4}$$

$$z_2 = \sqrt{2}\, cis\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-2\,i}{1+i} = \frac{2}{1} - \frac{2\,i}{i} = 2 - 2 = 0$$

Cotação a atribuir (2.º processo): $1 + 1 + 2 + 0 = 4$

1.2. 10

Raio da circunferência 5

Raio $= |z_1 - z_3|$ 4

Raio $= \sqrt{18}$ $\left(\text{ou} \quad 3\sqrt{2}\right)$ 1

ou

$|z_1| = 2\sqrt{2}$ 1

$|z_3| = \sqrt{2}$ 1

Raio $= 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ **(ver nota 1)** 3

Escrever uma condição, em $\mathbb{C}$, que defina a circunferência **(ver notas 2 e 3)** 5

Notas:

1. O examinando deverá evidenciar, por exemplo através de um desenho, que a imagem geométrica de z_1, a origem do referencial e a imagem geométrica de z_3 são pontos colineares, para justificar que o raio da circunferência é a soma dos módulos destes dois números complexos. Se não o fizer, os 3 pontos relativos a esta etapa não deverão ser atribuídos.

2. Se o examinando não determinar o raio da circunferência, mas escrever a condição $\left|z - z_1\right| = \left|z_1 - z_3\right|$, os 5 pontos previstos para esta etapa devem ser convertidos em 10 pontos (cotação total prevista para esta questão).

3. Indicam-se a seguir algumas penalizações relativas a possíveis incorrecções na escrita da condição que define a circunferência, em virtude da utilização, no lugar do sinal de $=$, de outro símbolo:

- símbolo $\leq$ ..... penalização de 2 pontos
- símbolos $<$, $>$ e $\geq$ ..... penalização de 3 pontos

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$\left|z - z_1\right| = \left|z_1 - z_3\right|$

Cotação a atribuir: $10^{(*)}$

(*) Ver nota 2

Exemplo 2

$C = (2, -2)$

$r = z_1 - z_3 = \sqrt{(2+1)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{18}$

$|z - (2 - 2i)| \leq \sqrt{18}$

Cotação a atribuir: $5(4+1) + 3^{(*)} + (-1)^{(**)} = 7$

(*) Ver nota 3

(**) O examinando escreveu $z_1 - z_3$ em vez de $|z_1 - z_3|$ - ver critério geral 6.

Exemplo 3

$|z_1 - z_3| = |(2, -2) - (-1,1)| = |(3, -3)| = \sqrt{18}$

$|z - (2 - 2\,i)| = |(3, -3)| \Leftrightarrow |z - (2 - 2\,i)| = \sqrt{18}$

Cotação a atribuir: $5(4+1) + 5 + (-1)^{(*)} = 9$

(*) O examinando escreveu $|(2, -2) - (-1,1)|$ e $|(3, -3)|$ - ver critério geral 6

Exemplo 4

$\underbrace{hip^2}_{raio} = 3^2 + 3^2$

$hip^2 = 18 \qquad hip = \sqrt{18}$

$|z - z_1| > \sqrt{18}$

Cotação a atribuir: $5^{(*)} + 2^{(**)} = 7$

(*) Para determinar o raio da circunferência, o examinando considerou um triângulo rectângulo de catetos paralelos aos eixos do referencial e cuja hipotenusa é o segmento cujos extremos são as imagens geométricas de z_1 e de z_3

(**) Ver nota 3

Exemplo 5

$C(2, -2)$ $(-1, 1)$ pertence à circunferência.

$\sqrt{(-1-2)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$|(x + yi) - (2 - 2i)| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow |(x-2) + i\,(y+2)| = 3\sqrt{2}$

Cotação a atribuir: $5 + 5 = 10$

2.1. 12

Substituir t por $13{,}5$ **(ver nota 1)** 9

$P(13{,}5) \approx 0{,}8$ **(ver notas 2 e 3)** 3

Notas:

1. Indicam-se a seguir penalizações relativas a substituições incorrectas:
- substituir t por $1{,}5$..... penalização de 4 pontos
- substituir t por $13{,}30$..... penalização de 6 pontos
- substituir t por $1{,}30$..... penalização de 8 pontos

2. Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às décimas, ou não o arredondar correctamente, deve ser penalizado em 1 ponto.

3. Se o examinando, nos cálculos intermédios, não conservar, no mínimo, três casas decimais, deve ser penalizado em 1 ponto. Note-se, no entanto, que não se exige a apresentação de cálculos intermédios, isto é, o examinando pode escrever, simplesmente, $P(13{,}5) \approx 0{,}8$.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$t = 13$ h e 30 min

$$P(13{,}5) = 1 - \frac{\ln(14{,}5)}{14{,}5} \Rightarrow 1 - \frac{2{,}674}{14{,}5} \Rightarrow 1 - 0{,}184 \Rightarrow 0{,}8$$

Cotação a atribuir: $9 + 3 + (-1)^{(*)} = 11$

(*) O examinando utiliza simbologia incorrecta (o símbolo $\Rightarrow$) - ver critério geral 6.

Exemplo 2

Coloquei a função na máquina, com a janela $0 < x < 24$ e $-10 < y < 10$

Utilizei a ferramenta g-solv para calcular y quando $x = 13{,}5$

O nível de poluição à uma hora e trinta minutos da tarde é de $0{,}8$

Cotação a atribuir : $9 + 3 = 12$

Exemplo 3

$$P(13{,}5) = 1 - \frac{\ln(14{,}5)}{14{,}5} = 1 - \frac{2{,}7}{14{,}5} = 1 - 0{,}1 \approx 0{,}9 \ \ mg/l$$

Cotação a atribuir : $9 + 3 + (-1)^{(*)} = 11$

(*) Ver nota 3.

Exemplo 4

$$P(13{,}5) = \frac{1-\ln(14{,}5)}{14{,}5} = \frac{-1{,}674}{14{,}5} = -0{,}115 \approx -0{,}1$$

Cotação a atribuir : $9 + 0^{(*)} = 9$

(*) Resultado absurdo.

Exemplo 5

$$P(1{,}5) = 1 - \frac{\ln(1{,}5+1)}{1{,}5+1} \approx 0{,}6$$

Cotação a atribuir : $5^{(*)} + 3 = 8$

(*) Ver nota 1.

Exemplo 6

$t = 13$ h e 30 min. $= 810$ min.

$$P(810) = 1 - \frac{\ln(811)}{811} \approx 0{,}992$$

Cotação a atribuir: $2^{(*)} + 2^{(**)} = 4$

(*) Ver critério geral 4.2.

(**) Ver nota 2 .

Exemplo 7

$$P(13{,}30) = 1 - \frac{\ln(14{,}30)}{14{,}30} \approx 0{,}8$$

Cotação a atribuir: $3^{(*)} + 3^{(**)} = 6$

(*) Ver nota 1.

(**) Ver critério geral 4.3.

Exemplo 8

$t = 13\,h\ 20\,min$

$13 + \frac{1}{3} = \frac{40}{3}$

$$P\left(\frac{40}{3}\right) = 1 - \frac{\ln\left(\frac{43}{3}\right)}{\frac{43}{3}} \approx 0{,}8$$

Cotação a atribuir: $8^{(*)} + 3^{(**)} = 11$

(*) Possível erro de leitura do enunciado, que se considerou equivalente a um erro ocasional de contas - ver critério geral 4.2.

(**) Ver critério geral 4.3.

2.2. 16

Evidenciar a intenção de calcular o valor de t para o qual a função P é mínima **(ver nota 1)** 4

Determinar $P'(t)$ 4
- Derivada de $\ln(t+1)$ 1
- Restantes cálculos 3

Determinar o zero de P' 3
- Escrever a equação $P'(t) = 0$ 1
- Restantes cálculos 2

Estudo do sinal de P' e consequente conclusão, relativamente à monotonia e extremo de P (estudo que pode ser apresentado através de um quadro) 3
- Primeira linha do quadro (relativa à variável t) 1
- Sinal de P' 1
- Relação entre o sinal de P' e a monotonia de P 1

$t \approx 1h\,43\,m$ **(ver nota 2)** 2

Notas:

1. Considera-se evidência suficiente a intenção de determinar $P'(t)$.

2. Se o examinando não apresentar os minutos arredondados às unidades, ou se o arredondamento estiver incorrecto, deverá ser penalizado em 1 ponto.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$P'(t) = -\frac{\frac{1}{t+1}\times(t+1)-\ln(t+1)}{(t+1)^2} = -\frac{1-\ln(t+1)}{(t+1)^2}$$

$$P'(t) = 0 \Leftrightarrow 1-\ln(t+1) = 0 \Leftrightarrow \ln(t+1) = 1 \Leftrightarrow t = e-1$$

t	0	$e-1$	24
$P'(t)$	$-$	0	$+$
$P(t)$	↘	min	↗

$e-1 \approx 1{,}718$

$t \approx 1h\,43\,m$

Cotação a atribuir: $4+4(1+3)+3(1+2)+3(1+1+1)+2 = 16$

Exemplo 2

$$P'(t) = -\frac{\frac{t}{t+1}\times(t+1)-\ln(t+1)}{(t+1)^2} = -\frac{t-\ln(t+1)}{(t+1)^2}$$

$$P'(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{t-\ln(t+1)}{(t+1)^2} = 0 \Leftrightarrow t - \ln(t+1) = 0$$

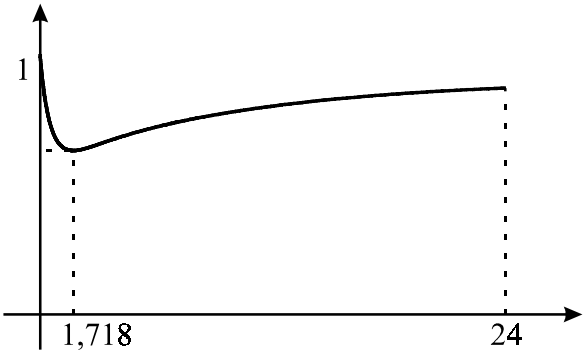
Cotação a atribuir: $4 + 3(0+3) + 1(1+0) + 0 + 0 = 8$

Exemplo 3

$$P(t) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{\ln(t+1)}{t+1} = 0 \Leftrightarrow \ln(t+1) = t+1$$

Cotação a atribuir: 0

Exemplo 4



$0{,}718 \times 60 = 43{,}08$ O purificador foi desligado à 1 hora e 43 minutos.

Cotação a atribuir: $4 + 0^{(*)} + 0^{(*)} + 0^{(*)} + 0^{(*)} = 4$

(*) O examinando desrespeita a instrução, expressa no enunciado, de que não deveria recorrer à calculadora, a não ser para efectuar cálculos numéricos - ver critério geral 7.

Exemplo 5

Introduzi a função na máquina e em seguida fiz uma tabela e obtive os seguintes resultados

x	0	.....	6	7	8	.....
y	1	.....	0,722	0,740	0,756	.....

Logo verifica-se que em 7 começa a aumentar

Cotação a atribuir: $0^{(*)}$

(*) Para além de desrespeito idêntico ao do exemplo anterior, não existe aqui suficiente evidência de que o examinando procura o valor de x para o qual a função é mínima. De facto, apesar de o examinando ter escrito a frase «*Logo verifica-se que em 7 começa a aumentar*», não exibiu (na tabela) valores de x entre 0 e 6 que têm imagens inferiores a 0,722, para além de ter ignorado o facto de a imagem de 6 ser inferior à de 7.

3.1. 14

$\overline{BC} = 2\cos x$ 3

$\overline{EC} = 2\,\text{sen}\, x$ 3

Exprimir correctamente a área pedida como soma e/ou diferença de outras áreas que sejam possíveis de exprimir em função de x 2

Restantes cálculos **(ver nota)**..... 6

Nota:
Os 6 pontos relativos a esta etapa devem ser subdivididos de acordo com o seguinte critério:

- 1.º Caso (na etapa anterior, o examinando considerou duas figuras)

  Substituição das bases e alturas envolvidas no cálculo das áreas das figuras pelos valores e pelas expressões trigonométricas correspondentes .....2 (1+1)

  Restantes cálculos 4

- 2.º Caso (na etapa anterior, o examinando considerou três figuras)

  Substituição das bases e alturas envolvidas no cálculo das áreas das figuras pelos valores e pelas expressões trigonométricas correspondentes .....3 (1+1+1)

  Restantes cálculos 3

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$A_{polígono} = A_{trapézio} - A_{triângulo} = \frac{\overline{GA} + \overline{EC}}{2} \times \overline{AC} - \frac{\overline{BC} \times \overline{EC}}{2}$$

$$cos\, x = \frac{\overline{BC}}{2} \Leftrightarrow \overline{BC} = 2\, cos\, x \qquad sen\, x = \frac{\overline{EC}}{2} \Leftrightarrow \overline{EC} = 2\, sen\, x$$

$$A_{polígono} = \frac{2 + 2\, sen\, x}{2} \times (2 + 2\, cos\, x) - \frac{2\, cos\, x \times 2\, sen\, x}{2} =$$

$$= (1 + sen\, x) \times (2 + 2\, cos\, x) - 2\, cos\, x\ sen\, x =$$

$$= 2 + 2\, cos\, x + 2\, sen\, x + 2\, sen\, x\ cos\, x - 2\, cos\, x\ sen\, x =$$

$$= 2\,(1 + cos\, x + sen\, x)$$

Cotação a atribuir: $3 + 3 + 2 + 6\,(2 + 4) = 14$

Exemplo 2

$$A_{trapézio} = \frac{\textit{Base menor} + \textit{Base maior}}{2} \times \textit{altura} = \frac{\overline{GE} + \overline{AC}}{2} \times \overline{GA}$$

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = 2 + 2\cos x$$

$$\overline{GE} = \frac{2}{sen\, x}$$

$$A_{trapézio} = \frac{2 + 2\cos x + \frac{2}{sen\, x}}{2} \times 2 = 2 + 2\cos x + \frac{2}{sen\, x}$$

$$A_{triângulo} = \frac{b \times h}{2} = \frac{\overline{BC} \times \overline{EC}}{2} = \frac{2\cos x \times 2\, sen\, x}{2} = \cos x\ sen\, x$$

$$A = A_{trapézio} - A_{triângulo} = 2 + 2\cos x + \frac{2}{sen\, x} - \cos x\ sen\, x =$$

$$= \frac{2\, sen\, x + 2\, sen\, x \cos x + 2 - \cos x\ sen^2 x}{sen\, x}$$

Cotação a atribuir: $3 + 3 + 2 + 1\,(1^{(*)} + 0) = 9$

(*) O examinando considerou duas figuras, tendo substituído correctamente a base e a altura envolvidas no cálculo da área de apenas uma das figuras (o triângulo).

Exemplo 3

$$\cos x = \frac{\overline{BC}}{2} \Leftrightarrow \overline{BC} = 2\cos x$$

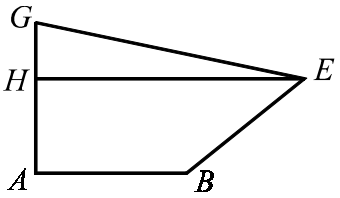
$$sen\, x = \frac{\overline{EC}}{2} \Leftrightarrow \overline{EC} = 2\, sen\, x$$

$$A_{triângulo} = \frac{b \times a}{2} = \frac{2\cos x \times 2\, sen\, x}{2}$$

Cotação a atribuir: $3 + 3 + 0 + (1^{(*)} + 0) = 7$

(*) O examinando substituiu correctamente a base e a altura envolvidas no cálculo da área do triângulo $[BCE]$.

Exemplo 4



$A = A_{[ABEH]} + A_{[GEH]}$

$cos\, x = \frac{\overline{BC}}{2} \Leftrightarrow \overline{BC} = 2\, cos\, x$

$sen\, x = \frac{\overline{EC}}{2} \Leftrightarrow \overline{EC} = 2\, sen\, x$

$A_{[ABEH]} = \frac{\overline{HE} + \overline{AB}}{2} \times \overline{EC} = \frac{2 + 2 + 2\, cos\, x}{2} \times 2\, sen\, x$

$A_{[GEH]} = \frac{\overline{HE} \times \overline{GH}}{2} = \frac{(2 + 2\, cos\, x)\ (2 - 2\, sen\, x)}{2}$

$A = A_{[ABEH]} + A_{[GEH]} = \frac{4 + 2\, cos\, x}{2} \times 2\, sen\, x + \frac{(2 + 2\, cos\, x)\ (2 - 2\, sen\, x)}{2}$

$= 4\, sen\, x + 2\, cos\, x\ sen\, x + \frac{4 - 4\, sen\, x + 4\, cos\, x - 4\, sen\, x\, cos\, x}{2} =$

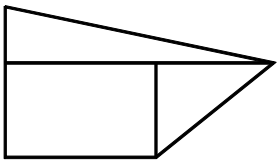
$= 4\, sen\, x + 2\, cos\, x\ sen\, x + 2 - 2\, sen\, x + 2\, cos\, x - 2\, sen\, x\ cos\, x =$

$= 2 + 2\, cos\, x + 2\, senx =$

$= 2\,(1 + cos\, x + senx)$

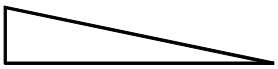
Cotação a atribuir: $3 + 3 + 2 + 6\,(2 + 4) = 14$

Exemplo 5



$cos\, x = \frac{\overline{BC}}{2} \Leftrightarrow \overline{BC} = 2\, cos\, x$

$sen\, x = \frac{\overline{EC}}{2} \Leftrightarrow \overline{EC} = 2\, sen\, x$

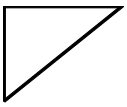


$A = \frac{(2 + 2\, cos\, x)\ (2 - 2\, sen\, x)}{2} =$

$= 4 + 4\, cos\, x - 4\, sen\, x - 4\, sen\, x\ cos\, x$



$A = 2 \times 2\, sen\, x = 4\, sen\, x$



$A = \frac{2\, cos\, x \times 2\, sen\, x}{2} = 2\, cos\, x\ sen\, x$

$A_t = 4 + 4\, cos\, x - 4\, sen\, x - 4\, sen\, x\ cos\, x + 4\, sen\, x + 2\, cos\, x\ sen\, x =$

$= 4 + 4\, cos\, x - 2\, sen\, x\ cos\, x$

Cotação a atribuir: $3 + 3 + 2 + 5\,(3 + 2) = 13$

3.2. 14

Cálculo de $A(0)$ **(ver nota 1)** .....2 (1+1)

Interpretação geométrica de $A(0)$ **(ver nota 2)**..... 5

Cálculo de $A\left(\frac{\pi}{2}\right)$ **(ver nota 3)**..... 2 (1+1)

Interpretação geométrica de $A\left(\frac{\pi}{2}\right)$ **(ver nota 4)** 5

Notas:

1. A subdivisão da cotação desta etapa, indicada entre parêntesis, corresponde a:
- 1 ponto pela substituição, na expressão da função, de x por 0;
- 1 ponto pelo cálculo.

No entanto, não se exige a explicitação do primeiro passo, isto é, o examinando pode escrever directamente $A(0) = 4$.

2. Os 5 pontos relativos à interpretação devem ser atribuídos de acordo com o seguinte critério:

Interpretação correcta (*para $x = 0$, o polígono sombreado é o triângulo $[ADG]$, cuja área é 4*) 5

Interpretação incompleta ou com incorrecções ..... 1 a 4

Interpretação errada ou ausência de interpretação geométrica 0

3. A subdivisão da cotação desta etapa, indicada entre parêntesis, corresponde a:
- 1 ponto pela substituição, na expressão da função, de x por $\frac{\pi}{2}$;
- 1 ponto pelo cálculo.

No entanto, não se exige a explicitação do primeiro passo, isto é, o examinando pode escrever directamente $A\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$.

4. Os 5 pontos relativos à interpretação devem ser atribuídos de acordo com o seguinte critério:

Interpretação correcta (*para $x = \frac{\pi}{2}$, o polígono sombreado é o quadrado $[ABFG]$, cuja área é 4*) 5

Interpretação incompleta ou com incorrecções ..... 1 a 4

Interpretação errada ou ausência de interpretação geométrica 0

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$A(0) = 4.$ Quando $x = 0,$ o ponto E vai ficar no lugar do ponto D e a figura transforma-se num triângulo de área $4.$

$A\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4.$ Quando $x = \frac{\pi}{2},$ o ponto E vai ficar no lugar do ponto F e a figura transforma-se num quadrado de área $4.$

Cotação a atribuir: $2 + 5 + 2 + 5 = 14$

Exemplo 2

$A(0) = 2\,(1 + sen\,0 + cos\,0) = 2\,(1 + 0 + 1) = 4$

Quando $x = 0,$ o ponto E sobrepõe-se a $C,$ formando um triângulo $[CGA]$ de área $4.$

$A\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\,(1 + sen\,\frac{\pi}{2} + cos\,\frac{\pi}{2}) = 2\,(1 + 1 + 0) = 4$

Forma um quadrado $[GFBA]$ de área $4,$ uma vez que E se sobrepõe a $F.$

Cotação a atribuir: $2 + 4^{(*)} + 2 + 5 = 13$
(*) O examinando não explicita que o triângulo em causa é o triângulo $[DGA].$

Exemplo 3

$A(0) = 4$ A figura obtida é um triângulo rectângulo.

$A\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$ A figura obtida é um quadrado.

Cotação a atribuir: $2 + 2^{(*)} + 2 + 2^{(*)} = 8$
(*) Interpretações incompletas.

Exemplo 4

$$A(0) = 2\,(1 + sen\,0 \,+\, cos\,0) = 2\,(1 + 0 + 1) = 2 \times 2 = 4$$

$$A\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 2\,(1 + sen\,\frac{\pi}{2} \,+\, cos\,\frac{\pi}{2}) = 2\,(1 + 1 + 0) = 2 \times 2 = 4$$

$$A(0) = A\Big(\frac{\pi}{2}\Big)$$

Quando damos a x o valor 0 ou $\frac{\pi}{2}$,

a área do polígono é igual à área do quadrado $[ABFG]$, que é 4.

Cotação a atribuir: $2 + 0^{(*)} + 2 + 0^{(*)} = 4$

(*) O examinando limita-se a referir uma igualdade de áreas, não evidenciando uma interpretação geométrica dos valores obtidos.

Exemplo 5

$$A(0) = 2\,(1 + sen\,0 \,+\, cos\,0) = 2\,(1 + 0 + 1) = 2 \times 2 = 4$$

$$A\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 2\,(1 + sen\,\frac{\pi}{2} \,+\, cos\,\frac{\pi}{2}) = 2\,(1 + 1 + 0) = 2 \times 2 = 4$$

Quando damos a x o valor 0 ou $\frac{\pi}{2}$, a figura transforma-se num trapézio em que a sua base maior é igual a 4.

Cotação a atribuir: $2 + 0 + 2 + 0 = 4$

Exemplo 6

$$A(0) = 2\,(1 + sen\,0 \,+\, cos\,0) = 2\,(1 + 0 + \pi \,+\, \frac{\pi}{2} \,+\, \frac{3\pi}{2}) = 5\,\pi$$

Cotação a atribuir: $1^{(*)} + 0 + 0 + 0 = 1$

(*) Ver nota 1

3.3. 14

Equacionar o problema: $A(x) = 4{,}3$ **(ver nota 1)** 2

Explicação do método utilizado para resolver graficamente a equação **(ver nota 2)**.....4

$x \approx 0{,}2$ ou $x \approx 1{,}4$ **(ver notas 3 e 4)** .....8 (4 + 4)

Notas:

1. O examinando pode não apresentar (explicitamente) esta equação. Havendo evidência de que o examinando procura, por algum processo, os objectos cuja imagem, por meio de A, é $4{,}3$, deverá ser-lhe atribuída a cotação de 2 pontos por esta etapa.

2. Os 4 pontos relativos à explicação do método utilizado devem ser atribuídos de acordo com o seguinte critério:

Apresentação do gráfico da função A (que respeite o domínio $[0,\ \pi/2]$), bem como dos pontos de ordenada $4{,}3$ e respectivas abcissas 4

Apresentação do gráfico e dos pontos referidos, com algumas incorrecções (por exemplo, o gráfico de f não respeita o domínio) e/ou ausência de alguns elementos ..... 1 a 3

Não apresentação de qualquer gráfico 0

3. A escrita das soluções da equação deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

Solução $0{,}2$

1.º Caso (apresentação do resultado arredondado às décimas, de acordo com o enunciado):

Resposta $0{,}2$ 4

Resposta $0{,}1$ 3

Outros resultados 0

2.º Caso (apresentação do resultado com aproximação superior às décimas):

Valor no intervalo $[0{,}15\ ;\ 0{,}18]$ 3

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[0{,}10\ ;\ 0{,}23]$ 1

Outros resultados 0

3.º Caso (apresentação do resultado arredondado às unidades):

Resposta 0 1

Outros resultados 0

Solução $1{,}4$

1.º Caso (apresentação do resultado arredondado às décimas, de acordo com o enunciado):

Resposta $1{,}4$ 4

Resposta $1{,}3$ ou $1{,}5$ 2

Resposta $1{,}2$ ou $1{,}6$ 1

Outros resultados 0

2.º Caso (apresentação do resultado com aproximação superior às décimas):

Valor no intervalo $[1{,}35\ ;\ 1{,}45]$ 3

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[1{,}30\ ;\ 1{,}50]$ 1

Outros resultados 0

3.º Caso (apresentação do resultado arredondado às unidades):

Resposta 1 1

Outros resultados 0

4. Se o examinando não apresentar qualquer gráfico, nem existir evidência de que encontrou graficamente os valores pedidos, esta terceira etapa deve, tal como a segunda, ser cotada com 0 (zero) pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

Nesta questão usei a calculadora gráfica.

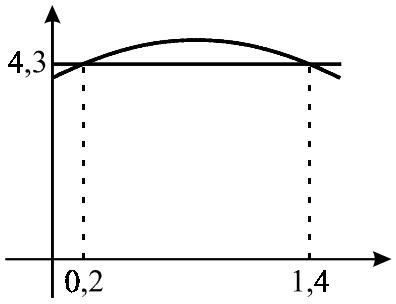
Coloquei as expressões

$y_1 = 2(1 + sen\, x\, +\, cos\, x)$

$y_2 = 4{,}3$

Vi os pontos de intersecção dos dois gráficos.

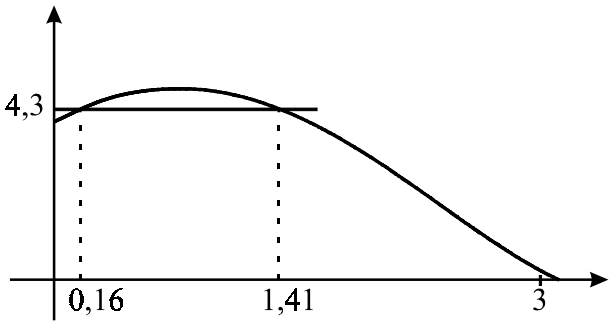
Vi que $x = 0{,}2$ ou $x = 1{,}4$.



Cotação a atribuir: $2^{(*)} + 4 + 8\,(4 + 4) = 14$

(*) Ver nota 1.

Exemplo 2



$x = 0{,}16 \ \wedge \ x = 1{,}41$

$x \approx 0{,}2 \ \wedge \ x \approx 1{,}4$

De acordo com o gráfico, a função tem o valor $4{,}3$ para os valores $0{,}2$ e $1{,}4$

Cotação a atribuir: $2^{(*)} + 3^{(**)} + 8\,(4+4) + (-1)^{(***)} = 12$

(*) Ver nota 1.

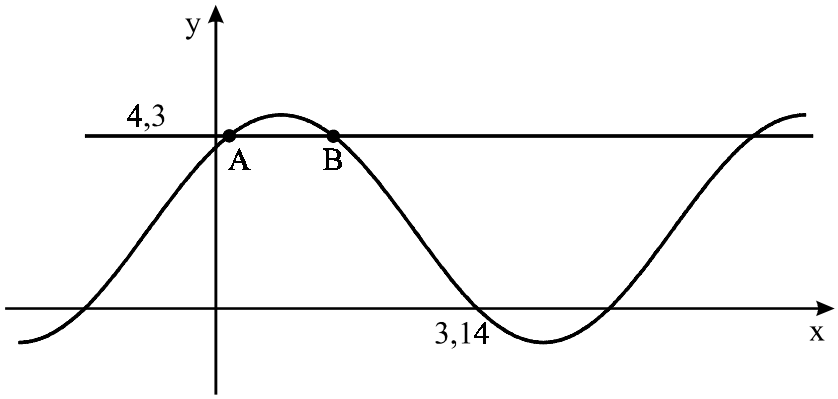
(**) O gráfico não respeita o domínio da função, que é $\left[0\,,\ \frac{\pi}{2}\right]$ - ver nota 2.

(***) O examinando utiliza o símbolo de conjunção, em vez do símbolo de disjunção - ver critério geral 6.

Exemplo 3

Fiz $y_1 = 2(1 + sen\,x + cos\,x)$ e $y_2 = 4{,}3$

De acordo com a calculadora gráfica, obtive o seguinte gráfico:



Calculando os dois pontos de intersecção (A e B), obtemos $A(0{,}2\,;\,4{,}3)$ $B(1{,}4\,;\,4{,}3)$

Como $A(x)$ é uma função periódica, ao fim de π valores, as duas funções voltam a intersectar-se em pontos de ordenada $4{,}3$.

Então os valores de x para os quais $A(x) = 4{,}3$ são $0{,}2 + k\pi$ e $1{,}4 + k\pi,\ \mathrm{k} \in \mathbb{Z}$

Cotação a atribuir: $2^{(*)} + 3^{(**)} + 6\,(4 + 4 - 2^{(***)}) = 11$

(*) Ver nota 1.

(**) O gráfico não respeita o domínio da função, que é $\left[0\,,\ \frac{\pi}{2}\right]$ - ver nota 2.

(***) Penalizou-se em 2 pontos o facto de o examinando não ter tido em conta o domínio da função, na apresentação das soluções do problema - ver critério geral 4.2.

Exemplo 4

Pela máquina:

$y_1 = A(x)$

$y_2 = 4{,}3$

Coloquei as duas funções na máquina e obtive o gráfico.

Depois de ajustar a janela, fui ver os pontos onde as duas funções se cruzam.

1º. ponto: $x = 1{,}4 \quad y = 4{,}3$

2º. ponto: $x = 0{,}2 \quad y = 4{,}3$

Os pontos onde as duas funções se cruzam é em $0{,}2$ e em $1{,}4$

Cotação a atribuir: $2^{(*)} + 0^{(**)} + 8\,(4+4)^{(***)} + (-1)^{(****)} = 9$
(*) Ver nota 1.
(**) O examinando não apresenta qualquer gráfico - ver nota 2.
(***) Existe evidência suficiente de que o examinando resolveu graficamente a equação $A(x) = 4{,}3$.
(****) O examinando escreveu uma frase incorrecta, do ponto de vista formal (*os pontos onde as duas funções se cruzam é em* $0{,}2$ *e em* $1{,}4$) - ver critério geral 6.

Exemplo 5

Na máquina, fui à table e vi que

x	y_1
0	4
0.1	4.1
0.2	4.3
0.3	4.5
1.3	4.4
1.4	4.3
1.5	4.1

Os valores de x são $0{,}2$ e $1{,}4$

Cotação a atribuir: $2^{(*)} + 0^{(**)} + 0^{(***)} = 2$
(*) Ver nota 1.
(**) O examinando não apresenta qualquer gráfico - ver nota 2.
(***) O examinando não respeita o pedido, expresso no enunciado, de que se pretendia uma resolução gráfica da equação - ver nota 4 e critério geral 7.

4. 14

$g(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ **(ver notas 1 e 2)**.....2

$g'(x) = 2ax + b$ **(ver nota 2)**.....3

$g'(x) = 1$.....3

$x = \frac{1-b}{2a}$ **(ver nota 2)**.....3

Conclusão **(ver notas 2 e 3)**.....3

Notas:

1. Se, nesta etapa, o examinando não escrever $a \neq 0$, não deverá ser penalizado.

2. Se o examinando utilizar uma função particular, estas etapas deverão ser cotadas com 0 (zero) pontos.

3. O examinando deverá referir que, como $a \neq 0$, a solução da equação $g'(x) = 1$ existe e é única, pelo que o gráfico de g tem um e um só ponto nas condições pedidas.

4. Se o examinando se limitar a fazer um esboço gráfico (por exemplo, uma parábola e uma recta tangente a essa parábola, paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares), a sua resposta deverá ser cotada com 0 (zero) pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$y = ax^2 + bx + c \qquad y' = 2ax + b$

Para ser paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares o declive tem que ser -1

$2ax + b = -1 \Leftrightarrow 2ax = -1 - b \Leftrightarrow x = \frac{-1-b}{2a}$

Só há um ponto de coordenadas $\left(\frac{-1-b}{2a}, -1\right)$, é paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares.

Cotação a atribuir: $2 + 3 + 1^{(*)} + 3^{(**)} + 1^{(***)} = 10$

(*) Ver critério geral 4.2.

(**) Ver critério geral 4.3.

(***) Conclusão incompleta, mal redigida e com uma incorrecção (a ordenada do ponto de tangência pode não ser -1) - ver critério geral 4.2.

Exemplo 2

Se $g(x) = x^2$ então $g'(x) = 2x$

$g'(x) = 1 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Cotação a atribuir: $0^{(*)} + 0^{(*)} + 3 + 0^{(*)} + 0^{(*)} = 3$

(*) Ver nota 2.

Exemplo 3

$g(x) = ax^2$

$y = x$

Se $r//s$ então $m_r = m_s$

$g'(x) = 2ax$

$2ax = 1$

$x = \frac{1}{2a}$

Tendo em conta que é uma constante, x só tem um valor possível, o que confirma a tese proposta

Cotação a atribuir: $1^{(*)} + 2^{(**)} + 3 + 1^{(***)} + 2^{(****)} = 9$

(*) A expressão ax^2, embora não abarque a totalidade da família das funções quadráticas, também não é expressão analítica de uma função particular.

(**) Considera-se que o grau de dificuldade da derivada diminuiu um pouco - ver critério geral 4.4.

(***) Considera-se que o grau de dificuldade da equação diminuiu - ver critério geral 4.4.

(****) Conclusão incompleta - ver nota 3.

5.1. 10

Expressão que dá o número pedido **(ver notas 1 e 2)**..... 9

Número pedido **(ver nota 3)** 1

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão que dá o número pedido, com a respectiva cotação a atribuir.

$^{10}A_7$ ou $^{10}C_7 \times 7!$ ou $^{10}A_2 \times {}^8A_5$

ou $^{10}C_3 \times {}^7A_5 \times 2!$ (expressões correctas) 9

$^{10}A_3 \times {}^7A_5 \times 2!$ 5

$^{10}C_7$ 3

$^{10}A_5$ 2

$^{10}A_2$ 2

$^{10}A_2 \times {}^{10}A_5$ 2

$^{10}C_2 \times {}^8C_5$ 2

2. Se a expressão escrita pelo examinando não for uma das indicadas acima, nem equivalente, cabe ao classificador decidir a classificação a atribuir, tomando como referência a lista apresentada. No sentido de a complementar, indicam-se a seguir algumas expressões que devem ser cotadas com 0 (zero) pontos:

$2! \times 5!$ $7!$ $^{10}A_2 \times {}^{10}A_5 \times 3$ $^{10}C_2 \times {}^{10}C_5$

3. O ponto relativo a esta etapa só pode ser atribuído se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 604\,800$

Cotação a atribuir: $9 + 1 = 10$

Exemplo 2

${}^{10}A_7 = 120$

Cotação a atribuir: $9 + 0 = 9$

Exemplo 3

${}^{10}C_7 = 120$

Cotação a atribuir: $3^{(*)} + 1 = 4$

(*) Terceiro exemplo da nota 1.

Exemplo 4

${}^{7}A_5 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2\,520$

${}^{7}A_2 = 7 \times 6 = 42$

$P_7 = 5040$

${}^{7}A_5 \times {}^{7}A_2 + P_7 = 123\,480$

Cotação a atribuir: $0 + 0^{(*)} = 0$

(*) Ver nota 3

Exemplo 5

${}^{10}C_7 = 120$

${}^{10}A_2 = 90$

Cotação a atribuir: $0^{(*)}$

(*) O examinando dá duas respostas.

5.2. 10

Expressão que dá o número pedido **(ver notas 1 e 2)**..... 9

Número pedido **(ver nota 3)** 1

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão que dá o número pedido, com a respectiva cotação a atribuir.

$5! \times {}^5A_2$ ou $5! \times {}^5C_2 \times 2!$ (expressões correctas) 9

$5! \times {}^5C_2$ 4

$5! + {}^5A_2$ 3

$5! \times 2!$ 3

$5!$ 2

2. Se a expressão escrita pelo examinando não for uma das indicadas acima, nem equivalente, cabe ao classificador decidir a classificação a atribuir, tomando como referência a lista apresentada. No sentido de a complementar, indicam-se a seguir algumas expressões que devem ser cotadas com 0 (zero) pontos:

$^7A_5 \times {}^7A_2$ $\qquad$ $^7A_5$ $\qquad$ $^7C_5 \times {}^7C_2$ $\qquad$ $^7C_2$

3. O ponto relativo a esta etapa só pode ser atribuído se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$^5A_5 \times {}^5A_2 = 1200$

Cotação a atribuir: $9^{(*)} + 0 = 9$

(*) Resposta equivalente às do primeiro exemplo da nota 1.

Exemplo 2

$5! \times \frac{5!}{3!} = 120 \times 20 = 2400$

Cotação a atribuir: $9^{(*)} + 1 = 10$

(*) Resposta equivalente às do primeiro exemplo da nota 1.

Exemplo 3

$^5A_5 + {}^5A_2 = 120 + 20 = 140$

Cotação a atribuir: $3^{(*)} + 1 = 4$

(*) Resposta equivalente à do terceiro exemplo da nota 1.

Exemplo 4

$5! \times 2! = 120 \times 2 = 240$

Cotação a atribuir: $3^{(*)} + 1 = 4$

(*) Quarto exemplo da nota 1.

Exemplo 5

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 = 120 \times 2 = 240$

Cotação a atribuir: $3^{(*)} + 1 = 4$

(*) Resposta equivalente à do quarto exemplo da nota 1.

Exemplo 6

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \rightarrow$ fila da frente $\qquad 2 \times 1 = 2 \rightarrow$ fila de trás

$120 + 2 = 122$

Cotação a atribuir: $2^{(*)} + 1 = 3$

(*) Resposta que se considerou de nível inferior à do quarto exemplo da nota 1, e equiparável à do quinto exemplo da mesma nota.

Exemplo 7

$5! \times 5 = 600$

Cotação a atribuir: $2^{(*)} + 1 = 3$

(*) Resposta que se considerou de nível equivalente à do quinto exemplo da nota 1.

Exemplo 8

$^5C_5 + {}^7C_1 = 8$

Cotação a atribuir: $0 + 0^{(*)} = 0$

(*) Ver nota 3

Exemplo 9

$^{10}A_5 = 30\,240$

Cotação a atribuir: $0 + 0^{(*)} = 0$

(*) Ver nota 3

6. 12

A composição deve contemplar os seguintes pontos:

- o significado de $P(Y|X)$, no contexto da situação descrita (probabilidade de sair bola verde, sabendo que saiu face par no lançamento do dado);
- a explicação de que, como saiu face par no lançamento do dado, a bola é retirada da caixa B;
- a explicação do valor da probabilidade pedida, tendo em conta o número de bolas verdes e o número total de bolas existentes na caixa B.

Na tabela seguinte, indica-se como esta alínea deve ser cotada.

Forma / **Conteúdo**	Nível 1 $(*)$	Nível 2 $(**)$	Nível 3 $(***)$
A composição contempla os três pontos.	12	10	8
A composição contempla apenas dois pontos.	8	7	6
A composição contempla apenas um ponto.	4	3	2

$(*)$ **Nível 1** - Redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).

$(**)$ **Nível 2** - Redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecte a inteligibilidade.

$(***)$ **Nível 3** - Redacção confusa, sem estruturação aparente, presença de erros graves, com perturbação frequente da inteligibilidade.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

A probabilidade de sair bola verde, se saiu face par no lançamento do dado, $P(Y|X)$, *é* $\frac{6}{7}$.

Como saiu face par no lançamento do dado, será extraída uma bola da caixa B *(a bola só seria extraída da caixa* A*, se tivesse saído face 1 no lançamento do dado, o que não aconteceu).*

A caixa B *contém sete bolas (seis verdes e uma amarela), pelo que a probabilidade de sair uma bola verde da caixa* B *é* $\frac{6}{7}$.

Cotação a atribuir: $12^{(*)}$

(*) A composição contempla os três pontos, numa redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).

Exemplo 2

$P(Y|X)$ *significa a probabilidade de sair bola verde se tiver saído face par no lançamento do dado.*

Se saiu face par no lançamento do dado, então vai-se tirar uma bola ao acaso.

Temos sete acontecimentos possíveis e seis favoráveis. Segundo a lei de Laplace a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre os casos favoráveis e os casos possíveis logo: $P(Y|X) = \frac{6}{7}$.

Cotação a atribuir: 7 (*)

(*) A composição contempla dois pontos (1º e 3º), numa redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecta a inteligibilidade.

Exemplo 3

A probabilidade condicionada $P(Y|X)$ *pode ser traduzida para o seguinte: sabendo que sai face par no lançamento do dado qual é a probabilidade de sair bola verde.*

Pela expressão da probabilidade condicionada, o valor desta é igual ao quociente da probabilidade da intersecção dos dois acontecimentos sobre a probabilidade do acontecimento (neste caso X*).*

A probabilidade da intersecção, $P(Y \cap X)$*, só poderá ser analisada na caixa* B*, uma vez que, só se sair face diferente de* 1 *é que se tira uma bola desta caixa e os números pares* $(2, 4, 6)$ *estão incluídos.*

$P(Y \cap X) = P(\text{sair face par}) \times P(\text{sair bola verde da caixa } B) = \frac{1}{2} \times \frac{6}{7} = \frac{6}{14}$.

A probabilidade do acontecimento X *é de* $\frac{1}{2}$.

O valor da probabilidade condicionada é, desta forma, $\frac{\frac{6}{14}}{\frac{1}{2}} = \frac{6}{7}$

Cotação a atribuir: 3 (*)

(*) O examinando desrespeita a indicação, expressa no enunciado, de não utilização da fórmula da probabilidade condicionada.

Além disso, o examinando, ao escrever

$$P(Y \cap X) = P(\text{sair face par}) \times P(\text{sair bola verde da caixa } B),$$

está, implicitamente, a utilizar a igualdade $P(Y \cap X) = P(X) \times P(Y|X)$, ou seja, está a utilizar a probabilidade condicionada $P(Y|X)$ para a calcular por meio da fórmula $P(Y|X) = \frac{P(Y \cap X)}{P(X)}$.

Por outras palavras: o que o examinando faz, sem dar por isso, é obter o valor pedido através da igualdade $P(Y|X) = \frac{P(X) \times P(Y|X)}{P(X)}$

Trata-se, portanto, de uma resolução com características circulares.

Considera-se, contudo, que a composição contempla um ponto (o primeiro), numa redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecta a inteligibilidade.

PROPOSTA DE CORRECÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA (435)

Grupo I

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	A	D	B	D	C	A	A
Versão 2	D	C	A	C	B	C	C

Grupo II
(Proposta de resolução)

1.1.

$$z_1 = \rho \operatorname{cis} \theta$$
$$\rho = |z_1| = 2\sqrt{2}$$
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-2}{2} = -1, \quad \theta \in 4^{\text{o}} \text{ Quadrante}$$

logo

$$z_1 = 2\sqrt{2}\text{cis}\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\text{cis}\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{5\pi}{4}\right) = 2\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2i.$$

1.2. Raio da circunferência: $|z_1 - z_3| = |3 - 3i| = 3\sqrt{2}$.
Condição em $\mathbb{C}$: $|z - z_1| = |z_1 - z_3|$, ou seja, $|z - z_1| = 3\sqrt{2}$.

2.1. Uma hora e trinta minutos da tarde corresponde a $t = 13,5$

$$P(13,5) = 1 - \frac{\ln(14,5)}{14,5}$$

donde, $P(13,5) \approx 0,8$.

2.2. Atendendo às condições do enunciado, o tempo pedido corresponde ao intervalo de tempo no qual a função $P(t)$ é decrescente.

$$P'(t) = \frac{\ln(t+1) - 1}{(t+1)^2}$$

Consequentemente, $P'(t) = 0 \Leftrightarrow \ln(t+1) = 1 \Leftrightarrow t = e - 1$.

t	0	$e-1$	24
$P'(t)$	$-$	0	$+$
$P(t)$	↘	min	↗

$t = e - 1 \approx 1,718$.

O purificador de ar esteve ligado aproximadamente 1 hora e 43 minutos.

3.1. A área pedida é igual à diferença entre a área do trapézio $[ACEG]$ e a área do triângulo $[BCE]$ sendo calculada, portanto, a partir de

$$\frac{(\overline{AG} + \overline{CE}) \times \overline{AC}}{2} - \frac{\overline{BC} \times \overline{CE}}{2} = \frac{(2 + 2\,\text{sen}\,x) \times (2 + 2\cos x)}{2} - \frac{2\cos x \times 2\,\text{sen}\,x}{2} =$$
$$= (1 + \text{sen}\,x)(2 + 2\cos x) - 2\cos x\,\text{sen}\,x = 2 + 2\,\text{sen}\,x + 2\cos x =$$
$$= 2(1 + \text{sen}\,x + \cos x).$$

3.2.

$$A(0) = 2(1 + \text{sen}\,0 + \cos 0) = 4$$

.

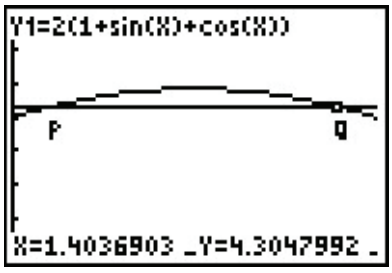
Para $x = 0$ os pontos C, D e E são coincidentes, correspondendo o polígono $[ABEG]$ ao triângulo $[ADG]$, em que a base mede 4 e a altura mede 2, logo, de área 4.

$$A\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(1 + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 4.$$

Para $x = \pi/2$, E coincide com F e Ccom B: o polígono $[ABEG]$ corresponde ao quadrado $[ABFG]$, de lado 2, logo, de área 4.

3.3. $A(x) = 4,3$

Os valores pedidos são as abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos das funções $A(x)$ e $y = 4,3$. Inseridas estas funções na calculadora gráfica, percorre-se o gráfico de $A(x)$ com o comando apropriado até se obter um valor aproximado de cada uma das abcissas pretendidas.



A aproximação pode ser melhorada mediante a consulta da tabela de $A(x)$ na vizinhança dessas abcissas. Os valores pedidos, arredondados às décimas, são $0,2$ e $1,4$.

4. Seja $g(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática: $a, b, c \in (R)$ e $a \neq 0$.

   Identifica-se pelo enunciado que se pretende provar que existe uma e só uma abcissa $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $g'(x_0) = 1$ (1 é o declive da bissectriz dos quadrantes ímpares).

   $g'(x) = 2ax + b$, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1-b}{2a}.$$

   Esta solução existe dado que $a \neq 0$ e é única para cada função g, donde

$$x_0 = \frac{1-b}{2a}.$$

   Assim, o ponto pedido existe e é único, qualquer que seja a função quadrática g.

5.1. Há 10 compartimentos dos quais apenas 7 vão ser ocupados, logo o valor pedido é dado por

$$A_7^{10} = 604800.$$

5.2. Pretende-se distribuir os 5 sabores de fruta por 5 compartimentos ($5!$ maneiras) e colocar os sabores de baunilha e chocolate nos 5 compartimentos restantes (A_2^5 maneiras). O valor pedido é

$$5! \times A_2^5 = 2400.$$

6. Como a saída de *face par* no lançamento do dado implica tirar uma bola da caixa B, então o acontecimento Y dado X significa a extracção da bola verde da caixa B.

   Para este acontecimento, o número de casos possíveis é igual a 7 (nº total de bolas na caixa) e o número de casos favoráveis é 6 (nº de bolas verdes).

   Admitindo que todas as bolas têm igual probabilidade de sair então, pela regra de Laplace, a probabilidade pedida é igual a $6/7$.

FIM

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos
2003

1.ª FASE
2.ª CHAMADA
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui seis questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de onze.

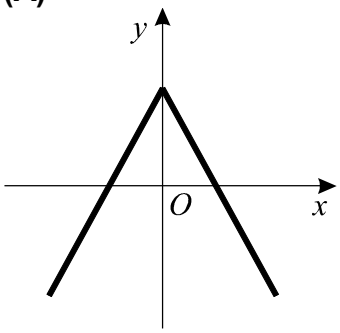
Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.

Grupo I

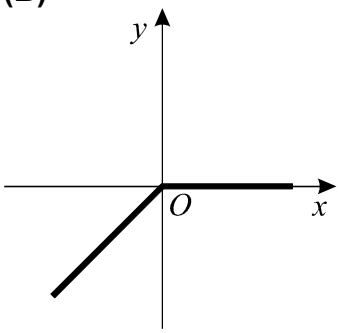
- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Em qual das figuras seguintes pode estar representada parte do gráfico de uma função par, de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $]-\infty, 0]$?

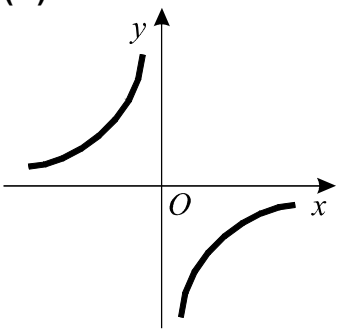
(A)



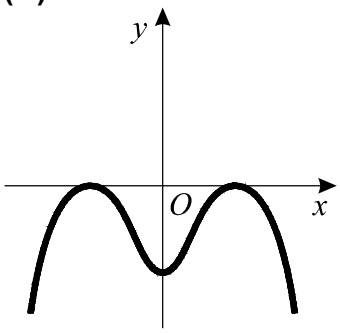
(B)



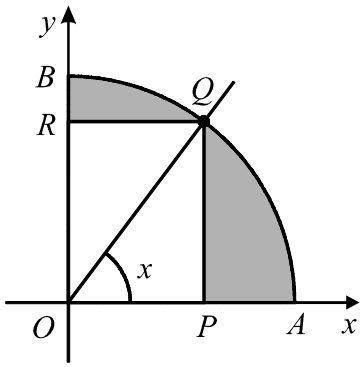
(C)



(D)



2. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, um arco de circunferência AB, de centro na origem do referencial.



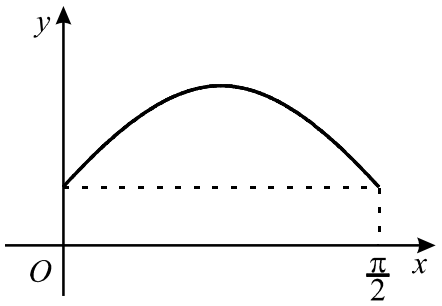
O ponto Q move-se ao longo desse arco.

Os pontos P e R, situados sobre os eixos Ox e Oy, respectivamente, acompanham o movimento do ponto Q, de tal forma que o segmento de recta $[PQ]$ é sempre paralelo ao eixo Oy e o segmento de recta $[QR]$ é sempre paralelo ao eixo Ox.

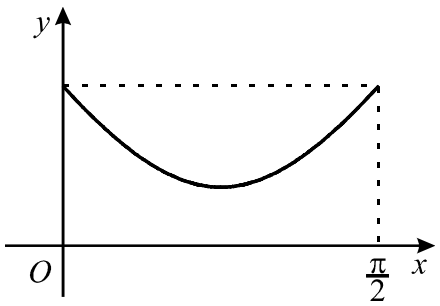
Para cada posição do ponto Q, seja x a amplitude do ângulo AOQ e seja $h(x)$ a área da região sombreada.

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função h?

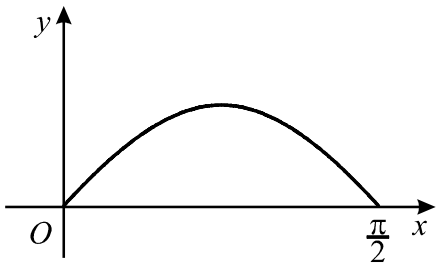
(A)



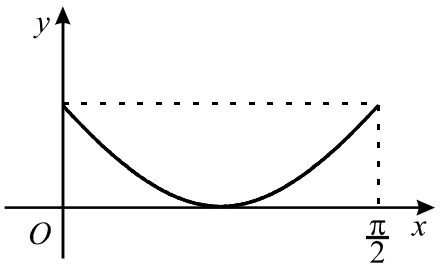
(B)



(C)



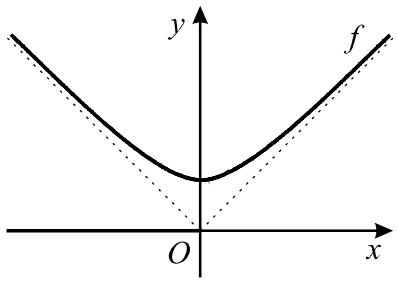
(D)



3. Indique o valor de $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\log_2 x}{e^x - 1}$

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** $-\infty$ **(D)** $+\infty$

4. Na figura junta está representada parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}$, contínua em todo o seu domínio.

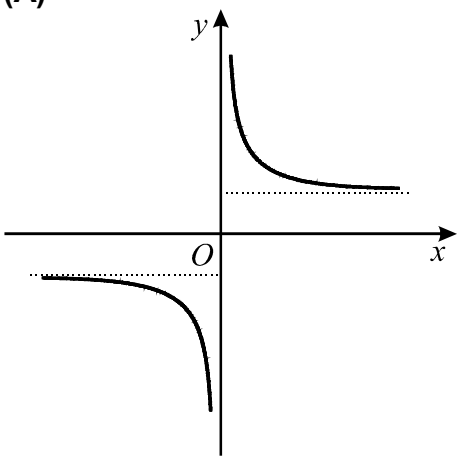


A bissectriz dos quadrantes pares e a bissectriz dos quadrantes ímpares são assimptotas do gráfico de f.

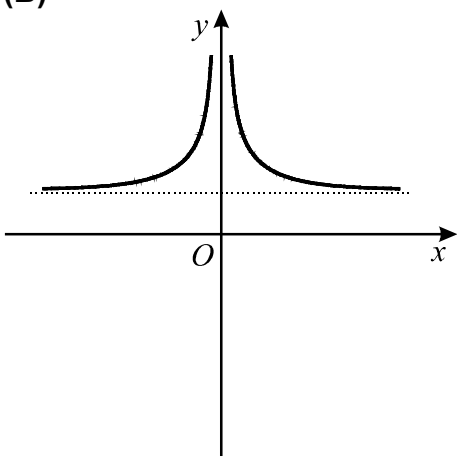
Indique em qual das figuras seguintes pode estar representada parte do gráfico da função g definida por

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

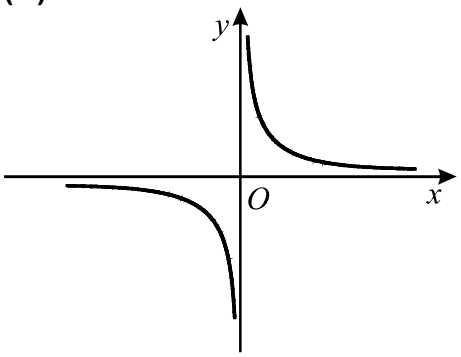
(A)



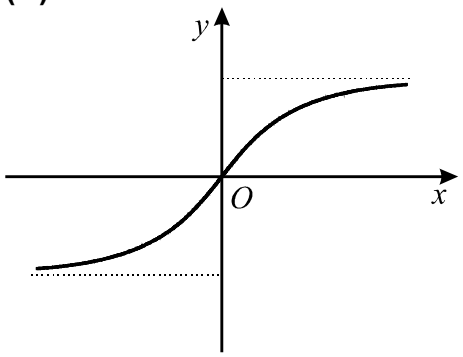
(B)



(C)



(D)



5. O quarto número de uma certa linha do Triângulo de Pascal é $19\,600$.

A soma dos quatro primeiros números dessa linha é $20\,876$.

Qual é o terceiro número da **linha seguinte**?

(A) $1\,275$ **(B)** $1\,581$ **(C)** $2\,193$ **(D)** $2\,634$

6. Um saco contém bolas azuis, brancas e pretas.

Tira-se, ao acaso, uma bola do saco.

Sejam os acontecimentos:

A – a bola retirada é azul

B – a bola retirada é branca

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A e B são contrários

(B) A e $\overline{B}$ são contrários

(C) A e B são incompatíveis

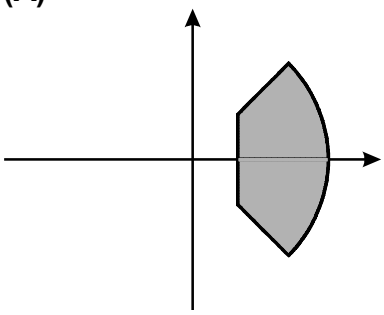
(D) A e $\overline{B}$ são incompatíveis

7. Considere, em $\mathbb{C}$, a condição:

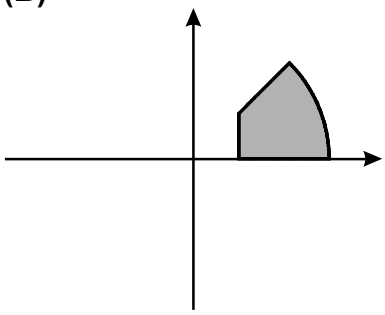
$$|z| \leq 3 \quad \wedge \quad 0 \leq arg\, z \leq \frac{\pi}{4} \quad \wedge \quad Re\, z \geq 1$$

Em qual das figuras seguintes pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição?

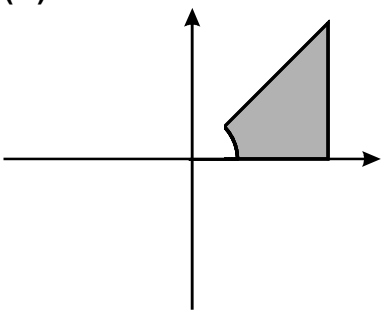
(A)



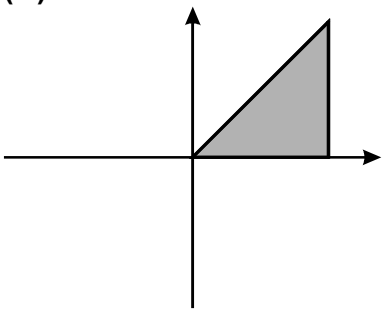
(B)



(C)



(D)



Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

1.1. **Sem recorrer à calculadora**, determine $\dfrac{(\sqrt{3}-2\,i)^2+\left(2\ cis\ \frac{\pi}{9}\right)^3}{cis\ \frac{3\,\pi}{2}}$

apresentando o resultado na forma algébrica.

1.2. Seja α um número real.

Sejam z_1 e z_2 dois números complexos tais que:

- $z_1 = cis\ \alpha$
- $z_2 = cis\ (\alpha + \pi)$

Mostre que z_1 e z_2 não podem ser ambos raízes cúbicas de um mesmo número complexo.

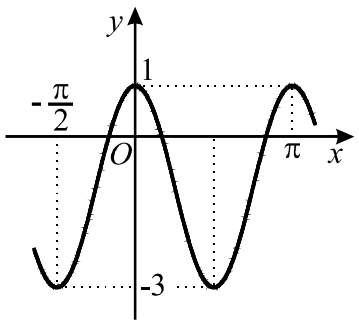
2. Considere a expressão $f(x) = a + b\,\text{sen}^2\,x$

Sempre que se atribui um valor real a a e um valor real a b, obtemos uma função de domínio $\mathbb{R}$.

2.1. Nesta alínea, considere $a = 2$ e $b = -5$.

Sabe-se que $\text{tg}\,\theta = \frac{1}{2}$. **Sem recorrer à calculadora**, calcule $f(\theta)$

2.2. Para um certo valor de a e um certo valor de b, a função f tem o seu gráfico parcialmente representado na figura junta.

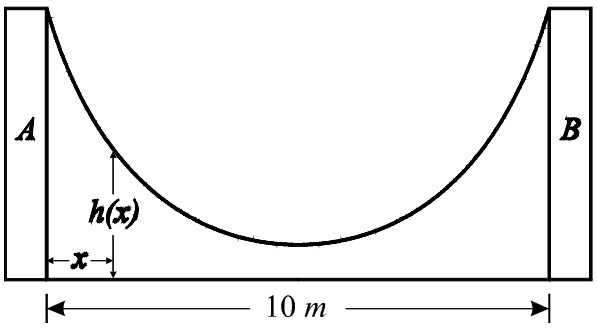


Conforme essa figura sugere, tem-se:

- o contradomínio de f é $[-3, 1]$
- 0 e π são maximizantes
- $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ são minimizantes

Determine a e b.

3. Uma rampa de desportos radicais foi construída entre duas paredes, A e B, distanciadas de 10 metros, como se mostra na figura.



Considere a função h definida por

$$h(x) = 15 - 4\ln(-x^2 + 10x + 11)$$ (ln designa logaritmo de base e)

Admita que $h(x)$ é a altura, em metros, do ponto da rampa situado x metros à direita da parede A.

3.1. Determine a altura da parede A. Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.
Nota: se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3.2. **Sem recorrer à calculadora**, estude a função h quanto à monotonia e conclua daí que, tal como a figura sugere, é num ponto equidistante das duas paredes que a altura da rampa é mínima.

3.3. Mostre, analiticamente, que $h(5-x) = h(5+x)$.
Interprete esta igualdade no contexto da situação descrita.

4. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a sua derivada é dada por

$$f'(x) = (x+1)\,e^x - 10x$$

Seja A o único ponto de inflexão do gráfico de f.

Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine a abcissa do ponto A, arredondada às décimas.

Explique como procedeu. Inclua, na sua explicação, o(s) gráfico(s) que obteve na calculadora.

5. O sangue humano está classificado em quatro grupos distintos: A, B, AB e O.

Independentemente do grupo, o sangue pode possuir, ou não, o factor Rhésus.

Se o sangue de uma pessoa possui este factor, diz-se Rhésus positivo (Rh^+); se não possui este factor, diz-se Rhésus negativo (Rh^-).

Na população portuguesa, os grupos sanguíneos e os respectivos Rhésus estão repartidos da seguinte forma:

	A	B	AB	O
Rh^+	40 %	6,9 %	2,9 %	35,4 %
Rh^-	6,5 %	1,2 %	0,4 %	6,7 %

5.1. Escolhido um português ao acaso, qual é a probabilidade de o seu grupo sanguíneo **não** ser o O ? Apresente o resultado sob a forma de percentagem, arredondado às unidades.

5.2. Escolhido um português ao acaso, e sabendo que é Rhésus negativo, qual é a probabilidade de o seu grupo sanguíneo ser o A? Apresente o resultado sob a forma de percentagem, arredondado às unidades.

6. Considere o seguinte problema:

Vinte e cinco jovens (doze rapazes e treze raparigas) pretendem ir ao cinema. Chegados lá, verificam que existem apenas vinte bilhetes (para duas filas com dez lugares consecutivos em cada uma delas). Comprados os vinte bilhetes, distribuem-nos ao acaso. Como é evidente, cinco jovens irão ficar sem bilhete.
Qual é a probabilidade de uma das filas ficar ocupada só com rapazes e a outra só com raparigas?

Uma resposta correcta para este problema é: $\frac{{}^{12}C_{10}\times{}^{13}C_{10}\times 2\times 10!\times 10!}{{}^{25}C_{20}\times 20!}$

Numa pequena composição, com cerca de vinte linhas, explique **esta resposta**.

Nota:

Deve organizar a sua composição de acordo com os seguintes tópicos:

- referência à Regra de Laplace;
- explicação do número de casos possíveis;
- explicação do número de casos favoráveis.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 11
1.2. 10

2. 30
2.1. 15
2.2. 15

3. 38
3.1. 6
3.2. 16
3.3. 16

4. 16

5. 16
5.1. 6
5.2. 10

6. 16

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Círculo: $\pi\, r^2 \qquad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - raio\ da\ base;\ g - geratriz)$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - raio)$

Volumes

Prisma: *Área da base* × *Altura*

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3 \qquad (r - raio)$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\,\theta) \,.\, (\rho'\, cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta + \theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\,\theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\,\frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u' . v + u \,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' . v - u \,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \,.\, u^{n-1} \,.\, u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' . \cos u$

$(\cos u)' = -\,u' . \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' . e^u$

$(a^u)' = u' . a^u . \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \,.\, \ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **1.ª FASE**

2003 **2.ª CHAMADA**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
- **1.1.** 11
- **1.2.** 10

2. 30
- **2.1.** 15
- **2.2.** 15

3. 38
- **3.1.** 6
- **3.2.** 16
- **3.3.** 16

4. 16

5. 16
- **5.1.** 6
- **5.2.** 10

6. 16

TOTAL **200**

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Versão 1	D	B	C	A	A	C	B
Versão 2	C	A	C	D	D	B	C

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, no primeiro grupo, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas **Resp. certas**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

Grupo II

Critérios gerais

1. A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro, não negativo, de pontos.

2. Se, numa alínea em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, o examinando se limitar a apresentar o resultado final, deverão ser atribuídos zero pontos a essa alínea.

3. Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

4. Existem alíneas cuja cotação está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para as resolver.

4.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.

4.2. Caso a resolução da etapa esteja incompleta, ou contenha incorrecções, cabe ao classificador decidir a cotação a atribuir a essa etapa, tendo em conta o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:
- erros de contas ocasionais devem ser penalizados em um ponto;
- erros graves, que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades, devem ser penalizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa.

4.3. No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.

4.4. Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.

4.5. Pode acontecer que o examinando, ao resolver uma questão, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

5. Existem alíneas em que estão previstos alguns erros que o examinando pode cometer. Para cada caso, é indicada a cotação a atribuir. O examinando pode, contudo, utilizar um processo não contemplado nos critérios e/ou cometer um erro não previsto. Cabe ao classificador adaptar as referências dadas a todas as situações não previstas.

6. Se, na resolução de uma alínea, o examinando utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), deve ser penalizado em um ponto, na cotação total a atribuir a essa alínea. Esta penalização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas cotadas com 0 (zero) pontos.

7. Se, na resolução de uma alínea, o examinando não respeitar uma eventual instrução, relativa ao método a utilizar (por exemplo, se o enunciado vincular o examinando a uma resolução analítica, sem calculadora, e o examinando a utilizar), a etapa da resolução em que se dá o referido desrespeito bem como todas as subsequentes que dela dependam devem ser cotadas com 0 (zero) pontos.

8. Tudo o que o examinando escrever fora de contexto e que não resulte de trabalho anterior (por exemplo, num exercício de probabilidades, a escrita de uma fracção que não tenha nada a ver com o problema, ou, num exercício de estudo da monotonia de uma função, a apresentação de um quadro fora do contexto) deve ser cotado com 0 (zero) pontos. Todas as etapas subsequentes que dependam do que o examinando escreveu fora de contexto devem ser igualmente cotadas com 0 (zero) pontos.

Critérios específicos

Para cada item são apresentados:

- a cotação total do item;
- para cada processo de resolução apresentado, uma subdivisão da cotação total em cotações parcelares;
- exemplos de possíveis respostas dos examinandos, com a respectiva cotação a atribuir, devidamente explicada.

1.1. 11

$\left(\sqrt{3}-2\,i\right)^2 = -1-4\sqrt{3}\,i$ **(ver nota 1)**.....2 (1+1)

$\left(2\,cis\,\frac{\pi}{9}\right)^3 = 8\;cis\,\frac{\pi}{3}$ **(ver nota 2)**.....2 (1+1)

$8\;cis\,\frac{\pi}{3} = 4+4\sqrt{3}\,i$ **(ver nota 3)**.....3 (1+1+1)

Simplificação do numerador 1

Divisão **(ver nota 4)** .....3 (1+1+1)

Notas:

1. A subdivisão da cotação indicada entre parênteses corresponde a:

Desenvolvimento do quadrado da diferença 1

Restantes cálculos 1

2. A subdivisão da cotação indicada entre parênteses corresponde a:

Módulo 1

Argumento 1

3. A subdivisão da cotação indicada entre parênteses corresponde a:

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ 1

$\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 1

Restantes cálculos 1

4. A subdivisão da cotação indicada entre parênteses corresponde a:

Escrever o denominador na forma algébrica.....1

Multiplicar ambos os termos da fracção por i 1

Restantes cálculos 1

ou

Escrever o numerador na forma trigonométrica.....1

Efectuar a divisão na forma trigonométrica.....1

Escrever o resultado na forma algébrica.....1

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$\frac{(\sqrt{3}-2\,i\,)^2+\left(2\,cis\,\frac{\pi}{9}\right)^3}{cis\,\frac{3\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2-4\sqrt{3}\,i\,+(2\,i)^2+8\,cis\,\frac{\pi}{3}}{-\,i} =$$

$$= \frac{3-4\sqrt{3}\,i\,+4\,i+8\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)}{-\,i} =$$

$$= \frac{3-4\,\sqrt{3}\,i\,+4\,i+4+4\sqrt{2}\,\,i}{-\,i} =$$

$$= \frac{7+4\,i+4\sqrt{2}\,\,i\,-4\sqrt{3}\,\,i}{-\,i}$$

Cotação a atribuir: $1(1+0)+2\,(1+1)+\,2\,(1+0+1)+1+1\,(1+0+0)=7$

Exemplo 2

$$\frac{\left(\sqrt{3}-2\,i\right)^2+\left(2\,cis\ \frac{\pi}{9}\right)^3}{cis\ \frac{3\pi}{2}} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2-(2\,i)^2+8\,cis\ \frac{\pi}{3}}{i} =$$

$$= \frac{3+4+8\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)}{i} = \frac{3+4+4+4\sqrt{3}\,i}{i} =$$

$$= \frac{11+4\sqrt{3}\,i}{i} = \frac{\left(11+4\sqrt{3}\,i\right)\times(-i)}{i\times(-i)} =$$

$$= \frac{-11\,i-4\sqrt{3}}{-i^2} = -4\sqrt{3}-11\,i$$

Cotação a atribuir: $1(0+1)+2\,(1+1)+\ 3\,(1+1+1)+1+1\,(0+1+0)=8$

Exemplo 3

$$\frac{\left(\sqrt{3}-2\,i\right)^2+\left(2\,cis\ \frac{\pi}{9}\right)^3}{cis\ \frac{3\pi}{2}} =$$

$$= 3-(2i)^2+\left(2\,cis\ \frac{\pi}{9}-\frac{3\pi}{2}\right)^3 =$$

$$= 3+4i+\left(2\,cis\ \frac{-25\,\pi}{18}\right)^3 =$$

$$= 3+4i+2\,cis\frac{-25\,\pi}{6} =$$

$$= 3+4i+2\left(\cos\ \frac{-25\,\pi}{6}+i\,\text{sen}\ \frac{-25\,\pi}{6}\right) =$$

$$= 3+4i+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\,i\right) =$$

$$= 3+4i+\sqrt{3}-i =$$

$$= 3+\sqrt{3}+3\,i$$

Cotação a atribuir: $0(0+0)+1\,(0+1)+\ 3\,(1+1+1)+1+0\,(0+0+0)=5$

1.2. 10

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º Processo:

O examinando deverá referir que

- as representações geométricas das raízes cúbicas de um número complexo são vértices de um triângulo equilátero com centro na origem do referencial (ou afirmação equivalente),
- a diferença entre os argumentos de z_1 e z_2 é igual a π,

para concluir que z_1 e z_2 não podem ser raízes cúbicas de um mesmo número complexo.

A resposta do examinando deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

O examinando refere os dois aspectos e conclui correctamente o pretendido..... 10

O examinando refere os dois aspectos, mas não conclui o pretendido..... 8

O examinando refere apenas o primeiro aspecto..... 5

O examinando refere apenas o segundo aspecto..... 2

2.º Processo:

$z_1^3 = cis(3\alpha)$ 3

$z_2^3 = cis(3\alpha + 3\pi)$ 4

Justificar que z_1^3 e z_2^3 não são iguais 3

3.º Processo:

$z_1^3 = cis(3\alpha)$ 3

Calcular todas as raízes cúbicas de $cis(3\alpha)$ 5

Concluir que nenhuma delas é igual a z_2 2

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

Para z_1 e z_2 serem raízes cúbicas de um complexo teria de ocorrer um salto de z_1 para z_2 de $\frac{2\pi}{3}$ mas isto não se verifica pois ocorre um salto de π

$cis\,\alpha$ → 1ª raiz

$cis\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)$ → 2ª raiz

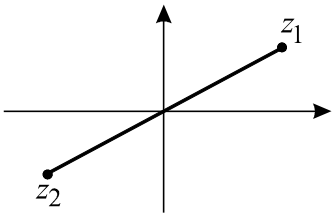
$cis\left(\alpha + \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$ → 3ª raiz

Com estes cálculos demonstra-se que não são ambos raízes cúbicas de um mesmo número complexo.

Cotação a atribuir (1.º Processo): $10 + (-1)^{(*)} = 9$

(*) O examinando utiliza linguagem incorrecta, do ponto de vista formal («*salto de* z_1 *para* z_2 ») - ver critério geral 6.

Exemplo 2



Se $z_2 = cis\,(\alpha + \pi)$, então z_2 não se encontra no mesmo quadrante de z_1 e não podem ser raízes cúbicas do mesmo complexo.

Cotação a atribuir (1.º Processo): $2^{(*)}$

(*) O examinando evidencia, no desenho apresentado, que a diferença entre os argumentos de z_1 e z_2 é igual a π.

Exemplo 3

Não podem pois o facto de se encontrarem num "campo" oposto do outro impossibilita tal coisa.

$\alpha \neq (\alpha + \pi)$ e $\pi = 180$

Cotação a atribuir (1.º Processo): $2^{(*)} + (-1)^{(**)} = 1$

(*) O examinando evidencia que a diferença entre os argumentos de z_1 e z_2 é igual a π.

(**) O examinando escreve $\pi = 180$ e utiliza linguagem incorrecta, do ponto de vista formal («*campo oposto*») - ver critério geral 6.

Exemplo 4

$(z_1)^3 = (cis\,\alpha)^3 = 1^3\, cis\; 3\,\alpha = cis\; 3\,\alpha$

$(z_2)^3 = (cis\,(\alpha+\pi))^3 = 1^3\; cis\;\; 3\,\alpha + 3\pi = cis\; 3\,\alpha + \pi$

$cis\; 3\,\alpha \neq cis\; 3\,\alpha + \pi$

Cotação a atribuir (2.º Processo): $3 + 4 + 2^{(*)} + (-1)^{(**)} = 8$

(*) Justificação incompleta - ver critério geral 4.2.

(**) Falta de parênteses - ver critério geral 6.

Exemplo 5

$(z_1)^3 = cis\; 3\,\alpha \qquad (z_2)^3 = cis\,(\; 3\,\alpha + 3\pi\;)$

$3\,\alpha + \frac{2\,\pi}{3} = 3\,\alpha + 3\pi$

$\begin{cases} 3\,\alpha + \frac{2\,\pi}{3} = 0 \\ 3\,\alpha + 3\pi = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = -\frac{2\,\pi}{9} \\ \alpha = -\pi \end{cases} \qquad -\pi \neq -\frac{2\,\pi}{9}$

z_1 e z_2 têm módulos iguais mas não representam as raízes cúbicas do mesmo complexo, porque $3\,\alpha + \frac{2\,\pi}{3} \neq 3\,\alpha + 3\pi$, logo os seus argumentos não estão em progressão aritmética.

Cotação a atribuir (2.º Processo): $3 + 4 + 0 = 7$

Exemplo 6

$\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{1}\; cis\; \frac{\alpha + 2\,k\,\pi}{3}\;,\; k \in \{0,\, 1,\, 2\}$

$\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{1}\; cis\; \frac{(\alpha+\pi)}{3} + \frac{2\,k\,\pi}{3}\;,\; k \in \{0,\, 1,\, 2\}$

Os complexos z_1 e z_2 não podem ser raízes cúbicas do mesmo complexo porque dando valores a k nos dois complexos eles não são iguais, não dando o mesmo valor.

Cotação a atribuir: 0

2.1. ..... **15**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

$f(\theta) = 2 - 5\,\text{sen}^2\,\theta$ 1

$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\theta}$ 5

$\cos^2\theta = \frac{4}{5}$ 2

$\text{sen}^2\,\theta = \frac{1}{5}$ 5

$f(\theta) = 1$ 2

2.º Processo:

$f(\theta) = 2 - 5\,\text{sen}^2\,\theta$ 1

$\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{2}$ 2

$\cos\theta = 2\,\text{sen}\,\theta$ 2

$\text{sen}^2\,\theta + 4\,\text{sen}^2\,\theta = 1$ 6

$\text{sen}^2\,\theta = \frac{1}{5}$ 2

$f(\theta) = 1$ 2

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$1 + \text{tg}^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \cos^2\theta = \frac{2}{3}$$

$$f\left(\theta\right) = 2 - 5\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Cotação a atribuir (1.º Processo): $1^{(*)} + 5 + 1 + 5^{(**)} + 2^{(**)} = 14$

(*) Ver critério geral 4.5.

(**) Ver critério geral 4.3.

Exemplo 2

$$\text{sen}^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$f\left(\theta\right) = 2 - 5 \times \frac{3}{4} = -\frac{7}{4}$$

Cotação a atribuir (1.º Processo): $1^{(*)} + 0 + 0 + 0 + 2^{(**)} = 3$

(*) Ver critério geral 4.5.

(**) Ver critério geral 4.3.

Exemplo 3

$$f\left(\theta\right) = 2 - 5\,\text{sen}^2\theta \qquad \text{tg}\,\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$$

Cotação a atribuir (2.º Processo): $1 + 1^{(*)} + 0 + 0 + 0 + 0 = 2$

(*) O examinando limita-se a escrever a fórmula que relaciona a tangente com o seno e com o co-seno, mas não a utiliza.

Exemplo 4

$$\text{tg}\,\theta = \frac{1}{2} \quad \text{logo} \quad \theta = 0{,}4636 \ \textit{radianos}$$

$$f\left(0{,}46\right) = 2 - 5\,\text{sen}^2\,(0{,}46) = 1$$

Cotação a atribuir: $1^{(*)}$

(*) A igualdade $f\left(\theta\right) = 2 - 5\,\text{sen}^2\,\theta$ está implícita e é independente do resto da resolução, que desrespeita a indicação, expressa no enunciado, de não utilização da calculadora - ver critérios gerais 4.5 e 7.

2.2. ..... **15**

Escrever um sistema que permita obter os valores de a e de b
$\left(\text{por exemplo, } f(0) = 1 \ \wedge \ f(-\frac{\pi}{2}) = -3\right)$ 5

Resolver o sistema 10
Obter o valor de a 3
Obter o valor de b 7
$a + b = -3$ 5
Restantes cálculos 2

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$f(\pi) = 1 \ \wedge \ f(\frac{\pi}{2}) = -3$

$a + b\,\text{sen}^2(\pi) = 1 \quad \wedge \quad a + b\,\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3$

$a = 1 \ \wedge \ a + b = -3$

$a = 1 \ \wedge \ b = -4$

Cotação a atribuir: $5 + 10\left(3 + 7(5 + 2)\right) = 15$

Exemplo 2

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(-\frac{\pi}{2}) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b\,\text{sen}^2(0) = 1 \\ a + b\,\text{sen}^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a - b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 1 - b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$$

Cotação a atribuir: $5 + 6\left(3 + 3\,(1^{(*)} + 2)\right) = 11$

(*) O examinando comete um erro grave, ao passar de $a + b\,\text{sen}^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ para $a - b$ $\left(\text{implicitamente, o examinando está a afirmar que } \text{sen}^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1\right)$ - ver critério geral 4.2.

Exemplo 3

$f(-\frac{\pi}{2}) = -3 \Leftrightarrow a+b = -3$

$2-5 = -3$ Proposição verdadeira

$a = 2 \ \wedge \ b = -5$

Cotação a atribuir: $0^{(*)} + 5\big(0 + 5\,(5+0)\,\big) = 5$

(*) O examinando escreve apenas uma equação, o que nunca lhe permitiria obter os valores de a e de b.

Exemplo 4

$0 \leq \text{sen}^2\, x \leq 1$

$0 \leq b \times \text{sen}^2\, x \leq b$

$a \leq a + b \times \text{sen}^2\, x \leq a + b$

$a = -3 \ \wedge \ a + b = 1$

$a = -3 \ \wedge \ b = 4$

Cotação a atribuir: $10^{(*)}$

(*) O examinando utilizou um processo de resolução não previsto nos critérios específicos, pelo que, de acordo com o critério geral 3, compete ao classificador decidir a cotação a atribuir. O examinando comete um erro grave, na segunda etapa, pois tais desigualdades só seriam verdadeiras se b fosse positivo. As restantes etapas estão correctas.

Exemplo 5

$a + b\,\text{sen}^2\, x = 0 \Leftrightarrow \text{sen}^2\, x = -\frac{a}{b}$

Cotação a atribuir: 0

3.1. 6

Substituir x por 0 **(ver notas 1 e 2)**..... 3

Valor pedido $\approx 5{,}4$ **(ver notas 2, 3 e 4)**.....3

Notas:

1. Se o examinando substituir x por 10, deve ser penalizado em 1 ponto (no enunciado, não é dito que as duas paredes têm a mesma altura, embora o desenho o sugira).

2. Se o examinando não atribuir a x o valor 0 ou 10, deverá ter a cotação de 0 (zero) pontos, nas duas etapas.

3. Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às décimas, ou não o arredondar correctamente, deve ser penalizado em 1 ponto.

4. Se o examinando, nos cálculos intermédios, não conservar, no mínimo, três casas decimais, deve ser penalizado em 1 ponto. Note-se, no entanto, que não se exige a apresentação de cálculos intermédios, isto é, o examinando pode escrever, simplesmente, $h(0) \approx 5{,}4$.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$h(0) \approx 5{,}4$

Cotação a atribuir: $3 + 3 = 6$

Exemplo 2

$h(0) = 15 - 4\ln(11) = 15 - 4 \times 2{,}3 = 15 - 9{,}2 = 5{,}8$

Cotação a atribuir: $3 + 2^{(*)} = 5$

(*) Ver nota 4.

Exemplo 3

$h(0) = 15 - 4\ln(11) = 5{,}4$

$h(10) = 15 - 4\ln(-10^2 + (10 \times 10) + 11) = -6{,}4$

A parede é igual a $h(0)$, logo a altura da parede A é 5,4 m

Cotação a atribuir: $3 + 3 + (-1)^{(*)} + (-1)^{(**)} = 4$

(*) O examinando escreve «*A parede é igual a* $h(0)$».

(**) Apesar de desnecessário (o que o examinando não refere), penalizou-se em 1 ponto o cálculo de $h(10)$, porque está mal calculado e por ter sido obtido um número negativo.

Exemplo 4

Recorrendo à máquina gráfica com a janela: x min $= -1$; x max $= 12$; y min $= -1$; y max $= 6$ concluí que a altura das paredes A e B eram iguais e que têm $5{,}4\ m$

Cotação a atribuir: $3^{(*)}$

(*) O examinando utilizou um processo de resolução não previsto nos critérios específicos, pelo que, de acordo com o critério geral 3, compete ao classificador decidir a cotação a atribuir. O examinando afirma que utilizou a máquina gráfica e refere a janela utilizada, o que sugere que obteve o gráfico da função na calculadora. Como o valor está correcto, mas a justificação está muito incompleta, dado que não existe qualquer referência ao que foi feito com a calculadora (para além da janela utilizada), decidiu-se atribuir metade da cotação prevista para esta questão.

Exemplo 5

$h(5) = 15 - 4\ln(86) = 0{,}7\,m$

Cotação a atribuir: $0^{(*)} + 0^{(*)} = 0$

(*) Ver nota 2.

Exemplo 6

$h(10-x) = 15 - 4\ln(-(10-x)^2 + 10 \times (10-x) + 11)$

$h(10-x) = 15 - 4\ln(-3{,}18 + 17{,}83 + 11)$

$h(10-x) = 15 - 4\ln(25{,}65)$

$h(10-x) = 15 - 12{,}978$

$h(10-x) = 2{,}022$

Cotação a atribuir: $0 + 0 = 0$

Exemplo 7

$h(x) = 15 - 4\ln(-x^2 + 10\,x + 11) = 1{,}06$

Fórmula Resolvente:

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100+44}}{-2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-10 \pm \sqrt{144}}{-2}$$

$x = 11 \vee x = -1$

Cotação a atribuir: $0 + 0 = 0$

3.2. 16

Determinar $h'(x)$ 5
- Evidenciar a intenção de derivar $h(x)$ 1
- Derivada de $\ln\left(-x^2+10x+11\right)$ 3
- Restantes cálculos 1

Determinar o zero de h' 5
- Escrever a equação $h'(x)=0$ 1
- Restantes cálculos 4

Estudo do sinal de h' e consequente conclusão, relativamente à monotonia e extremo de h (estudo que pode ser apresentado através de um quadro) 4
- Primeira linha do quadro (relativa à variável x) 1
- Sinal de h' 1
- Relação entre o sinal de h' e a monotonia de h 1
- Referência ao minimizante 1

Conclusão final: *Como o ponto procurado é o que tem abcissa igual a 5, confirma-se que é o ponto equidistante das duas paredes* (ou equivalente) 2

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$h'(x) = -4\times\frac{-2x+10}{-x^2+10x+11} = \frac{8x-40}{-x^2+10x+11}$$

$$h'(x)=0 \Leftrightarrow 8x-40=0 \Leftrightarrow x=5$$

$$h'(4)=\frac{8\times4-40}{-4^2+10\times4+11}=\frac{-8}{35}$$ negativo.

$$h'(6)=\frac{8\times6-40}{(-6)^2+10\times6+11}=\frac{8}{107}$$ positivo.

x	0	5	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	min	↗

Como a distância entre as paredes é 10 m o ponto que está 5 m afastado da parede A, encontra-se igualmente afastado da parede B, o que significa que $x=5$ será a abcissa do ponto médio entre as paredes.

Cotação a atribuir: $5(1+3+1)+5(1+4)+3(0^{(*)}+1+1+1)+2=15$

(*) A primeira linha do quadro não respeita o domínio da função h, que é $[0,10]$

Exemplo 2

$$h'(x) = \frac{\left(-x^2 + 10\,x + 11\right)'}{ln\left(-x^2 + 10\,x + 11\right)} = \frac{-2\,x + 10}{ln\left(-x^2 + 10\,x + 11\right)}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow -2\,x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

	0	5	10
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	min	↗

5 é a altura mínima

Cotação a atribuir: $2(1 + 1^{(*)} + 0^{(**)}) + 5(1 + 4) + 3(1 + 0^{(***)} + 1^{(****)} + 1) + 0 = 10$

(*) O examinando comete um erro grave na derivada do logaritmo - ver critério geral 4.2.

(**) O examinando ignora o factor -4.

(***) O sinal da derivada está errado, relativamente à expressão obtida para h'.

(****) A relação entre o sinal da derivada e a monotonia da função está correcta.

Exemplo 3

$$h'(x) = \frac{-2\,x + 10}{-x^2 + 10\,x + 11} \qquad h'(x) = 0 \Leftrightarrow -2\,x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Cotação a atribuir: $4(1 + 3 + 0^{(*)}) + 5(1 + 4) + 0(0 + 0 + 0 + 0) + 0 = 9$

(*) O examinando ignora o factor -4.

Exemplo 4

$$h'(x) = 0 - 4 \times \frac{-2\,x + 10}{-x^2 + 10\,x + 11}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow -2\,x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

$x = 5$ é o mínimo da função portanto esse é o ponto equidistante das duas paredes.

Cotação a atribuir: $5(1 + 3 + 1) + 5(1 + 4) + 0(0 + 0 + 0 + 0) + 0^{(*)} = 10$

(*) O examinando confunde minimizante com mínimo, e a conclusão está mal redigida, para além de não respeitar completamente o pedido feito no enunciado (de que a conclusão deveria resultar do estudo da função, quanto à monotonia).

3.3. 16

Mostrar que $h(5-x)=h(5+x)$ 10

$h(5-x)=15-4\ln\left(-(5-x)^2+10(5-x)+11\right)$ 1

$h(5+x)=15-4\ln\left(-(5+x)^2+10(5+x)+11\right)$ 1

Desenvolvimento dos quadrados dos binómios ..... 4 (2+2)

Restantes cálculos **(ver nota 1)** ..... 4 (2+2)

Interpretação **(ver nota 2)** 6

Notas:

1. Se o examinando, ao concluir os cálculos, não tiver obtido uma condição que seja trivialmente universal, deve ser penalizado em 2 pontos, nesta etapa.

2. Exemplo de interpretação correcta:

Pontos equidistantes (para a esquerda e para a direita) do meio da rampa estão à mesma altura.

A interpretação deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

	Nível 1	Nível 2
Interpretação completa	6	4 ou 5
Interpretação incompleta	3	1 ou 2
Interpretação errada ou ausência de interpretação	0	0

Nível 1 - Interpretação bem redigida e sem erros de linguagem matemática.

Nível 2 - Interpretação mal redigida ou com erros de linguagem matemática.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

Tomando x como 5

$h(5-x)=h(5+x)\Leftrightarrow h(0)=h(10)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 15-4\ln(-0^2+10\times 0+11)=15-4\ln(-10^2+10\times 10+11)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 15-4\ln(11)=15-4\ln(11)\Leftrightarrow 5{,}4=5{,}4$

O ponto mais baixo da rampa está equidistante dos extremos, logo x para um lado e para o outro terá a mesma altura.

Cotação a atribuir: $0\,(0+0+0(0+0)+0(0+0))+4=4$

Exemplo 2

$h(5-x) = h(5+x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 15 - 4\ln\left(- (5-x)^2 + 10(5-x) + 11 \right) =$
$= 15 - 4\ln\left(- (5+x)^2 + 10(5+x) + 11 \right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\ln(- x^2 - 10x - 25 + 50 - 10x + 11) =$
$= 4\ln(- x^2 + 10x - 25 + 50 - 10x + 11) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -10x = +10x \Leftrightarrow x = -x$

De facto, $h(5-x) = h(5+x)$ pois a rampa apresenta uma simetria com centro no seu ponto mais baixo $h(5)$.

Cotação a atribuir: $5(1+1+2(1+1)+1(2+1-2^{(*)}))+4=9$

(*) Ver nota 1.

Exemplo 3

$h(5-x) = 15 - 4\ln\left(- (5-x)^2 + 10(5-x) + 11 \right) =$
$= 15 - 4\ln(-25 + 10x - x^2 + 50 - 10x + 11) =$
$= 15 - 4\ln(- x^2 + 41)$

$h(5+x) = 15 - 4\ln\left(- (5+x)^2 + 10(5+x) + 11 \right) =$
$= 15 - 4\ln(-25 - 10x - x^2 + 50 + 10x + 11) =$
$= 15 - 4\ln(- x^2 + 41)$

$h(5-x) = h(5+x)$

5 é a distância média de A a B.

$5-x$ é a distância do meio para a esquerda e $5+x$ é a mesma distância do meio para a direita.

Isto significa que a altura de dois pontos simétricos a $x=5$, é igual.

Cotação a atribuir: $8(1+1+4(2+2)+2(1+1))+5=13$

Exemplo 4

Tomando como $x=5$ o ponto médio da distância entre as paredes todos os pontos equidistantes de $x=5$ têm a mesma altura

Cotação a atribuir: $0(0+0+0(0+0)+0(0+0))+5=5$

4. 16

Explicação do método utilizado para resolver o problema proposto **(ver nota 1)**.....10

Abcissa pedida $\approx 1{,}2$ **(ver nota 2)** 6

Notas:

1. Podem ser utilizados, pelo menos, três processos diferentes para resolver o problema proposto:

<u>1.º Processo</u>:
Determinar analiticamente $f''(x)$ 5
Esboçar o gráfico de f'' e assinalar o zero desta função 5

<u>2.º Processo</u>:
Referir a utilização da ferramenta da calculadora que permite obter o gráfico da derivada de uma função 5
Esboçar o gráfico de f'' e assinalar o zero desta função 5

<u>3.º Processo</u>:
Esboçar o gráfico de f' e assinalar o mínimo desta função 10

2. A escrita da abcissa pedida deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

<u>1.º Caso</u> (apresentação do resultado arredondado às décimas, de acordo com o enunciado):

Resposta $1{,}2$ 6

Resposta $1{,}1$ 5

Resposta $1{,}3$ ou $1{,}0$ 2

Outros resultados 0

<u>2.º Caso</u> (apresentação do resultado com aproximação superior às décimas):

Valor no intervalo $[1{,}10\ ;\ 1{,}20]$ 4

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[1{,}00\ ;\ 1{,}30]$ 1

Outros resultados 0

<u>3.º Caso</u> (apresentação do resultado arredondado às unidades):

Valor igual a 1 1

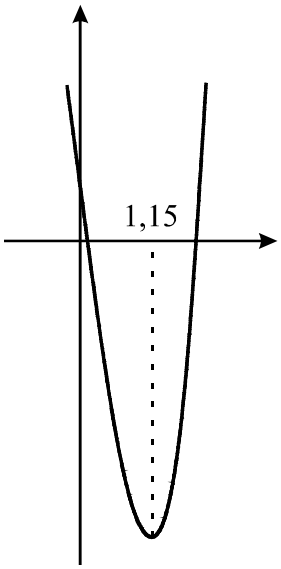
Outros resultados 0

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

O ponto de inflexão do gráfico de f é o extremo de f'

Gráfico de f' :

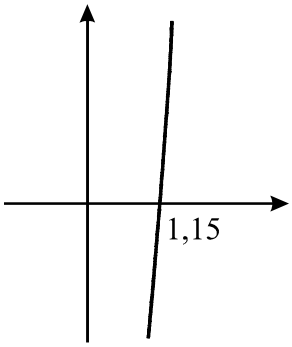


A abscissa do ponto de inflexão do gráfico de f é $1{,}2$

Cotação a atribuir: $10 + 6 = 16$

Exemplo 2

$f''(x) = \left((x+1)\,e^x - 10x\right)' = (x+2)\,e^x - 10$



$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 1{,}15$

O ponto de inflexão é $1{,}2$

Cotação a atribuir: $10(5+5) + 6 + (-1)^{(*)} = 15$

(*) O examinando escreveu uma frase incorrecta, do ponto de vista formal (*O ponto de inflexão é* $1{,}2$) - ver critério geral 6.

Exemplo 3

Introduzi $f'(x)$ na calculadora, pedi para traçar o gráfico e achei os zeros.

Obtive $f'(x) = 0 \rightarrow x = 0{,}13 \vee x = 1{,}88$

Tem dois pontos de inflexão.

Cotação a atribuir: $0 + 0 = 0$

Exemplo 4

$f''(x) = \left((x+1)\,e^x - 10x\right)' = 1 \times e^x - 10$

Fiz o gráfico de f'' na calculadora e determinei o zero de f'' com a ferramenta Root e deu $2{,}3$

Cotação a atribuir: $3\,(1^{(*)} + 2^{(**)}) + 6^{(***)} = 9$

(*) O examinando comete um erro muito grave no cálculo da derivada - ver critério geral 4.2.

(**) O examinando não esboça o gráfico da função f'', que obteve, mas evidencia a procura do seu zero.

(***) Ver critério geral 4.3.

Exemplo 5

$\left((x+1)\,e^x - 10x\right)' = (x+2)\,e^x - 10$

$\left((x+2)\,e^x - 10\right)' = (x+3)\,e^x$

$(x+3)\,e^x = 0 \Leftrightarrow x = -3$

Cotação a atribuir: $5(5+0) + 0 = 5$

5.1. 6

Probabilidade pedida $= 57{,}9\ \%$ 5
Indicar a soma $(40 + 6{,}5 + 6{,}9 + 1{,}2 + 2{,}9 + 0{,}4)\%$ 4
Probabilidade igual a $57{,}9\ \%$ 1

ou

$P(\overline{O}) = 1 - P(O)$ 2
$P(\overline{O}) = 57{,}9\ \%$ 3

Probabilidade pedida $\approx 58\ \%$ **(ver nota)** 1

Nota:
O ponto relativo a esta etapa só deverá ser atribuído se a etapa anterior não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$P(O) = \frac{6{,}7}{42{,}1} \qquad P(O) = 0{,}159$

$P(\overline{O}) = 1 - 0{,}159 = 0{,}841 \qquad P(\overline{O}) = 84\ \%$

Cotação a atribuir: $2(2^{(*)} + 0) + 1^{(**)} = 3$

(*) O examinando utiliza correctamente a fórmula $P(\overline{O}) = 1 - P(O)$

(**) O examinando não teve a cotação de 0 (zero) pontos, na etapa anterior, e escreveu correctamente o valor que obteve para $P(\overline{O})$, na forma pedida - ver nota e critério geral 4.3.

Exemplo 2

	A	B	AB	O	
Rh^+	$40\,\%$	$6{,}9\,\%$	$2{,}9\,\%$	$35{,}4\,\%$	$85{,}2\,\%$
Rh^-	$6{,}5\,\%$	$1{,}2\,\%$	$0{,}4\,\%$	$6{,}7\,\%$	$14{,}8\,\%$
	$46{,}5\,\%$	$8{,}1\,\%$	$3{,}3\,\%$	$42{,}1\,\%$	$100\ \%$

$P(O) = 42{,}1\,\% \qquad P(\overline{O}) = 100\,\% - 42{,}1\,\% = 57{,}9\ \%$

Cotação a atribuir: $5(2 + 3) + 0 = 5$

Exemplo 3

$P(\overline{O}) = 40\,\% + 6{,}5\ \% + 6{,}9\ \% + 1{,}2\ \% + 2{,}9\ \% + 0{,}4\ \%$

$P(\overline{O}) = 56{,}7\ \% \qquad P(\overline{O}) = 57\ \%$

Cotação a atribuir: $4(4 + 0) + 1 = 5$

5.2. 10

Identificar o pedido com $P(A \mid Rh^-)$ 5

$P(A \mid Rh^-) = \frac{6{,}5\,\%}{14{,}8\,\%}$ 4

Probabilidade pedida $\approx 44\,\%$ **(ver nota)** 1

Nota:
O ponto relativo a esta etapa só deverá ser atribuído se a etapa anterior não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$P(Rh^-|A) = \frac{P(Rh^- \cap A)}{P(A)} = \frac{6{,}5}{46{,}5} = 14\,\%$$

Cotação a atribuir: $0 + 4^{(*)} + 1^{(**)} = 5$

(*) Ver critério geral 4.3.

(**) Ver nota e critério geral 4.3.

Exemplo 2

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{6{,}5\,\%}{14{,}8\,\%} = 0{,}4\,\%$$

Cotação a atribuir: $5^{(*)} + 4 + 0 = 9$

(*) Apesar de o examinando não ter referido o significado que atribuiu aos acontecimentos A e B, os valores apresentados evidenciam uma identificação correcta desses acontecimentos.

Exemplo 3

$\underset{Rh^-}{A} = 6{,}5\,\%$ em 100 $\qquad\qquad \overset{Total}{Rh^-} = 14{,}8$

$$P = \frac{6{,}5}{14{,}8} = \frac{0{,}065}{0{,}148} = 0{,}4 = 43{,}9\,\%$$

Cotação a atribuir: $5 + 4 + 0 + (-1)^{(*)} = 8$

(*) Ver critério geral 6.

6. 16

A composição deve contemplar os seguintes pontos:

1. Referência à Regra de Laplace:
   1.1. Referir a equiprobabilidade dos casos possíveis.
   1.2. Referir que a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis.

2. Explicação da contagem do número de casos possíveis:
   2.1. Referir que $^{25}C_{20}$ é o número de maneiras de escolher o grupo de vinte jovens que vão ao cinema.
   2.2. Referir que $20\,!$ é o número de maneiras de os jovens se sentarem nos vinte lugares disponíveis.

3. Explicação da contagem do número de casos favoráveis:
   3.1. Referir que $^{12}C_{10} \times {}^{13}C_{10}$ é o número de maneiras de escolher dez rapazes, entre os doze, e dez raparigas, entre as treze.
   3.2. Referir que o factor 2 deriva do facto de existirem as duas possibilidades seguintes: os rapazes à frente e as raparigas atrás, ou ao contrário.
   3.3. Referir que $10\,! \times 10!$ é o número de maneiras de os dez rapazes e as dez raparigas se sentarem nos dez lugares de cada uma das respectivas filas.

Na tabela seguinte, indica-se como esta questão deve ser cotada:

Forma / **Conteúdo**	Nível 1 ($*$)	Nível 2 ($**$)	Nível 3 ($***$)
A composição contempla os sete pontos.	16	15	14
A composição contempla seis pontos.	14	13	12
A composição contempla cinco pontos.	12	11	10
A composição contempla quatro pontos.	10	9	8
A composição contempla três pontos.	7	6	5
A composição contempla dois pontos.	5	4	3
A composição contempla um ponto.	3	2	1

($*$) **Nível 1** - Redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).

($**$) **Nível 2** - Redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecte a inteligibilidade.

($***$) **Nível 3** - Redacção confusa, sem estruturação aparente, presença de erros graves, com perturbação frequente da inteligibilidade.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

De acordo com a Regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis, quando estes são todos equiprováveis.
Vejamos o número de casos possíveis: existem ${}^{25}C_{20}$ maneiras diferentes de escolher vinte, dos vinte e cinco jovens, para irem ao cinema; para cada uma destas maneiras, existem $20!$ maneiras diferentes de esses vinte jovens ocuparem os vinte lugares disponíveis.
Vejamos agora o número de casos favoráveis: existem ${}^{12}C_{10} \times {}^{13}C_{10}$ maneiras diferentes de escolher dez, dos doze rapazes, e dez, das treze raparigas, para irem ao cinema; para cada uma destas maneiras, existem $2 \times 10! \times 10!$ maneiras diferentes de esses jovens ocuparem as duas filas, de acordo com o enunciado (os rapazes podem ficar na fila da frente e as raparigas na de trás, ou ao contrário; para cada uma destas duas maneiras, existem $10!$ maneiras diferentes de os dez rapazes ocuparem os dez lugares da sua fila e, de igual modo, existem $10!$ maneiras diferentes de as dez raparigas ocuparem os dez lugares da sua fila).

Cotação a atribuir: $16^{(*)}$
(*) A composição contempla (correctamente) todos os pontos, numa redacção clara, bem estruturada e sem erros.

Exemplo 2

As ${}^{12}C_{10}$ e ${}^{13}C_{10}$ são as diferentes posições que os rapazes e as raparigas podem ocupar dentro de cada fila, está a multiplicar por 2 porque os rapazes podem estar na fila da frente ou na fila de trás o mesmo acontece com as raparigas. Em seguida, multiplicou-se por $10! \times 10!$ porque são as diferentes posições que os rapazes ocupam na mesma fila e as diferentes posições que as raparigas ocupam na outra fila. Isto descrito anteriormente são os casos favoráveis. Os casos possíveis são as ${}^{25}C_{20}$ são as diferentes combinações que eles podem apresentar está a multiplicar por $20!$ porque são as diferentes posições que eles podem ocupar.
Tendo em conta a Lei de Laplace a probabilidade de um acontecimento qualquer é o número de casos favoráveis sobre o número de casos possíveis, daí a equação $\frac{{}^{12}C_{10} \times {}^{13}C_{10} \times 2 \times 10! \times 10!}{{}^{25}C_{20} \times 20!}$

Cotação a atribuir: $8^{(*)}$
(*) A composição contempla (correctamente) quatro pontos (1.2, 2.2, 3.2 e 3.3), numa redacção confusa e com erros graves, nomeadamente o designar por equação uma expressão fraccionária.

Exemplo 3
Começando com o número de casos possíveis podemos observar que o elemento ${}^{25}C_{20}$ refere-se ao número de jovens que tiveram direito a bilhete. Este elemento é multiplicado por $20!$ pois são consideradas as permutações entre os sujeitos.
Quanto ao número de casos favoráveis, o número ${}^{12}C_{10}$ refere-se ao número de rapazes na mesma fila, o número ${}^{13}C_{10}$ refere-se ao número de raparigas na mesma fila. Os elementos 2 e $10!$ são respectivamente as permutações de filas e as permutações dentro de cada fila.
Finalmente segundo a regra de Laplace a probabilidade é igual ao número de casos favoráveis sobre o número de casos possíveis.

Cotação a atribuir: $6^{(*)}$
(*) A composição contempla (correctamente) três pontos (1.2, 3.2 e 3.3), numa redacção satisfatória.

Exemplo 4

A solução acima transcrita pode ser explicada da seguinte forma: sabendo que só existem 20 bilhetes para 25 pessoas é necessário excluir 5 pessoas mas dessas 5, duas têm que ser rapazes e três raparigas, caso contrário não satisfaz o problema. Assim escolhe-se 10 dos 12 rapazes e 10 das 13 raparigas e chegamos às ${}^{12}C_{10} \times {}^{13}C_{10}$.

Agora, tendo em conta que há duas filas com 10 lugares e a escolha da fila também é aleatória, chegamos a $2 \times 10! \times 10!$. Isto dá-nos a probabilidade de escolher a fila e depois em cada fila ocupar os 10 lugares.

Por fim, temos que ter em conta que no início eram 25 jovens e que foram escolhidos ao acaso 5 para sairem. Assim ${}^{25}C_{20} \times 20!$. O que nos dá a escolha dos 20 jovens pelos 20 bilhetes.

Cotação a atribuir: $5^{(*)}$

(*) A composição contempla (correctamente) três pontos (3.1, 3.2 e 3.3), numa redacção confusa.

PROPOSTA DE CORRECÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA (435)
1ª FASE — 2ª CHAMADA 2003

Grupo I

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	D	B	C	A	A	C	B
Versão 2	C	A	C	D	D	B	C

Grupo II
(Proposta de resolução)

1.1.
$$\frac{(\sqrt{3}-2i)^2+\left(2\operatorname{cis}\frac{\pi}{9}\right)^3}{\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}}=\frac{3-4\sqrt{3}i-4+8\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}}{-i}=\frac{-1-4\sqrt{3}i+8\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{-i}=$$
$$=\frac{-1-4\sqrt{3}i+4+4\sqrt{3}i}{i}=\frac{3}{-i}\cdot\frac{i}{i}=3i$$

1.2. As representações geométricas das raízes cúbicas de um número complexo são os vértices de um triângulo equilátero com centro na origem do referencial, pelo que os argumentos destas raízes devem diferir de $2\pi/3$ entre si. Como a diferença entre os argumentos de z_2 e z_1 é igual a π, então z_1 e z_2 não podem ser raízes cúbicas de um mesmo número complexo.

2.1. Pretende-se calcular $f(\theta)=2-5\operatorname{sen}^2\theta$.
$$1+\operatorname{tg}^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}\Leftrightarrow 1+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\theta}\Leftrightarrow\cos^2\theta=\frac{4}{5}.$$
$$\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1\Leftrightarrow\operatorname{sen}^2\theta+\frac{4}{5}=1\Leftrightarrow\operatorname{sen}^2\theta=\frac{1}{5}.$$
Logo,
$$f(\theta)=2-5\times\frac{1}{5}=1.$$

2.2. Como 0 é um maximizante, temos:
$$f(0)=1\Leftrightarrow a+b\cdot 0=1\Leftrightarrow a=1.$$
Como $\pi/2$ é um minimizante, temos:
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-3\Leftrightarrow 1+b\times\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2}=-3\Leftrightarrow 1+b=-3\Leftrightarrow b=-4.$$
Portanto, $a=1$ e $b=-4$.

3.1. A altura da parede A obtém-se calculando o valor da função h na abcissa $x=0$:
$$h(0)=15-4\ln(11)\approx 5,4.$$
A altura da parede A é de 5,4 metros aproximadamente.

3.2.

$$h'(x) = 0 - 4\frac{-2x+10}{-x^2+10x+11} = \frac{8x-40}{-x^2+10x+11}.$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{8x-40}{-x^2+10x+11} = 0 \Leftrightarrow 8x-40 = 0 \wedge -x^2+10x+11 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 11.$$

Cálculo auxiliar:

$$-x^2+10x+11 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100+44}}{-2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 11.$$

x	0	5	10
$8x-40$	$-$	0	$+$
$-x^2+10x+11$	$+$	$+$	$+$
h'	$-$	0	$+$
h	↘	min	↗

Efectivamente, a altura da rampa é mínima no ponto que dista 5 metros da parede A e, por consequência, 5 metros da parede B.

3.3.

$$h(5-x) = h(5+x) \Leftrightarrow 15-4\ln[-(5-x)^2+10(5-x)+11] = 15-4\ln[-(5+x)^2+10(5+x)+11] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4\ln(-25-10x-x^2+50+10x+11) = -4\ln(-25+10x-x^2+50-10x+11) \Leftrightarrow$$

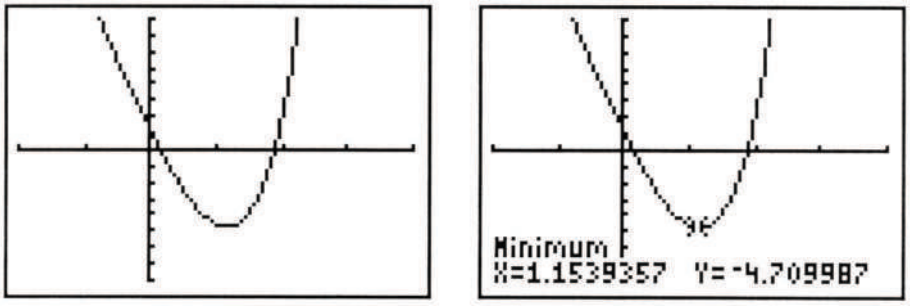
$$\Leftrightarrow -4\ln(-x^2+36) = -4\ln(-x^2+36).$$

Proposição verdadeira, para todo x.

Esta igualdade significa que os pontos da rampa que estão à mesma distância do ponto central têm a mesma altura.

4. Dado que f' é uma função com derivada finita no seu domínio, um dos processos possíveis para encontrar a abcissa do ponto de inflexão da função f consiste em determinar o valor de x onde o gráfico de f' admite um extremo.

Representando graficamente a função f',



verificamos que a derivada tem um mínimo do qual teremos que encontrar a abcissa.

Recorrendo aos comandos específicos da calculadora obtemos para esta abcissa o valor $x \approx 1,2$.

5.1. Sendo O o acontecimento "ter grupo sanguíneo O", então

$$p(\overline{O}) = 100 - p(O) = 100 - 35,4 - 6,7 = 57,9.$$

A probabilidade do grupo sanguíneo não ser do grupo O é aproximadamente de 58%.

5.2. Sejam A e Rh^- respectivamente os acontecimentos "ter grupo sanguíneo A" e "ter factor Rhésus negativo",

$$p(A|Rh^-) = \frac{p(A \cap Rh^-)}{p(Rh^-)} = \frac{6,5\%}{14,8\%} \approx 0,44.$$

A probabilidade do grupo sanguíneo ser A sabendo que o factor Rhésus é negativo é de aproximadamente 44%.

6. Segundo a Regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis desse acontecimento, desde que todos eles sejam equiprováveis e em número finito, o que se verifica na situação proposta.

Dado o número disponível de bilhetes (20) temos de escolher 20 pessoas das 25 existentes, donde resulta o número ${}^{25}C_{20}$. Seguidamente, as 20 pessoas escolhidas vão ser distribuídas pelos 20 lugares, o que pode ser feito de $P_{20} = 20!$ formas diferentes. Assim, o número de casos possíveis é dado por ${}^{25}C_{20} \times 20!$.

Pretendendo que os 10 lugares de uma das filas sejam ocupados só por rapazes, a escolha destes terá de ser feita entre os 12, pelo que temos ${}^{12}C_{10}$. De igual modo, teremos de escolher 10 das 13 raparigas para ocupar os lugares da outra fila: ${}^{13}C_{10}$.

Seleccionados os rapazes e as raparigas temos de os distribuir pelas duas filas, podendo as raparigas ficar na fila da frente ou na fila de trás, daí o factor 2. Uma vez escolhida a fila onde ficarão as raparigas, estas poderão distribuir-se pelos 10 lugares de $P_{10} = 10!$ formas diferentes—o mesmo se passando com os rapazes. Portanto, o número de casos favoráveis é dado por ${}^{12}C_{10} \times {}^{13}C_{10} \times 2 \times 10! \times 10!$.

Logo, a probabilidade p do referido acontecimento, pela Regra de Laplace, é dada por

$$p = \frac{{}^{12}C_{10} \times {}^{13}C_{10} \times 2 \times 10! \times 10!}{{}^{25}C_{20} \times 20!}.$$

FIM

PROVA 435/11 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **2.ª FASE**

2003 **VERSÃO 1**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui seis questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de onze.

Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. De uma função f, de domínio $[-4, 5]$ e **contínua** em todo o domínio, sabe-se que:

- $f(-4) = 6; \qquad f(2) = -1; \qquad f(5) = 1$
- f é estritamente decrescente no intervalo $[-4, 2]$
- f é estritamente crescente no intervalo $[2, 5]$

Quantas soluções tem a equação $f(x) = 0$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3

2. Seja g uma função, de domínio A, definida por $g(x) = \ln(1 - x^2)$

Qual dos seguintes poderá ser o conjunto A?

(A) $]-e+1, e-1[$ **(B)** $]-1, 1[$

(C) $]0, +\infty[$ **(D)** $]-\infty, 1[$

3. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, e seja g a função definida por $g(x) = f(x+1)$

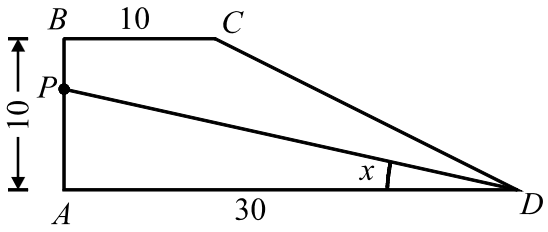
A recta de equação $y = 2x + 4$ é a única assimptota do gráfico de f.

Qual das seguintes é uma equação da única assimptota do gráfico de g?

(A) $y = 2x + 6$ **(B)** $y = 2x + 4$

(C) $y = 2x - 4$ **(D)** $y = 2x - 6$

4. Na figura está representado um trapézio rectângulo $[ABCD]$, cujas bases têm 10 e 30 unidades de comprimento e a altura tem 10 unidades de comprimento.



Considere que um ponto P se desloca sobre o lado $[AB]$.

Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo PDA.

Pretende-se determinar o valor de x para o qual o segmento $[PD]$ divide o trapézio em duas figuras com a mesma área.

Qual das equações seguintes traduz este problema?

(A) $\frac{30^2 \operatorname{sen} x}{2} = 100$ **(B)** $\frac{30^2 \operatorname{tg} x}{2} = 100$

(C) $\frac{30 \times 10 \operatorname{sen} x}{4} = 150$ **(D)** $\frac{30 \times 10 \operatorname{tg} x}{4} = 150$

5. Considere a linha do Triângulo de Pascal em que o segundo elemento é 35.

Escolhem-se, ao acaso, dois elementos dessa linha.

Qual é a probabilidade de estes dois elementos serem iguais?

(A) $\frac{19}{{}^{35}C_2}$ **(B)** $\frac{35}{{}^{36}C_2}$ **(C)** $\frac{1}{{}^{35}C_2}$ **(D)** $\frac{18}{{}^{36}C_2}$

6. A Patrícia tem uma caixa com cinco bombons de igual aspecto exterior, mas só um é que tem licor. A Patrícia tira, ao acaso, um bombom da caixa, come-o e, se não for o que tem licor, experimenta outro. Vai procedendo desta forma até encontrar e comer o bombom com licor.

Seja X a variável aleatória «número de bombons **sem licor** que a Patrícia come».

Qual é a distribuição de probabilidades da variável X ?

(A)

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

(B)

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,4

(C)

x_i	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

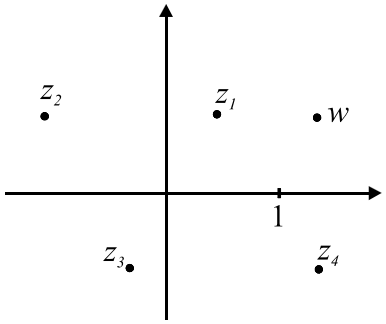
(D)

x_i	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,4

7. Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de cinco números complexos:

w, z_1, z_2, z_3 e z_4

Qual é o número complexo que pode ser igual a $1 - w$?



(A) z_1 **(B)** z_2 **(C)** z_3 **(D)** z_4

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1.
- $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos
- i designa a unidade imaginária

1.1. **Sem recorrer à calculadora**, calcule, na forma trigonométrica, as raízes quartas do número complexo $1+\sqrt{3}\,i$, simplificando o mais possível as expressões obtidas.

1.2. Seja z um número complexo cuja imagem geométrica, no plano complexo, é um ponto A situado no segundo quadrante e pertencente à recta definida pela condição $Re(z) = -2$.
Seja B a imagem geométrica de $\overline{z}$, conjugado de z.
Seja O a origem do referencial.
Represente, no plano complexo, um triângulo $[AOB]$, de acordo com as condições enunciadas.
Sabendo que a área do triângulo $[AOB]$ é 8, **determine** z, na forma algébrica.

2. Admita que, ao longo dos séculos XIX e XX e dos primeiros anos do século XXI, a população de Portugal Continental, em milhões de habitantes, é dada, aproximadamente, por

$$p(t) = 3{,}5 + \frac{6{,}8}{1+12{,}8\,e^{-0{,}036\,t}}$$

(considere que t é medido em anos e que o instante $t=0$ corresponde ao **início** do ano 1864).

2.1. De acordo com este modelo, qual será a população de Portugal Continental no **final** do presente ano (2003)?
Apresente o resultado em milhões de habitantes, arredondado às décimas.
Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2.2. **Sem recorrer à calculadora** (a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos), resolva o seguinte problema:
De acordo com este modelo, em que ano a população de Portugal Continental foi de $3{,}7$ milhões de habitantes?
Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3. Considere a função f, de **domínio** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, definida por

$$f(x) = x + \operatorname{sen} x$$

Sem recorrer à calculadora, resolva as três alíneas seguintes.

3.1. Utilizando a definição de derivada de uma função num ponto, calcule $f'(0)$.

3.2. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

3.3. Determine os valores de x, pertencentes ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, tais que $f(x) = x + \cos x$

4. De um baralho de cartas, seleccionam-se seis cartas do naipe de Espadas: Ás, Rei, Dama, Valete, Dez e Nove.
Dispõem-se as seis cartas, em fila, em cima de uma mesa.

4.1. Quantas disposições diferentes podem ser feitas, de modo que as duas cartas do meio sejam o Ás e o Rei (não necessariamente por esta ordem)?

4.2. Quantas disposições diferentes podem ser feitas, de modo que o Rei não fique ao lado da Dama?

5. Seja S o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$).
Sabe-se que:

- $P(A \cap B) = 0{,}1$
- $P(A \cup B) = 0{,}8$
- $P(A \mid B) = 0{,}25$

Prove que A e $\overline{A}$ são acontecimentos equiprováveis.

(P designa probabilidade, $\overline{A}$ designa o acontecimento contrário de A e $P(A \mid B)$ designa probabilidade de A, se B).

6. A Rita está a participar num concurso de lançamentos de papagaios de papel.

No regulamento do concurso, estão as condições de apuramento para a final, que se reproduzem a seguir.

> Após um certo instante, indicado pelo júri:
>
> • o papagaio não pode permanecer no ar mais do que um minuto;
>
> • o papagaio tem de permanecer, pelo menos durante doze segundos seguidos, a uma altura superior a dez metros;
>
> • o papagaio tem de ultrapassar os vinte metros de altura.



Admita que a distância, em metros, do papagaio da Rita ao solo, t **segundos** após o instante indicado pelo júri, é dada por

$$d(t) = 9{,}5 + 7\,\text{sen}\left(\frac{t^2}{200}\right) + 5\cos\left(\frac{t}{4}\right)$$

(os argumentos das funções seno e co-seno estão expressos em radianos).

Note-se que, a partir do instante em que o papagaio atinge o solo, a distância do papagaio ao solo deixa de ser dada por esta expressão, uma vez que passa a ser (naturalmente) igual a zero.

Deverá a Rita ser apurada para a final?

Utilize a calculadora para investigar esta questão. Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explicite as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente. **Inclua, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora**: **gráficos e coordenadas de alguns pontos** (coordenadas arredondadas às décimas).

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 11
1.2. 10

2. 26
2.1. 10
2.2. 16

3. 42
3.1. 14
3.2. 14
3.3. 14

4. 20
4.1. 10
4.2. 10

5. 12

6. 16

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Círculo: $\pi\ r^2 \qquad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\ r\ g$
$(r - raio\ da\ base;\ g - geratriz)$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\,r^2$
$(r - raio)$

Volumes

Prisma: *Área da base* × *Altura*

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3 \qquad (r - raio)$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a\,.\cos b + \operatorname{sen} b\,.\cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\,.\cos b - \operatorname{sen} a\,.\operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a\,.\operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\,cis\,\theta)\,.\,(\rho'\,cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta+\theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\,cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta-\theta')$

$(\rho\,cis\,\theta)^n\ =\ \rho^n\,cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\,cis\,\theta}\ =\ \sqrt[n]{\rho}\ cis\,\frac{\theta+2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' =\ u'.\cos u$

$(\cos u)' =\ -\,u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' =\ u'.\,e^u$

$(a^u)' =\ u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' =\ \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' =\ \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^p} =\ +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **2.ª FASE**

2003

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 11
1.2. 10

2. 26
2.1. 10
2.2. 16

3. 42
3.1. 14
3.2. 14
3.3. 14

4. 20
4.1. 10
4.2. 10

5. 12

6. 16

TOTAL **200**

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	C	B	A	B	D	A	C
Versão 2	B	C	D	A	B	C	C

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, no primeiro grupo, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas / Resp. certas	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

Grupo II

Critérios gerais

1. A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro, não negativo, de pontos.

2. Se, numa alínea em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, o examinando se limitar a apresentar o resultado final, deverão ser atribuídos zero pontos a essa alínea.

3. Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

4. Existem alíneas cuja cotação está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para as resolver.

   4.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.

   4.2. Caso a resolução da etapa esteja incompleta, ou contenha incorrecções, cabe ao classificador decidir a cotação a atribuir a essa etapa, tendo em conta o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:
   - erros de contas ocasionais devem ser penalizados em um ponto;
   - erros graves, que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades, devem ser penalizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa.

   4.3. No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.

   4.4. Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.

   4.5. Pode acontecer que o examinando, ao resolver uma questão, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

5. Existem alíneas em que estão previstos alguns erros que o examinando pode cometer. Para cada caso, é indicada a cotação a atribuir. O examinando pode, contudo, utilizar um processo não contemplado nos critérios e/ou cometer um erro não previsto. Cabe ao classificador adaptar as referências dadas a todas as situações não previstas.

6. Se, na resolução de uma alínea, o examinando utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), deve ser penalizado em um ponto, na cotação total a atribuir a essa alínea. Esta penalização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas cotadas com 0 (zero) pontos.

7. Se, na resolução de uma alínea, o examinando não respeitar uma eventual instrução, relativa ao método a utilizar (por exemplo, se o enunciado vincular o examinando a uma resolução analítica, sem calculadora, e o examinando a utilizar), a etapa da resolução em que se dá o referido desrespeito bem como todas as subsequentes que dela dependam devem ser cotadas com 0 (zero) pontos.

8. Tudo o que o examinando escrever fora de contexto e que não resulte de trabalho anterior (por exemplo, num exercício de probabilidades, a escrita de uma fracção que não tenha nada a ver com o problema, ou, num exercício de estudo da monotonia de uma função, a apresentação de um quadro fora do contexto) deve ser cotado com 0 (zero) pontos. Todas as etapas subsequentes que dependam do que o examinando escreveu fora de contexto devem ser igualmente cotadas com 0 (zero) pontos.

Critérios específicos

Para cada item são apresentados:

- a cotação total do item;
- para cada processo de resolução apresentado, uma subdivisão da cotação total em cotações parcelares;
- exemplos de possíveis respostas dos examinandos, com a respectiva cotação a atribuir, devidamente explicada.

1.1. 11

$1+\sqrt{3}\,i = 2\ cis\ \frac{\pi}{3}$ **(ver nota 1)**..... 3 (1+2)

$\sqrt{2\ cis\ \frac{\pi}{3}} = \sqrt[4]{2}\ cis\ \frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4}$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ **(ver nota 2)**.....3 (1+1+1)

Escrever as quatro raízes $\left(\sqrt[4]{2}\ cis\ \frac{\pi}{12}\right.$, $\sqrt[4]{2}\ cis\ \frac{7\pi}{12}$,

$\sqrt[4]{2}\ cis\ \frac{13\pi}{12}$ e $\left.\sqrt[4]{2}\ cis\ \frac{19\pi}{12}\right)$ **(ver nota 3)**..... 5 (1 + 4 × 1)

Notas:

1. A subdivisão da cotação desta etapa, indicada entre parêntesis, corresponde a: 1 ponto pela escrita do módulo; 2 pontos pela escrita do argumento. Não se exige a apresentação de cálculos intermédios.

2. A subdivisão da cotação desta etapa, indicada entre parêntesis, corresponde a: 1 ponto pela escrita de $\sqrt[4]{2}$; 1 ponto pela escrita de $cis\ \frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4}$; 1 ponto pela escrita de $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ (o examinando também poderá escrever $k \in \mathbb{Z}$, desde que, depois, use os valores adequados de k).

3. A subdivisão da cotação desta etapa, indicada entre parêntesis, corresponde a: 1 ponto pela escrita correcta do módulo comum a todas as raízes e 1 ponto por cada um dos quatro argumentos (que deverão ser apresentados na forma mais simplificada possível).

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$w = 1 + \sqrt{3}\,i \qquad |w| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$

$tg\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \qquad \theta = \frac{\pi}{3} \qquad w = 2\ cis\ \frac{\pi}{3}$

$\sqrt[4]{2}\ cis\ \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$k = 0, \quad w_0 = 2\,cis\ \frac{\frac{\pi}{3}}{4} = 2\,cis\ \frac{\pi}{12}$

$k = 1, \quad w_1 = 2\,cis\ \frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{4} = 2\,cis\ \frac{7\pi}{12}$

$k = 2, \quad w_2 = 2\,cis\ \frac{\frac{\pi}{3} + 4\pi}{4} = 2\,cis\ \frac{13\pi}{12}$

$k = 3, \quad w_3 = 2\,cis\ \frac{\frac{\pi}{3} + 6\pi}{4} = 2\,cis\ \frac{15\pi}{12}$

Cotação a atribuir: $3(1 + 2) + 3(1 + 1 + 1) + 3(0 + 1 + 1 + 1 + 0) = 9$

Exemplo 2

$1 + \sqrt{3}\,i = 2\ cis\ \frac{\pi}{3} \qquad \sqrt[4]{2}\ cis\ \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{4}$

$k = 0, \quad \sqrt[4]{2}\,cis\ \frac{\pi}{12}$

$k = 1, \quad \sqrt[4]{2}\ cis\ \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}$

$k = 2, \quad \sqrt[4]{2}\ cis\ \frac{\pi}{12} + \pi$

$k = 3, \quad \sqrt[4]{2}\ cis\ \frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{2}$

Cotação a atribuir: $3(1 + 2) + 3(1 + 1 + 1^{(*)}) + 2(1 + 1 + 0 + 0 + 0) + (-1)^{(**)} = 7$

(*) Apesar de não ter escrito $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, considera-se que tal está implícito na etapa seguinte.

(**) Erro formal de escrita: falta de parêntesis nos argumentos.

Exemplo 3

$$m = \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$$

$$\sqrt[4]{\sqrt{3}\, cis\, \frac{\pi}{3}} =$$

$$= \sqrt[4]{\sqrt{3}}\, cis\, \frac{\frac{\pi}{3} + 2\,k\,\pi}{4} =$$

$$= \sqrt[4]{\sqrt{3}}\, cis\, \frac{\pi}{12} + \frac{k\,\pi}{2}$$

Cotação a atribuir: $2(0+2) + 2(1+1+0) + 0(0+0+0+0+0) + (-1)^{(*)} = 3$

(*) Erros formais de escrita: $m = \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$ e falta de parêntesis em $\sqrt[4]{\sqrt{3}}\, cis\, \frac{\pi}{12} + \frac{k\,\pi}{2}$

1.2. 10

Representar o ponto A 2

Representar o ponto B 3

Desenhar o triângulo $[AOB]$ 1

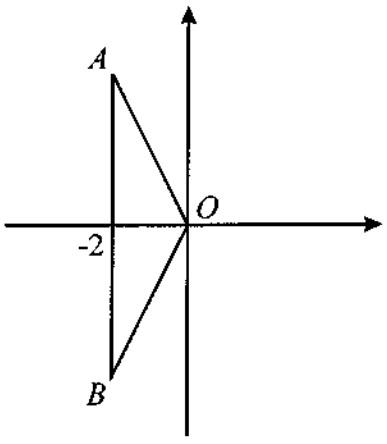
Concluir que o coeficiente da parte imaginária de z é 4 3

Escrever z na forma algébrica 1

Nota:
Se o examinando não respeitar a indicação, expressa no enunciado, de que deve representar o triângulo $[AOB]$, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos à sua resposta.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

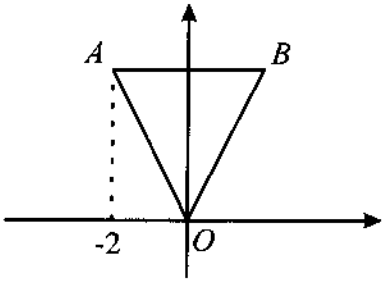


$A = \frac{b \times h}{2} = 8 \qquad \frac{\overline{AB} \times 2}{2} = 8 \Leftrightarrow \overline{AB} = 8 \qquad \frac{\overline{AB}}{2} = 4$

$z = (-2, 4i)$

Cotação a atribuir: $2 + 3 + 1 + 3 + 0 = 9$

Exemplo 2



$Re(x+y\,i) = -2$

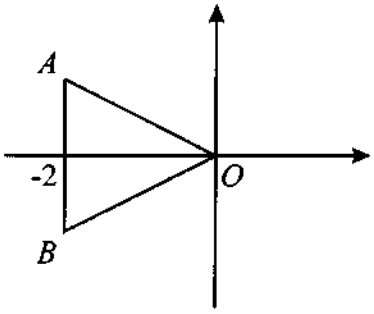
$x = -2$

$A = \frac{b \times h}{2} = 8 \qquad \frac{4 \times h}{2} = 8 \Leftrightarrow 2h = 8 \Leftrightarrow h = 4$

$z = -2 + 4\,i$

Cotação a atribuir: $2 + 0 + 1 + 3 + 1 = 7$

Exemplo 3



$A = \frac{b \times h}{2} = 8 \qquad \frac{4 \times h}{2} = 8 \Leftrightarrow 4h = 4 \Leftrightarrow h = 1$

$z = -2 + i$

Cotação a atribuir: $2 + 3 + 1 + 0 + 1 = 7$

2.1. ..... **10**

Contagem do número de anos decorridos desde o início de 1864 até ao final de 2003 (140 anos) **(ver nota 1)** 3

$p(140) \approx 9{,}8$ (milhões de habitantes) **(ver notas 2, 3, 4 e 5)** .....7 (4+3)

Notas:

1. Se o examinando indicar 139, em vez de 140, deve ser cotado com 1 dos 3 pontos previstos para esta etapa.

2. A subdivisão da cotação desta etapa, indicada entre parêntesis, corresponde a: 4 pontos pela escrita de $p(140)$; 3 pontos pelo cálculo do respectivo valor.

3. Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às décimas, ou não arredondar correctamente, deverá ser penalizado em 1 ponto.

4. Se o examinando não respeitar a indicação, expressa no enunciado, de conservação de um mínimo de três casas decimais, nos cálculos intermédios, deverá ser penalizado em 1 ponto. Note-se, no entanto, que não se exige a apresentação de cálculos intermédios.

5. Se o examinando efectuar a contagem do número de anos entre as duas datas do enunciado e calcular a imagem, por meio de p, desse número, mas existir evidência de que não reconhece que o valor pedido é essa imagem, deve ser penalizado em 6 pontos, nesta etapa. Se, por aplicação desta norma, a cotação final da etapa for negativa, esta cotação deve ser convertida em 0 (zero) pontos.

6. Se o examinando não efectuar a contagem do número de anos entre as duas datas do enunciado e calcular $p(2003)$, deve ser atribuída a cotação máxima de 1 ponto à totalidade da sua resposta.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$2003 - 1864 = 139$

$p(139) \approx 9{,}8$

Cotação a atribuir: $1^{(*)} + 7(4+3) = 8$

(*) Ver a nota 1, acima.

Exemplo 2

$t = 139 \rightarrow 2003 \rightarrow 6{,}3$

Cotação a atribuir: $1^{(*)} + 6(4 + 2^{(**)}) = 7$

(*) Ver a nota 1, acima.

(**) Erro ocasional de contas: o examinando não adicionou $3{,}5$ ao quociente obtido.

Exemplo 3

$2003 - 1864 = 139$

$$p(139) = 3{,}5 + \frac{6{,}8}{1 + 12{,}8\ e^{-0{,}036 \times 139}} \approx 9{,}762$$

$$p(0) = 3{,}5 + \frac{6{,}8}{1 + 12{,}8\ e^{-0{,}036 \times 0}} \approx 3{,}993$$

$9{,}762 + 3{,}993 \approx 13{,}8$

Logo, no ano 1864, em Portugal, havia $3{,}993$ milhões de habitantes e como até ao ano 2003, a população aumentou $9{,}762$ milhões de habitantes, então no fim do ano 2003, existirão $13{,}8$ milhões de habitantes.

Cotação a atribuir: $1 + 1(4 + 3 - 6^{(*)}) = 2$

(*) Ver a nota 5, atrás.

Exemplo 4

$$p(2003) = 3{,}5 + \frac{6{,}8}{1 + 12{,}8\ e^{-0{,}036 \times 2003}} \approx 10{,}3$$

Cotação a atribuir: $1^{(*)}$

(*) Ver a nota 6, atrás.

2.2. ..... **16**

Equacionar o problema: $p(t) = 3{,}7$ 3

Resolver a equação 10

$$3{,}5 + \frac{6{,}8}{1 + 12{,}8\, e^{-0{,}036\, t}} = 3{,}7 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \frac{33}{12{,}8} = e^{-0{,}036\, t}$ (ou equivalente) 5

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{33}{12{,}8}\right) = -0{,}036\ t$ (ou equivalente) 3

$t \approx -26{,}307$ 2

Conclusão (Ano 1837) **(ver nota)** 3

Nota
Se a resposta ao problema for 1838 (erro derivado de um arredondamento indevido), deverá ser atribuído 1 dos 3 pontos previstos para a conclusão.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$3{,}5 + \frac{6{,}8}{1 + 12{,}8\, e^{-0{,}036\, t}} = 3{,}7 \Leftrightarrow \frac{6{,}8}{1 + 12{,}8\, e^{-0{,}036\, t}} = 0{,}2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6{,}8 = 0{,}2(1 + 12{,}8\, e^{-0{,}036\, t}) \Leftrightarrow 6{,}8 = 0{,}2 + 2{,}56\, e^{-0{,}036\, t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6{,}6 = 2{,}56\, e^{-0{,}036\, t} \Leftrightarrow 2{,}578 = e^{-0{,}036\, t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2{,}578 = \frac{1}{e^{0{,}036\, t}} \Leftrightarrow e^{0{,}036\, t} = \frac{1}{2{,}578} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \ln 0{,}388 = 0{,}036\ t \qquad t \approx 10{,}8$ anos

Cotação a atribuir: $3 + 8(5 + 3 + 0^{(*)}) + 0 = 11$

(*) O examinando comete um erro, na última passagem, e não respeita a indicação de conservação de um mínimo de três casas decimais (o valor de t é um valor intermédio).

Exemplo 2

$$3{,}5 + \frac{6{,}8}{1+12{,}8\ e^{-0{,}036\,t}} = 3{,}7 \Leftrightarrow 3{,}5 + 6{,}8 = 3{,}7(1 + 12{,}8\ e^{-0{,}036\,t}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10{,}3 = 3{,}6 + 47{,}36\ e^{-0{,}036\,t} \Leftrightarrow 10{,}3 - 3{,}6 = 47{,}36\ e^{-0{,}036\,t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{6{,}7}{47{,}36} = e^{-0{,}036\,t} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{6{,}7}{47{,}36}\right) = -0{,}036\ t$$

$t \approx 54{,}324 \qquad 1864 + 54 = 1918$

Cotação a atribuir: $3 + 9(2^{(*)} + 3 + 2) + 1^{(**)} = 13$

(*) O examinando comete um erro grave, pelo que deve ser penalizado em 3 dos 5 pontos previstos para esta etapa - ver critério geral 4.2.

(**) Conclusão correcta, face ao valor obtido para t. No entanto, o grau de dificuldade diminuiu bastante.

Exemplo 3

$$3{,}5 + \frac{6{,}8}{1+12{,}8\ e^{-0{,}036\,t}} = 3{,}7 \Leftrightarrow \frac{6{,}8}{1+12{,}8\ e^{-0{,}036\,t}} = 0{,}2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6{,}8 = 0{,}2(1 + 12{,}8\ e^{-0{,}036\,t}) \Leftrightarrow 6{,}8 = 0{,}2 + 2{,}56\ e^{-0{,}036\,t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6{,}6 = 2{,}56\ e^{-0{,}036\,t} \Leftrightarrow 2{,}578 = e^{-0{,}036\,t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln 2{,}578 = e^{-0{,}036\,t} \Leftrightarrow 2{,}578 = -0{,}036\,t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{2{,}578}{0{,}036} \Leftrightarrow t = 71{,}611$$

Ano: $1864 + 72 = 1936$

Cotação a atribuir: $3 + 5(5 + 0 + 0^{(*)}) + 1^{(**)} = 9$

(*) O examinando comete um erro muito grave (de sinal).

(**) Conclusão errada, que se deve a um arredondamento indevido (ver a nota atrás).

3.1. ..... **14**

$f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ 2

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x+\operatorname{sen} x}{x}$ 3

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x+\operatorname{sen} x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x}{x} + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$ 4

$\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x}{x}\right) = 1$ 2

$\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 1$ 2

$f'(0) = 2$ 1

Notas:

1. Se o examinando desrespeitar o pedido e calcular $f'(0)$ utilizando apenas as regras de derivação, a cotação a atribuir à sua resposta deverá ser de 0 (zero) pontos.

2. Se, no cálculo de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x+\operatorname{sen} x}{x}$, o examinando não explicitar a forma como levanta a indeterminação, as quatro últimas etapas devem ser cotadas com 0 (zero) pontos. Portanto, a cotação máxima a atribuir a uma tal resposta é de 5 pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{x+\operatorname{sen} x-0-\operatorname{sen} 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x+\operatorname{sen} x}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{1} + \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0 + 1 = 1$$

Cotação a atribuir: $2 + 3 + 0 + 1^{(*)} + 2 + 1 = 9$

(*) Diminuiu o grau de dificuldade (ver critério geral 4.4).

Exemplo 2

$f'(x) = 1 + cos\, x \qquad f'(0) = 1 + 1 = 2$

Cotação a atribuir: $0^{(*)}$
(*) Ver a nota 1, atrás.

Exemplo 3

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} + \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0 + 1 = 1$$

Cotação a atribuir: $2 + 3 + 4 + 0 + 2 + 1 = 12$

Exemplo 4

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} = 2$$

Cotação a atribuir: $2 + 3 + 0^{(*)} + 0^{(*)} + 0^{(*)} + 0^{(*)} = 5$
(*) Ver a nota 2, atrás.

Exemplo 5

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{x} + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) = 2$$

Cotação a atribuir: $2 + 3 + 4 + 2 + 2 + 1 = 14$

3.2. ..... **14**

Determinar a primeira derivada de f 2

Determinar a segunda derivada de f **(ver nota 1)** 2

Determinar os zeros da segunda derivada de f **(ver nota 2)** .....4 (1+1+2)

Indicar a variação do sinal da segunda derivada de f **(ver notas 3 e 4)**.....4

Indicar os sentidos das concavidades do gráfico de f **(ver nota 3)**..... 1

Evidenciar a existência de pontos de inflexão **(ver nota 3)** 1

Notas:

1. Se existir evidência de que o examinando pretende determinar a segunda derivada de f, a cotação mínima a atribuir às duas primeiras etapas é de 2(1+1) pontos. Se o examinando tiver calculado correctamente a primeira derivada e existir evidência de que pretende determinar a segunda derivada, a cotação mínima a atribuir às duas primeiras etapas é de 3(2+1) pontos.

2. A subdivisão dos 4 pontos em 1+1+2 corresponde a:

Evidenciar a intenção de determinar os zeros da segunda derivada de f 1

Evidenciar o conhecimento da expressão geradora dos zeros da segunda derivada de f (não é, contudo, necessário explicitar essa expressão) 1

Indicar os zeros da segunda derivada de f 2

3. O examinando pode indicar a variação do sinal da segunda derivada e os sentidos das concavidades do gráfico, bem como evidenciar a existência de pontos de inflexão, através de um quadro.

4. Se o quadro apresentado pelo examinando não estiver de acordo com o domínio da função, referido no enunciado como sendo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, deverão ser atribuídos 0 (zero) pontos a esta etapa.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$f'(x) = 1 + cos\, x \qquad f''(x) = sen\, x$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pi$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		π		$\frac{3\pi}{2}$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		∩	p.i.	∪	p.i.	∩	

Cotação a atribuir: $2 + 1 + 4(1 + 1 + 2)^{(*)} + 4^{(*)} + 1^{(*)} + 1^{(*)} = 13$

(*) Ver critério geral 4.3.

Exemplo 2

$f'(x) = 1 + cos\, x \qquad f''(x) = -sen\, x$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		∪	p.i.	∩	

Cotação a atribuir: $2 + 2 + 1(1 + 0 + 0) + 0 + 1^{(*)} + 1^{(*)} = 7$

(*) Ver critério geral 4.3.

Exemplo 3

$f'(x) = 1 + cos\, x \qquad f''(x) = -sen\, x$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

x	$-\infty$		0		π		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		∪	p.i.	∩	p.i.	∪	

Cotação a atribuir: $2 + 2 + 4(1 + 1 + 2) + 0^{(*)} + 1^{(**)} + 1^{(**)} = 10$

(*) Ver a nota 4, atrás.

(**) Ver critério geral 4.3.

3.3. ..... **14**

$f(x) = x + \cos x \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \cos x$ 1

Resolução da equação $\operatorname{sen} x = \cos x$
em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ **(ver nota)**..... 13

Nota:
A resolução da equação $\operatorname{sen} x = \cos x$ em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ pode ser feita por, pelo menos, três processos:

1.º Processo (apresentação imediata das soluções):

Apresentação da solução $\frac{\pi}{4}$ 4

Apresentação da solução $\frac{5\pi}{4}$ 9

Por cada valor apresentado que não seja solução da equação, descontar 5 pontos. Se, por aplicação desta norma, a pontuação final da etapa (resolução da equação $\operatorname{sen} x = \cos x$) for negativa, deve ser atribuída a cotação final de 0 (zero) pontos à etapa.

2.º Processo:

$\operatorname{sen} x = \cos x \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ 2

$x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 2

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 2

$x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{5\pi}{4}$ ..... 7 (2+5)

Por cada valor apresentado que não seja solução da equação, descontar 3 pontos aos pontos obtidos neste último passo $\left(x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{5\pi}{4}\right)$. Se, por aplicação desta norma, a pontuação final deste último passo for negativa, deve ser atribuída a cotação final de 0 (zero) pontos a este último passo.

3.º Processo:

$\operatorname{sen} x = \cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1$ 3

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ 3

$x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{5\pi}{4}$ ..... 7 (2+5)

Por cada valor apresentado que não seja solução da equação, descontar 3 pontos aos pontos obtidos neste último passo $\left(x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{5\pi}{4}\right)$. Se, por aplicação desta norma, a pontuação final deste último passo for negativa, deve ser atribuída a cotação final de 0 (zero) pontos a este último passo.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$f(x) = x + \cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + \operatorname{sen} x = x + \cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{5\pi}{4}$

Cotação a atribuir: $1 + 13\,(4 + 9) = 14$

Exemplo 2

$f(x) = x + \cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + \operatorname{sen} x = x + \cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \vee x = -\frac{\pi}{4}$

Cotação a atribuir: $1 + 0^{(*)} = 1$

(*) 4 pontos $\left(\text{pela apresentação da solução } \frac{\pi}{4}\right)$

-5 pontos $\left(\text{pela apresentação do valor } -\frac{\pi}{4}\right)$

Total: -1 ponto (que deve ser convertido em 0 pontos).

Exemplo 3

$f(x) = x + \cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + \operatorname{sen} x = x + \cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \cos x \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \underbrace{x = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi}_{\text{Equação impossível}}\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$k = -1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$

$k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$k = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

$C.S. = \left\{-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

Cotação a atribuir: $1 + 10(2 + 2 + 2 + 4^{(*)}) = 11$
(*) $2 + 5 - 3 = 4$

4.1. ..... **10**

Expressão que dá o número pedido **(ver notas 1 e 2)**..... 9

Número pedido **(ver nota 3)** 1

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão que dá o número pedido, com a respectiva cotação a atribuir. Naturalmente, expressões equivalentes às indicadas deverão receber a mesma cotação.

   $2 \times 4!$ (expressão correcta) 9

   $4!$ 5

   $2!$ 2

   $2 \times 2 \times 4!$ 2

   $2 \times 4! \times 4!$ 2

   ${}^6C_2 \times 2 \times 4!$ 1

   ${}^6C_2 \times 4!$ 1

2. Se a expressão escrita pelo examinando não for uma das indicadas acima, nem equivalente, cabe ao classificador decidir a classificação a atribuir, tomando como referência a lista apresentada. No sentido de a complementar, indicam-se a seguir algumas expressões que devem ser cotadas com 0 (zero) pontos:

   $4! \times 4!$ $\qquad$ ${}^6A_2 \times 2! \times 4!$ $\qquad$ ${}^6C_2 \times {}^6A_4$

3. O ponto relativo a esta etapa só deve ser atribuído se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$(4 \times 3 \times 1 \times 1 \times 2 \times 1) \times 2 = 48$

Cotação a atribuir: $9^{(*)} + 1 = 10$

(*) Expressão equivalente à correcta

Exemplo 2

$4 \times 3 \times 1 \times 1 \times 2 \times 1 = 24$

Cotação a atribuir: $5^{(*)} + 1 = 6$

(*) Expressão equivalente a $4!$

Exemplo 3

_ _ A R _ _ _ _ R A _ _

$2! = 2$

Cotação a atribuir: $2 + 1 = 3$

Exemplo 4

$2! \times 2 + 8 \times 4! = 196$

Cotação a atribuir: $0 + 0^{(*)} = 0$

(*) Ver nota 3, atrás.

Exemplo 5

${}^4A_2 \times {}^2A_2 \times 4! = 576$

Cotação a atribuir: $0 + 0^{(*)} = 0$

(*) Ver nota 3, atrás.

4.2. ..... **10**

Expressão que dá o número pedido **(ver notas 1 e 2)** 9

Número pedido **(ver nota 3)** 1

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão que dá o número pedido, com a respectiva cotação a atribuir. Naturalmente, expressões equivalentes às indicadas deverão receber a mesma cotação.

$6! - 5 \times 2 \times 4!$ (*) 9

$5 \times 2 \times 4!$ 7

$6! - 5 \times 4!$ 7

$6! - 5 \times 2$ 6

$6! - 2 \times 4!$ 5

$10 \times 2 \times 4!$ (**) 9

$10 \times 4!$ 7

10×2 5

$2 \times 4 \times 4! + 4 \times 3 \times 4!$ (***) 9

$2 \times 4 + 4 \times 3$ 5

(*) $5 \times 2 \times 4!$ é o número de maneiras de colocar as seis cartas, com o Rei ao lado da Dama. Portanto, $6! - 5 \times 2 \times 4!$ é o número de maneiras de colocar as seis cartas, de tal modo que o Rei não esteja ao lado da Dama.

(**) $10 \times 2 \times 4!$ é o número de maneiras de colocar as seis cartas, de tal modo que o Rei não esteja ao lado da Dama (10 é o número de posições possíveis para estas duas cartas).

(***) $2 \times 4 \times 4! + 4 \times 3 \times 4!$ é também o número de maneiras de colocar as seis cartas, de tal modo que o Rei não esteja ao lado da Dama (a primeira parcela é o número de maneiras de colocar as cartas, com o Rei numa das duas extremidades da fila, e a segunda parcela é o número de maneiras de colocar as cartas, com o Rei numa das quatro posições do meio da fila).

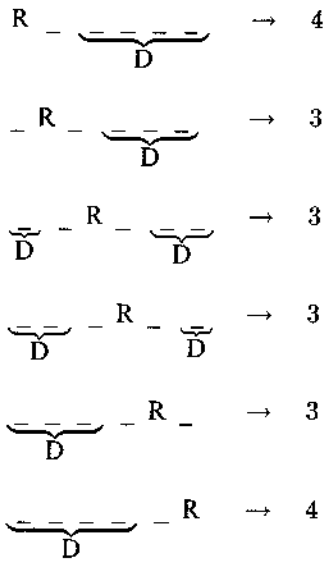
2. Se a expressão escrita pelo examinando não for uma das indicadas atrás, nem equivalente, cabe ao classificador decidir a classificação a atribuir, tomando como referência a lista apresentada. No sentido de a complementar, indicam-se a seguir algumas expressões que devem ser cotadas com 0 (zero) pontos:

$4! + 2 \times 4!$ $\qquad$ ${}^{6}A_{2} \times 4!$ $\qquad$ $6 \times 5 \times 3 \times 3 \times 2 \times 1$

3. O ponto relativo a esta etapa só deve ser atribuído se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1



$4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 4 = 20$

Cotação a atribuir: $5^{(*)} + 1 = 6$

(*) Expressão equivalente a $2 \times 4 + 4 \times 3$

Exemplo 2



$4 \times 2 + 4 \times 2 = 16$

Cotação a atribuir: $0 + 0^{(*)} = 0$

(*) Ver nota 3, acima.

5. ..... **12**

Substituir, na fórmula $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$,
os valores de $P(A \mid B)$ e de $P(A \cap B)$ **(ver nota 1)** 1

Determinar $P(B)$, resolvendo a equação anterior **(ver nota 1)**..... 3

Substituir, na fórmula $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
os valores de $P(A \cup B)$, de $P(B)$ e de $P(A \cap B)$ **(ver nota 2)** 1

Determinar $P(A)$, resolvendo a equação anterior **(ver nota 2)**..... 3

Determinar o valor de $P(\overline{A})$ **(ver nota 3)**..... 2

Conclusão **(ver nota 4)**..... 2

Notas

1. Se o examinando utilizar uma fórmula incorrecta, para determinar $P(B)$, deverá ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos a estas duas etapas.

2. Se o examinando utilizar uma fórmula incorrecta, para determinar $P(A)$, deverá ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos a estas duas etapas.

3. Não se exige que o examinando explicite esta etapa, isto é, o examinando pode escrever de imediato a conclusão, a partir do valor de $P(A)$.

4. Os 2 pontos da conclusão só devem ser atribuídos no caso em que o examinando conclui, efectivamente, que A e $\overline{A}$ são acontecimentos equiprováveis.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1
Porque a probabilidade de acontecer A é a mesma coisa da probabilidade de não acontecer A, logo se designar pelo acontecimento contrário onde o $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
Cotação a atribuir: 0

Exemplo 2

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \wedge \quad P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$0{,}8 = P(A) + P(B) - 0{,}1 \quad \wedge \quad 0{,}25 = \frac{0{,}1}{P(B)}$

$P(A) = 0{,}5 \quad \wedge \quad P(B) = 0{,}4$

$P(A) = 0{,}5 = P(\overline{A})$

Cotação a atribuir: $1 + 3 + 1 + 3 + 2 + 2 = 12$

Exemplo 3

$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(B) = P(A \mid B) \times P(A \cap B)$

$P(B) = 0{,}025$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$0{,}8 = P(A) + 0{,}025 - 0{,}1$

$P(A) = 0{,}875$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}125$

Cotação a atribuir: $1^{(*)} + 0 + 1 + 3^{(**)} + 2^{(**)} + 0 = 7$

(*) O valor obtido para $P(B)$ evidencia que o examinando substitui correctamente os valores de $P(A \mid B)$ e de $P(A \cap B)$.

(**) Etapas correctamente cumpridas, tendo em conta o valor obtido para $P(B)$ - ver critério geral 4.3

Exemplo 4

$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad 0{,}25 = \frac{0{,}1}{P(B)} \qquad P(B) = 0{,}4$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad 0{,}8 = P(A) + 0{,}4$

$P(A) = 0{,}4$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}6$

Logo, A e $\overline{A}$ não são equiprováveis.

Cotação a atribuir: $1 + 3 + 0^{(*)} + 0^{(*)} + 2^{(**)} + 0^{(***)} = 6$

(*) Ver a nota 2, atrás.

(**) Etapa correctamente cumprida, tendo em conta o valor obtido para $P(A)$ - ver critério geral 4.3.

(***) Ver a nota 4, atrás.

Exemplo 5

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \wedge \quad P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$0{,}8 = P(A) + P(B) - 0{,}1 \quad \wedge \quad 0{,}25 = \frac{0{,}1}{P(B)}$

$0{,}9 - P(A) = P(B) \quad \wedge \quad 0{,}25 = \frac{0{,}1}{0{,}9 - P(A)}$

$0{,}225 - 0{,}25\,P(A) = 0{,}1$

$0{,}15 - 0{,}25\,P(A) = 0$

$P(A) = 0{,}6 \qquad P(\overline{A}) = 0{,}4$

Cotação a atribuir: $1 + 2^{(*)} + 1 + 3 + 2^{(**)} + 0^{(***)} = 9$

(*) O examinando comete um erro ocasional de contas, ao resolver a equação $0{,}25 = \frac{0{,}1}{0{,}9 - P(A)}$

(**) Etapa correctamente cumprida, tendo em conta o valor obtido para $P(A)$ - ver critério geral 4.3.

(***) Ver a nota 4, atrás.

6. ..... **16**

Apresentação da informação recolhida na utilização da calculadora **(ver notas 1 e 3)** 8

Composição **(ver notas 2 e 3)** 8

Notas:

1. Indica-se a seguir como deve ser cotada a apresentação da informação recolhida na utilização da calculadora:

   Reproduzir correctamente o gráfico da função 2

   Evidenciar que o zero da função é inferior a 60, indicando o seu valor ou assinalando, no eixo Ox, o ponto de abcissa 60 (ligeiramente à direita do ponto correspondente ao zero da função) 2

   Reproduzir a recta de equação $y = 10$ e indicar as abcissas dos pontos de intersecção dos dois gráficos, que permitem responder afirmativamente à segunda condição do concurso 2

   Reproduzir a recta de equação $y = 20$ ou assinalar o máximo absoluto da função 2

2. Na tabela seguinte, indica-se como deve ser cotada a composição.

Forma / **Conteúdo**	Nível 1 (∗)	Nível 2 (∗∗)	Nível 3 (∗∗∗)
Analisa correctamente as três condições de apuramento.	8	7	6
Analisa correctamente duas das condições de apuramento.	5	4	3
Analisa correctamente uma das condições de apuramento.	3	2	1

(∗) **Nível 1** - Redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).

(∗∗) **Nível 2** - Redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecte a inteligibilidade.

(∗∗∗) **Nível 3** - Redacção confusa, sem estruturação aparente, presença de erros graves, com perturbação frequente da inteligibilidade.

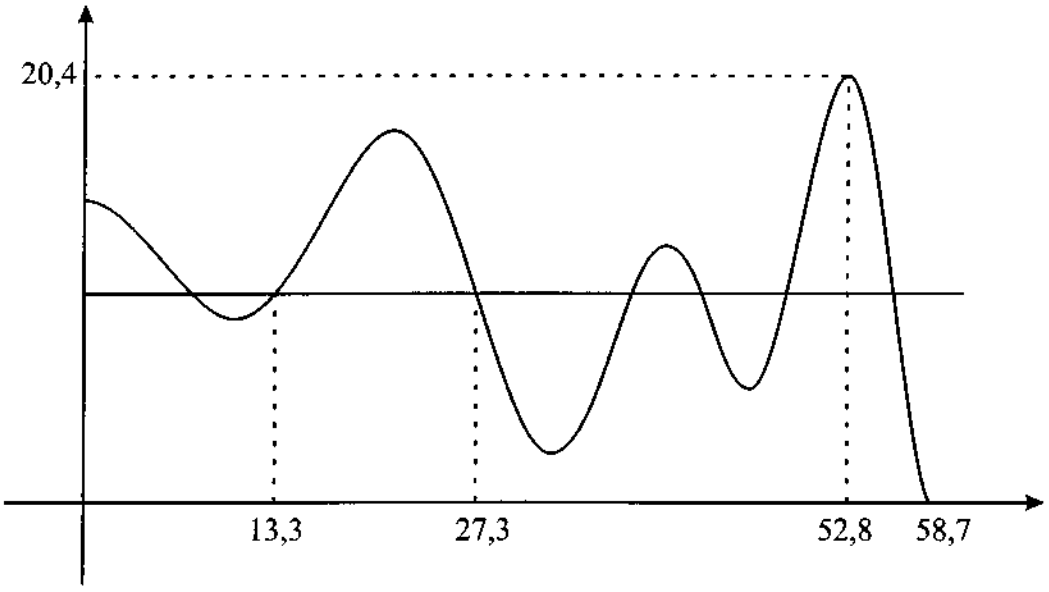
3. Pode acontecer que o examinando se engane a introduzir a expressão da função na calculadora, ou que esta tenha sido colocada em *modo grau*, obtendo, assim, um gráfico muito diferente do correcto. Nestas circunstâncias, a primeira etapa (apresentação da informação recolhida na utilização da calculadora) deve ser cotada com 0 (zero) pontos. Relativamente à composição, cabe ao classificador adaptar as indicações dadas na tabela anterior, tendo em conta os seguintes parâmetros:
   - plausibilidade do gráfico obtido, face à situação em estudo;
   - correcção matemática das afirmações produzidas, face ao gráfico obtido;
   - grau de dificuldade da análise.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

Na figura estão representados o gráfico da função d e a recta de equação $y = 10$.

Assinalam-se as abcissas de dois dos pontos de intersecção das duas linhas, bem como o zero da função d e as coordenadas do ponto correspondente ao máximo.

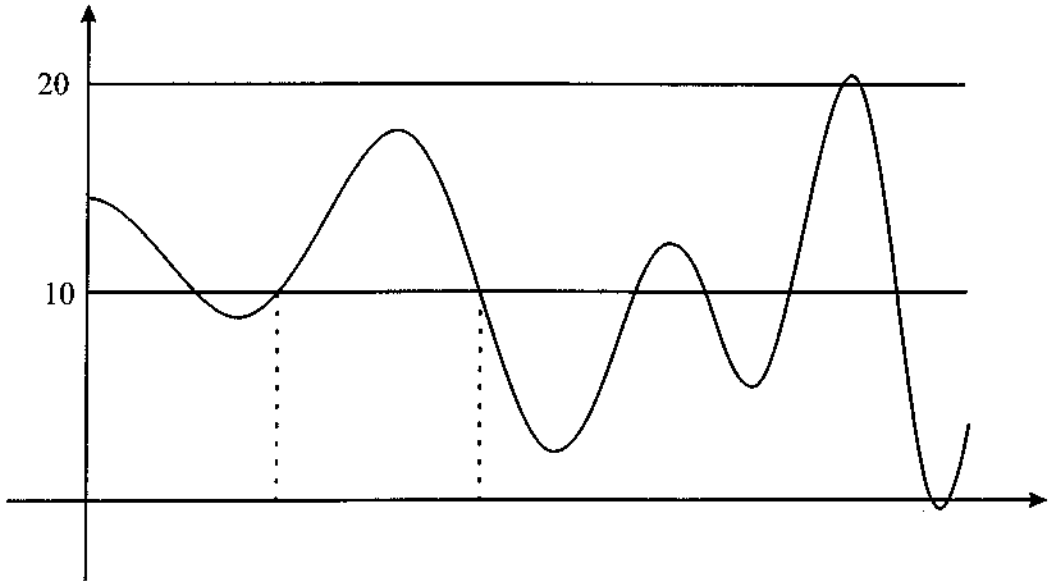


Da análise do gráfico, podemos concluir que a Rita deve ser apurada para a final, pois o seu papagaio permaneceu no ar durante 58,7 segundos, após o instante indicado pelo júri. A primeira condição está, portanto, satisfeita. Entre os instantes 13,3 e 27,3, o papagaio esteve acima dos 10 metros, pelo que esteve cerca de 14 segundos seguidos acima desta altura. Assim, a segunda condição está também satisfeita. Como o máximo da função é 20,4, o papagaio ultrapassou os vinte metros de altura. As três condições de apuramento estão todas satisfeitas.

Cotação a atribuir: $8(2+2+2+2)+8^{(*)}=16$

(*) O examinando analisa correctamente as três condições de apuramento, numa redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).

Exemplo 2



A condição de permanecer pelo menos 12 segundos acima dos dez metros foi superada logo aos 13,3 s até aos 27,3 s, pois como se vê permaneceu acima dos 10 metros 14 segundos. A condição de ultrapassar os 20 metros foi satisfeita, como está evidenciado no gráfico. Portanto, a Rita deve ser apurada para a final.

Cotação a atribuir: $5(1^{(*)} + 0 + 2^{(**)} + 2) + 4^{(***)} = 9$

(*) O gráfico tem pontos de ordenada negativa e de ordenada positiva, à direita do ponto correspondente ao zero da função (a partir deste ponto, a função é nula).

(**) Apesar de, no gráfico, não serem indicadas as abcissas dos pontos de intersecção do gráfico da função com a recta de equação $y = 10$, o examinando refere esses valores no texto.

(***) O examinando analisa correctamente duas das condições de apuramento, numa redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecta a inteligibilidade.

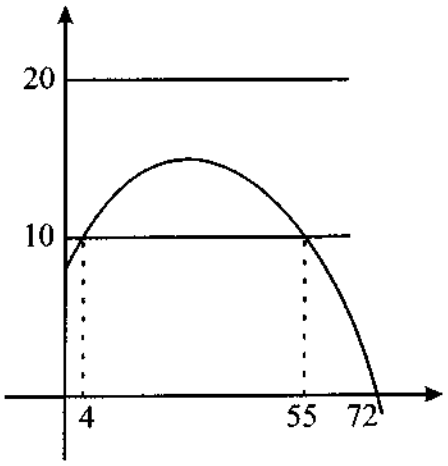
Exemplo 3

A Rita deve ser apurada, pois o papagaio da Rita manteve-se acima dos 10 metros no intervalo aproximado [13, 27] e o papagaio ultrapassou os 20 metros aproximadamente no instante t = 53, tendo em seguida caído antes de ter passado 1 minuto.

Cotação a atribuir: $0 + 7^{(*)} = 7$

(*) O examinando analisa correctamente as três condições de apuramento, numa redacção satisfatória e razoavelmente estruturada, existindo evidência, pelos valores apresentados, de que a calculadora foi utilizada.

Exemplo 4



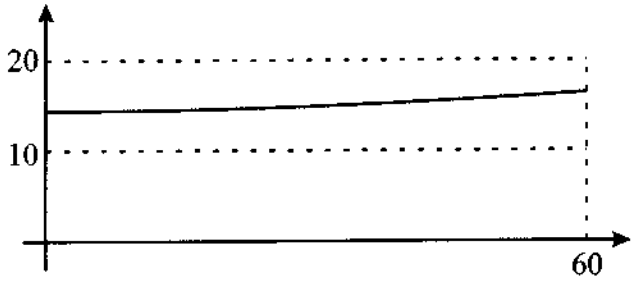
O gráfico mostra que a Rita não deve ser apurada. A Rita apenas cumpriu uma das condições, pois o papagaio permaneceu acima dos 10 metros durante 51 segundos. O papagaio nunca conseguiu ultrapassar os vinte metros e caiu depois de ter passado 1 minuto.

Cotação a atribuir: $0^{(*)} + 6^{(**)} = 6$

(*) Ver a nota 3, atrás.

(**) Tendo em conta o gráfico obtido, o examinando analisa correctamente as três condições de apuramento, numa redacção clara, bem estruturada e sem erros. Considera-se, no entanto, que o grau de dificuldade diminuiu um pouco, na medida em que este gráfico é mais fácil de analisar do que o gráfico correcto (ver a nota 3, atrás, e o critério geral 4.4).

Exemplo 5



A Rita não deve ser apurada. O papagaio permaneceu acima dos 10 metros durante o tempo todo, mas não ultrapassou os vinte metros.

Cotação a atribuir: $0^{(*)} + 3^{(**)} = 3$

(*) Ver a nota 3, atrás.

(**) Tendo em conta o gráfico obtido, o examinando analisa correctamente duas das três condições de apuramento, numa redacção clara, bem estruturada e sem erros. Considera-se, no entanto, que o grau de dificuldade diminuiu um pouco, na medida em que este gráfico é mais fácil de analisar do que o gráfico correcto (ver a nota 3, atrás, e o critério geral 4.4).

PROVA 435/9 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **MILITARES**

2003 **(Em RC e RV)**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui seis questões de resposta aberta, algumas subdivididas em alíneas, num total de onze.

Na página 9 deste enunciado encontra-se um formulário.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = (x-5)^3$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A função f tem um extremo relativo para $x = 5$

(B) A função f tem um extremo relativo para $x = -5$

(C) O gráfico da função f tem um ponto de inflexão para $x = 5$

(D) O gráfico da função f tem um ponto de inflexão para $x = -5$

2. Seja g uma função de domínio $\mathbb{R}$, não identicamente nula, contínua em todo o seu domínio.

Seja $h = \frac{1}{g}$

Relativamente ao gráfico de h, sabe-se que:
- é simétrico relativamente ao eixo Oy
- tem uma única assimptota vertical
- tem uma assimptota horizontal

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

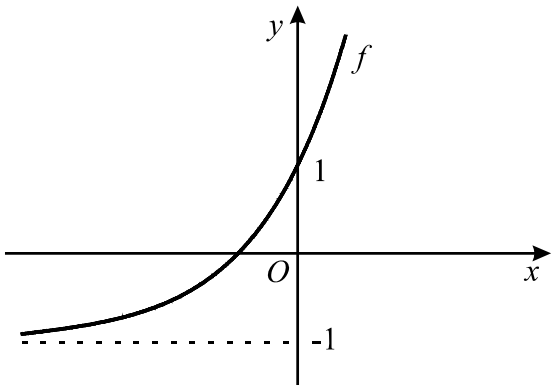
(A) $g(0) = 0$

(B) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

(C) g é uma função ímpar

(D) g é estritamente crescente

3. Para um certo valor de a e para um certo valor de b, o gráfico da função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a + b\,e^x$, está parcialmente representado na figura abaixo.



Tal como a figura sugere,

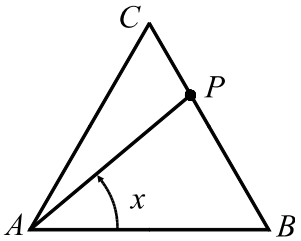
- a recta de equação $y = -1$ é assimptota do gráfico de f
- o gráfico de f intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada 1

Quais são os valores de a e de b?

(A) $a = -1$ e $b = 2$ **(B)** $a = -1$ e $b = 1$

(C) $a = 1$ e $b = -1$ **(D)** $a = 1$ e $b = -2$

4. Na figura junta está representado um triângulo equilátero $[ABC]$, de perímetro 6.
Considere que um ponto P, partindo de B, se desloca sobre o lado $[BC]$, terminando o seu percurso em C.
Seja g a função que, à amplitude x (em radianos) do ângulo BAP, faz corresponder o comprimento do segmento $[AP]$.



Quais são, respectivamente, o domínio e o contradomínio de g?

(A) $\left[0\,,\,\frac{\pi}{4}\right]$ e $\left[\sqrt{2}\,,\,2\right]$ **(B)** $\left[0\,,\,\frac{\pi}{4}\right]$ e $\left[\sqrt{3}\,,\,2\right]$

(C) $\left[0\,,\,\frac{\pi}{3}\right]$ e $\left[\sqrt{2}\,,\,2\right]$ **(D)** $\left[0\,,\,\frac{\pi}{3}\right]$ e $\left[\sqrt{3}\,,\,2\right]$

5. De quantas maneiras distintas podem ficar sentados quatro rapazes e cinco raparigas, num banco de nove lugares, de tal modo que os rapazes fiquem todos juntos?

(A) $16\,470$ **(B)** $17\,280$

(C) $18\,560$ **(D)** $19\,340$

6. Queremos colocar 6 bolas indistinguíveis em 4 caixas distintas, de forma a que cada caixa contenha pelo menos uma bola.

De quantas maneiras diferentes podem as bolas ficar colocadas nas caixas?

(A) 4 **(B)** 8

(C) 10 **(D)** 12

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z = 2\,cis\left(\theta - \frac{\pi}{5}\right)$$

Para qual dos seguintes valores de θ é que z é um número real?

(A) $\frac{6\,\pi}{5}$ **(B)** $\frac{7\,\pi}{5}$

(C) $\frac{8\,\pi}{5}$ **(D)** $\frac{9\,\pi}{5}$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w = 1 + 2\,i$

Sem recorrer à calculadora, resolva as duas alíneas seguintes:

1.1. Sabendo que w é uma raiz quarta de um certo número complexo z, determine as restantes raízes quartas de z.

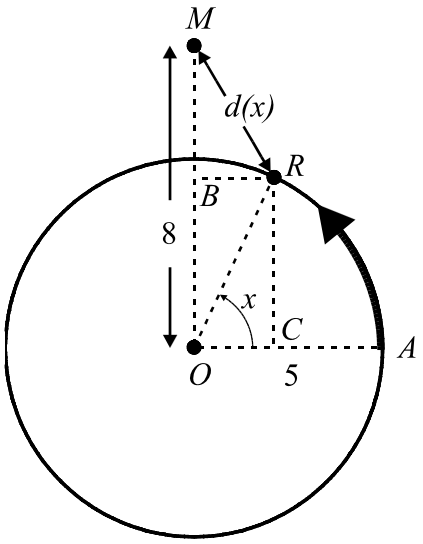
1.2. Considere, no plano complexo, a circunferência de centro na imagem geométrica de w e que passa na origem do referencial. Defina, por meio de uma condição em $\mathbb{C}$, a parte desta circunferência que está contida no quarto quadrante (eixos não incluídos).

2. A Rita foi andar num carrocel. A figura junta ilustra a situação.

Em cada volta, que se inicia no ponto A, a Rita descreve uma circunferência com 5 metros de raio, centrada no ponto O, rodando no sentido indicado na figura.

A mãe da Rita ficou a observá-la de um ponto M, situado à distância de 8 metros de O e tal que o ângulo AOM é recto.

Para cada posição R, da Rita, fica determinado um ângulo de amplitude x, medida em radianos, que tem como lado origem a semi-recta $\dot{O}A$ e como lado extremidade a semi-recta $\dot{O}R$.



2.1. Mostre que, para cada valor de x, a distância $d(x)$, da Rita à mãe, é dada, em metros, por

$$d(x) = \sqrt{89 - 80\ \text{sen}\, x}$$

2.2. Calcule $d\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e justifique o valor obtido, no contexto do problema.

3. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$

Sem recorrer à calculadora, resolva as duas alíneas seguintes:

3.1. Estude a função quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

3.2. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \ln x)$

4.

4.1. Seja g uma função, de domínio $\mathbb{R}$, cuja expressão analítica é um polinómio do quarto grau, que tem uma raiz dupla x_0. Prove que o eixo Ox é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa x_0.

Sugestão: tenha em conta que, se x_0 é uma raiz dupla do polinómio que define a função g, então tem-se $g(x) = (x - x_0)^2(ax^2 + b\,x + c)$

4.2. O polinómio $A(x) = x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 15x - 6$ tem quatro raízes reais distintas. Recorrendo à sua calculadora, determine, com aproximação às décimas, o número real **positivo** k para o qual o polinómio $B(x) = A(x) - k$ tenha três raízes reais distintas.

Explique como procedeu. Na sua explicação, deve incluir o(s) gráfico(s) obtido(s) na sua calculadora, bem como coordenada(s) que considere relevante(s) de algun(s) ponto(s).

5. Um dos membros do casal Silva (ou o Manuel ou a Adelaide) vai todos os dias de manhã comprar pão à padaria da rua onde moram, mal ela abre.

Em 40% dos dias, é o Manuel Silva que vai comprar o pão. Nos restantes dias, é a Adelaide Silva que se encarrega dessa tarefa.

Sabe-se também que, nas vezes em que a Adelaide vai à padaria, ela compra apenas pão de trigo (o que acontece em 20% dessas vezes) ou apenas pão de centeio.

5.1. Num certo dia, um vizinho da família Silva vai à mesma padaria, mal ela abre.

Quem é mais provável que ele lá encontre: o Manuel, ou a Adelaide? Justifique.

5.2. Calcule a probabilidade de que, num dia escolhido ao acaso, seja a Adelaide a ir à padaria e traga pão de centeio. Apresente o resultado na forma de percentagem.

6. Suponha que o dono de um casino lhe faz uma proposta, no sentido de inventar um jogo, para ser jogado por dois jogadores. Em cada jogada, é **lançado um par de dados**, numerados de um a seis, e observa-se a **soma dos números saídos**.

O dono do casino coloca ainda algumas restrições:

- o jogo terá de ser justo, isto é, ambos os jogadores deverão ter igual probabilidade de ganhar;
- para que o jogo seja mais emotivo, deverão ocorrer situações em que ninguém ganha, transitando o valor do prémio para a jogada seguinte;
- uma vez que o casino terá de ganhar algum dinheiro, deverá ocorrer uma situação (embora com probabilidade bastante mais pequena do que a probabilidade de cada um dos jogadores ganhar) em que o prémio reverta a favor do casino.

Numa curta composição, com cerca de dez linhas, apresente, ao dono do casino, uma proposta de um jogo que obedeça a tais condições.
Deverá fundamentar a sua proposta indicando, na forma de percentagem, a probabilidade de, em cada jogada:

- cada um dos jogadores ganhar;
- o casino ganhar.

Sugestão: Comece por elaborar uma tabela onde figurem todas as somas possíveis (no lançamento de dois dados).

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21

1.1. 10
1.2. 11

2. 28

2.1. 16
2.2. 12

3. 28

3.1. 14
3.2. 14

4. 28

4.1. 14
4.2. 14

5. 16

5.1. 6
5.2. 10

6. 16

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Círculo: $\pi\ r^2 \qquad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - raio\ da\ base;\ g - geratriz)$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - raio)$

Volumes

Prisma: *Área da base* $\times$ *Altura*

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3 \qquad (r - raio)$

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\,.\cos b + \text{sen}\,b\,.\cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\,.\cos b - \text{sen}\,a\,.\,\text{sen}\,b$

$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a\,.\,\text{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho\, cis\,\theta)\,.\,(\rho'\, cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta + \theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\,\theta)^n\ = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta}\ = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\,u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\,\text{sen}\,u$

$(\text{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

PROVA 435/9 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **MILITARES**

2003 **(Em RC e RV)**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui seis questões de resposta aberta, algumas subdivididas em alíneas, num total de onze.

Na página 9 deste enunciado encontra-se um formulário.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = (x-5)^3$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A função f tem um extremo relativo para $x = 5$

(B) A função f tem um extremo relativo para $x = -5$

(C) O gráfico da função f tem um ponto de inflexão para $x = 5$

(D) O gráfico da função f tem um ponto de inflexão para $x = -5$

2. Seja g uma função de domínio $\mathbb{R}$, não identicamente nula, contínua em todo o seu domínio.

Seja $h = \frac{1}{g}$

Relativamente ao gráfico de h, sabe-se que:
- é simétrico relativamente ao eixo Oy
- tem uma única assimptota vertical
- tem uma assimptota horizontal

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

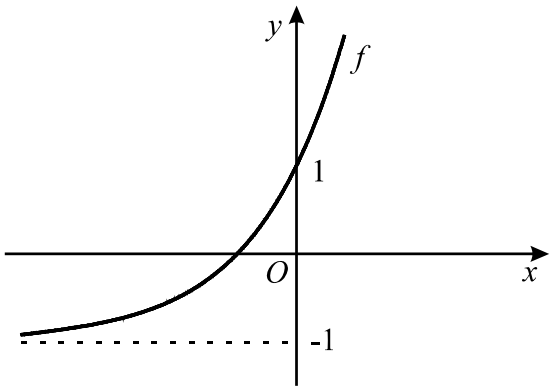
(A) $g(0) = 0$

(B) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

(C) g é uma função ímpar

(D) g é estritamente crescente

3. Para um certo valor de a e para um certo valor de b, o gráfico da função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a + b\,e^x$, está parcialmente representado na figura abaixo.



Tal como a figura sugere,

- a recta de equação $y = -1$ é assimptota do gráfico de f
- o gráfico de f intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada 1

Quais são os valores de a e de b?

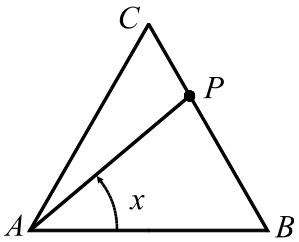
(A) $a = -1$ e $b = 2$

(B) $a = -1$ e $b = 1$

(C) $a = 1$ e $b = -1$

(D) $a = 1$ e $b = -2$

4. Na figura junta está representado um triângulo equilátero $[ABC]$, de perímetro 6.
Considere que um ponto P, partindo de B, se desloca sobre o lado $[BC]$, terminando o seu percurso em C.
Seja g a função que, à amplitude x (em radianos) do ângulo BAP, faz corresponder o comprimento do segmento $[AP]$.



Quais são, respectivamente, o domínio e o contradomínio de g?

(A) $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ e $\left[\sqrt{2}, 2\right]$

(B) $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ e $\left[\sqrt{3}, 2\right]$

(C) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ e $\left[\sqrt{2}, 2\right]$

(D) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ e $\left[\sqrt{3}, 2\right]$

5. De quantas maneiras distintas podem ficar sentados quatro rapazes e cinco raparigas, num banco de nove lugares, de tal modo que os rapazes fiquem todos juntos?

(A) $16\,470$ **(B)** $17\,280$

(C) $18\,560$ **(D)** $19\,340$

6. Queremos colocar 6 bolas indistinguíveis em 4 caixas distintas, de forma a que cada caixa contenha pelo menos uma bola.

De quantas maneiras diferentes podem as bolas ficar colocadas nas caixas?

(A) 4 **(B)** 8

(C) 10 **(D)** 12

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z = 2\,cis\left(\theta - \frac{\pi}{5}\right)$$

Para qual dos seguintes valores de θ é que z é um número real?

(A) $\frac{6\,\pi}{5}$ **(B)** $\frac{7\,\pi}{5}$

(C) $\frac{8\,\pi}{5}$ **(D)** $\frac{9\,\pi}{5}$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w = 1 + 2\,i$

Sem recorrer à calculadora, resolva as duas alíneas seguintes:

1.1. Sabendo que w é uma raiz quarta de um certo número complexo z, determine as restantes raízes quartas de z.

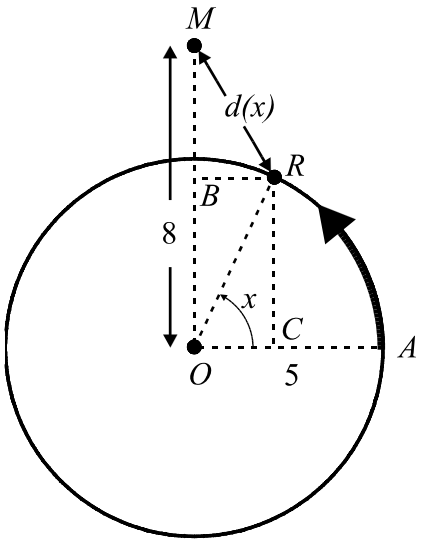
1.2. Considere, no plano complexo, a circunferência de centro na imagem geométrica de w e que passa na origem do referencial. Defina, por meio de uma condição em $\mathbb{C}$, a parte desta circunferência que está contida no quarto quadrante (eixos não incluídos).

2. A Rita foi andar num carrocel. A figura junta ilustra a situação.

Em cada volta, que se inicia no ponto A, a Rita descreve uma circunferência com 5 metros de raio, centrada no ponto O, rodando no sentido indicado na figura.

A mãe da Rita ficou a observá-la de um ponto M, situado à distância de 8 metros de O e tal que o ângulo AOM é recto.

Para cada posição R, da Rita, fica determinado um ângulo de amplitude x, medida em radianos, que tem como lado origem a semi-recta $\dot{O}A$ e como lado extremidade a semi-recta $\dot{O}R$.



2.1. Mostre que, para cada valor de x, a distância $d(x)$, da Rita à mãe, é dada, em metros, por

$$d(x) = \sqrt{89 - 80\ \text{sen}\,x}$$

2.2. Calcule $d\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e justifique o valor obtido, no contexto do problema.

3. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$

Sem recorrer à calculadora, resolva as duas alíneas seguintes:

3.1. Estude a função quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

3.2. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \ln x)$

4.

4.1. Seja g uma função, de domínio $\mathbb{R}$, cuja expressão analítica é um polinómio do quarto grau, que tem uma raiz dupla x_0. Prove que o eixo Ox é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa x_0.

Sugestão: tenha em conta que, se x_0 é uma raiz dupla do polinómio que define a função g, então tem-se $g(x) = (x - x_0)^2(ax^2 + b\,x + c)$

4.2. O polinómio $A(x) = x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 15x - 6$ tem quatro raízes reais distintas. Recorrendo à sua calculadora, determine, com aproximação às décimas, o número real **positivo** k para o qual o polinómio $B(x) = A(x) - k$ tenha três raízes reais distintas.

Explique como procedeu. Na sua explicação, deve incluir o(s) gráfico(s) obtido(s) na sua calculadora, bem como coordenada(s) que considere relevante(s) de algun(s) ponto(s).

5. Um dos membros do casal Silva (ou o Manuel ou a Adelaide) vai todos os dias de manhã comprar pão à padaria da rua onde moram, mal ela abre.

Em 40% dos dias, é o Manuel Silva que vai comprar o pão. Nos restantes dias, é a Adelaide Silva que se encarrega dessa tarefa.

Sabe-se também que, nas vezes em que a Adelaide vai à padaria, ela compra apenas pão de trigo (o que acontece em 20% dessas vezes) ou apenas pão de centeio.

5.1. Num certo dia, um vizinho da família Silva vai à mesma padaria, mal ela abre.

Quem é mais provável que ele lá encontre: o Manuel, ou a Adelaide? Justifique.

5.2. Calcule a probabilidade de que, num dia escolhido ao acaso, seja a Adelaide a ir à padaria e traga pão de centeio. Apresente o resultado na forma de percentagem.

6. Suponha que o dono de um casino lhe faz uma proposta, no sentido de inventar um jogo, para ser jogado por dois jogadores. Em cada jogada, é **lançado um par de dados**, numerados de um a seis, e observa-se a **soma dos números saídos**.

O dono do casino coloca ainda algumas restrições:

- o jogo terá de ser justo, isto é, ambos os jogadores deverão ter igual probabilidade de ganhar;
- para que o jogo seja mais emotivo, deverão ocorrer situações em que ninguém ganha, transitando o valor do prémio para a jogada seguinte;
- uma vez que o casino terá de ganhar algum dinheiro, deverá ocorrer uma situação (embora com probabilidade bastante mais pequena do que a probabilidade de cada um dos jogadores ganhar) em que o prémio reverta a favor do casino.

Numa curta composição, com cerca de dez linhas, apresente, ao dono do casino, uma proposta de um jogo que obedeça a tais condições.
Deverá fundamentar a sua proposta indicando, na forma de percentagem, a probabilidade de, em cada jogada:

- cada um dos jogadores ganhar;
- o casino ganhar.

Sugestão: Comece por elaborar uma tabela onde figurem todas as somas possíveis (no lançamento de dois dados).

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21

1.1. 10
1.2. 11

2. 28

2.1. 16
2.2. 12

3. 28

3.1. 14
3.2. 14

4. 28

4.1. 14
4.2. 14

5. 16

5.1. 6
5.2. 10

6. 16

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Círculo: $\pi\ r^2 \qquad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - raio\ da\ base;\ g - geratriz)$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - raio)$

Volumes

Prisma: *Área da base* $\times$ *Altura*

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3 \qquad (r - raio)$

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\,.\cos b + \text{sen}\,b\,.\cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\,.\cos b - \text{sen}\,a\,.\,\text{sen}\,b$

$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a\,.\,\text{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho\, cis\,\theta)\,.\,(\rho'\, cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta+\theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\,\theta)^n\ = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta}\ = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\,u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\,\text{sen}\,u$

$(\text{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

2004

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **1.ª FASE**

2004 **VERSÃO 1**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de dez.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ $(\alpha - \textit{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;}\ \ r - \textit{raio})$

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ $(\alpha - \textit{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;}\ \ r - \textit{raio})$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - \textit{raio da base};\ g - \textit{geratriz})$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - \textit{raio})$

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3$ $(r - \textit{raio})$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\, v + u\,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\, v - u\,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\, u^{n-1}\,.\, u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\, e^u$

$(a^u)' = u'.\, a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Para um certo valor de k, é **contínua** em $\mathbb{R}$ a função g, definida por

$$g(x) = \begin{cases} k + \cos x & se \quad x \leq 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x} & se \quad x > 0 \end{cases}$$

($\ln$ designa logaritmo de base e)

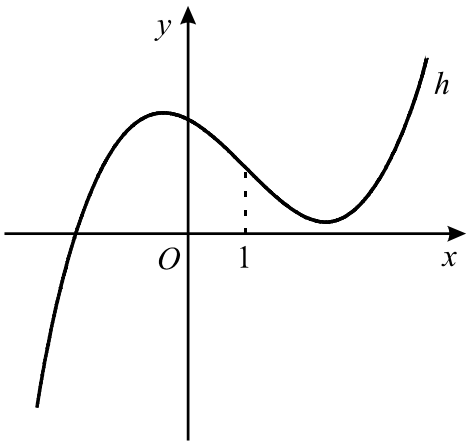
Qual é o valor de k ?

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** 2

2. Na figura junta está parte da representação gráfica de uma função polinomial h.

O ponto de abcissa 1 é o único ponto de inflexão do gráfico de h.

Qual das expressões seguintes pode definir h'', **segunda derivada** da função h ?



(A) $(x-1)^2$ **(B)** $(1+x)^2$

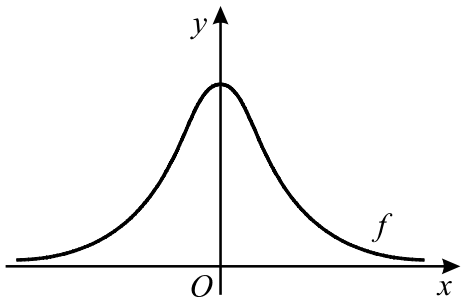
(C) $x-1$ **(D)** $1-x$

3. Sabe-se que $\log_2 a = \frac{1}{5}$

Qual é o valor de $\log_2\left(\frac{a^5}{8}\right)$?

(A) -1 **(B)** -2 **(C)** -3 **(D)** -4

4. Na figura abaixo está parte da representação gráfica de uma função f, par e positiva, da qual a recta de equação $y = 0$ é assimptota.



Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{f(x)}$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** $+\infty$ **(D)** $-\infty$

5. Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?

(A) A soma das probabilidades de dois acontecimentos incompatíveis é 1

(B) O produto das probabilidades de dois acontecimentos incompatíveis é 1

(C) A soma das probabilidades de dois acontecimentos contrários é 1

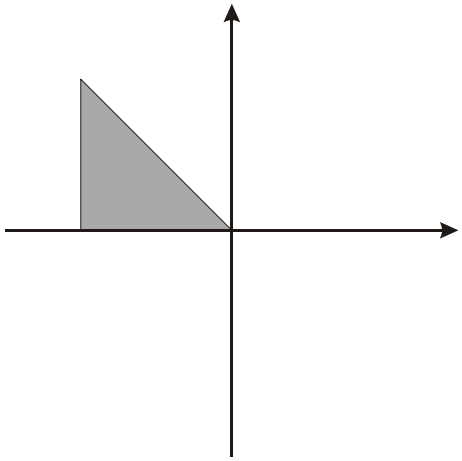
(D) O produto das probabilidades de dois acontecimentos contrários é 1

6. Uma pessoa vai visitar cinco locais, situados no Parque das Nações, em Lisboa: o Pavilhão de Portugal, o Oceanário, o Pavilhão Atlântico, a Torre Vasco da Gama e o Pavilhão do Conhecimento.

De quantas maneiras diferentes pode planear a sequência das cinco visitas, se quiser começar na Torre Vasco da Gama e acabar no Oceanário?

(A) 6 **(B)** 12 **(C)** 24 **(D)** 120

7. Na figura está representado, no plano complexo, um triângulo rectângulo isósceles.



Os catetos têm comprimento 1, estando um deles contido no eixo dos números reais.
Um dos vértices do triângulo coincide com a origem do referencial.

Qual das condições seguintes define a região sombreada, incluindo a fronteira?

(A) $Re(z) \geq 0 \quad \wedge \quad Im(z) \leq 0 \quad \wedge \quad |z| \leq 1$

(B) $Re(z) \leq 0 \quad \wedge \quad Im(z) \geq 0 \quad \wedge \quad |z| \leq 1$

(C) $Re(z) \geq -1 \quad \wedge \quad Im(z) \geq 0 \quad \wedge \quad |z-i| \geq |z+1|$

(D) $Re(z) \geq -1 \quad \wedge \quad Im(z) \geq 0 \quad \wedge \quad |z-i| \leq |z-1|$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, considere os números complexos: $z_1 = -6 + 3i$ e $z_2 = 1 - 2i$

Sem recorrer à calculadora, determine $\frac{z_1 + i^{23}}{z_2}$, apresentando o resultado final na forma trigonométrica.

2. Seja z um número complexo, cuja imagem geométrica pertence ao primeiro quadrante (eixos não incluídos).
Justifique que a imagem geométrica de z^3 não pode pertencer ao quarto quadrante.

3. O João tem, no bolso, **seis** moedas: duas moedas de 1 euro e quatro moedas de 50 cêntimos.
O João retira, simultaneamente e ao acaso, **duas** moedas do bolso.

3.1. Seja X a quantia, em euros, correspondente às moedas retiradas pelo João. Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X, apresentando as probabilidades na forma de fracção irredutível.

3.2. Depois de ter retirado as duas moedas do bolso, o João informou a sua irmã Inês de que elas eram iguais. Ela apostou, então, que a quantia retirada era de 2 euros. Qual é a probabilidade de a Inês ganhar a aposta? Apresente o resultado sob a forma de fracção irredutível.

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1 + 3\,x^2\,e^{-x}$

4.1. **Sem recorrer à calculadora**, mostre que a função f tem um único mínimo relativo e determine-o.

4.2. **Sem recorrer à calculadora** (a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos), mostre que, no intervalo $]-1, 0[$, existe pelo menos um objecto cuja imagem, por meio de f, é 4.

5. A figura 1 representa um depósito de forma cilíndrica, que contém um certo volume de um combustível.

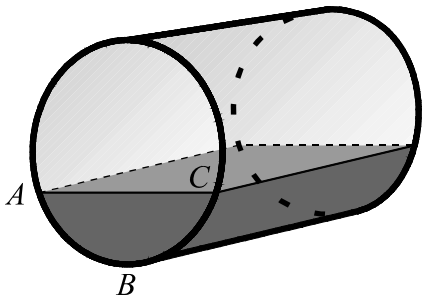


Figura 1

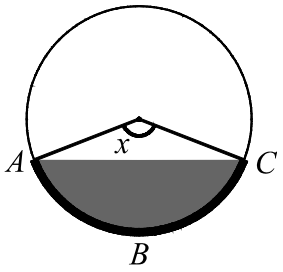


Figura 2

Admita que a função V, de domínio $[0,\ 2\,\pi\,]$, definida por

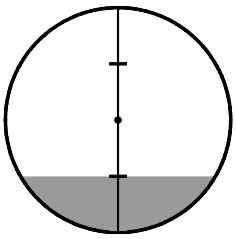
$$V(x) = 80\,(x - \operatorname{sen} x)\,,$$

dá o volume, em metros cúbicos, de combustível existente no depósito, em função da amplitude x, em **radianos**, do arco ABC (que, como se sabe, é igual à amplitude do ângulo ao centro correspondente, assinalado na figura 2).

5.1. Qual é a capacidade total do depósito, em metros cúbicos?
Apresente o resultado arredondado às unidades.
Nota: se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

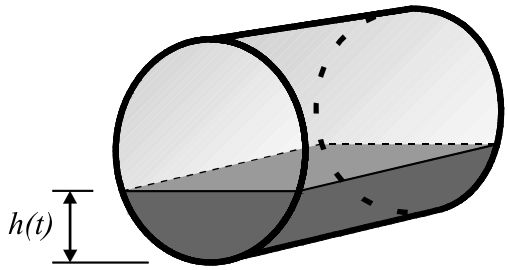
5.2. Recorra à calculadora para determinar **graficamente** a solução da equação que lhe permite resolver o seguinte problema: *Qual terá de ser a amplitude, em radianos, do arco* ABC, *para que existam* $300\ m^3$ *de combustível no depósito*?
Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o **gráfico**, ou **gráficos**, obtido(s). Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas.

5.3. Determine, em metros cúbicos, o volume do combustível existente no depósito, no momento em que a sua altura é $\frac{1}{4}$ da altura máxima.
Apresente o resultado arredondado às unidades.
Nota: se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.



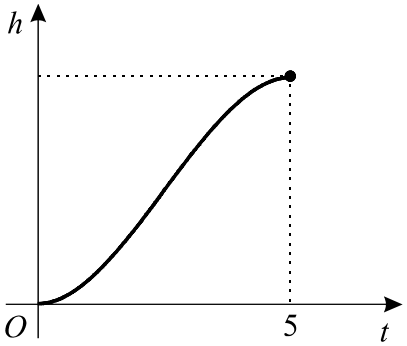
5.4. Admita agora que o depósito está vazio e que, num certo instante, se começa a introduzir combustível a uma taxa constante, até ficar cheio, o que acontece ao fim de cinco horas.

Seja $h(t)$ **a altura** do combustível no depósito, t **horas** após o instante em que começa a ser introduzido.
Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função h ?

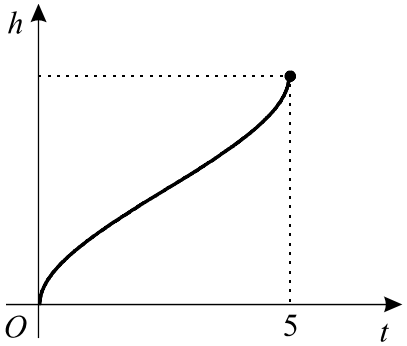


Numa pequena **composição**, com cerca de dez linhas, **indique as razões que o levam a rejeitar os restantes gráficos** (indique **três** razões, uma por cada gráfico rejeitado).

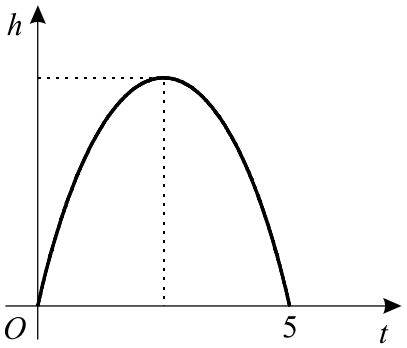
(A)



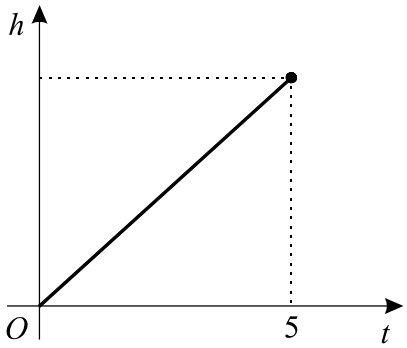
(B)



(C)



(D)



FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 10

2. 11

3. 32
3.1. 16
3.2. 16

4. 28
4.1. 14
4.2. 14

5. 56
5.1. 14
5.2. 14
5.3. 14
5.4. 14

TOTAL **200**

PROVA 435/C/30 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **1.ª FASE**

2004

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 10

2. 11

3. 32
3.1. 16
3.2. 16

4. 28
4.1. 14
4.2. 14

5. 56
5.1. 14
5.2. 14
5.3. 14
5.4. 14

TOTAL **200**

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Versão 1	B	C	B	C	C	A	C
Versão 2	A	B	D	C	A	D	A

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, no primeiro grupo, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas **Resp. certas**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

Grupo II

Critérios gerais

1. A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro, não negativo, de pontos.

2. Se, numa alínea em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, o examinando se limitar a apresentar o resultado final, deverão ser atribuídos zero pontos a essa alínea.

3. Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

4. Existem alíneas cuja cotação está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para as resolver.

4.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.

4.2. Caso a resolução da etapa esteja incompleta, ou contenha incorrecções, cabe ao classificador decidir a cotação a atribuir a essa etapa, tendo em conta o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:
- erros de contas ocasionais devem ser penalizados em um ponto;
- erros graves, que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades, devem ser penalizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa.

4.3. No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.

4.4. Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.

4.5. Pode acontecer que o examinando, ao resolver uma questão, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

5. Existem alíneas em que estão previstos alguns erros que o examinando pode cometer. Para cada caso, é indicada a cotação a atribuir. O examinando pode, contudo, utilizar um processo não contemplado nos critérios e/ou cometer um erro não previsto. Cabe ao classificador adaptar as referências dadas a todas as situações não previstas.

6. Se, na resolução de uma alínea, o examinando utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), deve ser penalizado em um ponto, na cotação total a atribuir a essa alínea. Esta penalização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas cotadas com 0 (zero) pontos.

7. Se, na resolução de uma alínea, o examinando não respeitar uma eventual instrução, relativa ao método a utilizar (por exemplo, se o enunciado vincular o examinando a uma resolução analítica, sem calculadora, e o examinando a utilizar), a etapa da resolução em que se dá o referido desrespeito bem como todas as subsequentes que dela dependam devem ser cotadas com 0 (zero) pontos.

8. Tudo o que o examinando escrever fora de contexto e que não resulte de trabalho anterior (por exemplo, num exercício de probabilidades, a escrita de uma fracção que não tenha nada a ver com o problema, ou, num exercício de estudo da monotonia de uma função, a apresentação de um quadro fora do contexto) deve ser cotado com 0 (zero) pontos. Todas as etapas subsequentes que dependam do que o examinando escreveu fora de contexto devem ser igualmente cotadas com 0 (zero) pontos.

Critérios específicos

Para cada item são apresentados:

- a cotação total do item;
- para cada processo de resolução apresentado, uma subdivisão da cotação total em cotações parcelares;
- exemplos de possíveis respostas dos examinandos, com a respectiva cotação a atribuir, devidamente explicada.

1. 10

Substituição, na expressão $\frac{z_1 + i^{23}}{z_2}$, de z_1 por $-6+3i$ e de z_2 por $1-2i$ 1

$i^{23} = -i$ 1

Divisão 5

Multiplicação de ambos os termos da fracção pelo conjugado do denominador 1

Cálculo do novo numerador 2

Cálculo do novo denominador 2

Resultado na forma trigonométrica 3

Módulo **(ver nota 1)** 1

Argumento **(ver nota 2)** 2

Notas:

1. Não se exige a apresentação de cálculos intermédios (o examinando pode calcular o módulo mentalmente).

2. Não se exige a apresentação de cálculos intermédios (o examinando pode visualizar o argumento graficamente, dado que a imagem geométrica do complexo pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares, no terceiro quadrante).

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$\frac{-6+3i+i^{23}}{1-2i} = \frac{(-6+2i)\,(1+2i)}{(1-2i)\,(1+2i)} =$$

$$= \frac{-6-12\,i+2i-4}{1+4} =$$

$$= \frac{-10-10\,i}{5} = -2-2i$$

$$\rho = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$tg\,\theta = \frac{-2}{-2} = 1 = \frac{\pi}{4} \qquad \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$$\sqrt{8}\,cis\,\frac{5\pi}{4}$$

Cotação a atribuir: $1 + 1^{(*)} + 5(1+2+2) + 3(1+2) + (-1)^{(**)} = 9$

(*) Etapa implícita - ver critério geral 4.5.

(**) Erro de escrita $\left(1 = \frac{\pi}{4}\right)$ - ver critério geral 6.

Exemplo 2

$$\frac{1-2i+i^{23}}{-6+3i} = \frac{1-2i-i}{-6+3i} = \frac{1-3\not{i}}{-6+3\not{i}} =$$

$$= -\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\,cis\,\pi$$

Cotação a atribuir: $0^{(*)} + 1 + 0\,(0+0+0) + 2\,(1+1^{(**)}) = 3$

(*) O examinando troca z_1 com z_2

(**) No último passo deve ser atribuído 1 ponto, pois a determinação do argumento fica mais simples - ver critério geral 4.4.

2. 11

Referir que z tem um argumento θ tal que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ .....2 (1+1)

Referir que z^3 tem argumento 3θ 2

Referir que $0 < 3\theta < \frac{3\pi}{2}$ ..... 5 (1+4)

Conclusão 2

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

Seja $z = \rho\, cis\, \theta \qquad z^3 = \rho^3\, cis\, 3\theta \qquad \theta \in]\,0,\, \frac{\pi}{2}\,[$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \qquad 0 < 3\theta < \frac{3\pi}{2}$

Logo, se $3\theta \in]\,0,\, \frac{3\pi}{2}\,[$, z^3 não pode pertencer ao quarto quadrante.

Cotação a atribuir: $2 + 2 + 5 + 2 = 11$

Exemplo 2

$z = \rho\, cis\, \theta \qquad z^3 = \rho^3\, cis\, 3\theta$

Logo o argumento de z^3 é triplo do argumento de z. Se z pertence ao 1.º quadrante, z^3 nunca pode pertencer ao quarto quadrante, uma vez que o maior ângulo possível de z $\left(\approx \frac{\pi}{2}\right)$, o seu triplo nunca chegaria ao 4.º quadrante, ficando pelo terceiro quadrante.

Cotação a atribuir: $1 + 2 + 4 + 1 + (-1)^{(*)} = 7$

(*) Deve ser descontado 1 ponto, na cotação total a atribuir à resposta, pois o examinando escreve uma afirmação inequivocamente incorrecta, do ponto de vista formal: *maior ângulo possível de* z (não existe tal ângulo) - ver critério geral 6.

Exemplo 3

$z = \rho\, cis\, \theta$

$z^3 = \rho^3\, cis\, 3\theta$

Não sei qual é o θ, mas sei que pertence ao 1.º quadrante.

Apesar de os eixos não estarem incluídos, θ pode ser um número muito próximo de zero (no mínimo) ou muito próximo de $\frac{\pi}{2}$ (no máximo).

Assim, se θ for zero: $z^3 = \rho^3\, cis\, 3 \times 0 = \rho^3\, cis\, 0 \Rightarrow \in 1° Q$.

Se θ for $\frac{\pi}{2}$: $z^3 = \rho^3\, cis\, 3 \times \frac{\pi}{2} = \rho^3\, cis\, \frac{3\,\pi}{2}$

Se θ fosse $\frac{\pi}{2}$, $3\,\theta$ poderia ser $\frac{3\pi}{2}$.

Assim, como não é, só poderá aproximar-se por valores inferiores a $\frac{3\pi}{2}$.

Logo, tenho a certeza que z^3 nunca terá a sua imagem geométrica no quarto quadrante.

Cotação a atribuir: $2^{(*)} + 2 + 4^{(**)} + 2 + (-1)^{(***)} = 9$

(*) Apesar de, formalmente, o examinando não escrever a dupla desigualdade $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, ela está expressa na frase «θ *pode ser um número muito próximo de zero (no mínimo) ou muito próximo de* $\frac{\pi}{2}$ *(no máximo)*».

(**) O examinando não conclui a dupla desigualdade $0 < 3\theta < \frac{3\pi}{2}$. Apesar disso, podemos considerar que ela está quase implícita no resto da resolução (daí os 4 pontos).

(***) Deve ser descontado 1 ponto, na cotação total a atribuir à resposta, pois o examinando escreve uma expressão inequivocamente incorrecta, do ponto de vista formal ($\Rightarrow \in$ 1.º Q) - ver critério geral 6.

3.1. 16

Indicar os valores que a variável X pode tomar 4

Determinar o número de casos possíveis (denominador comum de todas as probabilidades) **(ver nota 1)** 3

Escrever correctamente $P(X=1)$ **(ver notas 1 e 2)**..... 3

Escrever correctamente $P(X=1{,}5)$ **(ver notas 1 e 2)**..... 3

Escrever correctamente $P(X=2)$ **(ver notas 1 e 2)** 3

Notas:

1. Se o examinando considerar que o número de casos possíveis é 36 (tiragem com reposição) e calcular em conformidade as três probabilidades (4/9, 4/9 e 1/9), deverão ser atribuídos 3 dos 12 pontos referentes às quatro últimas etapas.

2. Se o examinando não apresentar todas as probabilidades na forma de fracção irredutível, deve ser penalizado em 1 ponto, no total da cotação a atribuir à sua resposta.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

x_i	1	1,5	2
$P(X=x_i)$	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$P(X=1)=\frac{{}^4C_2}{{}^6C_2} \qquad P(X=1{,}5)=\frac{{}^4C_1\times{}^2C_1}{{}^6C_2}$$

$$P(X=2)=\frac{{}^2C_2}{{}^6C_2}$$

Cotação a atribuir: $4+3+3+3+3+(-1)^{(*)}=15$

(*) Deve ser descontado 1 ponto, na cotação total a atribuir à resposta, pois o examinando não apresenta todas as probabilidades na forma de fracção irredutível (ver nota 2).

Exemplo 2

x_i	1	1,5	2
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

$P(1\,€) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

$P(1{,}5\,€) = \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$

$P(2\,€) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

Cotação a atribuir: $4 + 3 + 3 + 3 + 3 + (-1)^{(*)} = 15$

(*) Deve ser descontado 1 ponto, na cotação total a atribuir à resposta, pois o examinando escreve expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal: $P(1\,€)$, $P(1{,}5\,€)$ e $P(2\,€)$ - ver critério geral 6.

Exemplo 3

x_i	$0{,}5 + 0{,}5 = 1$	$0{,}5 + 1 = 1{,}5$	$1 + 0{,}5 = 1{,}5$	$1 + 1 = 2$
$P(X = x_i)$	$\frac{16}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{4}{36}$

Casos possíveis: $6 \times 6 = 36$

$0{,}5 + 0{,}5 \rightarrow 4 \times 4 = 16 \quad p = \frac{16}{36}$ $\qquad$ $0{,}5 + 1 \rightarrow 4 \times 2 = 8 \quad p = \frac{8}{36}$

$1 + 0{,}5 \rightarrow 2 \times 4 = 8 \quad p = \frac{8}{36}$ $\qquad$ $1 + 1 \rightarrow 2 \times 2 = 4 \quad p = \frac{4}{36}$

Cotação a atribuir: $3^{(*)} + 3^{(**)} + (-1)^{(***)} = 5$

(*) A forma como o examinando apresenta os valores possíveis da variável não está completamente correcta, na medida em que as situações $0{,}5 + 1 = 1{,}5$ e $1 + 0{,}5 = 1{,}5$ são apresentadas (erradamente) como distintas.

(**) Ver nota 1.

(***) Deve ser descontado 1 ponto, na cotação total a atribuir à resposta, pois o examinando não apresenta as probabilidades na forma de fracção irredutível (ver nota 2).

Exemplo 4

	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1
0,5		1	1	1	1,5	1,5
0,5	1		1	1	1,5	1,5
0,5	1	1		1	1,5	1,5
0,5	1	1	1		1,5	1,5
1	1,5	1,5	1,5	1,5		2
1	1,5	1,5	1,5	1,5	2	

$P(X = 1) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$ $\qquad$ $P(X = 1{,}5) = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$

$P(X = 2) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

x_i	1	1,5	2
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

Cotação a atribuir: $4 + 3 + 3 + 3 + 3 = 16$

Exemplo 5

	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1
0,5	1	1	1	1	1,5	1,5
0,5	1	1	1	1	1,5	1,5
0,5	1	1	1	1	1,5	1,5
0,5	1	1	1	1	1,5	1,5
1	1,5	1,5	1,5	1,5	2	2
1	1,5	1,5	1,5	1,5	2	2

$P(X = 1) = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$ $\qquad$ $P(X = 1{,}5) = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$

$P(X = 2) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

x_i	1	1,5	2
$P(X = x_i)$	$\frac{8}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

Cotação a atribuir: $4 + 0^{(*)} + 0^{(*)} + 0^{(*)} + 0^{(*)} = 4$

(*) Os valores apresentados pelo examinando não estão coerentes com a tabela apresentada.

3.2. 16

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º Processo

Probabilidade pedida: $\frac{{}^2C_2}{{}^4C_2 + {}^2C_2}$ ou $\frac{2\times1}{4\times3 + 2\times1}$

Resultado final $= \frac{1}{7}$

As cotações devem ser atribuídas de acordo com o seguinte critério:

Escrita da fracção **(ver notas 1, 2, 3, 4 e 5)** 15

Resultado na forma de fracção irredutível **(ver nota 6)**.....1

Notas:

1. O examinando pode começar por indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis e só depois escrever a fracção.
No entanto, se não o fizer, isto é, se escrever directamente a fracção, não deverá ser penalizado.

2. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da fracção, com a respectiva cotação a atribuir.

$\frac{{}^2C_2}{{}^4C_2 + {}^2C_2}$ ou $\frac{1}{{}^4C_2 + 1}$ ou $\frac{2\times1}{4\times3 + 2\times1}$ 15

$\frac{2\times2}{4\times4 + 2\times2}$ 8

3. Se o examinando indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído à sua resposta menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

4. Se a fracção escrita pelo examinando não for uma das indicadas acima, nem equivalente, deve ser cotada com 0 (zero) pontos.

5. Exige-se que o examinando explicite a forma como efectuou a contagem dos casos possíveis (escrevendo uma expressão como as dos exemplos fornecidos atrás ou apresentando um esquema), a não ser que o examinando utilize dados obtidos na resolução da alínea anterior e o valor apresentado esteja de acordo com esses dados.

6. O ponto relativo a esta etapa só pode ser atribuído se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

2.º Processo

Sejam os acontecimentos A e B
A - a quantia retirada é de 2 €
B - as moedas retiradas são iguais

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{7}{15}} = \frac{1}{7}$$

As cotações devem ser atribuídas de acordo com o seguinte critério:

Identificação da probabilidade pedida com $P(A|B)$, explicitando os acontecimentos A e B 3

$P(A \cap B) = \frac{1}{15}$ (ver **nota**) 5

$P(B) = \frac{7}{15}$ (ver **nota**) 5

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ 2

$P(A|B) = \frac{1}{7}$ 1

Nota:

Exige-se que o examinando explicite a forma como obteve as duas probabilidades, a não ser que utilize a distribuição de probabilidades apresentada na alínea anterior.

3.º Processo

	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1
0,5		1	1	1		
0,5	1		1	1		
0,5	1	1		1		
0,5	1	1	1			
1						2
1					2	

Probabilidade pedida $= \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$

As cotações devem ser atribuídas de acordo com o seguinte critério:

Apresentação da tabela e escrita da fracção 15

Resultado sob a forma de fracção irredutível 1

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$p = \frac{1}{7}$

$1€ + 1€$

$0{,}5\,€\,(1) + 0{,}5\,€(2)$ $\qquad$ $0{,}5\,€\,(1) + 0{,}5\,€(3)$

$0{,}5\,€\,(1) + 0{,}5\,€(4)$ $\qquad$ $0{,}5\,€\,(2) + 0{,}5\,€(3)$

$0{,}5\,€\,(2) + 0{,}5\,€(4)$ $\qquad$ $0{,}5\,€\,(3) + 0{,}5\,€(4)$

Cotação a atribuir (1.º processo): $15^{(*)} + 1 = 16$

(*) O examinando explicita a forma como efectuou a contagem dos casos possíveis, apresentando um esquema (ver nota 5, relativa ao 1.º processo).

Exemplo 2

$cp = {}^4C_2 + {}^2C_2 = 18$

$cf = {}^2C_2 = 4$

$p = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$

Cotação a atribuir (1.º processo): $15^{(*)} + 0^{(**)} = 15$

(*) A resposta do examinando é equivalente a $\frac{{}^2C_2}{{}^4C_2 + {}^2C_2} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$, pelo que devem ser atribuídos os 15 pontos relativos à escrita da fracção $\frac{{}^2C_2}{{}^4C_2 + {}^2C_2}$

(**) o examinando erra o cálculo de ${}^2C_2$ e de ${}^4C_2 + {}^2C_2$, pelo que erra o resultado final (apesar da passagem correcta $\frac{4}{18} = \frac{2}{9}$).

Exemplo 3

Admita-se que, na alínea anterior, o examinando indica

Soma 1€: ${}^4C_2 = 6$

Soma 2€: ${}^2C_2 = 1$

e que, na resolução desta alínea, o examinando escreve:

Casos favoráveis: 1

Casos possíveis: $6 + 1 = 7$

$p = \frac{1}{7}$

Cotação a atribuir (1.º processo): $15^{(*)} + 1 = 16$

(*) O examinando não explicita a forma como efectuou a contagem dos casos possíveis, mas percebe-se que utiliza dados obtidos na resolução da alínea anterior (ver nota 5, relativa ao 1.º processo).

Exemplo 4

Admita-se que, na alínea anterior, o examinando apresentou a tabela

	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1
0,5	1	1	1	1	1,5	1,5
0,5	1	1	1	1	1,5	1,5
0,5	1	1	1	1	1,5	1,5
0,5	1	1	1	1	1,5	1,5
1	1,5	1,5	1,5	1,5	2	2
1	1,5	1,5	1,5	1,5	2	2

e que, na resolução desta alínea, o examinando escreve:

$p = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

Cotação a atribuir (1.º processo): $8^{(*)} + 1 = 9$

(*) O examinando não explicita a forma como efectuou a contagem dos casos possíveis, mas percebe-se que utiliza dados obtidos na resolução da alínea anterior (ver nota 5, relativa ao 1.º processo). A fracção escrita pelo examinando é equivalente à do segundo exemplo da nota 2, relativa ao 1.º processo, pelo que deve ser cotada com 8 pontos.

Exemplo 5

$cp = 6 \times 6 = 36$ $\qquad$ $cf = 2 \times 2 = 4$ $\qquad$ $p = \frac{4}{36}$

Cotação a atribuir (1.º processo): $0^{(*)} + 0 = 0$

(*) Ver nota 4, relativa ao 1.º processo.

Exemplo 6

Casos possíveis: 2 (soma $= 1$ ou soma $= 2$) $\qquad$ Casos favoráveis: 1 (soma $= 2$) $\qquad$ $p = \frac{1}{2}$

Cotação a atribuir (1.º processo): $0^{(*)} + 0^{(**)} = 0$

(*) Ver nota 4, relativa ao 1.º processo.

(**) Ver nota 6, relativa ao 1.º processo.

Exemplo 7

Admita-se que, na alínea anterior, o examinando obtém a distribuição de probabilidades

x_i	1	1,5	2
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

e que, na resolução desta alínea, o examinando escreve:

A: retiram-se duas moedas iguais $\qquad$ B: a quantia retirada é 2€

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{2}{5} + \frac{1}{15}} = \frac{1}{7}$$

Cotação a atribuir (2.º processo): $3 + 5^{(*)} + 5^{(*)} + 2 + 1 = 16$

(*) Ver nota relativa ao 2.º processo.

4.1. 14

Determinar $f'(x)$ **(ver nota)** 5
- Derivada de x^2 1
- Derivada de e^{-x} 1
- Restantes cálculos 3

Determinar os zeros de f' 3
- Escrever a equação $f'(x) = 0$ 1
- Aplicação da lei do anulamento do produto 1
- Restantes cálculos 1

Estudo do sinal de f' e consequente conclusão, relativamente à monotonia e extremos de f (estudo que pode ser apresentado através de um quadro) 4
- Primeira linha do quadro (relativa à variável x) 1
- Sinal de f' 2
- Relação entre o sinal de f' e a monotonia de f 1

Determinar o mínimo (imagem de 0) 2

Nota:
Se existir evidência de que o examinando pretende determinar a expressão da derivada da função, a cotação mínima a atribuir a esta etapa é de 1 ponto.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$f'(x) = 6x\,e^{-x} + 3\,x^2 - e^{-x} = e^{-x}(6x - 1) + 3x^2$

$e^{-x}(6x-1) + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-x} = 0}_{\text{impossível}} \vee\ 6x - 1 = 0\ \vee\ 3x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ x = \frac{1}{6}\ \vee\ x = 0$

x		0		$\frac{1}{6}$	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↘	min	↗

$f\left(\frac{1}{6}\right) = 1 + 3\left(\frac{1}{6}\right)^2 e^{-1/6} = 1 + \frac{1}{12}\,e^{-1/6}$

Cotação a atribuir: $2(1+1+0) + 1(1+0+0) + 2(1+0+1) + 2 = 7$

Exemplo 2

$f'(x) = 6x\,e^{-x} + 3\,x^2.(-e^{-x}) = 6\,x\,e^{-x} - 3\,x^2e^{-x}$

$6\,x\,e^{-x} - 3\,x^2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6\,x\,e^{-x} = 3\,x^2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6 = 3\,x \Leftrightarrow x = 2$

x		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	min	↗

$f(2) = 1 + 3\,.\,2^2\,.\,e^{-2} = 1 + 12\,e^{-2}$

Cotação a atribuir: $5(1+1+3) + 1(1+0+0) + 2(1+0+1) + 2 = 10$

Exemplo 3

$f'(x) = 6x\,e^{-x} + 3\,x^2.(-e^{-x}) = 6\,x\,e^{-x} - 3\,x^2e^{-x}$

$f'(x) = 0$

Depois faz-se a tabela de sinais, substitui-se a derivada para achar
valores $+$ ou $-$ antes e depois dos zeros.

Onde a derivada for $+$ a função cresce, onde a derivada for $-$ a função decresce.

Cotação a atribuir: $5(1+1+3) + 1(1+0+0) + 0(0^{(*)} + 0^{(*)} + 0^{(*)}) + 0 = 6$

(*) Ver critério geral 8.

4.2. 14

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Equacionar o problema ($f(x) = 4$) 2

Referir que f é contínua em $[-1, 0]$ 2

Calcular $f(-1)$ 2

Calcular $f(0)$ 2

Referir que $f(0) < 4 < f(-1)$ 3

Evocar o Teorema de Bolzano para concluir o pretendido **(ver nota)** 3

Nota:
Se o examinando conclui o pretendido, mas não refere que a conclusão resulta do Teorema de Bolzano, devem ser atribuídos 2 dos 3 pontos previstos para esta etapa.

2.º Processo

Equacionar o problema ($f(x) = 4$) 2

Considerar a função g, definida por $g(x) = f(x) - 4$ 1

Referir que g é contínua em $[-1, 0]$ 1

Calcular $g(-1)$ 2

Calcular $g(0)$ 2

Referir que $g(0)$ e $g(-1)$ têm sinais contrários..... 3

Evocar o Teorema de Bolzano (ou o seu corolário) para concluir o pretendido **(ver nota)** 3

Nota:
Se o examinando conclui o pretendido, mas não refere que a conclusão resulta do Teorema de Bolzano (ou do seu corolário), devem ser atribuídos 2 dos 3 pontos previstos para esta etapa.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$1 + 3\,x^2\,e^{-x} = 4 \Leftrightarrow \underbrace{3\,x^2\,e^{-x} - 3}_{g(x)} = 0$$

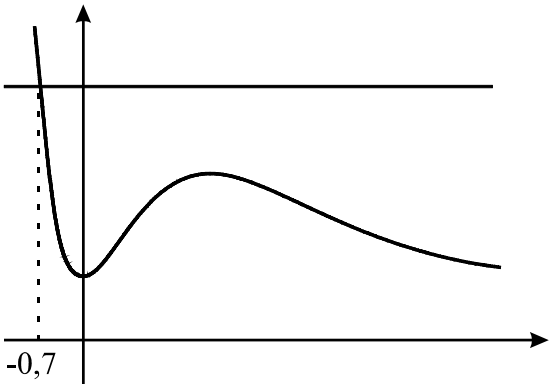
$$g(-1) = 3\,e - 3 \qquad g(0) = -3 \qquad g(-1) \times g(0) < 0$$

Logo, a função g tem pelo menos um zero em $]-1, 0[$

Cotação a atribuir (2.º processo): $2 + 1 + 0 + 2 + 2 + 3 + 2$ (*) $= 12$

(*) O examinando não refere que a conclusão resulta do Teorema de Bolzano.

Exemplo 2



Cotação a atribuir: 0 (*)

(*) Ver critério geral 7.

Exemplo 3

$$1 + 3\,x^2\,e^{-x} = 4 \Leftrightarrow 3\,x^2\,e^{-x} = 3 \Leftrightarrow x^2\,e^{-x} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \vee e^{-x} = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{1}{e}$$

Como $-\frac{1}{e} \in]-1, 0[$, é verdade.

Cotação a atribuir (1.º processo): $2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 2$

5.1. 14

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, quatro processos:

1.º Processo

Substituir, na expressão da função V, x por 2π **(ver nota 1)** 10

$V(2\pi) \approx 503$ **(ver nota 2)** 4

Notas:

1. Se o examinando substituir, na expressão da função V, x por 360, deve ser penalizado em 5 pontos.

2. Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às unidades, ou não o arredondar correctamente, deve ser penalizado em 2 pontos.

2.º Processo

Substituir, na expressão da função V, x por π 3

$V(\pi) \approx 251{,}327$ 4

$2 \times 251{,}327 \approx 503$ **(ver nota 1)** 7

Notas:

1. Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às unidades, ou não o arredondar correctamente, deve ser penalizado em 2 pontos.

2. Se o examinando substituir, na expressão da função V, x por 180, deve ser penalizado em 5 pontos, na cotação total a atribuir à alínea, sem prejuízo do critério geral 1.

3.º Processo

$V'(x) = 80\,(1 - \cos x)$.....2

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1$ 1

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2\pi$ **(ver nota 1)** 2

$V'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]\,0\,,2\pi\,[$ **(ver nota 2)** 1

Concluir que a função é máxima para $x = 2\pi$ **(ver nota 2)** 2

Substituir, na expressão da função V, x por 2π.....2

$V(2\pi) \approx 503$ **(ver nota 3)** 4

Notas:

1. O examinando pode começar por indicar a expressão geral dos ângulos cujo co-seno é 1, e só depois indicar as soluções da equação $V'(x) = 0$, no domínio da função V. Neste caso, os 2 pontos atribuídos à equivalência $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2\pi$ deverão ser distribuídos da seguinte forma:

$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ 1
$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2\pi$ 1

2. O examinando pode apresentar o estudo do sinal da derivada e da monotonia da função, por meio de um quadro. Neste caso, se o domínio da função V não for respeitado, deve ser atribuído 1 dos 3 pontos previstos para estas duas etapas.

3. Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às unidades, ou não o arredondar correctamente, deve ser penalizado em 2 pontos.

4. Se o examinando utilizar a unidade grau, em vez da unidade radiano, deve ser penalizado em 5 pontos, na cotação total a atribuir à alínea, sem prejuízo do critério geral 1.

4.º Processo

Esboçar o gráfico da função V, obtido na calculadora **(ver nota 1)** 2

Valor pedido ≈ 503 **(ver notas 2 e 3)** 12

Notas:

1. Se o examinando não respeitar o domínio da função V, que é o intervalo $[0, 2\pi]$, deve ser penalizado em 1 ponto.

2. Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às unidades, ou não o arredondar correctamente, deve ser penalizado em 2 pontos.

3. O examinando pode obter este valor, a partir do gráfico, por dois processos diferentes: ou procura directamente o máximo da função V, ou começa por encontrar o maximizante e determina a sua imagem.
No primeiro caso, terá de existir evidência da procura do máximo da função (por exemplo, indicando, no gráfico, a ordenada do ponto correspondente), sem a qual não devem ser atribuídos os 12 pontos deste passo.
No segundo caso:
- a substituição de x por 2π (ou por um valor aproximado de 2π), na expressão de V, deve ser cotada com 8 pontos;
- o cálculo de $V(2\pi)$ deve ser cotado com 4 pontos;
- se o examinando utilizar a unidade grau, em vez da unidade radiano, deve ser penalizado em 5 pontos, na cotação total a atribuir à alínea, sem prejuízo do critério geral 1.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$V(x) = 80(2\,\pi - sen\,2\pi) \approx 503$

Cotação a atribuir (1.º processo): $10 + 4 + (-1)^{(*)} = 13$

(*) Deve ser descontado 1 ponto, na cotação total a atribuir à resposta, pois o examinando escreve uma expressão inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal: $V(x) = 80(2\,\pi - sen\,2\pi)$ - ver critério geral 6.

Exemplo 2

$V(2\pi) = 80(2\,\pi - sen\,2\pi) = 160\,\pi - 80\,sen\,2\pi = 160\,\pi - 0 = 160\,\pi$

Cotação a atribuir (1.º processo): $10 + 2^{(*)} = 12$

(*) Deve ser penalizado em 2 dos 4 pontos da segunda etapa - ver nota 2 do 1.º processo.

Exemplo 3

$V(180) = 80(180 - sen\,180) = 80 \times 181 = 14480$

Cotação a atribuir (2.º processo): $3 + 0 + 0 + (-5)^{(*)} = -2 \rightarrow 0^{(**)}$

(*) Ver nota 2 do 2.º processo.

(**) Ver critério geral 1.

Exemplo 4

$V'(x) = 80 - 80\,cos\,x = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k\,2\,\pi$

$k = 1 \Rightarrow x = 6{,}28$

$k = 2 \Rightarrow x = 12{,}57$

	0		6,28		12,57	$+\infty$
$V'(x)$		+	0	+	0	+
$V(x)$		↗		↗		↗

A função V é crescente em todo o seu domínio. Desta forma, quanto maior for a amplitude do arco ABC maior será a capacidade do depósito.

Cotação a atribuir (3.º processo): $2 + 1^{(*)} + 1^{(**)} + 1^{(***)} + 0^{(***)} + 0 + 0 = 5$

(*) Etapa implícita (ver critério geral 4.5).

(**) Nota 1 do 3.º processo.

(***) Nota 2 do 3.º processo.

Exemplo 5

$0 \leq sen\,x \leq 1$

$x - 0 \leq x - sen\,x \leq x - 1$

$80(x - 0) \leq 80(x - sen\,x) \leq 80(x - 1)$

Cotação a atribuir: 0

5.2. 14

Equacionar o problema: $V(x) = 300$ **(ver nota 1)** 4

Explicação do método utilizado para resolver graficamente a equação **(ver nota 2)**.....5

$x \approx 3{,}4$ **(ver nota 3)** 5

Notas:

1. O examinando pode não apresentar (explicitamente) esta equação. Havendo evidência de que o examinando procura, por algum processo, o objecto cuja imagem, por meio de V, é 300, deverá ser-lhe atribuída a cotação de 4 pontos.

2. A explicação do método utilizado deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

Apresentação do gráfico da função V (que respeite o domínio $[0,\ 2\pi]$), bem como do ponto de ordenada 300 e respectiva abcissa	5
Apresentação do gráfico e do ponto referidos, com algumas incorrecções (por exemplo, o gráfico de V não respeita o domínio) e/ou ausência de alguns elementos	3 ou 4
Ausência de explicação, simples referências do tipo "*Vi na calculadora*" ou utilização de um processo não gráfico, como, por exemplo, uma tabela	0

3. A escrita da solução da equação deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

1.º Caso (apresentação do resultado arredondado às décimas, de acordo com o enunciado):

Resposta $3{,}4$	5
Resposta $3{,}5$	3
Resposta $3{,}3$ ou $3{,}6$	2
Outros resultados	0

2.º Caso (apresentação do resultado com aproximação superior às décimas):

Valor no intervalo $[3{,}44\ ;\ 3{,}46]$ 3

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[3{,}40\ ;\ 3{,}50]$ 2

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[3{,}30\ ;\ 3{,}60]$ 1

Outros resultados 0

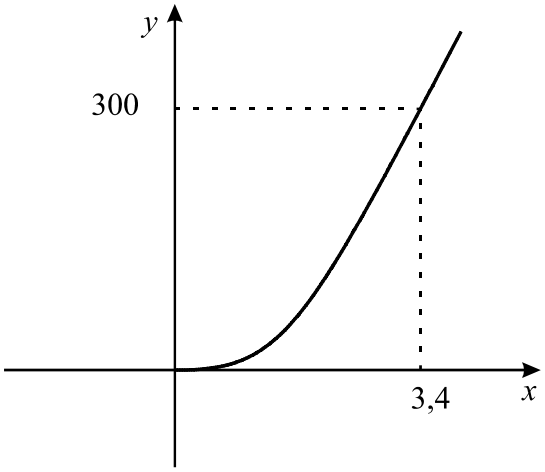
3.º Caso (apresentação do resultado arredondado às unidades):

Valor igual a 3 1

Outros resultados 0

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1



A amplitude terá de ser de 3,4 radianos para que existam 300 m^3 de combustível no depósito.

Cotação a atribuir: $4^{(*)} + 5 + 5 = 14$

(*) Ver a nota 1 (página anterior).

Exemplo 2

$300 = 80(x - sen\, x)$

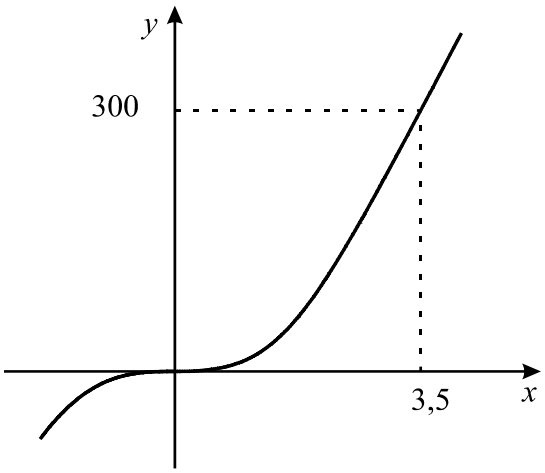
Indo à tabela, verifica-se que, quando $x \approx 3{,}5 \quad y \approx 300$

Cotação a atribuir: $4 + 0^{(*)} + 0^{(*)} = 4$

(*) O examinando desrespeita a indicação, expressa no enunciado, de que se pretendia uma resolução gráfica da equação.

Exemplo 3

$80(x - sen\,x) = 300$



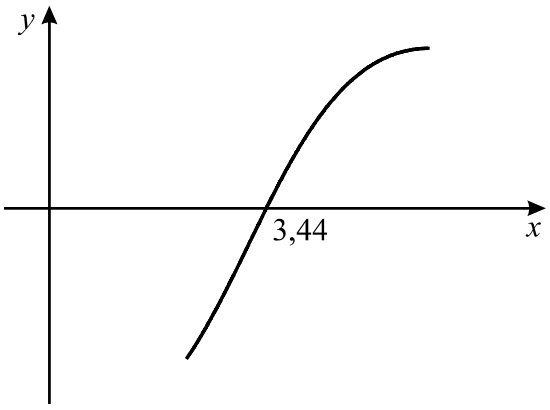
Para que existam 300 m^3 de combustível no depósito, o ângulo terá de ter uma amplitude de 3,5 radianos.

Cotação a atribuir: $4 + 4^{(*)} + 3 = 11$

(*) O gráfico apresentado pelo examinando não respeita o domínio da função (uma parte do gráfico está contida no terceiro quadrante), mas contém todos os elementos necessários.

Exemplo 4

$80(x - sen\,x) = 300 \Leftrightarrow x - sen\,x = \frac{300}{80} \Leftrightarrow x - sen\,x - 3{,}75 = 0$



$x \approx 3{,}44$

Cotação a atribuir: $4 + 5 + 3 = 12$

5.3. 14

$x = \frac{2\pi}{3}$ **(ver nota 1)**..... 12

Escrever uma equação trigonométrica que conduza à resolução do problema..... 6

Solução da equação 3

Valor de x 3

$V\left(\frac{2\pi}{3}\right) \approx 98$ **(ver notas 2 e 3)**.....2

Notas:

1. O examinando pode recorrer a um esquema para concluir que $x = \frac{2\pi}{3}$.

Neste caso, a cotação a atribuir a esta etapa deverá ser feita do seguinte modo:

Esquema adequado, acompanhado de justificação correcta e completa.....12

Esquema adequado, mas não acompanhado de justificação 7

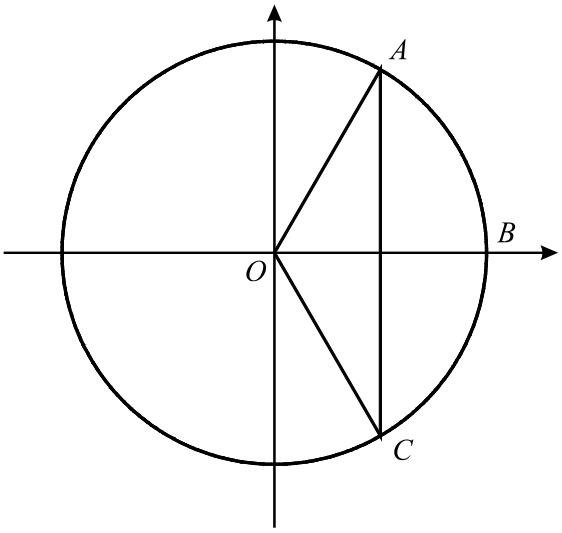
Esquema inadequado 0

2. Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às unidades, ou não o arredondar correctamente, deve ser penalizado em 1 ponto.

3. Não deve ser valorizado o cálculo de expressões do tipo $V\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $V\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $V\left(\frac{1}{4}\right)$, $\frac{V(\pi)}{2}$, etc., a não ser que provenham de algum raciocínio correcto, e o examinando tenha cometido algum erro de cálculo (que tenha conduzido a alguma das expressões referidas, ou a outras do mesmo tipo).

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1



$A\widehat{O}B = C\widehat{O}B \qquad cos\,(A\widehat{O}B) = 0{,}5 \;\text{ logo }\; A\widehat{O}B = \frac{\pi}{3}$

$A\widehat{O}C = 2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \qquad V\left(\frac{2\pi}{3}\right) \approx 98$

Cotação a atribuir: $12(6+3+3)+2 = 14$

Exemplo 2

$x = \frac{\pi}{2}$

$V\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

$= 80\left(\frac{\pi}{2} - sen\,\frac{\pi}{2}\right) =$

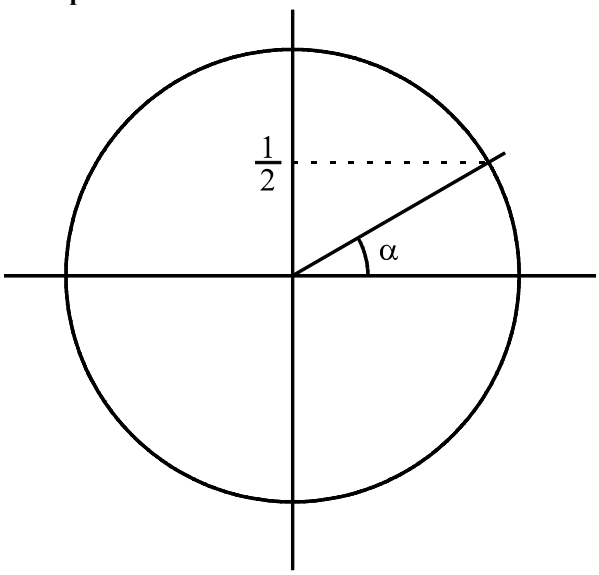
$= 80\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) =$

$= 40\,\pi - 80 \approx 46$

Cotação a atribuir: $0 + 0^{(*)} = 0$

(*) De acordo com a nota 3, não deve ser valorizado o cálculo de $V\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Exemplo 3

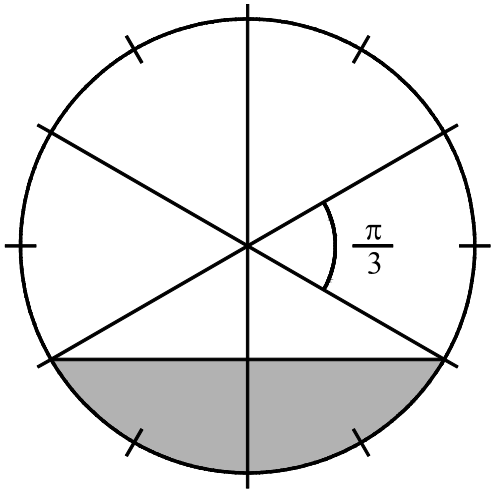


$sen\,\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$ $\qquad \pi + \frac{2\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$ $\qquad 2\pi - \frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

O arco do depósito, quando a altura é $\frac{1}{4}$, é $\frac{2\pi}{3}$ $\quad V\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 80\left(\frac{2\pi}{3} - sen\,\frac{2\pi}{3}\right) \approx 98$

Cotação a atribuir: $12\,(6+3+3)+2 = 14$

Exemplo 4



$x = 2 \times \frac{\pi}{3}$ $\qquad V\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 80\left(\frac{2\pi}{3} - sen\,\frac{2\pi}{3}\right) \approx 98$

Cotação a atribuir: $7^{(*)} + 2 = 9$

(*) Ver nota 1.

5.4. 14

Na tabela seguinte, indica-se como esta questão deve ser cotada:

Forma / Conteúdo	**Nível 1** (∗)	**Nível 2** (∗)	**Nível 3** (∗)
O examinando exclui **correctamente** três opções.	14	12	10
O examinando exclui **correctamente** duas opções.	9	7	5
O examinando exclui **correctamente** uma opção.	5	3	1

(∗) **Nível 1** - Redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).

Nível 2 - Redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecte a inteligibilidade.

Nível 3 - Redacção confusa, sem estruturação aparente, presença de erros graves, com perturbação frequente da inteligibilidade.

Pode acontecer que uma composição não se enquadre completamente num dos três níveis descritos e/ou contenha características presentes em mais do que um deles. Nesse caso, deverá ser atribuída uma pontuação intermédia.

Nota:
Se o examinando se limitar a escolher uma das opções (correcta ou não), não apresentando qualquer justificação, deverá ser-lhe atribuída a cotação de 0 pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1
O gráfico C não se adequa à situação descrita pois, à medida que o tempo passa, a altura do combustível no depósito nunca diminui.
O gráfico D também não é o correcto, pois, neste gráfico, a taxa de variação, em cada instante, é constante. Ora, dada a forma do depósito, há instantes em que a taxa de variação da altura do combustível é maior do que noutros, pelo que a taxa de variação não é constante.
O gráfico A também não traduz a situação descrita, porque, dada a forma do depósito, é nos primeiros e nos últimos instantes que a taxa de variação da altura do combustível é maior, ao contrário do que o gráfico A nos mostra.
Portanto, o gráfico correcto é o gráfico B.

Cotação a atribuir: $14^{(*)}$
(*) o examinando exclui correctamente três opções, numa redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).

Exemplo 2
A curva C nunca poderia ser, pois a altura do combustível nunca poderia diminuir.
A curva D também não demonstra o que acontece, pois o tempo não é directamente proporcional à altura.
Penso que será a curva A, pois a altura do combustível irá aumentar com o tempo, e quando o depósito estiver cheio, o volume do combustível mantém-se constante e, consequentemente, a altura.

Cotação a atribuir: $9^{(*)}$
(*) o examinando exclui correctamente duas opções (gráficos C e D), numa redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).

Exemplo 3
O gráfico B não pode ser aceite pois a altura nunca estabiliza, continuando sempre a crescer.
O gráfico C também não pois este indica que a determinado ponto a altura ia começar a diminuir.
O gráfico D também não pode ser o da função h pois a altura aumenta sempre, como se o depósito não tivesse limites.
Portanto, o gráfico correcto é o gráfico A.

Cotação a atribuir: $3^{(*)}$
(*) o examinando exclui correctamente uma opção (gráfico C), numa redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecta a inteligibilidade.

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO EXAME NACIONAL DE MATEMÁTICA (PROVA 435)

Grupo I

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	B	C	B	C	C	A	C
Versão 2	A	B	D	C	A	D	A

Grupo II

1.

$$\frac{z_1 + i^{23}}{z_2} = \frac{-6 + 3i - i}{1 - 2i} = \frac{-6 + 2i}{1 - 2i} = \frac{(-6 + 2i)(1 + 2i)}{1 + 4} = -2 - 2i$$

$$p = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-2}{-2} = 1, \quad \theta \in 3^{\text{o}} \text{ Quadrante}$$

logo

$$\theta = \frac{5\pi}{4}$$

R: $2\sqrt{2}\text{cis}\frac{5\pi}{4}$

2. Seja $z = p\text{cis}\theta$; então $z^3 = p^3\text{cis}\,(3\theta)$

Se a imagem geométrica de z pertence ao primeiro quadrante, então

$$0 < \theta < \frac{\theta}{2}.$$

Logo

$$0 < 3\theta < \frac{3\pi}{2}$$

e a imagem geométrica de z^3 estará por isso nos quandrantes um, dois e três, logo não pode pertencer ao quarto quadrante.

3.

3.1 Retirando simultaneamente e ao acaso duas moedas do bolso, o João poderá obter duas moedas de 1 euro, duas moedas de 50 cêntimos ou 1 moeda de cada um dos valores; consequentemente poderá perfazer a quantia de 2 euros, 1 euro ou 1,5 euros. Calcular a probabilidade de obter cada uma destas quantias equivale a calcular a probabilidade de retirar duas moedas nas condições referidas.

Sendo X a variável definida no enunciado, vem:

$$p(X=2) = \frac{{}^2C_2}{{}^6C_2} = \frac{1}{15}$$

$$p(X=1) = \frac{{}^4C_2}{{}^6C_2} - \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$p(X=1,5) = \frac{{}^2C_1 \times {}^4C_1}{{}^6C_2} = \frac{8}{15}$$

Em resumo, a tabela pedida é:

x_i	2	1,5	1
$p(x = x_i)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{5}$

3.2. Estão em jogo dois acontecimentos:

A: "as moedas retiradas são iguais"

B: "a quantia retirada é de 2 euros"

Calcular a probabilidade de a Inês ganhar a aposta equivale a calcular a probabilidade de ocorrer o acontecimento B sabendo que ocorreu o acontecimento A. Trata-se, por isso, de calcular uma probabilidade condicionada, $p(B/A)$.

Posto isto, basta calcular a probabilidade de obter a quantia de 2 euros, sabendo que sairam duas moedas iguais:

número de casos possíveis: ${}^4C_2 + {}^2C_2 = 7$ número de casos favoráveis: ${}^2C_2 = 1$

$$p(B/A) = \frac{1}{7}$$

4.

4.1. A resposta depende do estudo da monotonia da função $f(x) = 1 + 3x^2e^{-x}$

$$f'(x) = 6xe^{-x} - 3x^2e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3e^{-x}(2x - x^2) = 0 \Leftrightarrow 3e^{-x} = 0 \vee 2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

Atendendo a que $e^x > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$, o sinal de $f'(x)$ coincide com o de $2x - x^2$.

x	$+\infty$	0		2	$-\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	↘	m	↗	M	↘

Por esta tabela se prova que existe um único mínimo cujo valor é $f(0)$, ou seja, é 1.

4.2. Trata-se de confirmar que existe um original, x, entre -1 e 0 tal que $f(x) = 4$.

A função $f(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$ (resulta de operações não restritivas de continuidade sobre funções contínuas) logo é contínua em $[-1, 0]$ e, consequentemente, a função $g(x)$, definida por, $f(x) - 4$, também o é.

Falta agora calcular $g(-1)$ e $g(0)$ para verificar todas as condições do corolário do Teorema de Bolzano

$$g(-1) = -3 + 3e > 0 \qquad g(0) = -3 < 0$$

Como $g(-1)$ e $g(0)$ são de sinais contrários, podemos concluir que $g(x)$ admite pelo menos um zero em $]-1, 0[$. Consequentemente existe pelo menos um objecto nas condições referidas pelo enunciado.

5. $v(x) = 80\ (x - \text{sen}\ x), x \in [0, 2\pi]$

5.1. Basta calcular $v(2\pi)$ e arredondar o resultado às unidades.

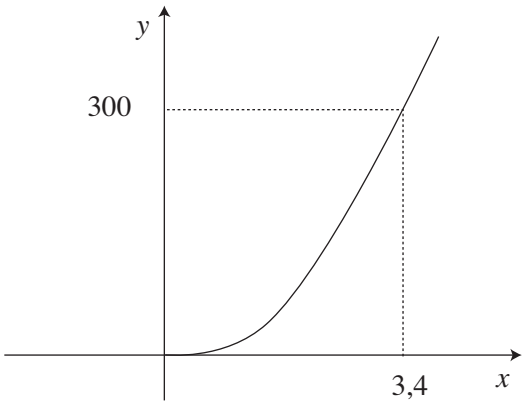
$$v(2\pi) = 160\pi \approx 502,655$$

R: a capacidade é aproximadamente igual a 503m^3

5.2. Uma equação que permite resolver o problema é $v(x) = 300$.

Determinar graficamente a solução desta equação corresponde a determinar a abcissa do ponto de intersecção das funções $v(x) = 80\ (x - \text{sen}\ x)$ e $v(x) = 300$, ou seja, a abcissa dos pontos pertencente ao gráfico da função dada cuja ordenada é 300.

Inserindo estas funções na calculdora, pedindo o gráfico com uma janela de visualização de, por exemplo, $[0, 2\pi] \times [0, 503]$, a máquina mostra



Recorrendo às potencialidades da calculadora a abcissa de P é aproximadamente igual a $3,4$. Portanto, a amplitude do arco pedido é de, aproximandamente, $3,4$ radianos.

5.3. Em primeiro lugar há que calcular a amplitude de x para a qual a altura de enchimento atinge metade do valor do raio da base do depósito, o que equivale a resolver a equação

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{1/2r}{r} \quad (r\text{: comprimento do raio da base})$$

Daqui resulta

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2},$$

portanto

$$x = \frac{2\pi}{3}$$

Substituíndo em $v(x)$ e aplicando o arredondamento pedido obtém-se 98m^3.

5.4. A resposta correcta é o gráfico B.

A solução não pode ser o gráfico D, pois este correspondia à situação de um depósito cuja altura de enchimento fosse directamente proporcional ao tempo decorrido.

Não pode ser o gráfico C pois se a altura regressasse ao zero o depósito não ficaria cheio.

O gráfico A exibe uma taxa de variação de altura mais baixa no início e no fim do enchimento do que no tempo intermédio, o que é contrariado pela posição escolhida para um depósito com a forma descrita, logo também não é solução.

FIM

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **2.ª FASE**

2004 **VERSÃO 1**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui seis questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de onze.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ $(\alpha - \textit{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;}\ \ r - \textit{raio})$

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ $(\alpha - \textit{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;}\ \ r - \textit{raio})$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - \textit{raio da base};\ g - \textit{geratriz})$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - \textit{raio})$

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3$ $(r - \textit{raio})$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\, v + u\,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\, v - u\,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\, u^{n-1}\,.\, u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\, e^u$

$(a^u)' = u'.\, a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Indique o valor de p para o qual se verifica a igualdade $\log_p 16 = 4$

(A) -4 **(B)** 4 **(C)** 2 **(D)** $\sqrt{2}$

2. Sabe-se que:

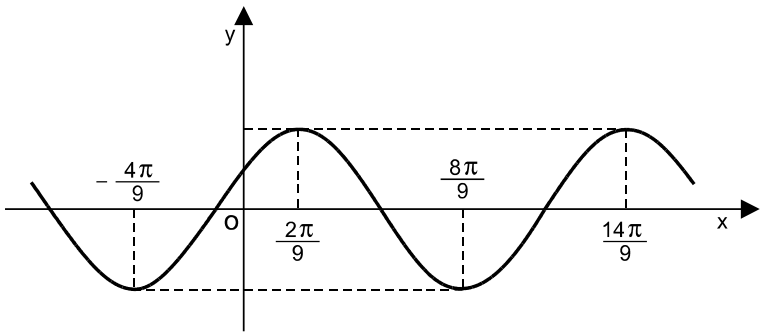
- o **nível de álcool** no sangue de uma pessoa, uma hora depois de ter tomado uma bebida alcoólica, é, numa certa unidade, igual ao quociente entre o peso do álcool ingerido (em gramas) e 70% do peso dessa pessoa (em quilogramas).
- num decilitro de um certo tipo de vinho existem 5 gramas de álcool.

Qual das expressões seguintes dá o **nível de álcool** no sangue de uma pessoa, em função do seu peso x (em quilogramas), uma hora depois de essa pessoa ter bebido dois decilitros desse vinho?

(A) $\frac{10}{70\ x}$ **(B)** $\frac{10}{0{,}7\ x}$

(C) $\frac{2}{70\ x}$ **(D)** $\frac{2}{0{,}7\ x}$

3. Na figura está representada parte do gráfico de uma função periódica.

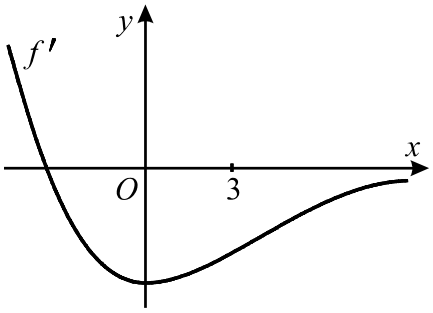


Qual dos valores seguintes poderá ser período desta função?

(A) $\frac{\pi}{9}$ **(B)** $\frac{2\pi}{9}$ **(C)** $\frac{2\pi}{3}$ **(D)** $\frac{4\pi}{3}$

4. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, com derivada finita em todos os pontos do seu domínio.

Na figura junta encontra-se parte do gráfico de f', função derivada de f.



Sabe-se ainda que $f(0) = 2$

Qual pode ser o valor de $f(3)$?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 5 **(D)** 7

5. De quantas maneiras distintas podem ficar sentados três rapazes e quatro raparigas num banco de sete lugares, sabendo que se sentam alternadamente por sexo, ou seja, cada rapaz fica sentado entre duas raparigas?

(A) 121 **(B)** 133 **(C)** 144 **(D)** 156

6. Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Sabe-se que:

$$P(A) = 0{,}3 \qquad P(A \cap B) = 0{,}1 \qquad P(A \cup B) = 0{,}8$$

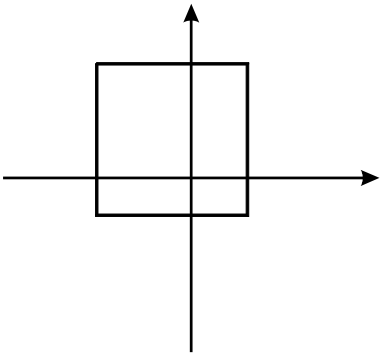
Qual é o valor de $P(\overline{B})$?

(A) $0{,}1$ **(B)** $0{,}2$ **(C)** $0{,}3$ **(D)** $0{,}4$

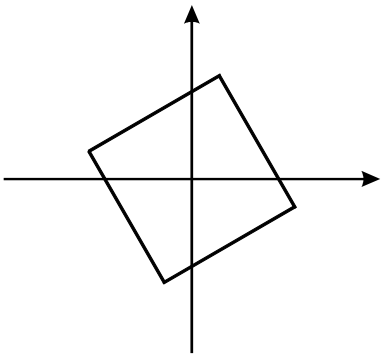
7. Os quatro vértices de um dos quadriláteros seguintes são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes quartas de um certo número complexo w.

Qual poderá ser esse quadrilátero?

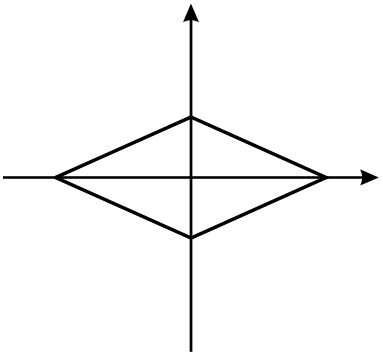
(A)



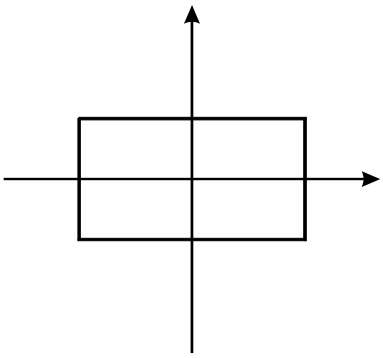
(B)



(C)



(D)



Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$w = 4 - 3\,i \qquad (i \text{ designa a unidade imaginária})$$

1.1. **Sem recorrer à calculadora**, calcule, na forma algébrica, $2\,i + \dfrac{w^2}{i}$

1.2. Seja α um argumento do número complexo w.
Exprima, na forma trigonométrica, em função de α, o produto de i pelo conjugado de w.

2. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$

2.1. **Sem recorrer à calculadora**, resolva as duas alíneas seguintes:

2.1.1. Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

2.1.2. Estude a função f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados.

2.2. O conjunto solução da inequação $f(x) \leq 3 + \ln x$ é um intervalo fechado $[a, b]$ ($\ln$ designa logaritmo de base e).
Recorrendo à sua calculadora, determine, **graficamente**, valores para a e b, arredondados às centésimas.
Nota: apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente, o **gráfico** ou **gráficos** obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos.

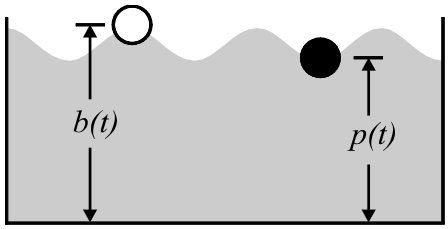
3. Duas bolas de plástico com o mesmo raio, uma branca e outra preta, flutuam na superfície de um líquido contido num recipiente.

Por acção de uma força exterior, o líquido perdeu o estado de repouso em que se encontrava, tendo a distância de cada uma das bolas à base do recipiente deixado de ser constante.

Designando por $b(t)$ e $p(t)$ as distâncias, em cm, dos centros das bolas (branca e preta, respectivamente) à base do recipiente, t segundos após o início da perturbação, admita que se tem:

$$b(t) = 10 + e^{-0,1\,t}\,\text{sen}\,(\pi\,t)\,, \qquad t \geq 0$$

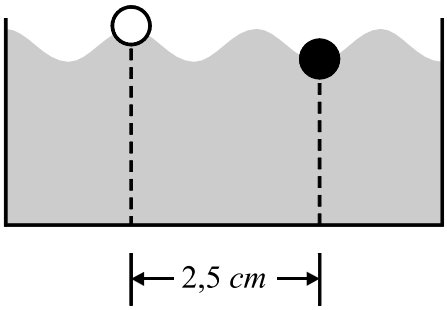
$$p(t) = 10 - 1,37\,e^{-0,1\,t}\,\text{sen}\,(\pi\,t)\,, \qquad t \geq 0$$



3.1. **Sem recorrer à calculadora**, resolva o seguinte problema:

Durante os primeiros cinco segundos após o início da perturbação (instantes 0 e 5 incluídos), houve alguns instantes em que as duas bolas estiveram a igual distância da base do recipiente. Quantas vezes isso aconteceu?

3.2. Determine a distância que vai do **centro da bola branca** ao **centro da bola preta**, meio segundo após o início da perturbação, sabendo que, nesse instante, a distância entre as respectivas projecções horizontais (na base do recipiente) é de $2,5\ cm$. Apresente o resultado em cm, arredondado às décimas.



Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

4. Considere, para cada $\alpha \in]0,1[$, a função, de **domínio** $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x^\alpha$

Prove que, qualquer que seja o valor de $\alpha \in]0,1[$, o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo.

5. Lança-se um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

5.1. Considere os acontecimentos A e B:

A – «sai face par»;

B – «sai um número menor do que 4».

Indique o valor da probabilidade condicionada $P(B|A)$. **Justifique** a sua resposta.

5.2. Considere agora que o dado é lançado três vezes.

Qual é a probabilidade de a face 6 sair, pela primeira vez, precisamente no terceiro lançamento?

Apresente o resultado sob a forma de percentagem, arredondado às décimas.

6. Considere o seguinte problema:

Um saco contém doze bolas, indistinguíveis ao tacto: três bolas com o número 1, cinco bolas com o número 2 e quatro bolas com o número 3. Retiram-se, do saco, três bolas, ao acaso. Qual é a probabilidade de a soma dos números saídos ser igual a cinco?

Uma resposta correcta para este problema é $\frac{{}^3C_2 \times 4 + {}^5C_2 \times 3}{{}^{12}C_3}$

Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explique esta resposta.

Nota:

Deve organizar a sua composição de acordo com os seguintes tópicos:

· referência à Regra de Laplace;

· explicação do número de casos possíveis;

· explicação do número de casos favoráveis.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 11
1.2. 10

2. 42
2.1. 28
2.1.1. 14
2.1.2. 14
2.2. 14

3. 28
3.1. 14
3.2. 14

4. 14

5. 20
5.1. 10
5.2. 10

6. 12

TOTAL **200**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **2.ª FASE**

2004

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 11
1.2. 10

2. 42
2.1. 28
2.1.1. 14
2.1.2. 14
2.2. 14

3. 28
3.1. 14
3.2. 14

4. 14

5. 20
5.1. 10
5.2. 10

6. 12

TOTAL **200**

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Versão 1	C	B	D	A	C	D	B
Versão 2	D	B	A	A	D	B	D

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, no primeiro grupo, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas **Resp. certas**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

Grupo II

Critérios gerais

1. A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro, não negativo, de pontos.

2. Se, numa alínea em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, o examinando se limitar a apresentar o resultado final, deverão ser atribuídos zero pontos a essa alínea.

3. Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

4. Existem alíneas cuja cotação está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para as resolver.

4.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.

4.2. Caso a resolução da etapa esteja incompleta, ou contenha incorrecções, cabe ao classificador decidir a cotação a atribuir a essa etapa, tendo em conta o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:
- erros de contas ocasionais devem ser penalizados em um ponto;
- erros graves, que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades, devem ser penalizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa.

4.3. No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.

4.4. Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.

4.5. Pode acontecer que o examinando, ao resolver uma questão, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

5. Existem alíneas em que estão previstos alguns erros que o examinando pode cometer. Para cada caso, é indicada a cotação a atribuir. O examinando pode, contudo, utilizar um processo não contemplado nos critérios e/ou cometer um erro não previsto. Cabe ao classificador adaptar as referências dadas a todas as situações não previstas.

6. Se, na resolução de uma alínea, o examinando utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), deve ser penalizado em um ponto, na cotação total a atribuir a essa alínea. Esta penalização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas cotadas com 0 (zero) pontos.

7. Se, na resolução de uma alínea, o examinando não respeitar uma eventual instrução, relativa ao método a utilizar (por exemplo, se o enunciado vincular o examinando a uma resolução analítica, sem calculadora, e o examinando a utilizar), a etapa da resolução em que se dá o referido desrespeito bem como todas as subsequentes que dela dependam devem ser cotadas com 0 (zero) pontos.

8. Tudo o que o examinando escrever fora de contexto e que não resulte de trabalho anterior (por exemplo, num exercício de probabilidades, a escrita de uma fracção que não tenha nada a ver com o problema, ou, num exercício de estudo da monotonia de uma função, a apresentação de um quadro fora do contexto) deve ser cotado com 0 (zero) pontos. Todas as etapas subsequentes que dependam do que o examinando escreveu fora de contexto devem ser igualmente cotadas com 0 (zero) pontos.

Critérios específicos

Para cada item são apresentados:

- a cotação total do item;
- para cada processo de resolução apresentado, uma subdivisão da cotação total em cotações parcelares;
- exemplos de possíveis respostas dos examinandos, com a respectiva cotação a atribuir, devidamente explicada.

1.1. 11

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Substituição, na expressão $2\,i + \frac{w^2}{i}$, de w por $4 - 3i$ 1

Cálculo de $(4 - 3i)^2$ 4

Desenvolvimento do quadrado da diferença 2

Restantes cálculos 2

Divisão por i 5

Multiplicação de ambos os termos da fracção por um factor conveniente ($-i$ ou i), **ou** decomposição da fracção numa soma de fracções 1

Restantes cálculos 4

Adição do resultado obtido a $2\,i$ 1

2.º Processo

Substituição, na expressão $2\,i + \frac{w^2}{i}$, de w por $4 - 3i$ 1

Cálculo de $(4 - 3i)^2$ 4

Desenvolvimento do quadrado da diferença 2

Restantes cálculos 2

$2i = \frac{2\,i^2}{i}$ e adição das fracções 2

Divisão por i 4

Multiplicação de ambos os termos da fracção por um factor conveniente ($-i$ ou i), **ou** decomposição da fracção numa soma de fracções 1

Restantes cálculos 3

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$2\,i\,+\,\frac{w^2}{i} \Leftrightarrow 2\,i\,+\,\frac{(4-3i)^2}{i} \Leftrightarrow 2\,i\,+\,\frac{16-24\,i+9\,i^2}{i} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\,i\,+\,\frac{16-24\,i-9\,i}{i} \Leftrightarrow \frac{-2+16-24\,i-9\,i}{i} \Leftrightarrow \frac{14-33\,i}{i}$$

Cotação a atribuir (2.º processo): $1+2\,(2+0)\,+\,2\,+0\,(0+0)+(\,-\,1)^{(*)}=4$

(*) Deve ser descontado 1 ponto, na cotação total a atribuir à resposta, pois o examinando utiliza simbologia inequivocamente incorrecta (escreve o símbolo de equivalência onde deveria estar o símbolo de igualdade) - ver critério geral 6.

Exemplo 2

$$2\,i\,+\,\frac{w^2}{i}=2\,i\,+\,\frac{4-3i}{i}=\,\frac{2\,i^2+4-3\,i}{i}=2\,i\,+\,\frac{4}{i}\,-3$$

Cotação a atribuir (2.º processo): $0^{\,(*)}+0\,(0+0)+\,0^{\,(**)}+1\,(1+0)=1$

(*) Substituição incorrecta, na medida em que o examinando escreve $4-3i$ em vez de $(4-3i)^2$

(**) Apesar de o examinando ter efectuado a redução ao mesmo denominador e indicado a soma dos numeradores, esta passagem é completamente inútil (é como se não existisse), na medida em que, por falta da substituição de $2\,i^2$ por $-\,2$, bem como pela falta de redução dos termos semelhantes, tudo se passa como se o examinando tivesse passado directamente da segunda expressão para a última.

Exemplo 3

$$2\,i\,+\,\frac{w^2}{i}\;=\;2\,i\,+\,\frac{(4-3i)^2}{i}\;=\;2\,i\,+\,\frac{16-9\,i^2}{i}\;=\;2\,i\,+\,\frac{16+9}{i}\;=$$

$$=2\,i\,+\,\frac{25\,(-i)}{i\,(-i)}=2\,i\,+\,\frac{-25\,i}{-i^2}=\;2\,i+25\,i=\;27\,i$$

Cotação a atribuir (1.º processo): $1+2(0+2)\,+\,3(1+2^{(*)})+1=7$

(*) Atribuiu-se 2 dos 4 pontos previstos para esta etapa, pois:

- devido ao erro cometido no desenvolvimento do quadrado da diferença, o grau de dificuldade diminuiu um pouco, pelo que se considerou que a cotação máxima a atribuir a esta etapa deveria ser de 3 pontos, em vez de 4 (ver critério geral 4.4);
- o examinando comete um erro de contas ocasional (erro de sinal), que deve ser penalizado em 1 ponto (ver critério geral 4.2).

Exemplo 4

$$2\,i=2\;cis\,\frac{\pi}{2}\qquad w=4-3\,i\qquad \rho=\sqrt{4^2+(\,-\,3)^2}=5\qquad tg\;\theta=\,-\,\frac{3}{4}$$

Cotação a atribuir: $0^{\,(*)}$

(*) Apesar de correctos, os cálculos apresentados pelo examinando não conduzem à solução do exercício, pelo que esta resposta não pode ser considerada uma resolução incompleta. Observe-se que o examinando só poderia seguir um método baseado na representação trigonométrica, utilizando um valor aproximado para o argumento. Para isso, teria de recorrer à calculadora, processo que contraria a instrução de não utilização da mesma, dada no enunciado (ver critério geral 7).

1.2. 10

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

$w = 5\,cis\,\alpha$ ..... 2 (1+1)

$\overline{w} = 5\,cis\,(-\alpha)$ ..... 3 (1+2)

$i \times \overline{w} = 5\ cis\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ..... 5 (1+4)

Nota:
As subdivisões das cotações indicadas entre parêntesis correspondem: a primeira, à escrita do módulo; a segunda, à escrita do argumento.
Se o examinando determinar um valor aproximado de α, as cotações máximas a atribuir deverão ser, respectivamente, 1 (1+0), 2 (1+1) e 4 (1+3) pontos.

2.º Processo:

$\overline{w} = 4 + 3\,i$ 1

$i \times \overline{w} = -3 + 4\,i$ 2

$i \times \overline{w} = 5\ cis\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ **(ver notas 1 e 2)** ..... 7 (1+6)

Notas:

1. 1+6 significa: 1 ponto pela escrita do módulo, 6 pontos pela escrita do argumento. Estes 6 pontos podem ser subdivididos em 2+4: 2 pontos pela escrita de $-\alpha$ e 4 pontos pela escrita de $\frac{\pi}{2}$.

2. Se o examinando determinar um valor aproximado de um argumento de $i \times \overline{w}$, a cotação máxima a atribuir a esta etapa deverá ser de 2 (1+1) pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$arg\,(w) = \alpha$

$w = \rho\ cis\,\alpha \qquad \overline{w} = \rho\ cis\,(-\alpha)$

$i \times \overline{w} = \rho\ cis\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

Cotação a atribuir (1.º processo): $1(0+1) + 3(1+2) + 5(1+4) = 9$

Exemplo 2

$|\,w\,| = \sqrt{16+9} = 5$

$tg\left(-\frac{3}{4}\right) \approx -0{,}64$

$i \times 5\,cis\,(-0{,}64) = 5\,cis\,(-0{,}64)$

Cotação a atribuir (1.º processo): $1(1+0) + 1(1+0^{(*)}) + 1(1+0)^{(**)} = 3$

(*) O valor $-0{,}64$ é um valor aproximado às centésimas de um argumento de w, e não de $\overline{w}$

(**) Não deve ser descontado 1 ponto, na cotação total a atribuir à resposta, pois, apesar de o examinando escrever a expressão inequivocamente incorrecta $tg\left(-\frac{3}{4}\right) \approx -0{,}64$, as subdivisões da cotação que dizem respeito à escrita dos argumentos foram todas cotadas com 0 (zero) pontos - ver critério geral 6.

Exemplo 3

$w = 4 - 3\,i \qquad \overline{w} = 4 + 3\,i$

$i \times \overline{w} = -3 + 4\,i \qquad |\,i \times \overline{w}\,| = \sqrt{9+16} = 5$

$tg\,\theta = -\frac{4}{3} \qquad \theta \approx -0{,}927$

$i \times \overline{w} = 5\ cis\,(-0{,}927)$

Cotação a atribuir (2.º processo): $1 + 2 + 1\,(1+0^{(*)}) = 4$

(*) O valor $-0{,}927$ não é um valor aproximado às milésimas de um argumento de $i \times \overline{w}$, dado que a imagem geométrica de $i \times \overline{w}$ pertence ao segundo quadrante.

2.1.1. 14

Calcular $f'(x)$ **(ver nota)** 5

Calcular $f'(1)$ 3

Calcular $f(1)$ 2

Escrever a equação reduzida da recta pedida 4

Determinar a ordenada na origem 3

Escrever a equação 1

ou

Escrever a equação $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ 2

Escrever a equação reduzida.....2

Nota:
Se existir evidência de que o examinando pretende determinar a expressão da derivada da função, a cotação mínima a atribuir a esta etapa é 1 ponto.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$f'(x) = \frac{(e^x - 1)' \times x - x'(e^x - 1)}{x^2} = \frac{e^x \times x - e^x - 1}{x^2}$

$f'(1) = -1$ $\qquad$ $f(1) = e - 1$

$y = -x + b$ $\qquad$ $e - 1 = -1 + b \Leftrightarrow b = e$

$y = -x + e$

Cotação a atribuir: $3^{(*)} + 3 + 2 + 4(3 + 1) = 12$

(*) Penalizou-se em 2 pontos o erro cometido no cálculo da derivada (não se considerou ser um erro de contas ocasional).

Exemplo 2

$$f'(x) = \frac{e^x \times x - 1 \times (e^x - 1)}{x^2} = \frac{x\,e^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{e^x(x+1)}{x^2}$$

$$f'(1) = 2\,e = m$$

$$f(1) = e - 1 \approx 2{,}7 - 1 = 1{,}7 \approx 2 \qquad \text{Ponto } (1, 2)$$

$$y - 2 = 2\,e\,(x - 1)$$

Cotação a atribuir: $2^{(*)} + 3 + 1 + 2\,(2 + 0) = 8$

(*) Penalizou-se em 3 pontos o erro cometido na simplificação da expressão da derivada (considerou-se um erro grave) - ver critério geral 4.2.

Exemplo 3

$$f'(x) = e^x \times x - 1 \times (e^x - 1) = x\,e^x - e^x - 1$$

$$f'(1) = -1$$

Cotação a atribuir: $1^{(*)} + 3 + 0 + 0\,(0 + 0) = 4$

(*) Atribuiu-se 1 ponto - ver a nota na página anterior que diz: *se existir evidência de que o examinando pretende determinar a expressão da derivada da função, a cotação mínima a atribuir a esta etapa é 1 ponto*.

Exemplo 4

$$f'(x) = \frac{(e^x - 1)' \times x - x'(e^x - 1)}{x^2} = \frac{e^x \times x - (e^x - 1)}{x^2}$$

$$f'(1) = 1 \qquad m = 1 \Rightarrow \; y = x + b$$

$$1 = 1 + b \;\Leftrightarrow\; b = 0 \qquad y = x$$

Cotação a atribuir: $5 + 3 + 0 + 1\,(0^{(*)} + 1^{(**)}) = 9$

(*) O cálculo de b está conceptualmente incorrecto, dado que o examinando substitui y por 1, que não é a ordenada do ponto de tangência.

(**) Ver critério geral 4.3

2.1.2. 14

Estudar a função quanto à existência de assimptotas verticais do seu gráfico.....4

$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ **(ver nota 1)** 2

Concluir que a recta de equação $x = 0$ não é assimptota vertical do gráfico da função 1

Referir que, pelo facto de a função ser contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, o seu gráfico não admite outras assimptotas verticais 1

Estudar a função quanto à existência de assimptotas horizontais do seu gráfico, quando $x \to +\infty$ 5

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ **(ver nota 2)** 4

Concluir que o gráfico da função não admite assimptota horizontal, quando $x \to +\infty$ 1

ou

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ **(ver nota 3)** 4

Concluir que o gráfico da função não admite assimptota, quando $x \to +\infty$ 1

Estudar a função quanto à existência de assimptotas horizontais do seu gráfico, quando $x \to -\infty$ 5

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ **(ver nota 4)** 4

Concluir que o gráfico da função admite uma assimptota horizontal, de equação $y = 0$, quando $x \to -\infty$ 1

ou

$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ **(ver nota 4)** 2

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ **(ver nota 4)** 2

Concluir que o gráfico da função admite uma assimptota horizontal, de equação $y = 0$, quando $x \to -\infty$ 1

Notas:

1. O examinando poderá calcular separadamente os dois limites laterais no ponto 0. Se o fizer, os 2 pontos relativos a esta etapa deverão ser subdivididos da seguinte forma:

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$ 1

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ 1

2. No cálculo deste limite, exige-se que o examinando explicite o processo utilizado para levantar a indeterminação. Por exemplo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

ou

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{e^x}{x} \left(1 - \frac{1}{e^x} \right) \right] = +\infty$$

Se não o fizer, a cotação máxima a atribuir a esta etapa é de 3 pontos.

3. No cálculo deste limite, exige-se que o examinando explicite o processo utilizado para levantar a indeterminação. Por exemplo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$$

ou

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{e^x}{x^2} \left(1 - \frac{1}{e^x} \right) \right] = +\infty$$

Se não o fizer, a cotação máxima a atribuir a esta etapa é de 3 pontos.

4. No cálculo deste limite, não se exige que o examinando apresente cálculos intermédios.

Se o examinando escrever que está perante uma indeterminação, deverá ser penalizado em, pelo menos, 50% da cotação atribuída à etapa.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1$ $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x} = 1$ Logo, o gráfico não tem assimptota vertical.

Assimptotas não verticais: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{e^x-1}{x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^x-1}{x^2} =$

$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^x}{x^2} + \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-1}{x^2} = +\infty + \frac{-1}{+\infty} = +\infty$

O gráfico não apresenta assimptotas não verticais.

Cotação a atribuir: $3(2+1+0) + 1(0+1^{(*)}) + 1\,(0+0+1^{(*)}) = 5$
(*) O examinando conclui correctamente a não existência de assimptotas não verticais, tendo em conta o resultado obtido.

Exemplo 2

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ Tem uma assimptota vertical: $x = 1$

Assimptotas não verticais: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x-1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x^2} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} + \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x^2} = +\infty + \frac{-1}{+\infty} = +\infty - 0 = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x-1}{x^2} = \frac{0-1}{+\infty} = 0$ Assimptota horizontal: $y = 0$

Cotação a atribuir: $2(2+0+0) + 4(4+0) + 2\,(2+0+0^{(*)}) = 8$
(*) Apesar de o examinando ter concluído a existência de assimptota horizontal $(y = 0)$, quando $x \to -\infty$, não tinha todos os elementos que permitiam obter essa conclusão, dado que apenas calculou o valor de m.

Exemplo 3

$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1$ $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x} = 1$

Logo, o gráfico não tem assimptota vertical; nenhum dos limites laterais é infinito.

Assimptotas horizontais:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} - \lim_{x\to+\infty} 1 = +\infty - 1 = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x-1}{x} = 0$ Só tem assimptota horizontal $(y = 0)$ quando $x \to -\infty$

Cotação a atribuir: $3(2+1+0) + 3(2^{(*)}+1^{(**)}) + 5(4+1) = 11$
(*) O examinando comete um erro grave, pelo que é penalizado em metade da cotação da etapa - ver critério geral 4.2.
(**) Embora não esteja explícito que o gráfico de f não tem assimptota horizontal, quando $x \to +\infty$, considera-se que essa conclusão está implícita na frase «*Só tem assimptota horizontal quando* $x \to -\infty$», pelo que tal conclusão deve receber a cotação indicada (1 ponto) - ver critério geral 4.5.

Exemplo 4

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \left(\frac{0}{0}\right)$ $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

Logo, o gráfico não tem assimptota vertical porque o limite é finito.

Assimptotas horizontais: $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x} = +\infty$

Não existe assimptota horizontal quando $x \to +\infty$ porque o limite é infinito.

$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x-1}{x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x-1}{x} = 0$

Existe uma assimptota horizontal $(y = 0)$ quando $x \to -\infty$

Cotação a atribuir: $3(2+1+0) + 4(3^{(*)}+1) + 3(2^{(**)}+1) = 10$
(*) Ver nota 2
(**) Ver nota 4

2.2. 14

Explicação do método utilizado para resolver graficamente a inequação **(ver nota 1)**.....4

$a \approx 0{,}15$ **(ver nota 2)** 5

$b \approx 2{,}27$ **(ver nota 3)** 5

Notas:

1. Os 4 pontos relativos à explicação do método utilizado devem ser atribuídos de acordo com o seguinte critério:

Apresentação do gráfico da função f e do gráfico da função definida por $3 + \ln x$, bem como dos pontos de intersecção dos dois gráficos e respectivas abcissas (ou apresentação do gráfico de $f(x) - 3 - \ln x$ e respectivos zeros) 4

Apresentação dos gráficos com ausência de alguns elementos (por exemplo, ausência das abcissas dos pontos de intersecção) e/ou com algumas incorrecções (por exemplo, o gráfico da função definida por $3 + \ln x$ não respeita o seu domínio). Não se exige que o examinando coloque uma bola aberta no ponto onde o gráfico de f intersecta o eixo Oy ..... 1 a 3

Ausência de explicação, simples referências do tipo «*Vi na calculadora*» ou utilização de processo não gráfico, como, por exemplo, uma tabela.....0

2. A escrita do valor aproximado pedido (para a) deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

1.º Caso (apresentação do resultado arredondado às centésimas, de acordo com o enunciado):

Resposta $0{,}15$ 5

Resposta $0{,}14$ 4

Resposta $0{,}13$ ou $0{,}16$ 3

Resposta $0{,}12$ ou $0{,}17$ 2

Resposta $0{,}11$ ou $0{,}18$ 1

Outros resultados 0

2.º Caso (apresentação do resultado com arredondamento superior às centésimas):

Valor no intervalo $[0{,}141\ ;\ 0{,}151]$ 3

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[0{,}131\ ;\ 0{,}161]$ 2

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[0{,}121\ ;\ 0{,}171]$ 1

Outros resultados 0

3.º Caso (apresentação do resultado com arredondamento às décimas):

Valor igual a $0{,}1$ ou a $0{,}2$ 1

Outros resultados 0

4.º Caso (apresentação do resultado com arredondamento às unidades):

Qualquer resultado 0

3. A escrita do valor aproximado pedido (para b) deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

1.º Caso (apresentação do resultado arredondado às centésimas, de acordo com o enunciado):

Resposta $2{,}27$ 5

Resposta $2{,}26$ 4

Resposta $2{,}25$ ou $2{,}28$ 3

Resposta $2{,}24$ ou $2{,}29$ 2

Resposta $2{,}23$ ou $2{,}30$ 1

Outros resultados 0

2.º Caso (apresentação do resultado com arredondamento superior às centésimas):

Valor no intervalo $[2{,}263\ ;\ 2{,}273]$ 3

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[2{,}253\ ;\ 2{,}283]$ 2

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[2{,}243\ ;\ 2{,}293]$ 1

Outros resultados 0

3.º Caso (apresentação do resultado com arredondamento às décimas):

Valor igual a $2{,}2$ ou a $2{,}3$ 1

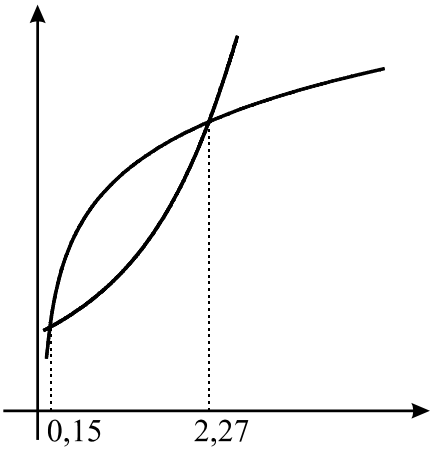
Outros resultados 0

4.º Caso (apresentação do resultado com arredondamento às unidades):

Qualquer resultado 0

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1



$a \approx 0{,}15$

$b \approx 2{,}27$

Cotação a atribuir: $4 + 5 + 5 = 14$

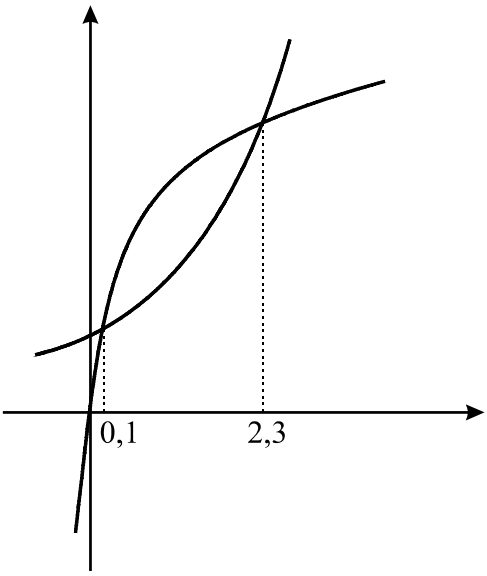
Exemplo 2

Fui à Table e vi que $f(x) \geq 3 + \ln x$ para $x \in [0{,}15\,,\ 2{,}27]$

Cotação a atribuir: $0^{(*)} + 0^{(*)} + 0^{(*)} = 0$

(*) O examinando desrespeita a indicação, expressa no enunciado, de que se pretendia uma resolução gráfica da inequação (ver critério geral 7).

Exemplo 3



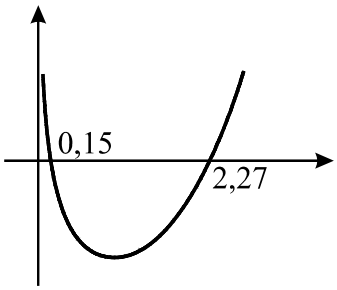
$a \approx 0{,}1 \qquad b \approx 2{,}3$

Cotação a atribuir: $2^{(*)} + 1 + 1 = 4$

(*) O gráfico apresenta as abcissas dos pontos de intersecção, mas não respeita o domínio da função definida por $3 + \ln x$ (uma parte do gráfico desta função está no terceiro quadrante).

Exemplo 4

$$\frac{e^x - 1}{x} \leq 3 + \ln x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^x - 1}{x} - 3 - \ln x \leq 0$$

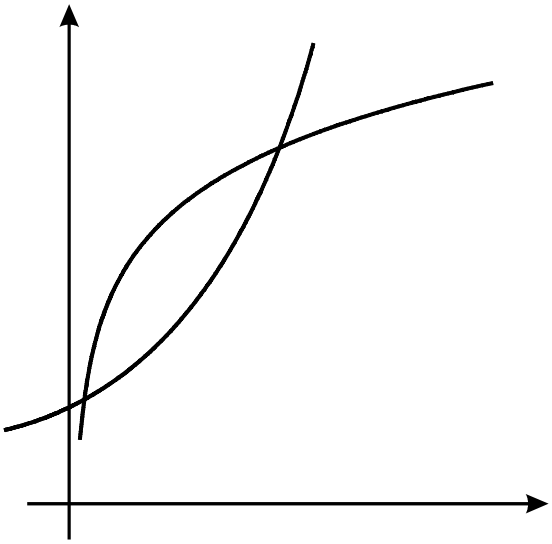


$x \in [0{,}15\,,\ 2{,}27]$

Cotação a atribuir: $4 + 5 + 5 + (-1)^{(*)} = 13$

(*) O examinando comete um erro formal de escrita (o conjunto solução não é o intervalo indicado, já que $0{,}15$ e $2{,}27$ não são os extremos do intervalo, mas sim, valores aproximados desses extremos) - ver critério geral 6.

Exemplo 5



$a \approx 0{,}15$

$b \approx 2{,}27$

Cotação a atribuir: $3^{(*)} + 5 + 5 = 13$
(*) O gráfico não apresenta as abcissas dos pontos de intersecção.

Exemplo 6

$a \approx 0{,}15$

$b \approx 2{,}27$

Cotação a atribuir: $0^{(*)}$
(*) Ver critério geral 2.

3.1. 14

Equacionar o problema: $b(t) = p(t)$ 3

$b(t) = p(t) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-0,1t}\, sen(\pi t) = -1,37\, e^{-0,1t}\, sen(\pi\, t)$.....1

$\Leftrightarrow 2,37\, e^{-0,1t}\, sen(\pi\, t) = 0$.....1

$\Leftrightarrow sen(\pi\, t) = 0$..... 2

$\Leftrightarrow \pi\, t = k\,\pi,\ k \in \mathbb{N}_0$ **(ver nota 1)**.....2

$\Leftrightarrow\ t = k\,,\ k \in \mathbb{N}_0$ 1

$t = k\,,\ k \in \mathbb{N}_0\ \wedge\ t \in [0,5] \Leftrightarrow t \in \{0,1,2,3,4,5\}$ 3

Conclusão (Durante os primeiros cinco segundos, as duas bolas estiveram seis vezes à mesma distância da base do recipiente.) 1

Notas:

1. Se o examinando indicar $k \in \mathbb{Z}$, não deve ser penalizado.

2. Se o examinando se limitar a verificar que $b(0) = p(0)$, ..., $b(5) = p(5)$, não prova que as únicas soluções do problema são $0, 1, 2, 3, 4$ e 5. Esta resposta deverá ser cotada em 7 pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$b(t) = p(t)$

$10 + e^{-0,1t}\, sen(\pi t) = 10 - 1,37\, e^{-0,1t}\, sen(\pi\, t)$

$e^{-0,1t}\, sen(\pi t) = -1,37\, e^{-0,1t}\, sen(\pi\, t)$

$-1,37\, e^{-0,1t}\, sen(\pi\, t) = 0$

Cotação a atribuir: $3 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 4$

Exemplo 2

Estiveram por 6 vezes a igual distância em $t = 0,\ t = 1,\ t = 2,\ t = 3,\ t = 4,\ t = 5,$
porque nestes momentos o seno é sempre igual a zero, logo estiveram a 10 cm da base do recipiente.

Cotação a atribuir: 7 (ver a nota 2, que diz: «*Se o examinando se limitar a verificar que* $b(0) = p(0),\ .....,\ b(5) = p(5)$*, não prova que as únicas soluções do problema são* $0, 1, 2, 3, 4$ *e* 5. *Esta resposta deverá ser cotada em 7 pontos*.»)

Exemplo 3

$$b(t) = p(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10 + e^{-0,1\,t}\ sen\,(\pi\, t) = 10 - 1{,}37\ e^{-0,1\,t}\ sen\,(\pi\ t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,1\,t}\ sen\,(\pi\, t) = -1{,}37\ e^{-0,1\,t}\ sen\,(\pi\ t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\,t}\ sen\,(\pi\, t) = -1{,}37\ e^{\,t}\ sen\,(\pi\ t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow sen\,(\pi\, t)\ \ (e^{\,t} + 1{,}37\ \ e^{\,t}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow sen\,(\pi\, t) = 0\ \vee\ \underbrace{e^{\,t} + 1{,}37\ \ e^{\,t} = 0}_{\text{equação impossível}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 0\ \vee\ \ t = 1\ \vee\ t = 2\ \vee\ \ t = 3\ \ \vee\ \ \ t = 4\ \ \vee\ \ t = 5$$

Estiveram à mesma altura seis vezes.

Cotação a atribuir: $3 + 1 + 0\ +\ 2 + 2^{(*)} + \ 1^{(*)} + 3\ +\ 1 = 13$
(*) Ver critério geral 4.5

3.2. 14

Cálculo de $b\left(\frac{1}{2}\right)$ 2

Cálculo de $p\left(\frac{1}{2}\right)$ 2

Cálculo do cateto desconhecido $\left(b\left(\frac{1}{2}\right)-p\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ **(ver nota 1)** 2

Aplicação do Teorema de Pitágoras e conclusão **(ver nota 1)** 8

Notas:

1. Deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos às duas últimas etapas, no caso em que o examinando não tenha cumprido as duas primeiras. Em particular, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos às duas últimas etapas, no caso em que o examinando utilize valores resultantes de uma tentativa de resolver as equações $b(t)=1/2$ e $p(t)=1/2$.
Obviamente, esta disposição não se aplica quando o examinando, ao tentar cumprir as duas primeiras etapas, comete erros de cálculo.

2. Se o examinando não apresentar o resultado final arredondado às décimas, ou se apresentar um arredondamento incorrecto, deverá ser penalizado em 1 ponto, na cotação total a atribuir à sua resposta.

3. Se o examinando não respeitar a indicação, expressa no enunciado, de conservação de um mínimo de duas casas decimais, nos cálculos intermédios, deverá ser penalizado em 1 ponto, na cotação total a atribuir à sua resposta.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$b\left(\frac{1}{2}\right)=10+e^{-0{,}1\times 0{,}5}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\approx 10+0{,}9=10{,}9$$

$$p\left(\frac{1}{2}\right)=10-1{,}37\,e^{-0{,}1\times 0{,}5}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\approx 10-1{,}37\times 0{,}9\approx 10-1{,}2=8{,}8$$

$10{,}9-8{,}8=2{,}1$ $\qquad$ $2{,}1^2+2{,}5^2=d^2$ $\qquad$ $4{,}4+6{,}25=d^2$

$10{,}65=d^2$ $\qquad$ $d\approx 3{,}3$

Cotação a atribuir: $2+2+2+8+(-1)^{(*)}=13$

(*) O examinando não respeita a indicação, expressa no enunciado, de conservação de um mínimo de duas casas decimais, nos cálculos intermédios, pelo que deverá ser penalizado em 1 ponto, na cotação total a atribuir à sua resposta (ver nota 3).

Exemplo 2

$10 + e^{-0,1\,t}\,\text{sen}\,(\pi\,t) = 0,5 \;\Leftrightarrow\; 20 = -e^{-0,1\,t}\,\text{sen}\,(\pi\,t) \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; ln\,20 = -0,1\,t\,\text{sen}\,(\pi\,t) \;\Leftrightarrow\; t = \frac{ln\,20}{0,1} \Leftrightarrow t = 29,96$

$10 - 1,37\,e^{-0,1\,t}\,\text{sen}\,(\pi\,t) = 0,5 \;\Leftrightarrow\; \frac{20}{1,37} = e^{-0,1\,t}\,\text{sen}\,(\pi\,t) \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; ln\,14,6 = 0,1\,t\,\text{sen}\,(\pi\,t) \;\Leftrightarrow\; t = \frac{ln\,14,6}{0,1} \;\Leftrightarrow\; t = 26,8$

$29,96 - 26,8 = 3,16 \qquad 3,16^2 + 2,5^2 = d^2 \;\Leftrightarrow\; 16,24 = d^2 \;\Leftrightarrow\; d = 4$

Cotação a atribuir: $0 + 0 + 0^{(*)} + 0^{(*)} = 0$
(*) Ver nota 1

Exemplo 3

$b(0,5) = 10 + e^{-0,1\,\times 0,5}\,\text{sen}\,(\pi \times 0,5) \approx 10,45$

$p(0,5) = 10 - 1,37\,e^{-0,1\,\times 0,5}\,\text{sen}\,(\pi \times 0,5) \approx 8,76$

$p(0) = b(0) = 10 \qquad 10,45 - 10 = 0,45 \qquad 10 - 8,76 = 1,24$

$1,24 + 0,45 = 1,69 \qquad 1,69^2 + 2,5^2 = d^2 \qquad d \approx 3,0$

Cotação a atribuir: $1 + 1 + 2^{(*)} + 8^{(*)} = 12$
(*) O examinando utiliza um processo de cálculo do cateto desconhecido que, embora não seja o mais esperado ($b(0,5) - p(0,5)$), está correcto. É, portanto, devido aos erros de cálculo cometidos nas etapas anteriores que o valor obtido ($1,69$) está incorrecto. O Teorema de Pitágoras está também correctamente aplicado e o arredondamento final está igualmente correcto. Portanto, de acordo com o critério geral 4.3, deve ser atribuída a totalidade da cotação às duas últimas etapas.

Exemplo 4

$b(0,5) = 10 + e^{-0,1\,\times 0,5}\,\text{sen}\,(\pi \times 0,5) = 10 + e^{-0,1\,\times 0,5} \times 0 = 10$

$p(0,5) = 10 - 1,37\,e^{-0,1\,\times 0,5}\,\text{sen}\,(\pi \times 0,5) = 10 - 1,37\,e^{-0,1\,\times 0,5} \times 0 = 10$

Uma vez que as duas bolas estão a 10 cm de distância da base do recipiente, a distância entre os centros delas é de 2,5 cm.

Cotação a atribuir: $1 + 1 + 0 + 3^{(*)} = 5$
(*) Como a conclusão está correcta, em face dos valores obtidos para $b(0,5)$ e $p(0,5)$, entendeu-se que deveria ser atribuída alguma pontuação à última etapa. Por outro lado, devido ao erro cometido no cálculo de $b(0,5)$ e $p(0,5)$, o grau de dificuldade da última etapa diminuiu bastante, dado que, neste caso, não tem sentido aplicar o Teorema de Pitágoras. Entendeu-se, assim, que não deveriam ser atribuídos mais de 3 pontos a esta etapa (ver critério geral 4.4).

Exemplo 5

$b(0{,}5) = 10 + e^{-0{,}1 \times 0{,}5} \operatorname{sen}(\pi \times 0{,}5) \approx 10{,}95$

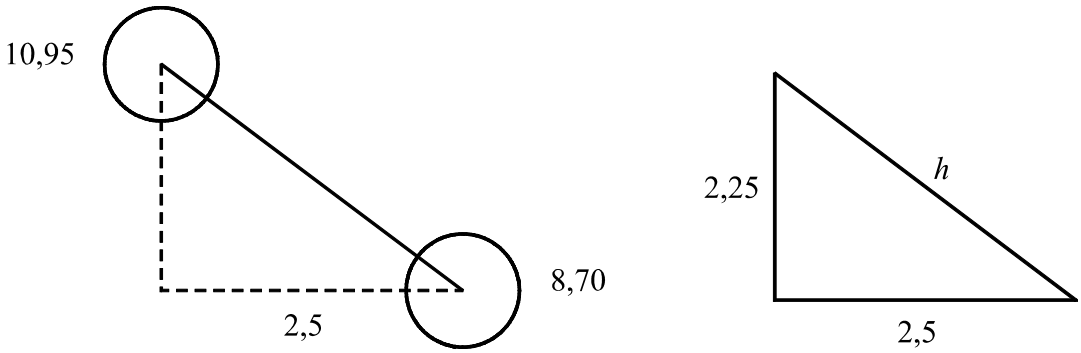
$p(0{,}5) = 10 - 1{,}37\, e^{-0{,}1 \times 0{,}5} \operatorname{sen}(\pi \times 0{,}5) \approx 8{,}70$

$b(0{,}5) - p(0{,}5) \approx 2{,}25$

A distância entre os centros das bolas é de 2,3 cm

Cotação a atribuir: $2 + 2 + 2 + 0 = 6$

Exemplo 6



$h^2 = 2{,}25^2 + 2{,}5^2$

$h^2 = 11{,}3125$

$h \approx 3{,}4$

A distância entre os centros das bolas é de 3,4 cm

Cotação a atribuir: $2^{(*)} + 2^{(*)} + 2 + 8 = 14$
(*) Ver critério geral 4.5.

4. 14

Cálculo da primeira derivada de f 2

Cálculo da segunda derivada de f 4

Estudo do sinal da segunda derivada de f 7

Referência ao facto de $x^{\alpha-2}$ ser positivo, para qualquer x pertencente a $\mathbb{R}^+$ 1

Justificação de que $\alpha(\alpha-1)$ é negativo 5

Referência ao facto de α ser positivo 1
Referência ao facto de $\alpha-1$ ser negativo 4

ou

Estudo do sinal da função quadrática definida por $\alpha^2-\alpha$ e conclusão de que é negativa para $\alpha \in]\,0,1[$ 5

Conclusão de que $f''(x)$ é negativa, para qualquer x pertencente a $\mathbb{R}^+$ 1

Conclusão de que o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo 1

Nota:
Qualquer tentativa de resolução desta questão apoiada apenas em valores particulares de α deverá ser cotada com 0 (zero) pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$f(x)=x^{\alpha}$ $\qquad f'(x)=\alpha\, x^{\alpha-1}$ $\qquad f''(x)=\underbrace{\alpha}_{+}\ \underbrace{(\alpha-1)}_{-}\ \underbrace{x^{\alpha-2}}_{+}<0$

Logo, a concavidade está voltada para baixo.

Cotação a atribuir: $2+4+7\,(1+5\,(1+4\,)+1)+1=14$

Exemplo 2

$f'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}$

$f''(x) = \alpha^2 - \alpha\, x^{\alpha-2}$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f''(x)$	$-$
$f(x)$	

Cotação a atribuir: $2 + 2 + 0 + 0^{(*)} = 4$

(*) O quadro está descontextualizado (o examinando, sabendo que se pretendia provar que a concavidade está voltada para baixo, faz um quadro no qual pretende evidenciar essa conclusão, mas que não resulta da expressão obtida para a segunda derivada) - ver critério geral 8.

Exemplo 3

$\alpha = 0{,}5$

$f(x) = x^{0,5}$

$f'(x) = 0{,}5\, x^{-0,5}$

$f''(x) = -0{,}25\, x^{-1,5}$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f''(x)$	$-$
$f(x)$	

Cotação a atribuir: $0^{(*)}$

(*) Ver a nota que refere «*Qualquer tentativa de resolução desta questão apoiada apenas em valores particulares de* α *deverá ser cotada com 0 (zero) pontos*».

Exemplo 4

$\alpha = \frac{1}{n}$

$f(x) = x^{1/n}$

$f(x) = \sqrt[n]{x}$

Portanto, a concavidade está voltada para baixo.

Cotação a atribuir: $0^{(*)}$

(*) Ver a nota que refere «*Qualquer tentativa de resolução desta questão apoiada apenas em valores particulares de* α *deverá ser cotada com 0 (zero) pontos*».

5.1. 10

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo (sem utilização da fórmula da probabilidade condicionada):

Neste caso, as cotações devem ser atribuídas de acordo com o seguinte critério:

Indicação do valor da probabilidade pedida $\left(\frac{1}{3}\right)$, acompanhado de justificação completa **(ver nota)** 10

Indicação do valor da probabilidade pedida $\left(\frac{1}{3}\right)$, acompanhado de justificação não totalmente completa e/ou com algumas incorrecções ..... 6 a 8

Indicação do valor da probabilidade pedida $\left(\frac{1}{3}\right)$, acompanhado de justificação muito incompleta 5

Indicação do valor da probabilidade pedida $\left(\frac{1}{3}\right)$, sem qualquer justificação (ver critério geral 2) 0

Nota:
Apresentam-se a seguir dois exemplos de justificações completas.

Exemplo 1: *Dado que o acontecimento A se realizou, sabemos que saiu face par, pelo que existem três casos possíveis (sair face 2, 4 ou 6), dos quais apenas um (sair face 2) é favorável à realização do acontecimento B.*

Exemplo 2: $A = \{2, 4, 6\}$ $B = \{1, 2, 3\}$ $A \cap B = \{2\}$
$P(B|A) = \frac{\#(A \cap B)}{\#(A)} = \frac{1}{3}$

2.º Processo (com utilização da fórmula da probabilidade condicionada):

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ 1

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ 7

$P(A) = \frac{1}{2}$ 1

$P(B|A) = \frac{1}{3}$ **(ver nota 1)**..... 1

Notas:
1. No caso de o resultado obtido não pertencer ao intervalo $[0, 1]$, não deve ser atribuído o ponto relativo a esta etapa.

2. Se o examinando utilizar uma fórmula incorrecta (por exemplo $P(B|A) = \frac{P(A \cup B)}{P(A)}$, $P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)}$ ou $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$), deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos à sua resposta.

3. Se o examinando escrever $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3}$, não explicitando que $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ e que $P(A) = \frac{1}{2}$, deve ser atribuída a cotação de 8 pontos à sua resposta.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$A = \{2, 4, 6\}$ $B = \{1, 2, 3\}$ $P(B|A) = \frac{1}{3}$

Cotação a atribuir (1.º processo): $5^{(*)}$

(*) Indicação do valor da probabilidade pedida, acompanhado de justificação muito incompleta.

Exemplo 2

$A \cap B$: sair face par e sair número menor que 4 A: sair face par $P(B|A) = \frac{A \cap B}{A} = \frac{1}{3}$

Cotação a atribuir (1.º processo): $6^{(*)}$

(*) Indicação do valor da probabilidade pedida, acompanhado de justificação com uma incorrecção grave.

Exemplo 3

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Cotação a atribuir (2.º processo): $1 + 0 + 1 + 1 = 3$

Exemplo 4

$$P(B|A) = \frac{P(A \cup B)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{3}$$

Cotação a atribuir (2.º processo): $0^{(*)}$

(*) Ver nota 2.

Exemplo 5

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3}$$

Cotação a atribuir: (2.º processo) $8^{(*)}$

(*) Ver nota 3.

5.2. 10

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Probabilidade pedida $= \frac{5^2}{6^3}$ **(ver notas 1, 2, 3 e 4)**.....9

Probabilidade pedida $\approx 11{,}6\%$ **(ver nota 5)**..... 1

Notas:

1. O examinando pode começar por indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis e só depois escrever a fracção.
No entanto, se não o fizer, isto é, se escrever directamente a fracção, não deverá ser penalizado.

2. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da fracção, com a respectiva cotação a atribuir.

$\frac{5^2}{6^3}$ (fracção correcta)..... 9

Outras fracções com denominador 6^3 3

Outras situações 0

3. Se o examinando indicar correctamente o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverão ser atribuídos 8 pontos à sua resposta.

4. Se o examinando indicar correctamente apenas o número de casos possíveis $\left(6^3\right)$ ou apenas o número de casos favoráveis $\left(5^2\right)$, deverão ser atribuídos 2 pontos à sua resposta.

5. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos. No caso de o resultado obtido ser negativo ou superior a 100%, também não deve ser atribuído o ponto relativo a esta etapa.

2.º Processo:

Probabilidade pedida $= \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$ **(ver nota 1)**.....9

Probabilidade pedida $\approx 11{,}6\%$ **(ver nota 2)**..... 1

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão que dá a probabilidade pedida, com a respectiva cotação a atribuir.

$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$ (expressão correcta)..... 9

$\left(\frac{5}{6}\right)^3$ ou $\left(\frac{1}{6}\right)^3$ ou $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$ ou

${}^3C_1 \times \left(\frac{1}{6}\right)^1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2$..... 3

Outras situações 0

2. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos. No caso de o resultado obtido ser negativo ou superior a 100%, também não deve ser atribuído o ponto relativo a esta etapa.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$p = \frac{1}{{}^6A'_3} = \frac{1}{216} \approx 0{,}005 = 0{,}5\%$

Cotação a atribuir (1.º processo): $3 + 1 = 4$

Exemplo 2

$p = {}^3C_1 \times \left(\frac{1}{6}\right)^1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{25}{36} \approx 34{,}7\%$

Cotação a atribuir (2.º processo): $3 + 1 = 4$

6. 12

A composição deve contemplar os seguintes pontos:

1. Referência à Regra de Laplace.
   1.1. Referir a equiprobabilidade dos casos possíveis.
   1.2. Referir que a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis.
2. Explicação do valor $^{12}C_3$ (número de casos possíveis) - o examinando deverá referir que $^{12}C_3$ é o número de maneiras de retirar três bolas, de entre doze.
3. Explicação da contagem do número de casos favoráveis:
   3.1. Referir que existem duas hipóteses em alternativa: ou se retiram duas bolas com o número 1 e uma bola com o número 3, ou se retiram duas bolas com o número 2 e uma bola com o número 1.
   3.2. Explicação do valor $^3C_2$ - o examinando deverá referir que $^3C_2$ é o número de maneiras de retirar duas bolas, de entre as três que têm o número 1.
   3.3. Explicação do valor 4 - o examinando deverá referir que 4 é o número de maneiras de retirar uma bola, de entre as quatro que têm o número 3.
   3.4. Explicação do valor $^5C_2$ - o examinando deverá referir que $^5C_2$ é o número de maneiras de retirar duas bolas, de entre as cinco que têm o número 2.
   3.5. Explicação do valor 3 - o examinando deverá referir que 3 é o número de maneiras de retirar uma bola, de entre as três que têm o número 1.

Na tabela seguinte indica-se como esta questão deve ser cotada:

Forma / **Conteúdo**	Nível 1 ($*$)	Nível 2 ($**$)	Nível 3 ($***$)
A composição contempla os oito pontos.	12	11	10
A composição contempla sete pontos.	10	9	8
A composição contempla seis pontos.	8	7	6
A composição contempla cinco pontos.	6	5	5
A composição contempla quatro pontos.	5	4	4
A composição contempla três pontos.	4	3	3
A composição contempla dois pontos.	3	2	2
A composição contempla um ponto.	2	1	1

($*$) **Nível 1** - Redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).

($**$) **Nível 2** - Redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecte a inteligibilidade.

($***$) **Nível 3** - Redacção confusa, sem estruturação aparente, presença de erros graves, com perturbação frequente da inteligibilidade.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

O número de casos possíveis é o número de maneiras de escolher três bolas de um total de doze, pelo que o número de casos possíveis é $^{12}C_3$.

Para que a soma dos números saídos seja 5*, ou se retiram duas bolas com o número* 1 *e uma bola com o número* 3*, ou se retiram duas bolas com o número* 2 *e uma bola com o número* 1.

No primeiro caso, temos de escolher duas bolas com o número 1*, de entre três, e uma bola com o número* 3*, de entre quatro, pelo que existem* $^{3}C_2 \times 4$ *maneiras diferentes de o fazer.*

No segundo caso, temos de escolher duas bolas com o número 2*, de entre cinco, e uma bola com o número* 1*, de entre três, pelo que existem* $^{5}C_2 \times 3$ *maneiras diferentes de o fazer.*

O número de casos favoráveis é, então, $^{3}C_2 \times 4 + {}^{5}C_2 \times 3$.

Uma vez que todos os casos possíveis são equiprováveis, a probabilidade pedida é, de acordo com a Regra de Laplace, $\frac{^{3}C_2 \times 4 + {}^{5}C_2 \times 3}{^{12}C_3}$.

Cotação a atribuir: $12^{(*)}$

(*) A composição contempla os oito pontos, numa redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).

Exemplo 2

Casos possíveis serão todas as hipóteses que existem tendo em conta as condições dadas, ou seja, existindo 12 bolas, elas terão de ser tiradas 3 a 3. É uma combinação pois não interessa a ordem.

Casos favoráveis - podemos tirar duas bolas de 1 e dps uma bola de 3 (existe por isso a multiplicação por 4), dps podemos tirar duas bolas de 2 e juntar uma de 1 que dará 5, existem três bolas de 1, daí a multiplicação por 3.

Regra de Laplace é apenas que a probabilidade de um acontecimento é o número de casos favoráveis sobre (dividir) o nº de casos possíveis.

Por isso, $\frac{^{3}C_2 \times 4 + {}^{5}C_2 \times 3}{^{12}C_3}$ *é a resposta ao problema.*

Cotação a atribuir: $4^{(*)}$

(*) A composição contempla quatro pontos (os pontos 1.2, 2, 3.1 e 3.5), numa redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecta a inteligibilidade.

Exemplo 3

Casos possíveis são todos os acontecimentos que se podem verificar. Logo são conjuntos de 3 bolas feitos a partir das 12 bolas tendo em conta que a ordem de saída não conta é por isso $^{12}C_3$.

Os casos favoráveis são conjuntos de duas bolas 2 + uma bola 1 ou conjuntos de duas bolas 1 + uma bola 3. É assim = às combinações de $^{3}C_2 \times 4 + {}^{5}C_2 \times 3$.

Usa-se a Regra de Laplace $= \frac{\textit{casos favoráveis}}{\textit{casos possíveis}}$.

Cotação a atribuir: $3^{(*)}$

(*) A composição contempla três pontos (os pontos 1.2, 2 e 3.1), numa redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecta a inteligibilidade.

Adenda nº 1 aos critérios de classificação do Exame de Matemática - código 435 - 2ª Fase - 2004

1. Esclarecimento de ordem geral

Em cada questão, a cotação está fraccionada, sendo atribuída, a cada uma das etapas (ou sub-etapas) que o examinando deve percorrer, uma certa cotação máxima.
A cotação a atribuir a cada etapa (ou sub-etapa) deve ser dada de acordo com as indicações do critério geral 4.2. Isto significa que não se pode fraccionar ainda mais a cotação.
Exemplificando: se, numa etapa cotada com 5 pontos, o examinando cometer um erro grave (que revele desconhecimento de conceitos, regras ou procedimentos) não podem ser atribuídos mais de 2 pontos a essa etapa.

2. Esclarecimentos específicos

Questão 1.1.

1. Se o examinando passar directamente de $(4-3i)^2$ para $7-24i$, sem apresentação de cálculos intermédios, deverá ter 0 (zero) pontos nessa etapa, bem como em todas as subsequentes, que dela dependam. O motivo para este procedimento baseia-se na instrução geral que é apresentada no enunciado do grupo II da prova (...apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar...), bem como nos critérios gerais 7 e 8 dos critérios de classificação. De facto, ou o examinando fez o referido cálculo na calculadora, o que está vedado pelo enunciado, ou violou a citada instrução geral. Quer no primeiro caso (por aplicação do critério geral 7), quer no segundo (por aplicação do critério geral 8), deverá ter 0 (zero) pontos na referida etapa, bem como em todas as subsequentes, que dela dependam.
Consideramos que situações do tipo de «*quadrado de um número imaginário (não puro)*» ou de «*produto de dois imaginários (não puros)*» são suficientemente complexas para não se admitir que o examinando escreva directamente o resultado. Não se pode considerar que se trata de uma situação em que se possa aplicar o critério geral 4.5. Apenas se podem considerar abrangidas por este critério as situações onde o cálculo mental é imediato para todos os alunos.
Não proceder desta forma seria abrir um perigoso precedente: até onde se iria admitir que o examinando não apresentasse os cálculos que, por imposição da instrução geral relativa ao grupo II, está obrigado a apresentar?

2. Se o examinando apresentar o resultado final na forma $\frac{a+b\,i}{1}$ deve ser penalizado em 1 ponto, dado que não apresenta o resultado final na forma pedida.

3. Apresentam-se a seguir possíveis erros do examinando no desenvolvimento do quadrado de $4-3i$, com a respectiva cotação a atribuir:

$(4-3i)^2 = 16-24i-9i^2$ ..... 1 ponto (dos 2 previstos para a etapa)

$(4-3i)^2 = 16-24i+3i^2$ ..... 1 ponto (dos 2 previstos para a etapa)

$(4-3i)^2 = 8-24i+6i^2$ ..... 0 pontos (dos 2 previstos para a etapa)

Questão 1.2.

1. Na terceira etapa do 2º processo previsto nos critérios de classificação, os 6 pontos relativos à escrita do argumento só devem ser atribuídos no caso em que essa mesma escrita seja acompanhada por alguma justificação (que poderá assumir a forma de um esquema ou de um desenho).

2. Ainda com respeito à terceira etapa do 2º processo previsto nos critérios de classificação, na nota 1, os 6 pontos relativos à escrita do argumento aparecem subdivididos em 2 + 4. Os 2 primeiros pontos devem ser atribuídos se o examinado evidenciar o conhecimento de que o argumento do conjugado de um complexo é simétrico do argumento desse complexo. Os 4 pontos devem ser atribuídos se o examinado evidenciar o conhecimento de que, ao multiplicar um complexo por i, o argumento é adicionado de $\pi/2$.

3. A resposta $w = 5\,cis\,\alpha, \quad i\,w = 5\,cis\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ deve ser cotada, de acordo com o 1º processo, em 2+0+5=7 pontos.

4. O examinando pode escrever 90 (graus), em vez de $\pi/2$ (radianos).

5. Se o examinando resolver o exercício geometricamente, utilizando uma simetria e uma rotação, deve ser cotado por analogia com o primeiro processo (a simetria bem feita é cotada com 3 pontos e a rotação bem feita é cotada com 5 pontos).

Questão 2.1.1.

1. Se o examinando calcular $f'(1)$ pela definição de derivada, as duas primeiras etapas previstas nos critérios fundem-se numa só, que fica a valer 8 pontos (5+3). A cotação a atribuir a esta nova etapa (fusão das duas) deve ser dada de acordo com os critérios gerais 4.1 e 4.2.

2. Uma situação idêntica à do exemplo 4 dos critérios, mas onde o examinando acrescente $f(1) = 1$, deve ser cotada com
   $5 + 3 + 0 + 4\,(3 + 1) = 12$ pontos.
   No exemplo 4 dos critérios, não existe qualquer evidência de que o valor 1, que o examinando utiliza no cálculo da ordenada na origem, seja $f(1)$ mal calculado. De facto, não só o examinando não manifesta qualquer intenção de calcular $f(1)$, como o valor 1 é o valor obtido pelo examinando para $f'(1)$.

3. Qualquer valor para $f'(1)$ que não resulte de trabalho anterior (cálculo da derivada, pelas regras de derivação ou por definição) deve ser cotado com 0 pontos, bem como toda as etapas subsequentes que dependam deste valor (critério geral 8).

Questão 2.1.2.

1. É atribuído 1 ponto à conclusão de que o gráfico de f não admite assimptota horizontal, quando x tende para $+\infty$. Tal deve ser entendido desta forma: esse ponto deve ser atribuído sse o examinando evidenciar o conhecimento de que o gráfico da função não tem assimptota horizontal, quando é infinito o limite de $f(x)$, ou de $f(x)/x$, quando x tende para infinito.
É também atribuído 1 ponto à conclusão de que o gráfico de f admite assimptota horizontal, quando x tende para $-\infty$. Tal deve ser entendido desta forma: esse ponto deve ser atribuído sse o examinando evidenciar o conhecimento de que o gráfico da função tem assimptota horizontal, quando é finito o limite de $f(x)$, quando x tende para infinito.

2. Não se exige a escrita da equação da assimptota horizontal $(y = 0)$. Basta referir a existência de assimptota horizontal, quando x tende para $-\infty$ (o enunciado pede para estudar a função, quanto à **existência** de assimptotas).

3. Não se aceita, para levantar a indeterminação, um argumento do tipo «*o numerador cresce mais rapidamente do que o denominador*», por falta de rigor científico de uma tal frase. De facto, $2x$ também cresce mais rapidamente do que x, e, no entanto, não é verdade que $\lim_{x\to+\infty}(2x/x) = +\infty$. Uma justificação deste tipo deve ser cotada da mesma forma que uma não justificação, ou seja, de acordo com a nota 2 dos critérios.

4. Na «*cotação a atribuir*» ao exemplo 1 dos critérios existe uma correcção a fazer: onde está
$3(2+1+0)+1(0+1)+1(0+0+1)=5$
deve estar
$3(2+1+0)+1(0+1)+0(0+0+0)=4$

Questão 2.2.

1. Em situação idêntica à do exemplo 1 dos critérios, mas onde o examinando não apresenta a conclusão $a \approx 0,15$ e $b \approx 2,27$, devem ser atribuídos
$4+4+4=12$ pontos.
Numa situação idêntica à do exemplo 1 dos critérios, mas onde o examinando indica também as ordenadas dos pontos e não apresenta a conclusão $a \approx 0,15$ e $b \approx 2,27$, devem ser atribuídos
$4+3+3=10$ pontos.

2. Aceita-se uma resolução em que o examinando apresenta o gráfico da função que toma o valor 0, se x não é solução da inequação e que toma o valor 1, se x é solução da inequação. Na cotação a atribuir, deve ter-se em conta que se considera que este gráfico está correctamente apresentado se:

- os segmentos verticais (correspondentes aos pontos de descontinuidade da função) estiverem a tracejado;
- as bolas abertas e fechadas estiverem devidamente assinaladas (as bolas fechadas devem estar assinaladas na parte do gráfico contida na recta de equação $y = 1$);
- os valores aproximados das abcissas dos pontos de descontinuidade estiverem devidamente assinalados.

3. Se o examinando, enveredando pelo processo do exemplo 4, se engana a passar a expressão que está no segundo membro para o primeiro, e obtém, no primeiro membro, a expressão de uma função que só tem um zero, deve ser cotado com $2 + 0 + 0 = 2$ pontos.

4. A escrita do intervalo $[0,15\,;\,2,27]$ está formalmente incorrecta (pois, por exemplo, 2,269 pertence ao intervalo e não é solução da inequação).
Como tal, a escrita do intervalo deve ser penalizada em 1 ponto.
Os extremos do intervalo são números irracionais
(são as soluções da equação $3 + ln\,x = \frac{e^x - 1}{x}$).
O que se pede não é o intervalo, que não se pode pedir, mas sim valores (arredondados às centésimas) dos extremos do intervalo.

5. A escrita do intervalo $]0,15\,;\,2,27[$ também está formalmente incorrecta.
Como tal, a escrita deste intervalo também deve ser penalizada em 1 ponto.

Questão 3.2.

1. Na nota 3 é indicada uma penalização para o caso de o examinando não respeitar a indicação de conservação de um mínimo de duas casas decimais, nos cálculos intermédios. Aceita-se, contudo, sem penalização, a escrita de 8,7 (em vez de 8,70), desde que seja o único caso de não respeito da referida instrução.

2. Se, numa situação idêntica à do exemplo 6 dos critérios, o examinando escrever $d^2 = 2,25^2 \times 2,5^2$, donde $d \approx 5{,}6$, em vez de $d^2 = 2,25^2 + 2,5^2$, donde $d \approx 3{,}4$, deverão ser atribuídos 4 pontos na etapa relativa à aplicação do Teorema de Pitágoras. Estes 4 pontos têm a seguinte justificação: a etapa vale 8 pontos; o examinando comete um erro grave; pelo critério geral 4.2 não pode ter mais do que 4 pontos; por outro lado, o examinando revela perceber que a chave da resolução do problema está na aplicação do referido teorema e revela possuir alguma ideia do mesmo. Parece, portanto, razoável atribuir 4 pontos.

3. Se, numa situação idêntica à do exemplo 6 dos critérios, o examinando escrever $d = 2,25^2 + 2,5^2$, donde $d \approx 11{,}3$, em vez de $d^2 = 2,25^2 + 2,5^2$, donde $d \approx 3{,}4$, deve receber igualmente 4 pontos na etapa relativa à aplicação do Teorema de Pitágoras.
Se o examinando escrever a igualdade $d^2 = 2,25^2 + 2,5^2$, e depois se esquecer de determinar a raiz quadrada da soma $2,25^2 + 2,5^2$, comete um erro de distracção. Deve ser penalizado em 1 ponto.

4. O examinando pode não utilizar o Teorema de Pitágoras e utilizar um caminho trigonométrico. Também neste caso, a última etapa (8 pontos) deve ser cotada de acordo com os critérios gerais 4.1 e 4.2.

Questão 4.
A apresentação de uma tabela do tipo

α	0		1
f''	0	$-$	0
f			

deve ser cotada com 0 (zero) pontos.

Questão 5.1.
Se o examinando escrever, por exemplo, $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3}$ e depois justificar correctamente o valor 1/3, utilizando o 1º processo, considera-se que o examinando resolveu o problema pelo 1º processo e não pelo 2º processo.
Neste caso, a nota 2, relativa ao 2º processo, não é aplicável.
Mesmo assim, considera-se que se deve penalizar em 3 pontos a resposta do examinando, pelo facto de a fórmula estar incorrecta (apesar de não ter sido utilizada).

Questão 5.2.
A nota 4 deve ser entendida da seguinte forma: se o examinando indicar apenas o número de casos favoráveis ou apenas o número de casos possíveis, deve receber a cotação indicada (2 pontos), dado que se trata de uma resposta incompleta.
Já a escrita de uma fracção que não seja uma das apresentadas deve merecer a cotação indicada (0 pontos), dado que se trata de uma resposta errada. Isto significa que uma resposta onde se indique que a probabilidade pedida é, por exemplo, $5^2/6^2$ deve ser cotada com 0 pontos (apesar do numerador, correspondente ao número de casos favoráveis, estar correcto).

Questão 6.
É importante destacar que, nesta questão, o que se está a avaliar é a capacidade de comunicação, isto é, a capacidade de explicar, em linguagem clara, um certo raciocínio. Portanto, não se está simplesmente a avaliar se o examinando sabe resolver o problema. Pretende-se mais do que isso: pretende-se que o examinando consiga explicar claramente a expressão do enunciado, utilizando uma linguagem rigorosa, do ponto de vista matemático. Assim, a utilização da grelha de classificação desta questão deve ter como pano de fundo estas considerações.

Adenda nº 2 aos critérios de classificação do Exame de Matemática - código 435 - 2ª Fase - 2004

Questão 1.1.
Uma resolução baseada na passagem de w à forma trigonométrica, utilizando um valor aproximado para o argumento, não respeita a indicação, dada no enunciado, de não utilização da calculadora. De acordo com o critério geral 7, a etapa em que se dá o referido desrespeito, bem como todas as subsequentes, que dela dependam, devem ser cotadas com 0 (zero) pontos.

Questão 1.2.
A resposta $iw = 3 + 4i,\ iw = 5\,cis\,(\frac{\pi}{2} + \alpha)$ deve ser cotada, de acordo com o 2º processo, em $0 + 2 + 5(1 + 4(0 + 4))$ pontos (ver nota 2 da Adenda 1, relativa a esta questão).

Questão 2.1.2.

1. A escrita de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ e/ou de $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ e/ou de $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, sem o respectivo cálculo, não merece qualquer pontuação.

2. Se, no cálculo de $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, o examinando escrever $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x - 1}{x} =$ $= \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, sem explicar a primeira passagem, devem ser atribuídos 3 pontos ao cálculo do limite (considera-se equivalente à escrita directa do valor do limite).

3. Se, no estudo das assimptotas verticais, o examinando se limitar a escrever algo como «$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, *portanto há assimptota vertical de equação* $x = 1$» deve ser cotado em zero pontos nesta etapa .

Questão 2.2.

1. Se o examinando, após a apresentação do gráfico, com os pontos de intersecção devidamente assinalados, com as respectivas abcissas correctas, concluir valores para a e para b diferentes dessas abcissas (por exemplo, $a = 0$ e $b = +\infty$), ou indicar, para a e para b, pares ordenados, deverá ter a cotação de 0 (zero) pontos relativamente aos valores de a e de b, pelo que a cotação máxima a atribuir à sua resposta deverá ser de 4 pontos (relativos à apresentação do gráfico).

2. Pode acontecer que o examinando troque, no primeiro membro da inequação, a expressão de $f(x)$ pela expressão de $f'(x)$, calculada na alínea anterior. Considera-se isso um erro de distracção, que deve ser penalizado em 1 ponto. A restante resolução deve ser cotada de acordo com os critérios de classificação e a adenda nº 1.

3. Também pode acontecer que o examinando, ao introduzir na calculadora a expressão de $f(x)$, não coloque o numerador dentro de parêntesis. Considera-se isso um erro grave, que deve ser penalizado em 2 pontos. Nesta situação, os gráficos de f e de g intersectam-se num único ponto, pelo que a cotação máxima a atribuir deve ser $2 + 0 + 0 = 2$ pontos.

Questão 3.1.

1. No contexto da nota 2 dos critérios de classificação, a resposta $b(0) = p(0) = 0$, $b(1) = p(1) = 0, \ldots\ldots\ldots,\ b(5) = p(5) = 0$, deverá ser cotada com 0 (zero) pontos.

2. Se o examinando resolver as equações $b(t) = 10$ e $p(t) = 10$, concluindo que, em ambos os casos, se tem $t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, não prova que não existam outros instantes em que as bolas estejam à mesma altura (diferente de 10). Esta situação deverá ser cotada de acordo com a nota 2 dos critérios, ou seja, com um máximo de 7 pontos.

3. A resposta «$b(0) = p(0) = 10$; $b(5) = p(5) = 10$; *acontece seis vezes porque ao fim de cada segundo, o seno volta a ser zero e a distância volta a ser* 10» considera-se equivalente à da nota 2, pelo que deverá ser cotada com 7 pontos.

Questão 3.2.

1. O cálculo de $p(0{,}3)$ e de $b(0{,}3)$, em vez de $p(0{,}5)$ e de $b(0{,}5)$, deve ser considerado um erro de distracção, que deverá ser penalizado em 1 ponto, em cada um destes cálculos. Esta norma não se aplica a valores completamente disparatados, como, por exemplo, $p(23)$ e $b(23)$.

2. O cálculo de $p(30)$ e de $b(30)$, em vez de $p(0{,}5)$ e de $b(0{,}5)$, também deve ser considerado um erro de distracção (o examinando trabalha em segundos, em vez de minutos), que deverá ser penalizado em 1 ponto, em cada um destes cálculos. Chama-se, contudo, a atenção para o facto de os valores de $p(30)$ e de $b(30)$ serem iguais. As etapas seguintes devem, por isso, ser cotadas tendo em conta o exemplo 4 dos critérios.

3. Se o examinando trabalhar com a máquina em modo graus e escrever $p(0{,}5) \approx 9,96$ e $b(0{,}5) \approx 10,03$, deve ser cotado com um ponto em cada um destes cálculos. A restante resolução deve ser cotada de acordo com os critérios e com a adenda nº 1.

Questão 5.1.

1. A simples referência ao facto de existirem três casos possíveis (sem os explicitar) e um favorável (sem o explicitar) não serve como justificação. Esta situação deve ser cotada com 0 (zero) pontos.

2. Se o examinando referir que «*sair face par é sair 2, 4 ou 6 e sair face menor do que 4 é sair 2*», mas não escrever o valor da probabilidade pedida, a sua resposta deve ser cotada em 5 pontos.

3. Se o examinando apresentar a probabilidade pedida na forma de dízima finita, não respeita a instrução geral de apresentação do valor exacto, quando não é pedida aproximação. Deve ser penalizado em 1 ponto.

Questão 5.1.

O ponto relativo à escrita da probabilidade na forma de percentagem só deve ser atribuído no caso em que a resposta esteja correctamente arredondada às décimas (de acordo com o enunciado).

Questão 6.

Na avaliação do nível da composição (1, 2 ou 3), apenas devem ser tidos em conta os pontos que foram considerados como contemplados pelo examinando.

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO EXAME NACIONAL DE MATEMÁTICA (PROVA435) 2ªFASE

Grupo I

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	C	B	D	A	C	D	B
Versão 2	D	B	A	A	D	B	D

Grupo II

1.1.

$$2i+\frac{w^2}{i}=2i+\frac{(4-3i)^2}{i}=2i+\frac{7-24i}{i}=2i+\frac{7-24i}{i}\times\frac{-i}{-i}=2i+\frac{-24-7i}{1}=-24-5i$$

1.2.

$$|w|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$$

$$w=5cis\alpha \qquad \text{e} \qquad i=cis\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$i\times\overline{w}=cis\left(\frac{\pi}{2}\right)\times 5cis(-\alpha)=5cis\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

2.1.1.

$$f'(x)=\frac{e^x\times x-(e^x-1)}{x^2}=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$$

$$m=f'(1)=\frac{e-e+1}{1}=1 \qquad f(1)=e-1$$

A equação da recta tangente é do tipo $y=x+b$.

Para $x=1$ e $y=e-1$ tem-se: $e-1=1+b\Leftrightarrow b=e-2$

Logo a equação pedida é $y=x+e-2$

2.1.2.

Assimptotas verticais:

$$\lim_{x\to o} f(x)=\lim_{x\to o}\frac{e^x-1}{x}=1$$

Como $\lim_{x\to o} f(x)$ é finito e f é contínua em $IR\setminus\{0\}$ então o gráfico da função não tem assimptotas verticais.

Assimptotas horizontais:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = +\infty - 0 = +\infty$$

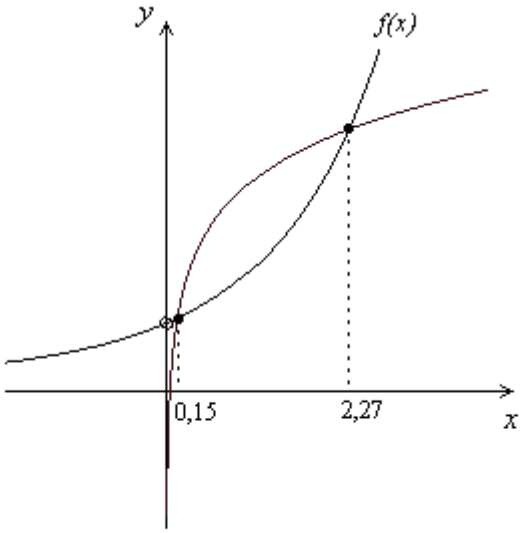
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{0-1}{-\infty} = 0$$

A recta de equação $y = 0$ é assimptota horizontal do gráfico da função quando x tende para $-\infty$.

2.2.

Determinar graficamente o conjunto solução da inequação $f(x) \leq 3 + \ln(x)$ corresponde a determinar a parte do gráfico da função f que fica "abaixo" do gráfico da função $y = 3 + \ln(x)$.

Representando, por exemplo, na janela de visualização $[-2,4] \times [-2,5]$, parte dos gráficos das funções referidas acima e determinando as abcissas dos pontos de intersecção, verifica-se que $a \approx 0,15$ e $b \approx 2,27$.



3.1.

$$b(t) = p(t)$$
$$\Leftrightarrow 10 + e^{-0,1t}\operatorname{sen}(\pi t) = 10 - 1,37e^{-0,1t}\operatorname{sen}(\pi t)$$
$$\Leftrightarrow 2,37e^{-0,1t}\operatorname{sen}(\pi t) = 0$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}(\pi t) = 0$$
$$\Leftrightarrow \pi t = k\pi \ , k \in Z_0^+$$
$$\Leftrightarrow t = k \ , k \in Z_0^+$$

Atribuindo valores a k obtêm-se os seguintes valores para t.

Se $k = 0$ então $t = 0$
Se $k = 1$ então $t = 1$
Se $k = 2$ então $t = 2$
Se $k = 3$ então $t = 3$
Se $k = 4$ então $t = 4$
Se $k = 5$ então $t = 5$

Como $t \in [0,5]$ as bolas estiveram 6 vezes a igual distância da base do recipiente.

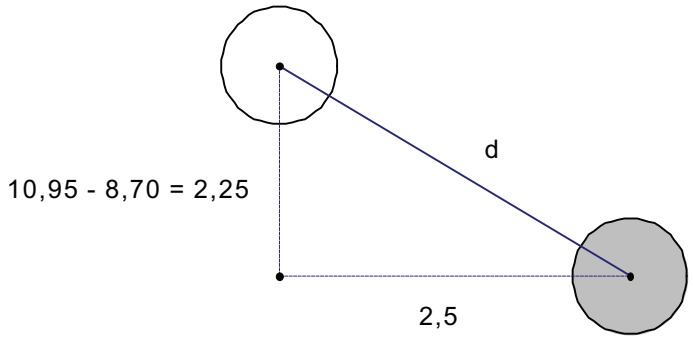
3.2.

$b(0,5) = 10 + e^{-0,1\times 0,5} \times \operatorname{sen}(\pi \times 0,5) \approx 10,95$

$p(0,5) = 10 - 1,37e^{-0,1\times 0,5} \times \operatorname{sen}(\pi \times 0,5) \approx 8,70$

$\mathrm{b}(0,5) - \mathrm{p}(0,5) = 2,25$

$d^2 = 2,25^2 + 2,5^2$
$\Leftrightarrow d^2 = 11,3125$
$\Leftrightarrow d = 3,3634$
$\Leftrightarrow d \approx 3,4\,cm$



Assim, a distância entre os centros das bolas é de aproximadamente 3,4 cm.

4.

$f(x) = x^{\alpha}$
$f'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}$
$f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$

Como $D_f = IR^+$ então $x^{\alpha-2} > 0$
Como $\alpha \in]0,1[$ então $\alpha > 0$ e $\alpha - 1 < 0$
Logo $f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} < 0 \quad \forall\, x \in R^+$

Sendo a segunda derivada negativa o gráfico da função tem a concavidade voltada para baixo em todo o seu domínio.

5. 1.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

5.2.

Dado tararem-se de acontecimentos independentes, para que a face 6 saia pela primeira vez precisamente no terceiro lançamento, terá de não sair face 6 nos primeiros dois lançamentos e sair face 6 no terceiro.

Assim, a probabilidade pedida é dada por: $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216} \approx 11,6\%$

6.

O número de casos possíveis é ${}^{12}C_3$ pois é o número de formas de escolher 3 bolas de um total de 12.

Existem duas possibilidades para que a soma dos números saídos seja 5:

1. saírem duas bolas com o número 1 e uma bola com o número 3;
2. saírem duas bolas com o número 2 e uma com o número 1.

No primeiro caso, existem ${}^{3}C_2 \times 4$ maneiras de fazer a escolha, pois têm de se escolher duas bolas com o número 1 de entre as três e uma bola com o número 3 de entre as quatro.

No segundo caso, existem ${}^{5}C_2 \times 3$ formas de fazer a escolha, devido a ter de se escolher duas bolas com o número dois de entre as cinco e uma bola com o número 1 de entre as três.

Assim sendo, o número de casos favoráveis é ${}^{3}C_2 \times 4 + {}^{5}C_2 \times 3$.

Dado que os acontecimentos são equiprováveis, pela regra de Laplace, a probabilidade pedida é pois $\frac{{}^{3}C_2 \times 4 + {}^{5}C_2 \times 3}{{}^{12}C_3}$.

FIM

Esta proposta de resolução também pode ser consultada em http://www.apm.pt

PROVA 435/9 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **Data Especial**
2004 **Julho**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

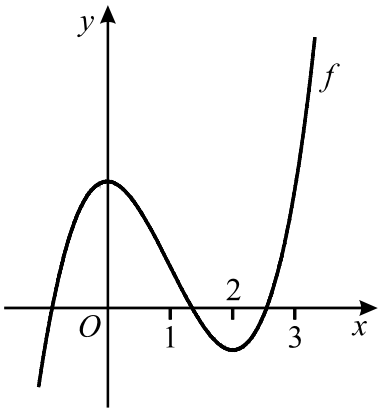
- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas subdivididas em alíneas, num total de onze.

Na página 9 deste enunciado encontra-se um formulário.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Na figura junta está parte da representação gráfica de uma função f, polinomial do terceiro grau.



Seja f'' a **segunda** derivada de f.

Qual dos valores seguintes pode ser solução da equação $f''(x) = 0$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3

2. Seja g uma função de domínio $\mathbb{R}^+$.

Sabe-se que:

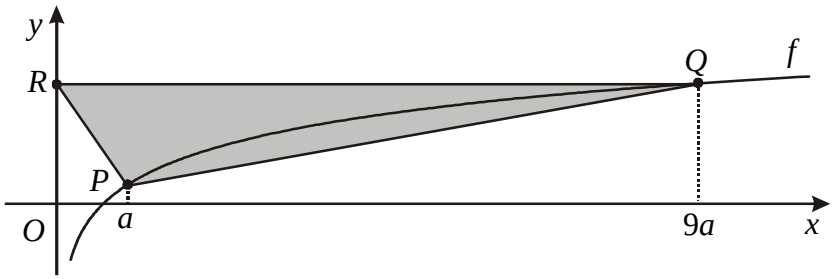
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)+x}{x} = 4$
- o gráfico de g tem uma assimptota oblíqua.

Qual das condições seguintes pode ser uma equação dessa assimptota?

(A) $y = x + 3$ **(B)** $y = 3\,x$

(C) $y = x + 4$ **(D)** $y = 4\,x$

3. Na figura abaixo está parte da representação gráfica da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \log_3 x$.



Na figura está também representado um triângulo $[PQR]$.

Os pontos P e Q pertencem ao gráfico de f e as suas abcissas são a e $9a$, respectivamente (a designa um número real positivo).

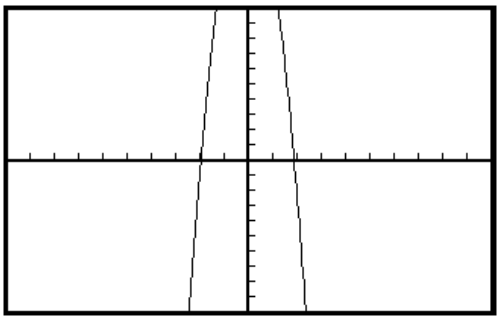
O ponto R pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à de Q.

Qual das expressões seguintes dá a área do triângulo $[PQR]$?

(A) $9\,a^2$ **(B)** $9\,a$ **(C)** $\frac{9\,a^2}{2}$ **(D)** $\frac{9\,a+1}{2}$

4. De uma certa função h, **contínua** em $\mathbb{R}$, obteve-se com a calculadora, na janela de visualização *standard* $[-10, 10] \times [-10, 10]$, o gráfico apresentado na figura junta.

A função h é crescente em $[-3, 0]$ e é decrescente em $[0, 3]$.



Qual das afirmações seguintes **pode** ser verdadeira?

(A) $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = +\infty$ **(B)** A função h é ímpar

(C) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 10$ **(D)** $\forall\, x \in \mathbb{R},\ h'(x) > 0$

5. Considere todos os números de cinco algarismos **diferentes** que se podem formar com os cinco algarismos ímpares.

Quantos deles são maiores do que $60\,000$?

(A) 48 **(B)** 64 **(C)** 68 **(D)** 74

6. A Ana e o Bruno vão disputar entre si um torneio de Xadrez composto por dez partidas.
Cada partida pode terminar com a vitória de um deles ou pode terminar empatada.
Vence o torneio quem ganhar mais partidas.
No final de cada partida é registado o resultado, por meio de uma letra:
A - vitória da Ana;
B - vitória do Bruno;
E - empate.
Deste modo, ao fim das dez partidas, tem-se um registo como o que se exemplifica a seguir: A E A B B E E A B E

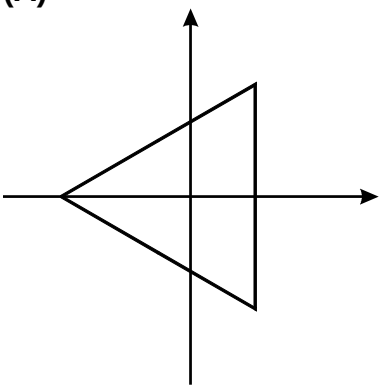
Quantos registos diferentes poderão acontecer, de tal forma que haja exactamente sete empates e a Ana seja a vencedora do torneio?

(A) 420 **(B)** 440 **(C)** 460 **(D)** 480

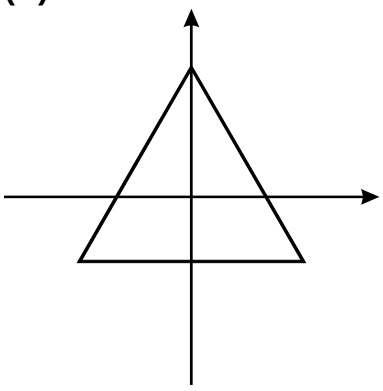
7. Um número complexo w tem a sua imagem geométrica na parte positiva do eixo imaginário.
As imagens geométricas das raízes cúbicas de w são os vértices de um dos triângulos abaixo representados.

Qual é esse triângulo?

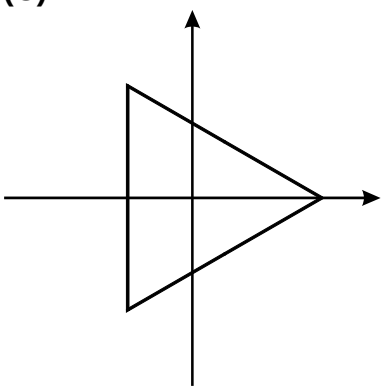
(A)



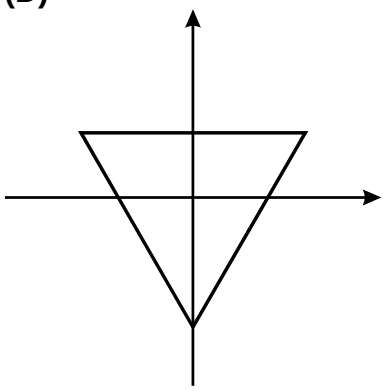
(B)



(C)



(D)



Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

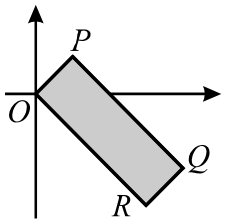
1. De dois números complexos, z_1 e z_2, sabe-se que um argumento de z_1 é $\frac{\pi}{4}$ e que o módulo de z_2 é $3\sqrt{2}$.

1.1. **Sem recorrer à calculadora**, determine $\frac{z_2 \times \overline{z_2}}{9} + \left(\frac{z_1}{|z_1|}\right)^8$

1.2. Na figura está representado, no plano complexo, um rectângulo $[OPQR]$.

Sabe-se que:

- o ponto O é a origem do referencial
- o ponto P é a imagem geométrica de z_1
- o ponto R é a imagem geométrica de z_2
- o rectângulo $[OPQR]$ tem área 6



Determine os números complexos z_1 e z_2. Apresente os resultados na forma algébrica.

2.

2.1. Seja Ω um espaço de resultados finito, associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis, mas não certos.

Prove que A e B são independentes se, e só se, $P(B|A) = P(B|\overline{A})$.

(P designa probabilidade, $\overline{A}$ designa o acontecimento contrário de A e $P(B|A)$ designa a probabilidade de B, se A).

2.2. Numa caixa existem cinco bolas brancas e três bolas pretas. Ao acaso, tiram-se sucessivamente duas bolas da caixa, não repondo a primeira bola na caixa, antes de retirar a segunda.

2.2.1. Utilizando a propriedade enunciada na alínea anterior, mostre que os acontecimentos «*a primeira bola retirada é preta*» e «*a segunda bola retirada é branca*» **não** são independentes.

2.2.2. Seja X a variável aleatória «*número de bolas brancas que ficam na caixa, após a extracção das duas bolas*».
Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X.
Apresente as probabilidades na forma de fracção irredutível.

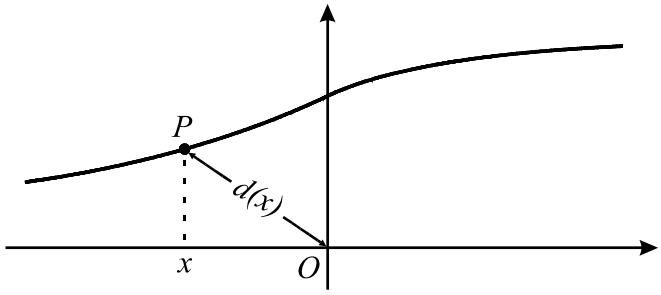
3. Seja f a função definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & se \quad x < 0 \\ \frac{3x+2}{2x+2} & se \quad x \geq 0 \end{cases}$.

Sem recorrer à calculadora, resolva as alíneas seguintes:

3.1. Justifique a seguinte afirmação: «A função f é contínua em $\mathbb{R}$.»

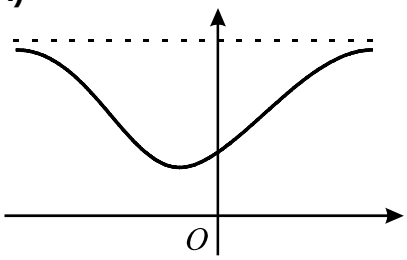
3.2. Estude a função f quanto à monotonia em $\mathbb{R}^+$.

3.3. Na figura está representada parte do gráfico da função f.

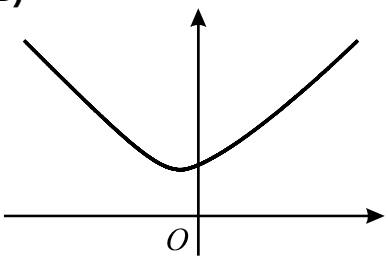


Considere que um ponto P se desloca ao longo do gráfico de f.
Seja d a função que, à abcissa do ponto P, faz corresponder a distância de P à origem do referencial.
Em qual das figuras seguintes pode estar parte do gráfico da função d? Numa pequena composição, explique porque não pode ser nenhum dos outros três, apresentando, para cada um deles, uma razão pela qual o rejeita.

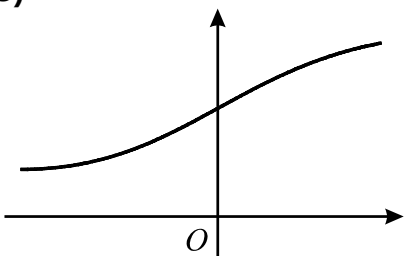
(A)



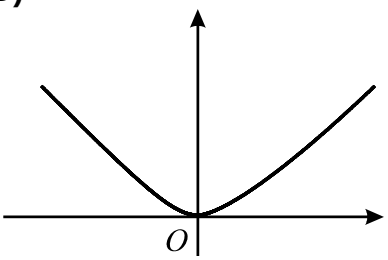
(B)



(C)



(D)



Notas: na opção A, a recta representada a tracejado é assimptota horizontal do gráfico; na opção C, a função é estritamente monótona, em $\mathbb{R}$.

4. No Solstício de Junho (dia em que começa o Verão), em qualquer local da Terra situado entre o Equador e o Círculo Polar Árctico, o tempo t, medido em horas, que decorre entre o nascer e o pôr do Sol, está relacionado com a latitude λ, desse local, por meio da fórmula

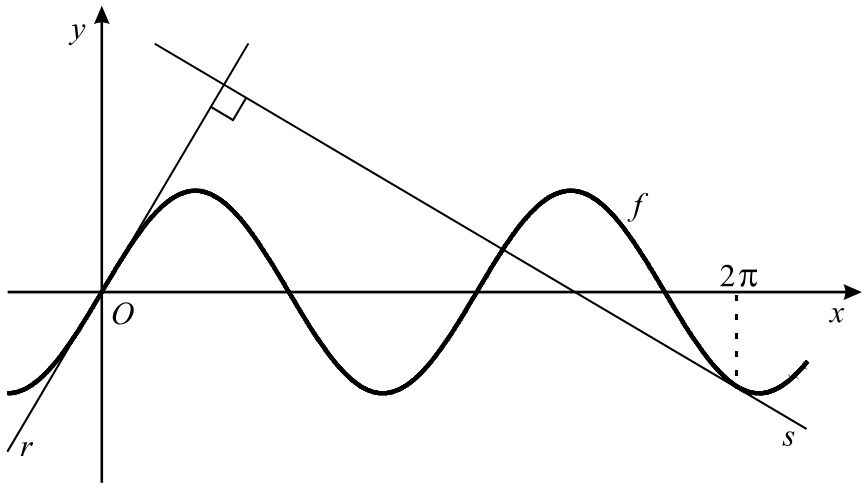
$$\cos(7{,}5\ t) = -\frac{\operatorname{tg}\lambda}{\operatorname{tg}\phi} \qquad (\phi \text{ é a latitude do Círculo Polar Árctico})$$

Os argumentos das funções **co-seno** e **tangente** estão expressos em **graus**.

4.1. Sabendo que $\phi \approx 66{,}5°$ e que a latitude de Beja é de $38°$, determine o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do Sol, em Beja, no Solstício de Junho. Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).
Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

4.2. Esta fórmula nunca poderia ser aplicável a locais situados entre o Círculo Polar Árctico e o Pólo Norte. Justifique.

5. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen}(a\,x)$, onde a designa uma constante real (o argumento da função **seno** está expresso em **radianos**).
Na figura abaixo está parte da representação gráfica da função f.



Na figura estão também representadas:
- uma recta r tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0;
- uma recta s tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2π.

Recorra à calculadora para determinar **graficamente** a solução da equação que lhe permite resolver o seguinte problema:

Sabendo que as rectas r e s são perpendiculares e que $a \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$, qual é o valor de a?

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o **gráfico**, ou **gráficos**, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de algum (ou alguns) ponto(s). Apresente o valor pedido na forma de dízima, arredondado às décimas.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21

1.1. 11
1.2. 10

2. 32

2.1. 10
2.2. 22
2.2.1. 10
2.2.2. 12

3. 42

3.1. 14
3.2. 14
3.3. 14

4. 28

4.1. 14
4.2. 14

5. 14

TOTAL **200**

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\,.\cos b + \text{sen}\,b\,.\cos a$

$\cos\,(a+b) = \cos a\,.\cos b - \text{sen}\,a\,.\,\text{sen}\,b$

$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a\,.\,\text{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho\, cis\,\theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta} = \sqrt[n]{\rho}\; cis\,\frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}$, $k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\,u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\,\text{sen}\,u$

$(\text{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

1.

a) Tem-se que: $z_2 \times \overline{z_2} = |z_2|^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 9 \times 2 = 18$

Portanto, $\frac{z_2 \times \overline{z_2}}{9} = \frac{18}{9} = 2$

Por outro lado, tem-se que $z_1 = \rho\ cis\ \frac{\pi}{4}$

Portanto, $\frac{z_1}{|z_1|} = \frac{\rho\ cis\ \frac{\pi}{4}}{\rho} = cis\ \frac{\pi}{4}$

Donde, $\left(\frac{z_1}{|z_1|}\right)^8 = \left(cis\ \frac{\pi}{4}\right)^8 = cis\,(2\pi) = 1$

Portanto, $\frac{z_2 \times \overline{z_2}}{9} + \left(\frac{z_1}{|z_1|}\right)^8 = 2 + 1 = 3$

b) A área do rectângulo $[OPQR]$ é igual a $\overline{OP} \times \overline{OR} = |z_1| \times |z_2|$

Portanto, $|z_1| \times |z_2| = 6$, donde $|z_1| \times 3\sqrt{2} = 6$, pelo que

$|z_1| = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Portanto, $z_1 = \sqrt{2}\ cis\ \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ i\right) = 1 + i$

Como o ângulo POR é recto, tem-se

$z_2 = 3\sqrt{2}\ cis\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\ i\right) = 3 - 3\,i$

2.

a) Tem-se que: $P(B|\,A) = P(B|\,\overline{A}) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\,\overline{A}\,)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cap B)\,.\,P(\overline{A}) = P(\,\overline{A} \cap B)\,.\,P(A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cap B)\,.\,[1 - P(A)] = P(\,\overline{A} \cap B)\,.\,P(A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) - P(A)\,.\,P(A \cap B) = P(\,\overline{A} \cap B)\,.\,P(A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)\,.\,P(A \cap B) + P(\,\overline{A} \cap B)\,.\,P(A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)\,.\,\left[\,P(A \cap B) + P(\,\overline{A} \cap B)\,\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ P(A \cap B) = P(A)\,.\,P(B)\ \Leftrightarrow\ A$ e B independentes

b1) No que se segue, A designa o acontecimento «*a primeira bola retirada é preta*» e B designa o acontecimento «*a segunda bola retirada é branca*».

Tem-se que $P(B|\,A) = \frac{5}{7}$ pois: se a primeira bola retirada é preta, ficam, na caixa, cinco bolas brancas e duas bolas pretas, num total de sete bolas; a probabilidade de a segunda bola retirada ser branca é, portanto, $\frac{5}{7}$

Tem-se que $P(B|\,\overline{A}) = \frac{4}{7}$ pois: se a primeira bola retirada é branca, ficam, na caixa, quatro bolas brancas e três bolas pretas, num total de sete bolas; a probabilidade de a segunda bola retirada ser branca é, portanto, $\frac{4}{7}$

Como $P(B|\,\overline{A}) \neq P(B|\,A)$, tem-se, tendo em conta a propriedade da alínea anterior, que os acontecimentos A e B não são independentes.

b2) A caixa contém, inicialmente, cinco bolas brancas e três bolas pretas. Depois de se retirarem duas bolas, podem ficar, na caixa, três, quatro ou cinco bolas brancas.

A variável X pode, portanto, assumir os valores 3, 4 e 5.
Tem-se que:

$P(X=3)$ é a probabilidade de as duas bolas extraídas serem brancas, ou seja, $\frac{{}^5C_2 \times {}^3C_0}{{}^8C_2} = \frac{5}{14}$

$P(X=4)$ é a probabilidade de uma das bolas extraídas ser branca e a outra ser preta, ou seja, $\frac{{}^5C_1 \times {}^3C_1}{{}^8C_2} = \frac{15}{28}$

$P(X=5)$ é a probabilidade de as duas bolas extraídas serem pretas, ou seja, $\frac{{}^5C_0 \times {}^3C_2}{{}^8C_2} = \frac{3}{28}$

Tem-se, portanto, a seguinte tabela de distribuição de probabilidades da variável X

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

3.

a) A função f é contínua em $\mathbb{R}^+$ pois é o quociente de duas funções afins, portanto contínuas.

A função f é contínua em $\mathbb{R}^-$ pois é o quociente de duas funçõs contínuas (uma que é a diferença entre uma função exponencial e uma função constante, e outra que é uma função afim).

Falta estudar a função quanto à continuidade no ponto 0.
Tem-se que:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad f(0) = 1$$

Portanto, f é contínua no ponto 0.

A função f é, assim, contínua em $\mathbb{R}$.

b) Tem-se que $\left(\frac{3\,x+2}{2\,x+2}\right)' = \frac{3\,(2x+2)-2\,(3x+2)}{(2\,x+2)^2} = \frac{2}{(2\,x+2)^2}$

Dado que $\frac{2}{(2\,x+2)^2} > 0\ ,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^+$, podemos concluir que f é crescente em $\mathbb{R}^+$.

c) Tem-se que $\lim_{x\to-\infty} d(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} d(x) = +\infty$, pelo que o gráfico da função d não tem assimptota horizontal. A opção A não é, portanto, a opção correcta.
A opção C também não é a opção correcta, dado que a função d não é sempre crescente, ao contrário do que este gráfico sugere.
Como a função d nunca se anula, a opção D não é, igualmente, a opção correcta.
Portanto, a opção correcta é a B.

4.

a) Tem-se que $\cos(7{,}5\ t) = -\frac{\operatorname{tg} 38°}{\operatorname{tg} 66{,}5°}$

Portanto, $\cos(7{,}5\ t) \approx -0{,}3397$ pelo que $7{,}5\ t \approx 109{,}8594$

Vem, então, $t \approx 14{,}6479$

Portanto, $t \approx 14\,h\ 39\,m$

b) A latitude de locais situados entre o Círculo Polar Árctico e o Pólo Norte é superior à latitude do Círculo Polar Árctico.

Portanto, para locais situados entre o Círculo Polar Árctico e o Pólo Norte, tem-se que $\lambda > \phi$.

Pelo facto da função tangente ser crescente em $[0°, 90°[$, tem-se $\operatorname{tg}\lambda > \operatorname{tg}\phi$.

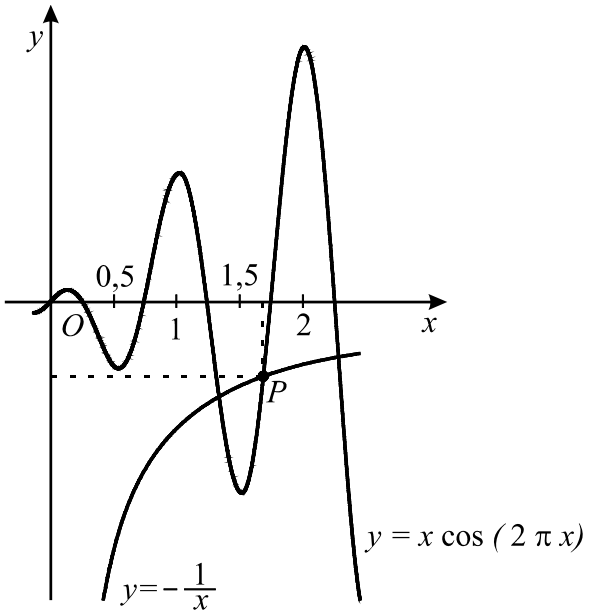
Por isso, $\frac{\operatorname{tg}\lambda}{\operatorname{tg}\phi} > 1$, donde $-\frac{\operatorname{tg}\lambda}{\operatorname{tg}\phi} < -1$, pelo que é impossível a equação
$\cos(7{,}5\ t) = -\frac{\operatorname{tg}\lambda}{\operatorname{tg}\phi}$

5. Tem-se que $f'(x) = a\cos(ax)$

Portanto,
o declive da recta r é $f'(0) = a$
e o declive da recta s é $f'(2\pi) = a\cos(2\pi a)$

As rectas r e s são, portanto, perpendiculares se, e só se, $a\cos(2\pi a) = -\frac{1}{a}$

Utilizemos as capacidades gráficas da calculadora para determinar um valor aproximado da solução desta equação, no intervalo $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$.



Na figura estão representados:
• parte do gráfico da funções definida por $y = x\cos(2\pi x)$
• parte do gráfico da funções definida por $y = -\frac{1}{x}$
• o ponto P de abcissa pertencente a $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ e que é ponto de intersecção dos dois gráficos.

A abcissa do ponto P é, aproximdamente, $1{,}7$.

Portanto, $a \approx 1{,}7$.

2005

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **1.ª FASE**

2005

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.

O Grupo II inclui seis questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de onze.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ $(\alpha - \textit{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;}\ \ r - \textit{raio})$

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ $(\alpha - \textit{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;}\ \ r - \textit{raio})$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - \textit{raio da base};\ g - \textit{geratriz})$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - \textit{raio})$

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $(r - \textit{raio})$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\, v + u\,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\, v - u\,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\, u^{n-1}\,.\, u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\, e^u$

$(a^u)' = u'.\, a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

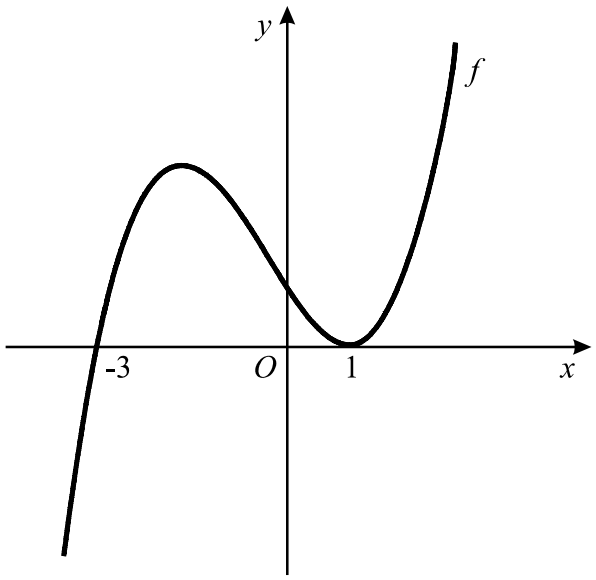
$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Na figura, está representada parte do gráfico de uma função f, contínua em $\mathbb{R}$.

A função f tem apenas dois zeros: -3 e 1.



Seja g a função definida por $g(x) = \sqrt{f(x)}$

Qual dos seguintes conjuntos pode ser o domínio da função g?

(A) $]-\infty, 1]$

(B) $\mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$

(C) $]-\infty, -3[$

(D) $[-3, +\infty[$

2. Considere uma função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{5\}$, contínua em todo o seu domínio.
Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = -3$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} [f(x) - x] = 0$

Em cada uma das opções seguintes, estão escritas duas equações, representando cada uma delas uma recta.

Em qual das opções as duas rectas assim definidas são as assimptotas do gráfico da função f ?

(A) $y = x$ e $y = 2$ **(B)** $y = 2$ e $x = 5$

(C) $y = x$ e $x = 5$ **(D)** $y = -3$ e $x = 2$

3. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos x$.
Qual das expressões seguintes dá a derivada de f, no ponto π ?

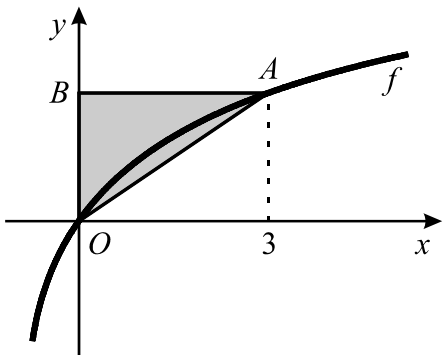
(A) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi}$ **(B)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - \pi}{x}$

(C) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\cos x}{x - \pi}$ **(D)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{x + \pi}$

4. Na figura junta, está representada, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f, definida, em $]-1, +\infty[$, por

$$f(x) = \log_2(x+1)$$

Na mesma figura, está também representado um triângulo rectângulo $[ABO]$.
O ponto A tem abcissa 3 e pertence ao gráfico de f.
O ponto B pertence ao eixo Oy.



Qual é a área do triângulo $[ABO]$?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

5. Seja Ω o espaço de resultados (com um número finito de elementos) associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam X e Y dois acontecimentos ($X \subset \Omega$ e $Y \subset \Omega$).

Apenas uma das afirmações seguintes **não** é equivalente à igualdade $P(X \cap Y) = 0$. Qual?

(A) X e Y são acontecimentos incompatíveis.

(B) X e Y não podem ocorrer simultaneamente.

(C) Se X ocorreu, Y não pode ocorrer.

(D) X e Y são ambos impossíveis.

6. A distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é dada pela tabela

x_i	0	2	4
$P(X = x_i)$	a	b	b

(a e b designam números reais).

A média da variável aleatória X é igual a 1.

Qual é o valor de a e qual é o valor de b?

(A) $a = \frac{1}{2}$ $b = \frac{1}{4}$ **(B)** $a = \frac{3}{5}$ $b = \frac{1}{5}$

(C) $a = \frac{2}{3}$ $b = \frac{1}{6}$ **(D)** $a = \frac{1}{2}$ $b = \frac{1}{6}$

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 2\,cis\,\frac{\pi}{4}$ e $z_2 = 2\,i$.

Sejam P_1 e P_2 as imagens geométricas, no plano complexo, de z_1 e de z_2, respectivamente.

Sabe-se que o segmento de recta $[P_1\,P_2]$ é um dos lados do polígono cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice n de um certo número complexo w.

Qual é o valor de n?

(A) 4 **(B)** 6 **(C)** 8 **(D)** 10

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

1.1. Considere $w = \frac{2+i}{1-i} - i$

Sem recorrer à calculadora, escreva w na forma trigonométrica.

1.2. Considere $z_1 = cis(\alpha)$ e $z_2 = cis\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

Mostre que a imagem geométrica, no plano complexo, de $z_1 + z_2$ pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares.

2. Admita que o número de elementos de uma população de aves, t anos após o início de 1970, é dado aproximadamente por

$$P(t) = 5{,}2 \times 10^7 \times e^{(N-M)t}, \quad t \geq 0,$$

em que N e M são duas constantes, denominadas, respectivamente, *taxa de natalidade* e *taxa de mortalidade* da população.

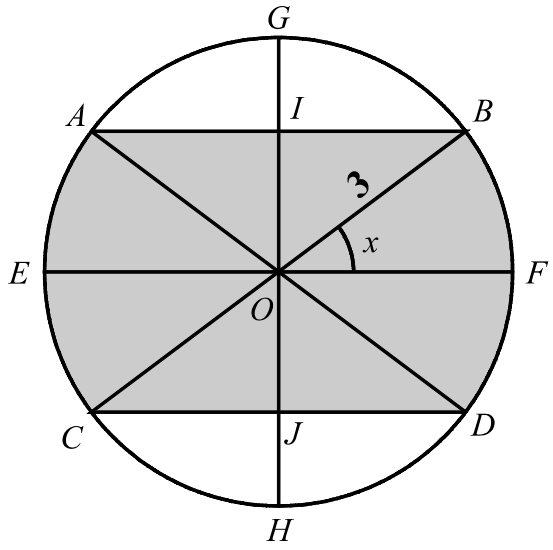
Sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes:

2.1. Sabendo que $N < M$, calcule $\lim_{t \to +\infty} P(t)$ e interprete o resultado obtido, no contexto do problema.

2.2. No início de 2000, a população era metade da que existia no início de 1970.
Sabendo que a *taxa de natalidade* é $7{,}56$, determine a *taxa de mortalidade*.
Apresente o resultado arredondado às centésimas.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3. Na figura está representada uma circunferência com centro no ponto O e **raio 3**.
Os diâmetros $[EF]$ e $[GH]$ são perpendiculares.



Considere que o ponto B se desloca sobre o arco FG.

Os pontos A, C e D acompanham o movimento do ponto B, de tal forma que:
- as cordas $[AB]$ e $[CD]$ permanecem paralelas a $[EF]$;
- $[AD]$ e $[BC]$ são sempre diâmetros da circunferência.

Os pontos I e J também acompanham o mesmo movimento, de tal forma que são sempre os pontos de intersecção de $[GH]$ com $[AB]$ e $[CD]$, respectivamente.

Para cada posição do ponto B, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo FOB $\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

3.1. Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de x, por

$$A(x) = 18\,(x + \operatorname{sen} x \,.\, \cos x)$$

Sugestão: use a decomposição sugerida na figura.

3.2. Recorra à calculadora para determinar **graficamente** a solução da equação que lhe permite resolver o seguinte problema: *Qual é o valor de x para o qual a área da região sombreada é igual a metade da área do círculo?*

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de algum, ou de alguns, ponto(s). Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

4. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, tal que a sua **derivada** é dada por

$$f'(x) = 2 + x \ln x \ , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^+$$

Sem recorrer à calculadora, resolva as alíneas seguintes:

4.1. Seja r a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.
Seja P o ponto de intersecção da recta r com o eixo Ox.
Sabendo que $f(1) = 3$, determine a abcissa do ponto P.

4.2. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

5. Num saco, estão três bolas pretas e nove bolas brancas, indistinguíveis ao tacto.
Extraem-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, as doze bolas do saco.
Determine:

5.1. A probabilidade de as duas primeiras bolas extraídas não serem da mesma cor. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

5.2. A probabilidade de as três bolas pretas serem extraídas consecutivamente (umas a seguir às outras). Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

6. Considere um prisma regular em que cada base tem n lados.
Numa pequena composição, justifique que o número total de diagonais de todas as faces do prisma (incluindo as bases) é dado por

$$2\,({}^{n}C_{2} \ - \ n) + 2\,n$$

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 10
1.2. 11

2. 28
2.1. 14
2.2. 14

3. 28
3.1. 14
3.2. 14

4. 28
4.1. 14
4.2. 14

5. 20
5.1. 10
5.2. 10

6. 12

TOTAL **200**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **1.ª FASE**

2005

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 10
1.2. 11

2. 28
2.1. 14
2.2. 14

3. 28
3.1. 14
3.2. 14

4. 28
4.1. 14
4.2. 14

5. 20
5.1. 10
5.2. 10

6. 12

TOTAL **200**

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Versão 1	D	A	A	C	D	C	C
Versão 2	C	C	B	A	D	A	B

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, no primeiro grupo, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas **Resp. certas**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

Grupo II

Critérios gerais

1. A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro, não negativo, de pontos.

2. Se, numa alínea em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, o examinando se limitar a apresentar o resultado final, deverão ser atribuídos zero pontos a essa alínea.

3. Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

4. Existem alíneas cuja cotação está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para as resolver.

4.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.

4.2. Caso a resolução da etapa esteja incompleta, ou contenha incorrecções, cabe ao classificador decidir a cotação a atribuir a essa etapa, tendo em conta o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:
- erros de contas ocasionais devem ser penalizados em um ponto;
- erros graves, que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades, devem ser penalizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa.

4.3. No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.

4.4. Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.

4.5. Pode acontecer que o examinando, ao resolver uma questão, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

5. Existem alíneas em que estão previstos alguns erros que o examinando pode cometer. Para cada caso, é indicada a cotação a atribuir. O examinando pode, contudo, utilizar um processo não contemplado nos critérios e/ou cometer um erro não previsto. Cabe ao classificador adaptar as referências dadas a todas as situações não previstas.

6. Se, na resolução de uma alínea, o examinando utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), deve ser penalizado em um ponto, na cotação total a atribuir a essa alínea. Esta penalização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas cotadas com 0 (zero) pontos.

7. Se, na resolução de uma alínea, o examinando não respeitar uma eventual instrução, relativa ao método a utilizar (por exemplo, se o enunciado vincular o examinando a uma resolução analítica, sem calculadora, e o examinando a utilizar), a etapa da resolução em que se dá o referido desrespeito bem como todas as subsequentes que dela dependam devem ser cotadas com 0 (zero) pontos.

8. Tudo o que o examinando escrever fora de contexto e que não resulte de trabalho anterior (por exemplo, num exercício de probabilidades, a escrita de uma fracção que não tenha nada a ver com o problema, ou, num exercício de estudo da monotonia de uma função, a apresentação de um quadro fora do contexto) deve ser cotado com 0 (zero) pontos. Todas as etapas subsequentes que dependam do que o examinando escreveu fora de contexto devem ser igualmente cotadas com 0 (zero) pontos.

Critérios específicos

Para cada item são apresentados:

- a cotação total do item;
- para cada processo de resolução apresentado, uma subdivisão da cotação total em cotações parcelares;
- exemplos de possíveis respostas dos examinandos, com a respectiva cotação a atribuir, devidamente explicada.

1.1. 10

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º Processo

$\frac{2+i}{1-i} - i = \frac{1+3i}{2} - i$ 3

$\frac{1+3i}{2} - i = \frac{1+i}{2} \quad \left(\text{ou } \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)$ 2

$\frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ cis\ \frac{\pi}{4}$ **(ver nota 1)** 5

2.º Processo

$\frac{2+i}{1-i} - i = \frac{1}{1-i}$ 2

$\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2} \quad \left(\text{ou } \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)$ 3

$\frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ cis\ \frac{\pi}{4}$ **(ver nota 1)** 5

3.º Processo

$\frac{2+i}{1-i} - i = \frac{1}{1-i}$ 2

$1 = cis\,0$ 1

$1 - i = \sqrt{2}\ cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **(ver nota 2)** 4

$\frac{cis\,0}{\sqrt{2}\ cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ cis\ \frac{\pi}{4}$ 3

Notas:

1. A escrita de $\frac{1+i}{2}$ na forma trigonométrica deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

$\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,i\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\left(\text{ou } \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ , ou } \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 2

Argumento de $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,i$ correcto (não se exige a apresentação de cálculos intermédios, dado que a imagem geométrica do complexo pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares) 2

Escrita na forma $\rho\, cis\,\theta$ 1

ou

$1 + i = \sqrt{2}\; cis\; \frac{\pi}{4}$ 2

$2 = 2\, cis\, 0$ 1

$\frac{\sqrt{2}\; cis\; \frac{\pi}{4}}{2\, cis\, 0} = \frac{\sqrt{2}}{2}\; cis\; \frac{\pi}{4}$ 2

2. A escrita de $1 - i$ na forma trigonométrica deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

$\left|1 - i\right| = \sqrt{2}$ 1

Argumento de $1 - i$ correcto (não se exige a apresentação de cálculos intermédios, dado que a imagem geométrica do complexo pertence à bissectriz dos quadrantes pares) 2

Escrita na forma $\rho\, cis\,\theta$ 1

3. Não deve ser valorizada a passagem à forma trigonométrica dos complexos que aparecem na expressão inicial: $1-i,\ i$ e $2+i$ (este último só pode ser escrito na forma trigonomética utilizando um valor aproximado para o argumento, o que só pode ser feito por meio da calculadora, contrariando a instrução do enunciado). A tentativa de resolução do exercício por esta via deve ser cotada com 0 (zero) pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$\frac{2+i}{1-i} - i = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} - i = \frac{2+2i+i+i^2}{1+1} - i = \frac{2+3i-1}{2} - i =$$

$$= \frac{1+3i}{2} - i = \frac{1+3i-2i}{2} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \qquad \left.\begin{array}{l} tg\,\theta = 1 \\ \theta \in 1.^{\circ}\,\mathrm{Q} \end{array}\right\} \ \theta = \frac{\pi}{4} \qquad z_1 = 1\ cis\ \frac{\pi}{4}$$

Cotação a atribuir (1.º processo): $3 + 2 + 3\,(0+2+1) = 8$

Exemplo 2

$$\frac{2+i}{1-i} - i = \frac{(2+i) - i\,(1-i)}{1-i} = \frac{2 + i - i + i^2}{1-i} = \frac{1}{1-i} =$$

$$= \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + i$$

$$|z_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} \qquad tg\ \alpha = \frac{1}{2} \qquad z_1 = \sqrt{\frac{5}{4}}\ cis\ \frac{1}{2}$$

Cotação a atribuir (2.º processo): $2 + 1^{(*)} + 2\,(2 + 0^{(**)} + 0^{(***)}) = 5$

(*) O examinando comete um erro muito grave, na última passagem da segunda linha. Ver critério geral 4.2.
(**) A tangente do argumento de $1/2 + i$ é 2 (e não $1/2$).
(***) O examinando não escreveu o complexo na forma $\rho\, cis\,\theta$, mas sim $\rho\ cis\ (tg\,\theta)$.

Exemplo 3

$$\frac{2+i}{1-i} - i = \frac{(2+i)-i(1-i)}{1-i} = \frac{2+i-i-i^2}{1-i} = \frac{3}{1-i} =$$

$$= \frac{3\,cis\,0}{\sqrt{2}\,cis\left(\frac{5\pi}{4}\right)} = \frac{3}{\sqrt{2}}\,cis\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\,cis\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$$

Cotação a atribuir (3.º processo): $1+1+2(1+0+1)+3=7$

Exemplo 4

$$\frac{2+i}{1-i} - i = \frac{(2+i)-i(1-i)}{1-i} = \frac{2+i-i+i^2}{1-i} = \frac{2+i^2}{1-i}$$

$$|z| = \frac{\sqrt{(2+i^2)^2}}{\sqrt{(1-i)^2}} = \frac{\sqrt{4+i^4}}{\sqrt{1-i^2}} = \frac{\sqrt{5}}{1}$$

$$tg\,\theta = \frac{1}{2} \qquad \theta = \frac{\pi}{7} \qquad z = \sqrt{5}\,cis\,\frac{\pi}{7}$$

Cotação a atribuir (3.º processo): $1+0+0+0=1$

Exemplo 5

$$2+i \rightarrow \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5} \qquad tg\,\theta = \frac{1}{2} \qquad \theta = \frac{\pi}{7} \qquad \sqrt{5}\,cis\,\frac{\pi}{7}$$

$$1-i \rightarrow \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \qquad tg\,\theta = -1 \qquad \theta = \frac{7\pi}{4} \qquad \sqrt{2}\,cis\,\frac{7\pi}{4}$$

$$\frac{\sqrt{5}\,cis\,\frac{\pi}{7}}{\sqrt{2}\,cis\,\frac{7\pi}{4}} - cis\,\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\,cis\left(\frac{\pi}{7}-\frac{7\pi}{4}\right) - cis\,\frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\,cis\left(-\frac{45\pi}{28}\right) - cis\,\frac{\pi}{2}$$

Cotação a atribuir: $0^{(*)}$

(*) Ver nota 3.

1.2. 11

$z_1 = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha$ 1

$z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ 1

$z_2 = \text{sen}\,\alpha + i\cos\alpha$ 2

$z_1 + z_2 = \cos\alpha + \text{sen}\,\alpha + i\,(\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha)$ **(ver nota 1)**..... 4

Conclusão ($z_1 + z_2$ tem parte real igual ao coeficiente da parte imaginária, pelo que a sua imagem geométrica pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares) 3

Notas:

1. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se o examinando apresentar, correctamente, o complexo $z_1 + z_2$ na forma $a + ib$, com $a = b$.
2. Se o examinando se limitar a verificar a afirmação do enunciado para um caso partircular, a sua resposta deverá ser cotada com 0 (zero) pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$z_1 + z_2 = cis\,\alpha + cis\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$

$= \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha + \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] =$

$= \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\alpha + i\cos\alpha = \cos\alpha + \text{sen}\,\alpha + i\,(\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha)$

$\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,\alpha + \cos\alpha$, logo está provado.

Cotação a atribuir: $1 + 1 + 2 + 4 + 3 = 11$

Exemplo 2

$z_1 + z_2 = cis\,\alpha + cis\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$

$= \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha + \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\left(\text{sen}\,\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] =$

$= \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\alpha + i\cos\alpha = \cos\alpha + \text{sen}\,\alpha + i\,(\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha)$

Cotação a atribuir: $1 + 1 + 2 + 4 + 0 + (-1)^{(*)} = 7$

(*) Parêntesis mal colocados, na segunda linha. Ver critério geral 6.

Exemplo 3

$\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$

$= \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\alpha + i\cos\alpha = \cos\alpha + \text{sen}\,\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha + i\cos\alpha$

Cotação a atribuir: $1 + 1 + 2 + 0^{(*)} + 0 = 4$

(*) O complexo $z_1 + z_2$ não está na forma $a + ib$. Ver nota 1.

Exemplo 4

$cis\,\alpha + cis\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = (\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) + \left(\cos\frac{\pi}{2} - \alpha + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$

$= (\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) + \text{sen}\,\alpha - i\cos\alpha$

Cotação a atribuir: $1 + 1 + 1 + 0 + 0 + (-1)^{(*)} = 2$

(*) Parêntesis mal colocados, na primeira linha. Ver critério geral 6.

Exemplo 5

$cis\,\alpha + cis\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = (\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$

$= \cos\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\,\text{sen}\,\alpha + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2\cos\alpha + 2\,i\,\text{sen}\,\alpha$

Cotação a atribuir: $1 + 1 + 0 + 0 + 0 = 2$

Exemplo 6

$cis\,\alpha + cis\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = cis\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = cis\,\frac{\pi}{2} = i$

Cotação a atribuir: $0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$

Exemplo 7

Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\quad cis\,\alpha + cis\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = cis\,\frac{\pi}{2} + cis\,0 = i + 1 = 1 + i$

$1 + i$ pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares.

Cotação a atribuir: $0^{(*)}$

(*) Ver nota 2.

2.1. 14

Cálculo do limite 9

Valor correcto do limite (0) 3

Justificação **(ver nota 1)** .....6 (2+2+2)

Interpretação **(ver notas 2, 3 e 4)** 5

Notas:

1. A justificação completa envolve as seguintes referências:

- $N - M$ é negativo;
- $(N - M)\,t \rightarrow -\infty$;
- $e^{(N-M)\,t} \rightarrow 0$

Cada referência vale 2 pontos.

2. A interpretação deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

Interpretação correcta (*Com o passar do tempo, a população de aves tende a extinguir-se*) 5

Interpretação conceptualmente correcta, mas com algumas incorrecções de linguagem 4

3. Se o examinando, na sua interpretação, acrescentar que o número de aves diminui, não deve ser penalizado (apesar de a diminuição do número de aves ser uma interpretação do facto de a função ser decrescente, e não do limite pedido). Se o examinando apenas referir que o número de aves diminui, devem ser atribuídos 0 (zero) pontos à interpretação.

4. Se o valor do limite não tiver sido calculado, ou se estiver errado, devem ser atribuídos 0 (zero) pontos à interpretação, qualquer que esta seja.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty} \left(5{,}2\times10^7\times e^{(N-M)\,t}\right) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left(5{,}2\times10^7\times e^{x\,t}\right) = \quad 5{,}2\times10^7\times e^{-\infty} = 5{,}2\times10^7\times 0 = 0$$

$x<0$ porque $N<M$

A longo prazo, a população de aves vai tender a desaparecer.

Cotação a atribuir: $9\ [\,3+6\,(2+2+2)\,]+5=14$

Exemplo 2

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty} 5{,}2\times10^7\times e^{(N-M)\,t} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} 5{,}2\times10^7\times e^{(-a)\,(+\infty)} = \lim_{t\to+\infty} 5{,}2\times10^7\times e^{-\infty} = 5{,}2\times10^7\times 0 = 0$$

Se a taxa de natalidade é menor que a taxa de mortalidade, logicamente que passados muitos anos, a população será nula, já que nascem menos indivíduos do que aqueles que morrem.

Cotação a atribuir: $9\ [\,3+6\,(2^{(*)}+2+2)\,]+5+\ (-1)^{(**)}=13$

(*) Considerou-se que, ao escrever $-a$, o examinando refere que $N-M<0$, se bem que de uma forma formalmente incorrecta, já que $-a$ pode designar um número positivo.

(**) Para além do erro formal já referido, o examinando mantém a expressão $\lim_{t\to+\infty}$ após a passagem da variável t ao limite $(+\infty)$. Ver critério geral 6.

Exemplo 3

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty} (5{,}2\times10^7\times e^{(N-M)\,t}) = 5{,}2\times10^7\times e^{-\infty} = 0$$

Quer dizer que, à medida que o tempo passa, o número de aves vai diminuindo.

Cotação a atribuir: $7\ [3+4(0+2+2)]+0^{(*)}=7$

(*) Ver nota 3.

Exemplo 4

$$\lim_{t\to+\infty} \quad 5{,}2\times 10^7 \times e^{(N-M)\,t} = \; 5{,}2\times 10^7 \times 0 = 0$$

Se a taxa de natalidade ao longo do tempo permanecer inferior à de mortalidade, a população de aves é extinta.

Cotação a atribuir: $\quad 3\,[\,3+0\,(0+0+0)\,]+5=8$

Exemplo 5

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \quad \lim_{t\to+\infty} \; \left(5{,}2\times 10^7 \times e^{(N-M)\,t}\right) = 0$$

Como $N<M,\ N-M$ vai ser um número negativo. O logaritmo neperiano desse número negativo vai ser um número muito pequeno que multiplicado por $5{,}2\times 10^7$ vai tender para zero.

Cotação a atribuir: $\quad 3\,[\,3+0\,(0^{(*)}+0+0)\,]+0=3$

(*) Apesar de ter sido referido que «*como* $N<M,\ N-M$ *vai ser um número negativo*», tal não pode ser considerado como fazendo parte da justificação do valor do limite, dada a frase que o examinando escreve a seguir.

Exemplo 6

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \quad \lim_{t\to+\infty} \; 5{,}2\times 10^7 \times e^{(N-M)+\infty} = \; 5{,}2\times 10^7 \times e^0 = 5{,}2\times 10^7$$

Daqui a muitos anos, o número de aves existente na população vai tender para $5{,}2\times 10^7$.

Cotação a atribuir: $\quad 0\ +\ 0^{(*)}=0$

(*) Ver nota 4.

Exemplo 7

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \quad \lim_{t\to+\infty} \; 5{,}2\times 10^7 \times e^{\,+\infty} = \quad +\infty$$

A população de aves tende a aumentar com o passar dos anos, apesar da taxa de natalidade ser menor do que a de mortalidade.

Cotação a atribuir: $\quad 0\ +\ 0^{(*)}=0$

(*) Ver nota 4.

2.2. 14

$P(0) = 5{,}2 \times 10^7$ 2

$P(30) = 5{,}2 \times 10^7 \times e^{30(7{,}56-M)}$ 2

Equacionar o problema $\left(P(30) = \frac{1}{2}\ P(0)\right)$ 2

Concluir que $e^{30(7{,}56-M)} = \frac{1}{2}$ 3

Concluir que $M \approx 7{,}58$ 5

Notas:

1. Se o examinando não apresentar o resultado final arredondado às centésimas, ou se apresentar um arredondamento incorrecto, deverá ser penalizado em 1 ponto, na cotação total a atribuir à sua resposta.

2. Se o examinando não respeitar a indicação, expressa no enunciado, de conservação de um mínimo de três casas decimais, nos cálculos intermédios, deverá ser penalizado em 1 ponto, na cotação total a atribuir à sua resposta.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$\frac{5{,}2\times10^7\times e^0}{5{,}2\times10^7\times e^{(7{,}56-M)\,.\,30}} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 1 = 2\,e^{(7{,}56-M).30} \Leftrightarrow\ e^{226{,}8-30M} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ -M = \frac{ln\left(\frac{1}{2}\right) - 226{,}8}{30} \Leftrightarrow M = 8{,}253$$

Cotação a atribuir: $2^{(*)} + 2^{(*)} + 2 + 3 + 3^{(**)} = 12$

(*) Etapas implícitas.

(**) O valor de M obtido pelo examinando não está correcto (o examinando cometeu um erro, ao introduzir a expressão na calculadora) e não está arredondado às centésimas. Daí a penalização de 2 pontos, na última etapa.

Exemplo 2

$\frac{P(30)}{2} = P(0) \Leftrightarrow \frac{5{,}2\times10^7\times e^{(7{,}56-M).30}}{2} = 5{,}2\times10^7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5{,}2\times10^7\times e^{226{,}8-30M} = 10{,}4\times10^7 \Leftrightarrow e^{226{,}8}.\, e^{-30M} = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-30M} = \frac{2}{e^{226{,}8}} \Leftrightarrow M = \frac{ln\left(\frac{2}{e^{226{,}8}}\right)}{-30}$

Cotação a atribuir: $2+2+0+3+3=10$

Exemplo 3

1970: $P(0) = 5{,}2\times10^7\times e^0 = 5{,}2\times10^7$ 2000: $5{,}2\times10^7/\,2 = 2{,}6\times10^7$

$2000-1970=30$ $2{,}6\times10^7 = 5{,}2\times10^7\times e^{(7{,}56-M).30}$

$0{,}5 = e^{226{,}8-30M}$

$ln(e^{0{,}5}) = ln(e^{226{,}8-30M})$

$0{,}5 = 226{,}8-30M$

$M \approx 7{,}54$

Cotação a atribuir: $2+2+2+3+0=9$

Exemplo 4

$\frac{5{,}2\times10^7}{2} = 2{,}6\times10^7$

$2{,}6\times10^7 = 5{,}2\times10^7\times e^{(7{,}56-M).\,t} \Leftrightarrow 0{,}5 = e^{7{,}56t-Mt}$

$\Leftrightarrow 0{,}5 = e^{7{,}56t} - e^{Mt} \Leftrightarrow \frac{0{,}5}{e^{7{,}56t}} = -e^{Mt} \Leftrightarrow 2{,}6\times10^{-4} = -e^{Mt} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -ln(2{,}6\times10^{-4}) = M \Leftrightarrow M = 8{,}25$

Cotação a atribuir: $2^{(*)}+0+0+0+0=2$

(*) Etapa implícita.

Exemplo 5

$1970 \rightarrow 52\,000\,000 \qquad 2000 \rightarrow 26\,000\,000$

Cotação a atribuir: $2 + 0 + 0 + 0 + 0 = 2$

Exemplo 6

$P(2000) = \ 5{,}2 \times 10^7 \times e^{(7{,}56-M)\,2000} = 5{,}2 \times 10^7 \times e^{15120-2000M}$

$P(1970) = \ 5{,}2 \times 10^7 \times e^{(7{,}56-M)\,1970} = 5{,}2 \times 10^7 \times e^{14893{,}2-1970M}$

$5{,}2 \times 10^7 \times e^{15120-2000M} = \frac{1}{2} \times 5{,}2 \times 10^7 \times e^{14893{,}2-1970M} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ e^{15120-2000M} = \frac{1}{2} \times e^{14893{,}2-1970M} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ln(e^{15120-2000M}) = ln\left(\frac{1}{2} \times e^{14893{,}2-1970M}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 15120 - 2000M = ln\left(\frac{1}{2}\right) + 14893{,}2 - 1970M \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1970M - 2000M = -ln(2) + 14893{,}2 - 15120 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ -30M = -ln(2) - 226{,}8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ 30M = ln(2) + 226{,}8 \Leftrightarrow M = \frac{ln(2) + 226{,}8}{30} \Leftrightarrow M \approx 7{,}58$

Cotação a atribuir: $0 + 0 + 2 + 3 + 5 = 10$

Exemplo 7

$P(2000) = \ \frac{5{,}2 \times 10^7 \times e^{(7{,}56-M)\,2000}}{2} = 2{,}6 \times 10^7 \times e^{15120-2000M}$

$e^{15120-2000M} = \frac{1}{2{,}6 \times 10^7} \Leftrightarrow 15120 - 2000M = ln\left(\frac{1}{2{,}6 \times 10^7}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow M = \frac{ln\left(\frac{1}{2{,}6 \times 10^7}\right) - 15120}{-2000} \Leftrightarrow \ M \approx 7{,}55$

Cotação a atribuir: $0 + 0 + 0 + 0 + 3^{(*)} = 3$

(*) O grau de dificuldade da última etapa, que é a resolução da equação $e^{15120-2000M} = \frac{1}{2{,}6 \times 10^7}$, obtida pelo examinando, não é inferior ao da resolução da equação $e^{30(7{,}56-M)} = 1/2$.

Por isso, de acordo com o critério geral 4.3, a cotação a atribuir a esta última etapa seria de 5 pontos, se ela estivesse correctamente resolvida. Acontece que o valor obtido pelo examinando para M evidencia que, ao introduzir a expressão de M na calculadora, o examinando não colocou o denominador do argumento do logaritmo dentro de parêntesis, erro que se considerou merecer uma penalização de 2 pontos (não é um erro ocasional de contas).

3.1. 14

$\overline{OI} = 3 \operatorname{sen} x$ 3

$\overline{BI} = 3 \cos x$ 3

Área do triângulo $[OIB] = \frac{9 \operatorname{sen} x \cos x}{2}$

ou Área do triângulo $[OAB] = 9 \operatorname{sen} x \cos x$ 2

Área do sector circular correspondente ao arco $BF = \frac{9\,x}{2}$

ou Área do sector circular correspondente ao arco $BD = 9\,x$ 2

Restantes cálculos **(ver nota)** 4

Nota:
Só pode ser atribuída pontuação relativa aos restantes cálculos se:
- estiverem completamente correctos;
- o examinando conseguir chegar à expressão de $A(x)$, dada no enunciado.

Se pelo menos uma destas duas condições não se verificar, a cotação a atribuir a esta etapa é de 0 (zero) pontos. Estas duas condições pressupõem que as expressões obtidas para as áreas de um triângulo e de um sector circular estão correctas.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$A_{triângulo} = \frac{3 \operatorname{sen} x \times 3 \cos x}{2}$

$A_{4\,triângulos} = \frac{3 \operatorname{sen} x \times 3 \cos x}{2} \times 4 = \frac{12 \operatorname{sen} x \times 12 \cos x}{2} = 6 \operatorname{sen} x \times 6 \cos x$

$A_{sector} = \frac{x\,r^2}{2} = \frac{x\,3^2}{2} = \frac{9\,x}{2}$

$A_{4\,sectores} = \frac{9\,x}{2} \times 4 = \frac{36\,x}{2} = 18\,x$

$A_{total} = 18\,x + 18 \operatorname{sen} x \cos x = 18\,(x + \operatorname{sen} x \cos x)$

Cotação a atribuir: $3^{(*)} + 3^{(*)} + 2 + 2 + 0 = 10$

(*) Etapa implícita.

Exemplo 2

$\text{sen}\, x = \dfrac{\overline{IB}}{3} \qquad \overline{IB} = 3\,\text{sen}\, x$

$\cos x = \dfrac{\overline{IO}}{3} \qquad \overline{IO} = 3\cos x$

$\dfrac{x \times 3^2}{2} \times 4 = 18\,x$

$\dfrac{3\,\text{sen}\, x \times 3\cos x}{2} \times 4 \;=\; 18\,\text{sen}\, x \cos x$

$A(x) = \; 18\,x + 18\,\text{sen}\, x \;\cos x \;=\; 18\,(x + \;\text{sen}\, x \;\cos x\,)$

Cotação a atribuir: $0 + 0 + 2 + 2 + 4 = 8$

Exemplo 3

$\overline{IB} = 3\cos x$

$\overline{IO}^{\,2} \;+\; (3\cos x)^2 = 3^2 \qquad \overline{IO}^{\,2} \;= 9 - \;9\cos^2 x$

$\overline{IO}^{\,2} \;= 9\,(1 - \;\cos^2 x) \qquad \overline{IO}^{\,2} \;= 9\;\text{sen}^2\, x$

$\overline{IO} \;= 3\;\text{sen}\, x$

$\dfrac{x \times 3^2}{2} \;=\; \dfrac{9\,x}{2} \qquad \dfrac{9\,x}{2} \times 4 = 18\,x$

$\dfrac{3\,\text{sen}\, x \times 6\cos x}{\cancel{2}} \times \cancel{2} \;=\; 18\,\text{sen}\, x \cos x$

$A(x) = \; 18\,x + 18\,\text{sen}\, x \;\cos x \;=\; 18\,(x + \;\text{sen}\, x \;\cos x\,)$

Cotação a atribuir: $3 + 3 + 2 + 2 + 4 = 14$

3.2. 14

Equacionar o problema **(ver nota 1)**..... 5

Explicação do método utilizado para resolver graficamente a equação **(ver notas 2 e 6)**.....4

Conclusão: $x \approx 0{,}42$ **(ver notas 3, 4, 5 e 6)** 5

Notas:

1. O examinando não necessita de apresentar explicitamente esta equação. Havendo evidência de que o examinando procura o objecto cuja imagem, por meio de A, é $9\pi/2$, os 5 pontos relativos a esta etapa devem ser atribuídos.

2. Os 4 pontos relativos à explicação do método utilizado devem ser atribuídos de acordo com o seguinte critério:

Apresentação do gráfico da função A, com respeito pelo domínio desta função, e da recta de equação $y = 9\pi/2$, bem como do ponto de intersecção e respectiva abcissa (ou apresentação do gráfico de $A(x) - 9\pi/2$ e respectivo zero) 4

Apresentação dos gráficos com ausência de alguns elementos (por exemplo, ausência da abcissa do ponto de intersecção) e/ou com algumas incorrecções (por exemplo, o gráfico da função A não respeita o seu domínio) .....1 a 3

3. A escrita do valor aproximado pedido (para x) deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

<u>1.º Caso</u> (apresentação do resultado arredondado às centésimas, de acordo com o enunciado):

Resposta $0{,}42$ 5

Resposta $0{,}41$ 3

Resposta $0{,}43$ ou $0{,}40$ 2

Outros resultados 0

2.º Caso (apresentação do resultado com arredondamento superior às centésimas):

Valor no intervalo $[0{,}41\ ;\ 0{,}42]$ 2

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[0{,}40\ ;\ 0{,}43]$ 1

Outros resultados 0

3.º Caso (apresentação do resultado com arredondamento às décimas):

Valor igual a $0{,}4$ 2

Outros resultados 0

4.º Caso (apresentação do resultado com arredondamento às unidades):

Qualquer resultado 0

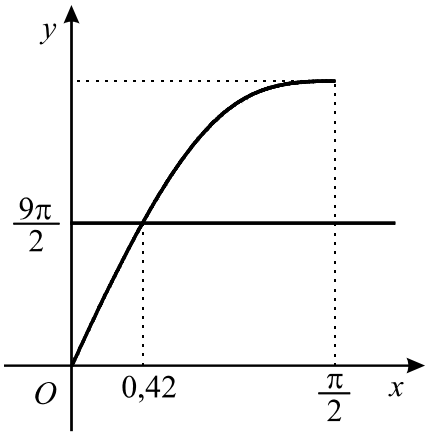
4. Com a calculadora em modo *grau*, o gráfico da função definida por $18(x + \operatorname{sen} x \,.\, \cos x)$ intersecta a recta $y = 9\pi/2$, num ponto cuja abcissa é aproximadamente igual a $0{,}77$. Assim, se o examinando apresentar este valor, devem ser atribuídos 2 pontos a esta etapa. Qualquer outro valor, mesmo que próximo de $0{,}77$, deve ser cotado com 0 (zero) pontos.

5. Se o examinando não escrever a conclusão, a cotação a atribuir ao valor por ele apresentado como abcissa do ponto de intersecção dos gráficos deve sofrer uma penalização de 2 pontos, relativamente às situações descritas nas notas 3 e 4. Se, por aplicação desta norma, a cotação desta etapa resultar negativa, deve ser convertida em 0 (zero) pontos.

6. Se o examinando utilizar um processo não gráfico, como, por exemplo, uma tabela, para encontrar o valor pedido, as duas últimas etapas devem ser cotadas com 0 (zero) pontos. Esta norma também se aplica no caso em que não é apresentada qualquer explicação para o método utilizado para resolver a equação $A(x) = 9\pi/2$.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1



$x \approx 0{,}42$

Cotação a atribuir: $5^{(*)} + 4 + 5 = 14$

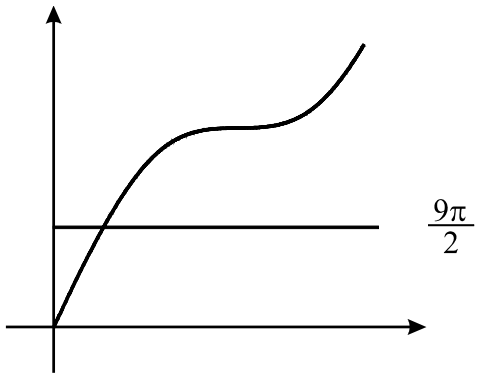
(*) Ver nota 1.

Exemplo 2

Window
- xmin=0
- xmax=5
- xscl=1
- ymin=0
- ymax=35
- yscl=1

$y1 = 18(x + sen(x)\,cos(x))$
$y2 = 9\pi/2$

Calculei a intersecção entre $y1$ e $y2$



$x \approx 0{,}41$

Cotação a atribuir: $5^{(*)} + 2^{(**)} + 3^{(***)} = 10$

(*) Ver nota 1.

(**) O gráfico não respeita o domínio (contém pontos cujas abcissas ultrapassam $\pi/2$) e não é assinalada, no gráfico, a abcissa do ponto de intersecção, o que contraria a instrução, dada no enunciado, de apresentar coordenadas relevantes.

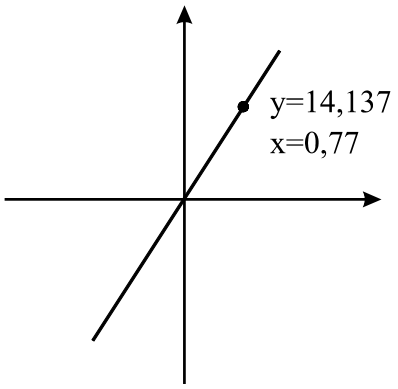
(***) Ver nota 3, 1.º caso.

Exemplo 3

$\pi r^2 = \pi . 3^2 = 9\pi$

$\frac{9\pi}{2} \approx 14{,}137$

Quando $A(x)$ é $\frac{9\pi}{2}$, $x \approx 0{,}77$



Cotação a atribuir: $5^{(*)} + 1^{(**)} + 2^{(***)} = 8$

(*) Ver nota 1.

(**) O gráfico não respeita o domínio (contém pontos cujas abcissas são negativas), o gráfico apresentado é um segmento de recta (a função A não é afim) e não é assinalada a recta de equação $y = 9\pi/2$.

(***) Ver nota 4.

Exemplo 4

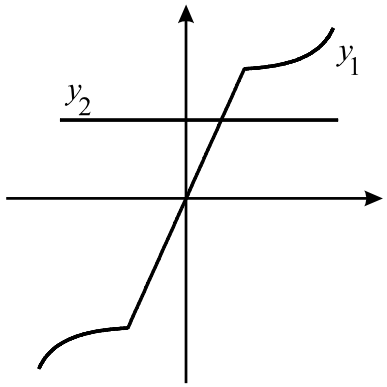
Introduzi

$y1 = 18(x + sen(x)\, cos(x))$

$y2 = 9\pi/2$

e pedi a intersecção

$x \approx 0{,}4$



Cotação a atribuir: $5^{(*)} + 1^{(**)} + 2^{(***)} = 8$

(*) Ver nota 1.

(**) O gráfico não respeita o domínio (contém pontos cujas abcissas são negativas e pontos cujas abcissas ultrapassam $\pi/2$), tem pontos angulosos, uma parte do gráfico é um segmento de recta e não é apresentada a abcissa do ponto de intersecção.

(***) Ver nota 3, 3.º caso.

Exemplo 5

Inseri a função na máquina e depois indo à tabela vê-se que o valor de x para o qual $A(x) = 9\pi/2$ é para $x \approx 0{,}4$ radianos.

Cotação a atribuir: $5^{(*)} + 0^{(**)} + 0^{(**)} = 5$

(*) Ver nota 1.

(**) Ver nota 6.

4.1. 14

$f'(1) = 2$ 2

Identificar o declive da recta r com $f'(1)$ 3

Determinar uma equação da recta r

ou estabelecer a igualdade $2 = \frac{3-0}{1-x}$ 4

Calcular a abcissa pedida 5

Notas:

1. A obtenção do declive da recta r por um método incorrecto implica a atribuição de cotação 0 (zero), não só à segunda etapa, mas também às etapas seguintes; isto é, a pontuação relativa às duas últimas etapas só pode ser atribuída se o declive da recta r tiver sido obtido a partir da sua identificação com $f'(1)$.

2. Se o examinando, não reparando que já é dada a expressão da derivada de f, assumir f' como f, calculando o declive da recta r à custa da derivada da função dada no enunciado, deve ser penalizado em 4 pontos, na totalidade das duas primeiras etapas, ou seja, dos 5 (2+3) pontos previstos, deverá ser atribuído, no máximo, 1 ponto.
Este ponto só deve ser atribuído no caso em que o examinando calcula correctamente o declive da recta r, de acordo com a confusão que estabeleceu ao assumir f' como f.
As duas etapas subsequentes devem receber a cotação indicada, se correctamente resolvidas, de acordo com o erro cometido. Nesta situação, é de aceitar que o examinando assuma $f(1)$ como 3 (valor dado no enunciado) ou como 2 (valor por ele encontrado ao assumir f' como f).

3. Se o examinando derivar a função do enunciado, mas designar essa derivada por $f''(x)$, devem ser atribuídos 0 (zero) pontos à sua resposta (considerou-se que esta situação é diferente da descrita na nota 2, já que, ao escrever $f''(x)$, o examinando mostra não estar a assumir f' como f).

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$m = \frac{3}{1} \quad y = 3x$

$3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Cotação a atribuir: $0 + 0^{(*)} + 0^{(*)} + 0^{(*)} = 0$

(*) Ver nota 1.

Exemplo 2

$2 + x\,ln(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x\,ln(x) = -2$

Cotação a atribuir: $0 + 0 + 0 + 0 = 0$

Exemplo 3

$y - f(1) = f'(1)\,(x-1) \;\Leftrightarrow\; y - 3 = 2\,(x-1) \;\Leftrightarrow\; y = 2x + 1$

Cotação a atribuir: $2 + 3 + 4 + 0 = 9$

Exemplo 4

$y = 3x + 3 \qquad 3x + 3 = 0 \;\Leftrightarrow x = -1$

Cotação a atribuir: $0 + 0 + 0^{(*)} + 0^{(*)} = 0$

(*) Ver critério geral 8.

Exemplo 5

$m = 2 + 1\,ln\,1 \qquad m = 2$

$2 = \frac{3-0}{1-x} \;\Leftrightarrow\; 2 - 2x = 3 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{1}{2}$

Cotação a atribuir: $2 + 3 + 4 + 4^{(*)} = 13$

(*) O examinando não referiu que a primeira equivalência só é válida para $x \neq 1$.

Exemplo 6

$y + y_0 = m\,(x + x_0) \qquad f'(1) = 2 \qquad m = 2$

$y + 3 = 2\,(x+1) \;\Leftrightarrow\; y = 2x - 1$

$2x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{2}$

Cotação a atribuir: $2 + 3 + 0 + 5 = 10$

Exemplo 7

$f'(x) = ln\,(x) + 1 \qquad f'(1) = ln\,(1) + 1 = 1 \qquad m = 1$

$f(1) = 2 \qquad y - 2 = x - 1 \;\Leftrightarrow\; y = x + 1$

$x + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1$

Cotação a atribuir: $1^{(*)} + 4 + 4^{(**)} = 9$

(*) Ver nota 2.

(**) Penalizou-se a última etapa em 1 ponto (ver critério geral 4.2).

4.2. 14

Determinar a segunda derivada de f **(ver nota 1)** 5

Determinar o zero da segunda derivada de f **(ver nota 2)** 4

Estudo do sinal de f'' e consequente conclusão, relativamente aos sentidos das concavidades do gráfico de f e à existência de ponto de inflexão (estudo que pode ser apresentado através de um quadro) 5

Primeira linha do quadro **(ver nota 3)** 2

Sinal de f'' **(ver nota 4)** 1

Relação entre o sinal de f'' e os sentidos das concavidades do gráfico de f 1

Evidenciar a existência de ponto de inflexão 1

Notas:

1. Se existir evidência de que o examinando pretende determinar a segunda derivada de f, a cotação mínima a atribuir a esta etapa é de 1 ponto.

2. Se existir evidência de que o examinando pretende determinar o zero da segunda derivada de f, a cotação mínima a atribuir a esta etapa é de 1 ponto.

3. A primeira linha do quadro deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

Primeira linha correcta (indicação do zero da segunda derivada de f e indicação correcta do domínio, de 0 a $+\infty$) 2

Outras situações 0

4. A segunda linha do quadro deverá ser cotada de acordo com o seguinte critério:

Segunda linha do quadro de acordo com a primeira linha e com a expressão obtida para a segunda derivada de f 1

Outras situações 0

5. Pode acontecer que o examinando, não reparando que já é dada a expressão da derivada de f, assuma f' como f e derive duas vezes esta função. Neste caso, a cotação a atribuir à sua resposta é de 7 pontos, caso ela esteja completamente correcta, de acordo com a confusão estabelecida. Se, para além desta confusão, a resolução contiver algum erro, deverão ser atribuídos 0 (zero) pontos à resposta.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$f''(x) = 0 + 1\,.\,ln\,x + x\,.\,\frac{1}{x} = ln\,x + \frac{x}{x} = ln\,x + 1$

$ln\,x + 1 = 0 \Leftrightarrow ln\,x = 1 \Leftrightarrow x = e^1$

Cotação a atribuir: $5 + 3^{(*)} + 0 = 8$

(*) O examinando comete um erro ocasional (ver critério geral 4.2).

Exemplo 2

$f''(x) = (2 + x\,ln\,x)' = 0 + (x)'.\,ln\,x + x\,.\,(ln\,x)' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ln\,x + x\,.\,\frac{1}{x} \Leftrightarrow ln\,x + \frac{x}{x} = ln\,x$

$ln\,x = 0 \qquad x = e^0 \qquad x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	∩	p.i.	∪

Cotação a atribuir: $2^{(*)} + 4^{(**)} + 2(0 + 0 + 1 + 1) + (-1)^{(***)} = 7$

(*) O examinando comete um erro grave no cálculo da derivada, ao considerar $x/x = 0$ (ver critério geral 4.2.).

(**) Ver critério geral 4.3.

(***) Ver critério geral 6.

Exemplo 3

$f''(x) = (2 + x\,ln\,x)' = 0 + (x)'.\,ln\,x + x\,.\,(ln\,x)' = ln\,x + \frac{1}{x}$

$ln\,x + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x\,ln\,x + 1}{x} = 0 \Leftrightarrow x\,ln\,x + 1 = 0 \vee x \neq 0$

Não tem zeros, logo é impossível analisá-lo em relação às concavidades e pontos de inflexão.

Cotação a atribuir: $2 + 1^{(*)} + 0 = 3$

(*) Ver nota 2.

Exemplo 4

$f'(x) = 1 + ln\,x \qquad f''(x) = \frac{1}{x} > 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^+$

Logo, tem a concavidade virada para cima e não há pontos de inflexão porque não há mudança de sentido da concavidade.

Cotação a atribuir: $7^{(*)}$

(*) Ver nota 5.

5.1. 10

Expressão que dá a probabilidade **(ver notas 1 e 2)**..... 9

Resultado na forma de fracção irredutível **(ver nota 3)**.....1

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva cotação a atribuir.

Expressão correcta (ver exemplos na página seguinte) 9

Expressão que evidencia que o examinando apenas não considerou as duas possibilidades de ordenação das duas primeiras bolas: a primeira branca e a segunda preta ou a primeira preta e a segunda branca (ver exemplos na página seguinte) 4

Expressão que evidencia que o examinando apenas não considerou as $10!$ possibilidades de ordenação das últimas dez bolas (ver exemplos na página seguinte) 3

Expressão que estaria corrrecta se a tiragem fosse feita com reposição (ver exemplos na página seguinte) 3

Outras situações (ver exemplos na página seguinte).....0

2. Se o examinando indicar apenas o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

3. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

Exemplos de expressões correctas:

$\frac{2\times 3\times 9\times 10!}{12!}$ $\frac{2\times {}^{3}C_{1}\times {}^{9}C_{1}\times 10!}{12!}$ $\frac{2\times {}^{3}A_{1}\times {}^{9}A_{1}\times {}^{10}A_{10}}{12!}$

$\frac{2\times 3\times 9}{12\times 11}$ $\frac{2\times 3\times 9}{{}^{12}A_{2}}$ $\frac{3\times 9}{{}^{12}C_{2}}$ $\frac{{}^{3}C_{1}\times {}^{9}C_{1}}{{}^{12}C_{2}}$

$\frac{3}{12}\times\frac{9}{11}+\frac{9}{12}\times\frac{3}{11}$ $\frac{1}{4}\times\frac{9}{11}+\frac{3}{4}\times\frac{3}{11}$ $\frac{9}{12}\times\frac{3}{11}\times 2$

Exemplos de expressões que evidenciam que o examinando apenas não considerou as duas possibilidades de ordenação das duas primeiras bolas:

$\frac{3\times 9\times 10!}{12!}$ $\frac{{}^{3}C_{1}\times {}^{9}C_{1}\times 10!}{12!}$ $\frac{{}^{3}A_{1}\times {}^{9}A_{1}\times {}^{10}A_{10}}{12!}$

$\frac{3\times 9}{12\times 11}$ $\frac{3\times 9}{{}^{12}A_{2}}$

$\frac{3}{12}\times\frac{9}{11}$ $\frac{9}{12}\times\frac{3}{11}$ $\frac{1}{4}\times\frac{9}{11}$ $\frac{3}{4}\times\frac{3}{11}$

Exemplos de expressões que evidenciam que o examinando apenas não considerou as $10!$ possibilidades de ordenação das últimas dez bolas:

$\frac{2\times 3\times 9}{12!}$ $\frac{2\times {}^{3}C_{1}\times {}^{9}C_{1}}{12!}$ $\frac{2\times {}^{3}A_{1}\times {}^{9}A_{1}}{12!}$

Exemplos de expressões que estariam corrrectas se a tiragem fosse feita com reposição:

$\frac{2\times 3\times 9}{12^{2}}$ $\frac{9}{12}\times\frac{3}{12}\times 2$

Exemplos de expressões que devem ser cotadas com 0 (zero) pontos:

$\frac{3\times 9}{12^{2}}$ $\frac{1}{9}\times\frac{1}{3}$ $\frac{2\times {}^{3}C_{1}\times {}^{9}C_{1}\times {}^{10}C_{8}}{12!}$ $\frac{3\times 9\times 2}{3!\times 9!}$

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

Casos possíveis: $^{12}A_3$

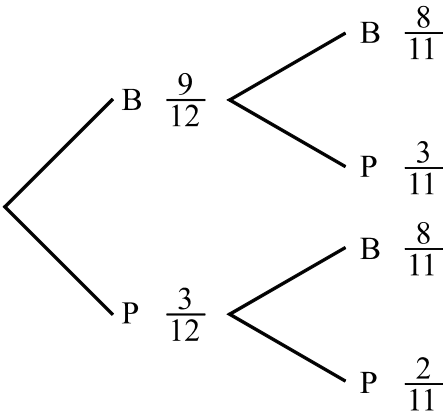
Casos favoráveis: $2 \times 3 \times 9 \times 10$

$$p = \frac{2 \times 3 \times 9 \times 10}{^{12}A_3} = \frac{9}{22}$$

Cotação a atribuir: $9^{(*)} + 1 = 10$

(*) O examinando considerou as três primeiras bolas, podendo a terceira ser uma qualquer das dez que faltam sair.

Exemplo 2



$$p = \frac{9}{12} \times \frac{3}{11} + \frac{3}{12} \times \frac{8}{11} =$$

$$= \frac{51}{132} = \frac{17}{44}$$

Cotação a atribuir: $8^{(*)} + 1 = 9$

(*) Considerou-se o valor $8/11$, no caso bola preta (P) seguida por bola branca (B), um erro de distracção do examinando (todos os restantes valores do diagrama em árvore estão correctos). Assim, penalizou-se apenas em 1 ponto a expressão escrita pelo examinando.

Exemplo 3

$PB \qquad BP$

$$p = \left(\frac{9}{12} \times \frac{3}{11} \right) \times 2$$

$$\frac{9}{12} \times \frac{3}{11} = \frac{27}{132} =$$

$$= \frac{9}{44} \times 2 = \frac{9}{22}$$

Cotação a atribuir: $9 + 1 + (-1)^{(*)} = 9$

(*) O examinando comete um erro formal de escrita ($27/132$ não é igual a $9/44 \times 2$).
Ver critério geral 6.

Exemplo 4

$$p = \frac{9}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{10}{10} \times \frac{9}{9} \times \ldots\ldots\ldots \times \frac{1}{1} = \frac{27}{132}$$

Cotação a atribuir: $4^{(*)} + 0^{(**)} = 4$

(*) O examinando apenas não considerou as duas possibilidades de ordenação das duas primeiras bolas.
(**) O valor final não está na forma de fracção irredutível.

Exemplo 5

$$p = \frac{2 \times 2! \times 10!}{12!} = \frac{4}{12 \times 11} = \frac{1}{33}$$

Cotação a atribuir: $0^{(*)} + 0^{(**)} = 0$

(*) A expressão escrita pelo examinando não se enquadra em nenhuma das categorias que se considerou merecerem cotação positiva.
(**) Ver nota 3.

5.2. 10

Expressão que dá a probabilidade **(ver notas 1 e 2)**..... 9

Resultado na forma de fracção irredutível **(ver nota 3)**.....1

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva cotação a atribuir.

Expressão correcta (ver exemplos na página seguinte) 9

Expressão que evidencia que o examinando apenas errou a contagem das posições possíveis para as bolas pretas, na sequência das doze bolas, tendo considerado 9, em vez de 10 (ver exemplos na página seguinte) 6

Expressão que evidencia que o examinando apenas não considerou as 10 posições possíveis para as bolas pretas, na sequência das doze bolas (ver exemplos na página seguinte) 4

Expressão que evidencia que o examinando apenas não considerou as $3!$ possibilidades de ordenação das bolas pretas ou as $9!$ possibilidades de ordenação das bolas brancas (ver exemplos na página seguinte) 4

Outras situações (ver exemplos na página seguinte).....0

2. Se o examinando indicar apenas o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

3. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

Exemplos de expressões correctas:

$\frac{10 \times 3! \times 9!}{12!}$ $\frac{3! \times 10!}{12!}$

$\frac{3! \times 10}{{}^{12}A_3}$ $\frac{10}{{}^{12}C_3}$

$\frac{3}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{1}{10} \times 10$

Exemplos de expressões que evidenciam que o examinando apenas errou a contagem das posições possíveis para as bolas pretas, na sequência das doze bolas, tendo considerado 9, em vez de 10:

$\frac{9 \times 3! \times 9!}{12!}$ $\frac{3! \times 9}{{}^{12}A_3}$ $\frac{3}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{1}{10} \times 9$

Exemplos de expressões que evidenciam que o examinando apenas não considerou as posições possíveis para as bolas pretas, na sequência das doze bolas:

$\frac{3! \times 9!}{12!}$

$\frac{3!}{{}^{12}A_3}$ $\frac{1}{{}^{12}C_3}$

$\frac{3}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{1}{10}$

Exemplos de expressões que evidenciam que o examinando apenas não considerou as $3!$ possibilidades de ordenação das bolas pretas ou as $9!$ possibilidades de ordenação das bolas brancas:

$\frac{10 \times 9!}{12!}$ $\frac{10}{{}^{12}A_3}$ $\frac{10 \times 3!}{12!}$

Exemplos de expressões que devem ser cotadas com 0 (zero) pontos:

$\frac{10}{12!}$ $\frac{3}{{}^{12}C_3}$ $\frac{{}^{9}A_3 \times 3!}{12!}$ $\frac{3}{12} + \frac{2}{11} + \frac{1}{10}$

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$\underbrace{P\,P\,P}_{3!}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{9!}$$

$c.p.\ :\ 12!$ $\qquad$ $c.f.\ :\ 3! \times 10 \times 9!$

$$p = \frac{3! \times 10 \times 9}{12!} = \frac{1}{22}$$

Cotação a atribuir: $9^{(*)} + 1 = 10$

(*) O examinando cometeu um lapso no numerador da fracção, ao escrever 9, em vez de $9!$.
No entanto, não existem dúvidas, perante o que está registado antes e depois dessa fracção, que o problema está correctamente resolvido.

Exemplo 2

$$p = \frac{3}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{9} \times \frac{8}{8} \times \ldots\ldots \times \frac{1}{1} = \frac{1}{220}$$

Cotação a atribuir: $4^{(*)} + 1 = 5$

(*) Expressão que evidencia que o examinando apenas não considerou as 10 posições possíveis para as bolas pretas, na sequência das doze bolas.

Exemplo 3

$c.f. \rightarrow\ {}^{9}A_9 \times {}^{3}A_3$

$c.p. \rightarrow 12!$

probabilidade $=$

Cotação a atribuir: $3^{(*)} + 0 = 3$

(*) O examinando indica apenas o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escreve a fracção. A expressão que dá o número de casos favoráveis evidencia que o examinando apenas não considerou as 10 posições possíveis para as bolas pretas, na sequência das doze bolas. Assim, de acordo com as notas 1 e 2, a cotação a atribuir deverá ser de $4 - 1 = 3$ pontos.

6. 12

Conteúdo 10

Explicação da expressão $^nC_2$ **(ver nota 1)**..... 4
Explicação da subtracção de $^nC_2$ por n **(ver nota 2)**..... 2
Explicação da multiplicação de $^nC_2 - n$ por 2 **(ver nota 3)** 1
Explicação da expressão $2\,n$ **(ver nota 4)** 3

Forma **(ver nota 5)** 2

Notas:

1. A explicação da expressão $^nC_2$ deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

O examinando refere, de forma clara e utilizando linguagem formalmente correcta, que $^nC_2$ é o número de segmentos de recta definidos pelos vértices de uma das bases 4

O examinando explica o valor $^nC_2$ de forma clara, mas utiliza linguagem formalmente incorrecta (por exemplo, designa por rectas os segmentos de recta definidos pelos vértices de uma das bases) 3

Outras situações 0

2. A explicação da subtracção de $^nC_2$ por n deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

O examinando refere, de forma clara e utilizando linguagem formalmente correcta, que n é o número de lados de uma base, pelo que $^nC_2 - n$ é o número de diagonais de uma base..... 2

O examinando explica a subtracção de forma clara, mas utiliza linguagem formalmente incorrecta 1

Outras situações 0

3. A explicação da multiplicação de $^nC_2 - n$ por 2 deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

O examinando refere que, como existem duas bases, é necessário multiplicar $^nC_2 - n$ por 2 1

Outras situações 0

4. A explicação da expressão $2n$ deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

O examinando refere, de forma clara e utilizando linguagem formalmente correcta, que existem duas diagonais em cada face lateral, pelo que $2n$ é o número total de diagonais das faces laterais 3

O examinando explica a expressão $2n$ de forma clara, mas utiliza linguagem formalmente incorrecta 2

Outras situações 0

5. Quanto à forma, a composição deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

Redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia) 2

Redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecta a inteligibilidade 1

Redacção confusa, sem estruturação aparente, presença de erros graves, com perturbação frequente da inteligibilidade 0

6. Se o examinando se limitar a justificar a expressão do enunciado num caso particular, a sua resposta deve ser cotada com 0 (zero) pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

O prisma tem n faces laterais, cada uma com duas diagonais, existindo assim um total de $2n$ diagonais nas faces laterais.

Em cada uma das bases existem n vértices, pelo que existem ${}^nC_2$ segmentos de recta por eles definidos. Destes, n são os lados do polígono, pelo que ${}^nC_2 - n$ é o número de diagonais de uma base. Como existem duas bases, existem $2({}^nC_2 - n)$ diagonais nas bases do prisma.

Existem, assim, ao todo, $2\,({}^nC_2 - n) + 2n$ diagonais nas faces do prisma.

Cotação a atribuir: $10(4 + 2 + 1 + 3) + 2 = 12$

Exemplo 2

${}^nC_2$ é o número de rectas que se podem formar a partir de n vértices da base do prisma, mas é necessário subtrair n pois é o número de rectas formado pelos vértices da base que não corresponde a diagonais. Após calcular o número de diagonais de uma base através de $({}^nC_2 - n)$ é necessário multiplicar por 2, pois o prisma regular tem duas bases. Por fim $2n$ é o número de diagonais das faces: existem n faces, cada uma com duas diagonais e por isso se soma $2n$ a $2({}^nC_2 - n)$.

Cotação a atribuir: $6(3^{(*)} + 0^{(**)} + 1 + 2^{(***)}) + 1^{(****)} = 7$

(*) O examinando utiliza a designação *recta*, em vez de *segmento de recta*.

(**) O examinando não refere que n é o número de arestas de uma base. Limita-se a traduzir para linguagem corrente a expressão ${}^nC_2 - n$.

(***) O examinando utiliza a designação *faces* em vez de *faces laterais*. As bases também são faces do poliedro.

(****) O examinando comete alguns erros de sintaxe que não afectam a inteligibilidade.

Exemplo 3

Um prisma regular em cada face tem duas diagonais, $2n$ representa o número de diagonais das faces do prisma. $({}^nC_2 - n)$ representa o número de diagonais de cada base, como tem duas bases, logo $2({}^nC_2 - n)$.

Cotação a atribuir: $3(0 + 0 + 1 + 2^{(*)}) + 1^{(**)} = 4$

(*) O examinando utiliza a designação *faces* em vez de *faces laterais*.

(**) O examinando comete alguns erros de pontuação e de sintaxe que não afectam a inteligibilidade.

Exemplo 4

O número das diagonais das faces de um prisma é dado por $2\,({}^nC_2 - n) + 2n$, pois se pensarmos no prisma, ele terá duas bases de n lados, portanto o número das suas diagonais será traduzido por ${}^nC_2 - n$, pois deverá retirar-se o vértice ao lado porque não é possível fazer diagonal com dois vértices consecutivos é $2\,({}^nC_2 - n)$, pois são duas as bases presentes num prisma.

A esse valor soma-se $2n$, pois o prisma é formado por duas bases e n faces laterais que são rectângulos, ou seja, têm duas diagonais, e por isso multiplica por 2 o número de faces laterais do prisma.

Cotação a atribuir: $4(0 + 0 + 1 + 3) + 1^{(*)} = 5$

(*) A redacção só é confusa e com erros que afectam a inteligibilidade na parte da resposta cujo conteúdo foi cotado com 0 (zero) pontos. Na parte restante, os erros cometidos não afectam a inteligibilidade.

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO EXAME NACIONAL DE MATEMÁTICA (PROVA 435) 1ªFASE

Grupo I

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	D	A	A	C	D	C	C
Versão 2	C	C	B	A	D	A	B

Grupo II

1.1.

$$w=\frac{2+i}{1-i}-i=\frac{2+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}-i=\frac{2+2i+i+i^2}{1-i^2}-i=\frac{2+3i-1}{1+1}-i=\frac{1+3i}{2}-\frac{2i}{2}=$$
$$=\frac{1+3i-2i}{2}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$|w|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Seja $\theta=\arg(w)$

$$\tan(\theta)=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1 \quad \wedge \theta\in 1^{o}\,\mathrm{Q}\text{, então } \theta=\frac{\pi}{4}$$

Logo, $w=\frac{\sqrt{2}}{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$

1.2.

$$z_1+z_2=cis(\alpha)+cis\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$$
$$=\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)+\sin(\alpha)+i\cos(\alpha)=[\cos(\alpha)+\sin(\alpha)]+[\sin(\alpha)+\cos(\alpha)]\ i$$

Como z_1+z_2 tem parte real igual ao coeficiente da parte imaginária, logo o afixo de z_1+z_2 pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares.

2.1.

$$\lim_{t\to+\infty}P(t)=\lim_{t\to+\infty}\left(5{,}2\times10^7\times e^{(N-M)\cdot t}\right)=5{,}2\times10^7\lim_{t\to+\infty}\left(e^{(N-M)\cdot t}\right)$$

Como $N<M$ então $N-M<0$ e daí $\lim_{t\to+\infty}\left(e^{(N-M)\cdot t}\right)=0$ e logo $\lim_{t\to+\infty}P(t)=0$

Com o decorrer do tempo, a população de aves tende a extinguir-se.

2.2.

$$P(30)=\frac{1}{2}P(0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5{,}2\times10^{7}\times e^{(7{,}56-M)30}=\frac{1}{2}5{,}2\times10^{7}\times e^{(7{,}56-M)0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{(7{,}56-M)30}=\frac{1}{2}e^{0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{226{,}8-30M}=\frac{1}{2}\times1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 226{,}8-30M=\ln\left(\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M=\frac{226{,}8-\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{30}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M\approx 7{,}58$$

3.1.

$$A_{sombreada}=2\times A_{[AOB]}+4\times A_{\text{sec}tor(1)}=$$

$$=2\times9\cos x\cdot\sin x+4\times\frac{9x}{2}=$$

$$=18\cos x\cdot\sin x+18x=$$

$$=18(x+\cos x\cdot\sin x)\quad \text{c.q.d.}$$

Cálculo auxiliar

$$\sin x=\frac{\overline{OI}}{\overline{OB}}\Leftrightarrow\sin x=\frac{\overline{OI}}{3}\Leftrightarrow\overline{OI}=3\sin x$$

$$\cos x=\frac{\overline{IB}}{\overline{OB}}\Leftrightarrow\cos x=\frac{\overline{IB}}{3}\Leftrightarrow\overline{IB}=3\cos x$$

$$A_{[AOB]}=\frac{\overline{AB}\times\overline{OI}}{2}=\frac{2\overline{IB}\times\overline{OI}}{2}=\frac{2\times3\sin x\times3\cos x}{2}=9\cos x\cdot\sin x$$

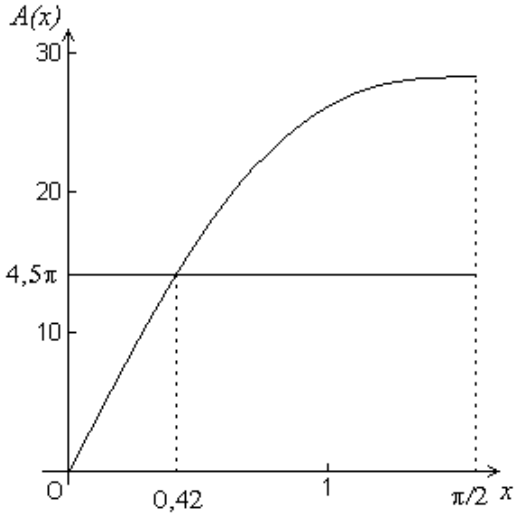
$$A_{\text{sec}tor(1)}=\frac{A_{circulo}}{\frac{2\pi}{x}}=\pi\times3^{2}\times\frac{x}{2\pi}=\frac{9x}{2}$$

(1) sector circular correspondente ao arco BF

3.2.

$$\frac{A_{círculo}}{2} = \frac{\pi \times 3^2}{2} = 4{,}5\pi$$

O valor de x obtém-se resolvendo graficamente a equação $A(x) = 4{,}5\pi$



Para que a área da região sombreada seja igual a metade da área do círculo, o valor de x é aproximadamente 0,42 rad.

4.1.

$$m = f'(1) = 2 + 1 \times \ln(1) = 2 + 0 = 2$$

$$f(1) = 3$$

A equação da recta r é do tipo $y = 2x + b$

Então, $3 = 2 \times 1 + b \Leftrightarrow b = 1$ e portanto, r tem equação $y = 2x + 1$

Intersecção com o eixo Ox:

$$0 = 2x + 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

R: A abcissa do ponto P é $-\frac{1}{2}$

4.2.

$$f''(x) = 0 + 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

x	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f''(x)$	n.d.	–	0	+
$f(x)$	n.d.	$\cap$	P.I.	$\cup$

A função tem a concavidade voltada para baixo em $\left]0, \frac{1}{e}\right]$ e voltada para cima em $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$ e admite um ponto de inflexão para $x = \frac{1}{e}$.

5.1.

$$P = \frac{3 \times 9 \times 10! \times 2}{12!} = \frac{9}{22}$$

5.2.

$$P = \frac{10 \times 3! \times 9!}{12!} = \frac{1}{22}$$

6.

O prisma é constituído por duas bases, cada uma com n vértices. O número de segmentos de recta que se podem formar com os n vértices de uma das bases é ${}^{n}C_{2}$. Destes, n são lados do polígono, pelo que o número de diagonais que se podem formar em cada uma das bases é ${}^{n}C_{2} - n$. Como são duas bases, o número de diagonais definidas nas bases é $2\left({}^{n}C_{2} - n\right)$.

Por ser um prisma em que cada base tem n lados, o mesmo admite n faces laterais, tendo cada uma destas duas diagonais. Assim, o número de diagonais das faces laterais é $2n$.

Portanto, o número total de diagonais de todas as faces do prisma é dado por $2\left({}^{n}C_{2} - n\right) + 2n$.

FIM

Esta proposta de resolução também pode ser consultada em http://www.apm.pt

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **2.ª FASE**

2005

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.

O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de onze.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ $(\alpha - \textit{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro};\ r - \textit{raio})$

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ $(\alpha - \textit{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro};\ r - \textit{raio})$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - \textit{raio da base};\ g - \textit{geratriz})$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - \textit{raio})$

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $(r - \textit{raio})$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}$, $k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u' \,.\, v + u \,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \,.\, v - u \,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \,.\, u^{n-1} \,.\, u'$ $\quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \,.\, \cos u$

$(\cos u)' = -\,u' \,.\, \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \,.\, e^u$

$(a^u)' = u' \,.\, a^u \,.\, \ln a$ $\quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \,.\, \ln a}$ $\quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

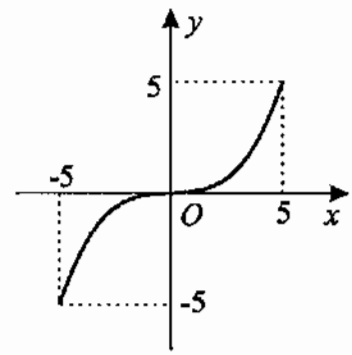
$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ $\quad (p \in \mathbb{R})$

Grupo I

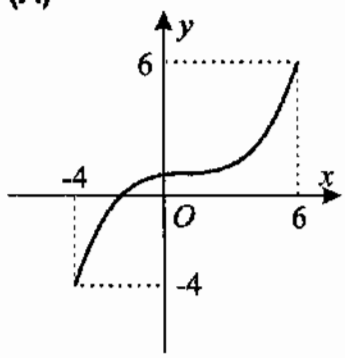
- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Considere a função f, de domínio $[-5, 5]$ e contradomínio $[-5, 5]$, representada graficamente na figura junta.

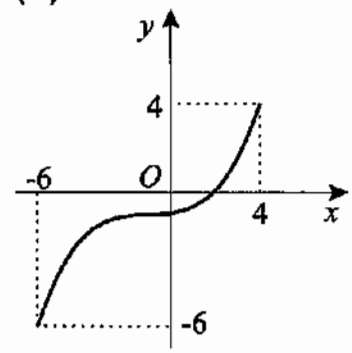


Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função g, definida por $g(x) = 1 + f(x+1)$?

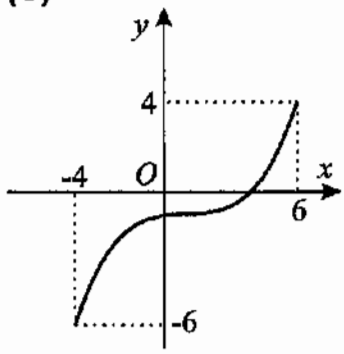
(A)



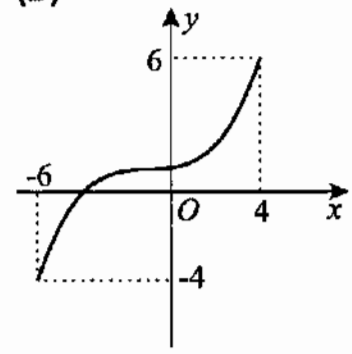
(B)



(C)



(D)



2. De uma função f, contínua em $\mathbb{R}$, sabe-se que $f(3) = 8$ e $f(7) = 1$.
Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) $1 \leq f(6) \leq 8$

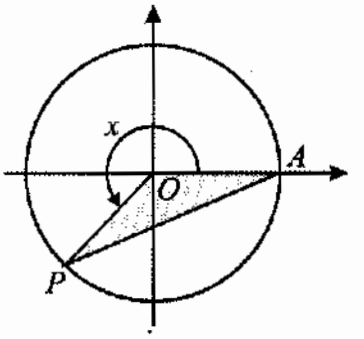
(B) A função f não tem zeros em $[3, 7]$

(C) $f(4) > f(5)$

(D) 2 pertence ao contradomínio de f

3. Na figura junta está representado o círculo trigonométrico.

Considere que um ponto P parte de $A(1, 0)$ e se desloca sobre a circunferência, dando uma volta completa, em sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

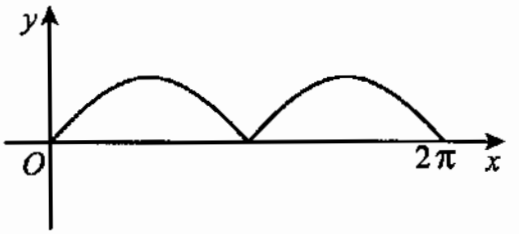


Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo orientado cujo lado origem é a semi-recta $\dot{O}A$ e cujo lado extremidade é a semi-recta $\dot{O}P$ ($x \in [0, 2\pi]$).

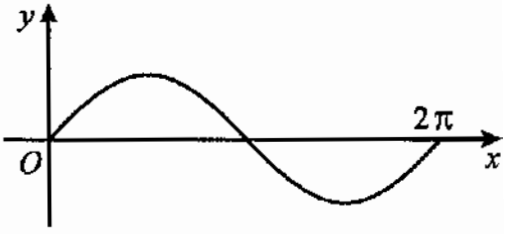
Seja g a função que, a cada valor de x, faz corresponder a área da região sombreada (região limitada pelos segmentos de recta $[OP]$, $[PA]$ e $[AO]$).

Qual dos seguintes gráficos pode ser o da função g?

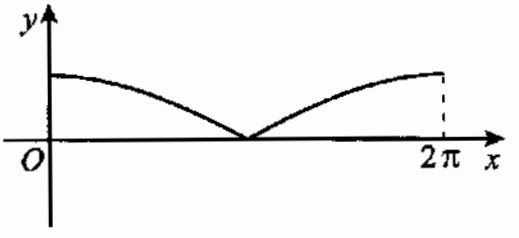
(A)



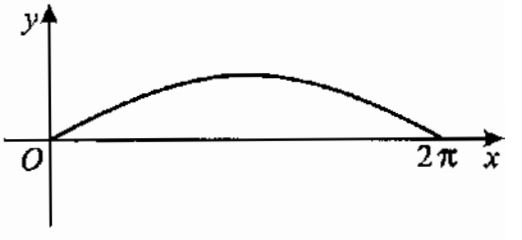
(B)



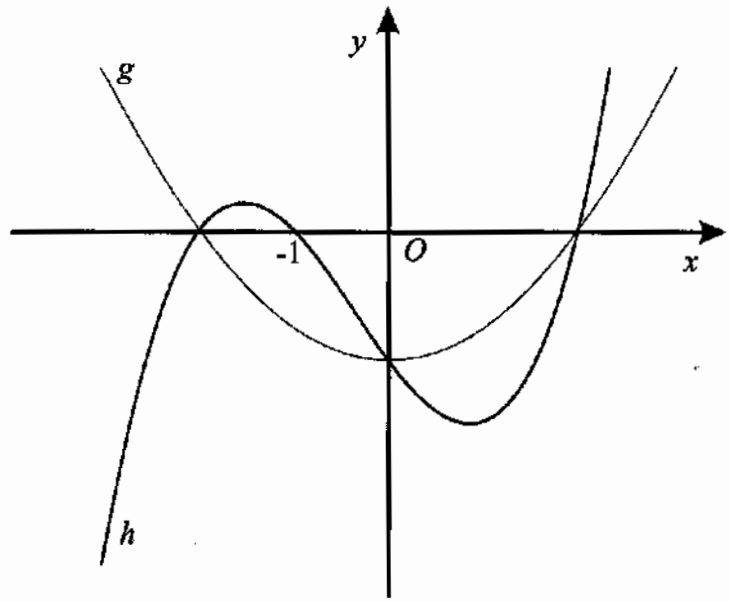
(C)



(D)



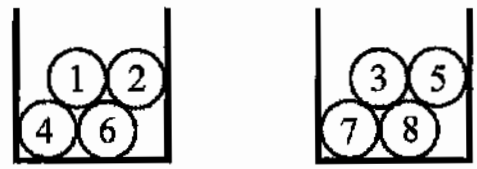
4. Na figura estão representadas partes dos gráficos de duas funções polinomiais, g e h, ambas de domínio $\mathbb{R}$.



Qual das expressões seguintes pode definir uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, tal que $f \times g = h$?

(A) $x-1$ **(B)** $-x+1$ **(C)** $x+1$ **(D)** $-x-1$

5. Considere duas caixas, A e B, cada uma delas contendo quatro bolas numeradas, tal como a figura abaixo ilustra.



Caixa A Caixa B

Extraem-se, ao acaso, **duas** bolas da caixa A e **uma** bola da caixa B.
Multiplicam-se os números das três bolas retiradas.

Qual é a probabilidade de o produto obtido ser um número par?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** $\frac{2\times1}{{}^4C_2\times{}^4C_1}$ **(D)** $\frac{{}^3C_2\times{}^1C_1}{{}^4C_2\times{}^4C_1}$

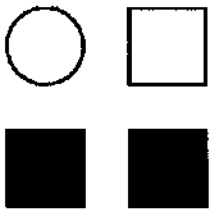
6. Em cada uma das opções seguintes (A, B, C e D) estão representadas quatro figuras (as figuras são círculos ou quadrados e estão pintadas de branco ou de preto).

Para cada opção, considere:

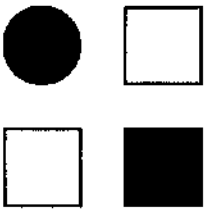
- a experiência que consiste na escolha aleatória de uma das quatro figuras;
- os acontecimentos:
  X: *«a figura escolhida é um quadrado»*;
  Y: *«a figura escolhida está pintada de preto»*.

Em qual das opções se tem $P(X \mid Y) = \frac{1}{2}$?

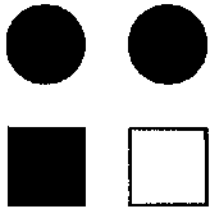
(A)



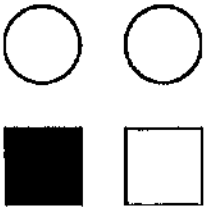
(B)



(C)



(D)



7. Em qual das opções seguintes estão duas raízes cúbicas de um mesmo número complexo ?

(A) $cis\,\frac{\pi}{6}$ e $cis\,\frac{5\pi}{6}$

(B) $cis\,\frac{\pi}{3}$ e $cis\,\frac{2\pi}{3}$

(C) $cis\,\frac{\pi}{4}$ e $cis\,\frac{3\pi}{4}$

(D) $cis\,\frac{\pi}{2}$ e $cis\,\frac{3\pi}{2}$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$w_1 = 1 + i\,, \qquad w_2 = \sqrt{2}\ cis\ \frac{\pi}{12} \qquad \text{e} \qquad w_3 = \sqrt{3}\ cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

1.1. **Sem recorrer à calculadora**, determine o valor de $\dfrac{w_1 \times w_2 - 2}{w_3}$

Apresente o resultado na **forma algébrica**.

1.2. Represente, no plano complexo, a região definida pela condição

$$Re\ (z) \geq Re(w_1) \qquad \wedge \qquad |z - w_3| \leq \sqrt{3}$$

2. O João tem catorze discos de música ligeira:

- seis são portugueses;
- quatro são espanhóis;
- três são franceses;
- um é italiano.

2.1. O João pretende seleccionar quatro desses catorze discos.

2.1.1. Quantos conjuntos diferentes pode o João fazer, de tal modo que os quatro discos seleccionados sejam de quatro países diferentes, ou seja, um de cada país?

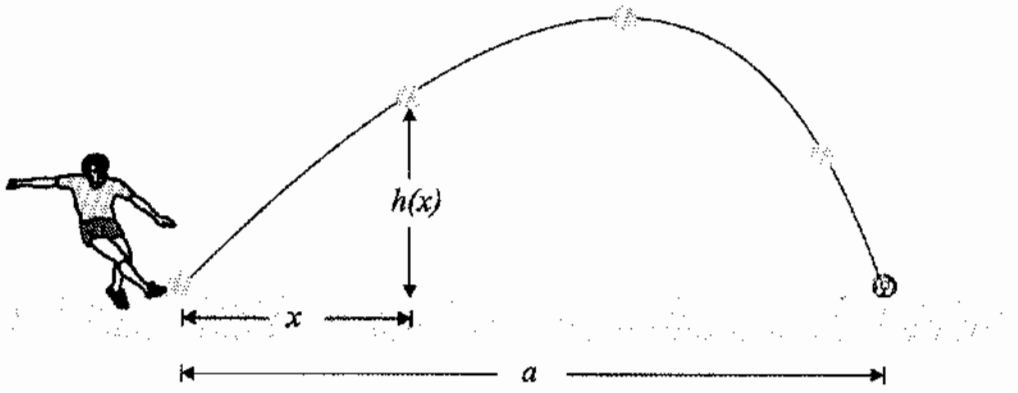
2.1.2. Quantos conjuntos diferentes pode o João fazer, de tal modo que os quatro discos seleccionados sejam todos do mesmo país?

2.2. Considere agora a seguinte experiência: o João selecciona, ao acaso, quatro dos catorze discos.

Seja X a variável aleatória: «***número de discos italianos seleccionados***».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X. Apresente as probabilidades na forma de fracção irredutível.

3. Na figura está representada a trajectória de uma bola de futebol, depois de ter sido pontapeada por um jogador da selecção portuguesa, durante um treino de preparação para o EURO-2004.



Designou-se por a a distância, em metros, entre o ponto onde a bola foi pontapeada e o ponto onde ela caiu.

Considere a função h definida em $[0, a]$ por

$$h(x) = 2x + 10 \ln (1 - 0{,}1x) \qquad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

Admita que $h(x)$ é a distância, em metros, da bola ao solo, no momento em que a sua projecção no solo se encontra a x metros do local onde foi pontapeada.

3.1. **Recorrendo à calculadora**, determine o valor de a, arredondado às centésimas. **Explique como procedeu, apresentando todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora.**

3.2. **Sem utilizar a calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos**, estude a função h quanto à monotonia e conclua qual foi a maior altura que a bola atingiu, relativamente ao solo, depois de pontapeada. Apresente o resultado em metros, arredondado às centésimas.

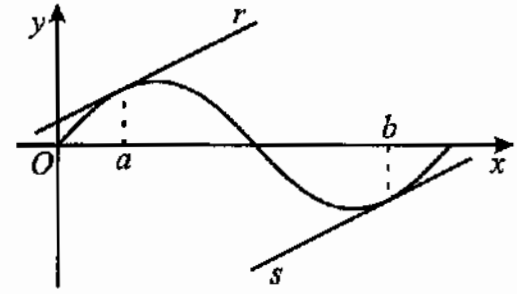
3.3. **Sem utilizar a calculadora**, mostre que a taxa de variação média da função h, no intervalo $[1, 3]$, é

$$\ln \left[e^2 \left(\frac{7}{9} \right)^5 \right]$$

4. Seja f a função, **de domínio** $[0, 2\pi]$, definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$

4.1. Na figura junta estão representados:

- o gráfico da função f;
- duas rectas, r e s, tangentes ao gráfico de f, nos pontos de abcissas a e b, respectivamente.



Prove que, se $a + b = 2\pi$, então as rectas r e s são paralelas.

4.2. Sem recorrer à calculadora, estude, quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, a função g, **de domínio** $]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$, definida por $g(x) = \frac{x}{f(x)}$

5. No início de 1972, havia quatrocentos lobos num determinado parque natural.
As medidas de protecção a lobos fizeram com que o referido número aumentasse continuamente. Os recursos do parque permitem que o número de lobos cresça até bastante perto de um milhar, mas não permitem que este valor seja ultrapassado.
Nestas condições, apenas uma das expressões seguintes pode definir a função P que dá o número aproximado de lobos existentes no parque natural, t anos após o início de 1972.

(A) $\frac{1000}{1+e^{-0,5t}}$ **(B)** $\frac{1000}{1+1,5\,e^{-0,5t}}$

(C) $\frac{1200}{1+2\,e^{-t}}$ **(D)** $1000 - \frac{600\,(t^3+1)}{e^t}$

Qual é a expressão correcta? Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explique as razões que o levam a rejeitar as outras três expressões **(apresente três razões diferentes, uma por cada expressão rejeitada).**
Nota: poder-lhe-á ser útil recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora. **Se o fizer, deve reproduzir o(s) gráfico(s) obtido(s).**

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 12
1.2. 9

2. 32
2.1. 18
2.1.1. 8
2.1.2. 10
2.2. 14

3. 42
3.1. 14
3.2. 14
3.3. 14

4. 28
4.1. 14
4.2. 14

5. 14

TOTAL **200**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **2.ª FASE**

2005

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada ..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
- **1.1.** 12
- **1.2.** 9

2. 32
- **2.1.** 18
  - **2.1.1.** 8
  - **2.1.2.** 10
- **2.2.** 14

3. 42
- **3.1.** 14
- **3.2.** 14
- **3.3.** 14

4. 28
- **4.1.** 14
- **4.2.** 14

5. 14

TOTAL **200**

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	D	D	A	C	B	B	A
Versão 2	B	D	B	A	A	D	B

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, no primeiro grupo, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas / Resp. certas	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

Grupo II

Critérios gerais

1. A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro, não negativo, de pontos.

2. Se, numa alínea em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, o examinando se limitar a apresentar o resultado final, deverão ser atribuídos zero pontos a essa alínea.

3. Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

4. Existem alíneas cuja cotação está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para as resolver.

   4.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.

   4.2. Caso a resolução da etapa esteja incompleta, ou contenha incorrecções, cabe ao classificador decidir a cotação a atribuir a essa etapa, tendo em conta o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:
   - erros de contas ocasionais devem ser penalizados em um ponto;
   - erros graves, que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades, devem ser penalizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa.

   4.3. No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.

   4.4. Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.

   4.5. Pode acontecer que o examinando, ao resolver uma questão, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

5. Existem alíneas em que estão previstos alguns erros que o examinando pode cometer. Para cada caso, é indicada a cotação a atribuir. O examinando pode, contudo, utilizar um processo não contemplado nos critérios e/ou cometer um erro não previsto. Cabe ao classificador adaptar as referências dadas a todas as situações não previstas.

6. Se, na resolução de uma alínea, o examinando utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), deve ser penalizado em um ponto, na cotação total a atribuir a essa alínea. Esta penalização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas cotadas com 0 (zero) pontos.

7. Se, na resolução de uma alínea, o examinando não respeitar uma eventual instrução relativa ao método a utilizar (por exemplo, se o enunciado vincular o examinando a uma resolução analítica, sem calculadora, e o examinando a utilizar), a etapa da resolução em que se dá o referido desrespeito bem como todas as subsequentes que dela dependam devem ser cotadas com 0 (zero) pontos.

8. Tudo o que o examinando escrever fora de contexto e que não resulte de trabalho anterior (por exemplo, num exercício de probabilidades, a escrita de uma fracção que não tenha nada a ver com o problema, ou, num exercício de estudo da monotonia de uma função, a apresentação de um quadro fora do contexto) deve ser cotado com 0 (zero) pontos. Todas as etapas subsequentes que dependam do que o examinando escreveu fora de contexto devem ser igualmente cotadas com 0 (zero) pontos.

Critérios específicos

Para cada item são apresentados:

- a cotação total do item;
- para cada processo de resolução apresentado, uma subdivisão da cotação total em cotações parcelares;
- exemplos de possíveis respostas dos examinandos, com a respectiva cotação a atribuir, devidamente explicada.

1.1. 12

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo (não efectua a subtracção no numerador):

Escrever w_1 na forma trigonométrica 2

Efectuar a multiplicação $w_1 \times w_2$ (na forma trigonométrica) 3

Escrever a fracção como diferença de duas fracções 1

Restantes cálculos 6

Escrever 2 na forma trigonométrica 1

Efectuar as divisões na forma trigonométrica ..... 2 (1+1)

Escrever os quocientes obtidos na forma algébrica ..... 2 (1+1)

Simplificação final 1

ou

Efectuar a primeira divisão na forma trigonométrica 1

Escrever o quociente obtido na forma algébrica 1

Escrever w_3 na forma algébrica 1

Efectuar a segunda divisão na forma algébrica 1

Simplificação final 2

ou

Escrever o produto $w_1 \times w_2$ na forma algébrica 2

Escrever w_3 na forma algébrica 1

Efectuar as divisões na forma algébrica 2

Simplificação final 1

2.º Processo (efectua a subtracção no numerador):

Escrever w_1 na forma trigonométrica 2

Efectuar a multiplicação $w_1 \times w_2$ (na forma trigonométrica) 3

Escrever o produto $w_1 \times w_2$ na forma algébrica 2

Simplificar o numerador 1

Efectuar a divisão e apresentar o resultado final na forma algébrica..... 4

Escrever w_3 na forma algébrica 1

Efectuar a divisão na forma algébrica 3

ou

Escrever o numerador na forma trigonométrica 1

Efectuar a divisão na forma trigonométrica 1

Escrever o resultado na forma algébrica 2

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$\frac{\sqrt{2}\ cis\ \frac{\pi}{4} \times \sqrt{2}\ cis\ \frac{\pi}{12} - 2}{\sqrt{3}\ cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2\ cis\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right) - 2}{\sqrt{3}\ cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2\ cis\ \frac{\pi}{3} - 2}{\sqrt{3}\ cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\ cis\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}\ cis\ \frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(cis\ \frac{5\pi}{6}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}\ cis\ \frac{\pi}{2}}$$

Cotação a atribuir (1.º processo - 2ª alternativa): $2 + 3 + 0^{(*)} + 1\,(1 + 0 + 0 + 0 + 0) = 6$

(*) O denominador da segunda fracção está incorrecto.

Exemplo 2

$$\frac{w_1 \times w_2 - 2}{w_3} = \frac{(1+i)\times\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{12}) - 2}{\sqrt{3}\,[\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\,\text{sen}\,(-\frac{\pi}{2})]} =$$

$$= \frac{(1+i)\times\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) - 2}{\sqrt{3}\,(0-i)} = \frac{(1+i)\times\left(\frac{\sqrt{6}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) - 2}{-\sqrt{3}\,i} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{1}{2}\,i + \frac{\sqrt{6}}{2}\,i - \frac{1}{2} - 2}{-\sqrt{3}\,i} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{6}-5}{2} + \frac{1+\sqrt{6}}{2}\,i}{-\sqrt{3}\,i} \times \frac{\sqrt{3}\,i}{\sqrt{3}\,i} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{18}\,i - 5\sqrt{3}\,i}{2} + \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{18}}{2}}{-3\times(-1)} =$$

$$= \frac{\sqrt{18}\,i}{6} - \frac{5\sqrt{3}\,i}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{18}}{6} =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}+\sqrt{18}}{6} + \frac{\sqrt{18}-5\sqrt{3}}{6}\,i$$

Cotação a atribuir (2.º processo - 1ª alternativa): $0+0+0+1+4\,(1+3) = 5$

Exemplo 3

$$\frac{(1+i)\times(1{,}37+0{,}37\,i) - 2}{-\sqrt{3}\,i} =$$

$$= \frac{1{,}37+0{,}37\,i+1{,}37\,i-0{,}37-2}{-\sqrt{3}\,i} =$$

$$= \frac{-1+1{,}74\,i}{-\sqrt{3}\,i} = -\frac{1{,}74}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,i$$

Cotação a atribuir (2.º processo - 1ª alternativa): $0+0^{(*)}+0^{(*)}+0^{(*)}+1\,(1+0^{(*)}) = 1$

(*) Ver critério geral 7.

Exemplo 4

$$\frac{(1+i)\times\sqrt{2}\ cis\ \frac{\pi}{12}}{\sqrt{3}\ cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1\ cis\ \frac{\pi}{4}\times\sqrt{2}\ cis\ \frac{\pi}{12}}{\sqrt{3}\ cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\ cis\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)}{\sqrt{3}\ cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\ cis\ \frac{\pi}{3}}{\sqrt{3}\ cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ cis\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}\ cis\ \frac{5\pi}{6} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}\,i =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{6}\,i$$

Cotação a atribuir (2.º processo - 2ª alternativa): $1^{(*)}+3+0^{(**)}+0^{(**)}+3\,(0^{(**)}+1+2)=7$

(*) O argumento está correcto, mas o módulo não.

(**) Devido ao engano na passagem do enunciado, o examinando não cumpre estas etapas.

1.2. ..... **9**

Representar a região definida pela condição
$Re(z) \geq Re(w_1)$ **(ver notas 1 e 4)**..... 4

Representar a região definida pela condição
$|z - w_3| \leq \sqrt{3}$ **(ver notas 2 e 4)**..... 4

Assinalar a intersecção das duas regiões **(ver nota 3)**..... 1

Notas:

1. A representação da região definida pela condição $Re(z) \geq Re(w_1)$ deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

Representação correcta (semiplano fechado, para a direita da recta definida por $Re(z) = 1$) 4

Semiplano aberto, para a direita da recta definida por $Re(z) = 1$ 3

Semiplano fechado, para a esquerda da recta definida por $Re(z) = 1$ 1

Outras situações 0

2. A representação da região definida pela condição $|z - w_3| \leq \sqrt{3}$ deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

Representação correcta (círculo fechado, centrado na imagem geométrica de $-\sqrt{3}i$ e tangente ao eixo real) 4

Círculo aberto, centrado na imagem geométrica de $-\sqrt{3}i$ e tangente ao eixo real 3

Círculo centrado na imagem geométrica de $-\sqrt{3}i$, mas não tangente ao eixo real 2

Círculo centrado na imagem geométrica de $\sqrt{3}i$ e tangente ao eixo real 1

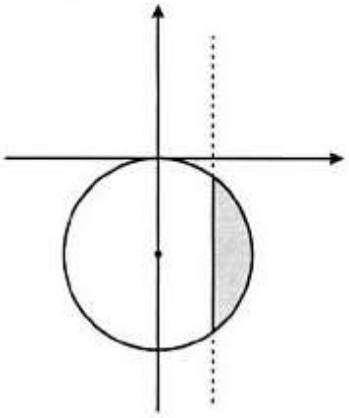
Outras situações 0

3. O ponto relativo à intersecção não deve ser atribuído no caso em que as cotações atribuídas às duas representações foram ambas iguais a zero.

4. Aceita-se que o examinando represente a traço contínuo ou a tracejado a parte da circunferência e a parte da recta que não pertencem à intersecção. Desde que a fronteira da região apresentada como resposta final esteja a traço contínuo, consideram-se como fechados o círculo e o semiplano cuja intersecção é a resposta ao problema.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1



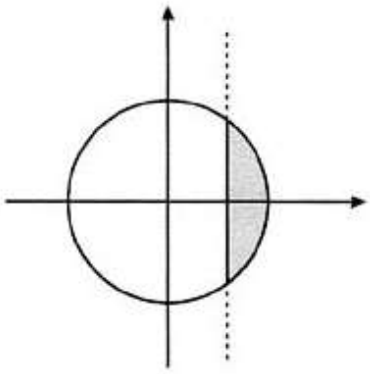
Cotação a atribuir: $4 + 4^{(*)} + 1 = 9^{(**)}$

(*) Apesar de o examinando não ter indicado as coordenadas do centro, considerou-se o círculo correctamente representado, atendendo ao facto de ser tangente ao eixo Ox e à distância a que o centro se encontra da origem (relativamente à distância do eixo imaginário à recta que limita a região sombreada).

(**) Ao atribuir a cotação máxima a esta resposta, não se está a contrariar o disposto no critério geral 2, apesar de o examinando não ter apresentado qualquer cálculo. De facto, a resolução desta alínea não exige cálculos, e o examinando não se limitou a apresentar o resultado final (a intersecção). A representação da recta e da circunferência constituem justificação bastante.

Exemplo 2

$$Re(z) \geq Re(w_1) \ \wedge \ |z - w_3| \leq \sqrt{3} \ \Leftrightarrow \ Re(z) \geq 1 \ \wedge \ \left|z + \sqrt{3}\right| \leq \sqrt{3}$$



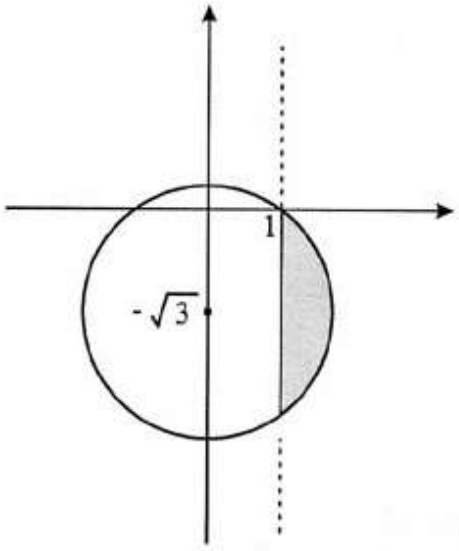
Cotação a atribuir: $4 + 0 + 1 = 5$

Exemplo 3

$$Re(z) \geq Re(w_1) \ \wedge \ |z - w_3| \leq \sqrt{3} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Re(z) \geq 1 \ \wedge \ \left|z - \left(-\sqrt{3}\,i\right)\right| \leq \sqrt{3} \ \Leftrightarrow$$

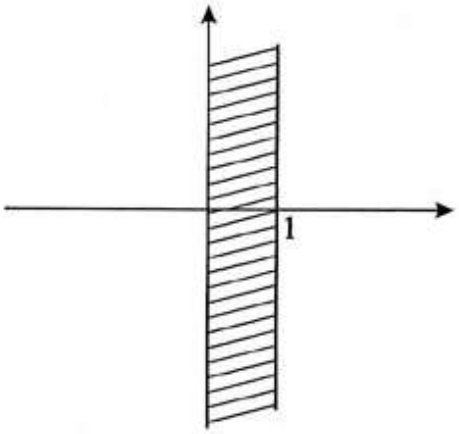
$$\Leftrightarrow Re(z) \geq 1 \ \wedge \ \left|z + \sqrt{3}\,i\right| \leq \sqrt{3} \qquad C(0, -\sqrt{3}) \qquad R = \sqrt{3}$$



Cotação a atribuir: $4 + 2^{(*)} + 1 = 7$

(*) Terceira situação referida na nota 2.

Exemplo 4



Cotação a atribuir: $0 + 0 + 0 = 0$

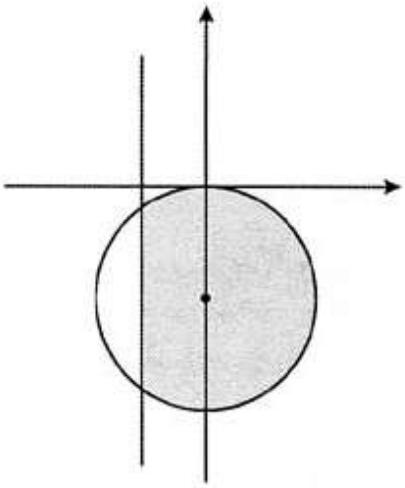
Exemplo 5

$Re(w_1) = -1$

$w_3 = \sqrt{3}\,cis\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\left[cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\,sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = -\sqrt{3}\,i$

$Re(z) \geq Re(w_1) \ \wedge \ |z - w_3| \leq \sqrt{3} \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Re(z) \geq -1 \ \wedge \ \left|z - (-\sqrt{3}\,i)\right| \leq \sqrt{3} \qquad C(0, -\sqrt{3})$

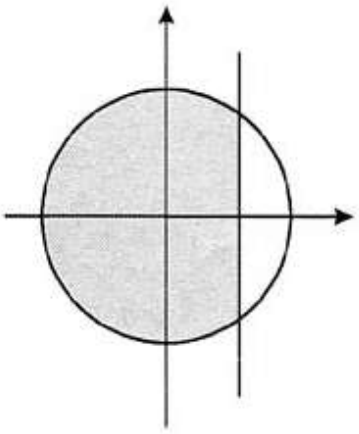


Cotação a atribuir: $3^{(*)} + 4 + 1 = 8$

(*) A condição $Re(z) \geq -1$ está bem representada.
Penalizou-se em 1 ponto o erro $Re(w_1) = -1$, pois foi considerado um erro de distracção.

Exemplo 6

$w_3 = \sqrt{3}\,cis\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{3}\,i$



Cotação a atribuir: $1^{(*)} + 0 + 1 = 2$

(*) Terceira situação referida na nota 1.

2.1.1. ..... **8**

Expressão que dá o número pedido **(ver notas 1 e 2)** 7

Resposta final **(ver nota 3)** 1

Notas:

1. A escrita da expressão que dá o número pedido deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

   Expressão que traduz uma contagem correcta do número pedido ($6 \times 4 \times 3 \times 1$ ou equivalente) 7

   Expressão que traduz uma contagem incorrecta do número pedido.....0

2. Se o examinando indicar a fracção cujo numerador é $6 \times 4 \times 3 \times 1$ (ou equivalente) e cujo denominador é ${}^{14}C_4$ (ou equivalente), fracção essa que dá a probabilidade de, numa escolha aleatória de quatro dos catorze discos, saírem quatro discos de países diferentes, pode considerar-se que o examinando cometeu um erro de distracção, que deve ser penalizado em 2 pontos. No caso de a fracção indicada para a probabilidade ser outra, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos, ainda que se trate de uma fracção equivalente.

3. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

${}^6C_1 \times {}^4C_1 \times {}^3C_1 \times {}^1C_1 = 72$

Cotação a atribuir: $7 + 1 = 8$

Exemplo 2

$6 \times 4 \times 3 \times 1 = 48$

Cotação a atribuir: $7 + 0 = 7$

Exemplo 3

$6 \times 4 \times 3 \times 1 \times 4! = 1728$

Cotação a atribuir: $0 + 0^{(*)} = 0$

(*) Ver nota 3.

Exemplo 4

72

Cotação a atribuir: 0

(*) Ver critério geral 2.

Exemplo 5

$casos\ possíveis = {}^{14}C_4$

$casos\ favoráveis = 6 \times 4 \times 3 \times 1$

$probabilidade = \frac{6 \times 4 \times 3 \times 1}{{}^{14}C_4} = \frac{72}{1001}$

Cotação a atribuir: $5^{(*)} + 1 = 6$

(*) Ver nota 2.

Exemplo 6

$probabilidade = \frac{6 \times 4 \times 3 \times 1 \times 4!}{{}^{14}A_4} = \frac{1\,728}{24\,024}$

Cotação a atribuir: $0^{(*)} + 0^{(**)} = 0$

(*) Ver nota 2.
(**) Ver nota 3.

Exemplo 7

$probabilidade = \frac{6 \times 4 \times 3 \times 1}{{}^{14}A_4} = \frac{6 \times 4 \times 3 \times 1}{{}^{14}A_4} = \frac{3}{1001}$

Cotação a atribuir: $0^{(*)} + 0^{(**)} = 0$

(*) Ver nota 2.
(**) Ver nota 3.

2.1.2. ..... **10**

Expressão que dá o número pedido **(ver notas 1 e 2)**.....9

Resposta final **(ver nota 3)**..... 1

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão que dá o número pedido, com a respectiva cotação a atribuir.

   ${}^{6}C_{4} + {}^{4}C_{4}$ (ou equivalente) 9

   ${}^{6}C_{4} + 4$ 4

   Expressão que traduz uma contagem incorrecta do número pedido, diferente de ${}^{6}C_{4} + 4$ 0

2. Se o examinando indicar a fracção cujo numerador é ${}^{6}C_{4} + {}^{4}C_{4}$ (ou equivalente) e cujo denominador é ${}^{14}C_{4}$ (ou equivalente), fracção essa que dá a probabilidade de, numa escolha aleatória de quatro dos catorze discos, saírem quatro discos do mesmo país, pode considerar-se que o examinando cometeu um erro de distracção, que deve ser penalizado em 2 pontos. No caso de a fracção indicada para a probabilidade ser outra, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos, ainda que se trate de uma fracção equivalente.

3. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$\underbrace{6 \times 5 \times 4 \times 3}_{portugueses} + \underbrace{4 \times 3 \times 2 \times 1}_{espanhóis} + \underbrace{3 \times 2 \times 1 \times 0}_{franceses} + \underbrace{1 \times 0 \times 0 \times 0}_{italianos} = 384$$

Cotação a atribuir: $0 + 0^{(*)} = 0$

(*) Ver nota 3.

Exemplo 2

$^{7}C_{4} + {}^{4}C_{4} = 36$

Cotação a atribuir: $8^{(*)} + 1 = 9$

(*) Considerou-se a escrita de 7 como sendo um erro de distracção (equivalente a um erro ocasional de contas).

Exemplo 3

$^{14}C_{4} - 72 = 929$

Cotação a atribuir: $0 + 0^{(*)} = 0$

(*) Ver nota 3.

Exemplo 4

$$p = \frac{6\times5\times4\times3}{14\times13\times12\times11} + \frac{4\times3\times2\times1}{14\times13\times12\times11} + \frac{3\times2\times1}{14\times13\times12} + \frac{1}{14} =$$

$$= \frac{360}{24024} + \frac{24}{24024} + \frac{6}{2184} + \frac{1}{14} = 23{,}2\%$$

Cotação a atribuir: $0^{(*)} + 0 = 0$

(*) Ver nota 2.

Exemplo 5

$$p = \frac{{}^{6}C_{4} + {}^{4}C_{4}}{{}^{14}C_{4}} = \frac{16}{1001}$$

Cotação a atribuir: $7^{(*)} + 1 = 8$

(*) Ver nota 2.

2.2. ..... **14**

Valores da variável X **(ver notas 1 e 2)** 4

Probabilidades **(ver notas 3 e 4)** 10

$P(X=0)$ **(ver nota 5)** 5

$P(X=1)$ **(ver nota 5)** 5

Notas:

1. A indicação, na tabela da distribuição de probabilidades, de um valor da variável X ao qual o examinando faça corresponder a probabilidade 0 deve ser considerada equivalente à não inclusão, nessa tabela, desse valor.

2. Esta etapa deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

   Indicação correcta dos dois valores que a variável X pode assumir (tenha-se em conta a nota 1) 4

   Outras situações 0

3. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

4. Se as expressões apresentadas pelo examinando para as probabilidades de $X=0$ e de $X=1$ estiverem ambas incorrectas, mas a soma das probabilidades for igual a 1, deve ser atribuída a cotação de 2 dos 10 pontos desta etapa.

5. Se o examinando não apresentar, correctamente, o resultado na forma de fracção irredutível, deve ser penalizado em 1 ponto.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

x_i	0	1
p_i	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$

$$P(X=0)=\frac{13\times12\times11\times10}{14\times13\times12\times11}=\frac{10}{14}=\frac{5}{7}$$

$$P(X=1)=1-\frac{5}{7}=\frac{2}{7}$$

Cotação a atribuir: $4+10\,(5+5)=14$

Exemplo 2

X	0	1
x_i	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$

$$P(\textit{não sair nenhum disco italiano}) = \frac{^{13}C_4}{^{14}C_4} = \frac{5}{7}$$

$$P(\textit{sair um disco italiano}) = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$$

Cotação a atribuir: $4 + 10\,(5+5) + (-1)^{(*)} = 13$

(*) O examinando escreve uma expressão inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (x_i), na célula da tabela onde deveria estar uma referência a probabilidades (ver critério geral 6).

Exemplo 3

x_i	0	1	*Soma*
$p(x_i)$	$\frac{715}{^{14}C_4}$	$\frac{251}{^{14}C_4}$	1

$$p(0) = \frac{^{13}C_4}{^{14}C_4} = \frac{715}{1001} \qquad p(1) = \frac{251}{1001}$$

Cotação a atribuir: $4 + 8\,(4^{(*)} + 4^{(**)}) = 12$

(*) Ver nota 5.

(**) A indicação, na tabela, do valor da soma das probabilidades sugere que o examinando calculou a probabilidade de $X = 1$ calculando a diferença $1 - P(X = 0)$. O erro de cálculo cometido deve ser penalizado em 1 ponto. A fracção escrita pelo examinando já está na forma de fracção irredutível.

Exemplo 4

Não sair $\rightarrow$ $p = \frac{13\times12\times11\times10}{14\times13\times12\times11} = 0{,}71$

Sair $\rightarrow$ $p = \frac{6\times4\times3\times1}{14\times13\times12\times11} = 0{,}0029$

X	0	1
P	0,714	0,003

Cotação a atribuir: $4 + 4\,(4^{(*)} + 0) = 8$

(*) Ver nota 5.

Exemplo 5

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{13}{14}$	$\frac{1}{14}$	0	0	0

$P(I) = \frac{1}{14}$ $\quad$ $P(\overline{I}) = 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14}$

Cotação a atribuir: $4^{(*)} + 2^{(**)} = 6$

(*) Apesar de o examinando ter indicado, na linha relativa aos valores possíveis da variável X, os valores 2, 3 e 4, deve ser atribuída a pontuação relativa à primeira etapa, dado que o examinando indica que é 0 (zero) a probabilidade de tais valores ocorrerem (ver nota 1).

(**) Ver nota 4.

Exemplo 6

x_i	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{14}$	0	0	0

Cotação a atribuir: $0^{(*)} + 0 = 0$

(*) Ver notas 1 e 2.

Exemplo 7

x	1
p_i	1

Cotação a atribuir: 0

Exemplo 8

X	0	1
P	0	1

Cotação a atribuir: $0^{(*)}$

(*) Apesar de o examinando ter indicado, na linha relativa aos valores possíveis da variável X, os valores 0 e 1, deve ser atribuída a pontuação de 0 (zero) pontos a esta resposta, de acordo com a nota 1.

Observe-se ainda que esta resposta é equivalente à do exemplo 7.

3.1. ..... **14**

Equacionar o problema: $h(x) = 0$ **(ver nota 1)** 3

Explicação do método utilizado para resolver a equação **(ver nota 2)** 3

Conclusão: $a \approx 7{,}97$ **(ver notas 3 e 4)** 8

Notas:

1. O examinando pode não apresentar (explicitamente) esta equação. Havendo evidência de que o examinando procura, por algum processo, o valor de x (diferente de zero) que anula a expressão $h(x)$, deverá ser-lhe atribuída a cotação de 3 pontos por esta etapa.

2. Os 3 pontos relativos à explicação do método utilizado devem ser atribuídos de acordo com o seguinte critério:

Apresentação correcta de parte do gráfico da função definida pela expressão $2x + 10\ln(1 - 0{,}1x)$, destacando, de alguma forma, o ponto de ordenada nula e abcissa positiva, e/ou transcrição correcta de uma tabela, e/ou referência correcta à utilização de ferramentas da calculadora (tal como *solve*), que evidenciem a procura do valor pedido 3

Explicação incompleta ..... 1 ou 2

Não apresentação de qualquer gráfico, nem de qualquer explicação 0

3. A não apresentação de qualquer gráfico, nem de qualquer explicação, implicam também a atribuição de 0 (zero) pontos à escrita do valor de a, mesmo que este esteja correcto.

4. A escrita do valor pedido deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

1.º Caso (apresentação do resultado arredondado às centésimas, de acordo com o enunciado):

Resposta $7{,}97$ 8

Resposta $7{,}96$ 6

Resposta $7{,}98$ 4

Resposta $7{,}95$ 2

Outros resultados 0

2.º Caso (apresentação do resultado com aproximação superior às centésimas):

Resposta $7{,}968$ 7

Resposta diferente de $7{,}968$, mas pertencente ao intervalo $[7{,}965\ ;\ 7{,}971]$ 5

Resposta fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[7{,}961\ ;\ 7{,}975]$ 3

Outros resultados 0

3.º Caso (apresentação do resultado arredondado às décimas):

Resposta $8{,}0$ 5

Resposta $7{,}9$ 3

Outros resultados 0

4.º Caso (apresentação do resultado arredondado às unidades):

Resposta 8 3

Outros resultados 0

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

A distância no solo irá ser Δx entre $x = 0$ e x de $f(0)$ à direita de $x = 0$.

$y = 0$ para $x = 0$ e $x = 7{,}968$ Logo $\Delta x = 7{,}968 - 0 = 7{,}968$

A distância em metros no solo correspondente ao percurso da bola é de $7{,}968$.

Cotação a atribuir: $3^{(*)} + 0 + 0^{(**)} + (-1)^{(***)} = 2$

(*) Ver nota 1.
(**) Ver nota 3.
(***) O examinando escreve uma expressão inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal: «x de $f(0)$», em vez de «x tal que $f(x) = 0$» (ver critério geral 6).

Exemplo 2

$y_1 = 2x + 10\,ln\,(1 - 0.1\,x)$

Fazendo "calc" "zero", descobrimos os pontos de intersecção do gráfico com $y = 0$.

$y_1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 7{,}969$

então, desde o momento 0 em que a bola vai ser pontapeada até regressar novamente ao solo, será no segundo 0, $x = 7{,}969$. Então $a = 7{,}969$

Cotação a atribuir: $3 + 3 + 5^{(*)} = 11$

(*) Ver nota 4 - 2º caso.

Exemplo 3

$0 = 2x + 10\,ln\,(1 - 0{,}1\,x)$

$x \approx 7{,}97$ de acordo com a calculadora.

A distância entre o ponto onde a bola foi pontapeada e o ponto onde ela caiu é aproximadamente 7,97 metros.

Para determinar este valor, introduzi a expressão da função na calculadora e pedi o valor dos zeros. Existem dois zeros: $x = 0$ e $x \approx 7{,}97$

Como $x = 0$ não pode ser, pois corresponde ao valor inicial, antes da bola ser pontapeada, então tem de ser $x \approx 7{,}97$.

Cotação a atribuir: $3 + 3 + 8 = 14$

Exemplo 4

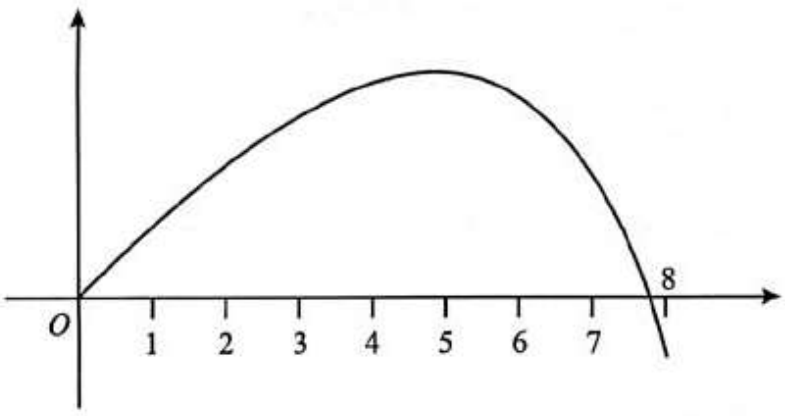
No momento em que a bola foi pontapeada, a altura a que esta se encontrava do solo era de zero metros. O mesmo se verificou no ponto onde ela caiu.

Coloquei na calculadora a expressão que é fornecida, $y_1 = 2x + 10\,ln\,(1 - 0{,}1\,x)$.

O gráfico a seguir representado foi vizualizado com a janela xmin $= -1$, xmax $= 10$, ymin $= -1$ e ymax $= 8$.

Recorrendo à calculadora, pressionei as teclas [2nd] [calc] e de seguida *zero* [enter]

O valor encontrado foi $x \approx 7{,}97$



$a \approx 7{,}97$

Cotação a atribuir: $3 + 3 + 8 = 14$

3.2. ..... **14**

Determinar $h'(x)$ 5

Evidenciar a intenção de calcular $h'(x)$ 1

Derivada de $\ln(1-0{,}1\,x)$ 2

Restantes cálculos 2

Determinar o zero de h' 3

Escrever a equação $h'(x)=0$ 1

Resolver a equação $h'(x)=0$ 2

Estudo do sinal de h' e consequente conclusão, relativamente à monotonia e extremo de h (estudo que pode ser apresentado através de um quadro) 4

Primeira linha do quadro **(ver nota 1)** 1

Sinal de h' **(ver nota 2)** 2

Relação entre o sinal de h' e a monotonia de h 1

$h(5) \approx 3{,}07$ **(ver nota 3)** 2

Notas:

1. A primeira linha do quadro deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

Primeira linha correcta: indicação do zero da derivada e indicação correcta do domínio, de 0 a a (aceita-se também o valor aproximado de a, calculado na alínea anterior) 1

Outras situações 0

2. A segunda linha do quadro deverá ser cotada de acordo com o seguinte critério:

Segunda linha do quadro de acordo com a primeira linha e com a expressão obtida para $h'(x)$ 2

Outras situações 0

3. Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às centésimas, ou se o arredondamento estiver incorrecto, deverá ser penalizado em 1 ponto.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$h'(x) = 2 - 10\,\frac{0{,}1}{1-0{,}1\,x} = 2 - \frac{1}{1-0{,}1\,x} \qquad D_{h'(x)} = \mathbb{R}^+$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{1-0{,}1\,x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1-0{,}1\,x} = 2 \Leftrightarrow 1 - 0{,}1\,x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0{,}1\,x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 5$$

	0		5		$+\infty$
$h'(x)$	$h'(0)$	+	0	−	−
$h(x)$	0	↗	M	↘	↘

$h(5) \approx 3{,}07$

A maior altura que a bola atinge é $3{,}07$ metros, a 5 metros do local onde foi pontapeada.

Cotação a atribuir: $5(1+2+2) + 3(1+2) + 1(0^{(*)} + 0^{(**)} + 1) + 2 + (-1)^{(***)} = 10$

(*) Ver nota 1.

(**) Não é verdade que, para qualquer x pertencente ao intervalo $]5, +\infty[$, $2 - \frac{1}{1-0{,}1\,x} < 0$ (ver nota 2).

(***) O quadro apresentado pelo examinando contém uma coluna relativa ao símbolo $+\infty$, o que é inequivocamente incorrecto, do ponto de vista formal (ver critério geral 6).

Exemplo 2

$$h'(x) = 2 + 10\left(\frac{(1-0{,}1\,x)'}{1-0{,}1\,x}\right) = 2 + 10\,\frac{-0{,}1}{1-0{,}1\,x} = 2 - \frac{1}{1-0{,}1\,x} =$$

$$= \frac{2(1-0{,}1\,x)-1}{1-0{,}1\,x} = \frac{2-0{,}2\,x-1}{1-0{,}1\,x} = \frac{-0{,}2\,x+1}{1-0{,}1\,x}$$

$$-0{,}2\,x + 1 = 0 \;\wedge\; 1 - 0{,}1\,x \neq 0 \qquad x = 5 \;\wedge\; x \neq 10$$

		5	
$h'(x)$	+	0	−
$h(x)$	↗	Max	↘

Cotação a atribuir: $5(1+2+2) + 3(1+2) + 1(0^{(*)} + 0^{(**)} + 1) + 0 = 9$

(*) Ver nota 1.

(**) Não é verdade que, para qualquer $x > 5$, se tenha $\frac{-0{,}2\,x+1}{1-0{,}1\,x} < 0$ (ver nota 2).

Exemplo 3

$h(x) = 2\,x + 10 \ln (1 - 0{,}1\,x)$

Máximo = ?

$$h'(x) = [2\,x + 10 \ln (1 - 0{,}1\,x)]' = (2\,x)' + (10 \ln (1 - 0{,}1\,x))' =$$

$$= 2 + \left[\underbrace{10'}_{0} \times \ln (1 - 0{,}1\,x) + 10 \times (\ln (1 - 0{,}1\,x))' \right] =$$

$$= 2 + 10 \times [\ln (1 - 0{,}1\,x)]' = 2 + 10 \times \frac{(1-0{,}1\,x)'}{1-0{,}1\,x} =$$

$$= 2 + 10 \times \frac{-0{,}1}{1-0{,}1\,x} = 2 - \frac{1}{1-0{,}1\,x} = \frac{2\,(1-0{,}1\,x) - 1}{1-0{,}1\,x} =$$

$$= \frac{2 - 0{,}2\,x - 1}{1-0{,}1\,x} = \frac{1 - 0{,}2\,x}{1-0{,}1\,x}$$

$$\frac{1 - 0{,}2\,x}{1-0{,}1\,x} = 0 \Leftrightarrow 1 - 0{,}2\,x = 0 \wedge 1 - 0{,}1\,x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0{,}2\,x = -1 \wedge -0{,}1\,x \neq -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \wedge x \neq 10$$

	$-\infty$		5		10		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	−	×	+	
$h(x)$		↗	*Max*	↘	×	↗	

Máximo:

$h(5) = 2 \times 5 + 10 \ln (1 - 0{,}1 \times 5) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow h(5) = 10 + 10 \ln (1 - 0{,}5) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow h(5) = 10 + 10 \ln (0{,}5)$
$h(5) \approx 3{,}07$

Cotação a atribuir: $5(1 + 2 + 2) + 3(1 + 2) + 3(0^{(*)} + 2^{(**)} + 1) + 2 = 13$

(*) Ver nota 1.

(**) Ver nota 2.

Exemplo 4

$h(x) = 2x + 10\ln(1 - 0{,}1x)$

Máximo da bola:

$$(2x + 10\ln(1 - 0{,}1x))' = (2x)' + (10\ln(1 - 0{,}1x))' =$$

$$= 2 + (10)'.\ln(1 - 0{,}1x) + (\ln(1 - 0{,}1x))'.10 =$$

$$= 2 + 0 + \frac{(1-0{,}1x)'}{1-0{,}1x} \cdot 10 = 2 + \frac{-0{,}1}{1-0{,}1x} \cdot 10 =$$

$$= 2 - \frac{0{,}1}{1-0{,}1x} \cdot 10 = 20 - \frac{0{,}1}{1-0{,}1x}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 20 - \frac{0{,}1}{1-0{,}1x} = 0 \Leftrightarrow \frac{20(1-0{,}1x) - 0{,}1}{1-0{,}1x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{20 - 2x - 0{,}1}{1-0{,}1x} = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x + 19{,}9}{1-0{,}1x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x + 19{,}9 = 0 \ \wedge \ 1 - 0{,}1x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x = -19{,}9 \ \wedge \ x \neq 0{,}1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 9{,}95 \ \wedge \ x \neq 0{,}1$$

	$-\infty$		9,95		$+\infty$
$h(x)$		+	0	−	
$h'(x)$	↗		*Max*	↘	

Tem um máximo para $x = 9{,}95$

Cotação a atribuir: $4(1+2+1) + 2(1+1^{(*)}) + 0(0^{(**)} + 0^{(***)} + 0^{(***)}) + 0 = 6$

(*) Erro na resolução da condição $1 - 0{,}1x \neq 0$

(**) Ver nota 1.

(***) O examinando troca h com h'

Exemplo 5

$h'(x) = 2 + \frac{-0,1}{1-0,1\,x}$

		5		8
$h'(x)$	+	0	−	
$h(x)$	↗	Max	↘	0

$h(5) = 2 \times 5 + 10 \ln (1 - 0,1 \times 5)$
$h(5) = 10 + 10 \ln (0,5)$
$h(5) = 10 - 6,93$
$h(5) = 3,07$

Cotação a atribuir: $4(1 + 2 + 1^{(*)}) + 0^{(**)} + 0^{(***)} + 0^{(****)} = 4$

(*) A fracção não está multiplicada por 10

(**) O examinando não resolveu a condição $h'(x) = 0$

(***) Quadro fora de contexto, dado que o examinando não resolveu a condição $h'(x) = 0$.
Aliás, o valor 5 não anula a expressão que o examinando obteve para $h'(x)$. Ver critério geral 8.

(****) Ver critério geral 8.

Exemplo 6

$h(4) = 2 \times 4 + 10 \ln (1 - 0,1 \times 4) = 2,89$

$h(5) = 2 \times 5 + 10 \ln (1 - 0,1 \times 5) = 3,07$

$h(6) = 2 \times 6 + 10 \ln (1 - 0,1 \times 6) = 2,84$

Depois de pontapeada, a bola atinge 3,07 metros (altura máxima) quando está a 5 metros de distância (no plano) do jogador.

Cotação a atribuir: $0^{(*)}$

(*) O cálculo de $h(5)$ está descontextualizado. Ver critério geral 8.

Exemplo 7

Fui à calculadora e vi que a função tem máximo igual a $3,07$ para $x = 5$.

Cotação a atribuir: $0^{(*)}$

(*) Ver critério geral 7.

3.3. ..... **14**

Taxa de variação média de h no intervalo $[1, 3]$
igual a $\frac{h(3)-h(1)}{3-1}$ (ou equivalente) 2

$h(3) = 6 + 10\ln(0{,}7)$ 1

$h(1) = 2 + 10\ln(0{,}9)$ 1

Utilização correcta das propriedades dos logaritmos 8

Logaritmo de um quociente 2

Logaritmo de uma potência 2

Logaritmo de um produto 2

$2 = \ln e^2$ **(ver nota)** 2

Restantes cálculos 2

Nota:
Esta etapa deve ser explicitada. Se o não for, não deverá ser atribuída a respectiva cotação.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$t.v.m. = \frac{h(1)-h(3)}{1-3}$

$h(1) = 2 + 10\ln(0{,}9) = 0{,}95$

$h(3) = 6 + 10\ln(0{,}7) = 2{,}43$

$t.v.m. = \frac{0{,}95-2{,}43}{1-3} = 0{,}74 = \ln\left[e^2\left(\frac{7}{9}\right)^5\right]$

Cotação a atribuir: $2 + 1 + 1 + 0^{(*)} + 0^{(*)} = 4$
(*) Ver critério geral 7.

Exemplo 2

$$TmV = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{f(3)-f(1)}{3-1}$$

$$h(3) = 6 + 10\ln(0{,}7) = 6 + 10\ln\left(\frac{7}{10}\right)$$

$$h(1) = 2 + 10\ln(0{,}9) = 2 + 10\ln\left(\frac{9}{10}\right)$$

$$TmV = \frac{6+10\ln\left(\frac{7}{10}\right) - 2+10\ln\left(\frac{9}{10}\right)}{2} =$$

$$= \frac{4+10\ln\left(\frac{7}{10}\right)+10\ln\left(\frac{9}{10}\right)}{2} = 2 + 5\ln\left(\frac{7}{10}\right) + 5\ln\left(\frac{9}{10}\right) =$$

$$= 2 + \ln\left(\frac{7}{10}\right)^5 + \ln\left(\frac{9}{10}\right)^5 = \ln e^2 + \ln\left(\frac{7}{10}\times\frac{9}{10}\right)^5 = \ln\left[e^2\left(\frac{63}{100}\right)^5\right]$$

Cotação a atribuir: $2^{(*)} + 1 + 1 + 6(0+2+2+2) + 1^{(**)} = 11$

(*) Não se penalizou a troca de h por f.

(**) O examinando comete um erro de sinal. Os restantes cálculos estão correctos.

Exemplo 3

$$tvm_{[1,3]} = \lim_{h\to 0}\frac{h(3)-h(1)}{3-1} = \lim_{h\to 0}\frac{6+10\ln 0{,}7 - (2+10\ln 0{,}1)}{2} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{6+10\ln 0{,}7 - 2 - 10\ln 0{,}1}{2} = \lim_{h\to 0}\frac{4+10\ln 0{,}7 - 10\ln 0{,}1}{2} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4+10(\ln 0{,}7 - \ln 0{,}1)}{2} = \lim_{h\to 0}\frac{4+10\ln\left(\frac{0{,}7}{0{,}1}\right)}{2} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4+10\ln 7}{2} = \lim_{h\to 0}(2 + 5\ln 7) = \lim_{h\to 0}(\ln e^2 + \ln 7^5) =$$

$$= \ln(e^2 \times 7^5)$$

Cotação a atribuir: $0 + 1 + 0 + 8(2+2+2+2) + 2 = 11$

4.1. ..... **14**

O examinando deve referir os seguintes pontos
1. $f'(x) = \cos x$
2. O declive da recta r é igual a $f'(a)$ e o declive da recta s é igual a $f'(b)$
3. Como $b = 2\pi - a$, tem-se que $\cos a = \cos b$
4. Se duas rectas têm o mesmo declive, então são paralelas.

A cotação deve ser atribuída de acordo com o seguinte critério:

O examinando refere os quatro pontos de uma forma clara, encadeada e totalmente correcta, do ponto de vista formal, concluindo assim o pretendido 14

O examinando refere os quatro pontos, mas não o faz de uma forma clara, encadeada e totalmente correcta **(ver nota)** ..... 10 a 13

O examinando refere apenas três pontos, não podendo, portanto, concluir o pretendido **(ver nota)** ..... 7 a 9

O examinando refere apenas dois pontos, não podendo, portanto, concluir o pretendido **(ver nota)** ..... 4 a 6

O examinando refere apenas um ponto, não podendo, portanto, concluir o pretendido **(ver nota)** ..... 1 a 3

Nota:
A opção por um dos valores indicados deve ter em conta:
- a existência de erros formais de escrita;
- a existência de afirmações incorrectas.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

r e s são paralelas se tiverem o mesmo declive.

Ora, sendo verdadeira a igualdade $f'(a) = f'(b)$, as rectas têm o mesmo declive

$f'(x) = (\operatorname{sen} x)' = \cos x$

$f'(a) = f'(b) \Leftrightarrow \cos a = \cos b \Leftrightarrow \cos a = \cos(2\pi - a)$, o que é verdade

Cotação a atribuir: 14

Exemplo 2

Se $f'(a) = f'(b)$, então as rectas são paralelas $\quad a + b = 2\pi \Leftrightarrow a = 2\pi - b$

$f'(a) = f'(b) \Leftrightarrow \cos(2\pi - b) = \cos(b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(-b) = \cos(b) \Leftrightarrow \cos(b) = \cos(b)$ função par

Cotação a atribuir: 13(*)

(*) O examinando refere os quatro pontos, mas não o faz de uma forma completamente clara, dado que alguns dos pontos estão implícitos.

Exemplo 3

$a + b = 2\pi \qquad a + (2\pi - a)$

O declive das rectas tg ao ponto é dado por

$f'(x) = \cos x$

$\cos a = \cos(2\pi - a) \rightarrow$ são paralelas, pois têm derivadas no ponto $= s$

Cotação a atribuir: $11^{(*)}$

(*) O examinando refere os quatro pontos, mas não o faz de uma forma completamente clara, dado que alguns dos pontos estão implícitos. A resposta contém erros formais de escrita, mas não tem afirmações incorrectas.

Exemplo 4

r e s são paralelas, se tiverem o mesmo declive, ou seja, $f'(a) = f'(b)$

$f'(x) = \cos x \qquad \cos a = \cos b$

Se $a + b = 2\pi$

$\cos a + \cos b = \cos(2\pi) \qquad \cos a + \cos b = 1$

Cotação a atribuir: $7^{(*)}$

(*) O examinando refere três pontos (os pontos 1, 2 e 4). Na tentativa de contemplar o ponto 3, o examinando comete um erro grave.

Exemplo 5

As rectas são // quando o m é igual.

$f(a) = \operatorname{sen} a \qquad f(b) = \operatorname{sen} b \qquad f'(x) = \cos x$

Cotação a atribuir: $5^{(*)}$

(*) O examinando refere dois pontos (os pontos 1 e 4). A primeira frase contém simplificaçãoes de escrita que devem ser consideradas erros formais, mas não tem afirmações incorrectas.

Exemplo 6

Se $a + b = 2\pi$ e 2π é o período da função $\operatorname{sen} x$,

então a ordenada do ponto B é simétrica à do ponto A.

Como A está no primeiro quadrante e B no quarto, tem-se:

$P_1 = (a, y) \qquad P_2 = (b, -y)$

$a + b = 2\pi \Leftrightarrow a = 2\pi - b \Leftrightarrow a = -a$

$P_1 = (a, y) \qquad P_2 = (-a, -y)$

$Declive = \frac{y}{x}$

$m_r = \frac{y}{a} \qquad m_s = \frac{-y}{-a} = \frac{y}{a}$

Assim, o declive das duas rectas é igual, logo são paralelas.

Cotação a atribuir: $1^{(*)}$

(*) O examinando refere um ponto (o ponto 4). A resposta contém erros graves.

4.2. ..... **14**

$\lim_{x \to 0} g(x) = 1$ 2

Concluir que a recta de equação $x = 0$ não é assimptota do gráfico de g 2

$\lim_{x \to 2\pi} g(x) = -\infty$ 2

Concluir que a recta de equação $x = 2\pi$ é assimptota do gráfico de g 2

$\lim_{x \to \pi^+} g(x) = -\infty$ e/ou $\lim_{x \to \pi^-} g(x) = +\infty$ **(ver nota 1)**..... 2

Concluir que a recta de equação $x = \pi$ é assimptota do gráfico de g 2

Justificar a não existência de outras assimptotas verticais 1

Justificar a não existência de assimptotas não verticais **(ver nota 2)** 1

Notas

1. Se o examinando calcular os dois limites, os 2 pontos atribuídos a esta etapa devem ser subdivididos em 1+1.

2. Se o examinando tentar estudar a existência de assimptotas não verticais, para além de não lhe dever ser atribuído o ponto relativo a esta etapa, deve ainda ser penalizado em 2 pontos, na cotação final a atribuir a esta questão. Se, por aplicação desta norma, esta cotação final resultar negativa, deve ser convertida em 0 (zero) pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$\lim_{x \to \pi^-} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = +\infty$ a recta de equação $x = \pi$ é assimptota do gráfico de g

$\lim_{x \to 2\pi^-} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = -\infty$ a recta de equação $x = 2\pi$ é assimptota do gráfico de g

$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$ não existe assimptota vertical em $x = 0$

Como g é contínua em todo o seu domínio, não existem mais assimptotas verticais.

Cotação a atribuir: $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 0 = 13$

Exemplo 2

Assimptotas verticais:

$$\lim_{x\to\pi^-} g(x) = \lim_{x\to\pi^-} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = +\infty \qquad \lim_{x\to\pi^+} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1 \qquad \lim_{x\to 2\pi} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = -\infty$$

Assimptotas não verticais:

$m = \dfrac{\frac{x}{\operatorname{sen} x}}{x} = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ $g(x)$ não tem assimptotas não verticais

A função $g(x)$ tem como assimptotas as rectas $x = \pi$ e $x = 2\pi$

Cotação a atribuir: $2 + 2^{(*)} + 2 + 2 + 2 + 2 + 0 + 0 + (-2)^{(**)} = 10$

(*) A conclusão de que a recta de equação $x = 0$ não é assimptota do gráfico de g está implícita na conclusão final do examinando.

(**) Ver nota 2.

Exemplo 3

$\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ $D_g = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen} x \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$$\lim_{x\to\pi^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\pi}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{x\to\pi^-} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\pi}{0^+} = +\infty$$

$x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ é assimptota vertical da função g

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\frac{x}{\operatorname{sen} x}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ não admite limite

Não existem assimptotas não verticais

Cotação a atribuir: $0 + 0 + 0 + 0 + 2 + 0 + 0 + 0 + (-2)^{(*)} = 0$

(*) Ver nota 2.

Exemplo 4

$$\lim_{x\to\pi^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\pi^+}{\operatorname{sen}\pi^+} = \frac{\pi^+}{0} = -\infty \qquad \lim_{x\to\pi^-} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\pi^-}{\operatorname{sen}\pi^-} = \frac{\pi^-}{0} = +\infty$$

A recta de equação $x = \pi$ é uma assimptota vertical

Cotação a atribuir: $0 + 0 + 0 + 0 + 1^{(*)} + 2 + 0 + 0 = 3$

(*) Penalizou-se em 1 ponto a não indicação dos sinais dos denominadores, na última fracção de cada um dos limites.

Exemplo 5

$\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{\pi}{0} = \pm\infty$ $\quad x=\pi$ é assimptota vertical

Cotação a atribuir: $0+0+0+0+1+2+0+0=3$

Exemplo 6

$\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{\pi}{0} = \infty$ $\quad$ Há assimptota vertical para $x=\pi$

Assimptotas não verticais: não há pois o domínio é um intervalo limitado, pelo que x não tende, nem para $+\infty$, nem para $-\infty$.

Cotação a atribuir: $0+0+0+0+2+2+0+1=5$

Exemplo 7

Assimptotas verticais: uma $x=\pi$ pois $]0,2\pi[\setminus\{\pi\}$

Assimptotas não verticais:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \frac{0^+}{\operatorname{sen} 0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2\pi^-} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \frac{2\pi}{\operatorname{sen} 2\pi^-} = \frac{2\pi}{0^-} = -\infty$$

Cotação a atribuir: $0+0+2+0+0+0+0+0+(-2)^{(*)}=0$

(*) Ver nota 2.

Exemplo 8

π não pertence ao domínio de g, mas é um ponto de acumulação e, por isso, candidato a assimptota vertical.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\pi^-} g(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\pi^-} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{\pi^-}{0^-} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to\pi^+} g(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\pi^+} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{\pi}{0} = -\infty \end{array}\right\} \quad x=\pi \text{ é assimptota vertical de } g$$

$\lim\limits_{x\to 2\pi} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2\pi^-} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{2\pi}{0^-} = -\infty$ $\quad 2\pi$ é também assimptota de g

Cotação a atribuir: $0+0+2+2+1+2+0+0+(-1)^{(*)}=6$

(*) O examinando escreve expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal: utiliza o símbolo de equivalência em vez do de igualdade e escreve «2π *é também assimptota de* g», em vez de «*a recta de equação* $x=2\pi$ *é também assimptota do gráfico de* g» (ver critério geral 6).

5. ..... **14**

Conteúdo **(ver notas 1, 2 e 3)** 12

Forma **(ver nota 4)** 2

Notas:

1. Os motivos de rejeição das opções incorrectas são os seguintes:

Opção A: a imagem de 0 é 500, e não 400.

Opção C: o limite da função, quando $t \to +\infty$, é 1200, e não 1000
ou
nesta função, o valor 1000 é ultrapassado (esta afirmação deve ser devidamente sustentada, por exemplo através da reprodução do gráfico obtido na calculadora).

Opção D: a função não é monótona (esta afirmação deve ser devidamente sustentada, por exemplo através da reprodução do gráfico obtido na calculadora), o que contraria a situação que se pretende modelar (o número de lobos cresce continuamente).

2. A explicação do motivo pelo qual é rejeitada cada uma das opções erradas vale 4 pontos, a serem atribuídos de acordo com o seguinte critério:

O motivo apresentado é correcto e está devidamente fundamentado 4

O motivo apresentado é correcto, mas a sua fundamentação está incompleta ou contém imperfeições 3

O motivo apresentado é correcto, mas a sua fundamentação está errada ou não existe 2

O motivo apresentado não é correcto 0

3. Não deverá ser valorizada qualquer explicação sobre as razões pelas quais a opção B está de acordo com a situação a modelar, dado que tal não é pedido no enunciado.

4. Quanto à forma, a composição deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

Redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia) 2

Redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecte a inteligibilidade 1

Ausência de composição ou redacção confusa, sem estruturação aparente, presença de erros graves, com perturbação frequente da inteligibilidade 0

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

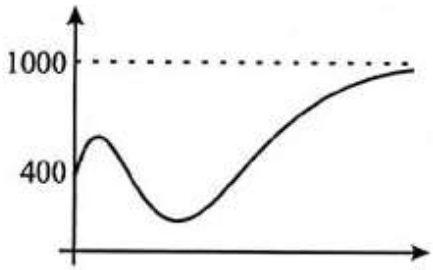
Exemplo 1

A opção A está incorrecta, dado que não está de acordo com o facto de existirem quatrocentos lobos no parque natural, no instante $t = 0$, correspondente ao início do ano de 1972. Na realidade, nesta opção, a imagem de 0 é 500.

O facto de os recursos do parque permitirem que o número de lobos cresça continuamente até bastante perto de um milhar implica que se tenha $\lim_{t\to+\infty} P(t) = 1000$. Por isso, a opção C também não está correcta, dado que $\lim_{t\to+\infty} \frac{1200}{1+2e^{-t}} = 1200$.

A opção D está igualmente incorrecta, dado que, como o gráfico reproduzido ao lado evidencia, a função definida pela expressão $1000 - \frac{600(t^3+1)}{e^t}$ não é monótona.

Tal não está de acordo com a afirmação de que o número de lobos cresce continuamente.

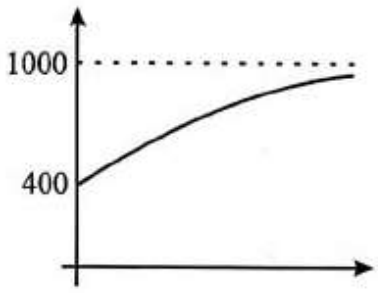


Portanto, a opção correcta é a opção B.

Cotação a atribuir: $12(4+4+4)+2 = 14$

Exemplo 2

A resposta é a B porque a A começa nas 500 unidades e no problema diz que se inicia com 400 unidades. A C não pode ser pois a função vai tender para 1200 e não para 1000 como é pedido. E a D não pode ser pois no início tem umas oscilações aumenta depois diminui e volta a aumentar e no problema diz que a população de lobos está sempre a crescer. Então fica a B que é a única que respeita as condições, começa nos 400 e tende para 1000.



Cotação a atribuir: $11(4+4+3^{(*)})+1 = 12$

(*) O motivo pelo qual o examinando rejeita a opção D não está completamente fundamentado, dado que o examinando não apresenta qualquer gráfico (nem nenhum argumento) que sustente as afirmações feitas (ver notas 1 e 2). Note-se que, sendo evidente a utilização da calculadora gráfica por parte do examinando, este não respeitou a indicação, expressa no enunciado, de que deveria reproduzir o gráfico obtido.

Exemplo 3

A função A não pode ser pois $P(0) = \frac{1000}{1+e^0} = \frac{1000}{2} = 500$ lobos no início, logo está mal.

A função C não poderá ser pois $\lim_{t\to+\infty} \frac{1200}{1+2e^{-t}} = 1200 \rightarrow$ nº máximo.

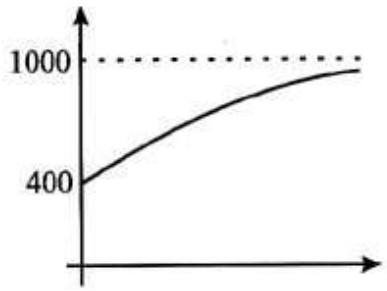
A função D

$P(0) = 400 \qquad \lim_{t\to+\infty}\left(1000 - \frac{600(t^3+1)}{e^t}\right) = 1000 - \frac{+\infty}{+\infty}$ S. I.

A função B

$P(0) = \frac{1000}{1+1{,}5\,e^0} = 400$ lobos

$\lim_{t\to+\infty} \frac{1000}{1+1{,}5\,e^{-0{,}5t}} = \frac{1000}{1} = 1000$



É o B pois não ultrapassa os 1000 lobos e no início apresenta 400.

Cotação a atribuir: $7(4 + 3^{(*)} + 0^{(**)}) + 0^{(***)} = 7$

(*) A fundamentação do motivo pelo qual o examinando rejeita a opção C está incompleta e contém uma imperfeição, de natureza formal (a escrita de $1200 \rightarrow$ nº máximo).

(**) O examinando não apresenta qualquer motivo para ter rejeitado a opção D.

(***) O examinando não apresenta qualquer composição (ver nota 4).

Exemplo 4

A resposta A não pode ser, porque para $t = 0$, $\frac{1000}{1+e^{-0{,}5t}} = 500$, enquanto que no instante inicial da contagem, haviam 400 lobos.

A resposta C não pode ser, porque quando $t \rightarrow +\infty$, a função acaba em 1200, quando deveria acabar em 1000.

A resposta D não pode ser, porque quando $t \rightarrow +\infty$, a função tende para $+\infty$, logo excede os 1000 lobos.

Cotação a atribuir: $7(4 + 3^{(*)} + 0^{(**)}) + 1 = 8$

(*) A fundamentação do motivo pelo qual o examinando rejeita a opção C contém erros de linguagem matemática (*a função acaba em ... , deveria acabar em ...*).

(**) O motivo pelo qual o examinando rejeita a opção D está errado.

EXAMES NACIONAIS DO ENSINO SECUNDÁRIO, 2005 – 2.ª Fase **MATEMÁTICA (Cód. 435)**

Código Confidencial da Escola	Número Convencional da Prova	Versão	Grupo I								Grupo II												TOTAL da PROVA (200)
			1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	T1 (63)	1.1.	1.2.	2.1.1.	2.1.2.	2.2.	3.1.	3.2.	3.3.	4.1.	4.2.	5.	T2 (137)	
			(9)	(9)	(9)	(9)	(9)	(9)	(9)		(12)	(9)	(8)	(10)	(14)	(14)	(14)	(14)	(14)	(14)	(14)		

Data ____/____/____ O Professor Classificador _____

GRELHA DE CLASSIFICAÇÃO

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO EXAME NACIONAL DE MATEMÁTICA

(PROVA 435) 2ªFASE

Grupo I

Questão	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	D	D	A	C	B	B	A
Versão 2	B	D	B	A	A	D	B

Grupo II

1.

1.1.

$$\frac{w_1 \times w_2 - 2}{w_3} = \frac{\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{12}\right) - 2}{\sqrt{3}cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2cis\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right) - 2}{\sqrt{3}cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2cis\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2}{\sqrt{3}cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1+\sqrt{3}i-2}{\sqrt{3}(-i)} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}i} \times \frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{3}i} =$$

$$= \frac{-\sqrt{3}i+3i^2}{3} = \frac{-3-\sqrt{3}i}{3} = -1-\frac{\sqrt{3}}{3}i$$

Cálculos Auxiliares:

$$w_1 = 1+i = \sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$2cis\left(\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,sen\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1+\sqrt{3}i$$

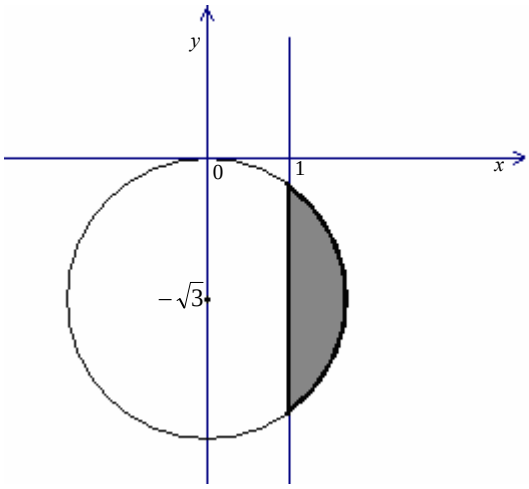
1.2.

$\mathrm{Re}(z) \geq \mathrm{Re}(w_1) \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$

(semi - plano fechado limitado pela recta de equação $x = 1$)

$|z - w_3| \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 + \left(y+\sqrt{3}\right)^2 \leq 3$

(círculo de centro $(0, -\sqrt{3})$ e raio $\sqrt{3}$)



2.

2.1.

2.1.1. O número de conjuntos diferentes que o João pode formar é dado pela expressão:

$$6\times 4\times 3\times 1=72$$

2.1.2. O número de conjuntos diferentes que o João pode formar é dado pela expressão:

$$^{6}C_{4}+^{4}C_{4}=15+1=16$$

2.2. X:"número de discos italianos seleccionados"

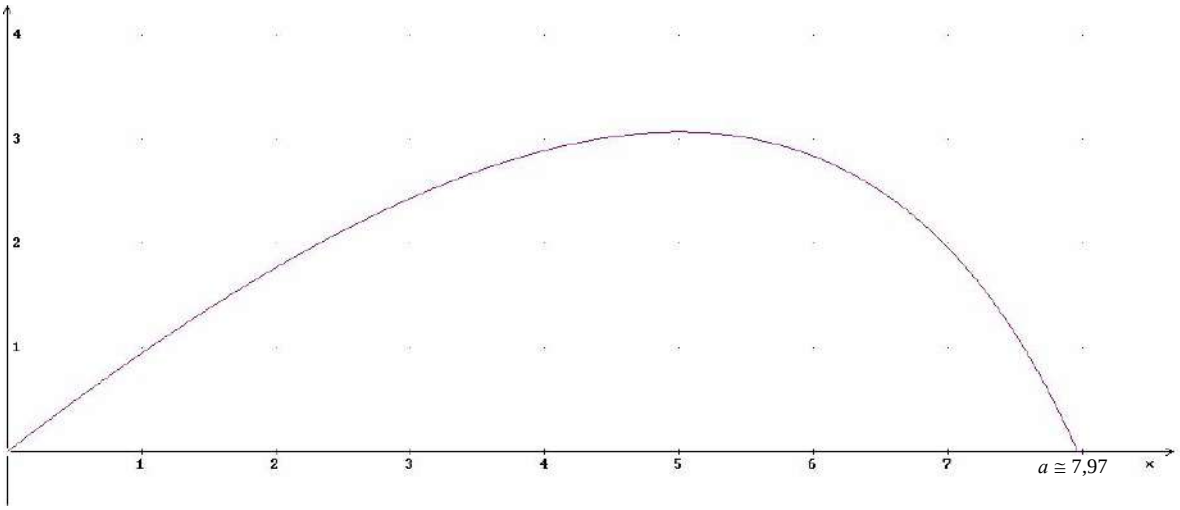
x_i	0	1
$P(X=x_i)$	$\frac{^{13}C_4}{^{14}C_4}$	$\frac{^{13}C_3}{^{14}C_4}$

ou seja

x_i	0	1
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$

3.

3.1. No momento em que a bola atinge o solo a sua altura relativamente a este é de zero metros, logo o valor de *a* é um dos zeros da função. Colocando, na calculadora a expressão da função dada e tendo em atenção a janela de visualização Xmin:0, Xmax:9, Ymin:0 e Ymax:4 obtém-se a representação gráfica da função. Recorrendo à ferramenta de cálculo do zero da função obteve-se o valor de *a.*



3.2.

$h(x) = 2x + 10\ln(1-0{,}1x)$

$h'(x) = \left[2x + 10\ln(1-0{,}1x)\right]' = 2 + 10\left(\frac{-0{,}1}{1-0{,}1x}\right) = 2 - \frac{1}{1-0{,}1x}$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{1-0{,}1x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2-0{,}2x-1}{1-0{,}1x} = 0 \Leftrightarrow 1-0{,}2x = 0 \wedge x \in D_h \Leftrightarrow x = 5$

x	**0**		**5**		***a***
h'		**+**	**0**	**-**	
h	**0**	↗	**máx**	↘	**0**

$h(5) = 2\times 5 + 10\ln(1-0{,}1\times 5) \cong 3{,}07$

A altura máxima atingida pela bola, relativamente ao solo, depois de pontapeada é, aproximadamente, 3,07 metros.

3.3. $tvm_{[1,3]} = \frac{h(3)-h(1)}{3-1} = \frac{6+10\ln(0{,}7)-2-10\ln(0{,}9)}{2} = 2 + 5\ln\left(\frac{0{,}7}{0{,}9}\right) = 2 + 5\ln\left(\frac{7}{9}\right)$

e

$\ln\left[e^2\left(\frac{7}{9}\right)^5\right] = \ln\left(e^2\right) + \ln\left[\left(\frac{7}{9}\right)^5\right] = 2 + 5\ln\left(\frac{7}{9}\right) = tvm_{[1,3]}$

4.

4.1. $f(x) = sen\, x \wedge x \in [0,2\pi]$

$m_r = f'(a) = \cos a$

$m_s = f'(b) = \cos b$

Sabendo que $a + b = 2\pi$ tem-se $b = 2\pi - a$.

Então, $m_s = \cos b = \cos(2\pi - a) = \cos(-a) = \cos a = m_r$

Assim, porque *r* e *s* têm o mesmo declive, as rectas são paralelas.

4.2. $g(x)=\dfrac{x}{f(x)}$ e $D_g=]0,\pi[\cup]\pi,2\pi[$.

Uma vez que o domínio é um conjunto limitado, a função não tem assimptotas não verticais.

Como o domínio é uma união de dois intervalos abertos estudemos a existência de assimptotas verticais (A.V.) em $x=0$, $x=\pi$ e $x=2\pi$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{senx}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{senx}{x}}=\dfrac{1}{1}=1$, logo a recta de equação $x=0$ não é A.V.

$\lim\limits_{x\to 2\pi^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 2\pi^-}\dfrac{x}{senx}=\dfrac{2\pi}{0^-}=-\infty$, logo a recta de equação $x=2\pi$ é A.V

$\lim\limits_{x\to \pi^+} g(x)=\dfrac{\pi}{0^-}=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to \pi^-} g(x)=\dfrac{\pi}{0^+}=+\infty$, pelo que a recta de equação $x=\pi$ é A.V.

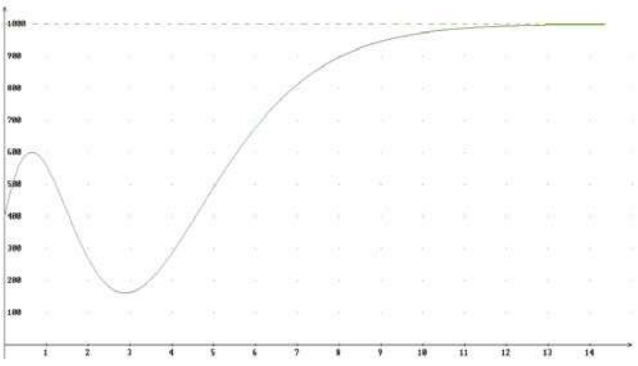
A função g é contínua em todo o seu domínio, logo não existem outras assimptotas verticais.

5. A expressão correcta é a B.

Rejeita-se A dado que o número de lobos no início de 1972 é igual a 400 e $\dfrac{1000}{1+e^{-0,5\times 0}}=500$.

Rejeita-se C porque os recursos do parque permitem que o número de lobos cresça até bastante perto de um milhar, mas não permitem que este valor seja ultrapassado, e $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1200}{1+2e^{-t}}=1200$.

Rejeita-se D porque, apesar de verificar a condição inicial, de 400 lobos em 1972, a função definida pela expressão dada nesta hipótese não é estritamente crescente como se pode observar pelo gráfico.



Esta proposta de resolução também pode ser consultada em http://www.apm.pt

PROVA 435

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos

2005

Época Especial

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de dez.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{3\}$, definida por $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$

Em cada uma das opções seguintes estão escritas duas equações.

Em qual das opções as duas equações definem as assimptotas do gráfico de f ?

(A) $x = 2$ e $y = 1$

(B) $x = 2$ e $y = 2$

(C) $x = 3$ e $y = 1$

(D) $x = 3$ e $y = 2$

2. Para um certo valor de k, é contínua em $\mathbb{R}$ a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} k + \operatorname{sen} x & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{3x + \ln(1+x)}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

($\ln$ designa logaritmo de base e)

Qual é o valor de k ?

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

3. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a sua **derivada** é dada por

$$f'(x) = x^3 - 3x + 1.$$

Em qual dos conjuntos seguintes o **gráfico de** f tem a concavidade voltada para baixo?

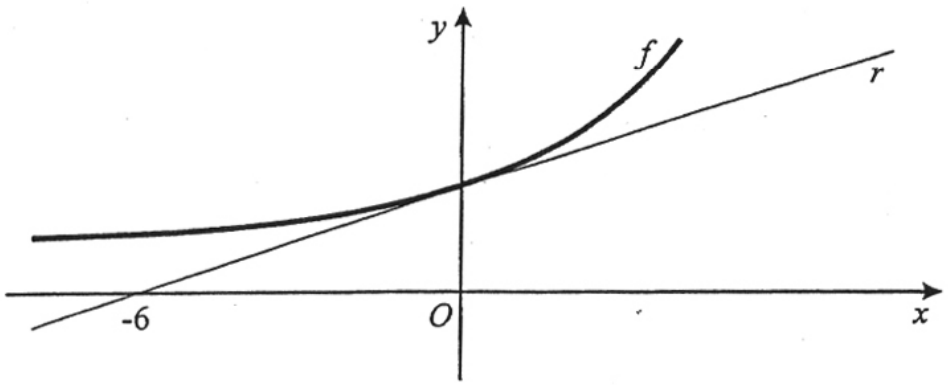
(A) $]-1, 1[$

(B) $]-\infty, -1[$

(C) $]0, 3[$

(D) $]-\infty, 0[$

4. Na figura está representada, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{ax} + 1$ (a é uma constante real positiva).



Na figura está também representada a recta r, que é tangente ao gráfico de f no ponto em que este intersecta o eixo Oy.

A recta r intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa -6.

Qual é o valor de a?

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{2}{3}$

(D) $\frac{3}{2}$

5. Um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, é lançado duas vezes.

Seja X a variável aleatória que designa o «*número de vezes que, nesses dois lançamentos, sai face par*».

A distribuição de probabilidades da variável X é

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	a	b

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $a = \frac{1}{4}$ e $b = \frac{1}{2}$ **(B)** $a = \frac{1}{4}$ e $b = \frac{1}{4}$

(C) $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{4}$ **(D)** $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$

6. Escolhe-se, ao acaso, um aluno de uma turma de uma escola secundária.
Considere os acontecimentos:
A: «O aluno é uma rapariga»
B: «O aluno não usa óculos»
Qual é o acontecimento **contrário** de $A \cup B$?

(A) O aluno é um rapaz e usa óculos
(B) O aluno é um rapaz e não usa óculos
(C) O aluno é um rapaz ou usa óculos
(D) O aluno é um rapaz ou não usa óculos

7. Considere, no plano complexo, um ponto A, imagem geométrica de um certo número complexo z. Sabe-se que A não pertence a qualquer um dos eixos do plano complexo.
Seja B o ponto simétrico do ponto A, relativamente ao eixo imaginário.

Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o ponto B?

(A) $\overline{z}$ **(B)** $\frac{1}{z}$

(C) $-\overline{z}$ **(D)** $-z$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$

1.1. Sem utilizar a calculadora, determine o valor de $\frac{\left[i \times (z_1)^6 - 1\right]^2}{i}$

Apresente o resultado na forma algébrica.

1.2. Represente, no plano complexo, o conjunto definido pela condição

$$|z - z_1| \leq 1 \quad \wedge \quad |z| \leq |z - z_1|$$

2. Seis amigos, a Ana, o Bruno, a Catarina, o Diogo, a Elsa e o Filipe, vão jantar a um restaurante. Sentam-se, ao acaso, numa mesa redonda, com seis lugares (pode considerar que os lugares estão numerados, de 1 a 6).

2.1. Sejam os acontecimentos:

A : «O Diogo, a Elsa e o Filipe sentam-se em lugares consecutivos, ficando a Elsa no meio.»

B : «A Catarina e o Filipe sentam-se ao lado um do outro.»

2.1.1. Determine a probabilidade do acontecimento A.
Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

2.1.2. Sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, indique o valor de $P(B|A)$. Numa pequena composição, justifique a sua resposta, começando por explicar o significado de $P(B|A)$, no contexto da situação descrita.

2.2. Depois de sentados, os seis amigos resolvem escolher a refeição.
Sabe-se que:

- na ementa, existem três pratos de peixe e quatro de carne;
- cada um dos seis amigos vai escolher um único prato, de peixe ou de carne;
- só o Filipe está indeciso se vai escolher peixe ou carne;
- os restantes cinco vão escolher peixe.

De quantas maneiras diferentes podem os seis amigos escolher os seus pratos?

3. O tempo t, medido em anos, que um planeta demora a realizar uma translação completa, em torno do Sol, está relacionado com a distância média, d, desse planeta ao Sol, medida em milhões de quilómetros, por meio da fórmula

$$2 \ln(t) = k + 3 \ln(d)$$

(k é uma constante real e $\ln$ designa logaritmo de base e)

Sem utilizar a calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes:

3.1. Sabe-se que:

- a distância média de Urano ao Sol é (aproximadamente) o dobro da distância média de Saturno ao Sol;
- o planeta Urano demora (aproximadamente) 84 anos a realizar uma translação completa em torno do Sol.

Determine quanto tempo demora o planeta Saturno a realizar uma translação completa em torno do Sol. Apresente o resultado em anos, arredondado às décimas.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3.2. Sabendo que a distância média da Terra ao Sol é, aproximadamente, de $149{,}6$ milhões de quilómetros, determine o valor de k (apresente o resultado arredondado às unidades).

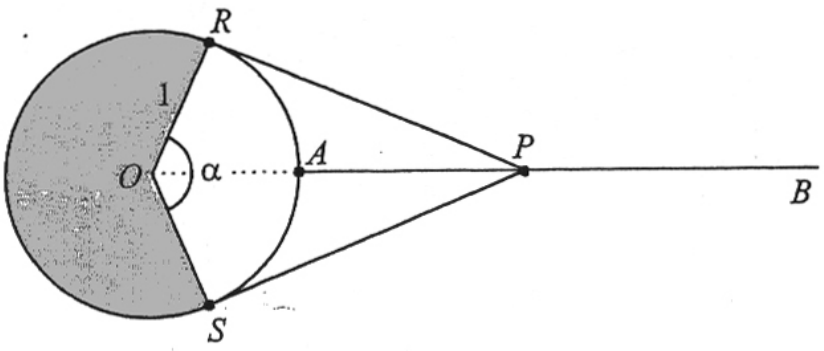
4. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- f tem derivada finita em todos os pontos de $\mathbb{R}$
- $f(0) = -1$
- f é estritamente crescente em $\mathbb{R}^-$ e é estritamente decrescente em $\mathbb{R}^+$

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = [f(x)]^2$.

Prove que 1 é o mínimo da função g.

5. Na figura estão representadas uma semi-recta $\dot{A}B$ e uma circunferência de centro O e raio 1 (os pontos O, A e B são colineares; o ponto A pertence à circunferência).



Considere que um ponto P se desloca ao longo da semi-recta $\dot{A}B$, nunca coincidindo com o ponto A.

Os pontos R e S acompanham o movimento do ponto P, de tal forma que as rectas PR e PS são sempre tangentes à circunferência, nos pontos R e S, respectivamente.

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo SOR ($\alpha \in]0, \pi[$).

5.1. Mostre que a área do **quadrilátero** $[ORPS]$ é dada, em função de α, por $f(\alpha) = \text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

5.2. Calcule $\lim\limits_{\alpha \to \pi^-} f(\alpha)$ e interprete geometricamente o resultado obtido.

5.3. Recorra à calculadora para determinar **graficamente** a solução da equação que lhe permite resolver o seguinte problema:

Qual é o valor de α para o qual a área do quadrilátero $[ORPS]$ é igual à área da região sombreada?

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o **gráfico**, ou **gráficos**, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos. Apresente o valor pedido na forma de dízima, arredondado às décimas.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21

1.1. 11
1.2. 10

2. 32

2.1. 22
2.1.1. 10
2.1.2. 12

2.2. 10

3. 29

3.1. 15
3.2. 14

4. 15

5. 40

5.1. 12
5.2. 14
5.3. 14

TOTAL **200**

2006

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais

Programa novo implementado em 2005/2006

Duração da prova: 120 minutos **1.ª FASE**

2006

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implica a anulação de todos os itens de escolha múltipla.

Identifique claramente os grupos e os itens a que responde.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta (excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações).

É interdito o uso de «esferográfica-lápis» e de corrector.

As cotações da prova encontram-se na página 11.

A prova inclui um formulário (pág. 3).

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r \quad (\alpha - \textit{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;}\ \ r - \textit{raio})$

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ $(\alpha - \textit{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;}\ \ r - \textit{raio})$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - \textit{raio da base};\ g - \textit{geratriz})$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - \textit{raio})$

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3 \qquad (r - \textit{raio})$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u' . v + u \,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' . v - u \,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \,.\, u^{n-1} \,.\, u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' . \cos u$

$(\cos u)' = -u' . \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' . e^u$

$(a^u)' = u' . a^u . \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \,.\, \ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

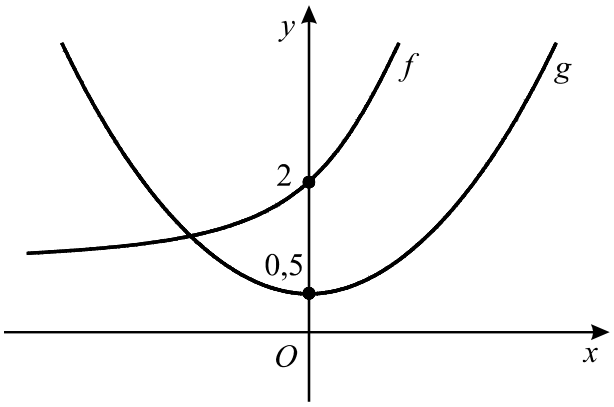
$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

Grupo I

- Os sete itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra, o item será anulado, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Na figura estão representadas, em referencial o.n. xOy, partes dos gráficos de duas funções, f e g, contínuas em $\mathbb{R}$.
Tal como a figura sugere,

- nenhum dos gráficos intersecta o eixo Ox;
- os gráficos de g e de f intersectam o eixo Oy nos pontos de ordenadas $0{,}5$ e 2, respectivamente.



Apenas uma das equações seguintes é impossível. Qual delas?

(A) $f(x) + g(x) = 0$

(B) $f(x) - g(x) = 0$

(C) $f(x) \times g(x) = 1$

(D) $\frac{f(x)}{g(x)} = 1$

2. Seja g a função definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = \dfrac{e^x + 5}{2 + \cos x}$

Considere a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{n+1}{n^2}$

Indique o valor de $\lim\limits_{n \to +\infty} g(u_n)$

(A) 4 **(B)** 3 **(C)** 2 **(D)** 1

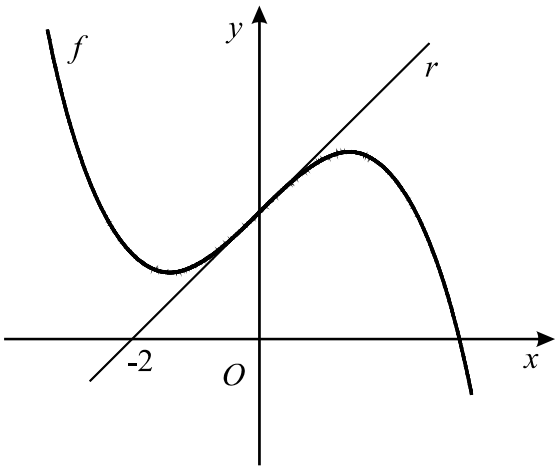
3. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = \frac{\ln\left(\sqrt{e^x}\right)}{2}$$ ($\ln$ designa logaritmo de base e)

Qual das seguintes expressões pode também definir h ?

(A) $\sqrt{x}$ **(B)** $\dfrac{x}{2}$ **(C)** $\dfrac{x}{4}$ **(D)** $\dfrac{\sqrt{x}}{2}$

4. Na figura está representada parte do gráfico de uma função polinomial f.
Tal como a figura sugere, o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 0]$ e voltada para baixo em $[0, +\infty[$.



A recta r, tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0, é paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares e intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa -2.

Sabendo que f' e f'' designam, respectivamente, a primeira e a segunda derivadas de f, indique o valor de $f(0) + f'(0) + f''(0)$

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

5. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que $P(A) = 0{,}3$

Apenas um dos acontecimentos seguintes pode ter probabilidade inferior a $0{,}3$.

Qual deles?

(A) $A \cup B$ **(B)** $\overline{A} \cup B$ **(C)** $A \cap B$ **(D)** $\overline{A \cap B}$

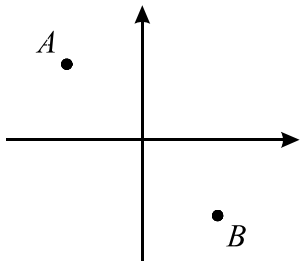
6. Uma variável aleatória X tem a seguinte distribuição de probabilidades:

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{^{2005}C_{99}}{^{2006}C_{100}}$	$\frac{a}{^{2006}C_{100}}$

Indique o valor de a.

(A) $^{2005}C_{99}$ **(B)** $^{2005}C_{100}$ **(C)** $^{2006}C_{99}$ **(D)** $^{2006}C_{100}$

7. Os pontos A e B, representados na figura, são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes quadradas de um certo número complexo z.



Qual dos números complexos seguintes pode ser z?

(A) 1 **(B)** i **(C)** -1 **(D)** $-i$

Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

1.1. **Sem recorrer à calculadora**, determine $\dfrac{4+2\,i\left(cis\,\frac{\pi}{6}\right)^6}{3+i}$ apresentando o resultado final na forma trigonométrica.

1.2. Considere que, para qualquer número complexo z não nulo, $arg(z)$ designa o argumento de z que pertence ao intervalo $[\,0, 2\pi\,[$.

Represente a região do plano complexo definida pela condição, em $\mathbb{C}$,

$$\frac{1}{2} \leq |\,z\,| \leq 1 \qquad \wedge \qquad \frac{3\,\pi}{4} \leq arg(z) \leq \frac{5\,\pi}{4}$$

e determine a sua **área**.

2.

2.1. Uma coluna com a forma de um prisma hexagonal regular está assente no chão de um jardim. Dispomos de seis cores (amarelo, branco, castanho, dourado, encarnado e verde) para pintar as sete faces visíveis (as seis faces laterais e a base superior) desse prisma.
Admita que se pintam de verde duas faces laterais opostas.
Determine de quantas maneiras diferentes podem ficar pintadas as restantes **cinco** faces, de tal modo

- que duas faces que tenham uma aresta comum fiquem pintadas com cores diferentes
- e que duas faces laterais que sejam opostas fiquem pintadas com a mesma cor.

2.2. Considere um prisma hexagonal regular num referencial o.n. $Oxyz$, de tal forma que uma das suas bases está contida no plano de equação $z = 2$.
Escolhendo ao acaso dois vértices do prisma, qual é a probabilidade de eles definirem uma recta paralela ao eixo Oz? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

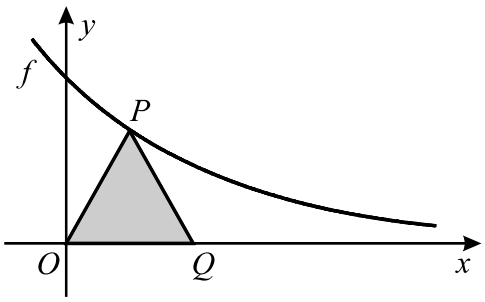
3. De uma caixa com dez bolas brancas e algumas bolas pretas, extraem-se sucessivamente, e ao acaso, duas bolas, não repondo a primeira bola extraída, antes de retirar a segunda.
Considere os acontecimentos:
A: «*a primeira bola extraída é preta*»;
B: «*a segunda bola extraída é branca*».

Sabe-se que $P(B|A) = \frac{1}{2}$ ($P(B|A)$ designa probabilidade de B, se A)

Quantas bolas pretas estão inicialmente na caixa? Numa pequena composição, justifique a sua resposta, começando por explicar o significado de $P(B|A)$, no contexto da situação descrita.

4. Na figura estão representados:

- parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{-x}$
- um triângulo **isósceles** $[OPQ]$ $\left(\overline{PO} = \overline{PQ}\right)$, em que:
  - O é a origem do referencial;
  - P é um ponto do gráfico de f;
  - Q pertence ao eixo das abcissas.



Considere que o ponto P se desloca no primeiro quadrante (eixos não incluídos), ao longo do gráfico de f.

O ponto Q acompanha o movimento do ponto P, deslocando-se ao longo do eixo das abcissas, de tal modo que $\overline{PO}$ permanece sempre igual a $\overline{PQ}$.

Seja A a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, que faz corresponder, à abcissa x do ponto P, a área do triângulo $[OPQ]$.

4.1. Mostre que, para cada $x \in \mathbb{R}^+$, se tem $A(x) = x\,e^{-x}$

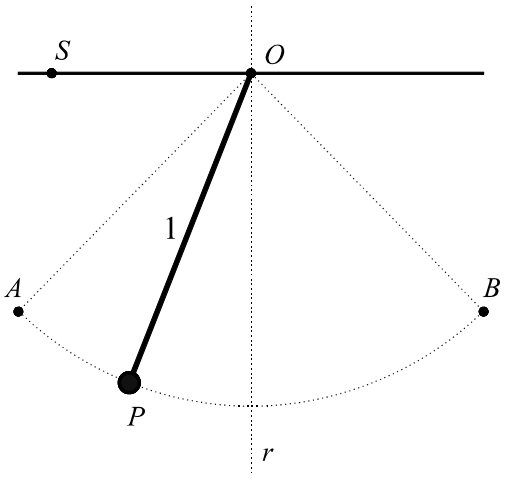
4.2. **Sem recorrer à calculadora**, estude a função A quanto à monotonia e conclua qual é o valor máximo que a área do triângulo $[OPQ]$ pode assumir.

5. De uma certa função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- f é contínua;
- a recta de equação $y = x$ é assimptota do gráfico de f, quer quando $x \to +\infty$, quer quando $x \to -\infty$.

Mostre que o gráfico da função g, definida, em $\mathbb{R}$, por $g(x) = x\,f(x)$, não tem qualquer assimptota.

6. Na figura está representada uma esfera suspensa de um fio com 1 metro de comprimento, fixo no ponto O.



O centro da esfera oscila entre os pontos A e B, que são simétricos relativamente à recta vertical r.

A recta r passa pelo ponto O e é perpendicular à recta OS.

No instante inicial, o centro da esfera coincide com o ponto A.

Admita que, t segundos após esse instante inicial, o centro da esfera está num ponto P tal que a amplitude, em radianos, do ângulo SOP é dada (aproximadamente) por

$$\alpha(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \cos\left(\sqrt{9{,}8}\ t\right)$$

Nas duas alíneas seguintes, **não utilize a calculadora**, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos.

6.1. Determine a distância do centro da esfera à recta OS, no instante inicial.

6.2. Determine o instante em que o centro da esfera passa pela primeira vez na recta r. Apresente o resultado em segundos, arredondado às décimas.

7. Considere a função f definida no intervalo $[1,2]$ por $f(x) = \cos(x-1) + \ln x$ ($\ln$ designa logaritmo de base e).

Para um certo valor real positivo a e para um certo valor real b, a função g, definida no intervalo $[1,2]$ por $g(x) = a \,.\, f(x) + b$, tem por contradomínio o intervalo $[4,5]$.

Utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora, determine os valores de a e de b, arredondados às centésimas.
Explique como procedeu. Na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que tenha visualizado na calculadora, bem como coordenadas relevantes de algum, ou alguns, pontos.
Sempre que, em valores intermédios, proceder a arredondamentos, conserve um mínimo de três casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa 9
Cada resposta errada..... 0
Cada questão não respondida ou anulada 0

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 10
1.2. 11

2. 20
2.1. 10
2.2. 10

3. 12

4. 28
4.1. 14
4.2. 14

5. 14

6. 28
6.1. 14
6.2. 14

7. 14

TOTAL **200**

PROVA 635/C/16 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais

Programa novo implementado em 2005/2006

Duração da prova: 120 minutos **1.ª FASE**

2006

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa 9
Cada resposta errada..... 0
Cada questão não respondida ou anulada 0

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 10
1.2. 11

2. 20
2.1. 10
2.2. 10

3. 12

4. 28
4.1. 14
4.2. 14

5. 14

6. 28
6.1. 14
6.2. 14

7. 14

TOTAL **200**

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anulados todos os itens com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todos os itens em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Versão 1	A	C	C	C	C	B	D
Versão 2	D	A	B	B	B	A	B

Grupo II

Critérios gerais

1. Se o examinando se enganar na identificação do item a que está a responder, ou se a omitir, mas, pela resolução apresentada, for possível identificá-lo inequivocamente, a resposta deve ser vista e classificada.

2. Se o examinando apresentar mais do que uma resposta a um item, e não indicar, de forma inequívoca, a que pretende que seja classificada, deve ser vista e classificada apenas a que se encontra em primeiro lugar, na folha de resposta.

3. As cotações a atribuir às respostas dos examinandos são expressas obrigatoriamente em números inteiros.

4. Num item em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, a cotação a atribuir deve estar de acordo com o seguinte critério:
- Se o examinando se limitar a apresentar o resultado final, a cotação deve ser de 0 (zero) pontos.
- Se o examinando não se limitar a apresentar o resultado final, a cotação deve ser a soma algébrica das cotações atribuídas a cada etapa, de acordo com o disposto nos pontos 6, 7, 8 e 9 destes critérios gerais, e das desvalorizações previstas nos pontos 10 e 11 destes critérios gerais. Se a soma for negativa, a cotação a atribuir é de 0 (zero) pontos.

5. Alguns itens da prova podem ser correctamente resolvidos por mais do que um processo. Sempre que o examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nos critérios específicos, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas. Salienta-se que deve ser aceite qualquer processo cientificamente correcto, mesmo que envolva conhecimentos não contemplados no programa da disciplina.

6. A cotação de cada item está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para o resolver.

6.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.

6.2. O classificador não pode subdividir, em cotações parcelares, a cotação atribuída a cada etapa.
Caso uma etapa envolva um único passo, testando apenas o conhecimento de um só conceito ou propriedade, e a sua resolução não esteja completamente correcta, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos.
Caso uma etapa envolva mais do que um passo (por exemplo, o cálculo da derivada de uma função, a resolução de uma equação, a obtenção de uma expressão em função de uma variável, etc.) e a sua resolução esteja incompleta, ou contenha incorrecções, a cotação a atribuir deve estar de acordo com o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:
- erros de contas ocasionais devem ser desvalorizados em um ponto;
- erros que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades devem ser desvalorizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa;
- transposições erradas de dados do enunciado devem ser desvalorizadas em um ponto, desde que o grau de dificuldade da etapa não diminua;
- transposições erradas de dados do enunciado devem ser desvalorizadas em, pelo menos, metade da cotação da etapa, caso o grau de dificuldade da etapa diminua.

6.3. Nas etapas cuja cotação se encontra discriminada por níveis de desempenho, o classificador deve enquadrar a resposta do examinando numa das descrições apresentadas. O classificador não pode atribuir uma cotação diferente das indicadas.

6.4. No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.

6.5. Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.

6.6. Pode acontecer que o examinando, ao resolver um item, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios específicos. Todas as etapas não percorridas explicitamente pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam inequivocamente implícitos na resolução do item, devem receber a cotação indicada.

7. Quando, num item, é pedida uma forma específica de apresentação do resultado final (por exemplo, «em minutos», «em percentagem», etc.), este deve ser apresentado na forma pedida. Se o resultado final apresentado pelo examinando não respeitar a forma pedida no enunciado (por exemplo, se o enunciado pedir o resultado em minutos, e o examinando o apresentar em horas), devem ser atribuídos 0 (zero) pontos à etapa correspondente ao resultado final. No entanto, a cotação não deve ser desvalorizada caso o examinando não indique a unidade em que é pedido o resultado (por exemplo, se o resultado final for 12 minutos, ou 12 metros, e o examinando escrever simplesmente 12, não se deve aplicar nenhuma desvalorização). Se não for pedida aproximação para o resultado final, o examinando deve apresentar o valor exacto. Se o examinando apresentar, como resultado final, uma aproximação do valor exacto, deve ser aplicada uma desvalorização de 1 ponto na cotação a atribuir à etapa correspondente ao resultado final.

8. O examinando deve respeitar sempre a instrução relativa à apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações. Se, numa etapa, o examinando não respeitar esta instrução, apresentando algo (valor, quadro, tabela, gráfico, etc.) que não resulte de trabalho anterior, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos a essa etapa. Todas as etapas subsequentes que dela dependam devem ser igualmente cotadas com 0 (zero) pontos.

9. O examinando deve respeitar sempre qualquer instrução relativa ao método a utilizar na resolução de um item (por exemplo, «sem recorrer à calculadora», «equacione o problema», «resolva graficamente», etc.). Na resolução apresentada pelo examinando, deve ser inequívoco, pela apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações, o cumprimento da instrução. Se tal não acontecer, considera-se que o examinando não respeitou a instrução. A etapa em que se dá o desrespeito e todas as subsequentes que dela dependam devem ser cotadas com 0 (zero) pontos.

10. Se, na resolução de um item, o examinando utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), a cotação total a atribuir ao item deve ser desvalorizada em um ponto. Esta desvalorização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas cotadas com 0 (zero) pontos, nem a eventuais utilizações do símbolo de igualdade, onde, em rigor, deveria estar o símbolo de igualdade aproximada.

11. Existem itens em cujo enunciado é dada uma instrução relativa ao número mínimo de casas decimais que o examinando deve conservar sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos. Indicam-se, a seguir, as desvalorizações a aplicar, na cotação total a atribuir ao item, em caso de desrespeito dessa instrução e/ou de arredondamentos mal efectuados.

Todos os valores intermédios estão de acordo com a instrução, mas existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado..... -1 ponto

Todos os valores intermédios estão bem arredondados, mas existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução..... -1 ponto

Existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado e existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução ..... -2 pontos

Critérios específicos

1.1. 10

$\left(cis\ \frac{\pi}{6}\right)^6 = cis\ \pi$ 1

$cis\ \pi = -1$ 1

Simplificação do numerador 1

Divisão 4

Indicação da multiplicação de ambos os termos da fracção por $3 - i$ 1

Cálculo do novo numerador 1

Cálculo do novo denominador 1

Simplificação da fracção 1

Escrita na forma trigonométrica..... 3

Módulo 1

Argumento 1

Escrita na forma $\rho\, cis\, \theta$ 1

1.2. 11

Representação das duas circunferências **(ver nota 1)** 2

Representação das duas semi-rectas **(ver nota 2)** 2

Indicação da região pedida, com a fronteira a cheio e o interior sombreado **(ver nota 3)** 3

Determinação da área pedida 4

Área da coroa circular 2

Divisão por 4 2

Notas:

1. A cotação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Representação correcta: duas circunferências com centro na origem, com indicação dos respectivos raios (ou onde o raio de uma seja o dobro do raio da outra) 2

Representação de duas circunferências com centro na origem, sem indicação dos respectivos raios e onde o raio de uma não seja o dobro do raio da outra 1

Outras situações 0

2. A cotação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Representação correcta: bissectriz do segundo quadrante e bissectriz do terceiro quadrante 2

Representação de duas semi-rectas, uma contida no segundo quadrante e outra no terceiro, mas em que pelo menos uma delas não é a bissectriz do respectivo quadrante 1

Outras situações 0

3. A cotação desta etapa só deve ser atribuída se nenhuma das etapas anteriores tiver sido cotada com 0 (zero) pontos e se a região sombreada for a região contida nos segundo e terceiro quadrantes e limitada pelas duas circunferências e pelas duas semi-rectas.
Se a fronteira não estiver representada a cheio, a cotação desta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

2.1. 10

Expressão que dá o número pedido **(ver nota 1)**.....9

Número pedido **(ver nota 2)**.....1

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva cotação a atribuir.

$5 \times 4 \times 3$ (ou equivalente) 9
$6 \times 5 \times 4 \times 3$ (ou equivalente) 5
$5 \times 4 \times 4$ (ou equivalente) 5
$6 \times 5 \times 4$ (ou equivalente) 5
Outras situações 0

2. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

2.2. 10

Expressão que dá a probabilidade **(ver notas 1 e 2)**..... 9

Resultado na forma de fracção irredutível **(ver nota 3)**..... 1

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva cotação a atribuir.

1.º caso: Fracções com denominador $^{12}C_2$ (ou equivalente) e com numerador igual a:

6 (ou equivalente) 9
12 (ou equivalente) 6
$^{6}C_2$ (ou equivalente) 3
Outras situações 2

2.º caso: Fracções com denominador $^{12}A_2$ (ou equivalente) e com numerador igual a:

12 (ou equivalente) 9
6 (ou equivalente) 6
$^{6}A_2$ (ou equivalente) 3
Outras situações 2

3.º caso: Fracções com denominador 18 (ou equivalente) e com numerador igual a:

6 (ou equivalente) 4
Outras situações 0

4.º caso: Fracções com outros denominadores 0

2. Se o examinando indicar apenas o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

3. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

4. O examinando pode apresentar directamente o resultado 1/11, acompanhado de uma justificação do tipo: «*escolhido um dos dois vértices, existem onze casos possíveis para o outro, dos quais só um é favorável, que é o que está na mesma aresta lateral*».

3. 12

Apresenta-se a seguir um exemplo de resposta:

No contexto da situação descrita, $P(B \mid A)$ significa «probabilidade de a segunda bola extraída ser branca, sabendo que a primeira bola extraída foi preta».

Do facto de essa probabilidade ser $\frac{1}{2}$, decorre que, após a extracção de uma bola preta, ficaram, na caixa, tantas bolas pretas como brancas. Portanto, ficaram na caixa dez bolas pretas.

Podemos assim concluir que, inicialmente, havia onze bolas pretas na caixa.

Tal como o exemplo atrás ilustra, para que a composição possa ser considerada completa deverá contemplar **explicitamente** os seguintes pontos:

- o significado de $P(B \mid A)$, no contexto da situação descrita;
- a explicação correcta de que, após a primeira extracção, ficaram, na caixa, tantas bolas pretas como brancas;
- a conclusão de que, inicialmente, havia onze bolas pretas na caixa.

A cotação deve ser atribuída de acordo com o seguinte critério:

A composição contempla os três pontos 12

A composição contempla dois pontos 8

A composição contempla um ponto 4

Nota:
Se o examinando apresentar o número pedido (11), mas não respeitar a instrução de elaborar uma composição, deverão ser atribuídos 0 (zero) pontos à sua resposta.

4.1. 14

A resposta do examinando deve ser classificada de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

O examinando escreve uma expressão correcta para a área do triângulo, em função de x $\left(\text{por exemplo: } \frac{2\,x\,e^{-x}}{2} \text{ ou } 2 \times \frac{x\,e^{-x}}{2}\right)$, e simplifica-a correctamente, obtendo a expressão do enunciado 14

O examinando escreve uma expressão correcta para a área do triângulo, em função de x, mas não a simplifica, ou simplifica-a incorrectamente 12

O examinando não escreve uma expressão correcta para a área do triângulo, em função de x, mas há evidência de ter identificado correctamente a sua base e a sua altura 8

O examinando não escreve uma expressão correcta para a área do triângulo, em função de x, mas há evidência de ter identificado correctamente apenas a sua base ou apenas a sua altura 4

4.2. 14

Determinar $A'(x)$ 5

Evidenciar a intenção de calcular $A'(x)$ 1

Derivada de e^{-x} 1

Restantes cálculos 3

Determinar o zero de A' 3

Escrever a equação $A'(x) = 0$ 1

Resolver a equação $A'(x) = 0$ 2

Estudo do sinal de A' e consequente conclusão (estudo que pode ser apresentado por meio de um quadro) 4

Primeira linha do quadro **(ver nota 1)** 2

Sinal de A' 1

Relação entre o sinal de A' e a monotonia de A 1

$A(1) = e^{-1}$ ou $A(1) = \frac{1}{e}$ **(ver nota 2)** 2

Notas:

1. A primeira linha do quadro deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

Primeira linha correcta (indicação do zero da derivada e indicação correcta do domínio, de 0 a $+\infty$) 2

Outras situações 0

2. Se o examinando não apresentar o valor exacto como resposta final, a sua resposta deverá ser desvalorizada em 1 ponto.

5. 14

Referir a continuidade de g 2

Concluir que o gráfico de g não tem assimptotas verticais 2

Provar que o gráfico de g não tem assimptotas não verticais, quando $x \to +\infty$ 5

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 1

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ 2

Conclusão (não existe assimptota não vertical) 2

ou

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ 1

Conclusão (não existe assimptota horizontal) 1

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 1

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ 1

Conclusão (não existe assimptota oblíqua) 1

Provar que o gráfico de g não tem assimptotas não verticais, quando $x \to -\infty$ 5

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 1

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ 2

Conclusão (não existe assimptota não vertical) 2

ou

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ 1

Conclusão (não existe assimptota horizontal) 1

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 1

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ 1

Conclusão (não existe assimptota oblíqua) 1

Nota:
Se o examinando se limitar a verificar o resultado para casos particulares, a cotação a atribuir deve ser de 0 (zero) pontos.

6.1. 14

Calcular $a(0)$ 4

Substituir t por 0 1

$a(0) = \frac{\pi}{3}$ 3

Identificar o pedido com $\text{sen}\,[a(0)]$ **(ver nota 1)** 7

Resposta final **(ver notas 2 e 3)** 3

Notas:

1. Se o valor obtido para $a(0)$, na etapa anterior, for $\frac{\pi}{2}$ ou qualquer outro valor que não seja amplitude de um ângulo agudo, esta etapa deve ser cotada com 0 (zero) pontos.

2. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se as duas etapas anteriores estiverem correctas.

3. A pontuação relativa a esta etapa deve ser desvalorizada se o examinando não apresentar o valor exacto como resposta final. Essa desvalorização deverá ser de:

- 1 ponto, se o examinando apresentar o valor $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e, em seguida, um seu valor aproximado;
- 2 pontos, se o examinando não apresentar o valor $\frac{\sqrt{3}}{2}$, apresentando directamente um valor aproximado de $\text{sen}\,\frac{\pi}{3}$.

6.2. 14

Equacionar o problema $\left(a(t) = \frac{\pi}{2}\right)$ **(ver nota 1)** 6

Resolver a equação 7

$a(t) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\sqrt{9{,}8}\, t\right) = 0$ 1

Concluir que $\sqrt{9{,}8}\, t = \frac{\pi}{2}$ 5

Concluir que $t = \frac{\pi}{2\sqrt{9{,}8}}$ 1

Resposta final $(t \approx 0{,}5)$ **(ver nota 2)** 1

Notas:

1. Qualquer equação que não seja equivalente a $a(t) = \frac{\pi}{2}$ deve ser cotada com 0 (zero) pontos.

2. Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às décimas, a cotação a atribuir a esta etapa deverá ser de 0 (zero) pontos.

3. Se, na sua resolução, o examinando obtiver uma equação impossível (como, por exemplo, $\cos\left(\sqrt{9{,}8}\, t\right) = 3$) e, não a reconhecendo como tal, prosseguir a resolução da mesma, todas as etapas subsequentes devem ser cotadas com 0 (zero) pontos.

7. 14

Determinar o máximo de f 5

Apresentar o gráfico correcto, no seu domínio $[1, 2]$ 1

Assinalar no gráfico o ponto de ordenada máxima 2

Indicar o máximo **(ver nota)**..... 2

Referir que o mínimo de f é 1 2

Determinar os valores pedidos 7

Concluir que $a + b = 4$ e $1{,}297\,a + b = 5$ 3

Resolver o sistema 2

Apresentar os valores de a e de b arredondados às centésimas ..... 2 (1+1)

ou

Concluir que $a = \frac{1}{1{,}297 - 1}$ 3

Apresentar o valor de a arredondado às centésimas 1

Concluir que $b = 4 - a$ 2

Apresentar o valor de b arredondado às centésimas 1

Nota:
Aceita-se qualquer valor que pertença ao intervalo $[1{,}2965\,;\,1{,}2971]$.
Qualquer valor fora deste intervalo deve ser cotado com 0 (zero) pontos.

EXAMES NACIONAIS DO ENSINO SECUNDÁRIO, 2006 – 1.ª FASE **GRELHA DE CLASSIFICAÇÃO DE MATEMÁTICA (Cód. 635)**

Código Confidencial da Escola	Número Convencional da Prova	Versão da Prova	Grupo I								Grupo II												TOTAL Da PROVA (200)
			1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	T1 (63)	1.1.	1.2.	2.1.	2.2.	3.	4.1.	4.2.	5.	6.1.	6.2.	7.	T2 (137)	
			(9)	(9)	(9)	(9)	(9)	(9)	(9)		(10)	(11)	(10)	(10)	(12)	(14)	(14)	(14)	(14)	(14)	(14)		

Data ____/____/____ O Professor Classificador _____

Exame nacional de Matemática A **(2006, 1.ª fase)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como, pela observação da figura podemos constatar que os gráficos das duas funções se intersetam num ponto de ordenada não nula, então, designando por a a abcissa do ponto de interseção, temos que $f(a) = g(a)$, e assim temos que:

   - $f(a) = g(a) \Leftrightarrow f(a) - g(a) = 0$, pelo que a equação $f(x) - g(x) = 0$ não é impossível
   - Como $a \neq 0$, então $f(a) = g(a) \Leftrightarrow \dfrac{f(a)}{g(a)} = 1$, pelo que a equação $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ não é impossível

   Como $f(0) = 2$ e $g(0) = 0{,}5$, então temos que $f(0) \times g(0) = 2 \times 0{,}5 = 1$, pelo que a equação $f(x) \times g(x) = 1$ não é impossível.

   Podemos ainda observar que a equação $f(x) + g(x) = 0$ é equivalente a $f(x) = -g(x)$ e como ambas as funções são positivas, não existe qualquer valor de x para os qual as funções tomem valores simétricos, ou seja a equação $f(x) + g(x) = 0$ é impossível.

   Resposta: **Opção A**

2. Observando que:

$$\lim(u_n) = \lim\left(\frac{n+1}{n^2}\right) = \lim\left(\frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right) = \lim\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 0^+ + 0^+ = 0^+$$

   Temos que:

$$\lim_{n\to+\infty} g(u_n) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x + 5}{2 + \cos x} = \frac{e^0 + 5}{2 + \cos(0)} = \frac{1+5}{2+1} = \frac{6}{3} = 2$$

   Resposta: **Opção C**

3. Usando as propriedades dos logaritmos, vem que:

$$h(x) = \frac{\ln\left(\sqrt{e^x}\right)}{2} = \frac{\ln\left(e^{\frac{x}{2}}\right)}{2} = \frac{\frac{x}{2}\ln(e)}{2} = \frac{\frac{x}{2} \times 1}{2} = \frac{x}{4}$$

   Resposta: **Opção C**

4. De acordo com os dados, temos que:

   - $f''(0) = 0$, porque no ponto de abcissa 0, o gráfico de f inverte o sentido das concavidades, ou seja é um ponto de inflexão
   - $f'(0) = 1$, a tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0, é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares, logo tem declive 1
   - $f(0) = 2$, porque a reta tangente tem declive 1 e contém o ponto $(-2,0)$, logo, a ordenada na origem pode ser calculada como: $0 = 1 \times (-2) + b \Leftrightarrow 2 = b$

   Assim, $f(0) + f'(0) + f''(0) = 2 + 1 + 0 = 3$

   Resposta: **Opção C**

5. Como $A = A \cup B \ \vee \ A \subset (A \cup B)$, então $P(A) \leq P(A \cup B) \Leftrightarrow P(A \cup B) \geq P(A) \Leftrightarrow P(A \cup B) \geq 0{,}3$

   Como $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$ e $\overline{A} = \overline{A} \cup B \ \vee \ \overline{A} \subset \left(\overline{A} \cup B\right)$, então:

   $$P\left(\overline{A}\right) \leq \left(\overline{A} \cup B\right) \Leftrightarrow P\left(\overline{A} \cup B\right) \geq P\left(\overline{A}\right) \Leftrightarrow P\left(\overline{A} \cup B\right) \geq 0{,}7$$

   Como $A \cap B = A \ \vee \ (A \cap B) \subset A$, então $P(A \cap B) \leq P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq 0{,}3$

   Como $P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P(A \cap B)$ e $P(A \cap B) \leq 0{,}3$, vem que $P\left(\overline{A \cap B}\right) > 1 - 0{,}3 \Leftrightarrow P\left(\overline{A \cap B}\right) > 0{,}7$

   Assim temos que o único acontecimento que pode ter probabilidade inferior a 0,3 é o acontecimento $A \cap B$

   Resposta: **Opção C**

6. Como a soma das probabilidades é 1, vem:

   $$\frac{^{2005}C_{99}}{^{2006}C_{100}} + \frac{a}{^{2006}C_{100}} = 1 \Leftrightarrow \frac{^{2005}C_{99}}{^{2006}C_{100}} + \frac{a}{^{2006}C_{100}} = \frac{^{2006}C_{100}}{^{2006}C_{100}} \Leftrightarrow {}^{2005}C_{99} + a = {}^{2006}C_{100}$$

   Visualizando estes elementos nas linhas 2005 e 2006 do triângulo de Pascal, temos:

   $$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & \ldots & \ldots & \ldots & & & \\ {}^{2006}C_0 & & {}^{2005}C_0 & & {}^{2006}C_1 & & {}^{2005}C_1 & & {}^{2005}C_{99} & & {}^{2005}C_{100} \quad \ldots \\ & & & & & \ldots & \ldots & \ldots & {}^{2006}C_{99} & {}^{2006}C_{100} & \ldots \end{array}$$

   Pelo que podemos afirmar que: ${}^{2005}C_{99} + {}^{2005}C_{100} = {}^{2006}C_{100}$, ou seja, como ${}^{2005}C_{99} + a = {}^{2006}C_{100}$,

   $$a = {}^{2005}C_{100}$$

   Resposta: **Opção B**

7. Sendo A a imagem geométrica de um número complexo $w = \rho \operatorname{cis} \theta$, temos que w é uma raiz quadrada de z se $z = w^2 = \rho^2 \operatorname{cis}(2\theta)$.

   Se $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, então $\pi < 2\theta < 2\pi$ e das quatro hipóteses de resposta, apenas o número complexo $-i = \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$ satisfaz esta condição.

   Resposta: **Opção D**

GRUPO II

1.

1.1. Começamos por usar a fórmula de Moivre para calcular $\left(\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^6 = 1^6 \operatorname{cis}\left(6 \times \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{cis}\pi = -1$

Substituindo na expressão dada temos:

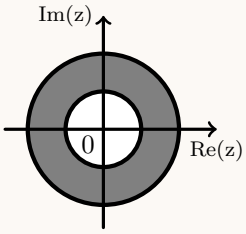
$$\frac{4+2i\left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}\right)^6}{3+i} = \frac{4+2i(-1)}{3+i} = \frac{4-2i}{3+i} = \frac{(4-2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{12-4i-6i+2i^2}{9-i^2} = \frac{12-2-10i}{9-(-1)} =$$
$$= \frac{10-10i}{10} = 1-i$$

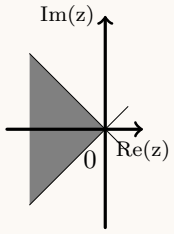
Escrevendo $1-i$ na f.t. temos $1-i = \rho \operatorname{cis}\theta$, onde:

- $\rho = |1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{-1} = -1$; como $\operatorname{sen}\theta < 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 4º quadrante, logo $\theta = -\frac{\pi}{4}$

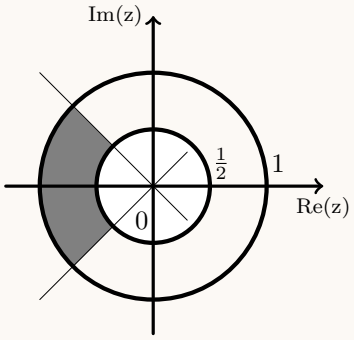
Logo $1-i = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

1.2. A condição $\frac{1}{2} \leq |z| < 1$ define a coroa circular delimitada pelas circunferências centradas na origem e de raios $\frac{1}{2}$ e $|z| < 1$; e a condição $\frac{3\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{5\pi}{4}$ define a região do plano complexo, dos 2º e 3º quadrantes compreendido entre as bissetrizes dos quadrantes, como nas figuras ao lado.





A condição $\frac{1}{2} \leq |z| \leq 1 \ \wedge \ \frac{3\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{5\pi}{4}$, é a interseção das duas regiões definidas, pelo que a sua representação geométrica é a zona representada a sombreado na figura ao lado.



A área da coroa circular pode ser calculada como a diferença das áreas dos dois círculos:

- Área do círculo de raio 1: $A = \pi \times 1^2 = \pi$
- Área do círculo de raio $\frac{1}{2}$: $A = \pi \times \left(\frac{1}{1}\right)^2 = \pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$
- Área da coroa circular $A = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

Como as bissetrizes dos quadrantes dividem a coroa circular em quatro partes iguais, a área da região defina pela condição é

$$A = \frac{\frac{3\pi}{4}}{4} = \frac{3\pi}{16}$$

2.

2.1. Como a coluna tem seis faces laterais, como as faces opostas devem ser pintadas da mesma cor, a escolha da cor para 3 faces determina que as restantes 3 tenham as mesmas cores.
Como uma dessas 3 faces já está pintada de verde, faces adjacentes não podem ter a mesma cor, restam 3 faces (a base superior e 2 das faces laterais) que podem ser pintadas com 1 das 5 cores disponíveis (não considerando para esta escolha a cor verde).
Assim existem 5 elementos (cores) que podem ser arranjados em 3 posições(a base superior e duas faces laterais adjacentes não pintadas de verde), pelo que o número de maneiras diferentes que podem ficar pintadas as restantes cinco faces, de cordo com as condições impostas é:

$$^5A_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

2.2. Como uma das bases está contida no plano de equação $z = 2$, os pares de vértices que definem retas paralelas ao eixo Oz são pares de pontos que definem arestas laterais do prisma.
Como o prisma tem 12 vértices, existem $^{12}C_2$ pares de vértices que podem ser selecionados, ou seja $^{12}C_2$ casos favoráveis.
Como existem 6 arestas laterais, são 6 pares de vértices que definem retas paralelas ao eixo Oz, ou seja 6 casos favoráveis.
Assim, recorrendo à Regra de LaPlace para o cálculo da probabilidade, e tornando a fração irredutível, temos que:

$$\frac{6}{^{12}C_2} = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$$

3. No contexto da situação descrita, $P(B|A)$ é a probabilidade de que a segunda bola extraída da caixa seja branca, sabendo que a primeira bola extraída é preta.
Como $P(B|A) = \frac{1}{2}$, então no momento da extração da segunda bola, o número de bolas pretas e brancas, dentro da caixa é igual.
Como é sabido que a primeira bola extraída é preta, no momento da extração da segunda bola, ainda estão as 10 bolas brancas na caixa.
Assim, como no momento da extração da segunda bola, existem 10 bolas brancas e o mesmo número de bolas pretas, e já tinha sido extraída uma bola preta, sem ter sido reposta, o número de bolas pretas que estão inicialmente na caixa é $10 + 1 = 11$

4.

4.1. Como o triângulo $[OPQ]$ é isósceles, então a abcissa do Q é o dobro da abcissa do ponto P, pelo que a abcissa do ponto Q é $2x$
Como o ponto P pertence ao gráfico de f, então a ordenada de P é $f(x) = e^{-x}$
Considerando o lado $[OQ]$ como a base do triângulo, temos que a área do triângulo $[OPQ]$ é:

$$A(x) = \frac{2x \times e^{-x}}{2} = xe^{-x}$$

4.2. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$A'(x) = \left(xe^{-x}\right)' = (x)'e^{-x} + x\left(e^{-x}\right)' = 1\times e^{-x} + x(-x)'e^{-x} = e^{-x} + x(-1)e^{-x} = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(1-x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-x} = 0}_{\text{Eq Imp, } e^{-x}>0} \vee 1 - x = 0 \Leftrightarrow 1 = x$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de h, temos:

x	0		1	$+\infty$
$A'(x)$	n.d.	$+$	0	$-$
$A(x)$	n.d.	↗	Máx.	↘

Assim, podemos concluir que a função A:

- é crescente no intervalo $]0,1]$;
- é decrescente no intervalo $[1,+\infty[$;

Como a função A é crescente no intervalo $]0,1]$ e decrescente no intervalo $[1,+\infty[$, podemos concluir que a função só tem um extremo, e 1 é o maximizante.
Calculando o valor máximo que a área do triângulo pode assumir, temos:

$$A(1) = 1 \times e^{-1} = 1 \times \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$

5. Como a função f é contínua, então a função $g(x) = xf(x)$ também é contínua, por se tratar de um produto de funções contínuas, pelo que o gráfico de g não admite qualquer assíntota vertical.

Como a reta de equação $y = x$ é assíntota do gráfico de f, quer quando $x \to +\infty$, quer quando $x \to -\infty$, temos que:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

E assim vem que:

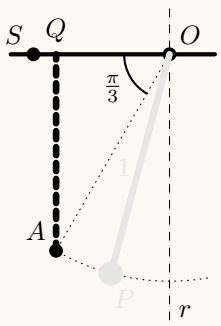
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{xf(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{xf(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Como nem $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{g(x)}{x}$, nem $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}$ são valores finitos podemos concluir que também não existe qualquer assíntota não vertical do gráfico de g.

6.

6.1. No instante inicial ($t = 0$) a amplitude do ângulo SOP é dada por:

$$\alpha(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\cos\left(\sqrt{9{,}8}\times 0\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\cos 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$



Assim, considerando o ponto Q, como a projeção ortogonal do ponto A sobre a reta OS, temos que a amplitude do ângulo QOA é $\dfrac{\pi}{3}$ radianos, e a distância do centro da esfera à reta OS é $\overline{QA}$. Logo:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\overline{QA}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\overline{QA}}{1} \Leftrightarrow \overline{QA} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \overline{QA} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

6.2. Quando o ponto P passa na reta r temos $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Logo valor de t que corresponde ao instante em que o ponto P passa na reta r, pela primeira vez, é a menor solução positiva da equação $\alpha(t) = \frac{\pi}{2}$. Resolvendo a equação vem:

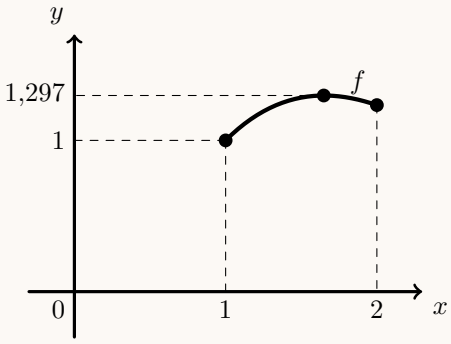
$$\alpha(t) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\cos\left(\sqrt{9{,}8}\,t\right) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6}\cos\left(\sqrt{9{,}8}\,t\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\sqrt{9{,}8}\,t\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9{,}8}\,t = \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{\sqrt{9{,}8}}\,,\ k \in \mathbb{Z}$$

Logo, a menor solução positiva da equação corresponde a $k = 0$, ou seja, $t = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{9{,}8}} \approx 0{,}5$

Ou seja, o ponto P passa na reta r, pela primeira vez, aproximadamente, meio segundo depois do instante inicial.

7. Representando na calculadora a função f, no domínio definido, visualizamos o gráfico reproduzido na figura ao lado.



Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados do máximo da função num intervalo, obtemos o valor arredondando às milésimas, para o máximo da função de 1,297.

Por observação do gráfico, e como
$f(1) = \cos(1-1) + \ln 1 = \cos(0) + 0 = 1$, podemos afirmar que o contradomínio de f é, aproximadamente, $[1; 1{,}297]$
Ou seja a amplitude do contradomínio é $1{,}297 - 1 = 0{,}297$

Como se pretende fazer uma transformação da função f, por forma a dar origem a uma função de contradomínio de amplitude 1 (o intervalo [4,5] tem amplitude 1), o parâmetro a deve ser tal que: $a \times 0{,}297 = 1$. Assim podemos calcular o valor de a:

$$a \times 0{,}297 = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{0{,}297} \Leftrightarrow a \approx 3{,}367$$

Logo, como $f(1) = 1$, $a \times f(1) = 3{,}367 \times 1 = 3{,}367$, e como se pretende que o valor mínimo da função g (que é a imagem de 1) seja, 4, podemos calcular o valor de b:

$$b = 4 - 3{,}367 = 0{,}633$$

Ou seja, arredondando às centésimas os valores calculados de a e de b, temos que a função $g(x) = 0{,}37f(x) + 0{,}63$ tem contradomínio [4,5], aproximadamente.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais

Programa novo implementado em 2005/2006

Duração da prova: 120 minutos **2.ª FASE**

2006

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

Identifique claramente os grupos e os itens a que responde.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta (excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações).

É interdito o uso de «esferográfica-lápis» e de corrector.

As cotações da prova encontram-se na página 11.

A prova inclui um formulário (pág. 3).

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r \quad (\alpha - \textit{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;}\ \ r - \textit{raio})$

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ $(\alpha - \textit{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;}\ \ r - \textit{raio})$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - \textit{raio da base};\ g - \textit{geratriz})$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - \textit{raio})$

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3 \qquad (r - \textit{raio})$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u' . v + u \,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' . v - u \,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \,.\, u^{n-1} \,.\, u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' . \cos u$

$(\cos u)' = -u' . \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' . e^u$

$(a^u)' = u' . a^u . \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \,.\, \ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

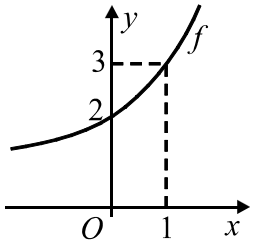
Grupo I

- Os sete itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra, o item será anulado, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Sejam a e b dois números reais positivos.

Na figura está parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a^x + b$.

Tal como a figura sugere, os pontos $(0, 2)$ e $(1, 3)$ pertencem ao gráfico de f.



Quais são os valores de a e de b?

(A) $a = 2$ e $b = 1$

(B) $a = 2$ e $b = 3$

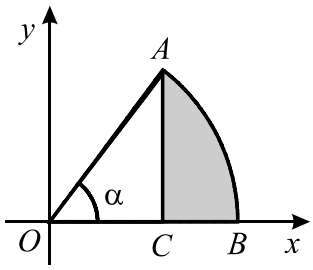
(C) $a = 3$ e $b = 2$

(D) $a = 3$ e $b = 1$

2. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, um arco AB, que está contido na circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$.

O ponto C pertence ao eixo Ox e o segmento de recta $[AC]$ é perpendicular a este eixo.

α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB.



Qual é a expressão que dá o perímetro da região sombreada, em função de α?

(A) $\pi \times \alpha + \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha$

(B) $\pi \times \alpha + \operatorname{sen}\alpha + 1 - \cos\alpha$

(C) $1 + \alpha - \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha$

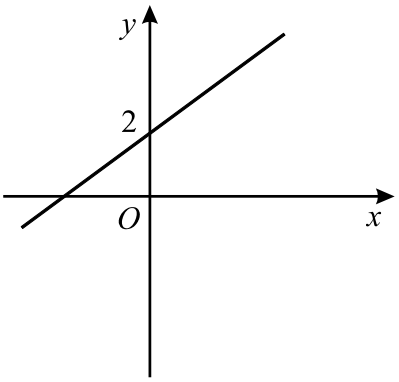
(D) $1 + \alpha + \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha$

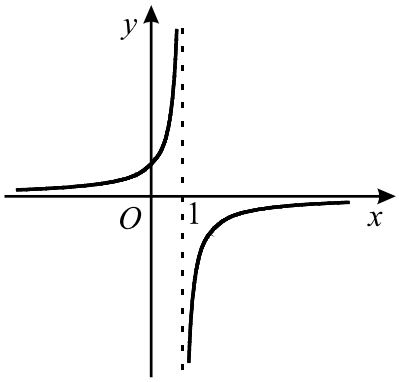
3. De duas funções, f e g, sabe-se que:

• o gráfico de f é uma recta, cuja ordenada na origem é igual a 2;

• o gráfico de g é uma hipérbole.

Nas figuras seguintes estão representadas parte dessa recta e parte dessa hipérbole.



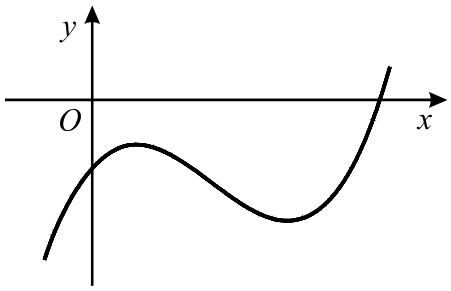


A recta de equação $x = 1$ é assimptota do gráfico de g

Indique o valor de $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

(A) 0 **(B)** 2 **(C)** $+\infty$ **(D)** $-\infty$

4. Na figura abaixo está parte do gráfico de uma função h, de domínio $\mathbb{R}$.



Sejam h' e h'' a primeira e a segunda derivadas de h, respectivamente.

Admita que estas duas funções também têm domínio $\mathbb{R}$.

Qual das expressões seguintes designa um número positivo?

(A) $h(0) + h''(0)$ **(B)** $h(0) - h'(0)$

(C) $h'(0) - h''(0)$ **(D)** $h'(0) \times h''(0)$

5. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	a	a	$0{,}4$

(a designa um número real).

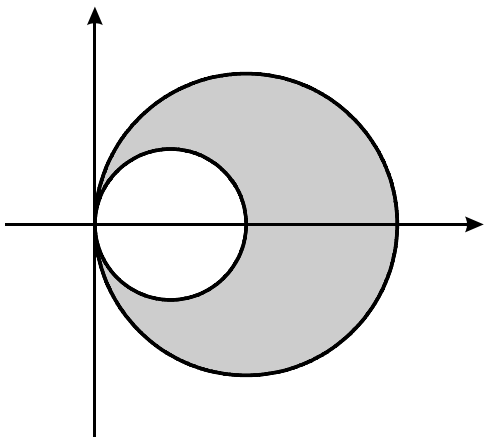
Qual é o valor médio desta variável aleatória ?

(A) $1{,}1$ **(B)** $1{,}2$ **(C)** $1{,}3$ **(D)** $1{,}4$

6. Quatro raparigas e quatro rapazes entram num autocarro, no qual existem seis lugares sentados, ainda não ocupados.
De quantas maneiras diferentes podem ficar ocupados esses seis lugares, supondo que ficam dois rapazes em pé?

(A) $3\,560$ **(B)** $3\,840$ **(C)** $4\,180$ **(D)** $4\,320$

7. Na figura estão representadas, no plano complexo, duas circunferências, ambas com centro no eixo real, tendo uma delas raio 1 e a outra raio 2.



A origem do referencial é o único ponto comum às duas circunferências.

Qual das condições seguintes define a região sombreada, incluindo a fronteira?

(A) $|z-1| \geq 1 \quad \wedge \quad |z-2| \leq 2$ **(B)** $|z-1| \geq 2 \quad \wedge \quad |z-2| \leq 1$

(C) $|z-1| \leq 1 \quad \wedge \quad |z-2| \geq 2$ **(D)** $|z-1| \leq 2 \quad \wedge \quad |z-2| \geq 1$

Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

1.1. Considere $z_1 = (2 - i)\left(2 + cis\frac{\pi}{2}\right)$ e $z_2 = \frac{1}{5}\, cis\left(-\frac{\pi}{7}\right)$

Sem recorrer à calculadora, escreva o número complexo $\frac{z_1}{z_2}$ na forma trigonométrica.

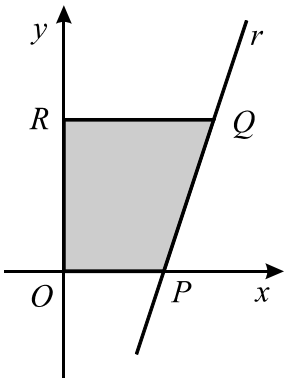
1.2. Seja z um número complexo cuja imagem geométrica, no plano complexo, é um ponto A situado no primeiro quadrante.
Seja B a imagem geométrica de $\overline{z}$, conjugado de z.
Seja O a origem do referencial.
Sabe-se que o triângulo $[AOB]$ é equilátero e tem perímetro 6.
Represente o triângulo $[AOB]$ e determine z na forma algébrica.

2. Seja f a função, de domínio $]1, +\infty[$, definida por $f(x) = x + x\ln(x-1)$.
Sem recorrer à calculadora, resolva as duas alíneas seguintes:

2.1. Estude a função quanto à existência de assimptotas do seu gráfico.

2.2. Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy, uma recta r e um trapézio $[OPQR]$.

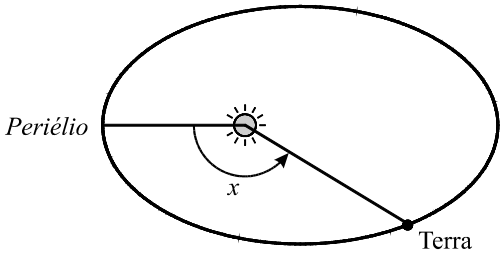
- Q tem abcissa 2 e pertence ao gráfico de f (o qual não está representado na figura);
- r é tangente ao gráfico de f no ponto Q;
- P é o ponto de intersecção da recta r com o eixo Ox;
- R pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à do ponto Q.



Determine a área do trapézio $[OPQR]$. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3. Como sabe, a Terra descreve uma órbita elíptica em torno do Sol.

Na figura está representado um esquema dessa órbita. Está assinalado o *periélio*, o ponto da órbita da Terra mais próximo do Sol.



Na figura está assinalado um ângulo de amplitude x radianos $(x \in [0, 2\pi[)$.
Este ângulo tem o seu vértice no Sol, o seu lado origem passa no *periélio* e o seu lado extremidade passa na Terra.

A distância d, em milhões de quilómetros, da Terra ao Sol, é (aproximadamente) dada, em função de x, por $d = 149{,}6\ (1 - 0{,}0167 \cos x)$

3.1. **Sem recorrer à calculadora**, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, determine a distância máxima e a distância mínima da Terra ao Sol.
Apresente os valores pedidos em milhões de quilómetros, arredondados às décimas.

3.2. Sabe-se que x verifica a relação $\frac{2\pi t}{T} = x - 0{,}0167 \operatorname{sen} x$, em que

- t é o tempo, em dias, que decorre desde a passagem da Terra pelo *periélio* até ao instante em que atinge a posição correspondente ao ângulo x;
- T é o tempo que a Terra demora a descrever uma órbita completa ($365{,}24$ dias).

3.2.1. Mostre que, para $x = \pi$, se tem $t = \frac{T}{2}$.

Interprete este resultado no contexto da situação descrita.

3.2.2. Sabe-se que a última passagem da Terra pelo *periélio* ocorreu a uma certa hora do dia 4 de Janeiro. Determine a distância a que a Terra se encontrava do Sol, à mesma hora do dia 14 de Fevereiro. Apresente o resultado em milhões de quilómetros, arredondado às décimas. Nos valores intermédios, utilize, no mínimo, quatro casas decimais.

Nota: a resolução desta questão envolve uma equação que deve ser resolvida graficamente, com recurso à calculadora; apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de algum, ou de alguns, ponto(s).

4. Seja $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0) = f(2) = 0$ e $f(1) > 0$
Prove que existe pelo menos um número real c no intervalo $]0, 1[$ tal que $f(c) = f(c + 1)$

Sugestão: considere a função $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) - f(x + 1)$

5. Numa sala de Tempos Livres, a distribuição dos alunos por idades e sexo é a seguinte:

	5 anos	6 anos	7 anos
Rapaz	1	5	2
Rapariga	3	5	7

5.1. Escolhem-se dois alunos ao acaso.
Qual é a probabilidade de a soma das suas idades ser igual a 12? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

5.2. Escolhe-se um aluno ao acaso.
Sejam A e B os acontecimentos:

A: «*o aluno tem 7 anos*»;

B: «*o aluno é rapaz*».

Indique, justificando, o valor da probabilidade condicionada $P(B \mid A)$. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

Nota: no caso de utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, explicite os valores das duas probabilidades envolvidas nessa fórmula.

6. Uma turma de 12.º ano é constituída por raparigas, umas de 16 anos e as restantes de 17 anos, e por rapazes, uns de 17 anos e os restantes de 18 anos.
Os alunos dessa turma estão numerados consecutivamente, a partir do número 1.
Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa turma e regista-se o número, a idade e o sexo desse aluno.
Em cada uma das opções seguintes estão indicados dois acontecimentos, X e Y, associados a esta experiência aleatória.

Opção 1: X : «O aluno escolhido tem idade superior ou igual a 17 anos»
Y : «O aluno escolhido tem 16 ou 17 anos»

Opção 2: X : «O número do aluno escolhido é par»
Y : «O número do aluno escolhido é múltiplo de 4»

Opção 3: X : «O aluno escolhido tem 18 anos»
Y : «O aluno escolhido é rapariga»

Opção 4: X : «O aluno escolhido é rapaz»
Y : «O aluno escolhido tem 17 anos»

Em apenas uma das opções acima apresentadas os acontecimentos X e Y são tais que são verdadeiras as três afirmações seguintes:

$$P(X \cup Y) > P(X), \quad P(X \cup Y) < 1 \quad \text{e} \quad P(X \cap Y) > 0$$

Qual é essa opção? Numa pequena composição, explique por que é que rejeita as outras três opções (para cada uma delas, indique, **justificando**, qual é a afirmação falsa).

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa 9
Cada resposta errada..... 0
Cada questão não respondida ou anulada 0

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 12
1.2. 9

2. 28
2.1. 14
2.2. 14

3. 42
3.1. 14
3.2. 28
3.2.1. 14
3.2.2. 14

4. 14

5. 18
5.1. 9
5.2. 9

6. 14

TOTAL **200**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais

Programa novo implementado em 2005/2006

Duração da prova: 120 minutos **2.ª FASE**

2006

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa 9
Cada resposta errada..... 0
Cada questão não respondida ou anulada 0

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 12
1.2. 9

2. 28
2.1. 14
2.2. 14

3. 42
3.1. 14
3.2. 28
3.2.1. 14
3.2.2. 14

4. 14

5. 18
5.1. 9
5.2. 9

6. 14

TOTAL **200**

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anulados todos os itens com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todos os itens em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Versão 1	A	D	A	C	A	D	A
Versão 2	B	C	A	B	D	D	C

Grupo II

Critérios gerais

1. Se o examinando se enganar na identificação do item a que está a responder, ou se a omitir, mas, pela resolução apresentada, for possível identificá-lo inequivocamente, a resposta deve ser vista e classificada.

2. Se o examinando apresentar mais do que uma resposta a um item, e não indicar, de forma inequívoca, a que pretende que seja classificada, deve ser vista e classificada apenas a que se encontra em primeiro lugar, na folha de resposta.

3. As cotações a atribuir às respostas dos examinandos são expressas obrigatoriamente em números inteiros.

4. Num item em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, a cotação a atribuir deve estar de acordo com o seguinte critério:
- Se o examinando se limitar a apresentar o resultado final, a cotação deve ser de 0 (zero) pontos.
- Se o examinando não se limitar a apresentar o resultado final, a cotação deve ser a soma algébrica das cotações atribuídas a cada etapa, de acordo com o disposto nos pontos 6, 7, 8 e 9 destes critérios gerais, e das desvalorizações previstas nos pontos 10 e 11 destes critérios gerais. Se a soma for negativa, a cotação a atribuir é de 0 (zero) pontos.

5. Alguns itens da prova podem ser correctamente resolvidos por mais do que um processo. Sempre que o examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nos critérios específicos, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas. Salienta-se que deve ser aceite qualquer processo cientificamente correcto, mesmo que envolva conhecimentos não contemplados no programa da disciplina.

6. A cotação de cada item está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para o resolver.

6.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.

6.2. O classificador não pode subdividir, em cotações parcelares, a cotação atribuída a cada etapa.
Caso uma etapa envolva um único passo, testando apenas o conhecimento de um só conceito ou propriedade, e a sua resolução não esteja completamente correcta, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos.
Caso uma etapa envolva mais do que um passo (por exemplo, o cálculo da derivada de uma função, a resolução de uma equação, a obtenção de uma expressão em função de uma variável, etc.) e a sua resolução esteja incompleta, ou contenha incorrecções, a cotação a atribuir deve estar de acordo com o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:
- erros de contas ocasionais devem ser desvalorizados em um ponto;
- erros que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades devem ser desvalorizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa;
- transposições erradas de dados do enunciado devem ser desvalorizadas em um ponto, desde que o grau de dificuldade da etapa não diminua;
- transposições erradas de dados do enunciado devem ser desvalorizadas em, pelo menos, metade da cotação da etapa, caso o grau de dificuldade da etapa diminua.

6.3. Nas etapas cuja cotação se encontra discriminada por níveis de desempenho, o classificador deve enquadrar a resposta do examinando numa das descrições apresentadas. O classificador não pode atribuir uma cotação diferente das indicadas.

6.4. No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.

6.5. Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.

6.6. Pode acontecer que o examinando, ao resolver um item, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios específicos. Todas as etapas não percorridas explicitamente pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam inequivocamente implícitos na resolução do item, devem receber a cotação indicada.

7. Quando, num item, é pedida uma forma específica de apresentação do resultado final (por exemplo, «em minutos», «em percentagem», etc.), este deve ser apresentado na forma pedida. Se o resultado final apresentado pelo examinando não respeitar a forma pedida no enunciado (por exemplo, se o enunciado pedir o resultado em minutos, e o examinando o apresentar em horas), devem ser atribuídos 0 (zero) pontos à etapa correspondente ao resultado final. No entanto, a cotação não deve ser desvalorizada caso o examinando não indique a unidade em que é pedido o resultado (por exemplo, se o resultado final for 12 minutos, ou 12 metros, e o examinando escrever simplesmente 12, não se deve aplicar nenhuma desvalorização). Se não for pedida aproximação para o resultado final, o examinando deve apresentar o valor exacto. Se o examinando apresentar, como resultado final, uma aproximação do valor exacto, deve ser aplicada uma desvalorização de 1 ponto na cotação a atribuir à etapa correspondente ao resultado final.

8. O examinando deve respeitar sempre a instrução relativa à apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações. Se, numa etapa, o examinando não respeitar esta instrução, apresentando algo (valor, quadro, tabela, gráfico, etc.) que não resulte de trabalho anterior, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos a essa etapa. Todas as etapas subsequentes que dela dependam devem ser igualmente cotadas com 0 (zero) pontos.

9. O examinando deve respeitar sempre qualquer instrução relativa ao método a utilizar na resolução de um item (por exemplo, «sem recorrer à calculadora», «equacione o problema», «resolva graficamente», etc.). Na resolução apresentada pelo examinando, deve ser inequívoco, pela apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações, o cumprimento da instrução. Se tal não acontecer, considera-se que o examinando não respeitou a instrução. A etapa em que se dá o desrespeito e todas as subsequentes que dela dependam devem ser cotadas com 0 (zero) pontos.

10. Se, na resolução de um item, o examinando utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), a cotação total a atribuir ao item deve ser desvalorizada em um ponto. Esta desvalorização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas cotadas com 0 (zero) pontos, nem a eventuais utilizações do símbolo de igualdade, onde, em rigor, deveria estar o símbolo de igualdade aproximada.

11. Existem itens em cujo enunciado é dada uma instrução relativa ao número mínimo de casas decimais que o examinando deve conservar sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos. Indicam-se, a seguir, as desvalorizações a aplicar, na cotação total a atribuir ao item, em caso de desrespeito dessa instrução e/ou de arredondamentos mal efectuados.

Todos os valores intermédios estão de acordo com a instrução, mas existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado..... -1 ponto

Todos os valores intermédios estão bem arredondados, mas existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução..... -1 ponto

Existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado e existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução ..... -2 pontos

Critérios específicos

1.1. 12

Escrever z_1 na forma algébrica 6

$cis\,\frac{\pi}{2} = i$ 2

Restantes cálculos 4

Calcular $\frac{z_1}{z_2}$ 6

Escrever z_1 na forma trigonométrica 2

Efectuar a divisão na forma trigonométrica 4

1.2. 9

Representar o triângulo $[AOB]$ no plano complexo **(ver nota 1)** 3

Escrever z na forma $x + y\,i$ 6

$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{x}{2}$ 3

$z = \sqrt{3} + i$ **(ver nota 2)** 3

ou

Aplicar o Teorema de Pitágoras para concluir que $x = \sqrt{3}$ 3

$z = \sqrt{3} + i$ **(ver nota 2)** 3

ou

$z = 2\,cis\,\frac{\pi}{6}$ 4

$z = \sqrt{3} + i$ **(ver nota 2)** 2

Notas:

1. A cotação desta etapa deve ser atribuída de acordo com o seguinte critério:

Representação correcta 3

Triângulo $[OAB]$ com
• o vértice A no primeiro quadrante,
• o vértice B no quarto quadrante,
• A e B simétricos relativamente ao eixo real,
mas onde $\overline{AB}$ é manifestamente diferente de $\overline{OA}$ e de $\overline{OB}$, e não existe qualquer referência à igualdade dos lados 2

Triângulo $[OAB]$ com
• o vértice A no primeiro quadrante,
• o vértice B no quarto quadrante,
mas onde A e B não são simétricos relativamente ao eixo real, e não existe qualquer referência que evidencie a simetria 1

Outras situações 0

2. Se o examinando apresentar a parte real de z na forma de um valor aproximado, em vez do valor exacto $\sqrt{3}$, a cotação a atribuir a esta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

2.1. 14

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$ 3

Concluir que a recta de equação $x = 1$ é assimptota do gráfico de f 3

Referir que, pelo facto de f ser contínua em todo o seu domínio, o seu gráfico não tem mais assimptotas verticais 3

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ 3

$\frac{f(x)}{x} = 1 + \ln(x-1)$ 2

$\lim_{x \to +\infty} [1 + \ln(x-1)] = +\infty$ 1

Concluir que não existem assimptotas não verticais do gráfico de f 2

Nota:
Se o examinando tentar verificar a existência de assimptotas não verticais quando $x \to -\infty$, a cotação a atribuir a esta questão deve ser desvalorizada em 2 pontos. Se, em consequência desta desvalorização, a cotação resultar negativa, deve ser convertida em 0 (zero) pontos.

2.2. 14

$f'(x) = 1 + \ln(x-1) + x \times \frac{1}{x-1}$ **(ver nota 1)** 4

Determinar $f'(2)$ 1

Determinar $f(2)$ 1

Escrever uma equação da recta r 2

Determinar a abcissa do ponto P 3

Determinar a área do trapézio **(ver nota 2)** 3

Notas:

1. Se o examinando evidenciar a intenção de determinar $f'(x)$, a cotação mínima a atribuir a esta etapa deverá ser de 1 ponto.

2. Se o examinando não apresentar o resultado na forma de fracção irredutível, a cotação a atribuir a esta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

3.1. 14

Concluir que π é maximizante de d **(ver nota)**.....3
Determinar a distância máxima $(152{,}1)$ 4
Concluir que 0 é minimizante de d **(ver nota)** 3
Determinar a distância mínima $(147{,}1)$..... 4

ou

$-1 \leq \cos x \leq 1$ 3
$0{,}0167 \geq -0{,}0167\cos x \geq -0{,}0167$ 3
$1{,}0167 \geq 1 - 0{,}0167\cos x \geq 0{,}9833$ 3
$152{,}1 \geq 149{,}6(1 - 0{,}0167\cos x) \geq 147{,}1$ 3
Conclusão 2

Nota:
Não se exige que o examinando utilize a relação entre zeros/sinal da derivada e extremos/monotonia da função. O examinando pode obter o maximizante e o minimizante por observação directa da figura do enunciado.

3.2.1. 14

Mostrar que, para $x = \pi$, se tem $t = \frac{T}{2}$ 8

Substituir x por π 1
Obter a igualdade $\frac{2\pi t}{T} = \pi$ 3
Mostrar que $\frac{2\pi t}{T} = \pi \Leftrightarrow t = \frac{T}{2}$ 4

Interpretar o resultado 6

A cotação a atribuir deve estar de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Interpretação correcta (exemplo: «O tempo que decorre entre a passagem da Terra pelo periélio e o instante em que a Terra atinge o ponto mais afastado da sua órbita, relativamente ao Sol, é metade do tempo que a Terra demora a descrever uma órbita completa.») 6

Interpretação mal redigida, mas onde existe evidência de o examinando ter compreendido a situação (exemplos: «Quando o $x = \pi$, demora-se metade dos dias a fazer uma volta completa de órbita.»; «Quando $x = \pi$ percorre-se metade da distância, demorando-se metade do tempo.») 3

Outras situações (exemplo: «O tempo para se chegar ao periélio é metade do tempo que demora a alcançar o Sol.») 0

3.2.2. 14

Determinar o número de dias que decorrem entre 4 de Janeiro e 14 de Fevereiro (**ver nota 1**) 2

Escrever a equação $\frac{2\,\pi \times 41}{365{,}24} = x - 0{,}0167\,\text{sen}\,x$ 3

Resolver a equação 6
- Explicação do método utilizado (**ver nota 2**)..... 3
- Valor de x (**ver nota 3**).....3

Determinar a distância pedida 3
- Substituir x pelo valor encontrado, na expressão $149{,}6\,(1 - 0{,}0167\,\cos x)$ 2
- Resultado correctamente arredondado 1

Notas:

1. A cotação desta etapa deve ser atribuída de acordo com o seguinte critério:
- Número de dias correcto (41) 2
- Número de dias igual a 40 ou a 42 1
- Outras situações 0

2. A cotação desta etapa deve ser atribuída de acordo com o seguinte critério:

Apresentação do gráfico da função definida por $x - 0{,}0167\,\text{sen}\,x$, com respeito pelo domínio desta função, $[0, 2\pi[$, e da recta de equação $y = \frac{2\,\pi \times 41}{365{,}24}$, bem como do ponto de intersecção e respectiva abcissa

(ou apresentação do gráfico da função definida por $x - 0{,}0167\ \ \text{sen}\,x - \frac{2\,\pi \times 41}{365{,}24}$ e respectivo zero) 3

Apresentação dos gráficos com ausência de alguns elementos (por exemplo, ausência da abcissa do ponto de intersecção) e/ou com algumas incorrecções (por exemplo, o gráfico da função não respeita o seu domínio) .....1 ou 2

Outras situações 0

3. A cotação a atribuir à solução da equação deve ser atribuída de acordo com o seguinte critério:

Solução no intervalo $[0{,}7162;\ 0{,}7163]$ 3

Solução não pertencente ao intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[0{,}71;\ 0{,}72]$ 2

Solução não pertencente ao intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[0{,}70;\ 0{,}73]$ 1

Outras situações 0

4. 14

A demonstração envolve os seguintes pontos:

• referir a continuidade de g

• justificar correctamente que $g(0) < 0 \quad (g(0) = -f(1) \quad \text{e} \quad f(1) > 0)$

• justificar correctamente que $g(1) > 0 \quad (g(1) = f(1) \quad \text{e} \quad f(1) > 0)$

• evocar o Teorema de Bolzano para concluir que $\exists\, c \in]\,0,1[\ : g(c) = 0$

• referir que $g(c) = 0 \ \Leftrightarrow \ f(c) = f(c+1)$

A cotação a atribuir deve estar de acordo com o seguinte critério:

O examinando explicita os cinco pontos de uma forma clara e encadeada, demonstrando assim o pretendido 14

O examinando explicita os cinco pontos, mas não o faz de uma forma clara e encadeada 10

O examinando explicita quatro pontos 8

O examinando explicita três pontos 6

O examinando explicita dois pontos 4

O examinando explicita um ponto 2

5.1. 9

Expressão que dá a probabilidade **(ver notas 1 e 2)**..... 8

Resultado na forma de fracção irredutível **(ver nota 3)**..... 1

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva cotação a atribuir. As respostas apresentadas têm todas a forma de fracção. O examinando pode, no entanto, apresentar expressões equivalentes na forma de um produto de fracções.

1.º caso: Fracções com denominador $^{23}C_2$ e com numerador igual a:

$4 \times 9 + {}^{10}C_2$ (ou equivalente) 8
$10 \times 9 + 4 \times 9$ (ou equivalente) 6
4×9 (ou equivalente) 4
$^{10}C_2$ (ou equivalente) 4
$^{13}C_2 + {}^{10}C_2$ (ou equivalente) 4
Outras situações 2

2.º caso: Fracções com denominador 23×22 e numerador igual a:

$2 \times 4 \times 9 + {}^{10}A_2$ (ou equivalente) 8
$4 \times 9 + 10 \times 9$ (ou equivalente) 6
$4 \times 9 \times 2$ (ou equivalente) 4
$^{10}A_2$ (ou equivalente) 4
4×9 (ou equivalente) 3
Outras situações 2

3.º caso: Fracções com denominador 23^2 e numerador igual a:

$2 \times 4 \times 9 + 10^2$ (ou equivalente) 2
Outras situações 0

4.º caso: Fracções com outros denominadores 0

2. Se o examinando indicar apenas o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

3. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

5.2. 9

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo:

Referir que existem 9 alunos com sete anos, dos quais 2 são rapazes 7

Concluir que a probabilidade pedida é $\frac{2}{9}$ 2

2.º Processo:

Referir que $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$ **(ver nota 1)** 2

Concluir que $P(B|A) = \frac{\frac{2}{23}}{\frac{9}{23}}$ **(ver nota 2)** 6

Concluir que a probabilidade pedida é $\frac{2}{9}$ 1

Notas:

1. Se a fórmula apresentada pelo examinando estiver incorrecta, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos à totalidade da resposta a este item.

2. Se o examinando, desrespeitando a instrução do enunciado, não explicitar os valores de $P(B \cap A)$ e de $P(A)$, ou seja, se escrever $\frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{2}{9}$, a cotação a atribuir a esta etapa deve ser desvalorizada em 3 pontos.

6. 14

Explicar a rejeição das opções 1, 2 e 3 **(ver notas 1 e 2)** 12

Concluir que a opção 4 é a correcta **(ver nota 3)** 2

Notas:

1. Para cada uma das três opções que o examinando deve rejeitar, a cotação a atribuir deve estar de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

O examinando identifica a afirmação falsa, explica correctamente a razão pela qual a afirmação é falsa, utilizando sempre uma linguagem matematicamente correcta 4

O examinando identifica a afirmação falsa, explica correctamente a razão pela qual a afirmação é falsa, mas nem sempre utiliza uma linguagem matematicamente correcta 3

O examinando identifica a afirmação falsa, mas não explica correctamente a razão pela qual a afirmação é falsa 2

O examinando não identifica a afirmação falsa 0

2. Para cada uma das três opções, indica-se o mínimo que se aceita como justificação correcta da falsidade da afirmação em causa.

Opção 1: A afirmação $P(X \cup Y) < 1$ é falsa porque, como todos os alunos têm idade superior ou igual a 16 anos, $X \cup Y$ é um acontecimento certo.

Opção 2: A afirmação $P(X \cup Y) > P(X)$ é falsa porque, como todos os números múltiplos de 4 são pares, $X \cup Y = X$.

Opção 3: A afirmação $P(X \cap Y) > 0$ é falsa porque, como não existem raparigas com 18 anos, $X \cap Y = \emptyset$.

3. A cotação relativa a esta etapa só deve ser atribuída se tiverem sido cotadas, com pelo menos 2 pontos, cada uma das três rejeições (da etapa anterior) **ou** se o examinando justificar convenientemente porque é que as três afirmações são verdadeiras, na opção 4.

Exame nacional de Matemática A (2006, 2.ª fase)

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como o ponto (0,2) pertence ao gráfico de f, temos que $f(0) = 2$, e assim vem que:

$$f(0) = 2 \Leftrightarrow a^0 + b = 2 \Leftrightarrow 1 + b = 2 \Leftrightarrow b = 2 - 1 \Leftrightarrow b = 1$$

Como o ponto (1,3) pertence ao gráfico de f, temos que $f(1) = 3$, e como $b = 1$ vem que:

$$f(1) = 3 \Leftrightarrow a^1 + b = 3 \Leftrightarrow a + 1 = 3 \Leftrightarrow a = 3 - 1 \Leftrightarrow a = 2$$

Resposta: **Opção A**

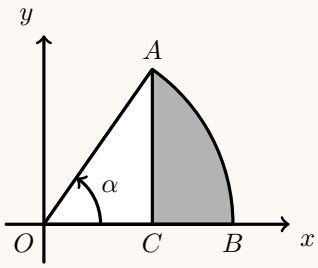
2. Como o arco BA é um arco de uma circunferência de raio 1, e com amplitude α, tem de comprimento α.

Como $\overline{OA} = 1$, e recorrendo às definições de seno e cosseno, vem:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AC}}{1} \Leftrightarrow \overline{AC} = \operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{OC}}{1} \Leftrightarrow \overline{OC} = \cos\alpha$$

Logo, $\overline{OB} = \overline{OC} + \overline{CB} \Leftrightarrow 1 = \cos\alpha + \overline{CB} \Leftrightarrow \overline{CB} = 1 - \cos\alpha$



Assim, o perímetro da região sombreada é:

$$P = \alpha + \overline{AC} + \overline{CB} = \alpha + \operatorname{sen}\alpha + 1 - \cos\alpha = 1 + \alpha + \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha$$

Resposta: **Opção D**

3. Pela observação dos gráficos, podemos verificar que:

- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = k, \ k \in]2, +\infty[$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

E assim, temos que:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)}{\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)} = \frac{k}{-\infty} = 0$$

Resposta: **Opção A**

4. Por observação do gráfico, temos que:

   - $h(0) < 0$, porque a imagem de zero é negativa
   - $h'(0) > 0$, porque em $x = 0$ a função é crescente
   - $h''(0) < 0$, porque em $x = 0$ a concavidade do gráfico da função está voltada para baixo

   Logo, podemos afirmar que:

   - $h(0) + h''(0) < 0$; $h(0) - h'(0) < 0$ e $h'(0) \times h''(0) < 0$
   - $h'(0) - h''(0) > 0$

   Resposta: **Opção C**

5. Como a soma das probabilidades é 1, vem:

$$a + a + 0{,}4 = 1 \Leftrightarrow 2a + 0{,}4 = 1 \Leftrightarrow 2a = 1 - 0{,}4 \Leftrightarrow 2a = 0{,}6 \Leftrightarrow a = \frac{0{,}6}{2} \Leftrightarrow a = 0{,}3$$

   Logo, o valor médio da variável aleatória é:

$$\mu = 0 \times 0{,}3 + 1 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}4 = 0 + 0{,}3 + 0{,}8 = 1{,}1$$

   Resposta: **Opção A**

6. Como ficam dois rapazes de pé, calculamos quantos grupos de rapazes podem ficar de pé, selecionando 2 de entre os 4 rapazes, sem considerar relevante a ordem ${}^4C_2$
   Depois, por cada grupo de rapazes que fica de pé, calculamos o número de formas diferentes de ocupar 6 posições (lugares), com 6 elementos (4 raparigas e 2 rapazes que vão sentados), onde a ordem é considerada relevante, por gerarem configurações diferentes na ocupação dos lugares sentados, ou seja ${}^6A_6 = P_6 = 6!$
   Assim, supondo que ficam dois rapazes em pé, o número de maneiras diferentes que podem ficar ocupados os 6 lugares disponíveis é

$${}^4C_2 \times 6! = 4\,320$$

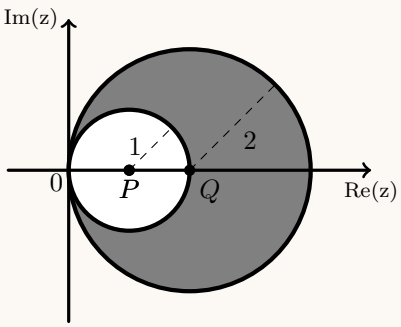
   Resposta: **Opção D**

7. Designando por P e Q as representações geométricas dos números complexos $w_1 = 1$ e $w_2 = 2$, respetivamente, temos que a região sombreada é o conjunto dos pontos do plano complexo que satisfazem cumulativamente duas condições:

   - estão a uma distância superior a 1 do ponto P
   - estão a uma distância inferior a 2 do ponto Q

   Assim temos que a região sombreada é definida por

$$|z - 1| \geq 1 \ \wedge \ |z - 2| \leq 2$$



   Resposta: **Opção A**

GRUPO II

1.

1.1. Como $\operatorname{cis}\frac{\pi}{2} = i$ temos que:

$$z_1 = (2-i)\left(2+\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}\right) = (2-i)(2+i) = 2^2 - i^2 = 4-(-1) = 5$$

Escrevendo z_1 na f.t. temos $z_1 = 5 = 5\operatorname{cis}0$

Fazendo a divisão na f.t. vem:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5\operatorname{cis}0}{\frac{1}{5}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{7}\right)} = \frac{5}{\frac{1}{5}}\operatorname{cis}\left(0-\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right) = 25\operatorname{cis}\frac{\pi}{7}$$

1.2. Como o triângulo $[AOB]$ é equilátero e tem perímetro 6, logo cada lado tem comprimento 2.

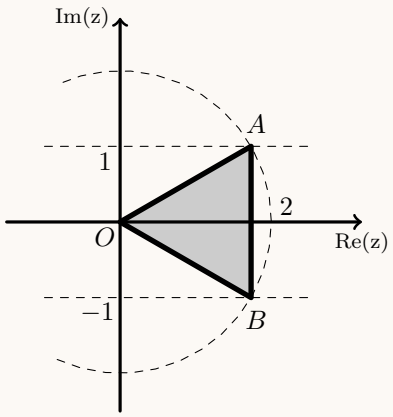
Assim A e B devem estar sobre a circunferência de centro na origem e raio 2, para que $\overline{OA} = \overline{OB} = 2$ (o que significa que $|z| = |\overline{z}| = 2$).

Como B é simétrico de A relativamente ao eixo real (porque $\overline{z}$ é o conjugado de z) e $\overline{AB} = 2$, sabemos que A está sobre a reta $\operatorname{Im}(w) = 1$ e B sobre a reta $\operatorname{Im}(w) = -1$

Como $\operatorname{Im}(z) = 1$ e $\operatorname{Re}(z) > 0$, sabemos que z é da forma $z = a + i, a \in \mathbb{R}^+$

Por outro lado, temos que $|z| = |a+i| = \sqrt{a^2+1^2} = \sqrt{a^2+1}$, e como $|z| = 2$, temos que:
$\sqrt{a^2+1} = 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a^2+1}\right)^2 = 2^2 \Rightarrow a^2+1 = 4$

Como $a > 0$, temos que $a^2+1 = 4 \Leftrightarrow a^2 = 3 \Leftrightarrow a = \sqrt{3}$, logo $z = \sqrt{3}+i$



2.

2.1. Como a função é contínua no intervalo $]1,+\infty[$, a reta de equação $x = 1$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f. Para averiguar esta hipótese vamos calcular $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(x + x\ln(x-1)\right) = \lim_{x\to 1^+}\left(x\left(1+\ln(x-1)\right)\right) = 1\left(1+\ln(1^+-1)\right) =$$

$$= 1+\ln(0^+) = 1-\infty = -\infty$$

Assim concluímos que a reta de equação $x = 1$ é a única assíntota vertical do gráfico de f

Averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de f, de equação $y = mx+b$, quando $x \to +\infty$, vem que:

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+x\ln(x-1)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}+\frac{x\ln(x-1)}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\ln(x-1)\right) =$$

$$= 1+\ln(+\infty-1) = 1+\ln(+\infty) = 1+\infty = +\infty$$

Logo, como o domínio de f é $]1,+\infty[$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ não é um valor finito, então podemos concluir que o gráfico de f não tem assíntotas oblíquas.

2.2. Como o ponto Q pertence ao gráfico de f e tem abcissa 2, podemos calcular a respetiva ordenada:

$$f(2) = 2 + 2\ln(2-1) = 2 + 2\ln 1 = 2 + 2 \times 0 = 2$$

A reta r é tangente ao gráfico de f no ponto $Q(2,2)$, contém este ponto e tem declive $m = f'(2)$. Assim determinando a expressão da derivada, temos:

$$f'(x) = \big(x + x\ln(x-1)\big)' = (x)' + (x)'\ln(x-1) + x\big(\ln(x-1)\big)' =$$

$$= 1 + 1 \times \ln(x-1) + x \times \frac{(x-1)'}{x-1} = 1 + \ln(x-1) + x \times \frac{1}{x-1} = 1 + \ln(x-1) + \frac{x}{x-1}$$

Assim, calculando o valor do declive, vem:

$$m = f'(2) = 1 + \ln(2-1) + \frac{2}{2-1} = 1 + \ln 1 + \frac{2}{1} = 1 + 0 + 2 = 3$$

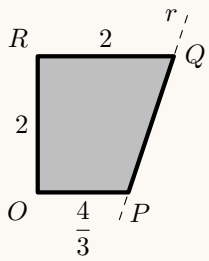
Substituindo as coordenadas do ponto de tangência e o declive em $y = mx + b$, podemos calcular o valor de b:

$$2 = 3(2) + b \Leftrightarrow 2 = 6 + b \Leftrightarrow 2 - 4 = b \Leftrightarrow -4 = b$$

Pelo que a equação da reta r é: $y = 3x - 4$

Assim, a abcissa do ponto P pode ser calculada através da equação da reta r:

$$y = 3x - 4 \wedge y = 0 \Leftrightarrow 0 = 3x - 4 \Leftrightarrow 4 = 3x \Leftrightarrow \frac{4}{3} = x$$



Logo a área do trapézio é:

$$A_{[OPQR]} = \frac{\overline{RQ} + \overline{OP}}{2} \times \overline{OR} = \frac{x_Q + x_P}{2} \times y_R = \frac{2 + \frac{4}{3}}{2} \times 2 = 2 + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$$

3.

3.1. Como o *periélio* é o ponto da órbita da Terra mais próximo do Sol, é nesse ponto que a distância é mínima. Nesse ponto o ângulo x tem amplitude zero radianos, logo a distância mínima, em milhões de quilómetros arredondados às décimas, é:

$$d(0) = 149{,}6(1 - 0{,}0167\cos 0) = 149{,}6(1 - 0{,}0167 \times 1) \approx 147{,}1$$

Analogamente, o ponto da órbita da Terra oposto ao *periélio* será o mais afastado do Sol, e é nesse ponto que a distância é máxima. Nesse ponto o ângulo x tem amplitude π radianos, logo a distância máxima, em milhões de quilómetros arredondados às décimas, é:

$$d(\pi) = 149{,}6(1 - 0{,}0167\cos\pi) = 149{,}6\big(1 - 0{,}0167 \times (-1)\big) \approx 152{,}1$$

3.2.

3.2.1. Se $x = \pi$, da relação $\frac{2\pi t}{T} = x - 0{,}0167\,\mathrm{sen}\,x$ resulta:

$$\frac{2\pi t}{T} = \pi - 0{,}0167\,\mathrm{sen}\,\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi t}{T} = \pi - 0{,}0167 \times 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi t}{T} = \pi \Leftrightarrow t = \frac{\pi \times T}{2\pi} \Leftrightarrow t = \frac{T}{2}$$

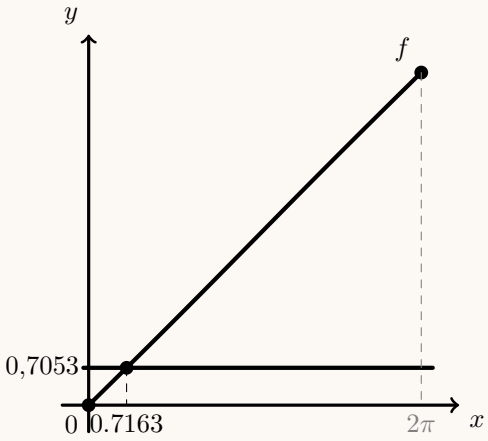
No contexto da situação descrita, quando o ângulo x tem uma amplitude de π radianos, o tempo (t) que decorreu da passagem da Terra pelo *periélio* é metade do tempo (T) que a Terra demora a descrever uma órbita completa.

3.2.2. Como t é o número de dias decorridos após o dia 4 de janeiro (dia da passagem da Terra pelo periélio), o dia 14 de fevereiro, corresponde a $t = 31 + 14 - 4 = 41$.

Como $T = 364{,}24$, temos a amplitude do ângulo x pode ser calculada como:

$$\frac{2\pi t}{T} = x - 0{,}0167\,\text{sen}\,x \Leftrightarrow \frac{2\pi \times 41}{365{,}24} = x - 0{,}0167\,\text{sen}\,x \Leftrightarrow 0{,}7053 = x - 0{,}0167\,\text{sen}\,x$$

Para resolver a equação anterior, representamos na calculadora gráfica a reta definida por $y = 0{,}7053$ e o gráfico da função $f(x) = x - 0{,}0167\,\text{sen}\,x$, numa janela compatível com o domínio da função ($[0{,}2\pi[$). O gráfico visualizado está reproduzido na figura ao lado.



Recorrendo à funcionalidade da calculadora para determinar valores aproximados de pontos de interseção de dois gráficos, obtemos o valor, com quatro casas decimais, de $x \approx 0{,}7163$ para a solução da equação $0{,}7053 = x - 0{,}0167\,\text{sen}\,x$.

Após determinar a amplitude do ângulo correspondente à posição da Terra no dia 14 de fevereiro, resta calcular a distância ao Sol, arredondado o resultado às décimas:

$$d \approx 149{,}6(1 - 0{,}0167\cos(0{,}7163)) \approx 147{,}1$$

Logo, no dia 14 de fevereiro, a Terra encontra-se a uma distância aproximada de 147,1 milhões de quilómetros do Sol.

4. Como f é uma função contínua em $[0,2]$, então a função g (definida nos termos da sugestão) também é contínua em $[0,1]$ porque resulta de operações entre funções contínuas, neste intervalo.

Calculando $g(0)$, vem

$$g(0) = f(0) - f(0+1) = f(0) - f(1) = 0 - f(1) = -f(1)$$

e como $f(1) > 0$, então $-f(1) < 0$, ou seja, $g(0) < 0$

Calculando $g(1)$, vem

$$g(1) = f(1) - f(1+1) = f(1) - f(2) = f(1) - 0 = f(1)$$

e como $f(1) > 0$, então $g(1) > 0$

Logo, como $g(0) < 0 < g(1)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]0,1[$ tal que $g(c) = 0$, e assim vem que,

$$g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - f(c+1) = 0 \Leftrightarrow f(c) = f(c+1)$$

5.

5.1. Recorrendo à Regra de LaPlace para determinar a probabilidade, o número de casos possíveis é o número de grupos que podemos formar com 2 alunos escolhidos de entre os 23, como a ordem é irrelevante, corresponde a ${}^{23}C_2$

Para determinar o número de casos favoráveis, ou seja, o número de pares de alunos em que a soma das idades dos dois alunos seja 12, calculamos a soma do número de grupos relativos a duas situações distintas

- escolhemos 2 alunos de entre os 10 que têm 6 anos, sem considerar relevante a ordenação ($6+6=12$), ou seja ${}^{10}C_2$
- escolhemos um alunos de entre os 4 que têm cinco anos e outro de entre os 9 que têm sete anos ($5+7=12$), ou seja 4×9

Assim, calculando a probabilidade de serem escolhidos dois alunos em que a soma das suas idades é 12, e apresentando o resultado na forma de fração irredutível, temos

$$\frac{{}^{10}C_2 +^4 C_1 \times^9 C_1}{{}^{23}C_2} = \frac{{}^{10}C_2 + 4\times 9}{{}^{23}C_2} = \frac{81}{253}$$

5.2. Como $P(B|A)$ é a probabilidade de, ao selecionar um aluno ao acaso, escolher um rapaz, sabendo que o aluno tem 7 anos, existem 9 casos possíveis, que correspondem ao total de alunos com 7 anos ($2+7=9$).
Como se pretende que o aluno seja um rapaz, o número de casos favoráveis é 2, que corresponde ao número de rapazes com 7 anos.
Assim, recorrendo à Regra de Laplace temos que $P(B|A)=\frac{2}{9}$

6. Relativamente à Opção 1, como todos os alunos da turma têm 16 ou 17 anos ou mais do que 17 anos, vem que $X\cup Y=\Omega$, pelo que $P(X\cup Y)=1$, e assim a afirmação $P(X\cap Y)<1$ é falsa.

Relativamente à Opção 2, temos que os alunos da turma cuja idade é par ou um múltiplo de 4, são exatamente os mesmos cuja idade é par, pelo que $X\cup Y=X$, e assim a afirmação $P(X\cup Y)>P(X)$ é falsa.

Relativamente à Opção 3, como não existem raparigas de 18 anos na turma, vem que $X\cap Y=\emptyset$, pelo que $P(X\cap Y)=0$, e assim a afirmação $P(X\cap Y)>0$ é falsa.

Temos assim que, relativamente à Opção 4, as três afirmações são verdadeiras.

PROVA 635/9 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais

Programa novo implementado em 2005/2006

Duração da prova: 120 minutos
2006

DATA ESPECIAL - Fase 1
(Decreto-Lei n.º 123/96)

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

Grupo I

- Os sete itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra, o item será anulado, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a sua segunda derivada é dada por $f''(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 5)(x + 6)^2$

Quantos pontos de inflexão tem o gráfico de f ?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

2. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{2x} & se \quad x < 0 \\ 2 & se \quad x = 0 \\ \frac{2x+1}{x} & se \quad x > 0 \end{cases}$$

Relativamente à continuidade da função g, no ponto 0, qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) É contínua.

(B) É contínua à esquerda e descontínua à direita.

(C) É contínua à direita e descontínua à esquerda.

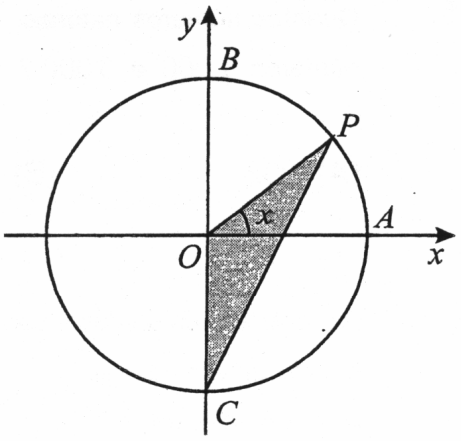
(D) É descontínua à esquerda e à direita.

3. Na figura junta, está representado o círculo trigonométrico.

Os pontos A, B e C têm coordenadas $(1,0)$, $(0,1)$ e $(0,-1)$, respectivamente.

O ponto P desloca-se ao longo do arco AB, nunca coincidindo com o ponto B.

Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude do ângulo AOP, e seja $f(x)$ a área do triângulo $[OPC]$.



Qual das expressões seguintes define a função f ?

(A) $\frac{\operatorname{sen} x}{2}$ **(B)** $\frac{\cos x}{2}$

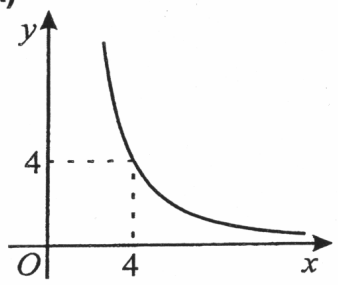
(C) $\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2}$ **(D)** $\frac{\operatorname{sen} x \,.\, \cos x}{2}$

4. Pretende-se construir um prisma quadrangular regular com $64\ cm^3$ de volume.

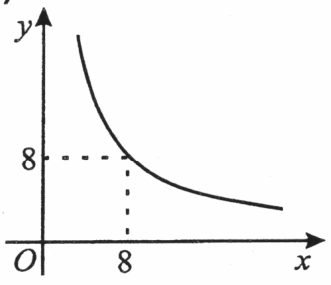
A altura y do prisma, medida em cm, depende do comprimento x da aresta da base, medido igualmente em cm.

Qual dos gráficos seguintes traduz correctamente a relação entre estas duas variáveis?

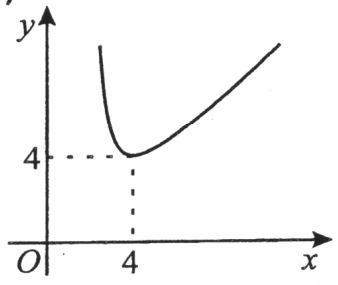
(A)



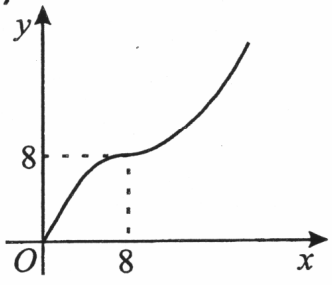
(B)



(C)



(D)



5. Quantos números naturais, escritos com algarismos todos diferentes, existem entre os números $1\,000$ e $3\,000$?

(A) 992 **(B)** 998 **(C)** 1002 **(D)** 1008

6. Um dos termos do desenvolvimento de $(x+2)^5$ é um monómio da forma $k\,x^3$, sendo k um número natural.

Qual é o valor de k ?

(A) 20 **(B)** 30 **(C)** 40 **(D)** 50

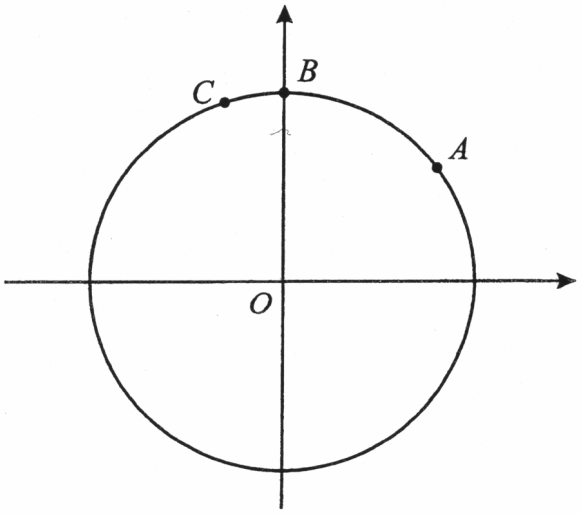
7. Na figura está representada, no plano complexo, uma circunferência centrada na origem do referencial.

Os pontos A, B e C pertencem a essa circunferência.

O ponto A é a imagem geométrica de $4+3\,i$.

O ponto B pertence ao eixo imaginário.

O arco BC tem 18 graus de amplitude.



Em cada uma das quatro alternativas que se seguem, está escrito um número complexo na forma trigonométrica (os argumentos estão expressos em radianos).

Qual deles tem por imagem geométrica o ponto C ?

(A) $7\,cis\,\frac{2\pi}{3}$ **(B)** $7\,cis\,\frac{3\pi}{5}$

(C) $5\,cis\,\frac{2\pi}{3}$ **(D)** $5\,cis\,\frac{3\pi}{5}$

Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

1.1. Considere a equação $i\,z^3 - \sqrt{3} - i = 0$

Uma das soluções desta equação tem a sua imagem geométrica no terceiro quadrante do plano complexo.

Sem recorrer à calculadora, determine essa solução, escrevendo-a na forma trigonométrica.

1.2. Seja B a região do plano complexo definida pela condição

$$|z| \leq 2 \ \wedge \ Re(z) \geq 0 \ \wedge \ |z-1| \leq |z-i|$$

Represente graficamente B e determine a sua área.

2. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln x} & se \ \ 0 < x < 1 \\ x\,e^{2-x} & se \ \ x \geq 1 \end{cases}$

2.1. **Sem recorrer à calculadora**, resolva as três alíneas seguintes:

2.1.1. Estude a função f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico.

2.1.2. Mostre que $\exists\, x \in]4,5[\ : \ f(x) + f(e^{-1}) = 0$

2.1.3. Estude a função f quanto à monotonia, no intervalo $]0,1[$.

2.2. Seja r a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2.

Seja s a recta que passa na origem do referencial e é paralela à recta r.

A recta s intersecta o gráfico de f num ponto.

Utilizando a sua calculadora, determine as coordenadas desse ponto. Apresente os valores arredondados às centésimas. Explique como procedeu, apresentando o gráfico, ou gráficos, obtido(s) na calculadora.

3. Considere a expressão $f(x) = A + B\cos(Cx)$. Sempre que se atribuem valores reais positivos a A, B e C, obtemos uma função de domínio $\mathbb{R}$.

3.1. Prove que $\frac{2\pi}{C}$ é período de qualquer função definida por uma expressão do tipo indicado.

3.2. Num certo rio, existe um ancoradouro para atracagem de barcos. A distância do ancoradouro ao fundo do rio varia com a maré.

Admita que, num certo dia, a distância do ancoradouro ao fundo do rio, x horas depois das zero horas desse dia, pode ser modelada por uma função do tipo $f(x) = A + B\cos(Cx)$, com $x \in [0, 24[$.

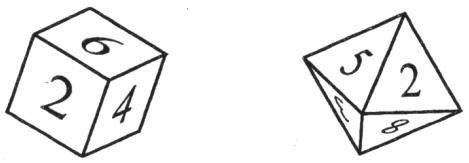
Admita ainda que, no intervalo de tempo $[0, 24[$:

- a distância máxima do ancoradouro ao fundo do rio é de 17 metros, e a mínima é de 11 metros;
- ocorrem apenas duas marés altas, uma às 0 horas e outra às 12 horas;
- ocorrem apenas duas marés baixas, uma às 6 horas e outra às 18 horas.

Justifique que, no modelo $f(x) = A + B\cos(Cx)$, se tem $C = \frac{\pi}{6}$ (tenha em conta a alínea 3.1 e o facto de que não existe nenhum período positivo inferior a $\frac{2\pi}{C}$).

Em seguida, determine os valores de A e B (positivos) adequados ao modelo.

4. A Sofia tem dois dados equilibrados.
Um dos dados é um cubo com as faces numeradas de 1 a 6.
O outro dado é um octaedro com as faces numeradas de 1 a 8.



A Sofia lança os dois dados e observa os números saídos (nas faces que ficam voltadas para cima).

4.1. No âmbito desta experiência, dê um exemplo de dois acontecimentos, A e B, nem impossíveis, nem certos, e tais que $A \neq B$ e $P(A \cap B) = P(A)$.

4.2. Seja X a variável aleatória: *soma dos números saídos*.
Determine $P(X = 5)$. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4.3. Considere os acontecimentos:
C: o produto dos números saídos é 16.
D: os números saídos são iguais.

Sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, indique o valor de $P(C|D)$ e de $P(D|C)$. Numa pequena composição, justifique a sua resposta, começando por explicar o significado das probabilidades pedidas, no contexto da situação descrita.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa 9
Cada resposta errada 0
Cada questão não respondida ou anulada 0

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 11
1.2. 10

2. 56
2.1. 42
2.1.1. 14
2.1.2. 14
2.1.3. 14
2.2. 14

3. 28
3.1. 14
3.2. 14

4. 32
4.1. 10
4.2. 10
4.3. 12

TOTAL **200**

Exame nacional de Matemática A **(2006, Época especial)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Estudando a variação de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f, vem:

x		-6		-1		1	
(x^2-1)	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
(x^2+5)	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x+6)^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$		$\cup$	Pt. Inf.	$\cap$	Pt. Inf.	$\cup$

Pelo que podemos concluir que a função f tem **dois pontos de inflexão**.

Resposta: **Opção B**

2. Para estudar a continuidade da função g no ponto de abcissa zero, temos que comparar os valores de $g(0)$, de $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ e de $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$

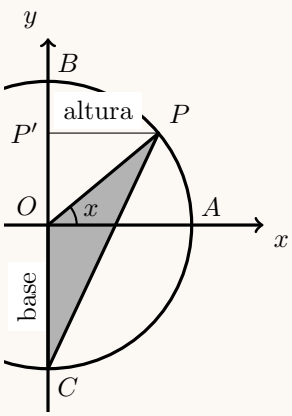
   - $g(0) = 2$
   - $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x+1}{x} = \dfrac{2\times 0^+ + 1}{0^+} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$
   - $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^x-1}{2x} = \dfrac{e^{0^-}-1}{2\times 0^-} = \dfrac{1-1}{0} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

     $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{2}\times\frac{e^x-1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{2}\times\underbrace{\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$$

Como $g(0) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$, então a função g é descontínua à direita de zero e como $g(0) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$, então a função g também é descontínua à esquerda de zero.

Resposta: **Opção D**

3. Considerando o lado $[OC]$ como a base do triângulo ($\overline{OC} = 1$), a altura será o segmento que contém o ponto P e a sua projeção ortogonal (P') sobre a reta OC.



Como $\overline{OP} = 1$, recorrendo à definição de cosseno, vem:

$$\cos x = \frac{\overline{PP'}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{PP'}}{1} \Leftrightarrow \overline{PP'} = \cos x$$

Assim a área do triângulo $[OPC]$ é:

$$A_{[OPC]} = \frac{\overline{OC} \times \overline{PP'}}{2} = \frac{1 \times \cos x}{2} = \frac{\cos x}{2}$$

Resposta: **Opção B**

4. Como o comprimento da aresta da base, em centímetros é x, a área da base, em centímetros quadrados é $x \times x = x^2$
Como a altura do prisma, em centímetros, é y, o volume do prisma, em centímetros cúbicos é $x^2 \times y$

Assim, considerando o volume do prisma igual a 64 cm^3, temos que:

$$x^2 \times y = 64 \Leftrightarrow y = \frac{64}{x^2}$$

Desta forma temos que se $x = 8$, então $y = \frac{64}{8^2} = \frac{64}{64} = 1$, pelo que o ponto de coordenadas (8,8) não pertence ao gráfico da função, e desta forma podemos rejeitar os gráficos das opções (B) e (D).
Temos ainda que, como o volume é constante, se a área da base aumentar indefinidamente, o comprimento da altura deve aproximar-se de zero, ou seja:

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \frac{64}{x^2} = \frac{64}{+\infty} = 0$$

E assim, podemos rejeitar o gráfico da opção (C).

Resposta: **Opção A**

5. O algarismo dos milhares dos números naturais compreendidos entre 1 000 e 3 000 só pode ser 1 ou 2, pelo que existem 2 hipóteses para o algarismo das unidades.
Como os algarismos devem ser todos diferentes, devem ser escolhidos 3 algarismos de entre os 9 que são diferentes do selecionado para o algarismo dos milhares, ou seja, ${}^9A_3$ escolhas diferentes, visto ser relevante a ordenação destes 3 algarismos, por gerarem números diferentes.
Assim, a quantidade de números naturais, escritos com algarismos todos diferentes, compreendidos entre os números 1 000 e 3 000 é:

$$2 \times {}^9A_3 = 1008$$

Resposta: **Opção D**

6. Pela fórmula do binómio de Newton, sabemos que todos os termos do desenvolvimento de $(x+2)^5$ são da forma:

$$^5C_k(x)^{5-k}(2)^k\ ,\ \ k \in \{0,1,...,5\}$$

O termo do desenvolvimento do binómio, obtido para $k=2$, é:

$$^5C_2(x)^{5-2}(2)^2 = 10 \times x^3 \times 2^2 = 10 \times 4 \times x^3 = 40x^3$$

Ou seja, é um monómio da forma kx^3, com $k=40$.

Resposta: **Opção C**

7. Designando por w, z_1 e z_2 os números complexos cujas imagens geométricas são os pontos C, A e B, respetivamente, temos que:

- $|w| = |z_1|$, porque os pontos A e C estão à mesma distância da origem, pelo que:

$$|w| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$$

- Como $18° = 18 \times \frac{\pi}{180} rad = 18 \times \frac{\pi}{18 \times 10} rad = \frac{\pi}{10} rad$, então:

$$\arg(w) = \arg(z_2) + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10} = \frac{5\pi}{10} + \frac{\pi}{10} = \frac{6\pi}{10} = \frac{3\pi}{5}$$

Assim temos que $w = 5\,\mathrm{cis}\,\frac{3\pi}{5}$

Resposta: **Opção D**

GRUPO II

1.

1.1. Resolvendo a equação temos:

$$iz^3 - \sqrt{3} - i = 0 \Leftrightarrow iz^3 = \sqrt{3} + i \Leftrightarrow z^3 = \frac{\sqrt{3}}{i} + \frac{i}{i} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^3 = \frac{i\sqrt{3}}{i^2} + 1 \Leftrightarrow z^3 = -i\sqrt{3} + 1 \Leftrightarrow z^3 = 1 - \sqrt{3}i$$

Escrevendo $1 - \sqrt{3}i$ na f.t. $(z^3 = \rho \operatorname{cis} \theta)$ temos:

- $\rho = |z^3| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$; como $\operatorname{sen}\theta < 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 4º quadrante, logo $\theta = -\frac{\pi}{3}$

Assim $z^3 = 2 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, e por isso, usando a fórmula de Moivre, temos:

$\sqrt[3]{2 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\left(\frac{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3}\right), k \in \{0,1,2\}$, ou seja, temos 3 raízes de índice 3:

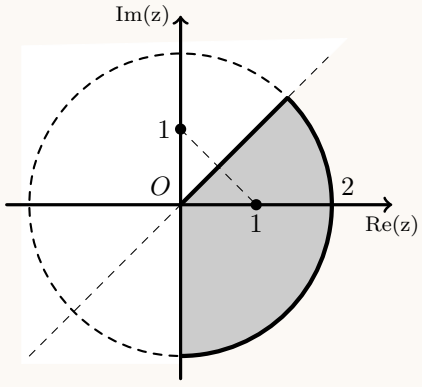
- $k = 0 \rightarrow w_1 = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{9}\right)$
- $k = 1 \rightarrow w_2 = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{9} + \frac{6\pi}{9}\right) = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\frac{5\pi}{9}$
- $k = 2 \rightarrow w_3 = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{9} + \frac{12\pi}{9}\right) = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\frac{11\pi}{9}$

Logo w_3 é a única solução da equação que pertence ao terceiro quadrante, porque $\pi < \frac{11\pi}{9} < \frac{3\pi}{2}$, ou seja $\pi < \arg(w_2) < \frac{3\pi}{2}$.
Logo, a solução da equação que pertence ao 3º quadrante, escrita na fórmula trigonométrica é:

$$w_3 = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\frac{11\pi}{9}$$

1.2. Na figura ao lado está representado, a sombreado, a região B, que é a interseção de três condições:

- $|z| \leq 2$, o interior da circunferência centrada na origem e raio 2
- $\operatorname{Re}(z) \geq 0$, o semiplano à direita do eixo imaginário, ou o conjunto dos pontos com a parte real não nula
- $|z-1| \leq |z-i|$, o semiplano limitado superiormente pela bissetriz dos quadrantes ímpares



A região B pode ser decomposta num quarto do círculo de raio 2 e num setor circular que corresponde a metade de um quarto de círculo, pois é delimitada pela bissetriz dos quadrantes ímpares.

Assim, a área pode ser calculada como:

$$A = \frac{A_\circ}{4} + \frac{\frac{A_\circ}{4}}{2} = \frac{A_\circ}{4} + \frac{A_\circ}{8} = \frac{2 \times A_\circ}{8} + \frac{A_\circ}{8} = \frac{3 \times A_\circ}{8} = \frac{3 \times \pi \times 2^2}{8} = \frac{3 \times 4 \times \pi}{8} = \frac{12\pi}{8} = \frac{3\pi}{2}$$

2.

2.1.

2.1.1. Como a função é contínua no intervalo]0,1[e também no intervalo $[1,+\infty[$, as retas de equação $x=1$ e $x=0$ são as únicas retas verticais que podem ser assíntotas do gráfico de f.
Podemos ainda observar que, como a função está definida para $x=1$, temos que $f(1)$ é um valor finito, e assim, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$, pelo que, se a reta $x=1$ é uma assíntota do gráfico de f, então o comportamento assintótico só está presente quando $x\to 1^-$, pelo que, para averiguar estas hipóteses vamos calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\ln x}=\dfrac{0^+}{\ln(0^+)}=\dfrac{0^+}{-\infty}=0^+$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{\ln x}=\dfrac{1}{\ln(1^-)}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$

E assim concluímos que a reta de equação $x=0$ não é assíntota do gráfico de f, mas a reta $x=1$ é.

Averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de f, de equação $y=mx+b$, quando $x\to+\infty$, vem que:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{2-x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{2-x}=e^{2-(+\infty)}=e^{-\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{2-x}-0\times x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{2-x}\right)=+\infty\times e^{2-\infty}=+\infty\times 0=0$$

Desta forma concluímos que a reta de equação $y=0x+0$, ou seja a reta definida por $y=0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f e como o domínio de f é $\mathbb{R}^+$ podemos concluir que esta é a única assíntota não vertical do gráfico de f

2.1.2. Calculando o valor de $f(e^{-1})$, como $e^{-1}<1$, vem:

$$f(e^{-1})=\frac{e^{-1}}{\ln(e^{-1})}=\frac{e^{-1}}{-1\times\ln e}=\frac{e^{-1}}{-1\times 1}=\frac{e^{-1}}{-1}=-e^{-1}$$

E assim, vem que

$$f(x)+f(e^{-1})=0\ \Leftrightarrow\ f(x)+\left(-e^{-1}\right)=0\ \Leftrightarrow\ f(x)=e^{-1}$$

Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $[1,+\infty[$, é contínua neste intervalo, e também em [4,5], porque $[4,5]\subset[1,+\infty[$

Como $e^{-1}\approx 0{,}37$, $\dfrac{4}{e^2}\approx$, então, $\dfrac{5}{e^3}<e^{-1}<\dfrac{4}{e^2}$, ou seja, $f(5)<0<f(4)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c\in]4,5[$ tal que $f(c)=e^{-1}$, ou seja, que existe, pelo menos, uma solução da equação $f(x)=e^{-1}$ no intervalo]4,5[, ou seja:

$$\exists x\in]4,5[:\ f(x)+f(e^{-1})=0$$

C.A.

$f(4)=4e^{2-4}=4e^{-2}=$

$=\dfrac{4}{e^2}\approx 0{,}54$

$f(5)=5e^{2-5}=5e^{-3}=$

$=\dfrac{5}{e^3}\approx 0{,}25$

2.1.3. Começamos por determinar a expressão da derivada, para $x \in]0,1[$:

$$\left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{(x)'\ln x - x(\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{1 \times \ln x - x\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

Calculando os zeros da derivada, no intervalo $]0,1[$, temos:

$$\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \wedge \ln^2 x \neq 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \wedge \ln x \neq 0 \Leftrightarrow x = e \wedge x \neq 1$$

Como $x \in]0,1[$ e $e > 1$, concluímos que $f'(x)$ não tem qualquer zero neste intervalo.
Assim, como no intervalo $]0,1[$, $\ln(x) < 0$ temos que $\ln x - 1 < 0$, e como $\ln^2(x) > 0$ (no mesmo intervalo), temos que:

$$f'(x) < 0,\ \forall x \in]0,1[$$

pelo que a função f é estritamente decrescente neste intervalo.

2.2. Determinado a expressão da derivada, para $x > 1$, temos:

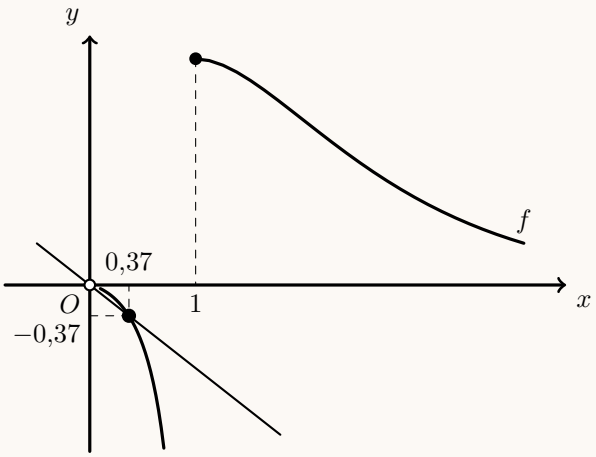
$$\left(xe^{2-x}\right)' = (x)'e^{2-x} + x\left(e^{2-x}\right)' = e^{2-x} + x(2-x)'e^{2-x} = e^{2-x} + x(-1)e^{2-x} = e^{2-x} - xe^{2-x} = e^{2-x}(1-x)$$

O declive da reta r pode ser calculado como:

$$m_r = f'(2) = e^{2-2}(1-2) = e^0(-1) = -1$$

Como a reta s é paralela à reta r, e tem a ordenada na origem igual a zero, a equação da reta s é: $y = -x$

Traçando a reta s e o gráfico da função f numa janela compatível com o domínio da função e que permita visualizar o ponto de interseção obtemos o gráfico reproduzido na figura ao lado.



Depois, recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados para as coordenadas de um ponto de interseção dos gráficos de duas funções, encontramos as coordenadas do ponto, arredondadas às centésimas $(0{,}37, -0{,}37)$

3.

3.1. Como o período de uma função trigonométrica pode ser calculado como a diferença das abcissas de dois maximizantes consecutivos, começamos por determinar a derivada da função:

$$f'(x) = \big(A + B\cos(Cx)\big)' = (A)' + B\big(\cos(Cx)\big)' = 0 + B(Cx)'(-\operatorname{sen}(Cx)) = -BC\operatorname{sen}(Cx)$$

Calculando os zeros da derivada temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -BC\operatorname{sen}(Cx) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(Cx) = 0 \Leftrightarrow Cx = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{C}, k \in \mathbb{Z}$$

Assim, como todos os zeros de f' estão associados a uma mudança de sinal, para cada valor de k verificamos a existência de um maximizante, ou de um minimizante.
Como os maximizantes e os minimizantes ocorrem alternadamente, se um valor de k gera um maximizante, $k+1$ gera um minimizante e $k+2$ gera outro maximizante.
Logo, para k e $k+2$ temos dois maximizantes (ou minimizantes) consecutivos, pelo que o período da função pode ser calculado como:

$$\frac{(k+2)\pi}{C} - \frac{k\pi}{C} = \frac{(k+2)\pi - k\pi}{C} = \frac{k\pi + 2\pi - k\pi}{C} = \frac{2\pi}{C}$$

3.2. Como o período da função é a diferença entre dois maximizantes consecutivos, e a distância do ancoradouro ao fundo do rio ocorre a cada maré alta, o período desta função é $12 - 0 = 12$.
Por outro lado, como o período desta função é $\frac{2\pi}{C}$ temos que:

$$\frac{2\pi}{C} = 12 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{12} = C \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} = C$$

Assim temos que a função a função é do tipo $f(x) = A + B\cos\left(\frac{\pi}{6} \times x\right)$
Como a distância ao fundo do rio era máxima às zero horas, e a distância máxima foi de 17 metros, temos que

$$f(0) = 17 \Leftrightarrow A + B\cos\left(\frac{\pi}{6} \times 0\right) = 17 \Leftrightarrow A + B\cos(0) = 17 \Leftrightarrow A + B \times 1 = 17 \Leftrightarrow A + B = 17$$

Por outro lado, como a distância era mínima às 6 horas, e o mínimo da função é 11, temos:

$$f(6) = 11 \Leftrightarrow A + B\cos\left(\frac{\pi}{6} \times 6\right) = 11 \Leftrightarrow A + B\cos(\pi) = 11 \Leftrightarrow A + B \times (-1) = 11 \Leftrightarrow A - B = 11$$

Logo, temos que

$$\begin{cases} A + B = 17 \\ A - B = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11 + B + B = 17 \\ A = 11 + B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2B = 17 - 11 \\ A = 11 + B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{6}{2} \\ A = 11 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 3 \\ A = 14 \end{cases}$$

Pelo que, os valores dos parâmetros adequados ao modelo são $A = 14$, $B = 3$ e $C = \frac{\pi}{6}$

4.

4.1. Como se pretende que $P(A \cap B) = P(A)$, então $A \cap B = A$, ou seja $A \subset B$

No âmbito da experiência descrita, podemos definir os acontecimentos, nem impossíveis nem certos, tais que $A \neq B$ e $P(A \cap B) = P(A)$:

- A: O produto dos dois números saídos é 48
- B: O produto dos dois números saídos é um número par

4.2. Como o dado cúbico tem 6 faces e o dado octaédrico tem 8 faces, podemos fazer $6 \times 8 = 48$ pares de faces, equiprováveis, usando uma face de cada dado.

Destas 48, apenas 4 correspondem a pares com soma 5:

Dado cúbico	1	2	3	4
Dado octaédrico	4	3	2	1
Soma	5	5	5	5

Assim,

$$P(X = 5) = \frac{4}{48} = \frac{1}{12}$$

4.3. No contexto da situação descrita, $P(C|D)$ é a probabilidade de saírem números cujo produto é 16, sabendo que são números iguais.
Analogamente, $P(D|C)$ é a probabilidade de saírem números iguais, sabendo que o produto desses números é 16.

Para determinar $P(C|D)$, temos que o número de casos possíveis é 6, porque como um dos dados está numerado de 1 a 6 (e também existem estes números no outro dado), existem 6 pares de números iguais. Destes apenas 1 resulta num produto 16, o que acontece quando ambos os números são quatro ($4 \times 4 = 16$), e assim, recorrendo à Regra de Laplace temos que

$$P(D|C) = \frac{1}{6}$$

Para determinar $P(D|C)$, observamos que o número de casos possíveis é 2, porque como 16 é múltiplo de 2, 4 e 8, só é possível obter um produto igual a 16 em duas combinações ($4 \times 4 = 16$ e $2 \times 8 = 16$). Como destas duas apenas uma resulta do produto de números iguais ($4 \times 4 = 16$), recorrendo à Regra de Laplace temos que

$$P(C|D) = \frac{1}{2}$$

2007

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade

(Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto – Programas novos e Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)

Duração da prova: 150 minutos **1.ª FASE**

2007

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA A / MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implica a anulação de todos os itens de escolha múltipla.

Identifique claramente os grupos e os itens a que responde.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta (excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações).

É interdito o uso de «esferográfica-lápis» e de corrector.

As cotações da prova encontram-se na página 11.

A prova inclui um formulário na página 3.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r \quad (\alpha - \textit{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;}\ \ r - \textit{raio})$

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ $(\alpha - \textit{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;}\ \ r - \textit{raio})$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - \textit{raio da base};\ g - \textit{geratriz})$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - \textit{raio})$

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3 \qquad (r - \textit{raio})$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u' . v + u \,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' . v - u \,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \,.\, u^{n-1} \,.\, u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' . \cos u$

$(\cos u)' = -u' . \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' . e^u$

$(a^u)' = u' . a^u . \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \,.\, \ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

Grupo I

- Os sete itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada item.
- Se apresentar mais do que uma letra, a resposta será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Identifique o valor de $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{4-x^2}$

(A) 0 **(B)** 1

(C) $+\infty$ **(D)** $-\infty$

2. Sabendo que:

$\ln(x) - \ln(e^{\frac{1}{3}}) > 0$ (ln designa logaritmo na base e),

um valor possível para x é:

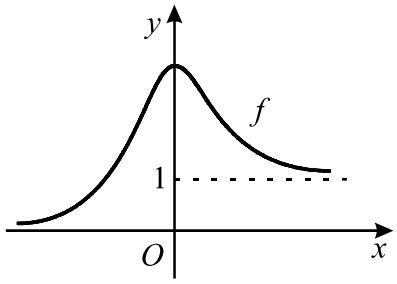
(A) 0

(B) -1

(C) 1

(D) 2

3. Na figura está parte da representação gráfica de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$.



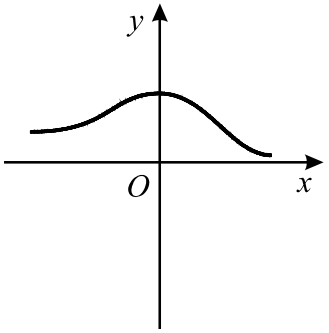
Tal como a figura sugere, o eixo Ox e a recta de equação $y = 1$ são assimptotas do gráfico de f.

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \ln[f(x)]$

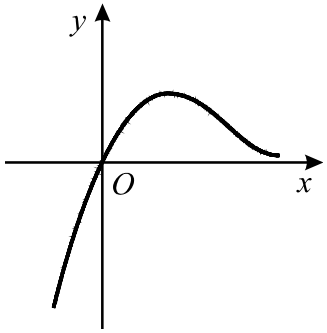
Numa das opções seguintes está parte da representação gráfica da função g.

Em qual delas?

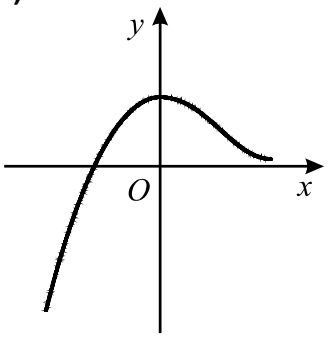
(A)



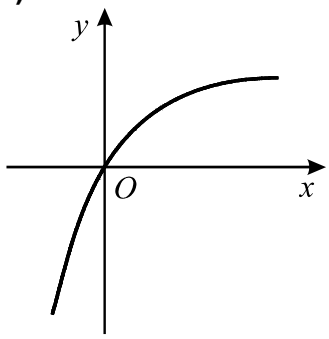
(B)



(C)



(D)



4. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que 3 é um zero da função f.

Seja g a função definida por $g(x) = f(x-1) + 4$, para qualquer número real x.

Qual dos seguintes pontos pertence garantidamente ao gráfico da função g ?

(A) $(2, 4)$ **(B)** $(4, 4)$ **(C)** $(4, 8)$ **(D)** $(1, 7)$

5. Escolhem-se, ao acaso, dois vértices diferentes de um paralelepípedo rectângulo.

Qual é a probabilidade de que esses dois vértices sejam extremos de uma aresta?

(A) $\frac{12}{{}^{8}C_{2}}$ **(B)** $\frac{12}{8^2}$ **(C)** $\frac{8}{{}^{8}C_{2}}$ **(D)** $\frac{8}{{}^{8}A_{2}}$

6. As cinco letras da palavra TIMOR foram pintadas, cada uma em sua bola.

As cinco bolas, indistinguíveis ao tacto, foram introduzidas num saco.

Extraem-se, aleatoriamente, as bolas do saco, sem reposição, e colocam-se em fila, da esquerda para a direita.

Qual é a probabilidade de que, no final do processo, fique formada a palavra TIMOR, sabendo-se que, ao fim da terceira extracção, estava formada a sucessão de letras TIM?

(A) 0 **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** 1

7. Qual das opções seguintes apresenta duas raízes quadradas de um mesmo número complexo?

(A) 1 e i **(B)** -1 e i

(C) $1-i$ e $1+i$ **(D)** $1-i$ e $-1+i$

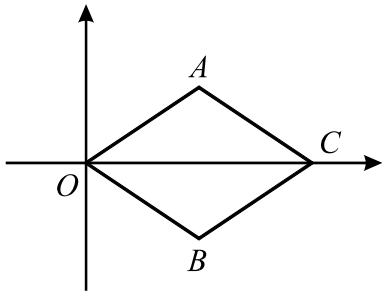
Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: Quando não é pedida a aproximação de um resultado, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \operatorname{cis}\alpha \quad \left(\alpha \in \left]\, 0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

1.1. Na figura está representado, no plano complexo, o paralelogramo $[AOBC]$



A e B são as imagens geométricas de z e $\overline{z}$, respectivamente.
C é a imagem geométrica de um número complexo, w.
Justifique que $w = 2\cos\alpha$

1.2. Determine o valor de $\alpha \in \left]\, 0, \frac{\pi}{2}\right[$ para o qual $\frac{z^3}{i}$ é um número real.

2. Considere todos os números de três algarismos que se podem formar com os algarismos
$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9.

2.1. Escolhe-se, ao acaso, um desses números.

Sejam os acontecimentos:
A : «O número escolhido é múltiplo de 5»;
B : «O número escolhido tem os algarismos todos diferentes».

Averigúe se A e B são, ou não, acontecimentos independentes.

2.2. Considere o seguinte problema:

De entre todos os números de três algarismos diferentes que se podem formar com os algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ *e* 9*, em quantos deles o produto dos seus algarismos é um número par?*
Uma resposta correcta a este problema é: ${}^{9}A_3 - {}^{5}A_3$.

Numa pequena composição explique porquê.

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A, B e C três acontecimentos $(A \subset \Omega, \quad B \subset \Omega \quad \text{e} \quad C \subset \Omega)$ tais que $(A \cup B) \cap C = \emptyset$.

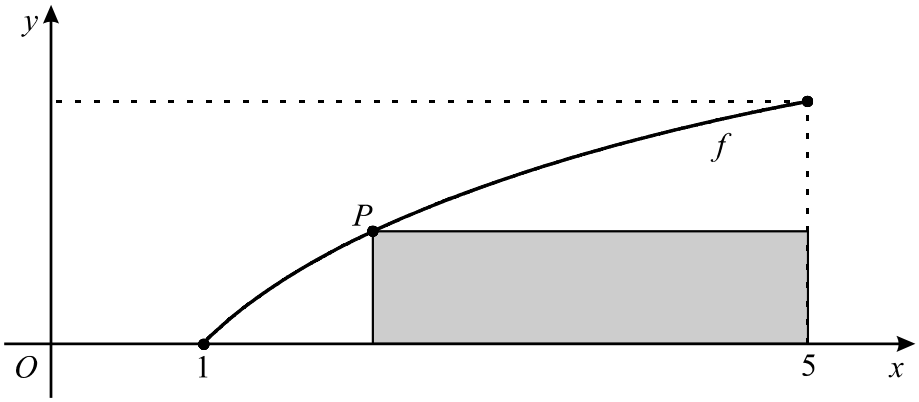
Sabe-se que $P(A) = 0{,}21$ e que $P(C) = 0{,}47$.

Calcule $P(A \cup C)$, utilizando as propriedades das operações com conjuntos e a axiomática das probabilidades.

4. Seja f a função, de domínio $[1, 5]$, definida por $f(x) = \ln x$

($\ln$ designa logaritmo na base e)

Na figura está representado, em referencial ortonormado xOy, o gráfico da função f.



Considere que um ponto P se desloca ao longo do gráfico de f. Para cada posição do ponto P, considere o rectângulo em que um dos lados está contido no eixo Ox, outro na recta de equação $x = 5$ e os outros dois nas rectas vertical e horizontal que passam pelo ponto P.

Exprima a área do rectângulo em função da abcissa de P, e, recorrendo à calculadora gráfica, determine a abcissa de P (aproximada às centésimas) para a qual a área do rectângulo é máxima. Apresente os elementos recolhidos na utilização da calculadora:

– o gráfico obtido;

– o ponto de ordenada máxima e respectivas coordenadas.

5. Considere as funções f e g, definidas em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = e^{x-1} \quad \text{e} \quad g(x) = \operatorname{sen} x$$

Considere ainda a função h, definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = f'(x) - g'(x)$

Sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva os dois itens seguintes:

5.1. Mostre que a função h tem, pelo menos, um zero no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

5.2. Tendo em conta **5.1.**, justifique que existe $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que as rectas tangentes aos gráficos de f e g, nos pontos de abcissa a, são paralelas.

6. Admita que a intensidade da luz solar, x metros abaixo da superfície da água, é dada, numa certa unidade de medida, por

$$I(x) = a\, e^{-b\, x} \qquad (\, x \geq 0\,)$$

a e b são constantes positivas que dependem do instante e do local onde é efectuada a medição.
Sempre que se atribui um valor a a e um valor a b, obtemos uma função de domínio $\mathbb{R}_0^+$.

6.1. Medições efectuadas, num certo instante e em determinado local do oceano Atlântico, mostraram que, a 20 metros de profundidade, a intensidade da luz solar era metade da sua intensidade à superfície da água.
Determine o valor de b para esse instante e local. Apresente o resultado arredondado às centésimas.

6.2. Considere agora $b = 0{,}05$ e $a = 10$.
Estude essa função quanto à monotonia e existência de assimptotas do seu gráfico.
Interprete os resultados obtidos no contexto da situação descrita.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I .....(7 x 9 pontos)..... **63 pontos**

Cada resposta certa ..... 9 pontos
Cada resposta errada..... 0 pontos
Cada questão não respondida ou anulada ..... 0 pontos

Grupo II .....**137 pontos**

1. ..... 21 pontos

1.1. .....11 pontos

1.2. .....10 pontos

2. ..... 22 pontos

2.1. .....10 pontos

2.2. .....12 pontos

3. ..... 10 pontos

4. ..... 18 pontos

5. ..... 34 pontos

5.1. .....16 pontos

5.2. .....18 pontos

6. ..... 32 pontos

6.1. .....16 pontos

6.2. .....16 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade

(Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto – Programas novos e Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)

Duração da prova: 150 minutos **1.ª FASE**

2007

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA A / MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I ..... (7 x 9 pontos)..... **63 pontos**

Cada resposta certa ..... 9 pontos
Cada resposta errada..... 0 pontos
Cada questão não respondida ou anulada ..... 0 pontos

Grupo II ..... **137 pontos**

1. ..... 21 pontos

1.1. ..... 11 pontos
1.2. ..... 10 pontos

2. ..... 22 pontos

2.1. ..... 10 pontos
2.2. ..... 12 pontos

3. ..... 10 pontos

4. ..... 18 pontos

5. ..... 34 pontos

5.1. ..... 16 pontos
5.2. ..... 18 pontos

6. ..... 32 pontos

6.1. ..... 16 pontos
6.2. ..... 16 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

A ausência de indicação da versão da prova implica a anulação de todos os itens de escolha múltipla.
Devem ser anulados todos os itens com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todos os itens em que o examinando dê mais do que uma resposta.

Grupo II

1. Se o examinando se enganar na identificação do item a que está a responder, ou se a omitir, mas, pela resolução apresentada, for possível identificá-lo inequivocamente, a resposta deve ser vista e classificada.

2. Se o examinando apresentar mais do que uma resposta a um item, e não indicar, de forma inequívoca, a que pretende que seja classificada, deve ser vista e classificada apenas a que se encontra em primeiro lugar, na folha de resposta.

3. As classificações a atribuir às respostas dos examinandos são expressas, obrigatoriamente, em números inteiros.

4. Num item em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, a classificação a atribuir à resposta deve estar de acordo com os seguintes critérios:
- Se o examinando se limitar a apresentar o resultado final, a classificação deve ser de zero pontos.
- Se o examinando não se limitar a apresentar o resultado final, a classificação deve ser a soma algébrica das classificações atribuídas a cada etapa, de acordo com o disposto nos pontos 6, 7, 8, 9, 10 e 11 destes critérios gerais. Se a soma for negativa, a classificação a atribuir é de zero pontos.

5. Alguns itens da prova podem ser correctamente resolvidos por mais do que um processo. Sempre que o examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nos critérios específicos, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas. Salienta-se que deve ser aceite qualquer processo cientificamente correcto, mesmo que envolva conhecimentos não contemplados no Programa da disciplina.

6. A cotação de cada item está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para o resolver.

6.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.

6.2. O classificador não pode subdividir, em cotações parcelares, a cotação atribuída a cada etapa.
Caso uma etapa envolva um único passo, testando apenas o conhecimento de um só conceito ou propriedade, e a sua resolução não esteja completamente correcta, deve ser atribuída a classificação de zero pontos.
Caso uma etapa envolva mais do que um passo (por exemplo, o cálculo da derivada de uma função, a resolução de uma equação, a obtenção de uma expressão em função de uma variável, etc.) e a sua resolução esteja incompleta, ou contenha incorrecções, a classificação a atribuir deve estar de acordo com o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:

- erros de contas ocasionais devem ser desvalorizados em um ponto;
- erros que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades devem ser desvalorizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa;
- transposições erradas de dados do enunciado devem ser desvalorizadas em um ponto, desde que o grau de dificuldade da etapa não diminua;
- transposições erradas de dados do enunciado devem ser desvalorizadas em, pelo menos, metade da cotação da etapa, caso o grau de dificuldade da etapa diminua.

6.3. Nas etapas cuja cotação se encontra discriminada por níveis de desempenho, o classificador deve enquadrar a resposta do examinando numa das descrições apresentadas. O classificador não pode atribuir uma cotação diferente das indicadas.

6.4. No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva classificação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.

6.5. Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a classificação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a classificação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.

6.6. Pode acontecer que o examinando, ao resolver um item, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios específicos. Todas as etapas não percorridas explicitamente pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam inequivocamente implícitos na resolução do item, devem receber a cotação indicada.

7. Quando, num item, é pedida uma forma específica de apresentação do resultado final (por exemplo, «em minutos», «em percentagem», etc.), este deve ser apresentado na forma pedida. Se o resultado final apresentado pelo examinando não respeitar a forma pedida no enunciado (por exemplo, se o enunciado pedir o resultado em minutos, e o examinando o apresentar em horas), devem ser atribuídos zero pontos à etapa correspondente ao resultado final. No entanto, a resposta não deve ser desvalorizada caso o examinando não indique a unidade em que é pedido o resultado (por exemplo, se o resultado final for 12 minutos, ou 12 metros, e o examinando escrever simplesmente 12, não se deve aplicar nenhuma desvalorização). Se não for pedido um resultado final com aproximação, o examinando deve apresentar o valor exacto. Se o examinando apresentar, como resultado final, uma aproximação do valor exacto, deve ser aplicada uma desvalorização de 1 ponto na etapa correspondente ao resultado final.

8. O examinando deve respeitar sempre a instrução relativa à apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações. Se, numa etapa, o examinando não respeitar esta instrução, apresentando algo (valor, quadro, tabela, gráfico, etc.) que não resulte de trabalho anterior, deve ser atribuída a cotação de zero pontos a essa etapa. Todas as etapas subsequentes que dela dependam devem ser igualmente classificadas com zero pontos.

9. O examinando deve respeitar sempre qualquer instrução relativa ao método a utilizar na resolução de um item (por exemplo, «sem recorrer à calculadora», «equacione o problema», «resolva graficamente», etc.). Na resolução apresentada pelo examinando, deve ser inequívoco, pela apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações, o cumprimento da instrução. Se tal não acontecer, considera-se que o examinando não respeitou a instrução. A etapa em que se dá o desrespeito e todas as subsequentes que dela dependam devem ser classificadas com zero pontos.

10. Se, na resolução de um item, o examinando utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), a classificação total a atribuir à resposta deve ser reduzida em um ponto. Esta desvalorização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas classificadas com zero pontos, nem a eventuais utilizações do símbolo de igualdade, onde, em rigor, deveria estar o símbolo de igualdade aproximada.

11. Existem itens em cujo enunciado é dada uma instrução relativa ao número mínimo de casas decimais que o examinando deve conservar sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos. Indicam-se, a seguir, as desvalorizações a aplicar, na classificação total a atribuir à resposta, em caso de desrespeito dessa instrução e/ou de arredondamentos mal efectuados.

Todos os valores intermédios estão de acordo com a instrução, mas existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado..... -1 ponto

Todos os valores intermédios estão bem arredondados, mas existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução..... -1 ponto

Existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado e existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução ..... -2 pontos

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Cada resposta certa ..... 9 pontos
Cada resposta errada..... 0 pontos
Cada questão não respondida ou anulada ..... 0 pontos

As respostas correctas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	D	D	C	B	A	C	D
Versão 2	C	C	A	D	B	A	B

Grupo II

1.1. 11

Apresenta-se a seguir um exemplo de resposta:

Utilizando a regra do paralelogramo pode concluir-se que $w = z + \overline{z}$.
Recorrendo à representação trigonométrica de z *e* $\overline{z}$, *resulta que*
$z + \overline{z} = cis(\alpha) + cis(\text{-}\alpha) = 2\cos\alpha$.

A classificação deve ser atribuída de acordo com o seguinte critério:

Utilizar a regra do paralelogramo para concluir que $w = z + \overline{z}$ 6

Somar z com $\overline{z}$ para obter o resultado pedido 5

Nota:

Uma alternativa consiste em começar por concluir que $z + \overline{z}$ = $2\cos\alpha$, e utilizar argumentos geométricos para concluir que a «abcissa de C» = $2\cos\alpha$.
Se forem percorridas estas etapas, a cotação deve ser atribuída de acordo com o seguinte critério:

Calcular $z + \overline{z}$ e obter $z + \overline{z}$ = $2\cos\alpha$.....5

Utilizar argumentos geométricos para concluir que a «abcissa» de C = $2\cos\alpha$.....6

1.2. 10

Imposição que $\frac{z^3}{i}$ seja real **(ver nota)** e respectiva tradução analítica 6

Esta cotação deve ser distribuída de acordo com as seguintes etapas:

escrever $z^3 = cis(3\alpha)$ 2

escrever $\frac{z^3}{i} = cis\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ 2

escrever $3\alpha - \frac{\pi}{2} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ 2

Resolução da equação 2

Aceitação da única solução $\left(\alpha = \frac{\pi}{6}\right)$, de acordo com a restrição indicada no enunciado 2

Nota:

Uma alternativa consiste em impor que o número z^3 seja um imaginário puro, que conduz directamente a $3\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, omitindo a etapa intermédia $\left(\frac{z^3}{i} = cis\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right)$ da resolução anterior. Em conformidade, as cotações desta etapa e da seguinte (da resolução anterior) devem fundir-se numa cotação única de 4 (quatro) pontos, associada à escrita da equação $3\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

2.1. 10

Existem três possibilidades para a resolução deste item: **(ver nota 1)**

Provar que $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ **(ver nota 2)** 10

Provar que $P(A \mid B) = P(A)$, notando que $P(B) \neq 0$ **(ver nota 3)** 10

Provar que $P(B \mid A) = P(B)$, notando que $P(A) \neq 0$ **(ver nota 4)** 10

Notas:

1. As segunda e terceira hipóteses podem ainda desdobrar-se no cálculo de $P(A \cap B)$ e na utilização da fórmula da probabilidade condicionada. Se essa for a escolha do examinando, as sucessivas etapas têm a mesma cotação (2 pontos) das etapas idênticas referidas na primeira hipótese. Se o examinando não referir o facto do não anulamento de $P(A)$ $\left(P(B)\right)$, a resposta deve ser desvalorizada em 1 ponto.

2. Se o examinando escolher esta possibilidade, a classificação deve ser distribuída de acordo com o seguinte critério:

Indicar correctamente o número de casos possíveis no contexto do espaço de resultados associado ao problema (9^3, ou equivalente)..... 2

Indicar correctamente o número de casos favoráveis associado à probabilidade de $A \cap B$ $\left({}^8A_2\text{, ou equivalente}\right)$ 2

Indicar correctamente o número de casos favoráveis associado à probabilidade de A $\left(9^2\text{, ou equivalente}\right)$ 2

Indicar correctamente o número de casos favoráveis associado à probabilidade de B $\left({}^9A_3\text{, ou equivalente}\right)$ 2

Concluir que $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ 2

3. Se o examinando escolher esta possibilidade, a classificação deve ser distribuída de acordo com os seguintes critérios:

Indicar correctamente o número de casos possíveis associado à probabilidade de $A\,dado\,B$ $\left({}^9A_3\text{, ou equivalente}\right)$..... 2

Indicar correctamente o número de casos favoráveis associado à probabilidade de $A\,dado\,B$ $\left({}^8A_2\text{, ou equivalente}\right)$ 2

Indicar correctamente o número de casos possíveis e favoráveis associado à probabilidade de A $\left(9^3 \text{ e } 9^2\text{, ou equivalente, respectivamente}\right)$..... (1+2) 3

Referência ao facto de ser $P(B) \neq 0$ 1

Concluir que $P(A \mid B) = P(A)$ 2

4. Se o examinando escolher esta possibilidade, a classificação deve ser distribuída de acordo com os seguintes critérios:

Indicar correctamente o número de casos possíveis associado à probabilidade de $B\,dado\,A$ $\left(9^2\text{, ou equivalente}\right)$ 2

Indicar correctamente o número de casos favoráveis associado à probabilidade de $B\ dado\ A$ $\left({}^8A_2\text{, ou equivalente}\right)$ 2

Indicar correctamente o número de casos possíveis e favoráveis associado à probabilidade de B $\left(9^3 \text{ e } {}^9A_3\text{, ou equivalente, respectivamente}\right)$..... (1+2) 3

Referência ao facto de ser $P(A) \neq 0$ 1

Concluir que $P(B \mid A) = P(B)$ 2

2.2. 12

Para que a composição possa ser considerada completa deverá contemplar **explicitamente** os seguintes pontos:

- referência a quantos números de três algarismos diferentes *se podem formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9;*
- referência a quantos destes números, de três algarismos diferentes, são formados por algarismos ímpares;
- o reconhecimento de que o resultado final é a diferença destas duas quantidades.

A classificação deve ser atribuída de acordo com o seguinte critério:

A composição contempla os três pontos 12

A composição contempla dois pontos 8

A composição contempla um ponto 4

3. 10

O examinando deduz de $(A \cup B) \cap C = \emptyset$ que $A \cap C = \emptyset$
(ver nota 1)..... 6

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ 3

Concluir que $A \cap C = \emptyset$ 3

O examinando menciona o resultado anterior $(A \cap C = \emptyset)$ para escrever $P(A \cup C) = P(A) + P(C)$ e efectua o respectivo cálculo
(ver nota 2)..... 4

Notas:

1. O examinando pode justifcar que $A \cap C = \emptyset$ sem utilizar a propriedade distributiva, argumentando, por exemplo, que, se $A \cup B$ não tem elementos comuns com C, o mesmo se passa com A.

2. Se o examinando não mencionar o resultado anterior, a classificação a atribuir a esta etapa deve ser de 2 pontos.

4. 18

Expressão da função que dá a área do rectângulo 6

Valor pedido **(ver nota 1)** 6

Elementos recolhidos na utilização da calculadora **(ver nota 2)**..... 6

Notas:

1. A escrita do valor pedido deve ser classificada de acordo com o seguinte critério:

1.º Caso (apresentação do resultado com duas casas decimais, de acordo com o enunciado):

Resposta $2{,}57$ 6

Resposta $2{,}56$ ou $2{,}58$ 4

Resposta $2{,}55$ ou $2{,}59$ 2

Resposta $2{,}54$ ou $2{,}60$ 1

Outros resultados 0

2.º Caso (apresentação do resultado com mais de duas casas decimais):

Valor no intervalo $[2{,}570\ ;\ 2{,}573]$ 4

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[2{,}560\ ;\ 2{,}580]$ 3

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[2{,}550\ ;\ 2{,}590]$ 1

Outros resultados 0

3.º Caso (apresentação do resultado arredondado às décimas):

Valor igual a $2{,}6$ 1

Outros resultados 0

4.º Caso (apresentação do resultado arredondado às unidades):

Qualquer resultado 0

2. Os 6 pontos relativos à apresentação dos elementos recolhidos na utilização da calculadora devem ser atribuídos de acordo com os seguintes critérios:

Apresentação correcta do gráfico da função, no seu domínio $[1, 5]$, bem como do ponto de ordenada máxima*	6
Apresentação do gráfico, bem como do ponto de ordenada máxima*, mas o gráfico não respeita o domínio $[1, 5]$ (por exemplo, contém pontos de ordenada negativa)	4
Apresentação correcta do gráfico da função, no seu domínio $[1, 5]$, mas o ponto de ordenada máxima* não está devidamente assinalado	3
Apresentação do gráfico, mas este não respeita o domínio $[1, 5]$ e o ponto de ordenada máxima* não está devidamente assinalado	1
Ausência de explicação, simples referências do tipo «*Vi na calculadora*» ou utilização de processo não gráfico, como, por exemplo, uma tabela	0

* Considera-se correcta a apresentação de um ponto concordante com o valor da abcissa analisado na nota 1.

5.1. 16

Calcular $f'(x) = e^{x-1}$	2
Calcular $g'(x) = \cos x$	2
Calcular $h(0)$	2
Calcular $h(\frac{\pi}{2})$	2
Referir que h é uma função contínua	3
Recorrer ao Teorema de Bolzano para justificar a existência de, pelo menos, um zero de h no interior do intervalo considerado **(ver nota)**	5

Nota: Se o examinando concluir o pretendido, mas não referir que tal conclusão resulta do Teorema de Bolzano, a classificação a atribuir a esta etapa deverá ser de 3 pontos.

5.2. 18

Apresenta-se a seguir um exemplo de resposta:
Do item anterior resulta que existe, pelo menos, um ponto a entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ tal que $h(a) = 0$, ou seja, $f'(a) = g'(a)$. Ora, como a derivada de uma função diferenciável num ponto é igual ao declive da recta tangente ao gráfico da função nesse ponto, então existe um ponto onde as rectas tangentes aos gráficos de f e g têm o mesmo declive, ou seja, são paralelas.

Tal como o exemplo atrás ilustra, o examinando deve:

Reconhecer que a derivada num ponto, para uma função diferenciável, é igual ao declive da recta tangente ao gráfico da função nesse ponto e identificar as funções f e g como funções diferenciáveis em $\left]0\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$.
Caso o examinando já tenha calculado as derivadas de f e de g no item anterior, esta identificação está implícita nessa resposta..... 8

Notar que a alínea anterior, invocada como resultado, implica a existência de um ponto a, no intervalo $\left]0\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$, tal que $f'(a) = g'(a)$ 6

Concluir que nesse ponto a, sendo os declives das tangentes aos gráficos iguais, essas tangentes são paralelas 4

6.1. 16

Cálculo do valor de $I(0)$, em função de a e de b..... 4

Cálculo do valor de $I(20)$, em função de a e de b..... 4

Escrever a equação que relaciona $I(20)$ com $I(0)$..... 3

Cálculo do valor numérico de b, apresentando o seu valor arredondado às centésimas..... 5

6.2. 16

Determinar $I'(x)$..... 2

Estudar o sinal de $I'(x)$..... 2

Concluir que a função I é monótona decrescente..... 1

Referir, justificando, que o gráfico de I não admite assimptotas verticais..... 2

Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x)$ 2

Identificação da recta de equação $y = 0$ como assimptota horizontal do gráfico de I..... 2

Reconhecimento de que, à medida que a luz vai penetrando em maior profundidade na água, vai perdendo intensidade 3

Mencionar que, quando a profundidade aumenta indefinidamente, a intensidade da luz tende para zero 2

Exame nacional de Matemática A **(2007, 1.ª fase)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Calculando o valor do limite, temos:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{4-x^2} = \frac{\lim\limits_{x\to 2^+} 1}{\lim\limits_{x\to 2^+} (4-x^2)} = \frac{1}{4-(2^+)^2} = \frac{1}{4-4^+} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Resposta: **Opção D**

2. Resolvendo a inequação temos que:

$$\ln(x) - \ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > \ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right) \Leftrightarrow x > e^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x > \sqrt[3]{e}$$

Como $\sqrt[3]{e} \approx 1{,}4$, temos que, de entre as opções apresentadas, o único valor possível para x é 2

Resposta: **Opção D**

3. Por observação do gráfico, e como o eixo Ox é assíntota do gráfico de f, temos que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$

Pelo que:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln(f(x)) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(0^+\right) = -\infty \ (1)$$

Da mesma forma, como a reta de equação $y = 1$ é assíntota do gráfico de f, e pela observação do gráfico, podemos constatar que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1^+$

E assim:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(f(x)) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1^+\right) = 0^+ \ (2)$$

Podemos ainda observar que $f(0) = k, k > 1$, pelo que:

$$g(0) = ln\,(f(0)) = \ln k$$

E como $k > 1$, então $\ln(k) > 0 \Leftrightarrow g(0) > 1$ (3)

Assim, podemos observar que:

- A função representada pelo gráfico da opção (A) não satisfaz a condição (1)
- A função representada pelo gráfico da opção (B) não satisfaz a condição (3)
- A função representada pelo gráfico da opção (D) não satisfaz a condição (2) nem a condição (3)

Resposta: **Opção C**

4. Como 3 é um zero da função f, então temos que $f(3) = 0$

   Assim, observando que $4 - 1 = 3$, vem que:

   $$g(4) = f(4-1) + 4 = f(3) + 4 = 0 + 4 = 4$$

   Ou seja, o ponto de coordenadas (4,4) pertence ao gráfico da função g

   Resposta: **Opção B**

5. Como um paralelepípedo retângulo tem 8 vértices, existem ${}^8C_2$ escolhas possíveis para o par de vértices (considerando a ordenação dos vértices irrelevante).
   Logo, como o paralelepípedo retângulo tem 12 arestas, os casos favoráveis são 12, pelo que, pela Regra de Laplace, a probabilidade de que escolher dois vértices que sejam extremos de uma aresta é $\frac{12}{{}^8C_2}$

   Resposta: **Opção A**

6. Como a extração é feita sem reposição, no final da terceira extração restam 2 bolas no saco.
   Como sabemos que as primeiras 3 extrações formaram a sucessão de letras TIM, existem apenas duas hipóteses para formar a sucessão das 5 letras: TIMOR e TIMRO, uma vez, que depois de extraída a quarta bola, não existe nenhuma incerteza relativamente à última.
   Assim, a probabilidade de que, no final do processo, fique formada a palavra TIMOR, sabendo-se que, ao fim da terceira extração, estava formada a sucessão de letras TIM é $\frac{1}{2}$

   Resposta: **Opção C**

7. Sabemos que as representações geométricas de duas raízes quadradas de um mesmo número complexo, são os extremos de um diâmetro de uma circunferência centrada na origem, ou seja, os argumentos dessas raízes diferem de π radianos.

   Nas opções A, B e C a diferença dos argumentos é de $\frac{\pi}{2}$ radianos. Na opção D as representações geométricas dos dois números complexos estão sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares, a igual distância do centro.

   Resposta: **Opção D**

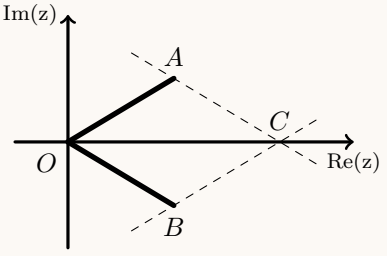
GRUPO II

1.

   1.1. Como $[AOBC]$ é um paralelogramo temos que C é a imagem geométrica da soma dos complexos que têm como imagens geométricas os pontos A e B, ou seja, $w = z + \overline{z}$

   Como $z = \operatorname{cis}\alpha = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha$,
   temos que $\overline{z} = \cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha$

   Assim $w = z + \overline{z} = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha = 2\cos\alpha$



1.2. Como $z = \operatorname{cis}\alpha$, pela fórmula de Moivre para a potenciação, $z^3 = 1^3 \operatorname{cis}(3 \times \alpha) = \operatorname{cis}(3\alpha)$
Como $i = \operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$, fazendo a divisão na f.t. temos:
$\frac{z^3}{i} = \frac{\operatorname{cis}(3\alpha)}{\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}} = \operatorname{cis}\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$
E $\frac{z^3}{i}$ é um número real se $\operatorname{Im}\left(\frac{z^3}{i}\right) = 0$, pelo que, $\operatorname{sen}\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 0$
$\operatorname{sen}\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 3\alpha - \frac{\pi}{2} = 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$
Como se pretende que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, atribuindo o valor zero a k temos $\alpha = \frac{\pi}{6}$

2.

2.1. Temos que A e B são acontecimentos independentes se se verificar a condição:

$$P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$$

Assim, sabemos que existem $9 \times 9 \times 9 = 9^3$ algarismos diferentes que se podem formar com os nove algarismos.
Calculando a probabilidade dos acontecimentos A, B e $A \cap B$ temos:

- Apenas os números cujo algarismo das unidades é 5 são múltiplos de 5, pelo que existem $9 \times 9 \times 1 = 9^2$ números diferentes que são múltiplos de 5, e assim vem que $P(A) = \frac{9^2}{9^3} = \frac{1}{9}$
- Existem $9 \times 8 \times 7$ números cujos algarismos são todos diferentes, pelo que $P(B) = \frac{9 \times 8 \times 7}{9^3} = \frac{56}{9^2}$
- Os números que são múltiplos de cinco e cujos algarismos são todos diferentes são $8 \times 7 \times 1 = 56$, pelo que $P(A \cap B) = \frac{56}{9^3}$

Desta forma, como:

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{9} \times \frac{56}{9^2} = \frac{56}{9^3} = P(A \cap B)$$

podemos afirmar que A e B são acontecimentos independentes.

2.2. Para que o produto de três números seja ímpar, nenhum dos três pode ser par, visto que o produto de qualquer número por um número par, resulta num produto par.
Se, à totalidade de números de 3 algarismos diferentes (formados com os 9 algarismos apresentados), subtrairmos aqueles que são formados exclusivamente por números ímpares, vamos obter a quantidade de números que têm pelo menos um algarismos ímpar na sua composição.
Existem ${}^9A_3$ números de 3 algarismos diferentes formados com os 9 algarismos apresentados (consideramos a ordem relevante, porque a troca de posições para os mesmos algarismos geram números diferentes).
Aos ${}^9A_3$ números vamos subtrair aqueles que são formados exclusivamente por números ímpares, ou seja, ${}^5A_3$, que corresponde a escolher 3 dos 5 algarismos ímpares (1, 3, 5, 7 e 9), considerando a ordem relevante porque as trocas de posição para os mesmos algarismos geram números diferentes.
Assim, a quantidade de números de 3 algarismos, cujo produto dos seus algarismos é um número par é:

$${}^9A_3 - {}^5A_3$$

3. Como temos que:

$$(A \cup B) \cap C = \emptyset \Leftrightarrow (A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset \Leftrightarrow A \cap C = \emptyset \wedge B \cap C = \emptyset$$

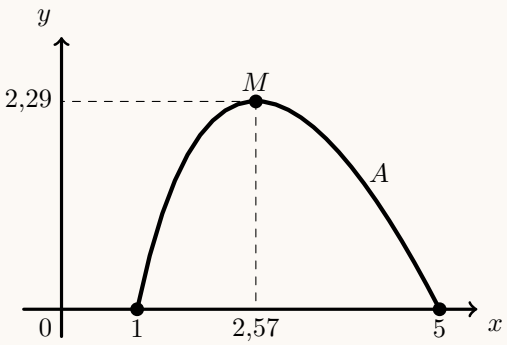
Logo, como $A \cap C = \emptyset$, então $P(A \cap C) = 0$, pelo que:

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = 0{,}21 + 0{,}47 - 0 = 0{,}68$$

4. Como o ponto P tem de coordenadas $P(x, \ln x)$, podemos considerar a medida da base do retângulo, $b = 5 - x$ e a altura $a = \ln x$, assim temos:

$$A = b \times a = (5 - x) \ln x \ , \ x \in [1,5]$$

Representando a função que dá a área do retângulo em função de x, na calculadora gráfica, numa janela compatível com o domínio da função, obtemos o gráfico reproduzido na figura ao lado.



Depois, usando a função da calculadora gráfica que permite determinar valores aproximados das coordenadas de pontos de ordenada máxima, obtemos valores, arredondados às décimas, do ponto $M(2{,}57; 2{,}29)$ (também representado na figura).

Assim, quando o ponto P tem abcissa $x \approx 2{,}57$, a área do retângulo $A \approx 2{,}29$ é máxima.

5.

5.1. Como a função h resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}$, é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Como $-0{,}63 < 0 < 1{,}77$, ou seja, $h(0) < 0 < h\left(\frac{\pi}{2}\right)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $h(a) = 0$, ou seja, que a função h tem, pelo menos, um zero em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

C.A.

$f'(x) = \left(e^{x-1}\right)' = (x-1)'e^{x-1} = 1 \times e^{x-1} = e^{x-1}$

$g'(x) = (\operatorname{sen} x)' = \cos x$

$h(0) = f'(0) - g'(0) = e^{0-1} - \cos(0) =$
$= e^{-1} - 1 \approx -0.63$

$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}-1} + \cos\frac{\pi}{2} =$
$= e^{\frac{\pi}{2}-1} + 0 \approx 1{,}77$

5.2. Como ficou provado no item anterior, existe $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $h(a) = 0$, logo

$$h(a) = 0 \Leftrightarrow f'(a) - g'(a) = 0 \Leftrightarrow f'(a) = g'(a)$$

Ou seja, existe $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que as derivadas de f e g nos pontos de abcissa a são iguais, ou seja, os declives das retas tangentes aos gráficos das funções f e g nos pontos de abcissa a são iguais, o que significa que essas retas são paralelas.

6.

6.1. Calculando a intensidade da luz solar à superfície da água, ou seja a zero metros de profundidade temos:

$$I(0) = ae^{-b\times 0} = ae^0 = a \times 1 = a$$

Como a 20 metros de profundidade, a intensidade da luz solar era metade da sua intensidade à superfície da água, temos que $I(20) = \dfrac{I(0)}{2}$

Resolvendo a equação, e apresentando o resultado arredondado às centésimas, vem que:

$$I(20) = \frac{I(0)}{2} \Leftrightarrow ae^{-b\times 20} = \frac{a}{2} \Leftrightarrow e^{-20b} = \frac{a}{2a} \underset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} e^{-20b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -20b = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow b = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-20} \Rightarrow b \approx 0{,}03$$

6.2. Para estudar a monotonia da função começamos por determinar a expressão da função derivada:

$$I'(x) = \left(10e^{-0{,}05x}\right)' = 10\left(e^{-0{,}05x}\right)' = 10(-0{,}05x)'e^{-0{,}05x} = 10 \times (-0{,}05)e^{-0{,}05x} = -0{,}5e^{-0{,}05x}$$

Como $e^{-0{,}05} > 0$, para qualquer valor de x, então $-0{,}05 \times e^{-0{,}05} < 0$, ou seja $I'(x) < 0$, pelo que podemos concluir que a função é estritamente decrescente no seu domínio.

Relativamente à existência de assíntotas do gráfico de I, como a função está definida para $x \geq 0$ e é contínua (porque resulta de operações entre funções continuas no domínio da função), só podem existir assíntotas quando $x \to +\infty$
Averiguando a existência de uma assíntota horizontal temos que:

$$\lim_{x\to+\infty} I(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(10e^{-0{,}05x}\right) = 10e^{-0{,}05\times(+\infty)} = 10e^{-\infty} = 10 \times 0^+ = 0$$

E assim podemos concluir que a reta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de I e não existem outras assíntotas.

Assim, a função ser estritamente decrescente, no contexto da situação descrita, significa que a um aumento do número de metros abaixo da superfície corresponde sempre uma diminuição da intensidade da luz solar, ou seja, a intensidade da luz diminuí com um aumento da profundidade.
A reta de equação $y = 0$ ser assíntota do gráfico de I, significa no contexto da situação descrita, que a intensidade da luz solar tende para zero com um aumento arbitrariamente grande da profundidade.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade

(Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto – Programas novos e Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)

Duração da prova: 150 minutos **2.ª FASE**

2007

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA A / MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implica a anulação de todos os itens de escolha múltipla.

Identifique claramente os grupos e os itens a que responde.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta (excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações).

É interdito o uso de «esferográfica-lápis» e de corrector.

As cotações da prova encontram-se na página 12.

A prova inclui um formulário na página 3.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r \quad (\alpha - \textit{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;}\ \ r - \textit{raio})$

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ $(\alpha - \textit{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;}\ \ r - \textit{raio})$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - \textit{raio da base};\ g - \textit{geratriz})$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - \textit{raio})$

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3 \qquad (r - \textit{raio})$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u' . v + u \,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' . v - u \,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \,.\, u^{n-1} \,.\, u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' . \cos u$

$(\cos u)' = -u' . \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' . e^u$

$(a^u)' = u' . a^u . \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \,.\, \ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

Grupo I

- Os sete itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra, o item será anulado, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Considere um rectângulo cuja área é igual a 5.

Qual das seguintes expressões representa o perímetro deste rectângulo, em função do comprimento, x, de um dos seus lados?

(A) $2\,x + \frac{10}{x}$ **(B)** $2\,x + \frac{2\,x}{5}$

(C) $2\,x + \frac{5}{x}$ **(D)** $x + \frac{5}{x}$

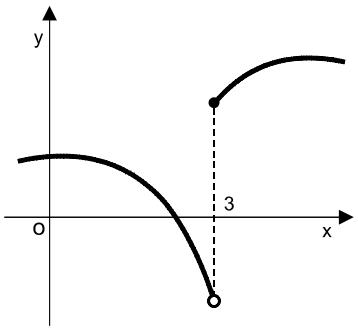
2. Seja $f : [0, 2\pi\,] \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 3 - 2\cos x$.

Indique o valor de x para o qual $f(x)$ é máximo.

(A) 0 **(B)** $\frac{\pi}{2}$

(C) π **(D)** $\frac{3\pi}{2}$

3. Na figura, está representada parte do gráfico de uma função f, real de variável real.

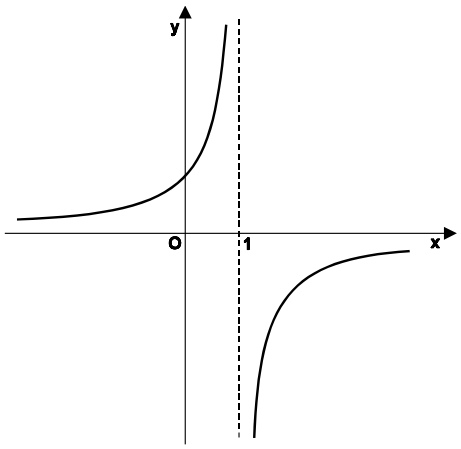


Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{f(x)} = 0$ **(B)** $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}$

(C) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{2}$ **(D)** Não existe $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{f(x)}$

4. Na figura, está representada parte do gráfico de uma função g, real de variável real.
Tal como a figura sugere, a recta de equação $x = 1$ é assimptota do gráfico da função g.



Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $h(x) = x - 1$.

O valor do $\lim\limits_{x\to 1} \frac{h(x)}{g(x)}$ é:

(A) $-\infty$ **(B)** $+\infty$ **(C)** 0 **(D)** 1

5. Dois cientistas, que vão participar num congresso no estrangeiro, mandam reservar hotel na mesma cidade, cada um sem conhecimento da marcação feita pelo outro.

Sabendo que nessa cidade existem sete hotéis, todos com igual probabilidade de serem escolhidos, qual é a probabilidade de os dois cientistas ficarem no mesmo hotel?

(A) $\frac{1}{7}$ **(B)** $\frac{2}{7}$

(C) $\frac{5}{7}$ **(D)** $\frac{6}{7}$

6. Lançaram-se dois dados, ambos com as faces numeradas de um a seis. Sabe-se que a soma dos números saídos foi quatro.

Qual é a probabilidade de ter saído o mesmo número, em ambos os dados?

(A) $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja i a unidade imaginária.

Seja n um número natural tal que $i^n = -i$.

Indique qual dos seguintes é o valor de i^{n+1}.

(A) 1 **(B)** i

(C) -1 **(D)** $-i$

Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam:

$$z_1 = 3 + y\,i \qquad \text{e} \qquad z_2 = 4\,i\,z_1$$

(i é a unidade imaginária e y designa um número real).

1.1. Considere que, para qualquer número complexo z não nulo, $\text{Arg}(z)$ designa o argumento de z que pertence ao intervalo $[\,0, 2\pi\,[$.
Admitindo que $\text{Arg}(z_1) = \alpha$ e que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, determine o valor de $\text{Arg}(-z_2)$ em função de α.

1.2. Sabendo que $\text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2)$, determine z_2.
Apresente o resultado na forma algébrica.

2. De um baralho de cartas, seleccionaram-se 16 cartas (4 ases, 4 reis, 4 damas e 4 valetes).
Dividiram-se as 16 cartas em dois grupos: um com os ases e os reis e outro com as damas e os valetes.
Retiraram-se, ao acaso, duas cartas de cada grupo (sem reposição).
Qual é a probabilidade de obter um conjunto formado por um ás, um rei, uma dama e um valete, não necessariamente do mesmo naipe?
Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3. Considere um espaço de resultados finito, Ω, associado a uma certa experiência aleatória.

A propósito de dois acontecimentos X e Y ($X \subset \Omega$ e $Y \subset \Omega$), sabe-se que

$$P(X) = a$$

$$P(Y) = b$$

X e Y são independentes

3.1. Mostre que a probabilidade de que não ocorra X nem ocorra Y é igual a

$$1 - a - b + a \times b$$

3.2. Num frigorífico, há um certo número de iogurtes e um certo número de sumos. Tiram-se do frigorífico, ao acaso, um iogurte e um sumo. Sabe-se que a probabilidade de o iogurte ser de pêssego é $\frac{1}{5}$ e a probabilidade de o sumo ser de laranja é $\frac{1}{3}$.

Admita que os acontecimentos «tirar um iogurte de pêssego» e «tirar um sumo de laranja» são independentes.

Utilizando a expressão mencionada em 3.1., determine a probabilidade de, ao tirar, ao acaso, um iogurte e um sumo do frigorífico, o iogurte não ser de pêssego e o sumo não ser de laranja.

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4. Considere a função g, definida no intervalo $]1, 7[$ por $g(x) = \frac{\operatorname{sen} x + \ln x}{x}$

($\ln$ designa logaritmo na base e)

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, visualize o gráfico da função g e reproduza-o na sua folha de prova.

Com base nesse gráfico e utilizando as ferramentas adequadas da sua calculadora, resolva o seguinte problema:

Seja g' a função derivada de g. O conjunto solução da inequação $g'(x) < 0$ é um intervalo aberto $]a, b[$. Determine os valores de a e de b. Apresente os resultados arredondados às centésimas.

Justifique a sua resposta.

5. Na figura 1 está representada parte do gráfico de uma função h, de domínio $\mathbb{R}_0^+$.

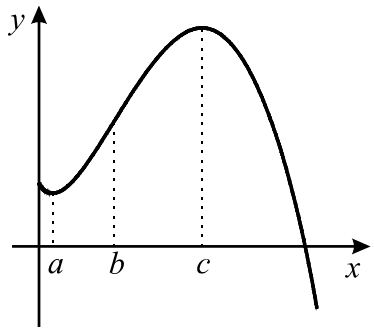


Figura 1

Em cada uma das figuras abaixo está representada parte do gráfico de uma função de domínio $\mathbb{R}_0^+$.

Uma das funções representadas é h', primeira derivada de h, e a outra é h'', segunda derivada de h.

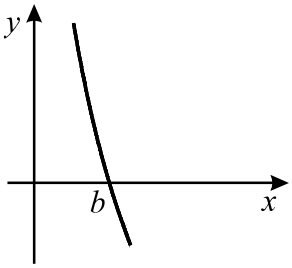


Figura 2

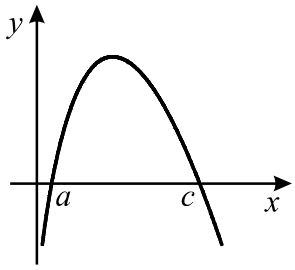


Figura 3

Numa pequena composição, explique em qual das figuras está representado o gráfico da primeira derivada e em qual está representado o gráfico da segunda derivada. Na sua composição, deve referir-se à variação de sinal das funções h' e h'', relacionando-a com características da função h (monotonia e sentido das concavidades do seu gráfico).

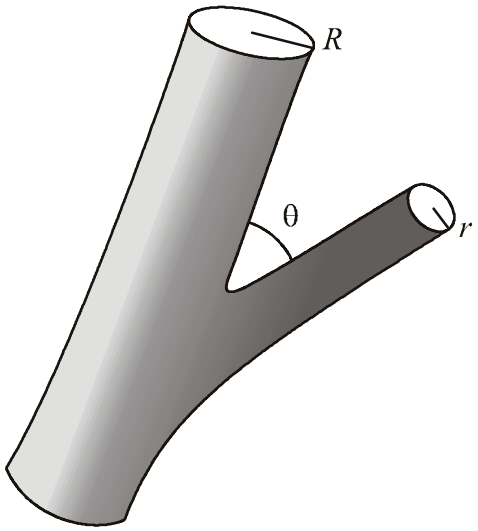
6. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por $f(x) = 1 - \ln(x^2)$

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos:

6.1. Determine os pontos de intersecção do gráfico de f com o eixo Ox.

6.2. Estude a função quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

7. Na figura seguinte está representada uma artéria principal do corpo humano, cuja secção é um círculo com raio R, e uma sua ramificação, mais estreita, cuja secção é um círculo com raio r.



A secção da artéria principal tem área A e a da ramificação tem área a.
Seja $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ a amplitude, em radianos, do ângulo que a artéria principal faz com a sua ramificação (medida relativamente a duas geratrizes complanares dos dois cilindros).

Sabe-se que $a = A\sqrt{\cos\theta}$

Admitindo que o modelo descrito se adequa com exactidão à situação real, determine θ no caso em que os raios referidos verificam a relação $R = \sqrt[4]{2}\, r$

FIM

COTAÇÕES

Grupo I ..... (7 x 9 pontos)..... **63 pontos**

Cada resposta certa ..... 9 pontos
Cada resposta errada..... 0 pontos
Cada questão não respondida ou anulada ..... 0 pontos

Grupo II ..... **137 pontos**

1. ..... 21 pontos

1.1. ..... 10 pontos

1.2. ..... 11 pontos

2. ..... 10 pontos

3. ..... 22 pontos

3.1. ..... 12 pontos

3.2. ..... 10 pontos

4. ..... 18 pontos

5. ..... 15 pontos

6. ..... 34 pontos

6.1. ..... 16 pontos

6.2. ..... 18 pontos

7. ..... 17 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade

(Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto – Programas novos e Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)

Duração da prova: 150 minutos **2.ª FASE**
2007

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA A / MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I ..... (7 x 9 pontos)..... **63 pontos**

Cada resposta certa ..... 9 pontos
Cada resposta errada..... 0 pontos
Cada questão não respondida ou anulada ..... 0 pontos

Grupo II ..... **137 pontos**

1. ..... 21 pontos
1.1. ..... 10 pontos
1.2. ..... 11 pontos

2. ..... 10 pontos

3. ..... 22 pontos
3.1. ..... 12 pontos
3.2. ..... 10 pontos

4. ..... 18 pontos

5. ..... 15 pontos

6. ..... 34 pontos
6.1. ..... 16 pontos
6.2. ..... 18 pontos

7. ..... 17 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anulados todos os itens com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todos os itens em que o examinando dê mais do que uma resposta.

Grupo II

1. Se o examinando se enganar na identificação do item a que está a responder, ou se a omitir, mas, pela resolução apresentada, for possível identificá-lo inequivocamente, a resposta deve ser vista e classificada.

2. Se o examinando apresentar mais do que uma resposta a um item, e não indicar, de forma inequívoca, a que pretende que seja classificada, deve ser vista e classificada apenas a que se encontra em primeiro lugar, na folha de resposta.

3. As classificações a atribuir às respostas dos examinandos são expressas, obrigatoriamente, em números inteiros.

4. Num item em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, a classificação a atribuir à resposta deve estar de acordo com o seguinte critério:
- Se o examinando se limitar a apresentar o resultado final, a cotação deve ser de zero pontos.
- Se o examinando não se limitar a apresentar o resultado final, a classificação deve ser a soma algébrica das cotações atribuídas a cada etapa, de acordo com o disposto nos pontos 6, 7, 8, 9, 10 e 11 destes critérios gerais. Se a soma for negativa, a classificação a atribuir é de zero pontos.

5. Alguns itens da prova podem ser correctamente resolvidos por mais do que um processo. Sempre que o examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nos critérios específicos, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas. Salienta-se que deve ser aceite qualquer processo cientificamente correcto, mesmo que envolva conhecimentos não contemplados no programa da disciplina.

6. A cotação de cada item está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para o resolver.

6.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.

6.2. O classificador não pode subdividir, em cotações parcelares, a cotação atribuída a cada etapa.
Caso uma etapa envolva um único passo, testando apenas o conhecimento de um só conceito ou propriedade, e a sua resolução não esteja completamente correcta, deve ser atribuída a cotação de zero pontos.
Caso uma etapa envolva mais do que um passo (por exemplo, o cálculo da derivada de uma função, a resolução de uma equação, a obtenção de uma expressão em função de uma variável, etc.) e a sua resolução esteja incompleta, ou contenha incorrecções, a cotação a atribuir deve estar de acordo com o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:
- erros de contas ocasionais devem ser desvalorizados em um ponto;
- erros que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades devem ser desvalorizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa;
- transposições erradas de dados do enunciado devem ser desvalorizadas em um ponto, desde que o grau de dificuldade da etapa não diminua;
- transposições erradas de dados do enunciado devem ser desvalorizadas em, pelo menos, metade da cotação da etapa, caso o grau de dificuldade da etapa diminua.

6.3. Nas etapas cuja cotação se encontra discriminada por níveis de desempenho, o classificador deve enquadrar a resposta do examinando numa das descrições apresentadas. O classificador não pode atribuir uma cotação diferente das indicadas.

6.4. No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva classificação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.

6.5. Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.

6.6. Pode acontecer que o examinando, ao resolver um item, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios específicos. Todas as etapas não percorridas explicitamente pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam inequivocamente implícitos na resolução do item, devem receber a cotação indicada.

7. Quando, num item, é pedida uma forma específica de apresentação do resultado final (por exemplo, «em minutos», «em percentagem», etc.), este deve ser apresentado na forma pedida. Se o resultado final apresentado pelo examinando não respeitar a forma pedida no enunciado (por exemplo, se o enunciado pedir o resultado em minutos, e o examinando o apresentar em horas), devem ser atribuídos zero pontos à etapa correspondente ao resultado final. No entanto, a cotação não deve ser desvalorizada caso o examinando não indique a unidade em que é pedido o resultado (por exemplo, se o resultado final for 12 minutos, ou 12 metros, e o examinando escrever simplesmente 12, não se deve aplicar nenhuma desvalorização). Se não for pedida aproximação para o resultado final, o examinando deve apresentar o valor exacto. Se o examinando apresentar, como resultado final, uma aproximação do valor exacto, deve ser aplicada uma desvalorização de 1 ponto na cotação a atribuir à etapa correspondente ao resultado final.

8. O examinando deve respeitar sempre a instrução relativa à apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações. Se, numa etapa, o examinando não respeitar esta instrução, apresentando algo (valor, quadro, tabela, gráfico, etc.) que não resulte de trabalho anterior, deve ser atribuída a cotação de zero pontos a essa etapa. Todas as etapas subsequentes que dela dependam devem ser igualmente classificadas com zero pontos.

9. O examinando deve respeitar sempre qualquer instrução relativa ao método a utilizar na resolução de um item (por exemplo, «sem recorrer à calculadora», «equacione o problema», «resolva graficamente», etc.). Na resolução apresentada pelo examinando, deve ser inequívoco, pela apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações, o cumprimento da instrução. Se tal não acontecer, considera-se que o examinando não respeitou a instrução. A etapa em que se dá o desrespeito e todas as subsequentes que dela dependam devem ser clasificadas com zero pontos.

10. Se, na resolução de um item, o examinando utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), a classificação total a atribuir à resposta deve ser desvalorizada em um ponto. Esta desvalorização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas classificadas com zero pontos, nem a eventuais utilizações do símbolo de igualdade, onde, em rigor, deveria estar o símbolo de igualdade aproximada.

11. Existem itens em cujo enunciado é dada uma instrução relativa ao número mínimo de casas decimais que o examinando deve conservar sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos. Indicam-se, a seguir, as desvalorizações a aplicar, na classificação total a atribuir à resposta, em caso de desrespeito dessa instrução e/ou de arredondamentos mal efectuados.

Todos os valores intermédios estão de acordo com a instrução, mas existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado..... -1 ponto

Todos os valores intermédios estão bem arredondados, mas existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução..... -1 ponto

Existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado e existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução ..... -2 pontos

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Cada resposta certa ..... 9 pontos
Cada resposta errada..... 0 pontos
Cada questão não respondida ou anulada ..... 0 pontos

As respostas correctas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	A	C	D	C	A	C	A
Versão 2	D	B	A	D	C	A	B

Grupo II

1.1. 10

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Identificar $\frac{\pi}{2}$ como um argumento de $4\,i$ (escrevendo, por exemplo, $4i = 4\,cis\,\frac{\pi}{2}$) 2

Concluir que $\frac{\pi}{2} + \alpha$ é um argumento de z_2 4

Concluir que $\text{Arg}(-z_2) = \frac{3\pi}{2} + \alpha$ **(ver nota 1)** 4

2.º Processo:

$-z_2 = -4\,i\,z_1$ 1

Identificar $\frac{3\pi}{2}$ como um argumento de $-4\,i$ (escrevendo, por exemplo, $-4i = 4\,cis\,\frac{3\pi}{2}$) 5

Concluir que $\text{Arg}(-z_2) = \frac{3\pi}{2} + \alpha$ **(ver nota 1)** 4

Notas:

1. Se a expressão apresentada pelo examinado para $\text{Arg}(-z_2)$ for um argumento de $-z_2$ que não pertença a $[0, 2\pi[$ (por exemplo $\text{Arg}(-z_2) = \alpha - \frac{\pi}{2}$), a classificação relativa a esta etapa deve sofrer uma desvalorização de 2 pontos.

2. Se o examinando se limitar a efectuar o produto de $4i$ por z_1 na forma algébrica, a cotação a atribuir à sua resposta deverá ser de zero pontos.

1.2. 11

Escrever $z_2 = 4\,i\,(3 + y\,i)$ 1

Concluir que $z_2 = -4y + 12\,i$ 4

Concluir que $y = 12$ 3

Escrever z_2 na forma algébrica $(z_2 = -48 + 12\,i)$ 3

2. 10

Representando o acontecimento cuja probabilidade se quer calcular por A, a resposta pode ser dada quer na forma $P(A) = \left(\frac{{}^4C_1 \times {}^4C_1}{{}^8C_2}\right)^2$ quer na forma $P(A) = \left(\frac{{}^4A_1 \times {}^4A_1 \times 2}{{}^8A_2}\right)^2$ **(ver notas 1 e 2)**..... 9

Apresentar o resultado na forma de fracção irredutível **(ver nota 3)**..... 1

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva cotação a atribuir.

<u>1.º caso</u>: Fracções com denominador ${}^8C_2 \times {}^8C_2$ (ou equivalente) e com numerador igual a:

$\left({}^4C_1 \times {}^4C_1\right)^2$ (ou equivalente) 9
${}^4C_1 \times {}^4C_1$ (ou equivalente) 5
Outras situações 2

<u>2.º caso</u>: Fracções com denominador ${}^8A_2 \times {}^8A_2$ (ou equivalente) e com numerador igual a:

$\left({}^4A_1 \times {}^4A_1 \times 2\right)^2$ (ou equivalente) 9
$\left({}^4A_1 \times {}^4A_1\right)^2$ (ou equivalente) 6
${}^4A_1 \times {}^4A_1$ (ou equivalente) 3
Outras situações 2

<u>3.º caso</u>: Fracções com denominador ${}^8C_2$ (ou equivalente) e com numerador igual a:

${}^4C_1 \times {}^4C_1$ (ou equivalente) 3
Outras situações 0

<u>4.º caso</u>: Fracções com denominador ${}^8A_2$ (ou equivalente) e com numerador igual a:

${}^4A_1 \times {}^4A_1 \times 2$ (ou equivalente) 3
Outras situações 0

<u>5.º caso</u>: Fracções com outros denominadores 0

2. Se o examinando indicar apenas o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

3. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido classificada com zero pontos.

3.1. 12

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Traduzir «*probabilidade de que não ocorra* X *nem ocorra* Y» por $P(\overline{X} \cap \overline{Y})$ 3

Aplicar as Leis de De Morgan 2

Aplicar a propriedade relativa à probabilidade do acontecimento contrário 2

Aplicar a propriedade relativa à probabilidade da união de dois acontecimentos..... 2

Aplicar a propriedade relativa à probabilidade da intersecção de dois acontecimentos independentes 2

Conclusão 1

2.º Processo:

Traduzir «*probabilidade de que não ocorra* X *nem ocorra* Y» por $P(\overline{X} \cap \overline{Y})$ 3

Referir que «*se os acontecimentos* X *e* Y *são independentes, então* $\overline{X}$ *e* $\overline{Y}$ *também são*» 3

Aplicar a propriedade relativa à probabilidade da intersecção de dois acontecimentos independentes 2

Aplicar a propriedade relativa à probabilidade do acontecimento contrário 2

Conclusão 2

3.2. 10

Expressão que dá a probabilidade pedida $\left(1-\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}\right)$ **(ver nota 1)**.....8

Apresentação do resultado na forma de fracção irredutível **(ver nota 2)**.....2

Notas:

1. Se o examinando se limitar a escrever $a=\frac{1}{5}\left(a=\frac{1}{3}\right)$ e $b=\frac{1}{3}\left(b=\frac{1}{5}\right)$, a clasificação a atribuir a esta etapa deverá ser de 4 pontos.

2. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido classificada com zero pontos.

4. 18

Apresentar o gráfico de g **(ver nota 1)** 6

Relacionar o sinal de g' com a monotonia de g 4

Indicar os valores de a e de b **(ver nota 2)** 8

Notas:

1. O desrespeito do domínio deve ser desvalorizado em 1 ponto.

2. A apresentação dos valores pedidos deve ser classificada de acordo com o seguinte critério:

Valor de a

1.º Caso (apresentação do resultado com duas casas decimais, de acordo com o enunciado):

Resposta $a \approx 1,36$ 4

Resposta $a \approx 1,35$ ou $a \approx 1,37$ 3

Resposta $a \approx 1,34$ ou $a \approx 1,38$ 1

Outros resultados 0

2.º Caso (apresentação do resultado com mais de duas casas decimais):

Valor de a no intervalo $[1,359\,;\,1,361]$ 3

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[1,358\,;\,1,362]$ 1

Outros resultados 0

3.º Caso (apresentação do resultado arredondado às décimas):

Valor igual a $1,4$ 1

Outros resultados 0

4.º Caso (apresentação do resultado arredondado às unidades):

Qualquer resultado 0

Valor de b

1.º Caso (apresentação do resultado com duas casas decimais, de acordo com o enunciado):

Resposta $b \approx 4,61$ 4

Resposta $b \approx 4,60$ ou $b \approx 4,62$ 3

Resposta $b \approx 4,59$ ou $b \approx 4,63$ 1

Outros resultados 0

2.º Caso (apresentação do resultado com mais de duas casas decimais):

Valor de b no intervalo $[\,4,610\,;\,4,612]$ 3

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[4,609\ ;\ 4,613]$ 1

Outros resultados 0

3.º Caso (apresentação do resultado arredondado às décimas):

Valor igual a $4,6$ 1

Outros resultados 0

4.º Caso (apresentação do resultado arredondado às unidades):

Qualquer resultado 0

5. 15

Análise correcta da monotonia de h 3

Relação correcta entre a monotonia de h e o sinal de h' 3

Análise correcta do sentido das concavidades do gráfico de h 3

Relação correcta entre o sentido das concavidades do gráfico de h e o sinal de h'' 3

Identificação correcta do gráfico de h' e do gráfico de h'' (figuras 3 e 2, respectivamente) 3

Nota:
Caso o examinando se limite a identificar o gráfico de h' e o gráfico de h'', sem qualquer justificação, a cotação a atribuir à sua resposta deverá ser de zero pontos.

6.1. 16

Escrever a equação $f(x) = 0$ 4

Determinar analiticamente as soluções da equação $f(x) = 0$ 10

$1 - ln(x^2) = 0$
$\Leftrightarrow ln(x^2) = 1$ 1
$\Leftrightarrow x^2 = e$ 5
$\Leftrightarrow x = \sqrt{e} \ \vee \ x = -\sqrt{e}$ ..... (2+2) 4

Pontos pedidos: $(\sqrt{e}, 0)$, $(-\sqrt{e}, 0)$ **(ver nota)** ..... (1+1) 2

Nota:
Se, na etapa anterior, o examinando obtiver apenas uma solução, e, em consequência disso, a resposta apresentar apenas um par ordenado, a classificação a atribuir a esta etapa não deve sofrer qualquer desvalorização, pelo que deverá ser de 2 pontos.

6.2. 18

Cálculo da derivada de f 3

Concluir que f' não tem zeros 3

Estudo do sinal de f' 4
$f'(x) < 0 \ \Leftrightarrow \ x > 0$ 2
$f'(x) > 0 \ \Leftrightarrow \ x < 0$ 2

Estudo da função f quanto à monotonia 4
Concluir que f é crescente em $]-\infty, 0[$ 2
Concluir que f é decrescente em $]0, +\infty[$ 2

Referir que f não tem extremos 4

7. 17

Escrever $a = \pi r^2$ e $A = \pi R^2$ ..... (1+1) 2

Escrever $\pi r^2 = \pi R^2 \sqrt{\cos\theta}$ 3

Substituir R por $\sqrt[4]{2}\, r$ na igualdade anterior 4

Concluir que $\cos\theta = \frac{1}{2}$ 5

Indicar o valor de θ $\left(\theta = \frac{\pi}{3}\right)$ 3

Exame nacional de Matemática A (2007, 2.ª fase)

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como a área do retângulo é igual a 5, designado por x o comprimento de um dos lados e por y o comprimento de um lado adjacente, temos que:

$$x \times y = 5 \Leftrightarrow y = \frac{5}{x}$$

Assim o perímetro do retângulo é:

$$x + \frac{5}{x} + x + \frac{5}{x} = 2x + 2 \times \frac{5}{x} = 2x + \frac{10}{x}$$

Resposta: **Opção A**

2. Determinando a expressão da derivada e igualando a zero, temos:

$$f'(x) = (3 - 2\cos x)' = (3)' - (2\cos x)' = 0 - 2(-\operatorname{sen} x) = 2\operatorname{sen} x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$$

No intervalo $[0,2\pi]$ as três soluções são $x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$

Estudando a variação do sinal de f' para relacionar com a monotonia de f, no intervalo $[0,2\pi]$, vem:

x	0		π		2π
$f'(x)$	0	+	0	−	0
$f(x)$	min	↗	Máx	↘	min

Logo, o valor x de para o qual $f(x)$ é máximo, é π

Resposta: **Opção C**

3. Pela observação do gráfico podemos verificar que $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) < 0$ e que $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) > 0$, pelo que podemos garantir que $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{f(x)} < 0$ e que $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{f(x)} > 0$
Assim temos que:

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{f(x)} \neq \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{f(x)}$$

Ou seja, que não existe $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{f(x)}$

Resposta: **Opção D**

4. Como a reta de equação $x = 1$ é assíntota do gráfico da função g, e pela observação do gráfico, temos que: $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = +\infty$ e que $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = -\infty$
Como a função h é definida por $h(x) = x - 1$, temos que $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = \lim\limits_{x\to 1} (x - 1) = 0$

Logo:

- $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{h(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)}{\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)} = \dfrac{0}{+\infty} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{h(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)}{\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)} = \dfrac{0}{-\infty} = 0$

E assim, como os limites laterais são iguais, temos que: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{h(x)}{g(x)} = 0$

Resposta: **Opção C**

5. Podemos considerar que um dos cientistas escolheu um dos hotéis. Para que os dois cientistas escolham o mesmo hotel, o segundo cientista deverá escolher o mesmo hotel.
Como existem 7 hotéis na cidade (número de casos possíveis) e apenas um foi escolhido pelo primeiro cientista (número de casos favoráveis) recorrendo à Regra de Laplace, a probabilidade do segundo cientista escolher, ao acaso, o mesmo hotel do primeiro cientista é $\dfrac{1}{7}$

Resposta: **Opção A**

6. Quando se lançam dois dados numerados de 1 a 6, existem apenas 3 hipóteses de obter uma soma igual a 4 ($3 + 1$, $1 + 3$ e $2 + 2$).
Assim, para calcular a probabilidade de ter saído o mesmo número, em ambos os dados, sabendo que a soma dos números saídos foi quatro, consideramos 3 casos possíveis e apenas 1 favorável $(2 + 2)$, pelo que, a probabilidade é $\dfrac{1}{3}$

Resposta: **Opção C**

7. Sabemos que $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$, e que é válida a igualdade $i^p = i^k$, onde k é o resto da divisão inteira de p por 4.

   Assim, como $i^n = -i$, temos que $i^n = -i = i^3 = i^{4\times p+3}$, para $p \in \mathbb{N}$.

   Logo $i^{n+1} = i^{(4\times p+3)+1} = i^{4\times p+4} = i^{4\times(p+1)} = i^{4\times(p+1)+0} = i^0 = 1$

   Resposta: **Opção A**

GRUPO II

1.

1.1. Como $\arg(z_1) = \alpha$, temos que $z_1 = \rho \operatorname{cis} \alpha$
Como $z_2 = 4iz_1$, temos que $-z_2 = -4iz_1$

Como $-4i = 4 \operatorname{cis} \dfrac{3\pi}{2}$, fazendo a multiplicação na f.t. temos que:

$$-z_2 = -4iz_1 = \left(4 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}\right) \times (\rho \operatorname{cis} \alpha) = (4\rho) \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$$

Assim, como $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, temos que $\arg(-z_2) = \dfrac{3\pi}{2} + \alpha$

1.2. Como $z_2 = 4iz_1$, vem que:
$z_2 = 4iz_1 = 4i(3 + yi) = 12i + 4yi^2 = 12i + 4y(-1) = -4y + 12i$

Assim sabemos que $\operatorname{Im}(z_2) = 12$, e também que $\operatorname{Im}(z_1) = y$.
Como $\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$ temos que $y = 12$, pelo que, substituindo na expressão simplificada de z_2 temos:

$$z_2 = -4(12) + 12i = -48 + 12i$$

2. Retirando 2 cartas do conjunto das 8 (formado pelos ases e reis), existem, na totalidade, ${}^8C_2$ conjuntos diferentes (e equiprováveis).
Destes conjuntos, apenas 4×4 são constituídos por cartas com diferente valor (que corresponde ao agrupamento de qualquer um dos 4 ases com qualquer um dos 4 reis).
Da mesma forma, existem ${}^8C_2$ conjuntos diferentes de 2 cartas selecionadas do grupo de damas e valetes, dos quais apenas 4×4 são constituídos por cartas de diferente valor.
Assim, a probabilidade de obter um conjunto formado por um ás, um rei, uma dama e um valete, não necessariamente do mesmo naipe, é:

$$\frac{4 \times 4 \times 4 \times 4}{{}^8C_2 \times {}^8C_2} = \frac{16^2}{\left({}^8C_2\right)^2} = \frac{16}{49}$$

3.

3.1. Como X e Y são acontecimentos independentes, temos que $P(X \cap Y) = P(X) \times P(Y)$
E a probabilidade de que X não ocorra nem ocorra Y pode ser escrita como $P\left(\overline{X} \cap \overline{Y}\right)$
Assim:

$P\left(\overline{X} \cap \overline{Y}\right) = P\left(\overline{X \cup Y}\right)$	Leis de De Morgan: $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$
$= 1 - P(X \cup Y)$	Teorema: $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$
$= 1 - \Big(P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)\Big)$	Teorema: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 1 - P(X) - P(Y) + P(X \cap Y)$	
$= 1 - P(X) - P(Y) + P(X) \times P(Y)$	Hipótese: $P(X \cap Y) = P(X) \times P(Y)$
$= 1 - a - b + a \times b$	Hipótese: $P(X) = a$ e $P(Y) = b$

Logo, $P\left(\overline{X} \cap \overline{Y}\right) = 1 - a - b + a \times b$ *q.e.d.*

3.2. Definindo os acontecimentos

- X:«tirar um iogurte de pêssego»
- Y:«tirar um sumo de laranja»

Temos que $a = P(X) = \dfrac{1}{5}$, $b = P(Y) = \dfrac{1}{3}$ e admite-se que X e Y são independentes.

Como a probabilidade de que não ocorra X nem ocorra Y é igual a $1 - a - b + a \times b$, temos que a probabilidade (na forma de fração irredutível) de, ao tirar, ao acaso, um iogurte e um sumo do frigorífico, o iogurte não ser de pêssego e o sumo não ser de laranja é:

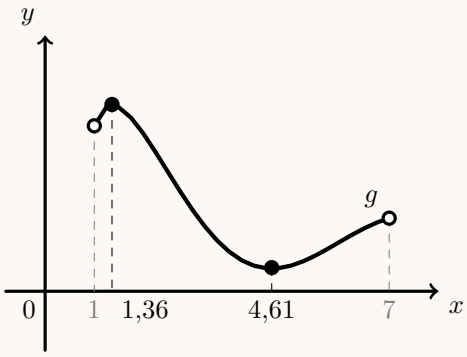
$$1 - a - b + a \times b = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{15}{15} - \frac{3}{15} - \frac{5}{15} + \frac{1}{15} = \frac{8}{15}$$

4. Representando esta função no intervalo $]1,7[$, na calculadora gráfica, obtemos o gráfico reproduzido na figura seguinte.

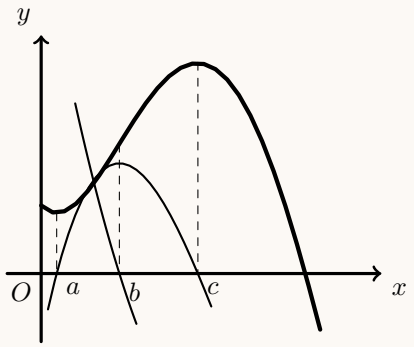
Depois, como os valores de x que verificam a condição $g'(x) < 0$, $(]a,b[)$ são aqueles em que a função é decrescente. Por observação do gráfico, podemos concluir que são os valores compreendidos entre o maximizante de g, no intervalo definido (ou seja a), e o minimizante da função no mesmo intervalo, (b).

Assim, recorrendo à função da calculadora para determinar valores aproximados de maximizantes e minimizantes da função, obtemos que os valores, aproximados às centésimas, de a e de b:

$$a \approx 1{,}36 \text{ e } b \approx 4{,}61$$



5. O zero da função representada no gráfico da Figura 2, corresponde à abcissa do ponto de inflexão do gráfico de h, o que é suficiente para relacionar este gráfico com a segunda derivada. Mas, podemos ainda observar que para $x \in]0,b[$ a função representada no gráfico da Figura 1 é positiva enquanto, para os mesmos valores, a concavidade do gráfico de h está voltada para cima; e de forma análoga, quando $x \in]b,+\infty[$, a função do gráfico da Figura 2 é negativa, enquanto o gráfico da função h, tem a concavidade voltada para baixo. Desta forma, podemos concluir que **o gráfico da Figura 2 é o gráfico de *h*"**



Os zeros da função representada no gráfico Figura 3, correspondem às abcissas dos extremos de h, o que permite relacionar este gráfico com a primeira derivada. Mas, podemos ainda observar que para $x \in]a,c[$ a função representada no gráfico da Figura 3 é positiva enquanto, para os mesmos valores, a função h é crescente; e de forma análoga, quando $x \in]0,a[\cup]c,+\infty[$, a função representada no gráfico da Figura 2 é negativa, enquanto a função h é decrescente. Desta forma, podemos concluir que **o gráfico da Figura 3 é o gráfico de *h'***

6.

6.1. As abcissas dos pontos de interseção do gráfico de f com o eixo Ox são as soluções da equação $f(x) = 0$. Resolvendo a equação, temos que:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln\left(x^2\right) = 0 \Leftrightarrow 1 = \ln\left(x^2\right) \Leftrightarrow x^2 = e^1 \Leftrightarrow x^2 = e \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{e}$$

Assim, temos que as coordenadas dos pontos de interseção do gráfico de f com o eixo Ox são:

$$\left(-\sqrt{e},0\right) \text{ e } \left(\sqrt{e},0\right)$$

6.2. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(1 - \ln(x^2)\right)' = (1)' - \left(\ln(x^2)\right)' = 0 - \frac{(x^2)'}{x^2} = -\frac{2x}{x^2} = -\frac{2}{x}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{x} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{2}{x} = 0}_{\text{Eq. Impossível}}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de h, temos:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	n.d.	$-$	
$f(x)$		↗	n.d.	↘	

Assim podemos concluir que a função f:

- é crescente no intervalo $]-\infty,0]$;
- é decrescente no intervalo $[0,+\infty[$;
- não tem qualquer extremo.

7. Partindo da área do círculo menor temos:

$$
\begin{aligned}
a = \pi r^2 &\Leftrightarrow A\sqrt{\cos\theta} = \pi r^2 && \text{(porque } a = A\sqrt{\cos\theta}\text{)}\\
&\Leftrightarrow \pi R^2\sqrt{\cos\theta} = \pi r^2 && \text{(porque } A = \pi R^2\text{)}\\
&\Leftrightarrow R^2\sqrt{\cos\theta} = r^2 && \text{(dividindo ambos os membros por } \pi\text{)}\\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{2}r\right)^2\sqrt{\cos\theta} = r^2 && \text{(porque } R = \sqrt[4]{2}r\text{)}\\
&\Leftrightarrow \sqrt{2}r^2\sqrt{\cos\theta} = r^2 &&\\
&\Leftrightarrow \sqrt{2}\times\sqrt{\cos\theta} = 1 && \text{(dividindo ambos os membros por } r^2\text{)}\\
&\Leftrightarrow \sqrt{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}} && \text{(calculando o quadrado de ambos os membros)}\\
&\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} &&\\
&\Leftrightarrow \cos\theta = \cos\frac{\pi}{3} &&\\
&\Leftrightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} &&
\end{aligned}
$$

Logo $\theta = \frac{\pi}{3}$, porque $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

2008

Prova Escrita de Matemática A

12.º ano de Escolaridade

Prova 635/1.ª Fase 12 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos

2008

VERSÃO 1

Na folha de respostas, indique de forma legível a versão da prova.

A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens do Grupo I.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente elaboradas a lápis, sendo, a seguir, passadas a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e/ou dos itens, bem como as respectivas respostas.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de **escolha múltipla**, escreva, na folha de respostas,

- o **número** do item;
- a **letra identificativa** da alternativa correcta.

Não apresente cálculos, nem justificações.

Nos itens de resposta aberta com cotação igual ou superior a 15 pontos e que impliquem a produção de um texto, o domínio da comunicação escrita em língua portuguesa representa cerca de 10% da cotação.

As cotações dos itens encontram-se na página 12.

A prova inclui um Formulário na página 4.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\,\pi\, r^3$
(r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ \operatorname{cis} \dfrac{\theta + 2k\pi}{n},\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = \mathrm{x}_1\, \mathrm{p}_1 + \cdots + \mathrm{x}_\mathrm{n}\, \mathrm{p}_\mathrm{n}$

$\sigma = \sqrt{(\mathrm{x}_1 - \mu)^2\, \mathrm{p}_1 + \cdots + (\mathrm{x}_\mathrm{n} - \mu)^2\, \mathrm{p}_\mathrm{n}}$

$\mathrm{Se\ X\ é\ N}(\mu, \sigma), \mathrm{então:}$

$\mathrm{P}(\mu - \sigma < \mathrm{X} < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$\mathrm{P}(\mu - 2\sigma < \mathrm{X} < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$\mathrm{P}(\mu - 3\sigma < \mathrm{X} < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -\,u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u) = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

- Os oito itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Se apresentar mais do que uma alternativa, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. O João e a Maria convidaram três amigos para irem, com eles, ao cinema. Compraram cinco bilhetes com numeração seguida, numa determinada fila, e distribuíram-nos ao acaso.

Qual é a probabilidade de o João e a Maria ficarem sentados um ao lado do outro?

(A) $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{2}{5}$ **(C)** $\frac{3}{5}$ **(D)** $\frac{4}{5}$

2. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega \text{ e } B \subset \Omega)$. Sabe-se que:

- $P(A \cup B) = 80\%$
- $P(B) = 60\%$
- $P(A \cap B) = 10\%$

Qual é o valor de $P(A)$?

(P designa probabilidade).

(A) 10% **(B)** 20% **(C)** 30% **(D)** 40%

3. Admita que a variável peso, expressa em gramas, das maçãs de um pomar é bem modelada por uma distribuição normal N $(60; 5)$, em que 60 é o valor médio e 5 é o valor do desvio-padrão da distribuição.

Retira-se, ao acaso, uma dessas maçãs.

Considere os acontecimentos:

A : «o peso da maçã retirada é superior a 66 gramas»

B : «o peso da maçã retirada é inferior a 48 gramas»

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{B})$ **(B)** $P(\mathrm{A}) < P(\mathrm{B})$

(C) $P(\mathrm{B}) < P(\mathrm{A})$ **(D)** $P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) = 1$

4. Seja a um número real maior do que 1.

Qual dos seguintes valores é igual a $2\log_a\left(a^{\frac{1}{3}}\right)$?

(A) $-\frac{2}{3}$ **(B)** $-\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{2}{3}$

5. Na figura 1, está representada parte do gráfico de uma função f de domínio $]-\infty, 2[$.

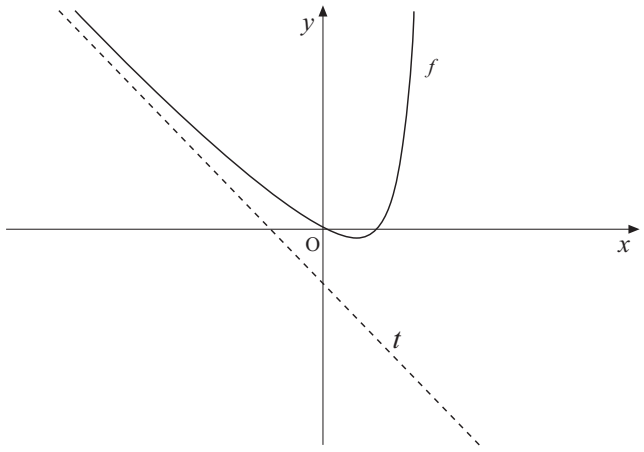


Fig. 1

A recta t, de equação $y = -x - 1$, é assimptota do gráfico de f quando x tende para $-\infty$.

Qual é o valor do $\lim\limits_{x \to -\infty} \big(f(x) + x + 1\big)$?

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

6. A figura 2 representa parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}$.

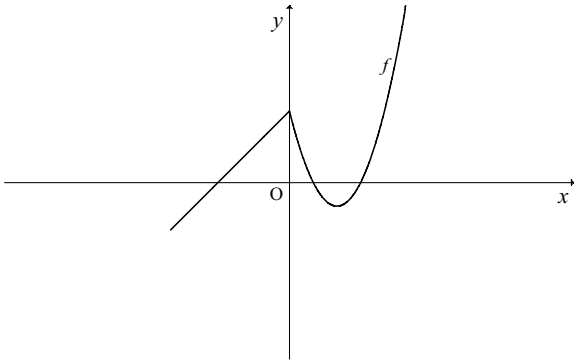
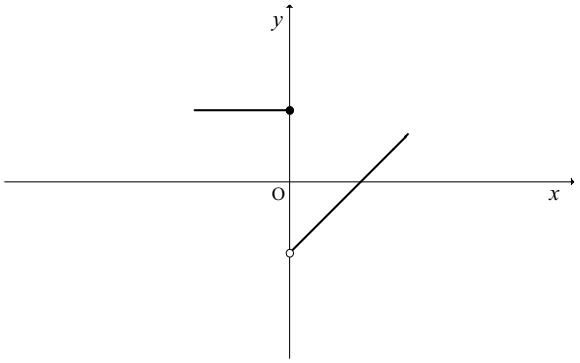


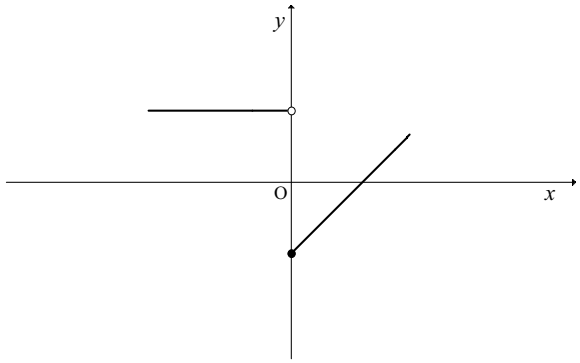
Fig. 2

Em qual das figuras seguintes pode estar parte da representação gráfica de f', derivada de f?

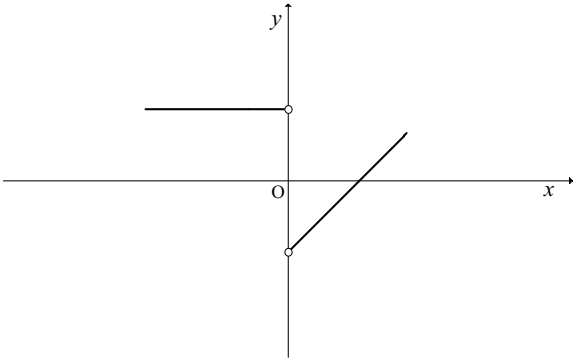
(A)



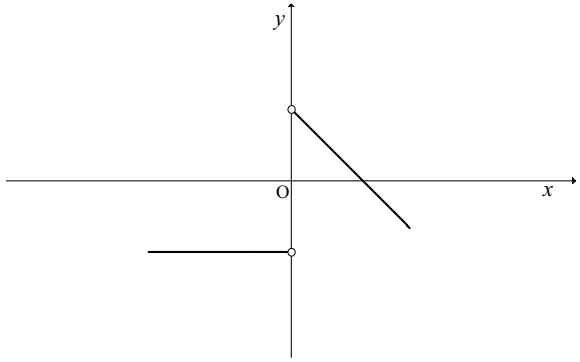
(B)



(C)



(D)



7. Seja $z = 3i$ um número complexo.

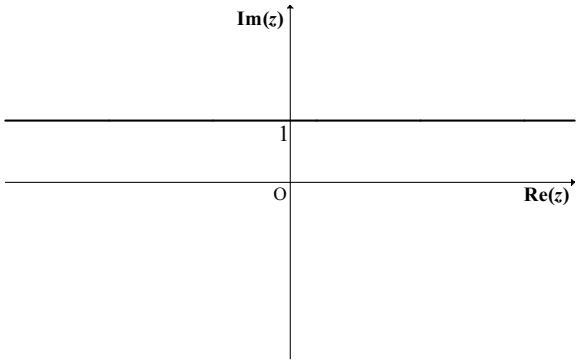
Qual dos seguintes valores é um argumento de z?

(A) 0 **(B)** $\frac{1}{2}\pi$ **(C)** π **(D)** $\frac{3}{2}\pi$

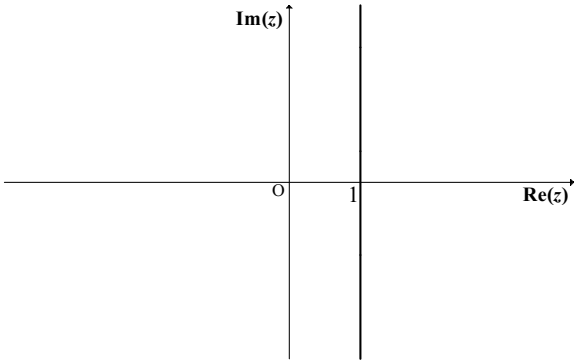
8. Considere, em $\mathbb{C}$, a condição $z + \overline{z} = 2$.

Em qual das figuras seguintes pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definidos por esta condição?

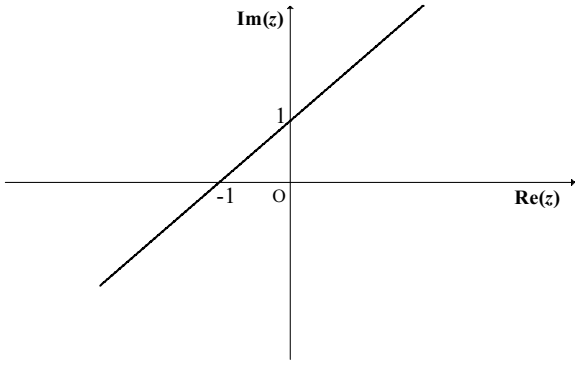
(A)



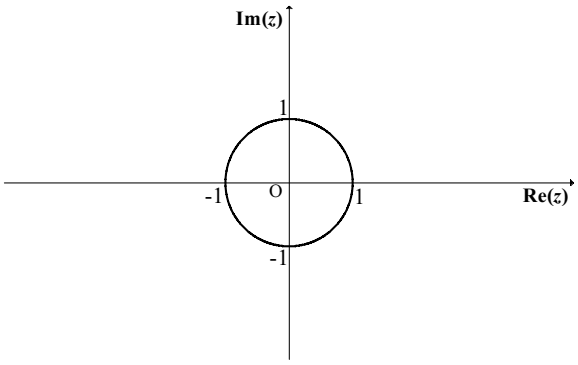
(B)



(C)



(D)



GRUPO II

Na resposta a itens deste grupo, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1 - \sqrt{3}\, i$ e $z_2 = 8 \operatorname{cis} 0$

(i designa a unidade imaginária).

1.1. Mostre, **sem recorrer à calculadora**, que $(-z_1)$ é uma raiz cúbica de z_2.

1.2. No plano complexo, sejam A e B as imagens geométricas de z_1 e de $z_3 = z_1 . i^{46}$, respectivamente.

Determine o comprimento do segmento $[AB]$.

2. Uma turma do 12.º ano de uma Escola Secundária está a organizar uma viagem de finalistas.

2.1. Os alunos da turma decidiram vender rifas, para angariarem fundos para a viagem.
A numeração das rifas é uma sequência de três algarismos (como, por exemplo, 099), iniciando-se em 000.
De entre as rifas, que foram todas vendidas, será sorteada uma, para atribuir um prémio.

Qual é a probabilidade de a rifa premiada ter um único algarismo cinco?

Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às centésimas.

2.2. A turma é constituída por doze raparigas e dez rapazes, que pretendem formar uma comissão organizadora da viagem. Sabe-se que a comissão terá obrigatoriamente três raparigas e dois rapazes. A Ana e o Miguel, alunos da turma, não querem fazer parte da comissão em simultâneo.
Explique, numa composição, que o número de comissões diferentes que se pode formar é dado por:

$$^{12}C_3 \times {}^{10}C_2 - {}^{11}C_2 \times 9$$

3. Em duas caixas, A e B, introduziram-se bolas indistinguíveis ao tacto:

- na caixa A: algumas bolas verdes e algumas bolas azuis;
- na caixa B: três bolas verdes e quatro azuis.

Retira-se, ao acaso, uma bola da caixa A e coloca-se na caixa B. De seguida, retira-se, também ao acaso, uma bola da caixa B.

Sabendo que a probabilidade de a bola retirada da caixa B ser azul é igual a $\frac{1}{2}$, mostre que a bola que foi retirada da caixa A e colocada na caixa B tinha cor verde.

4. Seja f a função de domínio $\left[-\pi, +\infty\right[$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-4x+1} & \text{se} \quad x \geq 0 \\ \dfrac{3\,\text{sen}\,(x)}{x^2} & \text{se} \quad -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

Estude a função f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados, escrevendo as suas equações, caso existam.

5. Considere, num referencial ortonormado xOy, os gráficos das funções f e g, de domínio $[0, 3]$, definidas por $f(x) = \ln(x+2)$ e $g(x) = e - e^{x-1}$

($\ln$ designa logaritmo de base e).

Determine a **área de um triângulo** $[OAB]$, com aproximação às décimas, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**.

Para construir o triângulo $[OAB]$, percorra os seguintes passos:

- visualize as curvas representativas dos gráficos das duas funções, **no domínio indicado**;
- reproduza, na sua folha de respostas, o referencial e as curvas visualizadas na calculadora;
- assinale, ainda:
  - a origem O do referencial;
  - o ponto A de intersecção do gráfico das duas funções, indicando as suas coordenadas, com aproximação às décimas;
  - o ponto B de intersecção do gráfico da função g com o eixo Ox.

6. Seja h a função de domínio $]-1, +\infty[$, definida por $h(x) = 4 - x + \ln(x+1)$

($\ln$ designa logaritmo de base e).

Resolva, **usando métodos analíticos**, os dois itens seguintes.

Nota:

A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use, pelo menos, duas casas decimais.

6.1. Estude a função h, quanto à monotonia, no seu domínio.

Indique os intervalos de monotonia e, se existir algum extremo relativo, determine-o.

6.2. Justifique, aplicando o **Teorema de Bolzano**, que a função h tem, pelo menos, um zero no intervalo $]5, 6[$.

7. Num determinado dia, um grupo de amigos decidiu formar uma associação desportiva.
Admita que, t dias após a constituição da associação, o número de sócios é dado, aproximadamente, por:

$$N(t) = \frac{2000}{1 + 199e^{-0,01\ t}} \ , \quad t \geq 0$$

Resolva, **usando métodos analíticos**, os dois itens seguintes.

Nota:

A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use aproximações às milésimas.

7.1. Determine $N(0)$ e $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t)$.

Interprete os valores obtidos, no contexto do problema.

7.2. Ao fim de quantos dias se comemorou a inscrição do sócio número 1000?

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I ..... (8 × 5 pontos)..... **40 pontos**

GRUPO II ..... **160 pontos**

1. ..... 30 pontos
- **1.1.** ..... 15 pontos
- **1.2.** ..... 15 pontos

2. ..... 30 pontos
- **2.1.** ..... 15 pontos
- **2.2.** ..... 15 pontos

3. ..... 15 pontos

4. ..... 15 pontos

5. ..... 15 pontos

6. ..... 30 pontos
- **6.1.** ..... 15 pontos
- **6.2.** ..... 15 pontos

7. ..... 25 pontos
- **7.1.** ..... 10 pontos
- **7.2.** ..... 15 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

Prova Escrita de Matemática A

12.º ano de Escolaridade

Prova 635/1.ª Fase

12 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos

2008

COTAÇÕES

GRUPO I ..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

GRUPO II ..... **160 pontos**

1. ..... 30 pontos
1.1. ..... 15 pontos
1.2. ..... 15 pontos

2. ..... 30 pontos
2.1. ..... 15 pontos
2.2. ..... 15 pontos

3. ..... 15 pontos

4. ..... 15 pontos

5. ..... 15 pontos

6. ..... 30 pontos
6.1. ..... 15 pontos
6.2. ..... 15 pontos

7. ..... 25 pontos
7.1. ..... 10 pontos
7.2. ..... 15 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO DA PROVA

As classificações a atribuir às respostas são expressas em números inteiros não negativos.

Itens de resposta fechada de escolha múltipla

As respostas em que é assinalada a alternativa correcta são classificadas com a cotação total do item. As respostas incorrectas são classificadas com zero pontos. Não há lugar a classificações intermédias.

Itens de resposta aberta

Os critérios de classificação destes itens apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

Os critérios de classificação dos itens de resposta aberta extensa orientada apresentam-se organizados por níveis de desempenho. Nestes itens, desde que tenham cotação igual ou superior a quinze pontos e impliquem a produção de um texto, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea das competências específicas da disciplina e das competências de comunicação escrita em língua portuguesa.

A avaliação das competências de comunicação escrita em língua portuguesa contribui para valorizar a classificação atribuída ao desempenho no domínio das competências específicas da disciplina. Esta valorização é cerca de 10% da cotação do item e faz-se de acordo com os níveis de desempenho a seguir descritos:

Nível	Descritor
3	Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique a perda de inteligibilidade e/ou de rigor de sentido.
2	Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou ortografia, cuja gravidade não implique a perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
1	Composição sem estruturação aparente, com a presença de erros graves de sintaxe, pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.

No quadro seguinte, apresentam-se critérios de classificação a aplicar às respostas aos itens em situações não consideradas anteriormente.

Situação	Classificação
1. Engano na identificação do item a que o examinando está a responder. 2. Omissão da identificação do item a que o examinando está a responder.	Deve ser vista e classificada a resposta se, pela resolução apresentada, for possível identificar inequivocamente o item.
3. É apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item e o examinando não indica, de forma inequívoca, aquela que pretende que seja classificada.	Deve ser vista e classificada apenas a resposta que surge em primeiro lugar, na folha de respostas.
4. É apresentado apenas o resultado final, embora a resolução do item exija cálculos e/ou justificações.	A resposta deve ser classificada com zero pontos.
5. Ilegibilidade da resposta.	A resposta deve ser classificada com zero pontos.
6. Item com etapas.	A cotação indicada para cada etapa é a classificação máxima que lhe é atribuível. A classificação da resposta ao item resulta da soma das classificações das diferentes etapas, à qual, eventualmente, se subtrai um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 16 e 21.
7. Etapa com passos.	A cotação indicada para cada passo é a classificação máxima que lhe é atribuível. A classificação da etapa resulta da soma das classificações dos diferentes passos.
8. Item ou etapa com classificação por níveis de desempenho.	O classificador deve enquadrar a resposta do examinando numa das descrições apresentadas, não podendo atribuir uma classificação diferente das indicadas.
9. Utilização de processos de resolução do item que não respeitam as instruções dadas [exemplo: «usando métodos analíticos»].	São classificadas com zero pontos as etapas em que a instrução não foi respeitada e todas as etapas subsequentes que delas dependam.
10. Utilização de processos de resolução do item não previstos nos critérios específicos.	Deve ser aceite qualquer processo de resolução cientificamente correcto, ainda que não esteja previsto nos critérios específicos de classificação ou no programa. O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante a distribuição da cotação do item pelas etapas percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.

Situação	Classificação
11. Não são apresentadas, explicitamente, todas as etapas, mas a resolução apresentada permite perceber, inequivocamente, que elas foram percorridas.	A(s) etapa(s) implícita(s) é(são) classificada(s) com a cotação total para ela(s) prevista.
12. Transposição incorrecta de dados do enunciado.	Se o grau de dificuldade da resolução da etapa não diminuir, deve subtrair-se um ponto à classificação da etapa. Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a classificação máxima a atribuir a essa etapa não deve ser superior a 50% da cotação prevista.
13. Erro ocasional num cálculo.	Deve subtrair-se um ponto à classificação da etapa em que ocorre o erro.
14. Erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.	A classificação máxima a atribuir a essa etapa não deve ser superior a 50% da cotação prevista para a mesma.
15. Erro na resolução de uma etapa.	A resolução dessa etapa é classificada de acordo com o erro cometido. Se o erro não diminuir o grau de dificuldade das etapas subsequentes, estas são classificadas de acordo com os critérios de classificação. Se o erro diminuir o grau de dificuldade das etapas subsequentes, a classificação máxima a atribuir a essas etapas não deve ser superior a 50% da cotação prevista.
16. Em cálculos intermédios, é pedida uma aproximação com um certo número de casas decimais. O examinando não respeita o pedido e/ou os arredondamentos estão incorrectos.	Deve subtrair-se um ponto à classificação total da resposta.
17. A apresentação do resultado final não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fracção e o examinando escreve na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros e o examinando apresenta-o em metros].	Deve subtrair-se um ponto à classificação da etapa correspondente ao resultado final.
18. Na apresentação do resultado final, não está expressa a unidade de medida [exemplo: «15» em vez de «15 metros»].	A etapa relativa ao resultado final é classificada como se a unidade de medida estivesse indicada.

Situação	Classificação
19. O resultado final é apresentado com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exacto.	Deve subtrair-se um ponto à classificação da etapa correspondente ao resultado final.
20. O resultado final apresenta um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou está incorrectamente arredondado.	Deve subtrair-se um ponto à classificação da etapa correspondente ao resultado final.
21. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal.	Deve subtrair-se um ponto à classificação total da resposta, excepto: – se as incorrecções ocorrerem apenas em etapas já classificadas com zero pontos; – no caso de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a **8.** ..... (8 × 5 pontos)..... **40 pontos**

As respostas correctas são as seguintes:

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	B	C	C	D	B	C	B	B
Versão 2	C	B	B	A	C	B	C	C

GRUPO II

É de aceitar qualquer processo de resolução cientificamente correcto, ainda que não esteja previsto nestes critérios específicos ou no programa (ver critério 10 dos critérios gerais).

1.1. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º processo

Calcular $(-z_1)$ na forma algébrica ..... 1 ponto

Concluir que $(-z_1) = \sqrt[3]{z_2} \Leftrightarrow (-z_1)^3 = z_2$ ..... 2 pontos

Calcular $\left(-z_1\right)^3$ na forma algébrica ..... 10 pontos

$(-1+\sqrt{3}\ i)^3 = (-1+\sqrt{3}\ i)^2 \times (-1+\sqrt{3}\ i)$ ..... 2 pontos

Quadrado do binómio ..... 4 pontos

Multiplicação ..... 4 pontos

ou

Desenvolver a potência utilizando o Binómio de Newton ..... 5 pontos

Restantes cálculos ..... 5 pontos

Concluir que $8 = 8\ \mathrm{cis}\ 0$ ..... 2 pontos

2.º processo

Calcular $(-z_1)$ na forma trigonométrica ..... 7 pontos

Calcular $(-z_1)$ na forma algébrica ..... 1 ponto

Módulo de $(-z_1)$ ..... 2 pontos

Argumento de $(-z_1)$ ..... 3 pontos

Escrever $(-z_1)$ na forma trigonométrica ..... 1 ponto

ou

Módulo de z_1 ..... 2 pontos

Argumento de z_1 ..... 3 pontos

Escrever z_1 na forma trigonométrica ..... 1 ponto

Escrever $(-z_1)$ na forma trigonométrica ..... 1 ponto

Concluir que $(-z_1) = \sqrt[3]{z_2} \Leftrightarrow (-z_1)^3 = z_2$ ..... 2 pontos

Calcular $\left(-z_1\right)^3$ $(8\ \mathrm{cis}\ (2\pi)$ ou equivalente $)$ ..... 4 pontos

Concluir que $8\ \mathrm{cis}\ (2\pi) = z_2$ ..... 2 pontos

3.º processo

Escrever a expressão geradora das raízes cúbicas de z_2 ..... 2 pontos

Concluir que uma das raízes cúbicas de z_2 é $2\ \mathrm{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ ..... 5 pontos

Escrever $2\ \mathrm{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ na forma algébrica ou $(-z_1)$ na forma trigonométrica (**ver nota**) ..... 7 pontos

Nota: A escrita de $(-z_1)$ na forma trigonométrica deve ser classificada de acordo com o já discriminado no 2.º processo; a escrita de $2\ \mathrm{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ na forma algébrica deve ser classificada de acordo com o seguinte critério:

$2\ \mathrm{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$ ..... 1 ponto

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$ ..... 2 pontos

$\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ..... 2 pontos

Restantes cálculos ..... 2 pontos

Concluir que $2\ \mathrm{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)=(-z_1)$ ..... 1 ponto

1.2. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º processo

Calcular $i^{46}(i^{46}=-1)$ ..... 3 pontos

Calcular $z_3\ (z_3=-1+\sqrt{3}\ i)$ ..... 1 ponto

Indicar as coordenadas de $A(1,-\sqrt{3})$ e de $B(-1,\sqrt{3})$ ..... (3 + 3) ..... 6 pontos

Calcular $\overline{AB}\ (\overline{AB}=4)$ ..... 5 pontos

2.º processo

Calcular $i^{46}(i^{46}=-1)$ ..... 3 pontos

Calcular $z_3\ (z_3=-1+\sqrt{3}\ i)$ ..... 1 ponto

Reconhecer que z_1 e z_3 são números complexos simétricos ..... 3 pontos

Referir que $\overline{OA}=\left|z_1\right|$ (ou $\overline{OB}=\left|z_3\right|$) ..... 2 pontos

Calcular $\overline{OA}$ (ou $\overline{OB}$) ..... 2 pontos

Calcular $\overline{AB}\ (\overline{AB}=\overline{OA}+\overline{OB}$ ou $\overline{AB}=2\overline{OA})$ ..... 4 pontos

3.º processo

Calcular $i^{46} (i^{46} = -1)$ ..... 3 pontos

Calcular z_3 $(z_3 = -1 + \sqrt{3}\ i)$ ..... 1 ponto

Identificar $\overline{AB} = \left|z_1 - z_3\right|$ (ou $\overline{AB} = \left|z_3 - z_1\right|$) ..... 5 pontos

Calcular $z_1 - z_3$ (ou $z_3 - z_1$) ..... 4 pontos

Calcular $\overline{AB}$ $(\overline{AB} = 4)$ ..... 2 pontos

2.1. ..... **15 pontos**

Expressão que dá a probabilidade (**ver notas 1, 2** e **3**)..... 12 pontos

Resultado na forma pedida $P = 0{,}24$ (**ver nota 4**) ..... 3 pontos

Notas:

1. Indicam-se, a seguir, possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, com a classificação a atribuir. As respostas apresentadas têm todas a forma de fracção. O examinando pode, no entanto, apresentar expressões equivalentes na forma de um produto de fracções.

1.º caso

Fracções com denominador ${}^{10}A'_3$ (ou equivalente) e com numerador igual a:

${}^{9}A'_2 \times 3$ (ou equivalente) ..... 12 pontos

${}^{10}A'_2 \times 3$ (ou equivalente) ou ${}^{9}A'_2$ (ou equivalente) ..... 8 pontos

${}^{9}A_2 \times 3$ (ou equivalente) ..... 6 pontos

2. Caso a resposta do examinando corresponda a um nível de desempenho que se enquadre entre duas situações previstas, a classificação a atribuir deve ser a que está indicada para a situação que, das duas, tem menor pontuação. Se a resposta do examinando revelar um desempenho inferior à última situação prevista para o 1.º caso, mas seja uma fracção de valor pertencente ao intervalo $[0,\ 1]$ e com denominador ${}^{10}A'_3$ (ou equivalente), a classificação a atribuir deverá ser de 4 pontos.

2.º caso

Fracções (de valor pertencente ao intervalo $[0, 1]$) com outros denominadores e com numerador igual a:

${}^{9}A'_2 \times 3$ (ou equivalente) ..... 6 pontos

Outras situações..... 0 pontos

3. Se o examinando indicar apenas o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, a classificação a atribuir a esta etapa deverá ser desvalorizada em um ponto.

4. A classificação relativa a esta etapa só é atribuída se a primeira etapa não tiver sido classificada com zero pontos.

2.2. ..... **15 pontos**

A composição deverá contemplar os seguintes pontos:

- Explicação de ${}^{12}C_3 \times {}^{10}C_2$: o examinando deverá referir que ${}^{12}C_3 \times {}^{10}C_2$ é o número de comissões diferentes com três raparigas e dois rapazes que é possível formar com os alunos da turma;
- Explicação de ${}^{11}C_2$: o examinando deverá referir que, como a Ana faz parte da comissão, só é preciso escolher duas raparigas de entre as onze restantes; o número de conjuntos diferentes que é possível formar é ${}^{11}C_2$;
- Explicação de $9\,(\text{ou } {}^{9}C_1)$: o examinando deverá referir que, como o Miguel faz parte da comissão, só é preciso escolher um rapaz de entre os nove restantes; o número de conjuntos diferentes que é possível formar é 9;
- Explicação de ${}^{11}C_2 \times 9$: o examinando deverá referir que ${}^{11}C_2 \times 9$ é o número de comissões diferentes com três raparigas e dois rapazes, incluindo a Ana e o Miguel, que é possível formar com os alunos da turma;
- Explicação de ${}^{12}C_3 \times {}^{10}C_2 - {}^{11}C_2 \times 9$: o examinando deverá referir que a diferença representa o número de comissões diferentes com três raparigas e dois rapazes que é possível formar com os alunos da turma, não incluindo, simultaneamente, a Ana e o Miguel.

Na tabela seguinte indica-se como a resposta a este item deve ser classificada, de acordo com os níveis de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa descritos nos critérios gerais e os níveis de desempenho no domínio específico da disciplina:

Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina		Descritores do nível de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa	Níveis		
			1	2	3
Níveis	5	O examinando explica correctamente os cinco pontos.	13	14	15
	4	O examinando explica correctamente quatro pontos.	10	11	12
	3	O examinando explica correctamente três pontos.	7	8	9
	2	O examinando explica correctamente dois pontos.	4	5	6
	1	O examinando explica correctamente um ponto.	1	2	3

Apenas podem ser atribuídas classificações correspondentes a um dos valores constantes do quadro. Não há lugar a classificações intermédias.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é zero pontos. Neste caso, não é classificado o desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

3. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos (**ver nota**):

1.º processo

Reconhecer que, se a probabilidade referida é $\frac{1}{2}$, ficam na caixa B tantas bolas verdes como azuis ..... 10 pontos

Concluir que a bola retirada da caixa A e colocada na caixa B só pode ser verde..... 5 pontos

2.º processo

O examinando considera que a bola retirada da caixa A e colocada na caixa B é azul.

Identificar o número de casos possíveis (8) ..... 3 pontos

Identificar o número de casos favoráveis (5) ..... 3 pontos

Probabilidade de a bola retirada da caixa B ser azul $\left(P = \frac{5}{8}\right)$ ..... 3 pontos

Concluir que o valor da probabilidade encontrado é diferente do valor da probabilidade dado ..... 3 pontos

Concluir que a bola retirada da caixa A e colocada na caixa B só pode ser verde..... 3 pontos

Nota: Se o examinando começar por considerar que a bola retirada da caixa A e colocada na caixa B é verde e concluir que a probabilidade referida é $\frac{1}{2}$, prova a implicação recíproca da implicação pedida. Neste caso a classificação a atribuir deverá ser de cinco pontos.

4. ..... **15 pontos**

Estudar a função quanto à existência de assimptotas verticais do seu gráfico ..... 8 pontos

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = e$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ (**ver nota 1**) ..... 3 pontos

Concluir que a recta de equação $x = 0$ é assimptota vertical do gráfico de f..... 2 pontos

Justificar que o gráfico de f não tem outras assimptotas verticais .... 3 pontos

Estudar a função quanto à existência de assimptotas horizontais do seu gráfico (**ver nota 2**) ..... 7 pontos

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ..... 5 pontos

Concluir que a recta de equação $y = 0$ é assimptota horizontal do gráfico de f, quando $x \to +\infty$ ..... 2 pontos

Notas:

1. Apenas o valor do $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ permite concluir a existência da assimptota vertical. Assim, a classificação a atribuir a esta etapa não deve ser desvalorizada, quer o examinando calcule os dois limites laterais, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$, quer apenas calcule $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.

2. Se o examinando tentar calcular $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, a classificação a atribuir a esta etapa deve ser desvalorizada em 2 pontos.

5. ..... **15 pontos**

Representar graficamente a função f em $[0, 3]$ ..... 2 pontos

Representar graficamente a função g em $[0, 3]$ ..... 2 pontos

Assinalar devidamente o ponto O ..... 1 ponto

Assinalar devidamente o ponto A ..... 1 ponto

Coordenadas aproximadas do ponto $A\,(1{,}4;\ 1{,}2)$ (**ver nota**)..... (1 + 1) ..... 2 pontos

Assinalar devidamente o ponto B ..... 1 ponto

Coordenadas do ponto $B(2,\ 0)$ ..... (1 + 1) ..... 2 pontos

Desenhar o triângulo $[OAB]$ ..... 1 ponto

Expressão que dá a área do triângulo $[OAB]$ ..... 2 pontos

Área do triângulo $[OAB]$ ..... 1 ponto

Nota: São de aceitar, sem qualquer desvalorização, para valores das coordenadas do ponto A, valores que difiram dos valores dados numa décima. Se forem apresentados outros valores, que não respeitem o referido anteriormente, a classificação a atribuir à respectiva etapa deve ser de zero pontos.

6.1. ..... **15 pontos**

Determinar $h'(x)$ ..... 2 pontos

Determinar os zeros de h' ..... 4 pontos

Escrever a equação $h'(x) = 0$ ..... 1 ponto

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ..... 3 pontos

Estudar o sinal de h' e consequente conclusão, relativamente à monotonia e aos extremos relativos de h, com recurso a um quadro ..... 5 pontos

Primeira linha do quadro (relativa à variável x, de acordo com o domínio da função) ..... 2 pontos

Sinal de h' ..... 2 pontos

Relação entre o sinal de h' e a monotonia de h ..... 1 ponto

Determinar o máximo $(h(0) = 4)$ ..... 2 pontos

Indicar os intervalos de monotonia (**ver nota**) ..... 2 pontos

Nota: A resposta correcta é o intervalo $]-1, 0]$, para a indicação do intervalo onde a função é monótona crescente, e o intervalo $[0, +\infty[$, para a indicação do intervalo onde a função é monótona decrescente. No entanto, é de aceitar, sem qualquer desvalorização, o intervalo de $]-1, 0[$ para o intervalo onde a função é monótona crescente e $]0, +\infty[$ para o intervalo onde a função é monótona decrescente.

6.2. ..... **15 pontos**

Referir que a função h é contínua em $[5,6]$ (**ver nota 1**) ..... 2 pontos

Calcular $h(5)$ ..... 3 pontos

Calcular $h(6)$ ..... 3 pontos

Concluir que $h(6) < 0 < h(5)$ (ou concluir que $h(5)$ e $h(6)$ têm sinais contrários) ..... 3 pontos

Concluir o pretendido (**ver nota 2**) ..... 4 pontos

Notas:

1. Se o examinando não referir a continuidade da função no intervalo $[5,6]$, mas afirmar que a função é continua em todo o seu domínio, a classificação a atribuir a esta etapa não deve ser desvalorizada.

2. Se o examinando concluir o pretendido, mas não referir que a conclusão resulta do Teorema de Bolzano, ou do seu Corolário, a classificação a atribuir a esta etapa não deve ser desvalorizada.

7.1. ..... **10 pontos**

Calcular $N(0)$ e interpretar ..... 5 pontos

$N(0) = 10$ ..... 2 pontos

Interpretação: 10 corresponde ao número de amigos

que formaram a associação..... 3 pontos

Calcular $\lim_{t \to +\infty} N(t)$ e interpretar..... 5 pontos

$\lim_{t \to +\infty} N(t) = 2000$ ..... 2 pontos

Interpretação: com o decorrer do tempo, o número de sócios

aproxima-se de 2000 ..... 3 pontos

7.2. ..... **15 pontos**

Equacionar o problema $N(t) = 1000$ ..... 2 pontos

Resolver a equação $\frac{2000}{1+199e^{-0.01t}} = 1000$ ..... 11 pontos

Obter a equação $e^{-0,01t} = \frac{1}{199}$ (ou equivalente)..... 5 pontos

Obter a equação $-0,01t = \ln\left(\frac{1}{199}\right)$ ..... 3 pontos

Restantes cálculos ..... 3 pontos

Resposta: 529 ou 530 dias ..... 2 pontos

Exame nacional de Matemática A **(2008, 1.ª fase)**

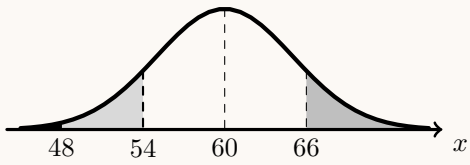
Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como se pretende ordenar 5 elementos (amigos) em 5 posições (lugares), existem ${}^5A_5 = P_5 = 5!$ casos possíveis.
   Como se pretende que o João e a Maria fiquem sentados em lugares consecutivos, podemos considerar 2 formas diferentes (o João à esquerda da Maria, ou o João à direita) e, por cada uma destas duas formas, existem 4 elementos (os 3 amigos e o par João+Maria que, nesta fase, se consideram juntos) para 4 posições (sendo que uma das posições tem dois bancos), ou seja, $2 \times {}^4A_4 = 2 \times P_4 = 2 \times 4!$ casos favoráveis.
   Assim, pela Regra de Laplace, a probabilidade de o João e a Maria ficarem sentados um ao lado do outro é:
   $$\frac{2 \times 4!}{5!} = \frac{2 \times 4!}{5 \times 4!} = \frac{2}{5}$$
   Resposta: **Opção B**

2. Como
   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B) = P(A)$$
   Vem que:
   $$P(A) = P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B) = 80\% - 60\% + 10\% = 30\%$$
   Resposta: **Opção C**

3. Como a variável aleatória X segue uma distribuição normal, temos que, $P(X < \mu - k) = P(X > \mu + k)\,, k \in \mathbb{R}^+$, e como $\mu = 60$ e $\sigma = 5$, vem:
   - $P(X > 66) = P(X > 60 + 6) = P(X < 60 - 6) = P(X < 54)$
   - Como $48 < 54 < \mu$, temos que $P(X < 48) < P(X < 54)$

   Assim, como $P(A) = P(X < 54)$, e $P(B) = P(X < 48)$, temos que:
   $$P(B) < P(A)$$
   Resposta: **Opção C**

4. Usando as propriedades dos logaritmos temos que:
   $$2\log_a\left(a^{\frac{1}{3}}\right) = 2 \times \frac{1}{3}\log_a a = \frac{2}{3}\log_a a = \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$$
   Resposta: **Opção D**

5. Como a reta de equação $y = -x - 1$, é assíntota do gráfico de f quando x tende para $-\infty$, pela definição de assíntota, temos que:

$$\lim_{x\to-\infty}\Big(f(x) - (-x-1)\Big) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}\Big(f(x) + x + 1\Big) = 0$$

Resposta: **Opção B**

6. Pela observação do gráfico sabemos que f' é constante, e positiva, para $x < 0$, porque a função varia num ritmo constante e é crescente, pelo que apenas as os gráficos das opções (A), (B) e (C) são coerentes com esta informação.

Como a semitangente ao gráfico de f à esquerda de 0 tem declive positivo, e a semitangente ao gráfico de f à direta de 0 tem declive negativo, ou seja,

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

Podemos concluir que não existe $\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, pelo que f' não está definida em $x = 0$; e os únicos gráficos que são compatíveis com esta informação são os das opções (C) e (D).

Resposta: **Opção C**

7. O número complexo $3i$ tem a sua representação geométrica sobre a parte positiva do eixo imaginário, pelo que define um ângulo de $\dfrac{\pi}{2}$ radianos com o semieixo real positivo, logo $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{2}\pi$

Resposta: **Opção B**

8. Sendo $z = a + bi$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, vem que $\overline{z} = a - bi$.

Assim, temos que $z + \overline{z} = 2 \Leftrightarrow a + bi + a - bi = 2 \Leftrightarrow 2a = 2 \Leftrightarrow a = 1$

Ou seja, a condição $z + \overline{z} = 2$ pode ser escrita como $\mathrm{Re}\,(z) = 1$, e a sua representação geométrica é a reta paralela ao eixo imaginário que contém a representação geométrica do número complexo $w = 1$.

Resposta: **Opção B**

GRUPO II

1.

1.1. Temos que $-z_1 = -(1-\sqrt{3}i) = -1+\sqrt{3}i$ e escrevendo $-z_1$ na f.t. temos $-z_1 = \rho \operatorname{cis}\theta$, onde:

- $\rho = |-z_1| = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$
- $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$; como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta < 0$, θ é um ângulo do 2º quadrante, logo $\theta = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$

Logo $-z_1 = 2\operatorname{cis}\dfrac{2\pi}{3}$

Vamos agora recorrer à fórmula de Moivre para determinar $(-z_1)^3$:

$(-z_1)^3 = \left(2\operatorname{cis}\dfrac{2\pi}{3}\right)^3 = 2^3 \operatorname{cis}\left(3\times\dfrac{2\pi}{3}\right) = 8\operatorname{cis}(2\pi) = 8\operatorname{cis}0$

Como $(-z_1)^3 = z_2$, podemos concluir que $(-z_1)$ é uma raiz cúbica de z_2

1.2. Como $i^{46} = i^{4\times 11+2} = i^2 = -1$, pelo que $z_2 = z_1.i^{46} = z_1(-1) = -z_1 = -1+\sqrt{3}i$

Como $\overline{AB} = |z_1 - z_2|$, vem que:

$$\overline{AB} = \left|1-\sqrt{3}i-(-1+\sqrt{3}i)\right| = \left|1-\sqrt{3}i+1-\sqrt{3}i\right| = \left|2-2\sqrt{3}i\right| =$$

$$= \sqrt{2^2+(-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+4\times 3} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$

2.

2.1. Como as rifas têm 3 algarismos, selecionados de um conjunto de 10, sendo relevante a ordenação e com eventuais repetições, o número de casos possíveis, ou seja, o número de rifas é ${}^{10}A'_3 = 10^3 = 1000$
Para calcular o número de rifas com um único algarismo 5, começamos por selecionar a posição do algarismo 5 (selecionando uma das 3 posições), o que permite ${}^3C_1 = 3$ hipóteses. Depois, por cada uma delas devemos selecionar uma sequência de 2 algarismos, escolhidos de entre 9 hipóteses (todos os algarismos à exceção do 5), permitindo eventuais repetições e considerando a ordem relevante, ou seja ${}^9A'_2 = 9^2$. Pelo que o número de casos favoráveis é 3×9^2.
Assim, pela Regra de LaPlace, a probabilidade de a rifa premiada ter um único algarismo cinco, na forma de dízima, com aproximação às centésimas, é:

$$\frac{3\times 9^2}{1000} \approx 0{,}24$$

2.2. Como a Ana e o Miguel não querem fazer parte da comissão em simultâneo, uma forma de calcular o número de comissões diferentes que se podem formar é calcular o número de todas as comissões (formadas por 3 raparigas quaisquer e dois rapazes quaisquer) e subtrair o número de comissões que integram simultaneamente a Ana e o Miguel.

Como não existem diferenças entre os elementos da comissão, a ordenação dos elementos que a constituem não é relevante, e como existem 12 raparigas, e em cada comissão estão 3, o número de conjuntos de raparigas numa comissão arbitrária é ${}^{12}C_3$. Da mesma forma, como existem 10 rapazes, o número de conjuntos de 2 rapazes que podem integrar uma comissão é ${}^{10}C_2$, pelo que o número de comissões diferentes que se podem formar é ${}^{12}C_3 \times {}^{10}C_2$.
Se considerarmos o número de comissões em que estão incluídos a Ana e o Miguel, simultaneamente resulta de considerar o número de conjuntos de 2 raparigas, selecionada de entre as 11 (todas exceto a Ana), ${}^{11}C_2$; e selecionar 1 dos 9 rapazes (todos exceto o Miguel), ${}^{9}C_1 = 9$. Logo o número de comissões com estes dois colegas na sua composição é ${}^{11}C_2 \times 9$.
Assim, se subtrairmos os dois valores, obtemos o número de comissões que não são integradas pelos dois em simultâneo:

$$ {}^{12}C_3 \times {}^{10}C_2 - {}^{11}C_2 \times 9$$

3. Se a probabilidade de a bola retirada da caixa B ser azul é igual a $\frac{1}{2}$, e na caixa B só existem bolas verdes e azuis, então o número de bolas azuis e verde é igual.
Como a composição inicial era de 3 bolas verdes e 4 bolas azuis, então a bola retirada da caixa A (e colocada na caixa B) tinha cor verde.

4. Como $D_f = [-\pi, +\infty[$, só pode existir uma assíntota horizontal quando $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{-4x+1}\right) = e^{-4(+\infty)+1} = e^{-\infty} = 0$$

Logo verifica-se que a reta de equação $y = 0$ é a única assíntota horizontal do gráfico de f

Como a função é contínua em $]-\pi,0[$ e em $]0,+\infty[$, por resultar de operações sucessivas entre funções contínuas, então as retas definidas por $x = -\pi$ e por $x = 0$ são as duas únicas retas verticais que podem ser assíntotas do gráfico de f:

$$\lim_{x\to-\pi^+} f(x) = \lim_{x\to-\pi^+} \frac{3\,\text{sen}\,(x)}{x^2} = \frac{3\,\text{sen}\,(-\pi)}{-\pi^2} = \frac{0}{-\pi^2} = 0$$

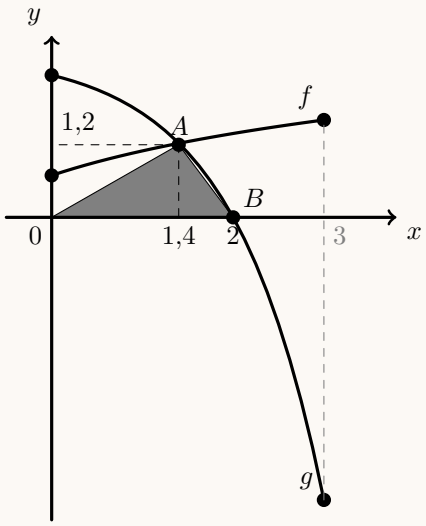
Ou seja, a reta de equação $x = -\pi$ não é uma assíntota do gráfico de f

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{3\,\text{sen}\,(x)}{x^2} = \lim_{x\to0^-} \left(\frac{3}{x} \times \frac{\text{sen}\,(x)}{x}\right) = \lim_{x\to0^-} \frac{3}{x} \times \underbrace{\lim_{x\to0^-} \frac{\text{sen}\,(x)}{x}}_{\text{Limite Notável}} = \frac{3}{0^-} \times 1 = -\infty \times 1 = -\infty$$

Assim, a reta de equação $x = 0$, é a única assíntota vertical do gráfico de f

5. Traçando na calculadora gráfica os gráficos das restrições das funções f e g ao intervalo [0,3] podemos visualizar o gráfico reproduzido na figura seguinte.

Assim, as coordenadas do ponto A, também assinalado na figura ao lado, podem ser determinadas com aproximação às décimas, usando a função da calculadora que permite determinar valores aproximados para as coordenadas de pontos de interseção de dois gráficos, tendo sido obtidos os valores, arredondados às décimas, das coordenadas do ponto $A(1{,}4; 1{,}2)$



O valor da abcissa do ponto B, também representado na figura, pode ser determinado com recurso à função da calculadora gráfica que permite determinar valores aproximados para os zeros de uma função. Assim, o valor, arredondado às décimas, da abcissa do ponto B é $x_B \approx 2{,}0$

Logo a área do triângulo, também desenhado na figura, pode ser calculada usando o valor da abcissa do ponto B, x_B, como medida da base e o valor da ordenada do ponto A, y_A, como o valor da altura. Assim, calculando o valor arredondado às décimas da área do triângulo, temos:

$$A_{[OAB]} = \frac{x_B \times y_A}{2} \approx \frac{2{,}0 \times 1{,}2}{2} \approx 1{,}2$$

6.

6.1. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$h'(x) = \big(4 - x + \ln(x+1)\big)' = (4') - (x)' + \big(\ln(x+1)\big)' = 0 - 1 + \frac{(x+1)'}{x+1} = -1 + \frac{1}{x+1}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = 1 \Leftrightarrow 1 = x+1 \wedge \underbrace{x+1 \neq 0}_{\text{PV, } x > -1} \Leftrightarrow 0 = x$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de h, temos:

x	-1		0	$+\infty$
$h'(x)$	n.d.	$+$	0	$-$
$h(x)$	n.d.	↗	Máx	↘

Assim, podemos concluir que a função h:

- é crescente no intervalo $]-1{,}0]$;
- é decrescente no intervalo $[0, +\infty[$;
- tem um único extremo - um máximo (cujo maximizante é 0).

Calculando o valor do máximo, temos:

$$h(0) = 4 - 0 + \ln(0+1) = 4 + \ln 1 = 4 + 0 = 4$$

6.2. Como a função h resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $]-1,+\infty[$, é contínua em $]-1,+\infty[$, e também em [5,6], porque $[5,6] \subset]-1,+\infty[$

Como $-0{,}05 < 0 < 0{,}79$, ou seja, $h(6) < 0 < h(5)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]5,6[$ tal que $h(c) = 0$, ou seja, que existe, pelo menos, um zero da função h no intervalo $]5,6[$

C.A.

$h(5) = 4 - 5 + \ln(5+1) =$

$= -1 + \ln 6 \approx 0{,}79$

$h(6) = 4 - 6 + \ln(6+1) =$

$= -2 + \ln 7 \approx -0{,}05$

7.

7.1. Calculando $N(0)$ temos que:

$$N(0) = \frac{2000}{1+199e^{-0{,}01\times 0}} = \frac{2000}{1+199e^{0}} = \frac{2000}{1+199\times 1} = \frac{2000}{200} = 10$$

Como $N(0) = 10$, então o número de sócios da associação, zero dias após a constituição era de 10, ou seja, a associação foi constituída com 10 sócios.

Calculando $\lim\limits_{x\to+\infty} N(t)$ temos que:

$$\lim_{x\to+\infty} N(t) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2000}{1+199e^{-0{,}01t}} = \frac{2000}{1+199e^{-0{,}01\times(+\infty)}} = \frac{2000}{1+199e^{-\infty}} = \frac{2000}{1+199\times 0^{+}} = 2000$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} N(t) = 2000$ então, a um aumento arbitrário do valor de t corresponde um valor de N aproximadamente de 2000, ou seja, com o passar do tempo o número de sócios da associação aproxima-se indefinidamente de 2000.

7.2. Equacionado o problema e resolvendo a equação, vem:

$$N(t) = 1000 \Leftrightarrow \frac{2000}{1+199e^{-0{,}01t}} = 1000 \Leftrightarrow \frac{2000}{1000} = 1+199e^{-0{,}01t} \Leftrightarrow 2-1 = 199e^{-0{,}01t} \Leftrightarrow \frac{1}{199} = e^{-0{,}01t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0{,}01t = \ln\frac{1}{199} \Leftrightarrow t = \frac{\ln\frac{1}{199}}{-0{,}01} \Rightarrow t \approx 529{,}330$$

Assim, podemos observar que ao fim de 529 dias ainda a associação ainda não contava com 1000 associados e que este número foi atingido durante o 530º dia.

Prova Escrita de Matemática A

12.º ano de Escolaridade

Prova 635/2.ª Fase 11 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos

2008

VERSÃO 1

Na folha de respostas, indique de forma legível a versão da prova.

A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens do Grupo I.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente elaboradas a lápis, sendo, a seguir, passadas a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e/ou dos itens, bem como as respectivas respostas.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de **escolha múltipla**, escreva, na folha de respostas,

- o **número** do item;
- a **letra identificativa** da alternativa correcta.

Não apresente cálculos, nem justificações.

Nos itens de resposta aberta com cotação igual ou superior a 15 pontos e que impliquem a produção de um texto, o domínio da comunicação escrita em língua portuguesa representa cerca de 10% da cotação.

As cotações dos itens encontram-se na página 11.

A prova inclui um Formulário na página 4.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\,\pi\, r^3$
(r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ \operatorname{cis} \dfrac{\theta + 2k\pi}{n},\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = x_1\, p_1 + \cdots + x_n\, p_n$

$\sigma = \sqrt{(x_1-\mu)^2 p_1 + \cdots + (x_n-\mu)^2 p_n}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

- Os oito itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Se apresentar mais do que uma alternativa, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Ao disputar um torneio de tiro ao alvo, o João tem de atirar sobre o alvo quatro vezes. Sabe-se que, em cada tiro, a probabilidade de o João acertar no alvo é 0,8.

Qual é a probabilidade de o João acertar sempre no alvo, nas quatro vezes em que tem de atirar?

(A) $0{,}0016$ **(B)** $0{,}0064$ **(C)** $0{,}0819$ **(D)** $0{,}4096$

2. Uma caixa A contém duas bolas verdes e uma bola amarela. Outra caixa B contém uma bola verde e três bolas amarelas. As bolas colocadas nas caixas A e B são indistinguíveis ao tacto.
Lança-se um dado cúbico perfeito, com as faces numeradas de 1 a 6. Se sair o número 5, tira-se uma bola da caixa A; caso contrário, tira-se uma bola da caixa B.

Qual é a probabilidade de a bola retirada ser verde, sabendo que saiu o número 5 no lançamento do dado?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{3}{7}$ **(D)** $\frac{2}{3}$

3. Uma linha do Triângulo de Pascal tem quinze elementos.

Quantos elementos dessa linha são inferiores a 100?

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 6 **(D)** 8

4. Sabe-se que o ponto $P(1, 3)$ pertence ao gráfico da função $f(x) = 2^{ax} - 1,\ a \in \mathbb{R}$.

Qual é o valor de a?

(A) 2 **(B)** 1 **(C)** 0 **(D)** -2

5. Na figura 1 está representada parte do gráfico de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$ e contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. As rectas de equações $x = -2$ e $y = 1$ são as únicas assimptotas do gráfico de g.

Seja (x_n) uma sucessão tal que $\lim\limits_{n \to +\infty} g(x_n) = +\infty$.

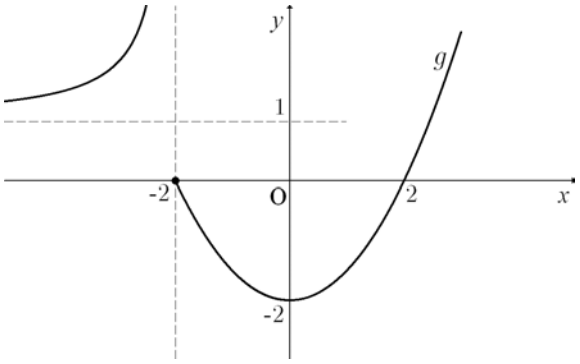


Fig. 1

Qual das expressões seguintes pode ser o termo geral da sucessão (x_n) ?

(A) $-2 + \frac{2}{n}$ **(B)** $-2 - \frac{1}{n}$ **(C)** $1 + \frac{1}{n}$ **(D)** $1 - \frac{1}{n}$

6. Na figura 2 está representada parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sendo $y = -1$ a única assimptota do seu gráfico.

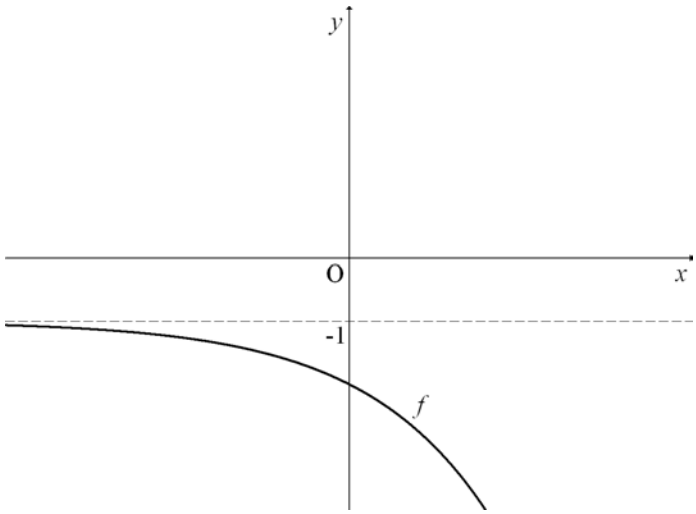


Fig. 2

Qual é o valor do $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3}{f(x)}$?

(A) $-\infty$ **(B)** -3 **(C)** -1 **(D)** 3

7. Seja z um número complexo de argumento $\frac{\pi}{6}$.

Qual dos seguintes valores é um argumento de $(-z)$?

(A) $-\frac{\pi}{6}$ **(B)** $\frac{5}{6}\pi$ **(C)** π **(D)** $\frac{7}{6}\pi$

8. Considere a figura 3, representada no plano complexo.

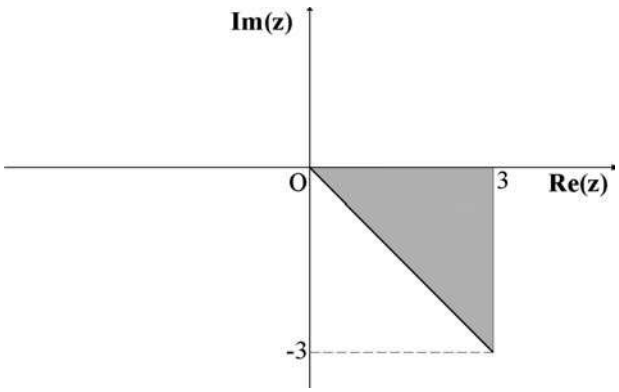


Fig. 3

Qual é a condição, em $\mathbb{C}$, que define a região sombreada da figura, incluindo a fronteira?

(A) $\mathrm{Re}(z) \leq 3 \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq 0$ **(B)** $\mathrm{Re}(z) \leq 3 \wedge 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}$

(C) $\mathrm{Im}(z) \leq 3 \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq 0$ **(D)** $\mathrm{Re}(z) \geq 3 \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq 0$

GRUPO II

Na resposta a itens deste grupo, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1 - i$ (i designa a unidade imaginária).

1.1. **Sem recorrer à calculadora**, determine o valor de $\dfrac{2z_1 - i^{18} - 3}{1 - 2i}$.

Apresente o resultado na forma algébrica.

1.2. Considere z_1 uma das raízes quartas de um certo número complexo z.

Determine uma outra raiz quarta de z, cuja imagem geométrica é um ponto pertencente ao 3.º quadrante.

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

2.

2.1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Prove que: $$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) - P(B) + P(A \cup B)$$

(P designa a probabilidade, $\overline{A}$ designa o acontecimento contrário de A e $\overline{B}$ designa o acontecimento contrário de B.)

2.2. Numa determinada cidade, das 160 raparigas que fizeram o exame nacional de Matemática, 65% tiveram classificação positiva, e, dos 120 rapazes que fizeram o mesmo exame, 60% também tiveram classificação positiva.
Escolhendo, ao acaso, um dos estudantes que realizaram o exame, qual é a probabilidade de o estudante escolhido não ser rapaz ou não ter tido classificação positiva?

Apresente o resultado em forma de dízima, com aproximação às centésimas.

Nota:

Se o desejar, utilize a igualdade referida em **2.1.** Neste caso, deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos A e B, no contexto da situação apresentada; no entanto, pode optar por resolver o problema por outro processo.

3. Numa caixa temos três fichas com o número 1 e quatro fichas com o número 2, indistinguíveis ao tacto.
Retiram-se, ao acaso e de uma só vez, duas fichas.
Seja X a variável aleatória: *«a soma dos números inscritos nas duas fichas»*.

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X.

Indique, justificando, o valor mais provável da variável X.

Apresente as probabilidades na forma de fracção irredutível.

4. Considere a função f, de domínio $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, definida por $f(x) = \frac{\ln(2x+1)}{2x+1}$, e a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x - 2$ ($\ln$ designa logaritmo de base e).

Indique as soluções inteiras da inequação $f(x) > g(x)$, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**.

Para resolver esta inequação, percorra os seguintes passos:

- visualize as curvas representativas dos gráficos das duas funções;
- reproduza, na sua folha de respostas, o referencial e as curvas visualizadas na calculadora;
- assinale, ainda, os pontos A e B, de intersecção dos gráficos das duas funções, indicando as suas coordenadas, com aproximação às décimas.

5. Na figura 4 estão representadas duas rectas paralelas, a recta AB (em que A e B são pontos fixos) e a recta s.
O ponto S é um ponto móvel, deslocando-se ao longo de toda a recta s.
Para cada posição do ponto S, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo BAS e seja $a(x)$ a área do triângulo $[ABS]$.

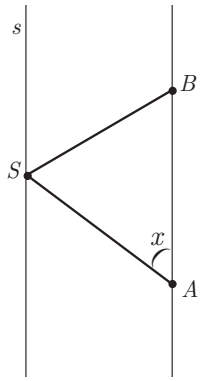


Fig. 4

Apenas um dos seguintes gráficos pode representar a função a.

Numa composição, explique por que razão cada um dos outros três gráficos não pode representar a função a.

Gráfico 1

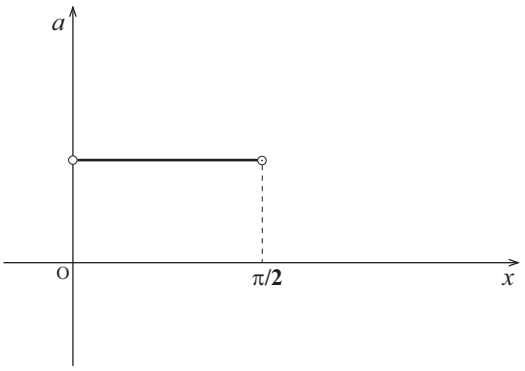


Gráfico 2

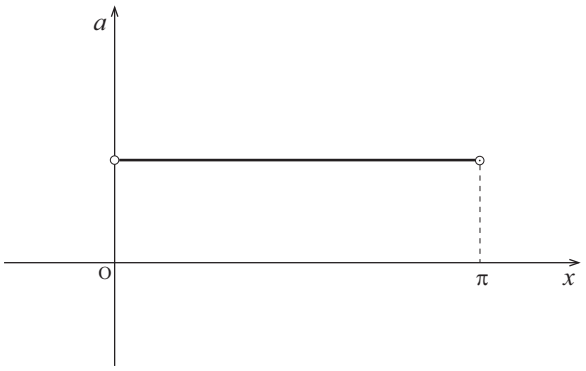


Gráfico 3

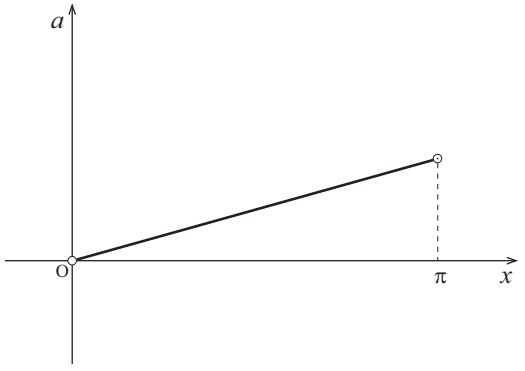
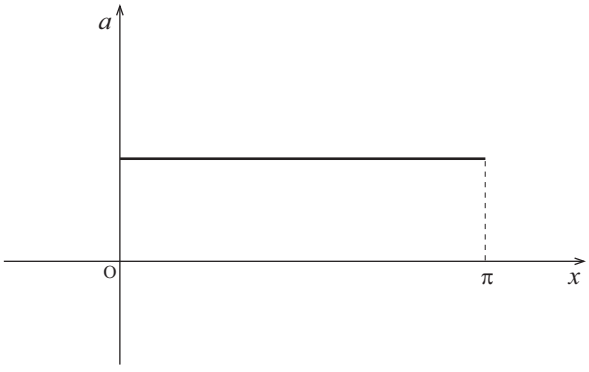


Gráfico 4



6. A massa de uma substância radioactiva diminui com a passagem do tempo. Supõe-se que, para uma amostra de uma determinada substância, a massa, em gramas, ao fim de t **horas** de observação, é dada pelo modelo matemático $M(t) = 15 \times e^{-0,02\ t}$, $t \geq 0$.

Resolva, **usando métodos analíticos**, os dois itens que se seguem.

Nota:

A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

6.1. Ao fim de quanto tempo se reduz a metade a massa inicial da amostra da substância radioactiva?

Apresente o resultado em **horas e minutos**, estes arredondados às unidades.

6.2. Utilize o **Teorema de Bolzano** para justificar que houve, pelo menos, um instante, entre as 2 horas e 30 minutos e as 4 horas após o início da observação, em que a massa da amostra da substância radioactiva atingiu os 14 gramas.

7. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = 2 + \operatorname{sen}(4x)$.

Resolva, **usando métodos analíticos**, os dois itens seguintes.

Nota:

A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

7.1. Determine $g'(0)$, recorrendo à **definição de derivada** de uma função num ponto.

7.2. Estude a monotonia da função g, no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, indicando o valor dos extremos relativos, caso existam, e os intervalos de monotonia.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I ..... (8 × 5 pontos)..... **40 pontos**

GRUPO II ..... **160 pontos**

1. ..... 30 pontos
- **1.1.** ..... 15 pontos
- **1.2.** ..... 15 pontos

2. ..... 30 pontos
- **2.1.** ..... 15 pontos
- **2.2.** ..... 15 pontos

3. ..... 15 pontos

4. ..... 15 pontos

5. ..... 15 pontos

6. ..... 30 pontos
- **6.1.** ..... 15 pontos
- **6.2.** ..... 15 pontos

7. ..... 25 pontos
- **7.1.** ..... 10 pontos
- **7.2.** ..... 15 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

Prova Escrita de Matemática A

12.º ano de Escolaridade

Prova 635/2.ª Fase

11 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos

2008

COTAÇÕES

GRUPO I ..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

GRUPO II ..... **160 pontos**

1. ..... 30 pontos
1.1. ..... 15 pontos
1.2. ..... 15 pontos

2. ..... 30 pontos
2.1. ..... 15 pontos
2.2. ..... 15 pontos

3. ..... 15 pontos

4. ..... 15 pontos

5. ..... 15 pontos

6. ..... 30 pontos
6.1. ..... 15 pontos
6.2. ..... 15 pontos

7. ..... 25 pontos
7.1. ..... 10 pontos
7.2. ..... 15 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO DA PROVA

As classificações a atribuir às respostas são expressas em números inteiros não negativos.

Itens de resposta fechada de escolha múltipla

As respostas em que é assinalada a alternativa correcta são classificadas com a cotação total do item. As respostas incorrectas são classificadas com zero pontos. Não há lugar a classificações intermédias.

Itens de resposta aberta

Os critérios de classificação destes itens apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

Os critérios de classificação dos itens de resposta aberta extensa orientada apresentam-se organizados por níveis de desempenho. Nestes itens, desde que tenham cotação igual ou superior a quinze pontos e impliquem a produção de um texto, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea das competências específicas da disciplina e das competências de comunicação escrita em língua portuguesa.

A avaliação das competências de comunicação escrita em língua portuguesa contribui para valorizar a classificação atribuída ao desempenho no domínio das competências específicas da disciplina. Esta valorização é cerca de 10% da cotação do item e faz-se de acordo com os níveis de desempenho a seguir descritos:

Nível	Descritor
3	Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique a perda de inteligibilidade e/ou de rigor de sentido.
2	Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou ortografia, cuja gravidade não implique a perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
1	Composição sem estruturação aparente, com a presença de erros graves de sintaxe, pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.

No quadro seguinte, apresentam-se critérios de classificação a aplicar às respostas aos itens em situações não consideradas anteriormente.

Situação	Classificação
1. Engano na identificação do item a que o examinando está a responder. 2. Omissão da identificação do item a que o examinando está a responder.	Deve ser vista e classificada a resposta se, pela resolução apresentada, for possível identificar inequivocamente o item.
3. É apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item e o examinando não indica, de forma inequívoca, aquela que pretende que seja classificada.	Deve ser vista e classificada apenas a resposta que surge em primeiro lugar, na folha de respostas.
4. É apresentado apenas o resultado final, embora a resolução do item exija cálculos e/ou justificações.	A resposta deve ser classificada com zero pontos.
5. Ilegibilidade da resposta.	A resposta deve ser classificada com zero pontos.
6. Item com etapas.	A cotação indicada para cada etapa é a classificação máxima que lhe é atribuível. A classificação da resposta ao item resulta da soma das classificações das diferentes etapas, à qual, eventualmente, se subtrai um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 16 e 21.
7. Etapa com passos.	A cotação indicada para cada passo é a classificação máxima que lhe é atribuível. A classificação da etapa resulta da soma das classificações dos diferentes passos.
8. Item ou etapa com classificação por níveis de desempenho.	O classificador deve enquadrar a resposta do examinando numa das descrições apresentadas, não podendo atribuir uma classificação diferente das indicadas.
9. Utilização de processos de resolução do item que não respeitam as instruções dadas [exemplo: «usando métodos analíticos»].	São classificadas com zero pontos as etapas em que a instrução não foi respeitada e todas as etapas subsequentes que delas dependam.
10. Utilização de processos de resolução do item não previstos nos critérios específicos.	Deve ser aceite qualquer processo de resolução cientificamente correcto, ainda que não esteja previsto nos critérios específicos de classificação ou no programa. O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante a distribuição da cotação do item pelas etapas percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.

Situação	Classificação
11. Não são apresentadas, explicitamente, todas as etapas, mas a resolução apresentada permite perceber, inequivocamente, que elas foram percorridas.	A(s) etapa(s) implícita(s) é(são) classificada(s) com a cotação total para ela(s) prevista.
12. Transposição incorrecta de dados do enunciado.	Se o grau de dificuldade da resolução da etapa não diminuir, deve subtrair-se um ponto à classificação da etapa. Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a classificação máxima a atribuir a essa etapa não deve ser superior a 50% da cotação prevista.
13. Erro ocasional num cálculo.	Deve subtrair-se um ponto à classificação da etapa em que ocorre o erro.
14. Erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.	A classificação máxima a atribuir a essa etapa não deve ser superior a 50% da cotação prevista para a mesma.
15. Erro na resolução de uma etapa.	A resolução dessa etapa é classificada de acordo com o erro cometido. Se o erro não diminuir o grau de dificuldade das etapas subsequentes, estas são classificadas de acordo com os critérios de classificação. Se o erro diminuir o grau de dificuldade das etapas subsequentes, a classificação máxima a atribuir a essas etapas não deve ser superior a 50% da cotação prevista.
16. Em cálculos intermédios, é pedida uma aproximação com um certo número de casas decimais. O examinando não respeita o pedido e/ou os arredondamentos estão incorrectos.	Deve subtrair-se um ponto à classificação total da resposta.
17. A apresentação do resultado final não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fracção e o examinando escreve na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros e o examinando apresenta-o em metros].	Deve subtrair-se um ponto à classificação da etapa correspondente ao resultado final.
18. Na apresentação do resultado final, não está expressa a unidade de medida [exemplo: «15» em vez de «15 metros»].	A etapa relativa ao resultado final é classificada como se a unidade de medida estivesse indicada.

Situação	Classificação
19. O resultado final é apresentado com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exacto.	Deve subtrair-se um ponto à classificação da etapa correspondente ao resultado final.
20. O resultado final apresenta um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou está incorrectamente arredondado.	Deve subtrair-se um ponto à classificação da etapa correspondente ao resultado final.
21. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal.	Deve subtrair-se um ponto à classificação total da resposta, excepto: – se as incorrecções ocorrerem apenas em etapas já classificadas com zero pontos; – no caso de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a **8.** ..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

As respostas correctas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	D	D	C	A	B	B	D	A
Versão 2	A	A	B	D	C	C	A	D

GRUPO II

É de aceitar qualquer processo de resolução cientificamente correcto, ainda que não esteja previsto nestes critérios específicos ou no programa (ver critério 10 dos critérios gerais).

1.1. ..... **15 pontos**

Substituir na expressão dada z_1 por $1 - i$ ..... 1 ponto

Calcular i^{18} $\left(i^{18} = -1\right)$ ..... 3 pontos

Simplificar o numerador ..... 3 pontos

Escrever $\dfrac{-2i}{1-2i} \times \dfrac{1+2i}{1+2i}$ ..... 1 ponto

Obter $\dfrac{-2i+4}{5}$ ..... (3 + 3) ..... 6 pontos

Apresentar o resultado na forma pedida ..... 1 ponto

1.2. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º processo

Representar, no plano complexo, as imagens geométricas das raízes quartas de z (sendo uma delas $1 - i$) ..... 6 pontos

Concluir que a raiz quarta pedida é $-1 - i$ ..... 3 pontos

Escrever $-1 - i$ na forma trigonométrica ..... 6 pontos

Calcular $\left|-1-i\right|$ ..... 2 pontos

Calcular um argumento de $-1 - i$ ..... 3 pontos

Escrever na forma trigonométrica ..... 1 ponto

2.º processo

Calcular $\left|z_1\right|$ ..... 2 pontos

Calcular um argumento de z_1 ..... 3 pontos

Determinar a raiz quarta pedida: $\left(z_2 = \sqrt{2}\mathrm{cis}\left(\dfrac{5}{4}\pi\right) \text{ ou equivalente}\right)$ ..... 10 pontos

Reconhecer que $\left|z_2\right| = \left|z_1\right|$ ..... 2 pontos

Calcular um argumento de z_2, utilizando uma propriedade das raízes índice *n* de um número complexo ..... 7 pontos

Escrever z_2 na forma trigonométrica ..... 1 ponto

3.º processo

Calcular $\left|z_1\right|$ ..... 2 pontos

Calcular um argumento de z_1 ..... 3 pontos

Escrever z_1 na forma trigonométrica ..... 1 ponto

Determinar z, usando a potência $(z_1)^4$ ..... 3 pontos

Escrever a expressão geradora das raízes quartas de z ..... 2 pontos

Determinar a raiz quarta pedida: $\left(z_2 = \sqrt{2}\mathrm{cis}\left(\frac{5}{4}\pi\right)\text{ou equivalente}\right)$ ..... 4 pontos

2.1. ..... **15 pontos**

A resposta do examinando deve contemplar os seguintes pontos:

- Leis de De Morgan;
- propriedade relativa à probabilidade do acontecimento contrário;
- propriedade relativa à probabilidade da união de dois acontecimentos.

Na tabela seguinte, indica-se como a resposta a este item deve ser classificada, de acordo com o respectivo nível de desempenho no domínio específico da disciplina:

Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina			Pontuação
Níveis	4	O examinando executa correctamente os três pontos e conclui o pretendido.	15
	3	O examinando executa correctamente os três pontos, mas não conclui o pretendido.	12
	2	O examinando executa correctamente apenas dois pontos.	8
	1	O examinando executa correctamente apenas um ponto.	4

2.2. ..... **15 pontos**

Designemos por A o acontecimento «o estudante é rapaz» e por B o acontecimento «o estudante tem classificação positiva».

Calcular o número de raparigas que tiveram classificação positiva ..... 2 pontos

Calcular o número de rapazes que tiveram classificação positiva ..... 2 pontos

Determinar o número total de estudantes que fizeram o exame ..... 1 ponto

Calcular a probabilidade pedida (**ver nota 1**) ..... 9 pontos

$P(\overline{A}) = \frac{160}{280}$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

$P(B) = \frac{176}{280}$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

$P(A \cup B) = \frac{224}{280}$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{208}{280}$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

ou

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B)$ ..... 3 pontos

$P(A \cap B) = \dfrac{72}{280}$ ..... 4 pontos

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \dfrac{208}{280}$ ..... 2 pontos

Resultado na forma pedida (**ver nota 2**) ..... 1 ponto

Notas:

1. O examinando pode recorrer a uma tabela para encontrar os valores necessários ao cálculo das probabilidades.
2. Se o valor obtido não pertencer ao intervalo $[0, 1]$, a classificação a atribuir ao resultado deverá ser de zero pontos.

3. ..... **15 pontos**

Indicar os valores que a variável X pode tomar: $X_i \in \{2, 3, 4\}$ (**ver nota 1**) ..... 2 pontos

Indicar o número de casos possíveis ..... 2 pontos

Indicar o número de casos favoráveis para cada um dos valores da variável ..... (2 + 2 + 2) ..... 6 pontos

Construir a tabela de distribuição (**ver nota 2**) ..... 3 pontos

Indicar e justificar o valor da variável mais provável: $(X = 3)$ ..... (1 + 1) ..... 2 pontos

Notas:

1. Se os valores da variável não estiverem todos correctos, a classificação a atribuir a esta etapa deverá ser de zero pontos.
2. Se o examinando não apresentar todas as probabilidades na forma de fracção irredutível, a classificação deve ser desvalorizada em um ponto.

4. ..... **15 pontos**

Representar graficamente a função f ..... 3 pontos

Representar graficamente a função g ..... 3 pontos

Assinalar devidamente os pontos A e B ..... (1 + 1)..... 2 pontos

Coordenadas aproximadas dos pontos A e B (**ver nota 1**) ..... (2 + 2)..... 4 pontos

Soluções inteiras $(0, 1$ e $2)$ (**ver nota 2**)..... 3 pontos

Notas:

1. As coordenadas, arredondadas às décimas, de um dos pontos são $(-0{,}3\,;\ -2{,}3)$ e do outro são $(2{,}3\,;\ 0{,}3)$. São de aceitar, sem qualquer desvalorização, para valores das coordenadas dos pontos A e B, valores que difiram dos valores dados numa décima. Se os valores apresentados diferirem menos de uma décima dos valores dados, a classificação total da resposta deverá ser desvalorizada em 1 ponto (critério geral 16).
2. Qualquer outra resposta deverá ser classificada com zero pontos.

5. ..... **15 pontos**

Apresenta-se, a seguir, para cada um dos gráficos incorrectos, a razão pela qual não pode representar a função a:

- Gráfico 1: este gráfico é inadequado, porque apresenta para domínio da função o intervalo $]0,\ \frac{\pi}{2}\ [$, o que não está correcto, uma vez que o ponto S, ao deslocar-se ao longo da recta s, permite que a amplitude do ângulo BAS seja igual ou superior a $\frac{\pi}{2}$;
- Gráfico 3: este gráfico é inadequado, porque indica que a função é estritamente crescente no intervalo $]0,\ \pi[$, o que não está correcto, uma vez que, à medida que o ponto S se desloca ao longo da recta s, o triângulo $[ABS]$ obtido mantém sempre a mesma base $\overline{AB}$ e a mesma altura (distância entre as duas rectas); logo, a área é constante;
- Gráfico 4: este gráfico é inadequado, porque apresenta 0 e π como possíveis valores de x, o que não está correcto, uma vez que o ponto S nunca pode pertencer à recta AB, dado que se desloca ao longo de uma recta estritamente paralela a esta.

Na tabela seguinte, indica-se como deve ser classificada a justificação pedida, de acordo com os níveis de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa descritos nos critérios gerais e os níveis de desempenho no domínio específico da disciplina:

Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina \ Descritores do nível de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa			Níveis		
			1	2	3
Níveis	3	Explica correctamente a inadequação dos gráficos 1, 3 e 4.	13	14	15
	2	Explica correctamente a inadequação dos gráficos 1 e 3, ou 1 e 4 ou 3 e 4.	8	9	10
	1	Explica correctamente a inadequação do gráfico 1 ou 3 ou 4.	3	4	5

Apenas podem ser atribuídas classificações correspondentes a um dos valores constantes do quadro. Não há lugar a classificações intermédias.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é zero pontos. Neste caso, não é classificado o desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

6.1. ..... **15 pontos**

Equacionar o problema: $M(t) = \dfrac{M(0)}{2}$ ..... 2 pontos

Calcular $M(0)$ $\big((M(0) = 15\big)$ ..... 1 ponto

Resolver a equação $15 \times e^{-0{,}02\,t} = \dfrac{15}{2}$ ..... 9 pontos

Obter a equação $e^{-0{,}02\,t} = \dfrac{1}{2}$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

Obter a equação $-0{,}02\,t = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ..... 3 pontos

Obter o valor de t com três casas décimais $(t \cong 34{,}657)$ ..... 3 pontos

Resultado $(34 \text{ horas e } 39 \text{ minutos})$ ..... 3 pontos

6.2. ..... **15 pontos**

Converter $2 \text{ horas e } 30 \text{ minutos em } 2{,}5 \text{ horas}$ ..... 2 pontos

Referir que a função M é contínua em $[2{,}5;\ 4]$ (**ver nota 1**) ..... 2 pontos

Calcular $M(2{,}5)$ ..... 3 pontos

Calcular $M(4)$ ..... 3 pontos

Concluir que $M(4) < 14 < M(2{,}5)$ ou que
$M(2{,}5) - 14$ e $M(4) - 14$ têm sinais contrários ..... 3 pontos

Concluir o pretendido (**ver nota 2**) ..... 2 pontos

Notas:

1. Se o examinando não referir a continuidade da função no intervalo $[2{,}5;\ 4]$, mas afirmar que a função é contínua no seu domínio, a classificação a atribuir a esta etapa não deve ser desvalorizada.
2. Se o examinando concluir o pretendido, mas não referir que a conclusão resulta do Teorema de Bolzano, ou do seu Corolário, a classificação a atribuir a esta etapa não deve ser desvalorizada.

7.1. ..... **10 pontos**

$g'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 + \operatorname{sen}(4x) - 2}{x}$ .....(1 + 2)..... 3 pontos

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(4x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4\ \operatorname{sen}(4x)}{4x}$ ..... 3 pontos

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4\ \operatorname{sen}(4x)}{4x} = 4 \times \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(4x)}{4x}$ ..... 2 pontos

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(4x)}{4x} = 1$ ..... 1 ponto

$g'(0) = 4$ ..... 1 ponto

Nota: Se o examinando calcular $g'(0)$ utilizando as regras da derivação, a classificação a atribuir à sua resposta deverá ser zero pontos, mesmo estando ela correcta.

7.2. ..... **15 pontos**

Determinar $g'(x)$ ..... 2 pontos

Determinar os zeros de g' ..... 4 pontos

Escrever a equação $g'(x) = 0$ ..... 1 ponto

Determinar a expressão geral dos zeros de g'

$x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$ ..... 1 ponto

Indicar os zeros de g' no intervalo $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[: \left(\dfrac{\pi}{8} \text{ e } \dfrac{3\pi}{8}\right)$ ..... 2 pontos

Estudar o sinal de g' e consequente conclusão, relativamente à monotonia e extremos relativos de g no intervalo $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, com recurso a um quadro..... 5 pontos

Primeira linha do quadro (relativa à variável x, de acordo com o intervalo em estudo) ..... 2 pontos

Sinal de g' ..... 2 pontos

Relação entre o sinal de g' e a monotonia de g ..... 1 ponto

Determinar os extremos relativos $(1 \text{ e } 3)$ ..... 2 pontos

Indicar os intervalos de monotonia (**ver nota**) ..... 2 pontos

Nota: A resposta correcta é indicar os intervalos $\left]0, \dfrac{\pi}{8}\right]$ e $\left[\dfrac{3\pi}{8}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, para intervalos onde a função é monótona crescente e indicar o intervalo $\left[\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{3\pi}{8}\right]$, para intervalo onde a função é monótona decrescente.

No entanto, é de aceitar, sem qualquer desvalorização, os intervalos $\left]0, \dfrac{\pi}{8}\right[$ e $\left]\dfrac{3\pi}{8}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ para intervalos onde a função é monótona crescente e o intervalo $\left]\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{3\pi}{8}\right[$ para intervalo onde a função é monótona decrescente.

Exame nacional de Matemática A **(2008, 2.ª fase)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como a probabilidade do João acertar em cada tentativa é 0,8, a probabilidade do João acertar nas 4 tentativas é:

$$0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}8 = (0{,}8)^4 = 0{,}4096$$

Resposta: **Opção D**

2. Como na experiência aleatória descrita, foi definido que «*Se sair o número 5, tira-se uma bola da caixa A*», para calcular a probabilidade de a bola retirada ser verde, consideramos apenas o conteúdo da caixa A (duas bolas verdes e uma bola amarela).
Assim temos que existem 2 bolas verdes (número de casos favoráveis) num total de 3 bolas (número de casos possíveis), pelo que a probabilidade é de $\frac{2}{3}$

Resposta: **Opção D**

3. A linha do triângulo de Pascal que tem 15 elementos é constituída por 16 números da forma ${}^{14}C_k$.
Como ${}^{14}C_0 = {}^{14}C_{14} = 1$, ${}^{14}C_1 = {}^{14}C_{13} = 14$ e ${}^{14}C_2 = {}^{14}C_{12} = 91$ estes são os únicos 6 elementos da linha menores que 100, porque ${}^{14}C_3 = {}^{14}C_{11} = 364$ e todos os restantes são maiores que 364.

Resposta: **Opção C**

4. Como o ponto $P(1,3)$ pertence ao gráfico da função, substituindo as coordenadas na expressão algébrica da função, e resolvendo a equação, podemos determinar o valor de a:

$$3 = 2^{a \times 1} - 1 \Leftrightarrow 3 + 1 = 2^a \Leftrightarrow 4 = 2^a \Leftrightarrow a = \log_2 4 \Leftrightarrow a = 2$$

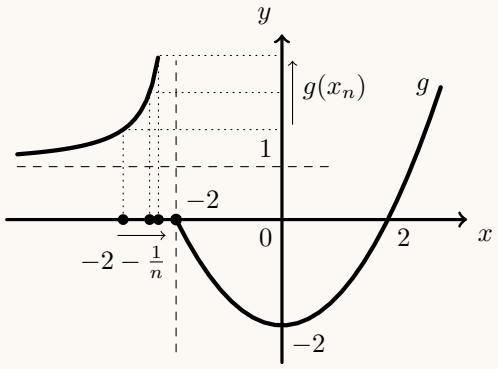
Resposta: **Opção A**

5. Como $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = +\infty$, e como, pela observação do gráfico temos que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ e que $\lim\limits_{x\to-2^-} g(x) = +\infty$, temos que:

$$\lim(x_n) = +\infty \text{ ou então } \lim(x_n) = -2^-$$

Assim, calculando os limites das sucessões de cada uma das hipóteses, temos:

- $\lim\left(-2+\frac{2}{n}\right) = -2+0^+ = -2^+$
- $\lim\left(-2-\frac{1}{n}\right) = -2-0^+ = -2^-$
- $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1+0^+ = 1^+$
- $\lim\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1-0^+ = 1^-$



Pelo que, de entre os termos gerais de sucessões apresentados, o único em que $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = +\infty$ é $-2-\frac{1}{n}$

Graficamente, na figura anterior, estão representados alguns termos da sucessão $x_n = -2+\frac{1}{n}$ como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $g(x_n)$, que tendem para $+\infty$, quando o valor de n aumenta.

Resposta: **Opção B**

6. Como $y = -1$ é a única assíntota do gráfico da função f, e pela observação da figura, temos que:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$

E assim, vem que:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{f(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} 3}{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)} = \frac{3}{-1} = -3$$

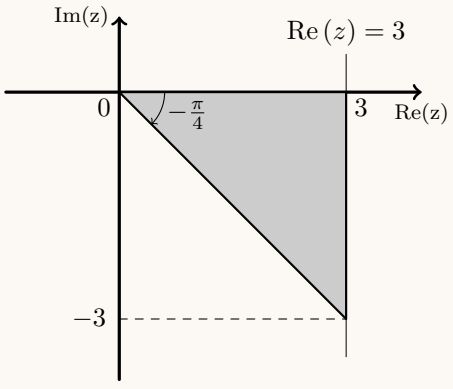
Resposta: **Opção B**

7. Os números complexos z e $-z$, têm argumentos que diferem de π radianos, logo, temos que:

$$\arg(-z) = \pi + \arg(z) = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

Resposta: **Opção D**

8. Os pontos representado na região a sombreado satisfazem cumulativamente duas condições:
   - $\text{Re}(z) \leq 3$, ou seja, pertencem ao semiplano à direita da reta definida por $\text{Re}(z) = 3$
   - $-\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq 0$, ou seja, os pontos que são imagens geométricas de números complexos cujo argumento está compreendido entre $-\frac{\pi}{4}$ e 0



Resposta: **Opção A**

GRUPO II

1.

1.1. Como $i^{18} = i^{4\times 2+2} = (i^2)^4 \times i^2 = (-1)^4 \times (-1) = -1$, temos que:

$$\frac{2z_1 - i^{18} - 3}{1-2i} = \frac{2(1-i)-(-1)-3}{1-2i} = \frac{2-2i+1-3}{1-2i} = \frac{-2i}{1-2i} = \frac{-2i(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-2i-4i^2}{1^2-(2i)^2} =$$

$$= \frac{-2i+4}{1+4} = \frac{4-2i}{5} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$$

1.2. Escrevendo z_1 na f.t. temos $z_1 = \rho \operatorname{cis} \theta$, onde:

- $\rho = |z_1| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{-1}{1} = -1$; como $\operatorname{sen}\theta < 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 4º quadrante, logo $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$

Logo $z_1 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

Como existem 4 raízes quartas de z, cujas imagens geométricas são os vértices de um quadrado centrado na origem, temos que as outras 3 raízes quartas de z são:

- $z_2 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{4}$
- $z_3 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{3\pi}{4}$
- $z_4 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{5\pi}{4}$

Pelo que a raiz quarta de z cuja imagem geométrica é um ponto do 3º quadrante é $z_3 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{5\pi}{4}$

2.

2.1. Temos que:

$P\left(\overline{A}\right) - P(B) + P(A\cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A\cup B)$	Teorema: $P(X) = 1 - P\left(\overline{X}\right)$
$= 1 - \Big(P(A) + P(B) - P(A\cup B)\Big)$	
$= 1 - P(A\cap B)$	T.: $P(X\cap Y) = P(X) + P(Y) - P(X\cup Y)$
$= P\left(\overline{A\cap B}\right)$	Teorema: $P(X) = 1 - P\left(\overline{X}\right)$
$= P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)$	Leis de De Morgan: $\overline{X\cap Y} = \overline{X}\cup\overline{Y}$

Logo, $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right) = P\left(\overline{A}\right) - P(B) + P(A\cup B)$ *q.e.d.*

2.2. Como se pretende calcular a probabilidade de o estudante escolhido não ser rapaz ou não ter tido classificação positiva, para utilizar a igualdade $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\right)-P(B)+P(A\cup B)$, podemos definir os acontecimentos

- A: O estudante escolhido ser rapaz
- B: O estudante escolhido ter tido classificação positiva

E assim, $\overline{A}\cup\overline{B}$ é o acontecimento "o estudante escolhido não ser rapaz ou não ter tido classificação positiva".

Temos que o número de casos possíveis é $160+120=280$, correspondendo ao número total de estudantes que realizaram o exame (160 raparigas e 120 rapazes).

- O número de casos favoráveis para o acontecimento $\overline{A}$ é 160, correspondendo ao número de raparigas. E assim temos que $P\left(\overline{A}\right)=\dfrac{160}{280}$
- O número de casos favoráveis para o acontecimento B é $160\times 0{,}65+120\times 0{,}6=176$, correspondendo a 65% das raparigas e 60% dos rapazes. E assim temos que $P\left(B\right)=\dfrac{176}{280}$
- O número de casos favoráveis para o acontecimento $A\cup B$ é $120+160\times 0{,}65=224$, correspondendo à soma do número de rapazes com 65% das raparigas que teve positiva. E assim temos que $P\left(A\cup B\right)=\dfrac{224}{280}$

Logo, calculando a probabilidade de o estudante escolhido não ser rapaz ou não ter tido classificação positiva, e apresentando o resultado em forma de dízima, com aproximação às centésimas, vem

$$P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\right)-P(B)+P(A\cup B)=\frac{160}{280}-\frac{176}{280}+\frac{224}{280}=\frac{208}{280}\approx 0{,}74$$

3. Como as fichas têm os números 1 e 2, só existem três somas possíveis:

- soma 2: se as duas fichas selecionadas tiverem o número 1 (${}^3C_2$ conjuntos possíveis).
- soma 3: se as duas fichas selecionadas tiverem números diferentes (${}^3C_1\times{}^4C_1$ conjuntos possíveis).
- soma 4: se as duas fichas selecionadas tiverem o número 2 (${}^4C_2$ conjuntos possíveis).

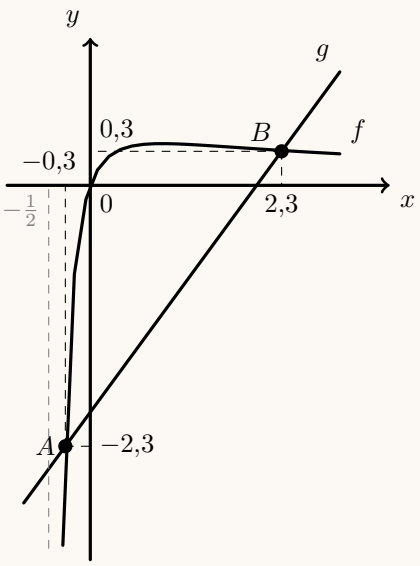
Logo, como existem ${}^7C_2$ conjuntos diferentes de fichas, podemos calcular os valores da probabilidade associada à ocorrência de cada soma:

- $P(X=2)=\dfrac{{}^3C_2}{{}^7C_2}=\dfrac{3}{21}=\dfrac{1}{7}$
- $P(X=3)=\dfrac{{}^3C_1\times{}^4C_1}{{}^7C_2}=\dfrac{3\times 4}{21}=\dfrac{12}{21}=\dfrac{4}{7}$
- $P(X=4)=\dfrac{{}^4C_2}{{}^7C_2}=\dfrac{6}{21}=\dfrac{2}{7}$

E assim, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

4. Traçando na calculadora gráfica os gráficos das funções f e g numa janela compatível com o intervalo $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ podemos visualizar o gráfico reproduzido na figura seguinte.

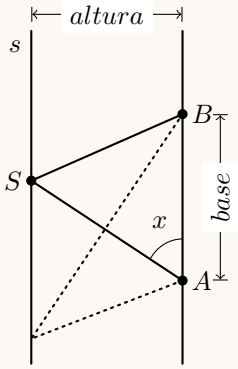


Assim, as abcissas dos pontos A e B, também assinalados na figura ao lado, podem ser determinadas com aproximação às décimas, usando a função da calculadora que permite determinar valores aproximados para as coordenadas de pontos de interseção de dois gráficos.
As coordenadas, aproximadas às décimas, são $A(-0{,}3;-2{,}3)$ e $B(2{,}3;0{,}3)$.

Pela observação do gráfico podemos observar que os pontos do gráfico de f têm ordenada maior que os pontos do gráfico de g, quando as respetivas abcissas estão compreendidos entre as abcissas dos pontos A e B, pelo que a solução da inequação $f(x) > g(x)$, no intervalo $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$, é o conjunto $]-0{,}3;2{,}3[$; logo os números inteiros que pertencem a este intervalo, ou seja as soluções inteiras de inequação são:

$$x_1 = 0\,,\ x_2 = 1 \text{ e } x_3 = 2$$

5. Considerando $[AB]$ como a base do triângulo, como os pontos A e B são fixos, temos que a base do triângulo é constante.
A altura do triângulo, relativa à base $[AB]$, á a distância entre as retas, que como são paralelas também é constante.
Assim, temos que $a(x)$, ou seja a área do triângulo $[ABS]$ é constante, pelo que o **Gráfico 3** não pode representar a função a



Como o ponto S se desloca sobre a reta S, existem localizações do ponto S, para as quais o ângulo BAS, ou seja, o ângulo x é superior a um ângulo reto, ou seja, a $\frac{\pi}{2}$ radianos, pelo que o gráfico **Gráfico 1** também não representa a função a, visto que neste gráfico a função está definida apenas para valores de x menores que $\frac{\pi}{2}$ radianos.

Como as retas s e AB são estritamente paralelas, não existem localizações do ponto S sobre a reta s, tais que o ângulo x tenha amplitude de π radianos (ou zero radianos), pelo que o gráfico **Gráfico 4** também não representa a função a, visto que neste gráfico a função está definida para valores de x iguais a zero e a π radianos.

6.

6.1. Determinando a massa inicial da amostra da substância radioativa, ou seja a massa ao fim de zero horas ($t = 0$), vem que:

$$M(0) = 15 \times e^{-0,02\times 0} = 15 \times e^{0} = 15 \times 1 = 15$$

Assim, equacionado o problema e resolvendo a equação vem:

$$M(t) = \frac{15}{2} \Leftrightarrow 15 \times e^{-0,02t} = \frac{15}{2} \Leftrightarrow e^{-0,02t} = \frac{15}{2 \times 15} \Leftrightarrow e^{-0,02t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,02t = \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-0,02} \Rightarrow t \approx 34,657$$

Assim temos que o tempo corresponde a 34,657 horas, aproximadamente. E como cada hora tem 60 minutos, fazendo a conversão de 0,657 horas para minutos, vem

$$0,657 \times 60 = 39,420 \approx 39 \text{ min}$$

Pelo que se concluí ao fim de 34 horas e 39 minutos a massa inicial da amostra da substância radioativa se reduz a metade.

6.2. Como a função M resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}^+$, é contínua em $\mathbb{R}^+$, e também, em $[2{,}5; 4]$, porque $[2{,}5; 4] \subset \mathbb{R}^+$

Como $13{,}847 < 14 < 14{,}268$, ou seja, como $M(4) < 14 < M(2{,}5)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $t_0 \in \,]2{,}5; 4[$ tal que $M(t_0) = 14$, ou seja, que houve, pelo menos, um instante, entre as 2 horas e 30 minutos e as 4 horas após o início da observação, em que a massa da amostra da substância radioativa atingiu os 14 gramas.

C.A.

Observando que 2 horas e 30 minutos corresponde a 2,5 horas, temos que:

$M(2{,}5) = 15 \times e^{-0,02\times 2,5} \approx 14{,}268$

$M(4) = 15 \times e^{-0,02\times 4} \approx 13{,}847$

7.

7.1. Recorrendo à definição de derivada da função no ponto de abcissa 0, vem:

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{2 + \operatorname{sen}(4x) - \big(2 + \operatorname{sen}(4 \times 0)\big)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2 + \operatorname{sen}(4x) - 2}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(4x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{4 \times \operatorname{sen}(4x)}{4 \times x} = 4 \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(4x)}{4x} \underset{(1)}{=} 4 \underbrace{\lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Limite Notável}} = 4 \times 1 = 4$$

(1) fazendo $y = 4x$, se $x \to 0$, então $y \to 0$

7.2. Para estudar a monotonia da função, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$g'(x) = \big(2 + \operatorname{sen}(4x)\big)' = (2)' + \big(\operatorname{sen}(4x)\big)' = 0 + (4x)'\cos(4x) = 4\cos(4x)$$

Para estudar o sinal da derivada, calculamos os zeros:

$$g'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 4\cos(4x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos(4x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,, k \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}\,, k \in \mathbb{Z}$$

Atribuindo valores a k ($k = 0$ e $k = 1$) encontramos as duas soluções da equação que pertencem ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, ou seja $x = \frac{\pi}{8}$ e $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{2\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$

Estudando a variação do sinal de g' para relacionar com a monotonia de g, no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, vem:

x	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↗	Máx	↘	min	↗	

Assim, no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, temos que:

- o valor do máximo de g é $g\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2 + \operatorname{sen}\left(4 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + 1 = 3$
- o valor do mínimo de g é $g\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 2 + \operatorname{sen}\left(4 \times \frac{3\pi}{8}\right) = 2 + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 + (-1) = 1$
- g é crescente no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{8}\right]$ e também no intervalo $\left[\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right[$
- g é decrescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right]$

Prova Escrita de Matemática A

12.º ano de Escolaridade

Prova 635/Época Especial

11 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos

2008

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente elaboradas a lápis, sendo, a seguir, passadas a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e/ou dos itens, bem como as respectivas respostas.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de **escolha múltipla**, escreva, na folha de respostas,

- o **número** do item;
- a **letra identificativa** da alternativa correcta.

Não apresente cálculos, nem justificações.

Nos itens de resposta aberta com cotação igual ou superior a 15 pontos e que impliquem a produção de um texto, o domínio da comunicação escrita em língua portuguesa representa cerca de 10% da cotação.

As cotações dos itens encontram-se na página 11.

A prova inclui um Formulário na página 4.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\,\pi\, r^3$
(r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ \operatorname{cis} \dfrac{\theta + 2k\pi}{n},\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = \mathrm{x}_1\, \mathrm{p}_1 + \cdots + \mathrm{x}_\mathrm{n}\, \mathrm{p}_\mathrm{n}$

$\sigma = \sqrt{(\mathrm{x}_1 - \mu)^2\, \mathrm{p}_1 + \cdots + (\mathrm{x}_\mathrm{n} - \mu)^2\, \mathrm{p}_\mathrm{n}}$

$\mathrm{Se\ X\ é\ N}(\mu, \sigma), \mathrm{então:}$

$\mathrm{P}(\mu - \sigma < \mathrm{X} < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$\mathrm{P}(\mu - 2\sigma < \mathrm{X} < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$\mathrm{P}(\mu - 3\sigma < \mathrm{X} < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -\,u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

- Os oito itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Se apresentar mais do que uma alternativa, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Quantos números ímpares, de quatro algarismos diferentes, se pode formar com os algarismos 1, 3, 5 e 8?

(A) 4 **(B)** 6 **(C)** 18 **(D)** 24

2. O $14.^{\text{o}}$ elemento de uma linha do Triângulo de Pascal é igual ao $15.^{\text{o}}$ elemento dessa mesma linha.

Quantos elementos tem essa linha?

(A) 14 **(B)** 15 **(C)** 28 **(D)** 30

3. Em cada semana, a chave do Totoloto é formada por seis números inteiros distintos, escolhidos aleatoriamente entre 1 e 49.

Qual é a probabilidade de, na próxima semana, a chave do totoloto incluir os números 1, 2 e 3?

(A) $\frac{{}^{46}C_3}{{}^{46}C_6}$ **(B)** $\frac{{}^{46}C_3}{{}^{49}C_6}$ **(C)** $\frac{{}^{46}C_6}{{}^{49}C_6}$ **(D)** $\frac{{}^{49}C_3}{{}^{49}C_6}$

4. Para todo o $x \in \mathbb{R}$, qual das seguintes expressões é equivalente a $x . \ln\left(e^e\right)$?

(A) ex **(B)** e^x **(C)** e^{ex} **(D)** $x + e$

5. Na figura 1, está representada parte do gráfico de uma função f e a recta r de equação $y = x$.

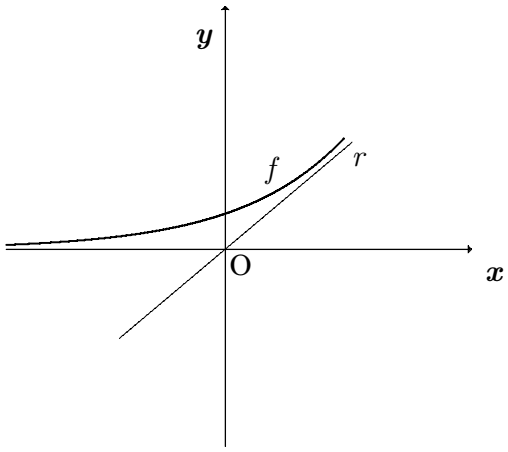
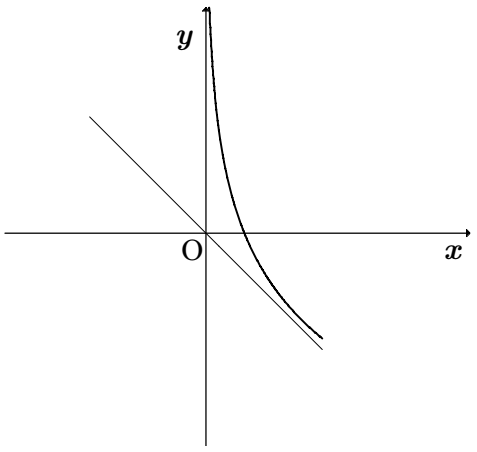


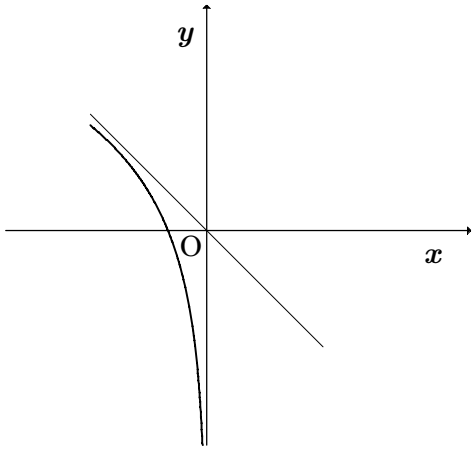
Fig. 1

Qual das figuras seguintes pode ser parte do gráfico da função f^{-1}, função inversa de f?

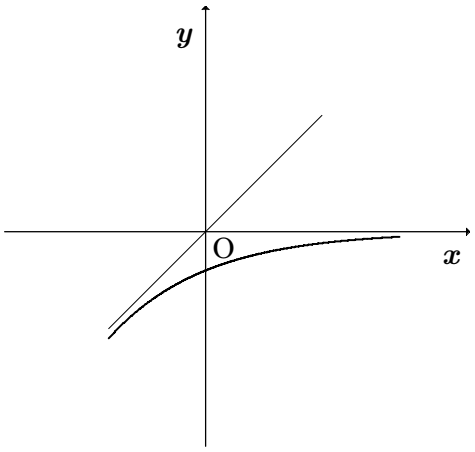
(A)



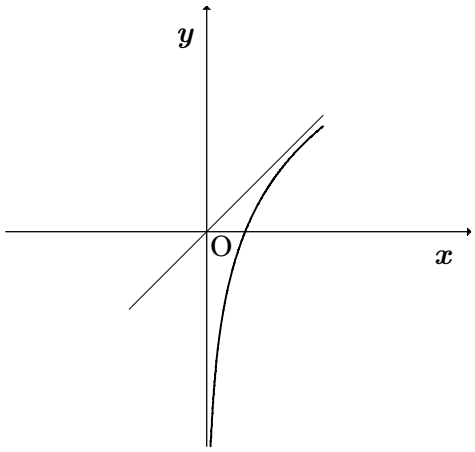
(B)



(C)



(D)



6. Seja a função f, de domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right]$, definida por $f(x) = \cos(x)$.

Qual é o contradomínio de f ?

(A) $[-1,0]$ **(B)** $[0,\ 1]$ **(C)** $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ **(D)** $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

7. Qual das seguintes condições, na variável complexa z, define, no plano complexo, uma circunferência?

(A) $|z+4| = 5$ **(B)** $|z| = |z+2i|$ **(C)** $0 \leq \arg(z) \leq \pi$ **(D)** $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = 2$

8. Na figura 2 está representado, no plano complexo, o polígono $[EFGHI]$, inscrito numa circunferência de centro na origem do referencial e raio igual a 2. Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice 5 de um certo número complexo; um dos vértices pertence ao eixo real.

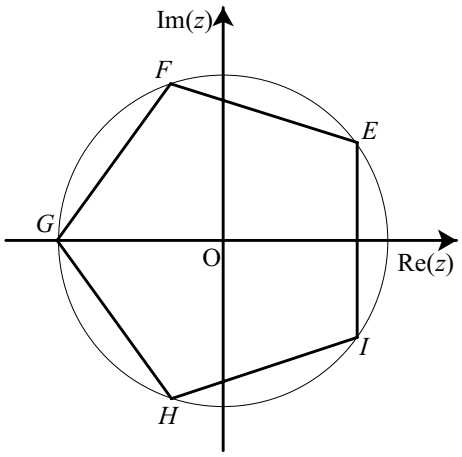


Fig. 2

Qual é o vértice do polígono $[EFGHI]$ que é a imagem geométrica de $2\ \mathrm{cis}\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$?

(A) E **(B)** F **(C)** H **(D)** I

GRUPO II

Na resposta a itens deste grupo, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam os números $z_1 = (1-i)\cdot\left(1+\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}\right)$ e $z_2 = 8\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ (i designa a unidade imaginária).

1.1. Determine, **sem recorrer à calculadora**, o número complexo $w = \frac{z_1}{z_2}$.

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

1.2. Considere o número complexo $z = \overline{z_2}$.

No plano complexo, sejam A e B as imagens geométricas de z e de z_2, respetivamente.

Determine a área do triângulo $[AOB]$, em que O é a origem do referencial.

2. Três rapazes, o João, o Rui e o Paulo, e três raparigas, a Ana, a Maria e a Francisca, decidem passar a tarde juntos.

2.1. De quantas maneiras se podem sentar os seis amigos, uns ao lado dos outros, num banco corrido com seis lugares, ficando um rapaz em cada uma das extremidades?

2.2. Depois de ouvirem algumas músicas, os seis jovens resolveram dançar aos pares.
Admita que, numa dança:

- cada rapaz dança com uma rapariga;
- todos os jovens dançam;
- todos os pares são escolhidos ao acaso.

A probabilidade de, nessa dança, a Ana dançar com o João é igual a $\frac{2}{3!}$.

Explique, numa pequena composição, o raciocínio que conduziu a esta expressão.

Nota: Deve organizar a sua composição de acordo com os seguintes tópicos:

- referência à Regra de Laplace;
- explicação do número de casos possíveis;
- explicação do número de casos favoráveis.

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos possíveis $(A \subset \Omega \text{ e } B \subset \Omega)$.

Mostre que: $1 - P\left(\overline{A \cup B}\right) + P(A \mid B) \times P(B) = P(A) + P(B)$

(P designa probabilidade, $\overline{A}$ representa o acontecimento contrário de A e $P(A \mid B)$ é a probabilidade de A dado B.)

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

4.1. Determine, **recorrendo exclusivamente a métodos analíticos**, a equação reduzida da recta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 2.

4.2. No intervalo $]0, 5]$, a recta de equação $y = 6$ intersecta o gráfico da função f nos pontos A e B.

Determine a distância de A a B, com aproximação às décimas, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**.

Apresente o gráfico, ou os gráficos, em que se baseou para dar a sua resposta, assinalando os pontos A e B e indicando as suas coordenadas com aproximação às décimas.

5. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ ($\ln$ designa logaritmo de base e).

Estude, **recorrendo exclusivamente a métodos analíticos**, a função f quanto à monotonia e à existência de extremos relativos, indicando os intervalos de monotonia e os valores dos extremos relativos, caso existam.

6. Seja a função f, de domínio $[0, \pi]$, definida por $f(x) = 2\operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x) + 2$.

O gráfico da função f intersecta a recta $y = 1$ num só ponto.

Determine, **recorrendo exclusivamente a métodos analíticos**, as coordenadas desse ponto.

7. Aqueceu-se água num recipiente, durante um determinado tempo, num local onde a temperatura ambiente é constante e igual a 25º Celsius. Interrompeu-se o processo de aquecimento, e nesse instante, a água começou a arrefecer.

O arrefecimento da água segue a Lei do arrefecimento de Newton, de acordo com o modelo matemático: $T(t) = 25 + 48\, e^{-0,05\ t}$, em que $T(t)$ representa a temperatura da água em graus Celsius, t **minutos** após o início do arrefecimento.

Resolva, **recorrendo exclusivamente a métodos analíticos**, os dois itens seguintes.

7.1. Determine $T(0)$ e $\lim_{t \to +\infty} T(t)$.

Interprete os valores obtidos, no contexto do problema.

7.2. Determine ao fim de quanto tempo, após o início do arrefecimento, a temperatura da água atinge os 36º Celsius.

Apresente o resultado em **minutos** e **segundos**, com estes arredondados às unidades.

Nota:

A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use quatro casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I ..... (8 × 5 pontos)..... **40 pontos**

GRUPO II ..... **160 pontos**

1. ..... 30 pontos
- **1.1.** ..... 15 pontos
- **1.2.** ..... 15 pontos

2. ..... 30 pontos
- **2.1.** ..... 15 pontos
- **2.2.** ..... 15 pontos

3. ..... 15 pontos

4. ..... 30 pontos
- **4.1.** ..... 15 pontos
- **4.2.** ..... 15 pontos

5. ..... 15 pontos

6. ..... 15 pontos

7. ..... 25 pontos
- **7.1.** ..... 10 pontos
- **7.2.** ..... 15 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

Exame nacional de Matemática A **(2008, Época especial)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Para formar um número ímpar, de quatro algarismos diferentes, o algarismos das unidades só pode ser 1, 3 ou 5, ou seja temos 3 hipóteses.
   Por cada uma destas hipóteses existem ${}^3A_3 = P_3 = 3!$ hipóteses de colocar os restantes 3 algarismos nas restantes 3 posições, ou seja, a quantidade de números que existem, nas condições do enunciado, é:

   $$3 \times 3! = 18$$

   Resposta: **Opção C**

2. Como o 14º elemento de uma linha do triângulo de Pascal é igual ao 15º elemento dessa mesma linha, os 14 primeiros elementos são iguais (por ordem inversa) aos elementos do segundo grupo de 14 elementos, ou seja a linha tem 28 elementos.

   Resposta: **Opção C**

3. Como são selecionados 6 números de entre 49, sendo a ordem de seleção irrelevante, existem ${}^{49}C_6$ chaves possíveis.
   Para que a chave inclua os números 1, 2 e 3, deve incluir outros 3 números selecionados de entre um conjunto de $49 - 3 = 46$ possibilidades, visto que não podem existir repetições excluem-se os números 1, 2 e 3 das possibilidades, ou seja existem ${}^{46}C_3$ chaves com os números 1, 2 e 3.
   Assim, a probabilidade de que uma chave do totoloto inclua os números 1, 2 e 3 é $\frac{{}^{46}C_3}{{}^{49}C_6}$

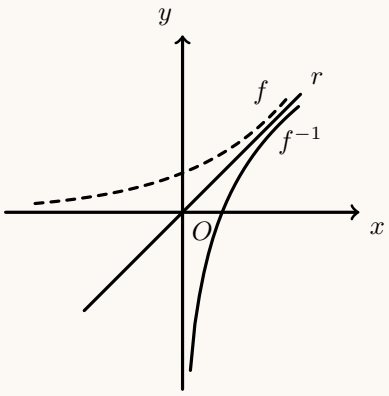
   Resposta: **Opção B**

4. Usando as propriedades dos logaritmos temos que:

   $$x.\ln\left(e^e\right) = x.e\ln e = x.e \times 1 = ex$$

   Resposta: **Opção A**

5. Como os gráficos das funções f e f^{-1} são simétricos relativamente à reta de equação $y = x$, então a única figura, de entre as opções apresentadas, que pode representar parte do gráfico da função f^{-1}, é a figura da opção (D).



Resposta: **Opção D**

6. Sabemos que, no 4º quadrante - ou seja no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ - o cosseno de um ângulo é positivo e que cresce de 0 para 1, ou seja $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ e $\cos(0) = 1$
No primeiro quadrante - em particular no intervalo $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ - o cosseno também é positivo, e decrescente, pelo que não atinge valores superiores a 1.
Logo, como a função f tem domínio $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}\right]$, contradomínio de f é $[0,1]$

Resposta: **Opção B**

7. Analisando cada uma das opções apresentadas, temos que:

   - A condição $|z+4| = 5$ pode ser escrita como $|z-(-4)| = 5$ e define os pontos do plano complexo, cuja distância à representação geométrica do número complexo $w = -4$ é igual a 5. Ou seja, a circunferência de centro no ponto de coordenadas $(-4,0)$ e raio 5.
   - A condição $|z| = |z+2i|$ pode ser escrita como $|z-0| = |z-(-2i)|$ e define os pontos do plano complexo, que são equidistantes das representações geométricas do números complexos $w_1 = 0$ e $w_2 = -2i$. Ou seja, a mediatriz do reta cujos extremos são os pontos de coordenadas $(0,0)$ e $(0,-2)$.
   - A condição $0 \leq \arg(z) \leq \pi$ define todos os números complexos cuja representação geométrica define com a origem e a parte positiva do eixo real um ângulo compreendido entre 0 e π radianos. Ou seja, a totalidade dos 1º e 2º quadrantes.
   - A condição $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = 2$ define todos os números complexos da forma $w = a + (2-a)i$, com $a \in \mathbb{R}$. Ou seja a reta paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares que contém o ponto de coordenadas $(0,-2)$.

Resposta: **Opção A**

8. Seja $w = 2\,\mathrm{cis}\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$. Como $-\pi < \arg(w) < -\frac{\pi}{2}$, a imagem geométrica de w pertence ao 3º quadrante, logo o único vértice do polígono que pode ser a imagem geométrica do número complexo w, é o vértice H

Resposta: **Opção C**

GRUPO II

1.

1.1. Como $\text{cis}\,\frac{\pi}{2} = i$, temos que:

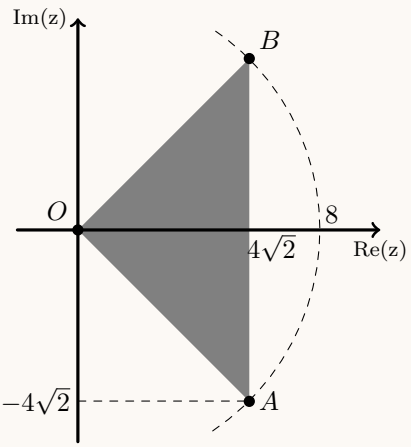
$z_1 = (1-i).(1+i) = 1^2 - i^2 = 1 + 1 = 2$

Na f.t.: $z_1 = 2\,\text{cis}\,0$

Fazendo a divisão na f.t.:

$$w = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2\,\text{cis}\,0}{8\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2}{8}\,\text{cis}\left(0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{4}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4}$$

1.2. Representando os pontos A e B, podemos desenhar o triângulo $[ABC]$ (ver figura ao lado).



Como $z_2 = 8\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, podemos escrever este número na f.a.:

$$z_2 = 8\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 8\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$$

E assim, considerando como base do triângulo o lado $[AB]$, temos que a medida da base é $2|\text{Im}\,(z)| = 2 \times 4\sqrt{2}$ e a medida da altura é $\text{Re}\,(z) = 4\sqrt{2}$.

Logo a área do triângulo $[ABC]$ é:

$$A_{[ABC]} = \frac{2 \times 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}}{2} = 4^2 \times \left(\sqrt{2}\right)^2 = 16 \times 2 = 32$$

2.

2.1. O número de hipóteses em que nas extremidades ficam sentados rapazes é dado por ${}^3A_2$, que corresponde a selecionar 2 dos 3 rapazes, considerando a ordem relevante para distinguir a extremidade da esquerda e da direita.
Depois, por cada uma das hipóteses anteriores, existem 4 pessoas para ocupar as 4 posições centrais, o que corresponde a ${}^4A_4 = P_4 = 4!$ hipóteses para ocupar os lugares centrais.
Assim, o número de maneiras diferentes que os seis amigos se podem sentar, ficando um rapaz em cada uma das extremidades, é

$${}^3A_2 \times 4! = 144$$

2.2. Determinando a probabilidade com recurso à Regra de LaPlace, calculamos o quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis, sendo os casos possíveis equiprováveis.
O número de casos possíveis pode ser calculado por ${}^3A_3 = P_3 = 3!$ o que significa que ordenamos os pares. Por exemplo fixando a ordem das raparigas, sendo a Ana a primeira, a Maria a segunda e a Francisca a terceira, se ordenarmos os rapazes, cada posição corresponde a dançar com a rapariga dessa posição - assim temos 3 elementos (rapazes) para 3 posições (raparigas), ou seja 3! emparelhamentos diferentes.
Considerando 3! casos possíveis, existem 2 casos favoráveis, que correspondem à situação da Ana dançar com o João, e os outros dois pares trocarem entre si (o Rui dançar com a Maria, ou o Rui dançar com a Francisca).
Logo a probabilidade da Ana dançar com o João é igual a $\frac{2}{3!}$

3. Temos que:

$$\begin{aligned} 1 - P\left(\overline{A \cup B}\right) + P(A|B) \times P(B) &= P(A \cup B) + P(A|B) \times P(B) && (1) \\ &= P(A \cup B) + \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \times P(B) && (2) \\ &= P(A \cup B) + P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) && (3) \end{aligned}$$

(1) Teorema: $P(X) = 1 - P\left(\overline{X}\right)$
(2) Definição: $P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$
(3) Teorema: $P(X \cup Y) + P(X \cap Y) = P(X) + P(Y)$

Logo, $1 - P\left(\overline{A \cup B}\right) + P(A|B) \times P(B) = P(A) + P(B)$ *q.e.d.*

4.

4.1. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)'x - e^x(x)'}{x^2} = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

Como o declive (m) da reta tangente ao gráfico de f em $x = 2$ é $f'(2)$, temos que:

$$m = f'(2) = \frac{2e^2 - e^2}{2^2} = \frac{e^2}{4}$$

Determinando a ordenada do ponto do gráfico da função que tem abcissa zero, temos:

$$f(2) = \frac{e^2}{2}$$

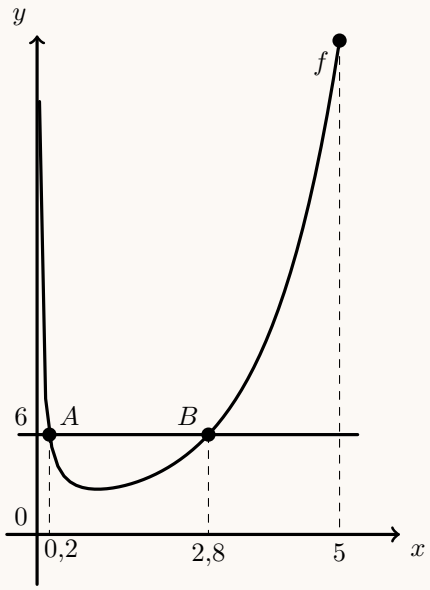
Como o ponto de abcissa 2, também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx + b$, para calcular o valor de b:

$$\frac{e^2}{2} = \frac{e^2}{4} \times 2 + b \Leftrightarrow \frac{e^2}{2} = \frac{e^2}{2} + b \Leftrightarrow \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} = b \Leftrightarrow 0 = b$$

Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0, é:

$$y = \frac{e^2}{4} \times x$$

4.2. Traçando na calculadora gráfica o gráfico da função f, no intervalo $]0,5]$ e a reta de equação $y = 6$ podemos visualizar o gráfico reproduzido na figura ao lado.



Assim, as abcissas dos pontos A e B, também assinalados na figura ao lado, podem ser determinadas com aproximação às décimas, usando a função da calculadora que permite determinar valores aproximados para as coordenadas de pontos de interseção de dois gráficos.

As coordenadas são $A(0{,}2; 6)$ e $B(2{,}8; 6)$, pelo que podemos calcular a distância, com aproximação às décimas, como o valor absoluto da diferença das abcissas:

$$\overline{AB} = |x_B - x_A| \approx |2{,}8 - 0{,}2| \approx 2{,}6$$

5. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(\ln(x^2+1)\right)' = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \frac{2x+0}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \wedge \underbrace{x^2+1 \neq 0}_{\text{PV, } x^2+1 \geq 1} \Leftrightarrow x = 0$$

Analisando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de f, temos:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

Assim, podemos concluir que a função f:

- é decrescente no intervalo $]-\infty,0]$;
- é crescente no intervalo $[0,+\infty[$;
- tem um único extremo - um mínimo (cujo minimizante é 0).

Calculando o valor do mínimo, vem:

$$f(0) = \ln(0^2+1) = \ln(0+1) = \ln 1 = 0$$

6. Como $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$, então $\operatorname{sen}(2a) = \operatorname{sen}(a+a) = 2\operatorname{sen} a \cos a$, e assim temos que

$$f(x) = 2\operatorname{sen}(x).\cos(x) + 2 \Leftrightarrow f(x) = \operatorname{sen}(2x) + 2$$

A ordenada do ponto de interseção da reta $y = 1$ com o gráfico de f é 1 e a abcissa é a solução da equação $f(x) = 1$ que pertence ao intervalo $[0,\pi]$. Assim, resolvendo a equação temos:

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) + 2 = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = -1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \vee 2x = \pi - \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \frac{2k\pi}{2} \vee 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \; k \in \mathbb{Z}$$

Assim atribuindo valores a k ($k = 0$ para o primeiro caso ou $k = 1$ no segundo caso) obtemos a única solução da equação que pertence ao intervalo $[0,\pi]$, ou seja, $x = \frac{3\pi}{4}$

Logo as coordenadas do ponto de interseção são: $\left(\frac{3\pi}{4},1\right)$

7.

7.1. Como

$$T(0) = 25 + 48e^{-0,05\times 0} = 25 + 48e^{0} = 25 + 48 \times 1 = 73$$

Então sabemos que zero minutos após o início do arrefecimento, ou seja, quando se interrompeu o processo de aquecimento, a temperatura da água era de 73 graus Celcius.

Como se verifica que:

$$\lim_{x\to+\infty} T(t) = \lim_{x\to+\infty} \left(25 + 48e^{-0,05\times t}\right) = \lim_{x\to+\infty} (25) + \lim_{x\to+\infty} \left(48e^{-0,05\times t}\right) =$$

$$= 25 + 48 \lim_{x\to+\infty} e^{-0,05\times t} = 25 + 48 \times e^{-0,05\times+\infty} = 25 + 48 \times e^{-\infty} = 25 + 48 \times 0^{+} = 25$$

Então sabemos que um aumento arbitrariamente grande do tempo corresponde a uma temperatura de 25 graus Celsius, ou seja, com o passar do tempo a água vai arrefecer até aos 25 graus.

7.2. Equacionado o problema e resolvendo a equação, vem:

$$T(t) = 36 \Leftrightarrow 25 + 48e^{-0,05t} = 36 \Leftrightarrow 48e^{-0,05t} = 36 - 25 \Leftrightarrow e^{-0,05t} = \frac{11}{48} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,05t = \ln\frac{11}{48} \Leftrightarrow t = \frac{\ln\frac{11}{48}}{-0,05} \Rightarrow t \approx 29,4661$$

Assim temos que o tempo corresponde a 29,4661 minutos, aproximadamente. E como cada minuto tem 60 segundos, fazendo a conversão de 0,4661 minutos para segundos, temos que:

$$0,4661 \times 60 = 27,9660 \approx 28 \text{ s}$$

Pelo que se concluí que demorou 29 minutos e 28 segundos, após o início do arrefecimento, para que a temperatura da água atingisse os 36º Celsius.

2009

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/1.ª Fase 11 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2009

VERSÃO 1

Na folha de respostas, indique de forma legível a versão da prova.

A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens do Grupo I.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser primeiramente elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica, sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única alternativa correcta.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 4, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(*r – raio da base; g – geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\, \pi\, r^2$
(*r – raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Cone: $\dfrac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\dfrac{4}{3}\, \pi\, r^3$
(*r – raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ \operatorname{cis} \dfrac{\theta + 2k\pi}{n},\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = \mathrm{x}_1\, \mathrm{p}_1 + \cdots + \mathrm{x}_\mathrm{n}\, \mathrm{p}_\mathrm{n}$

$\sigma = \sqrt{(\mathrm{x}_1 - \mu)^2\, \mathrm{p}_1 + \cdots + (\mathrm{x}_\mathrm{n} - \mu)^2\, \mathrm{p}_\mathrm{n}}$

$\mathrm{Se\ X\ é\ N}(\mu, \sigma), \mathrm{então:}$

$\mathrm{P}(\mu - \sigma < \mathrm{X} < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$\mathrm{P}(\mu - 2\sigma < \mathrm{X} < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$\mathrm{P}(\mu - 3\sigma < \mathrm{X} < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única alternativa correcta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a alternativa seleccionada.

Não apresente cálculos nem justificações.

1. De um baralho com 40 cartas, repartidas por quatro naipes (Copas, Ouros, Espadas e Paus), em que cada naipe contém um Ás, uma Dama, um Valete, um Rei e seis cartas (do Dois ao Sete), foram dadas sucessivamente, ao acaso, seis cartas a um jogador, que as coloca na mão, pela ordem que as recebe.

Qual é a probabilidade de o jogador obter a sequência $2 - 4 - 6 - 7 -$ Dama $-$ Rei, nas cartas recebidas?

(A) $\frac{4^6}{{}^{40}A_6}$ **(B)** $\frac{4^6}{{}^{40}C_6}$ **(C)** $\frac{1}{{}^{40}A_6}$ **(D)** $\frac{1}{{}^{40}C_6}$

2. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}3$
- $P(B) = 0{,}4$
- $P(A \cup B) = 0{,}5$

(P designa probabilidade.)

Qual é a probabilidade de se realizar A, sabendo que B se realiza?

(A) $\frac{1}{6}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

3. Considere uma variável aleatória X, cuja distribuição de probabilidades é dada pela tabela seguinte.

x_i	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{k}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{k}{4}$

Qual é o valor de k?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

4. Seja x um número real positivo.

Qual das expressões seguintes é igual a $e^{4\ln x} - 10^{2\log x}$?

($\ln$ designa logaritmo de base e; $\log$ designa logaritmo de base 10.)

(A) $\ln x^4 - \log x^2$ **(B)** $x^4 + x^2$ **(C)** $x^4 - x^2$ **(D)** $\dfrac{\ln x^4}{\log x^2}$

5. Para um certo número real positivo k, é contínua a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(k+x) & \text{se} \quad x \geq 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x} & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

6. Na figura 1, está representado um triângulo inscrito numa circunferência de centro O e raio igual a 1.

Um dos lados do triângulo é um diâmetro da circunferência.

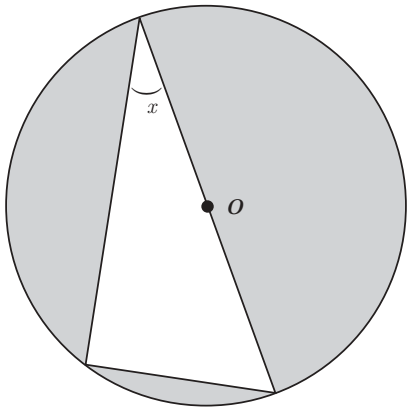


Fig. 1

Qual das expressões seguintes representa, em função de x, a área da parte sombreada?

(A) $\pi - \operatorname{sen}(2x)$ **(B)** $\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{sen}(2x)$ **(C)** $\pi - 2\operatorname{sen}(2x)$ **(D)** $\pi - \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{4}$

7. Seja z um número complexo, em que um dos argumentos é $\frac{\pi}{3}$.

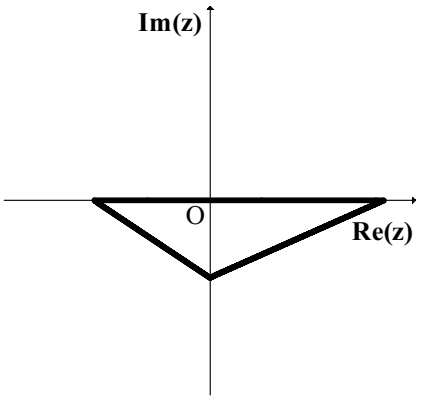
Qual dos valores seguintes é um argumento de $\frac{2i}{\overline{z}}$, sendo $\overline{z}$ o conjugado de z?

(A) $\frac{\pi}{6}$ **(B)** $\frac{2}{3}\pi$ **(C)** $\frac{5}{6}\pi$ **(D)** $\frac{7}{6}\pi$

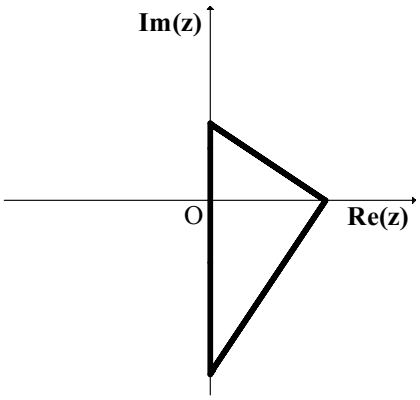
8. Seja b um número real positivo, e $z_1 = bi$ um número complexo.

Em qual dos triângulos seguintes os vértices podem ser as imagens geométricas dos números complexos z_1, $(z_1)^2$ e $(z_1)^3$?

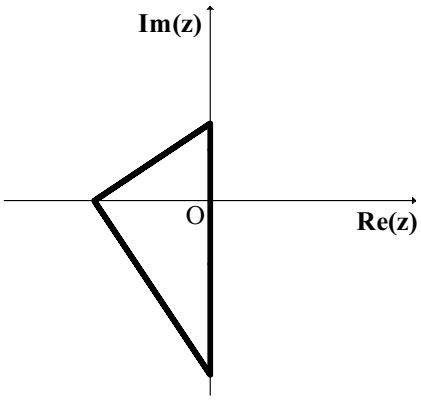
(A)



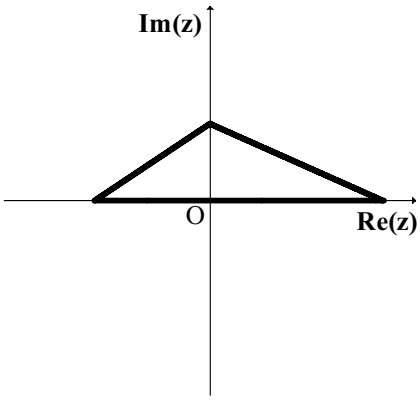
(B)



(C)



(D)



GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \dfrac{i}{1-i} - i^{18}$ e $z_2 = \operatorname{cis}\left(\dfrac{5}{6}\pi\right)$.

1.1. Determine z_1 na forma trigonométrica, **sem recorrer à calculadora**.

1.2. Determine o menor valor de $n \in \mathbb{N}$, tal que $(-i\ z_2)^n = -1$.

2. De um bilhete de lotaria sabe-se que o seu número é formado por sete algarismos, dos quais três são iguais a 1, dois são iguais a 4 e dois são iguais a 5 (por exemplo: $1\,5\,5\,1\,4\,1\,4$).

Determine quantos números diferentes satisfazem as condições anteriores.

3. Uma caixa contém bolas, indistinguíveis ao tacto, numeradas de 1 a 20. As bolas numeradas de 1 a 10 têm cor verde, e as bolas numeradas de 11 a 20 têm cor amarela.

Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, sucessivamente, duas bolas da caixa, não repondo a primeira bola retirada, e em registar a cor das bolas retiradas.

3.1. Determine a probabilidade de as duas bolas retiradas da caixa terem cores diferentes.

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3.2. Na mesma experiência aleatória, considere os acontecimentos:

A: «A 1.ª bola retirada é verde.»

B: «A 2.ª bola retirada é amarela.»

C: «O número da 2.ª bola retirada é par.»

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P((B \cap C) \mid A)$?

A resposta correcta a esta questão é $P((B \cap C) \mid A) = \dfrac{5}{19}$.

Numa pequena composição, **sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada**, explique o valor dado, começando por interpretar o significado de $P((B \cap C) \mid A)$, no contexto da situação descrita e fazendo referência:

- à Regra de Laplace;
- ao número de casos possíveis;
- ao número de casos favoráveis.

4. Sejam f e g duas funções, ambas de domínio $\mathbb{R}^+$.

Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = 0$;
- a função g é definida por $g(x) = f(x) + x^2$.

Prove que o gráfico de g não tem assimptotas oblíquas.

5. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = e^{2x} + \ln x$.

5.1. Mostre, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, que a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $]0{,}1;\ 0{,}3[$.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos.

5.2. O gráfico de g contém um único ponto A com abcissa pertencente ao intervalo $]0,\ 2]$ e cuja ordenada é igual ao dobro da abcissa.

Traduza esta situação por meio de uma equação.

Resolva a equação, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**.

Indique as coordenadas do ponto A, com aproximação às décimas.

Reproduza, na folha de respostas, o gráfico, ou os gráficos, visualizado(s) na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial.

Assinale o ponto A em que se baseou para dar a sua resposta.

6. Sejam as funções f e h, de domínios $]1,\ +\infty[$ e $]-\infty,\ 2[$, respectivamente, definidas por $f(x) = \log_2 (x - 1)$ e por $h(x) = \log_2 (2 - x)$.

Determine, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, o conjunto solução da condição $f(x) \geq 1 + h(x)$.

Apresente o resultado sob a forma de intervalo real.

7. Num certo dia, o Fernando esteve doente e tomou, às 9 horas da manhã, um medicamento cuja concentração $C(t)$ no sangue, em $\mathrm{mg/l}$, t horas após o medicamento ter sido ministrado, é dada por

$$C(t) = 2t\,e^{-0,3t} \qquad (t \geq 0)$$

Resolva, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, os dois itens seguintes.

7.1. Calcule $\lim\limits_{t \to +\infty} C(t)$ e interprete esse valor no contexto da situação apresentada.

7.2. Determine a que horas se verificou a concentração máxima.

Apresente o resultado em horas e minutos, arredondando estes às unidades.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I ..... (8 × 5 pontos)..... **40 pontos**

GRUPO II ..... **160 pontos**

1. ..... 30 pontos
- **1.1.** ..... 15 pontos
- **1.2.** ..... 15 pontos

2. ..... 15 pontos

3. ..... 30 pontos
- **3.1.** ..... 15 pontos
- **3.2.** ..... 15 pontos

4. ..... 15 pontos

5. ..... 30 pontos
- **5.1.** ..... 15 pontos
- **5.2.** ..... 15 pontos

6. ..... 15 pontos

7. ..... 25 pontos
- **7.1.** ..... 10 pontos
- **7.2.** ..... 15 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/1.ª Fase

12 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2009

COTAÇÕES

GRUPO I	(8 × 5 pontos)	**40 pontos**
GRUPO II		**160 pontos**
1.		30 pontos
1.1.		15 pontos
1.2.		15 pontos
2.		15 pontos
3.		30 pontos
3.1.		15 pontos
3.2.		15 pontos
4.		15 pontos
5.		30 pontos
5.1.		15 pontos
5.2.		15 pontos
6.		15 pontos
7.		25 pontos
7.1.		10 pontos
7.2.		15 pontos
TOTAL		**200 pontos**

A classificação da prova deve respeitar integralmente os critérios gerais e específicos a seguir apresentados

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada item é obrigatoriamente:

– um número inteiro;

– um dos valores resultantes da aplicação dos critérios gerais e específicos de classificação e previstos na respectiva grelha de classificação.

As respostas que se revelem ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos. No entanto, em caso de omissão ou de engano na identificação de um item, o mesmo pode ser classificado se, pela resposta apresentada, for possível identificá-lo inequivocamente.

Se o examinando responder a um mesmo item mais do que uma vez, não eliminando inequivocamente a(s) resposta(s) que não deseja que seja(m) classificada(s), deve ser apenas considerada a resposta que surgir em primeiro lugar.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova (Versão 1 ou Versão 2) implica a classificação com zero pontos de todas as respostas aos itens de escolha múltipla.

Nos itens de resposta fechada de escolha múltipla, a cotação total do item só é atribuída às respostas que apresentam, de forma inequívoca, a única alternativa correcta.

São classificadas com zero pontos as respostas em que é assinalada:

– uma alternativa incorrecta;

– mais do que uma alternativa.

Não há lugar a classificações intermédias.

Os critérios de classificação dos itens de resposta aberta apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

Nos itens de resposta aberta extensa orientada, com cotação igual ou superior a quinze pontos e que impliquem a produção de um texto, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea das competências específicas da disciplina e das competências de comunicação escrita em língua portuguesa.

A avaliação das competências de comunicação escrita em língua portuguesa contribui para valorizar a classificação atribuída ao desempenho no domínio das competências específicas da disciplina. Esta valorização é cerca de 10% da cotação do item e faz-se de acordo com os níveis de desempenho a seguir descritos.

Nível	Descritor
3	Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
2	Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou ortografia, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
1	Composição sem estruturação aparente, com a presença de erros graves de sintaxe, pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é zero pontos. Neste caso, não é classificado o desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar em situações não descritas anteriormente.

Situação	Classificação
1. Classificação de um item cujo critério se apresenta organizado por etapas.	A cotação indicada para cada etapa é a classificação máxima que lhe é atribuível. A classificação da resposta resulta da soma das classificações das diferentes etapas, à qual se subtraem, eventualmente, um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 14 e/ou 19.
2. Classificação de uma etapa dividida em passos.	A cotação indicada para cada passo é a classificação máxima que lhe é atribuível. A classificação da etapa resulta da soma das classificações dos diferentes passos.
3. Classificação de um item ou de uma etapa cujo critério se apresenta organizado por níveis de desempenho.	A resposta é enquadrada numa das descrições apresentadas. À classificação correspondente subtraem-se, eventualmente, um, dois ou três pontos, de acordo com o previsto nas situações 9, 10 e/ou 19.
4. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite e classificado qualquer processo de resolução cientificamente correcto. O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante a distribuição da cotação do item pelas etapas* percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.
5. Apresentação apenas do resultado final, embora a resolução do item exija cálculos e/ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
6. Utilização de processos de resolução que não respeitam as instruções dadas [por exemplo, «usando métodos analíticos»].	A etapa em que a instrução não é respeitada é classificada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário, no critério específico de classificação.
7. Ausência de apresentação dos cálculos e/ou das justificações necessárias à resolução de uma etapa*.	A etapa é classificada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário, no critério específico de classificação.
8. Ausência de apresentação explícita de uma dada etapa.	Se a resolução apresentada permitir perceber, inequivocamente, que a etapa foi percorrida, a mesma é classificada com a cotação total para ela prevista.
9. Transposição incorrecta de dados do enunciado.	Se o grau de dificuldade da resolução não diminuir, é subtraído um ponto à classificação da etapa. Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a classificação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
10. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo.	É subtraído um ponto à classificação da etapa em que o erro ocorre.
11. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.	A classificação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.

* Em situações em que o critério é aplicável tanto a **etapas** como a **passos**, utiliza-se apenas o termo «etapas» por razões de simplificação da apresentação.

Situação	Classificação
12. Ocorrência de um erro na resolução de uma etapa.	A etapa é classificada de acordo com o erro cometido. As etapas subsequentes são classificadas de acordo com os efeitos do erro cometido: – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são classificadas de acordo com os critérios específicos de classificação; – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a classificação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
13. Resolução incompleta de uma etapa.	Se, à resolução da etapa, faltar apenas o passo final, é subtraído um ponto à classificação da etapa; caso contrário, a classificação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
14. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação de um arredondamento incorrecto.	É subtraído um ponto à classificação total da resposta.
15. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fracção, e a resposta apresenta-se na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à classificação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final [por exemplo, «15» em vez de «15 metros»].	A etapa relativa à apresentação do resultado final é classificada com a cotação total para ela prevista.
17. Apresentação do resultado final com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exacto.	É subtraído um ponto à classificação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
18. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, e/ou apresentação do resultado final incorrectamente arredondado.	É subtraído um ponto à classificação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
19. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à classificação total da resposta, excepto: – se as incorrecções ocorrerem apenas em etapas já classificadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a **8.** ..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

As respostas correctas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	A	D	B	C	D	A	C	C
Versão 2	D	A	C	B	A	D	B	B

GRUPO II

É de aceitar qualquer processo de resolução cientificamente correcto, ainda que não esteja previsto nestes critérios específicos, nem no programa (ver critério 4 dos critérios gerais).

1.1. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º processo

Calcular z_1 na forma algébrica ..... 8 pontos

Apresentam-se duas possíveis resoluções para o cálculo de z_1 na forma trigonométrica:

Calcular i^{18} $(i^{18} = -1)$ ..... 1 ponto

Calcular $\frac{i}{1-i} + 1$ $\left(\frac{i}{1-i} + 1 = \frac{1}{1-i}\right)$ ..... 3 pontos

Calcular $\frac{1}{1-i}$ $\left(\frac{1}{1-i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)$ ..... 4 pontos

Multiplicar ambos os termos da fracção por $1 + i$ ... 2 pontos
Restantes cálculos ..... 2 pontos

OU

Calcular i^{18} $(i^{18} = -1)$ ..... 1 ponto

Calcular $\frac{i}{1-i}$ $\left(\frac{i}{1-i} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)$ ..... 5 pontos

Multiplicar ambos os termos da fracção por $1 + i$ ... 2 pontos
Restantes cálculos ..... 3 pontos

Calcular $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + 1$ $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)$ ..... 2 pontos

Calcular $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ na forma trigonométrica (**ver nota**) ..... 7 pontos

Calcular o módulo $\left(\rho = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou equivalente}\right)$ ..... 3 pontos

Indicar um argumento $\left(\theta = \frac{\pi}{4}\right)$ ..... 3 pontos

Escrever z_1 na forma trigonométrica $\left(z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ ... 1 ponto

Nota: Esta etapa segue-se a qualquer uma das duas resoluções para o cálculo de z_1 na forma algébrica, apresentadas anteriormente.

2.º processo

Calcular i^{18} $\left(i^{18} = -1\right)$..... 1 ponto

Calcular $\frac{i}{1-i} + 1$ $\left(\frac{i}{1-i} + 1 = \frac{1}{1-i}\right)$ ..... 3 pontos

Calcular $\frac{1}{1-i}$ na forma trigonométrica..... 11 pontos

Escrever $1 = \text{cis}\ (0)$ ..... 2 pontos

Calcular $1 - i$ na forma trigonométrica ..... (2 + 2 + 1) ..... 5 pontos

Escrever $\frac{1}{1-i} = \frac{\text{cis}(0)}{\sqrt{2}\ \text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$ ..... 1 ponto

Efectuar a divisão na forma trigonométrica ..... 2 pontos

Escrever z_1 na forma trigonométrica $\left(z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ ... 1 ponto

1.2. ..... **15 pontos**

Escrever $-i = \text{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ (ou equivalente)..... 2 pontos

Escrever $-i.z_2 = \text{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right).\ \text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ ..... 1 ponto

Efectuar o produto $\left(-i.z_2 = \text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ (ou equivalente) ..... 4 pontos

Escrever $\left(\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^n = \text{cis}\left(n\frac{\pi}{3}\right)$ ..... 2 pontos

Escrever $-1 = \text{cis}\ (\pi)$ ..... 2 pontos

Escrever $\text{cis}\left(n\frac{\pi}{3}\right) = \text{cis}\left(\pi\right)$ ..... 1 ponto

Apresentar o valor de n pedido $(n = 3)$ ..... 3 pontos

2. ..... **15 pontos**

Expressão que dá o valor pedido (**ver nota 1**)..... 12 pontos
Valor pedido (210) (**ver nota 2**) ..... 3 pontos

Nota 1: Indicam-se, a seguir, possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva classificação a atribuir.

$^{7}C_{3} \times {}^{4}C_{2} \times {}^{2}C_{2}$ ou $^{7}C_{2} \times {}^{5}C_{3} \times {}^{2}C_{2}$ ou $^{7}C_{2} \times {}^{5}C_{2} \times {}^{3}C_{3}$
ou $\dfrac{7!}{3! \times 2! \times 2!}$ ..... 12 pontos

$7!$ ..... 4 pontos

Outras situações ..... 0 pontos

Nota 2: A classificação relativa a esta etapa só é atribuída se a etapa anterior não tiver sido classificada com zero pontos.

3.1. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º processo:

Expressão que dá o valor pedido (**ver nota 1**) ..... 12 pontos

Resultado na forma pedida $\left(P = \dfrac{10}{19}\right)$ (**ver nota 2**) ..... 3 pontos

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva classificação a atribuir.

$\dfrac{10 \times 10 \times 2}{20 \times 19}$ (ou equivalente) ..... 12 pontos

$\dfrac{10 \times 10}{20 \times 19}$ (ou equivalente) ..... 8 pontos

$\dfrac{10 \times 10 \times 2}{20 \times 20}$ (ou equivalente) ..... 6 pontos

Outras situações ..... 0 pontos

2. A classificação relativa a esta etapa só é atribuída se a etapa anterior não tiver sido classificada com zero pontos.

2.º processo:

Justificação para o valor pedido (**ver nota 1**)..... 12 pontos

Resultado na forma pedida $\left(P = \frac{10}{19}\right)$ (**ver nota 2**) ..... 3 pontos

Notas:

1. Um exemplo de uma justificação correcta poderá ser:
«Retirada a primeira bola, seja qual for o resultado, ficamos com dezanove possibilidades equiprováveis de tirar a segunda bola, das quais dez são de cor diferente da primeira. A probabilidade pedida é, assim, igual a $\frac{10}{19}$.»

2. A classificação relativa a esta etapa só é atribuída se a etapa anterior não tiver sido classificada com zero pontos.

3.2. ..... **15 pontos**

A composição deve abordar os seguintes pontos:

- Interpretação de $P((B \cap C) \mid A)$: significa a probabilidade de a segunda bola retirada ter cor amarela e ter número par, sabendo que a primeira bola retirada é verde;
- Explicação do número de casos possíveis: como foi retirada uma bola e não há reposição, existem 19 bolas possíveis para a 2.ª extracção;
- Explicação do número de casos favoráveis: uma vez que a primeira bola retirada é verde, continuam na caixa as 10 bolas amarelas, numeradas de 11 a 20, das quais existem cinco com número par;
- Concluir que a probabilidade é $\frac{5}{19}$. De acordo com a Regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, quando estes são todos equiprováveis (não se exige que o examinando refira a equiprobabilidade dos casos possíveis).

Na tabela seguinte, indica-se como deve ser classificada a resposta a este item, de acordo com os níveis de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa, descritos nos critérios gerais, e os níveis de desempenho no domínio específico da disciplina.

Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina			Descritores do nível de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa — Níveis*		
			1	2	3
Níveis**	4	A composição aborda correctamente os quatro pontos.	13	14	15
	3	A composição aborda correctamente apenas três pontos.	9	10	11
	2	A composição aborda correctamente apenas dois pontos.	5	6	7
	1	A composição aborda correctamente apenas um ponto.	1	2	3

* Descritores apresentados nos critérios gerais.

** Apenas podem ser atribuídas classificações correspondentes a um dos valores constantes do quadro. Não há lugar a classificações intermédias.

4. ..... **15 pontos**

Identificar o declive da assimptota oblíqua do gráfico de f $(m = 2)$ ..... 2 pontos

Indicar $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$ ..... 2 pontos

Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x}$ ..... 9 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x) + x^2}{x}$ ..... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} + \lim\limits_{x \to +\infty} (x)$ ..... 3 pontos

Indicar $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = +\infty$ ..... 4 pontos

Concluir que o gráfico da função g não tem assimptotas oblíquas ..... 2 pontos

5.1. ..... **15 pontos**

Referir que a função g é contínua em $[0{,}1;\ 0{,}3]$ **(ver nota 1)** ..... 3 pontos

Calcular $g(0{,}1)$ ..... 2 pontos

Calcular $g(0{,}3)$ ..... 2 pontos

Concluir que $g(0{,}1) < 0 < g(0{,}3)$ (ou referir que $g(0{,}1)$ e $g(0{,}3)$ têm sinais contrários) ..... 3 pontos

Concluir o pretendido (**ver nota 2**) ..... 5 pontos

Notas:

1. Se o examinando não referir a continuidade da função no intervalo $[0{,}1;\ 0{,}3]$, mas afirmar que a função é contínua em todo o seu domínio, a classificação a atribuir a esta etapa não deve ser desvalorizada.
2. Se o examinando não referir que a conclusão resulta do Teorema de Bolzano ou do seu corolário, a classificação a atribuir a esta etapa deve ser desvalorizada em um ponto.

5.2. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º processo

Escrever a equação $(e^{2x} + \ln x = 2x)$ ..... 3 pontos

Representar graficamente a função g ..... 3 pontos

Indicar as coordenadas do ponto A ..... 8 pontos

- Representar a recta $y = 2x$ ..... 2 pontos
- Assinalar o ponto A de intersecção ..... 2 pontos
- Escrever as coordenadas aproximadas do ponto A $(0{,}3;\ 0{,}6)$ .....(2 + 2)..... 4 pontos

Identificar o(s) gráfico(s) **(ver nota)** ..... 1 ponto

Nota: Se o examinando identificar apenas um gráfico, a classificação a atribuir a esta etapa não deve ser desvalorizada.

2.º processo

Escrever a equação $e^{2x} + \ln x = 2x$ ..... 3 pontos

Escrever a equação $e^{2x} + \ln x - 2x = 0$ ..... 1 ponto

Representar graficamente a função definida por $y = e^{2x} + \ln x - 2x$ ..... 2 pontos

Indicar o zero da função anterior ..... 2 pontos

Representar graficamente a função g ..... 3 pontos

Assinalar o ponto A no gráfico da função g ..... 1 ponto

Escrever as coordenadas do ponto A ..... 2 pontos

Identificar o(s) gráfico(s) **(ver nota)** ..... 1 ponto

Nota: Se o examinando identificar apenas um gráfico, a classificação a atribuir a esta etapa não deve ser desvalorizada.

6. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º processo

Escrever $\log_2(x-1) \geq 1 + \log_2(2-x)$ ..... 1 ponto

Resolver a inequação ..... 10 pontos

- Escrever $1 = \log_2 2$ ..... 3 pontos
- Utilizar a propriedade da soma de logaritmos ..... 3 pontos
- Resolver a inequação $(x-1) \geq (4-2x)$ ..... 4 pontos

Indicar a solução da inequação $f(x) \geq 1 + h(x)$ $\left(S = \left[\frac{5}{3}, 2\right[\right)$ ..... 4 pontos

2.º processo

Escrever $\log_2(x-1) \geq 1 + \log_2(2-x)$ ..... 1 ponto

Resolver a inequação ..... 10 pontos

Escrever $\log_2(x-1) - \log_2(2-x) \geq 1$ ..... 1 ponto

Utilizar a propriedade da diferença de logaritmos ..... 3 pontos

Obter a inequação $\frac{x-1}{2-x} \geq 2$ ..... 2 pontos

Resolver a inequação $\frac{x-1}{2-x} \geq 2$ ..... 4 pontos

Indicar a solução da inequação $f(x) \geq 1 + h(x)$ $\left(S = \left[\frac{5}{3}, 2\right[\right)$ ..... 4 pontos

7.1. ..... **10 pontos**

Calcular $\lim\limits_{t \to +\infty} C(t)$ ..... 8 pontos

Escrever $\lim\limits_{t \to +\infty} C(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} (2te^{-0,3t})$ ..... 1 ponto

Levantar a indeterminação ..... 6 pontos

Concluir que $\lim\limits_{t \to +\infty} C(t) = 0$ ..... 1 ponto

Interpretar o valor do limite no contexto da situação apresentada ..... 2 pontos

7.2. ..... **15 pontos**

Determinar $C'(t)$ $(C'(t) = 2e^{-0,3t} - 0,6te^{-0,3t})$ ..... 3 pontos

Determinar o zero de C' ..... 3 pontos

Escrever $C'(t) = 0$ ..... 1 ponto

Resolver a equação $\left(t = \frac{10}{3}\right)$ ..... 2 pontos

Estudar o sinal de C' e consequente conclusão, relativamente ao extremo relativo de C, com recurso a um quadro (**ver nota**) ..... 5 pontos

Primeira linha do quadro (relativa à variável t) ..... 1 ponto

Sinal de C' ..... 1 ponto

Relação entre o sinal de C' e a monotonia de C ..... 1 ponto

Indicar, no quadro, que a função C tem o seu valor máximo para $\left(t = \frac{10}{3}\right)$ ..... 2 pontos

Escrever $\frac{10}{3}\mathrm{h} = 3\mathrm{h}\ 20\,\mathrm{min}$ ..... 2 pontos

Escrever a que horas foi registada a concentração máxima $(12\,\mathrm{h}\ 20\,\mathrm{min})$ ..... 2 pontos

Nota: Se o examinando não recorrer a um quadro, mas apresentar uma justificação equivalente, a classificação a atribuir a esta etapa não deve ser desvalorizada.

Exame nacional de Matemática A **(2009, 1.ª fase)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como existem 4 cartas de cada tipo, existem $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^6$ sequências do tipo «2 – 4 – 6 – 7 – Dama – Rei» (existem 4 hipóteses para cada posição na sequência).
   O número de casos possíveis corresponde é determinado pelo número de sequências (ou seja, a ordem é relevante) que se podem fazer com 6 cartas selecionadas de entre as 40 existentes: ${}^{40}A_6$.

   Logo, a probabilidade do jogador receber uma sequência do tipo «2 – 4 – 6 – 7 – Dama – Rei» é $\dfrac{4^6}{{}^{40}A_6}$

   Resposta: **Opção A**

2. Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$, temos que:

   $$P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}5 = 0{,}2$$

   Logo, a probabilidade de se realizar A, sabendo que B se realiza, é

   $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}2}{0{,}4} = \frac{1}{2}$$

   Resposta: **Opção D**

3. Como a soma das probabilidades é 1, temos que:

   $$\frac{k}{8} + \frac{1}{4} + \frac{k}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{k}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2k}{8} = \frac{8}{8} \Leftrightarrow k + 2 + 2k = 8 \Leftrightarrow 3k = 8 - 2 \Leftrightarrow k = \frac{6}{3} \Leftrightarrow k = 2$$

   Resposta: **Opção B**

4. Usando as propriedades das potências e dos logaritmos, temos que:

   $$e^{4 \ln x} - 10^{2 \log x} = e^{\ln x^4} - 10^{\log x^2} = x^4 - x^2$$

   Resposta: **Opção C**

5. Como a função é contínua, é contínua no seu domínio, em particular é contínua em $x = 0$, logo verifica-se a condição: $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

   - $f(0) = \log_2(k+0) = \log_2 k$
   - $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\log_2(k+x)\right) = \log_2(k+0^+) = \log_2 k$
   - $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = \dfrac{\operatorname{sen}(2\times 0)}{0} = \dfrac{0}{0}$ (indeterminação)
     $= \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2\times \operatorname{sen}(2x)}{2\times x} = 2\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} \underset{(1)}{=} 2\underbrace{\lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Limite Notável}} = 2\times 1 = 2$

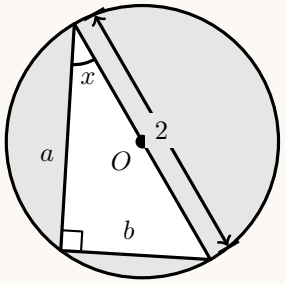
   (1) fazendo $y = 2x$, se $x \to 0^-$, então $y \to 0^-$

   Logo, como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, temos que:

   $$\log_2 k = 2 \;\Leftrightarrow\; k = 2^2 \;\Leftrightarrow\; k = 4$$

   Resposta: **Opção D**

6. Como a medida da hipotenusa do triângulo é 2 (porque é um diâmetro de uma circunferência de raio 1), podemos recorrer à definição de seno e cosseno, para determinar a medida da base (b) e da altura (a):



   $$\operatorname{sen} x = \frac{b}{2} \;\Leftrightarrow\; b = 2\operatorname{sen} x \qquad \text{e} \qquad \cos x = \frac{a}{2} \;\Leftrightarrow\; a = 2\cos x$$

   Logo, a área sombreada é a diferença da área do círculo e da área do triângulo:

   $$A = A_\circ - A_\Delta = \pi r^2 - \frac{b\times a}{2} = \pi(1)^2 - \frac{2\operatorname{sen} x\times 2\cos x}{2} =$$

   $$= \pi - 2\operatorname{sen} x\cos x = \pi - \operatorname{sen}(2x)$$

   Resposta: **Opção A**

7. Se $\arg(z) = \dfrac{\pi}{3}$ então $\arg(\overline{z}) = -\dfrac{\pi}{3}$

   Escrevendo $2i$ na f.t. temos $2i = 2\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{2}$

   Assim, sendo $\rho = |z|$ (e por isso também $\rho = |\overline{z}|$) e fazendo a divisão na f.t. temos que:

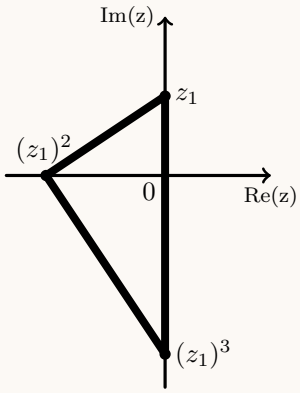
   $$\frac{2i}{\overline{z}} = \frac{2\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}}{\rho\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2}{\rho}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{2}{\rho}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{\rho}\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{6} + \frac{2\pi}{6}\right) = \frac{2}{\rho}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{6}$$

   Logo $\arg\left(\dfrac{2i}{\overline{z}}\right) = \dfrac{5}{6}\pi$

   Resposta: **Opção C**

8.

- Como $z_1 = bi$, Ou seja z_1 é um número imaginário puro, com a respetiva representação geométrica sobre o eixo imaginário.
- Logo $(z_1)^2 = (bi)^2 = b^2i^2 = b^2 \times (-1) = -b^2$ é um número real negativo com a respetiva representação geométrica sobre a parte negativa do eixo real.
- Logo $(z_1)^3 = (bi)^3 = b^3i^3 = b^3 \times (-i) = -b^3i$ é um número imaginário puro, com a respetiva representação geométrica sobre o eixo imaginário.



A única opção em que triângulo tem dois vértices sobre o eixo imaginário e o terceiro sobre a parte negativa do eixo real é a opção (C).

Resposta: **Opção C**

GRUPO II

1.

1.1. Como $i^{18} = i^{4\times4+2} = i^2 = -1$, temos que:

$$z_1 = \frac{i}{1-i} - i^{18} = \frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)} - (-1) = \frac{i+i^2}{1^2-i^2} + 1 = \frac{-1+i}{1+1} + 1 = \frac{-1+i}{2} + \frac{2}{2} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Escrevendo z_1 na f.t. temos $z_1 = \rho \operatorname{cis} \theta$, onde:

- $\rho = |z_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$; como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \frac{\pi}{4}$

Logo $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$

1.2. Escrevendo $-i$ na f.t. para facilitar o cálculo do produto temos:
$-i = \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, e logo:

$$-iz_2 = \left(\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \times \left(\operatorname{cis}\frac{5\pi}{6}\right) = \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{6}\right) = \operatorname{cis}\left(-\frac{3\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}\right) = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{6} = \operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$$

Logo $(-iz_2)^n = \left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}\right)^n = \operatorname{cis}\left(n \times \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{cis}\frac{n\pi}{3}$

E como $-1 = \operatorname{cis}\pi$, temos que:

$(-iz_2)^n = -1 \Leftrightarrow \operatorname{cis}\frac{n\pi}{3} = \operatorname{cis}\pi$, pelo que $\frac{n\pi}{3} = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Como $\frac{n\pi}{3} = \pi + 2k\pi$, se atribuirmos valores a k temos:

- Se $k = -1$, $\frac{n\pi}{3} = \pi + 2(-1)\pi \Leftrightarrow n\pi = 3\pi - 6\pi \Leftrightarrow n = 3-6 \Leftrightarrow n = -3$ (mas $-3 \notin \mathbb{N}$)
- Se $k = 0$, $\frac{n\pi}{3} = \pi + 2(0)\pi \Leftrightarrow n\pi = 3\pi \Leftrightarrow n = 3$ ($3 \in \mathbb{N}$)
- Se $k = 1$, $\frac{n\pi}{3} = \pi + 2(1)\pi \Leftrightarrow n\pi = 3\pi + 6\pi \Leftrightarrow n = 3+6 \Leftrightarrow n = 9$ ($9 \in \mathbb{N}$, mas $9 > 3$)

Logo que o menor valor natural de $n \in \mathbb{N}$, tal que $(-iz_2)^n = -1$ é 3, para $k = 0$

2. Como os algarismos que compõem o número estão definidos, os números que satisfazem estas condições diferem entre si apenas na posição de colocação dos algarismos.
Assim, selecionando 3 das 7 posições para serem ocupadas pelo algarismo «1» (sem considerar relevante a ordem porque estas posições serão ocupadas por algarismos iguais), temos ${}^{7}C_{3}$ colocações possíveis dos algarismos «1».
Por cada uma das colocações anteriores, devemos ainda selecionar 2 das 4 posições disponíveis $(7-3=4)$ para colocar o algarismos «4», ou seja ${}^{4}C_{2}$ escolhas.
As 2 posições ainda disponíveis $(7-3-2=2)$ serão ocupadas pelo algarismo «5», o que corresponde a ${}^{2}C_{2}=1$ escolha possível.
Assim a quantidade de números diferentes que satisfazem as condições definidas é:

$$ {}^{7}C_{3} \times {}^{4}C_{2} \times {}^{2}C_{2} = 210$$

3.

3.1. Como se pretende que as bolas tenham cor diferente, a extração da primeira bola não interfere com a ocorrência do acontecimento, porque existem mais do que uma bola de cada cor.
Como a extração da segunda bola é feita sem reposição e depois da primeira, verificamos que, antes da extração da segunda bola, existem 19 bolas na caixa (número de casos possíveis), das quais 10 são de cor diferente da que já foi extraída (número de casos favoráveis).
Assim, recorrendo à Regra de Laplace, temos que a probabilidade de as duas bolas retiradas da caixa terem cores diferentes, na forma de fração irredutível, é $\dfrac{10}{19}$

3.2. No contexto da situação descrita $P\left((B \cap C)|A\right)$ é a probabilidade de a segunda bola retirada da caixa seja amarela e tenha um número par, sabendo que a primeira bola retirada é verde.
De acordo com a Regra de Laplace, a probabilidade é calculada pelo quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis, sendo os casos possíveis equiprováveis.
Como a caixa tem 20 bolas e sabemos que foi extraída uma bola de cor verde, que não foi resposta, ficaram na caixa 19 bolas, ou seja, existem 19 casos possíveis, para a extração da segunda bola.
Como sabemos que a primeira bola extraída é verde, logo tem um número inferior ou igual a 10, pelo que das bolas amarelas que estão na caixa, numeradas de 11 a 20, 5 têm números pares. Logo, o número de casos favoráveis é 5.
Desta forma temos que $P\left((B \cap C)|A\right) = \dfrac{5}{19}$

4. Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=0$, pela definição assíntota, temos que a reta definida pela equação $y=2x$ é assíntota do gráfico de f, quando $x \to +\infty$ e assim, como o declive da assíntota é 2, podemos afirmar que:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2$$

Desta forma, averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de g, de equação $y=mx+b$, quando $x \to +\infty$, vem que:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{x^2}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}+\lim_{x\to+\infty}x=2+(+\infty)=+\infty$$

Logo, como o domínio de g é $\mathbb{R}^+$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$ não é um valor finito, então podemos concluir que o gráfico de g não tem assíntotas oblíquas.

5.

5.1. Como a função g resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}^+$, é contínua em $\mathbb{R}^+$, e também, em $[0{,}1; 0{,}3]$, porque $[0{,}1; 0{,}3] \subset \mathbb{R}^+$

Como $-1{,}08 < 0 < 0{,}62$, ou seja, $g(0{,}1) < 0 < g(0{,}3)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]0{,}1; 0{,}3[$ tal que $g(c) = 0$, ou seja, que existe, pelo menos, um zero da função g no intervalo $]0{,}1; 0{,}3[$

C.A.

$g(0{,}1) = e^{2\times 0{,}1} + \ln(0{,}1) \approx -1{,}08$

$g(0{,}3) = e^{2\times 0{,}3} + \ln(0{,}3) \approx 0{,}62$

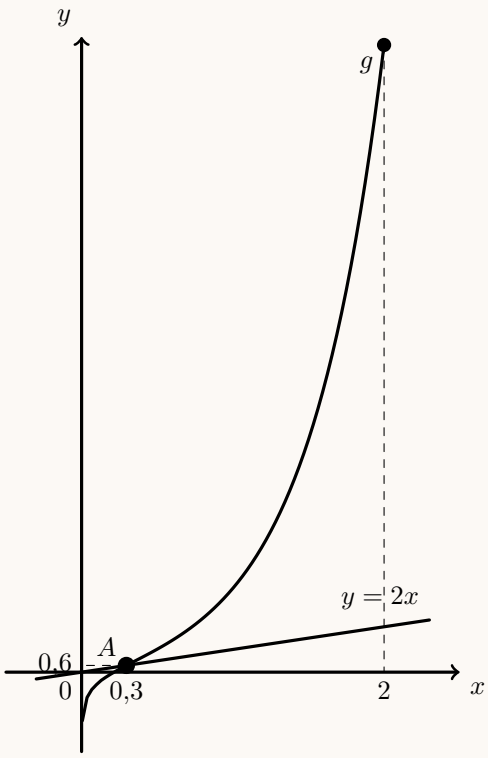
5.2. Os pontos em que a ordenada (y) é o dobro da abcissa ($2x$) estão sobre a reta de equação $y = 2x$. Assim o ponto A é a interseção do gráfico da função g com a reta de equação $y = 2x$, ou seja, a abcissa do ponto A é a solução da equação

$$g(x) = 2x \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} + \ln x = 2x$$

Assim, traçando o gráfico da função g e a reta $y = 2x$, na calculadora gráfica, numa janela compatível com o domínio da função g, obtemos o gráfico reproduzido na figura ao lado, onde também está assinalado o ponto de interseção, ou seja o ponto A.

Depois, usando a função da calculadora que permite determinar valores aproximados para as coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, determinamos as coordenadas, aproximadas às décimas do ponto A:

$$A(0{,}3; 0{,}6)$$



6. Como os domínios de f e g são, respetivamente $]1, +\infty[$ e $]-\infty, 2[$, então a condição $f(x) \geq 1 + h(x)$ está definida em

$$]1, +\infty[\cap]-\infty, 2[=]1{,}2[$$

Assim, vem que:

$$f(x) \geq 1 + h(x) \Leftrightarrow \log_2(x-1) \geq 1 + \log_2(2-x) \Leftrightarrow \log_2(x-1) \geq \log_2 2 + \log_2(2-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-1) \geq \log_2(2 \times (2-x)) \Leftrightarrow \log_2(x-1) \geq \log_2(4-2x) \Leftrightarrow$$

(como $\log_2 x$ é crescente no seu domínio)

$$\Leftrightarrow x - 1 \geq 4 - 2x \Leftrightarrow x + 2x \geq 4 + 1 \Leftrightarrow 3x \geq 5 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{3}$$

Como $f(x) \geq 1 + h(x)$ está definida em $]1{,}2[$, o conjunto solução é

$$\left[\frac{5}{3}, +\infty\right[\cap]1{,}2[= \left[\frac{5}{3}, 2\right[$$

7.

7.1. Calculando $\lim_{t\to+\infty} C(t)$ temos que:

$$\lim_{t\to+\infty} C(t) = \lim_{t\to+\infty} \left(2te^{-0,3t}\right) = 2(+\infty)\times e^{-0,3(+\infty)} = +\infty \times e^{-\infty} = +\infty \times 0^{+} \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{t\to+\infty} C(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{2t}{e^{0,3t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{0,3\times 2t}{0,3\times e^{0,3t}} = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{2}{0,3}\times\frac{0,3t}{e^{0,3t}}\right) = \lim_{t\to+\infty}\frac{2}{0,3}\times\lim_{t\to+\infty}\frac{0,3t}{e^{0,3t}} =$$

(fazendo $y = 0,3t$, temos que se $t\to+\infty$, então $y\to+\infty$)

$$= \frac{2}{0,3}\times\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^y} = \frac{2}{0,3}\times\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^y}{y}} = \frac{2}{0,3}\times\frac{1}{\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = \frac{2}{0,3}\times\frac{1}{+\infty} = \frac{2}{0,3}\times 0^{+} = 0$$

Como $C(t)$ é a concentração do medicamento no sangue e t é o tempo decorrido após o medicamento ter sido ministrado, então $\lim_{t\to+\infty} C(t) = 0$ significa, que a um período de tempo arbitrariamente grande ($t\to+\infty$), corresponde uma concentração de 0 mg/l de medicamento no sangue, ou seja, com o passar do tempo, o medicamento tende a desaparecer do sangue.

7.2. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$C'(t) = \left(2te^{-0,3t}\right)' = (2t)'(e^{-0,3t}) + 2t\left(e^{-0,3t}\right)' = 2\times e^{-0,3t} + 2t(-0,3t)'e^{-0,3t} =$$

$$= 2e^{-0,3t} + 2t(-0,3)e^{-0,3t} = 2e^{-0,3t} - 0,6te^{-0,3t} = e^{-0,3t}(2-0,6t)$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$C'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-0,3t}(2-0,6t) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-0,3t} = 0}_{\text{Eq Imp, } e^{-0,3t}>0} \vee 2-0,6t = 0 \Leftrightarrow 2 = 0,6t \Leftrightarrow \frac{2}{0,6} = t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\frac{6}{10}} = t \Leftrightarrow \frac{20}{6} = t \Leftrightarrow \frac{10}{3} = t$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

t	0		$\frac{10}{3}$	$+\infty$
$C'(t)$	+	+	0	−
$C(t)$	min	↗	Máx	↘

Assim, como C é crescente no intervalo $\left[0,\frac{10}{3}\right]$ e decrescente no intervalo $\left[\frac{10}{3},+\infty\right[$ podemos concluir que $\frac{10}{3}$ é único o maximizante da função.

Como $\frac{10}{3} = 3+\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{3}\times 60 = 20$ ($\frac{1}{3}$ de hora são 20 minutos) temos que a concentração máxima do medicamento no sangue ocorreu 3 hora e 20 minutos após a toma, ou seja, às 12 horas e 20 minutos.

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/2.ª Fase 12 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2009

VERSÃO 1

Na folha de respostas, indique de forma legível a versão da prova.

A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens do Grupo I.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser primeiramente elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica, sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única alternativa correcta.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 4, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\,\pi\, r^3$
(r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ \operatorname{cis} \dfrac{\theta + 2k\pi}{n},\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = \mathrm{x}_1\, \mathrm{p}_1 + \cdots + \mathrm{x}_\mathrm{n}\, \mathrm{p}_\mathrm{n}$

$\sigma = \sqrt{(\mathrm{x}_1 - \mu)^2\, \mathrm{p}_1 + \cdots + (\mathrm{x}_\mathrm{n} - \mu)^2\, \mathrm{p}_\mathrm{n}}$

$\mathrm{Se\ X\ é\ N}(\mu, \sigma), \mathrm{então:}$

$\mathrm{P}(\mu - \sigma < \mathrm{X} < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$\mathrm{P}(\mu - 2\sigma < \mathrm{X} < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$\mathrm{P}(\mu - 3\sigma < \mathrm{X} < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única alternativa correcta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a alternativa seleccionada.

Não apresente cálculos nem justificações.

1. A Maria gravou nove CD, sete com música *rock* e dois com música popular, mas esqueceu-se de identificar cada um deles.

Qual é a probabilidade de, ao escolher dois CD ao acaso, um ser de música *rock* e o outro ser de música popular?

(A) $\frac{7}{36}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{2}{9}$ **(D)** $\frac{7}{18}$

2. Admita que um estudante tem de realizar dois testes no mesmo dia. A probabilidade de ter classificação positiva no primeiro teste é $0{,}7$, a de ter classificação positiva no segundo teste é $0{,}8$, e a de ter classificação negativa em ambos os testes é $0{,}1$.

Qual é a probabilidade de o estudante ter negativa no segundo teste, sabendo que teve negativa no primeiro teste?

(A) $\frac{1}{8}$ **(B)** $\frac{1}{7}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

3. Uma certa linha do Triângulo de Pascal é constituída por todos os elementos da forma $^{14}C_{\mathrm{p}}$.

Escolhido, ao acaso, um elemento dessa linha, qual é a probabilidade de ele ser o número 14?

(A) $\frac{1}{15}$ **(B)** $\frac{1}{14}$ **(C)** $\frac{2}{15}$ **(D)** $\frac{4}{15}$

4. Seja a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{x+1}$.

Qual dos pontos seguintes pertence ao gráfico de f?

($\ln$ designa logaritmo de base e.)

(A) $(-1, 0)$ **(B)** $(\ln 2, 2e)$ **(C)** $(\ln 5, 6)$ **(D)** $(-2, e)$

5. Na figura 1, estão representadas parte do gráfico de uma função f, de domínio $[-3, +\infty[$, e parte da recta r, que é a única assimptota do gráfico de f.

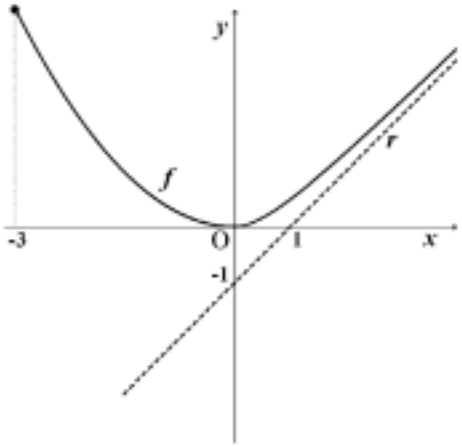


Fig. 1

Qual é o valor de $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$?

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** 2

6. Na figura 2, está representada parte do gráfico de uma função f', derivada de f, ambas de domínio $\mathbb{R}$, em que o eixo Ox é uma assimptota do gráfico de f'.

Seja a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) + x$.

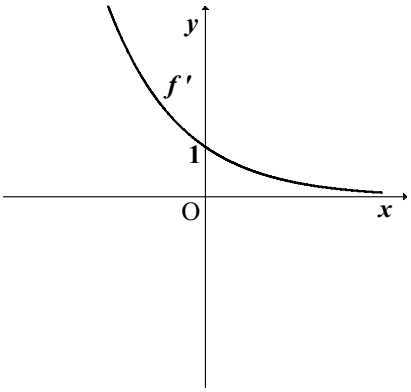
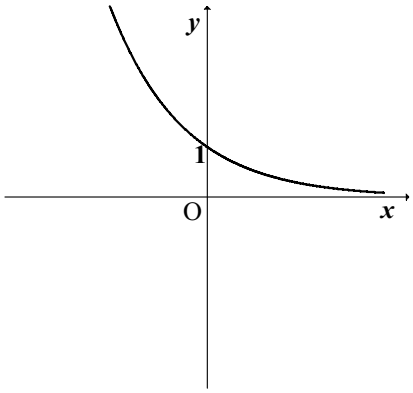


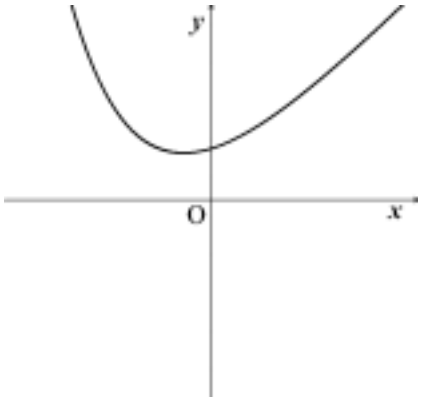
Fig. 2

Qual das figuras seguintes pode representar parte do gráfico da função g', derivada de g ?

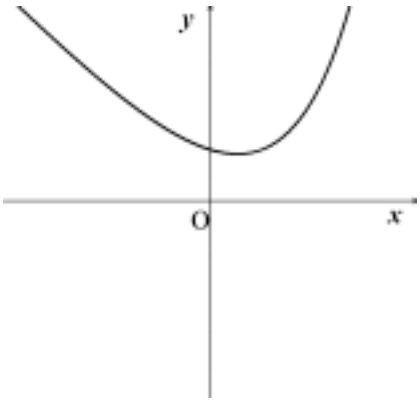
(A)



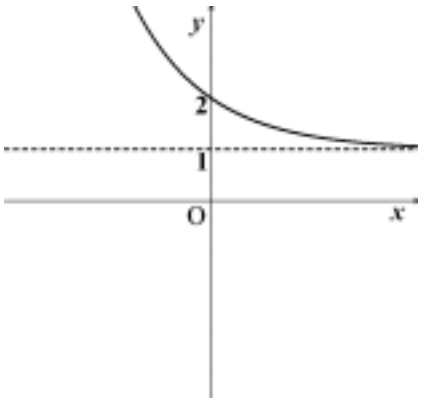
(B)



(C)



(D)



7. Seja k um número real, e $z_1 = (k - i)\ (3 - 2i)$ um número complexo.

Qual é o valor de k, para que z_1 seja um número imaginário puro?

(A) $-\frac{3}{2}$ **(B)** $-\frac{2}{3}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{3}{2}$

8. Na figura 3, está representada uma região do plano complexo. O ponto A tem coordenadas $(2, -1)$.

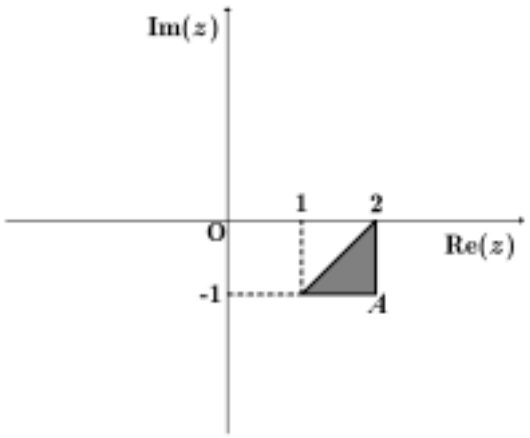


Fig. 3

Qual das condições seguintes define em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a região sombreada, incluindo a fronteira?

(A) $\left|z-1\right| \geq \left|z-(2-i)\right| \wedge \mathrm{Re}(z) \leq 2 \wedge \mathrm{Im}(z) \geq -1$

(B) $\left|z-1\right| \leq \left|z-(2-i)\right| \wedge \mathrm{Re}(z) \leq 2 \wedge \mathrm{Im}(z) \geq -1$

(C) $\left|z+1\right| \geq \left|z-(2+i)\right| \wedge \mathrm{Re}(z) \leq 2 \wedge \mathrm{Im}(z) \geq -1$

(D) $\left|z-1\right| \geq \left|z-(2-i)\right| \wedge \mathrm{Im}(z) \leq 2 \wedge \mathrm{Re}(z) \geq -1$

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. No conjunto dos números complexos, seja $z = \dfrac{\left(\text{cis}\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\right)^7 + (2+i)^3}{4\text{cis}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)}$.

Determine z na forma algébrica, **sem recorrer à calculadora**.

2. Considere, em $\mathbb{C}$, um número complexo w, cuja imagem geométrica no plano complexo é um ponto A, situado no 1.º quadrante. Sejam os pontos B e C, respectivamente, as imagens geométricas de $\overline{w}$ (conjugado de w) e de $(-w)$.

Sabe-se que $\overline{BC} = 8$ e que $\left|w\right| = 5$.

Determine a área do triângulo $[ABC]$.

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos tais que $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ e $P(B) \neq 0$.

Mostre que $1 - P(A \mid B) \times P(B) - P(A \cap \overline{B}) = P(\overline{A})$.

(P designa probabilidade, $\overline{A}$ designa o acontecimento contrário de A, e $P(A \mid B)$ designa a probabilidade de A dado B.)

4. Considere um baralho com 52 cartas, repartidas por quatro naipes (Copas, Ouros, Espadas e Paus).

Em cada naipe, há um Ás, três figuras (uma Dama, um Valete, um Rei) e mais nove cartas (do Dois ao Dez).

4.1. Retiram-se cinco cartas do baralho, que são colocadas lado a lado, em cima de uma mesa, segundo a ordem pela qual vão sendo retiradas.

Quantas sequências se podem formar com as cinco cartas retiradas, caso a primeira carta e a última carta sejam ases, e as restantes sejam figuras?

4.2. Admita que, num jogo, cada jogador recebe três cartas, por qualquer ordem.

Qual é a probabilidade de um determinado jogador receber exactamente dois ases?

Uma resposta correcta a esta questão é $\frac{{}^{4}C_{2} \times 48}{{}^{52}C_{3}}$.

Numa pequena composição, justifique esta resposta, fazendo referência:

- à Regra de Laplace;
- ao número de casos possíveis;
- ao número de casos favoráveis.

5. Seja f a função, de domínio $[0, \frac{\pi}{2}]$, definida por $f(x) = \operatorname{sen}(2x) \cos x$.

5.1. Determine, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f, no ponto de abcissa 0.

5.2. No domínio indicado, determine, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**, um valor, aproximado às décimas, da área do triângulo $[ABC]$, em que:

- A é o ponto do gráfico da função f cuja ordenada é máxima;
- B e C são os pontos de intersecção do gráfico da função f com a recta de equação $y = 0{,}3$.

Reproduza, na folha de respostas, o gráfico, ou gráficos, visualizado(s) na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial.

Desenhe o triângulo $[ABC]$, assinalando os pontos que representam os seus vértices.

Nota: Nas coordenadas dos vértices em que é necessário fazer arredondamentos, utilize duas casas decimais.

6. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+4} - x & \text{se } x > 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{e^{2x} - 1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Resolva, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, os dois itens seguintes.

6.1. Estude a continuidade de h no domínio $\mathbb{R}$.

6.2. Estude a função h quanto à existência de assimptotas do seu gráfico paralelas aos eixos coordenados e, caso existam, escreva as suas equações.

7. Numa certa zona de cultivo, foi detectada uma doença que atinge as culturas. A área afectada pela doença começou por alastrar durante algum tempo, tendo depois começado a diminuir.

Admita que a área, em hectares, afectada pela doença, é dada, em função de t, por

$$A(t) = 2 - t + 5 \ln(t + 1)$$

sendo $t\,(0 \leq t < 16)$ o tempo, em semanas, decorrido após ter sido detectada essa doença.

Resolva, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, os dois itens seguintes.

7.1. Quando a doença foi detectada, já uma parte da área de cultivo estava afectada. Passada uma semana, a área de cultivo afectada pela doença aumentou.

De quanto foi esse aumento?

Apresente o resultado em hectares, arredondado às centésimas.

7.2. Determine a área máxima afectada pela doença.

Apresente o resultado em hectares, arredondado às centésimas.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I ..... (8 × 5 pontos)..... **40 pontos**

GRUPO II ..... **160 pontos**

1. ..... 15 pontos

2. ..... 15 pontos

3. ..... 15 pontos

4. ..... 30 pontos
- **4.1.** ..... 15 pontos
- **4.2.** ..... 15 pontos

5. ..... 30 pontos
- **5.1.** ..... 15 pontos
- **5.2.** ..... 15 pontos

6. ..... 30 pontos
- **6.1.** ..... 15 pontos
- **6.2.** ..... 15 pontos

7. ..... 25 pontos
- **7.1.** ..... 10 pontos
- **7.2.** ..... 15 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/2.ª Fase

10 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2009

COTAÇÕES

GRUPO I	(8 × 5 pontos)	**40 pontos**
GRUPO II		**160 pontos**
1.		15 pontos
2.		15 pontos
3.		15 pontos
4.		30 pontos
4.1.		15 pontos
4.2.		15 pontos
5.		30 pontos
5.1.		15 pontos
5.2.		15 pontos
6.		30 pontos
6.1.		15 pontos
6.2.		15 pontos
7.		25 pontos
7.1.		10 pontos
7.2.		15 pontos
TOTAL		**200 pontos**

A classificação da prova deve respeitar integralmente os critérios gerais e específicos a seguir apresentados

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada item é obrigatoriamente:

– um número inteiro;

– um dos valores resultantes da aplicação dos critérios gerais e específicos de classificação e previstos na respectiva grelha de classificação.

As respostas que se revelem ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos. No entanto, em caso de omissão ou de engano na identificação de um item, o mesmo pode ser classificado se, pela resposta apresentada, for possível identificá-lo inequivocamente.

Se o examinando responder a um mesmo item mais do que uma vez, não eliminando inequivocamente a(s) resposta(s) que não deseja que seja(m) classificada(s), deve ser apenas considerada a resposta que surgir em primeiro lugar.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova (Versão 1 ou Versão 2) implica a classificação com zero pontos de todas as respostas aos itens de escolha múltipla.

Nos itens de resposta fechada de escolha múltipla, a cotação total do item só é atribuída às respostas que apresentam, de forma inequívoca, a única alternativa correcta.

São classificadas com zero pontos as respostas em que é assinalada:

– uma alternativa incorrecta;

– mais do que uma alternativa.

Não há lugar a classificações intermédias.

Os critérios de classificação dos itens de resposta aberta apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

Nos itens de resposta aberta extensa orientada, com cotação igual ou superior a quinze pontos e que impliquem a produção de um texto, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea das competências específicas da disciplina e das competências de comunicação escrita em língua portuguesa.

A avaliação das competências de comunicação escrita em língua portuguesa contribui para valorizar a classificação atribuída ao desempenho no domínio das competências específicas da disciplina. Esta valorização é cerca de 10% da cotação do item e faz-se de acordo com os níveis de desempenho a seguir descritos.

Nível	Descritor
3	Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
2	Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou ortografia, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
1	Composição sem estruturação aparente, com a presença de erros graves de sintaxe, pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é zero pontos. Neste caso, não é classificado o desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar em situações não descritas anteriormente.

Situação	Classificação
1. Classificação de um item cujo critério se apresenta organizado por etapas.	A cotação indicada para cada etapa é a classificação máxima que lhe é atribuível. A classificação da resposta resulta da soma das classificações das diferentes etapas, à qual se subtraem, eventualmente, um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 14 e/ou 19.
2. Classificação de uma etapa dividida em passos.	A cotação indicada para cada passo é a classificação máxima que lhe é atribuível. A classificação da etapa resulta da soma das classificações dos diferentes passos.
3. Classificação de um item ou de uma etapa cujo critério se apresenta organizado por níveis de desempenho.	A resposta é enquadrada numa das descrições apresentadas. À classificação correspondente subtraem-se, eventualmente, um, dois ou três pontos, de acordo com o previsto nas situações 9, 10 e/ou 19.
4. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite e classificado qualquer processo de resolução cientificamente correcto. O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante a distribuição da cotação do item pelas etapas* percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.
5. Apresentação apenas do resultado final, embora a resolução do item exija cálculos e/ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
6. Utilização de processos de resolução que não respeitam as instruções dadas [por exemplo, «usando métodos analíticos»].	A etapa em que a instrução não é respeitada é classificada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário, no critério específico de classificação.
7. Ausência de apresentação dos cálculos e/ou das justificações necessárias à resolução de uma etapa*.	A etapa é classificada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário, no critério específico de classificação.
8. Ausência de apresentação explícita de uma dada etapa.	Se a resolução apresentada permitir perceber, inequivocamente, que a etapa foi percorrida, a mesma é classificada com a cotação total para ela prevista.
9. Transposição incorrecta de dados do enunciado.	Se o grau de dificuldade da resolução não diminuir, é subtraído um ponto à classificação da etapa. Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a classificação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
10. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo.	É subtraído um ponto à classificação da etapa em que o erro ocorre.
11. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.	A classificação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.

* Em situações em que o critério é aplicável tanto a **etapas** como a **passos**, utiliza-se apenas o termo «etapas» por razões de simplificação da apresentação.

Situação	Classificação
12. Ocorrência de um erro na resolução de uma etapa.	A etapa é classificada de acordo com o erro cometido. As etapas subsequentes são classificadas de acordo com os efeitos do erro cometido: – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são classificadas de acordo com os critérios específicos de classificação; – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a classificação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
13. Resolução incompleta de uma etapa.	Se, à resolução da etapa, faltar apenas o passo final, é subtraído um ponto à classificação da etapa; caso contrário, a classificação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
14. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação de um arredondamento incorrecto.	É subtraído um ponto à classificação total da resposta.
15. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fracção, e a resposta apresenta-se na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à classificação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final [por exemplo, «15» em vez de «15 metros»].	A etapa relativa à apresentação do resultado final é classificada com a cotação total para ela prevista.
17. Apresentação do resultado final com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exacto.	É subtraído um ponto à classificação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
18. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, e/ou apresentação do resultado final incorrectamente arredondado.	É subtraído um ponto à classificação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
19. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à classificação total da resposta, excepto: – se as incorrecções ocorrerem apenas em etapas já classificadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a **8.** ..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

As respostas correctas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	D	C	C	B	C	D	C	A
Versão 2	A	B	B	C	B	A	B	D

GRUPO II

É de aceitar qualquer processo de resolução cientificamente correcto, ainda que não esteja previsto nestes critérios específicos, nem no programa (ver critério 4 dos critérios gerais).

1. ..... **15 pontos**

Escrever na forma algébrica o numerador da fracção ..... 9 pontos

Escrever $\left(\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)^7 = \operatorname{cis}(\pi)$ ..... 2 pontos

Escrever $\operatorname{cis}(\pi) = -1$ ..... 2 pontos

Calcular $(2+i)^3$ (**ver nota**)..... 4 pontos

Restantes cálculos ..... 1 ponto

Escrever $4 \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -4i$ ..... 2 pontos

Calcular $\frac{1+11i}{-4i}$ na forma algébrica ..... 4 pontos

Multiplicar ambos os termos da fracção por i (por exemplo) ..... 2 pontos

Restantes cálculos ..... 2 pontos

Nota: Se o examinando escrever $(2+i)^3 = 8 + i^3$, a classificação a atribuir a esta etapa é zero pontos.

2. ..... **15 pontos**

Representar um ponto A situado no 1.º quadrante ..... 1 ponto
Representar o ponto B ..... 3 pontos
Representar o ponto C ..... 3 pontos
Referir que $\overline{AC} = 10$ ..... 3 pontos
Calcular $\overline{AB}$ ..... 3 pontos
Calcular a área do triângulo $[ABC]$ (Área $= 24$)..... 2 pontos

Nota: Não é pedido no enunciado a representação dos pontos A, B e C. Se o examinando referir que $\overline{AC} = 10$, consideram-se a primeira e a terceira etapas implícitas. Se o examinando calcular $\overline{AB}$, aplicando o Teorema de Pitágoras, consideram-se todas as etapas anteriores implícitas.

3. ..... **15 pontos**

A demonstração deve abordar os seguintes pontos:

- propriedade relativa à probabilidade do acontecimento contrário;
- fórmula da probabilidade condicionada;
- propriedade $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.

Na tabela seguinte, indica-se como a resposta a este item deve ser classificada, de acordo com o respectivo nível de desempenho, no domínio específico da disciplina.

Descritores do nível de desempenho			**Pontuação**
Níveis*	**4**	A demonstração aborda correctamente os três pontos, concluindo o pretendido.	15 pontos
	3	A demonstração aborda correctamente os três pontos, mas não conclui o pretendido.	12 pontos
	2	A demonstração aborda correctamente apenas dois pontos.	8 pontos
	1	A demonstração aborda correctamente apenas um ponto.	4 pontos

* No caso de a resposta não atingir o nível 1, a classificação a atribuir é zero pontos.

4.1. ..... **15 pontos**

Expressão que dá o valor pedido (**ver nota 1**) ..... 12 pontos

Valor pedido $(15\,840)$ (**ver nota 2**) ..... 3 pontos

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva classificação a atribuir.

$^4A_2 \times {}^{12}A_3$ (ou equivalente) ..... 12 pontos

$^4A'_2 \times {}^{12}A'_3$ (ou equivalente) ..... 4 pontos

Outras situações ..... 0 pontos

2. A classificação relativa a esta etapa só é atribuída se a etapa anterior não tiver sido classificada com zero pontos.

4.2. ..... **15 pontos**

A composição deve abordar os seguintes pontos:

- Enunciado da Regra de Laplace: a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, quando estes são todos equiprováveis (não se exige que o examinando refira a equiprobabilidade dos casos possíveis);
- Explicação do número de casos possíveis: $^{52}C_3$ corresponde ao número de conjuntos formados com três cartas retiradas de um baralho com 52 cartas;
- Explicação do número de casos favoráveis: $^{4}C_2 \times 48$ corresponde ao número de hipóteses diferentes de escolher dois ases de entre os quatro ases existentes no baralho, e uma carta que não seja ás, de entre as 48 cartas restantes.

Na tabela seguinte, indica-se a forma como as respostas são classificadas, de acordo com os níveis de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa, descritos nos critérios gerais, e com os níveis de desempenho no domínio específico da disciplina.

Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina		Descritores do nível de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa	Níveis*		
			1	2	3
Níveis**	3	A composição aborda correctamente os três pontos.	13	14	15
	2	A composição aborda correctamente apenas dois pontos.	8	9	10
	1	A composição aborda correctamente apenas um ponto.	3	4	5

* Descritores apresentados nos critérios gerais.

** Apenas podem ser atribuídas classificações correspondentes a um dos valores constantes do quadro. Não há lugar a classificações intermédias.

5.1. ..... **15 pontos**

Determinar $f'(x)$ ..... 6 pontos

Identificar $m = f'(0)$ ..... 1 ponto

Calcular $f'(0)$ ..... 2 pontos

Calcular $f(0)$ ..... 2 pontos

Indicar a ordenada na origem da recta tangente ..... 2 pontos

Escrever a equação reduzida da recta tangente $(y = 2x)$ ..... 2 pontos

5.2. ..... **15 pontos**

Representar graficamente a função f no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ ..... 2 pontos

Representar a recta $y = 0{,}3$ ..... 1 ponto

Identificar o(s) gráfico(s) (**ver nota**) ..... 1 ponto

Assinalar o ponto A ..... 1 ponto

Assinalar os pontos B e C ..... (1 + 1) ..... 2 pontos

Desenhar o triângulo ..... 1 ponto

Indicar a ordenada do ponto A ..... 1 ponto

Indicar as abcissas dos pontos B e C ..... (1 + 1) ..... 2 pontos

Calcular a base ..... 1 ponto

Calcular a altura ..... 1 ponto

Calcular a área do triângulo $(\text{Área} = 0{,}2)$ ..... 2 pontos

Nota: Se o examinando identificar apenas 1 gráfico, a classificação a atribuir a esta etapa não deve ser desvalorizada.

6.1. ..... **15 pontos**

Calcular $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x)$ ..... 2 pontos

Calcular $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x)$ ..... 3 pontos

- Levantar a indeterminação ..... 2 pontos
- Indicar o valor $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x)$ ..... 1 ponto

Justificar que a função h é contínua em $x = 0$ ..... 2 pontos

Justificar a continuidade da função no intervalo $]0, +\infty[$ (**ver nota 1**) ..... 3 pontos

Justificar a continuidade da função no intervalo $]-\infty, 0[$ (**ver nota 2**) ..... 3 pontos

Concluir que a função é contínua em $\mathbb{R}$ ..... 2 pontos

Notas:

1. Se o examinando apenas referir que a função é contínua por ser a diferença entre duas funções contínuas, a classificação a atribuir a esta etapa é de 2 pontos.
2. Se o examinando apenas referir que a função é contínua por ser o quociente de duas funções contínuas, a classificação a atribuir a esta etapa é de 2 pontos.

6.2. ..... **15 pontos**

Concluir da existência ou não de assimptotas verticais do gráfico da função h ... 1 ponto

Determinar a equação da assimptota horizontal quando $x \to +\infty$ ..... 9 pontos

Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ ..... 7 pontos

Levantar a indeterminação ..... 6 pontos

Indicar o valor $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ ..... 1 ponto

Concluir que a recta de equação $y = 0$ é assimptota horizontal do gráfico de h quando $x \to +\infty$ ..... 2 pontos

Determinar a equação da assimptota horizontal quando $x \to -\infty$ ..... 5 pontos

Calcular $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$ ..... 3 pontos

Concluir que a recta de equação $y = 0$ é assimptota horizontal do gráfico de h quando $x \to -\infty$ ..... 2 pontos

7.1. ..... **10 pontos**

Calcular $A(0)$ ..... 3 pontos

Calcular $A(1)$ ..... 2 pontos

Calcular $A(1) - A(0)$ ..... 5 pontos

7.2. ..... **15 pontos**

Calcular $A'(t)$ $\left(A'(t) = -1 + \dfrac{5}{t+1}\right)$ ..... 3 pontos

Determinar o zero de A' ..... 4 pontos

Escrever $A'(t) = 0$ ..... 1 ponto

Resolver a equação $(t = 4)$ ..... 3 pontos

Estudar o sinal de A' e consequente conclusão, relativamente ao extremo relativo de A, com recurso a um quadro (**ver nota**) ..... 3 pontos

Primeira linha do quadro (relativa à variável t) ..... 1 ponto

Sinal de A' ..... 1 ponto

Relação entre o sinal de A' e a monotonia de A ..... 1 ponto

Determinar a área máxima afectada pela doença $(A = 6{,}05 \text{ ha})$ ..... 5 pontos

Nota: Se o examinando não recorrer a um quadro, mas apresentar uma justificação equivalente, a classificação a atribuir a esta etapa não deve ser desvalorizada.

Exame nacional de Matemática A (2009, 2.ª fase)

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como a Maria escolheu 2 CD de um conjunto de 9, sem considerar a ordem relevante, existem ${}^9C_2$ pares diferentes que podem ser escolhidos (número de casos possíveis).
   Como 7 eram de um tipo e 2 de outro, existem 7×2 pares de CD compostos por um de música rock e o outro ser de música popular, ou seja 7×2 casos favoráveis.
   Assim, a probabilidade de, ao escolher dois CD ao acaso, um ser de música rock e o outro ser de música popular, é:

   $$\frac{7 \times 2}{{}^9C_2} = \frac{7}{18}$$

   Resposta: **Opção D**

2. Considerando a experiência aleatória que na realização dos dois testes no mesmo dia, pelo estudante, e os acontecimentos:
   T_1:«Ter positiva no primeiro teste»
   T_2:«Ter positiva no segundo teste»

   Temos que $P(T_1) = 0{,}7$; $P(T_2) = 0{,}8$ e $P\left(\overline{T_1} \cap \overline{T_2}\right) = 0{,}1$
   Pelo teorema do acontecimento contrário, vem que $P\left(\overline{T_1}\right) = 1 - P(T_1) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$
   Assim,a probabilidade de o estudante ter negativa no segundo teste, sabendo que teve negativa no primeiro teste, é:

   $$P\left(\overline{T_2}|\overline{T_1}\right) = \frac{P\left(\overline{T_1} \cap \overline{T_2}\right)}{P\left(\overline{T_1}\right)} = \frac{0{,}1}{0{,}3} = \frac{1}{3}$$

   Resposta: **Opção C**

3. A linha do triângulo de Pascal que é constituída por todos os elementos da forma ${}^{14}C_p$ tem 15 elementos, dos quais, apenas 2 são iguais a 14 (${}^{14}C_1$ e ${}^{14}C_{13}$), pelo que a probabilidade de um número desta linha, escolhido ao acaso, ser o número 14 é $\frac{2}{15}$.

   Resposta: **Opção C**

4. Calculando as imagens das abcissas dos pontos indicados em cada uma das opções pela função f, temos:

   - $f(-1) = e^{-1+1} = e^0 = 1$
   - $f(\ln 2) = e^{\ln 2+1} = e^{\ln 2} \times e^1 = 2 \times e = 2e$
   - $f(\ln 5) = e^{\ln 5+1} = e^{\ln 5} \times e^1 = 2 \times e = 5e$
   - $f(-2) = e^{-2+1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

   Pelo que podemos verificar que, de entre os pontos apresentados, o ponto de coordenadas $(\ln 2, 2e)$ é o único que pertence ao gráfico de f.

   Resposta: **Opção B**

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ é o declive da assíntota do gráfico de f, ou seja o declive da reta r

   Como os pontos de coordenadas $(0, -1)$ e $(1,0)$, pertencem à assíntota, então o seu declive é

   $$m_r = \frac{0-(-1)}{1-0} = \frac{1}{1} = 1$$

   E assim, vem que:

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m_r = 1$$

   Resposta: **Opção C**

6. Como a derivada de g é:

   $$g'(x) = \big(f(x)+x\big)' = \big(f(x)\big)' + (x)' = f'(x) + 1$$

   Assim, o gráfico de g' é a translação do gráfico de f' pelo vetor $\vec{u} = (1,0)$, ou seja com um deslocamento vertical de uma unidade no sentido positivo.
   Desta forma o gráfico da opção (D) é o único compatível com esta informação.

   Resposta: **Opção D**

7. Simplificando a expressão indicada para z_1, temos:
   $z_1 = (k-i)(3-2i) = 3k - 2ki - 3i + 2i^2 = 3k + i(-2k-3) + 2(-1) = 3k - 2 + i(-2k-3)$

   Ou seja, $\mathrm{Re}\,(z_1) = 3k - 2$ e $\mathrm{Im}\,(z_1) = -2k - 3$

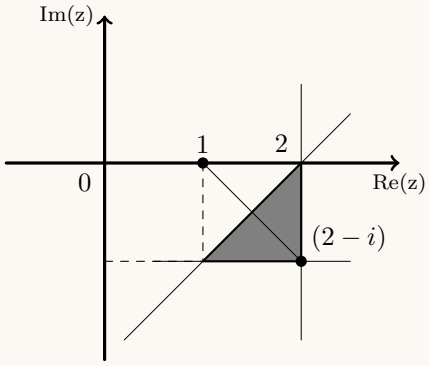
   E para que z_1 seja um imaginário puro, $\mathrm{Re}\,(z_1) = 0$, logo temos que:

   $3k - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; 3k = 2 \;\Leftrightarrow\; k = \dfrac{2}{3}$

   Resposta: **Opção C**

8. Os pontos representado na região a sombreado satisfazem cumulativamente três condições:

   - $\mathrm{Re}\,(z) \leq 2$, ou seja pertencem ao semiplano à direita da reta definida por $\mathrm{Re}\,(z) = 2$
   - $\mathrm{Im}\,(z) \geq -1$, ou seja pertencem ao semiplano acima da reta definida por $\mathrm{Im}\,(z) = -1$
   - $|z-1| \geq |z-(2-i)|$, ou seja pertencem ao semiplano definido pela reta definida por $|z-1| = |z-(2-i)|$ que contém a representação geométrica de $(1-2i)$, porque queremos considerar os pontos cuja distância ao ponto (1,0) é maior que a distância ao ponto $(2,-1)$.



   Resposta: **Opção A**

GRUPO II

1. Começamos por usar a fórmula de Moivre para calcular $\left(\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)^7 = 1^7\,\mathrm{cis}\left(7\times\frac{\pi}{7}\right) = \mathrm{cis}\,\pi = -1$

   Como a adição deve ser feita na f.a. vamos optar por calcular $(2+i)^3$ também na f.a.:

   $$(2+i)^3 = (2+i)(2+i)^2 = (2+i)(4+4i-1) = (2+i)(3+4i) = 6+8i+3i+4i^2 = 6-4+11i = 2+11i$$

   Escrevendo $4\,\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ na f.a. temos: $4\,\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -4i$

   Assim, simplificando a expressão de z, vem:

   $$z = \frac{\left(\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)^7 + (2+i)^3}{4\,\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{-1+2+11i}{-4i} = \frac{(1+11i)\times i}{-4i\times i} = \frac{i+11i^2}{-4i^2} = \frac{-11+i}{-4(-1)} = \frac{-11+i}{4} = -\frac{11}{4}+\frac{1}{4}i$$

2. Temos que $w = a + bi$, com $a \in \mathbb{R}^+$ e $b \in \mathbb{R}^+$, pelo que $\overline{w} = a - bi$ e $-w = -a - bi$.

   Como $\overline{BC} = |\overline{w} - (-w)| = |a - bi - (-a - bi)| = |a - bi + a + bi| = |2a|$ e $\overline{BC} = 8$, vem que:

   $|2a| = 8$, como $a > 0$, sabemos que $2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$

   E como $w = \sqrt{a^2 + b^2}$, sendo $a = 4$, vem que $w = \sqrt{4^2 + b^2} = \sqrt{16 + b^2}$. Como $|w| = 5$, vem que:

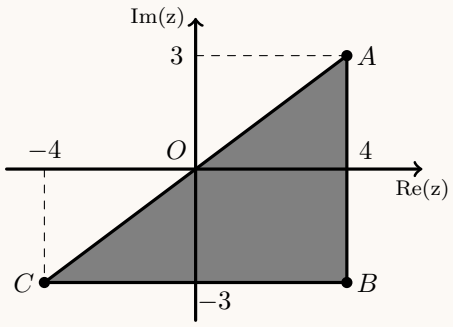
   $\sqrt{16 + b^2} = 5 \Leftrightarrow \left(\sqrt{16 + b^2}\right)^2 = 5^2 \Leftrightarrow 16 + b^2 = 25 \Leftrightarrow b^2 = 25 - 16 \Leftrightarrow b^2 = 9 \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{9}$

   Como $b > 0$, sabemos que $b = \sqrt{9} = 3$

   Assim, como $a = 4$ e $b = 3$ temos que:

   - $w = a + bi = 4 + 3i$
   - $\overline{w} = a - bi = 4 - 3i$
   - $-w = -a - bi = -4 - 3i$

   Pelo que podemos representar o triângulo, e perceber que considerando $[BC]$ a base do triângulo ($\overline{BC} = 8$), a altura é $[AB]$ ($\overline{AB} = |w - \overline{w}| = 6$).



   Assim temos que a área é:

   $A_{[ABC]} = \dfrac{\overline{BC} \times \overline{AB}}{2} = \dfrac{8 \times 6}{2} = \dfrac{48}{2} = 24$

3. Temos que:

$$
\begin{aligned}
1 - P(A|B) \times P(B) - P\left(A \cap \overline{B}\right) &= 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \times P(B) - P\left(A \cap \overline{B}\right) && (1)\\
&= 1 - P(A \cap B) - P\left(A \cap \overline{B}\right)\\
&= 1 - P(A \cap B) - \Big(P(A) - P(A \cap B)\Big) && (2)\\
&= 1 - P(A \cap B) - P(A) + P(A \cap B)\\
&= 1 - P(A) && (3)\\
&= P\left(\overline{A}\right)
\end{aligned}
$$

(1) Definição: $P(X|Y) = \dfrac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$
(2) Teorema: $P\left(X \cap \overline{Y}\right) = P(X) - P(X \cap Y)$
(3) Teorema: $P\left(\overline{X}\right) = 1 - P(X)$

   Logo, $1 - P(A|B) \times P(B) - P\left(A \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A}\right)$ *q.e.d.*

4.

   4.1. Sendo ases a primeira e a última cartas da sequência, existem ${}^4A_2$ formas de arranjar os extremos da sequência (selecionamos 2 dos 4 ases existentes, que por serem diferentes, deve ser considerada relevante a ordem de colocação).
   Considerando as 3 posições centrais, da sequência, ocupadas por figuras, existem ${}^{12}A_3$ configurações diferentes (que correspondem a selecionar 3 das 12 figuras existentes, e considerar relevante a ordem, por serem todas diferentes).
   Logo o número total de sequências que se podem formar em que a primeira carta e a última carta são ases, e as restantes são figuras é

$$
{}^4A_2 \times {}^{12}A_3 = 15\,840
$$

4.2. Calculando a probabilidade recorrendo à Regra de Laplace, ou seja, o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis (considerando os casos possíveis equiprováveis), obtemos a expressão $\frac{{}^4C_2 \times 48}{{}^{52}C_3}$.

O número de casos possíveis são todos os conjuntos de 3 cartas que se podem formar com as 52 cartas do baralho, sem considerar relevantes a ordem pela qual se dispõem as cartas, ou seja ${}^{52}C_3$ hipóteses diferentes.

O número de casos favoráveis é o número de conjuntos formados por 2 ases (escolhidos de entre os 4 que existem - um por cada naipe), $4C_2$, e ainda uma outra carta escolhida de entre as 48 que não são ases ($52 - 4 = 48$). Ou seja, ${}^4C_2 \times 48$ hipóteses diferentes.

5.

5.1. Como o declive da reta tangente em cada ponto é dado pelo valor da derivada, vamos determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = (\operatorname{sen}(2x)\cos x)' = \big(\operatorname{sen}(2x)\big)'\cos x + \operatorname{sen}(2x)(\cos x)' = (2x)'\cos(2x)\cos x + \operatorname{sen}(2x)(-\operatorname{sen} x) =$$

$$= 2\cos(2x)\cos x - \operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen} x$$

Assim, o declive da reta tangente no ponto de abcissa 0, pode ser calculado como:

$$m = f'(0) = 2\cos(2(0))\cos 0 - \operatorname{sen}(2(0))\operatorname{sen} 0 = 2 \times 1 \times 1 - 0 \times 0 = 2$$

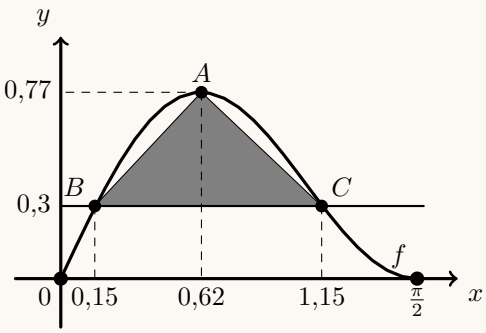
Como $f(0) = \operatorname{sen}(2(0))\cos 0 = 0 \times 1 = 0$, sabemos que o ponto $P(0{,}0)$ pertence ao gráfico de f e também à reta tangente neste ponto.

Como a reta tangente interseta o eixo das ordenada no ponto $(0{,}0)$, o valor da ordenada na origem é zero, logo a equação reduzida é

$$y = 2x + 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x$$

5.2. Começamos por representar na calculadora gráfica a função f a reta de equação $y = 0{,}3$, numa janela compatível com o domínio e obtemos o gráfico que está reproduzido na figura seguinte, onde ainda se acrescentou o triângulo $[ABC]$.

Recorremos à função da calculadora que permite determinar valores aproximados para o maximizante e o respetivo máximo de uma função, determinamos as coordenadas, com duas casas decimais, do ponto $A(0{,}62; 0{,}77)$.



Usando a função da calculadora pra determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, determinamos as abcissas, com duas casas decimais, dos pontos B e C: $x_B \approx 0{,}15$ e $x_C \approx 1{,}15$.

Assim, podemos calcular a medida da base do triângulo, como a diferença das abcissas dos pontos C e B, ou seja: $x_C - x_B \approx 1{,}15 - 0{,}15 \approx 1$.

A altura do triângulo pode ser calculada como a diferença das ordenadas dos pontos A e B, ou seja: $y_A - y_B \approx 0{,}77 - 0{,}3 \approx 0{,}47$

Assim, calculando um valor aproximado às décimas da área do triângulo, vem:

$$A_{[ABC]} = \frac{(x_C - x_B) \times (y_A - y_B)}{2} \approx \frac{0{,}47}{2} \approx 0{,}2$$

6.

6.1. Como a função h, é definida em $\mathbb{R}^+$ por operações sucessivas de funções contínuas neste intervalo, então f é contínua para $x > 0$
De forma análoga, temos que h é contínua para $x < 0$, porque é definida, neste intervalo, por operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}^-$

Assim, resta averiguar se a função h é contínua para $x = 0$, ou seja, temos que verificar se

$$h(0) = \lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^-} h(x)$$

- $h(0) = 2$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x^2+4} - x\right) = \sqrt{0^2+4} - 0 = \sqrt{4} = 2$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{2x}-1}{x} = \dfrac{e^0-1}{0} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

  $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{2x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2\left(e^{2x}-1\right)}{2\times x} = \lim\limits_{x\to 0^-} 2 \times \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{2x}-1}{2x} = 2 \times \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{2x}-1}{2x} =$
  (fazendo $y = 2x$, temos que se $x \to 0^-$, então $y \to 0^-$)

$$= 2 \times \underbrace{\lim_{y\to 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 2 \times 1 = 2$$

Como $h(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} h(x)$, a função h é contínua em $x = 0$, e como é contínua em $\mathbb{R}^-$ e em $\mathbb{R}^+$, temos que é contínua em $\mathbb{R}$

6.2. Como a função h é contínua em $\mathbb{R}$ (de acordo com os cálculos do item anterior), e em particular como $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = 2$, então a reta de equação $x = 0$ não é assíntota do gráfico de h e não existem outras assíntotas verticais do gráfico de h

Para averiguar se existem assíntotas horizontais do gráfico de h, vamos calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+4} - x\right) = \sqrt{+\infty+4} - (+\infty) = +\infty - \infty$ (indeterminação)

  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+4} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+4} - x\right)\left(\sqrt{x^2+4} + x\right)}{\sqrt{x^2+4}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+4}+x} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x} = \frac{4}{\sqrt{+\infty+4}+\infty} = \frac{4}{+\infty} = 0$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{2x}-1}{x} = \dfrac{e^{2(-\infty)}-1}{-\infty} = \dfrac{0-1}{-\infty} = 0$

Desta forma, como $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$, temos que a reta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de h (quando $x \to +\infty$ e também quando $x \to -\infty$).

7.

7.1. Calculando a área afetada quando a doença foi detetada ($t = 0$), e a área afetada uma semana depois ($t = 1$), temos:

$$A(0) = 2 - 0 + 5\ln(0+1) = 2 + 5 \times 0 = 2$$
$$A(1) = 2 - 1 + 5\ln(1+1) = 1 + 5\ln(2)$$

Assim, o aumento da área afetada registado na primeira semana, em hectares, arredondado às centésimas é de

$$A(1) - A(0) = 1 + 5\ln(2) - 2 = 5\ln(2) - 1 \approx 2{,}47 \text{ ha}$$

7.2. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$A'(t) = \big(2-t+5\ln(t+1)\big)' = (2)'-(t)'+\big(5\ln(t+1)\big)' = 0-1+5\left(\frac{(t+1)'}{t+1}\right) = -1+5\left(\frac{1}{t+1}\right) = -1+\frac{5}{t+1}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$A'(t)=0 \;\Leftrightarrow\; -1+\frac{5}{t+1}=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{5}{t+1}=1 \;\Leftrightarrow\; 5=t+1 \wedge t+1\neq 0 \;\Leftrightarrow\; 4=t \wedge \underbrace{t\neq -1}_{\text{PV, } t\in[0,16[}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

t	0		4		16
$A'(t)$	+	+	0	−	n.d.
$A(t)$	min	↗	Máx	↘	n.d.

Assim, como A é crescente no intervalo $[0,4]$ e decrescente no intervalo $[4,16[$ podemos concluir que 4 é único o maximizante da função, pelo que $A(4)$ é o único mínimo da função.
Calculando o valor do máximo da função e arredondando o resultado às centésimas, temos:

$$A(4) = 2-4+5\ln(4+1) = -2+5\ln 5 \approx 6{,}05$$

Logo, a área máxima afetada pela doença foi aproximadamente de 6,05 ha

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/Época Especial

12 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2009

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser primeiramente elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica, sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única alternativa correcta.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 4, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\,\pi\, r^3$
(r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ \operatorname{cis} \dfrac{\theta + 2k\pi}{n},\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = \mathrm{x}_1\, \mathrm{p}_1 + \cdots + \mathrm{x}_\mathrm{n}\, \mathrm{p}_\mathrm{n}$

$\sigma = \sqrt{(\mathrm{x}_1 - \mu)^2\, \mathrm{p}_1 + \cdots + (\mathrm{x}_\mathrm{n} - \mu)^2\, \mathrm{p}_\mathrm{n}}$

$\mathrm{Se\ X\ é\ N}(\mu, \sigma), \mathrm{então:}$

$\mathrm{P}(\mu - \sigma < \mathrm{X} < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$\mathrm{P}(\mu - 2\sigma < \mathrm{X} < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$\mathrm{P}(\mu - 3\sigma < \mathrm{X} < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única alternativa correcta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a alternativa seleccionada.

Não apresente cálculos nem justificações.

1. Considere uma turma de uma escola secundária, com 8 rapazes e 12 raparigas.

Pretende-se eleger o Delegado e o Subdelegado da turma. De quantas maneiras se pode fazer essa escolha, de modo a que os alunos escolhidos sejam de sexos diferentes?

(A) 96 **(B)** 190 **(C)** 192 **(D)** 380

2. Duas crianças escrevem, em segredo e cada uma em seu papel, uma letra da palavra VERÃO.

Qual é a probabilidade de as duas crianças escreverem a mesma letra?

(A) $\frac{1}{25}$ **(B)** $\frac{2}{25}$ **(C)** $\frac{1}{5}$ **(D)** $\frac{2}{5}$

3. Seja X a variável peso, expressa em quilogramas (kg), dos bebés de uma creche.

Admita que a variável X é bem modelada por uma distribuição normal de valor médio 5.

Escolhido um dos bebés ao acaso, sabe-se que a probabilidade de o seu peso estar entre $5\,\mathrm{kg}$ e $6\,\mathrm{kg}$ é $0{,}4$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $P(X \geq 6) = 0{,}2$ **(B)** $P(4 \leq X \leq 5) = 0{,}4$

(C) $P(4 \leq X \leq 6) < 0{,}5$ **(D)** $P(X \leq 4) > 0{,}1$

4. Sejam a e b dois números reais superiores a 1 e tais que $b = a^2$.

Qual dos valores seguintes é igual a $1 + \log_b a$?

(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{3}{4}$ **(C)** $\frac{4}{3}$ **(D)** $\frac{3}{2}$

5. Seja a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \text{sen}(2x)$.

Qual é o declive da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\frac{\pi}{8}$?

(A) $\sqrt{2}$ **(B)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(C)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

6. Na figura 1, está representada parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x$.

Considere um ponto, P, a deslocar-se sobre o semieixo positivo das abcissas.

Seja A o ponto pertencente ao gráfico da função que tem a mesma abcissa que o ponto P.

Para cada posição do ponto P, define-se um triângulo $[OAP]$.

Qual das expressões seguintes representa, em função de x (abcissa do ponto P), a área do triângulo $[OAP]$?

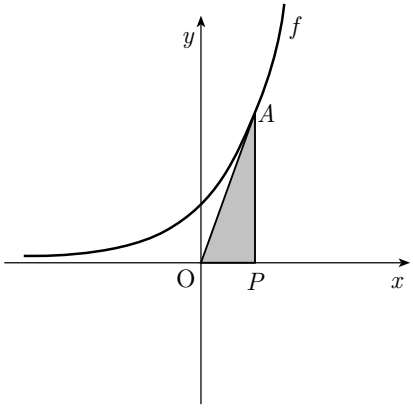


Fig. 1

(A) $x.e^x$ **(B)** $\frac{x.e^x}{2}$ **(C)** $\frac{x+e^x}{2}$ **(D)** e^x

7. Seja θ um número real pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Considere o número complexo $z = i.\text{cis}(\theta)$.

Qual dos números complexos seguintes é o conjugado de z?

(A) $\text{cis}\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ **(B)** $\text{cis}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ **(C)** $\text{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ **(D)** $\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)$

8. Considere, em $\mathbb{C}$, o número complexo $w = 2\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

No plano complexo, a imagem geométrica de w é um dos vértices do quadrado $[ABCD]$, com centro na origem O, representado na figura 2.

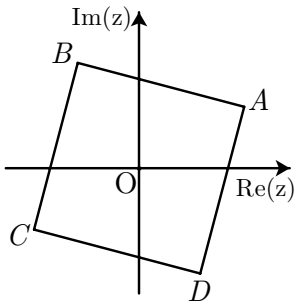


Fig. 2

Qual dos números complexos seguintes tem como imagem geométrica o vértice D do quadrado?

(A) $2\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

(B) $2\,\text{cis}\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

(C) $2\,\text{cis}\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

(D) $2\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Considere, em $\mathbb{C}$, o número complexo $z_1 = 3 - 2i$.

Determine, **sem recorrer à calculadora**, o número complexo $z = \dfrac{z_1 + {z_1}^2 + 2i^{43}}{8\,\mathrm{cis}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)}$.

Apresente o resultado na forma algébrica.

2. Determine o valor de θ, pertencente ao intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, de modo que a imagem geométrica do número complexo $(2\,\mathrm{cis}\,\theta)^2 \times (1 + \sqrt{3}\,i)$ pertença à bissectriz do 3.º quadrante.

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Mostre que $P(B) + P(\overline{A}) + P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 2P(\overline{A}) + P(A \cup B)$.

(P designa probabilidade e $\overline{A}$ designa acontecimento contrário de A.)

4. Considere o conjunto $A = \{1, 3, 5, 6, 8\}$.

4.1. Com os elementos do conjunto A, quantos números pares de quatro algarismos se podem formar, que tenham dois e só dois algarismos iguais a 5?

4.2. De entre os elementos do conjunto A, escolhe-se um deles, ao acaso.

Considere a variável aleatória X: «número de divisores do elemento escolhido».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X e determine o seu valor médio.

Apresente o resultado na forma de dízima.

Nota: Apresente o valor das probabilidades na forma de fracção irredutível.

5. Considere o ponto $A\ (1,\ 1)$, representado na figura 3.

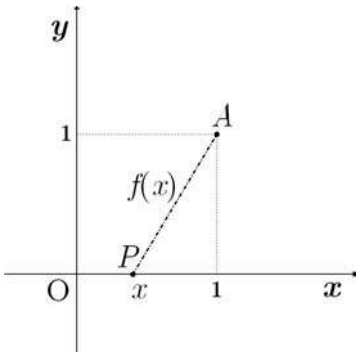


Fig. 3

Admita que um ponto, P, parte da origem O do referencial e se desloca ao longo do semieixo positivo $\mathrm{O}x$.

Para cada posição do ponto P, seja x a abcissa de P.

Seja f a função que, a cada valor de x, faz corresponder a distância do ponto P ao ponto A.

Apenas um dos seguintes gráficos pode representar a função f.

Numa pequena composição, explique por que razão cada um dos outros três gráficos não pode representar a função f.

Gráfico 1

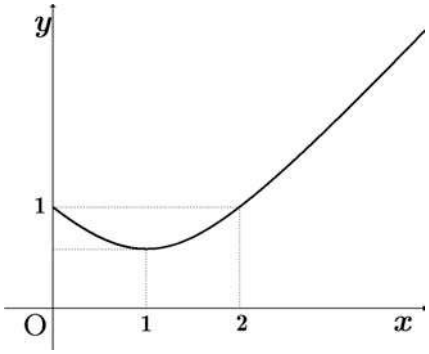


Gráfico 2

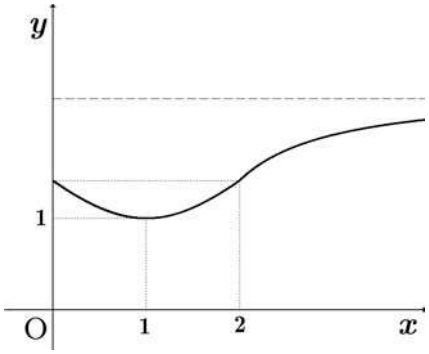


Gráfico 3

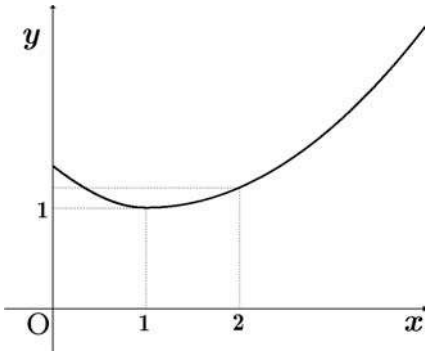
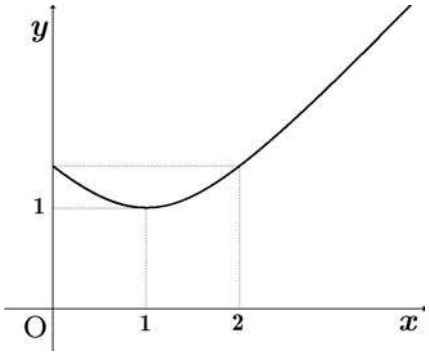


Gráfico 4



6. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \dfrac{e^x + 3}{e^x}$.

Estude, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, a função g, quanto à existência de assimptotas do seu gráfico e, caso existam, escreva as suas equações.

7. Seja a função f, de domínio $\left[0, \pi\right[$, definida por $f(x) = e^x . \cos x$.

7.1. Estude, **recorrendo exclusivamente a métodos analíticos**, a função f, quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, indicando os intervalos de monotonia e, caso existam, os extremos relativos.

7.2. Determine, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**, um valor, aproximado às décimas, da área do trapézio $[OABC]$, em que:

- O é a origem do referencial;
- A é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo $\mathrm{O}y$;
- B é o ponto do gráfico de f, tal que a recta AB é paralela ao eixo $\mathrm{O}x$;
- C é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo $\mathrm{O}x$.

Reproduza, na folha de respostas, o gráfico visualizado na calculadora, incluindo o referencial.

Desenhe o trapézio $[OABC]$, assinalando os pontos que representam os seus vértices.

Nota: Nas coordenadas dos vértices em que é necessário fazer arredondamentos, utilize duas casas decimais.

8. Admita que a magnitude, M, de um sismo é dada, na escala de Richter, por

$$M = 0{,}67 \log E - 3{,}25$$

sendo E a energia, em joules, libertada por esse sismo.

($\log$ designa logaritmo de base 10.)

Resolva, **recorrendo exclusivamente a métodos analíticos**, os dois itens seguintes.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

8.1. Sejam E_1 e E_2 as energias libertadas por dois sismos de magnitudes M_1 e M_2, respectivamente.

Determine $\frac{E_1}{E_2}$, com aproximação às unidades, sabendo que $M_1 - M_2 = 1$.

Interprete o valor obtido no contexto da situação apresentada.

8.2. O sismo que ocorreu nos Açores, no dia 1 de Abril de 2009, teve magnitude $4{,}7$, na escala de Richter.

Qual foi a energia libertada nesse sismo?

Escreva o resultado em notação científica, isto é, na forma $a \times 10^b$, sendo b um número inteiro, e a um número entre 1 e 10.

Apresente o valor de a arredondado às unidades.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I ..... (8 × 5 pontos)..... **40 pontos**

GRUPO II ..... **160 pontos**

1. ..... 15 pontos

2. ..... 15 pontos

3. ..... 15 pontos

4. ..... 30 pontos
- **4.1.** ..... 15 pontos
- **4.2.** ..... 15 pontos

5. ..... 15 pontos

6. ..... 15 pontos

7. ..... 30 pontos
- **7.1.** ..... 15 pontos
- **7.2.** ..... 15 pontos

8. ..... 25 pontos
- **8.1.** ..... 15 pontos
- **8.2.** ..... 10 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/Época Especial

13 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2009

COTAÇÕES

GRUPO I	(8 × 5 pontos)	**40 pontos**
GRUPO II		**160 pontos**
1.		15 pontos
2.		15 pontos
3.		15 pontos
4.		30 pontos
4.1.		15 pontos
4.2.		15 pontos
5.		15 pontos
6.		15 pontos
7.		30 pontos
7.1.		15 pontos
7.2.		15 pontos
8.		25 pontos
8.1.		15 pontos
8.2.		10 pontos
TOTAL		**200 pontos**

A classificação da prova deve respeitar integralmente os critérios gerais e específicos a seguir apresentados

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada item é obrigatoriamente:

– um número inteiro;

– um dos valores resultantes da aplicação dos critérios gerais e específicos de classificação e previstos na respectiva grelha de classificação.

As respostas que se revelem ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos. No entanto, em caso de omissão ou de engano na identificação de um item, o mesmo pode ser classificado se, pela resposta apresentada, for possível identificá-lo inequivocamente.

Se o examinando responder a um mesmo item mais do que uma vez, não eliminando inequivocamente a(s) resposta(s) que não deseja que seja(m) classificada(s), deve ser apenas considerada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Nos itens de resposta fechada de escolha múltipla, a cotação total do item só é atribuída às respostas que apresentam, de forma inequívoca, a única alternativa correcta.

São classificadas com zero pontos as respostas em que é assinalada:

– uma alternativa incorrecta;

– mais do que uma alternativa.

Não há lugar a classificações intermédias.

Os critérios de classificação dos itens de resposta aberta apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

Nos itens de resposta aberta extensa orientada, com cotação igual ou superior a quinze pontos e que impliquem a produção de um texto, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea das competências específicas da disciplina e das competências de comunicação escrita em língua portuguesa.

A avaliação das competências de comunicação escrita em língua portuguesa contribui para valorizar a classificação atribuída ao desempenho no domínio das competências específicas da disciplina. Esta valorização é cerca de 10% da cotação do item e faz-se de acordo com os níveis de desempenho a seguir descritos.

Nível	Descritor
3	Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
2	Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou ortografia, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
1	Composição sem estruturação aparente, com a presença de erros graves de sintaxe, pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é zero pontos. Neste caso, não é classificado o desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar em situações não descritas anteriormente.

Situação	Classificação
1. Classificação de um item cujo critério se apresenta organizado por etapas.	A cotação indicada para cada etapa é a classificação máxima que lhe é atribuível. A classificação da resposta resulta da soma das classificações das diferentes etapas, à qual se subtraem, eventualmente, um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 14 e/ou 19.
2. Classificação de uma etapa dividida em passos.	A cotação indicada para cada passo é a classificação máxima que lhe é atribuível. A classificação da etapa resulta da soma das classificações dos diferentes passos.
3. Classificação de um item ou de uma etapa cujo critério se apresenta organizado por níveis de desempenho.	A resposta é enquadrada numa das descrições apresentadas. À classificação correspondente subtraem-se, eventualmente, um, dois ou três pontos, de acordo com o previsto nas situações 9, 10 e/ou 19.
4. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite e classificado qualquer processo de resolução cientificamente correcto. O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante a distribuição da cotação do item pelas etapas* percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.
5. Apresentação apenas do resultado final, embora a resolução do item exija cálculos e/ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
6. Utilização de processos de resolução que não respeitam as instruções dadas [por exemplo, «usando métodos analíticos»].	A etapa em que a instrução não é respeitada é classificada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário, no critério específico de classificação.
7. Ausência de apresentação dos cálculos e/ou das justificações necessárias à resolução de uma etapa*.	A etapa é classificada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário, no critério específico de classificação.
8. Ausência de apresentação explícita de uma dada etapa.	Se a resolução apresentada permitir perceber, inequivocamente, que a etapa foi percorrida, a mesma é classificada com a cotação total para ela prevista.
9. Transposição incorrecta de dados do enunciado.	Se o grau de dificuldade da resolução não diminuir, é subtraído um ponto à classificação da etapa. Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a classificação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
10. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo.	É subtraído um ponto à classificação da etapa em que o erro ocorre.
11. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.	A classificação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.

* Em situações em que o critério é aplicável tanto a **etapas** como a **passos**, utiliza-se apenas o termo «etapas» por razões de simplificação da apresentação.

Situação	Classificação
12. Ocorrência de um erro na resolução de uma etapa.	A etapa é classificada de acordo com o erro cometido. As etapas subsequentes são classificadas de acordo com os efeitos do erro cometido: – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são classificadas de acordo com os critérios específicos de classificação; – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a classificação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
13. Resolução incompleta de uma etapa.	Se, à resolução da etapa, faltar apenas o passo final, é subtraído um ponto à classificação da etapa; caso contrário, a classificação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
14. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação de um arredondamento incorrecto.	É subtraído um ponto à classificação total da resposta.
15. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fracção, e a resposta apresenta-se na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à classificação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final [por exemplo, «15» em vez de «15 metros»].	A etapa relativa à apresentação do resultado final é classificada com a cotação total para ela prevista.
17. Apresentação do resultado final com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exacto.	É subtraído um ponto à classificação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
18. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, e/ou apresentação do resultado final incorrectamente arredondado.	É subtraído um ponto à classificação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
19. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à classificação total da resposta, excepto: – se as incorrecções ocorrerem apenas em etapas já classificadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a **8.** ..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

As respostas correctas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Respostas	C	C	B	D	A	B	A	D

GRUPO II

É de aceitar qualquer processo de resolução cientificamente correcto, ainda que não esteja previsto nestes critérios específicos, nem no programa (ver critério 4 dos critérios gerais).

1. ..... **15 pontos**

Escrever $z = \dfrac{(3-2i)+(3-2i)^2+2i^{43}}{8\,\mathrm{cis}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)}$ ..... 1 ponto

Simplificar o numerador da fracção ..... 8 pontos

Escrever $i^{43} = -i$ ..... 1 ponto

Calcular $(3-2i)^2$ ..... 4 pontos

Restantes cálculos ..... 3 pontos

Escrever $8\,\mathrm{cis}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -8i$ ..... 2 pontos

Calcular $\dfrac{8-16i}{-8i}$ ..... 4 pontos

Multiplicar ambos os termos da fracção por i (por exemplo) ..... 2 pontos

Restantes cálculos ..... 2 pontos

2. ..... **15 pontos**

Escrever $(2\operatorname{cis}\theta)^2 = 4\operatorname{cis}(2\theta)$ ..... 1 ponto

Escrever $(1+\sqrt{3}\,i)$ na forma trigonométrica ..... 5 pontos

Módulo $(\rho = 2)$ ..... 2 pontos

Argumento $\left(\alpha = \frac{\pi}{3}\right)$ ..... 2 pontos

Apresentar na forma trigonométrica ..... 1 ponto

Escrever $4\operatorname{cis}(2\theta) \times 2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 8\operatorname{cis}\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ (**ver nota**)..... 1 ponto

Determinar o valor de θ pertencente ao intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ..... 8 pontos

Identificar a expressão geral dos argumentos de um número complexo cuja imagem geométrica pertence à bissectriz do 3.º Q ... 3 pontos

Resolver a equação $2\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ..... 3 pontos

Concluir que $\theta = \frac{11}{24}\pi$ ..... 2 pontos

Nota: Se na resolução o examinando utilizar apenas os argumentos, a classificação a atribuir a esta etapa não deve ser desvalorizada.

3. ..... **15 pontos**

A demonstração deve abordar os seguintes pontos:

- propriedade relativa à probabilidade do acontecimento contrário;
- propriedade relativa à probabilidade da união de dois acontecimentos;
- leis de De Morgan.

Na tabela seguinte, indica-se como a resposta a este item deve ser classificada, de acordo com o respectivo nível de desempenho no domínio específico da disciplina.

Descritores do nível de desempenho			**Pontuação**
Níveis*	**4**	A demonstração aborda correctamente os três pontos, concluindo o pretendido.	15 pontos
	3	A demonstração aborda correctamente os três pontos, mas não conclui o pretendido.	12 pontos
	2	A demonstração aborda correctamente apenas dois pontos.	8 pontos
	1	A demonstração aborda correctamente apenas um ponto.	4 pontos

* No caso de a resposta não atingir o nível 1, a classificação a atribuir é zero pontos.

4.1. ..... **15 pontos**

Expressão que dá o valor pedido (**ver nota 1**) ..... 13 pontos

Calcular o valor pedido (24) (**ver nota 2**) ..... 2 pontos

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva classificação a atribuir.

$^3C_2 \times 4 \times 2$ (ou equivalente) ..... 13 pontos

Outras situações ..... 0 pontos

2. A classificação relativa a esta etapa só é atribuída se a etapa anterior não tiver sido classificada com zero pontos.

4.2. ..... **15 pontos**

Indicar os valores que a variável X pode tomar $(X_i \in \{\ 1, 2, 4\ \})$ (**ver nota**) ... 3 pontos

Indicar o número de casos possíveis ..... 3 pontos

Indicar o número de casos favoráveis para cada um dos valores da variável .... 3 pontos

Construir a tabela de distribuição de probabilidades ..... 3 pontos

Calcular o valor médio ..... 3 pontos

Nota: Se os valores da variável não estiverem todos correctos, a classificação a atribuir a esta etapa é zero pontos.

5. ..... **15 pontos**

A composição deve abordar a razão pela qual cada um dos gráficos incorrectos é excluído.

- Gráfico 1: é excluído, porque, quando $x = 0$ ou $x = 2$, a distância do ponto P ao ponto A não é igual a 1; ou porque, quando $x = 1$, a distância do ponto P ao ponto A não é inferior a 1;
- Gráfico 2: é excluído, porque, para valores de x superiores a 2, a distância do ponto P ao ponto A não tende para um valor finito;
- Gráfico 3: é excluído, porque, quando $x = 0$ ou $x = 2$, a distância do ponto P ao ponto A não é igual.

Na tabela seguinte, indica-se como deve ser classificada a justificação pedida, de acordo com os níveis de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa, descritos nos critérios gerais e os níveis de desempenho no domínio específico da disciplina.

Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina / Descritores do nível de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa			Níveis*		
			1	2	3
Níveis**	3	A composição aborda correctamente a exclusão dos gráficos 1, 2 e 3.	13	14	15
	2	A composição aborda correctamente a exclusão dos gráficos 1 e 2 ou 1 e 3 ou 2 e 3.	8	9	10
	1	A composição aborda correctamente a exclusão do gráfico 1 ou do 2 ou do 3.	3	4	5

* Descritores apresentados nos critérios gerais.

** Apenas podem ser atribuídas classificações correspondentes a um dos valores constantes do quadro. Não há lugar a classificações intermédias.

6. ..... **15 pontos**

Justificar que a função g não tem assimptotas verticais ..... 3 pontos

Averiguar da existência da assimptota não vertical quando $x \to +\infty$ ..... 6 pontos

Calcular $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x}$ ..... 2 pontos

Calcular $\lim_{x \to +\infty} (g(x) - mx)$ ..... 2 pontos

Concluir que a recta de equação $y = 1$ é uma assimptota

horizontal do gráfico de g quando $x \to +\infty$ ..... 2 pontos

Averiguar da existência da assimptota não vertical quando $x \to -\infty$ ..... 6 pontos

Calcular $\lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x}$ ..... 4 pontos

Concluir que não existe assimptota não vertical do gráfico

de g quando $x \to -\infty$ ..... 2 pontos

7.1. ..... **15 pontos**

Determinar $f'(x) = e^x(\cos(x) - sen(x))$ ..... 3 pontos

Determinar o zero de f' no intervalo ..... 4 pontos

Escrever $f'(x) = 0$ ..... 1 ponto

Escrever $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ..... 2 pontos

Indicar o zero de $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ..... 1 ponto

Estudar o sinal de f' e consequente conclusão, relativamente à monotonia e aos extremos relativos de f no intervalo $[0,\ \pi[$: (o estudo pode ser apresentado através de um quadro) (**ver nota 1**) ..... 5 pontos

Primeira linha do quadro (relativa à variável x, de acordo com o intervalo em estudo) ..... 2 pontos

Sinal de f' ..... 2 pontos

Relação entre o sinal de f' e a monotonia de f ..... 1 ponto

Determinar o mínimo $(f(0) = 1)$ ..... 1 ponto

Determinar o máximo $\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}\right)$ ..... 1 ponto

Indicar os intervalos de monotonia (**ver nota 2**) ..... 1 ponto

Nota:

1. Se o examinando não recorrer a um quadro, mas apresentar uma justificação equivalente, não deve ser desvalorizada a classificação a atribuir a esta etapa.

2. São de aceitar, como resposta correcta, os intervalos $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ou $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$, para a indicação do intervalo em que a função é monótona crescente, e os intervalos $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right[$ ou $\left]\frac{\pi}{4}, \pi\right[$, para a indicação do intervalo em que a função é monótona decrescente.

7.2. ..... **15 pontos**

Representar graficamente a função f ..... 3 pontos

Assinalar os pontos A, B e C ..... (1 + 1 + 1) ..... 3 pontos

Desenhar o trapézio ..... 1 ponto

Determinar o comprimento da base maior do trapézio ..... 2 pontos

Determinar o comprimento da base menor do trapézio ..... 2 pontos

Indicar a altura do trapézio ..... 1 ponto

Escrever $A_{[OABC]} = \dfrac{1{,}29+1{,}57}{2} \times 1$ ..... 1 ponto

Obter a área do trapézio $(\acute{A}rea = 1{,}4)$ ..... 2 pontos

8.1. ..... **15 pontos**

Escrever $M_1 - M_2 = 0{,}67 \log E_1 - 0{,}67 \log E_2$ ..... 2 pontos

Resolver a equação $1 = 0{,}67 \log E_1 - 0{,}67 \log E_2$ ..... 11 pontos

Cálculos até $\dfrac{1}{0{,}67} = \log \dfrac{E_1}{E_2}$ ..... 6 pontos

Escrever $\dfrac{E_1}{E_2} = 10^{\frac{1}{0{,}67}}$ ..... 4 pontos

Escrever $\dfrac{E_1}{E_2} = 31$ ..... 1 ponto

Interpretar o resultado obtido no contexto da situação ..... 2 pontos

8.2. ..... **10 pontos**

Escrever $4{,}7 = 0{,}67 \log E - 3{,}25$ ..... 1 ponto

Resolver a equação ..... 7 pontos

Cálculos até $\log E = 11{,}87$ ..... 3 pontos

Obter o valor de $(E = 10^{11{,}87})$ ..... 4 pontos

Resultado final $(E = 7 \times 10^{11} \text{ joules})$ ..... 2 pontos

EXAMES NACIONAIS DO ENSINO SECUNDÁRIO, 2009 – ÉPOCA ESPECIAL **GRELHA DE CLASSIFICAÇÃO DE MATEMÁTICA A (Cód. 635)**

Código Confidencial da Escola	Número Convencional da Prova	GRUPO I									GRUPO II												TOTAL da PROVA (200)
		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	T1 (40)	1.	2.	3.	4.1.	4.2.	5.	6.	7.1.	7.2.	8.1.	8.2	T2 (160)	
		(5)	(5)	(5)	(5)	(5)	(5)	(5)	(5)		(15)	(15)	(15)	(15)	(15)	(15)	(15)	(15)	(15)	(15)	(10)		

Exame nacional de Matemática A **(2009, Época especial)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como se pretende que a eleição seja feita de modo a que os eleitos sejam de sexos diferentes, devemos selecionar 1 dos 8 rapazes e 1 das 12 raparigas e ainda multiplicar por 2 para considerar a hipótese de eles alternarem nos dois cargos.
   Assim, o número de escolhas diferentes que podem ser feitas é:

   $$8 \times 12 \times 2 = 192$$

   Resposta: **Opção C**

2. Podemos considerar que uma das crianças escreveu uma das letras no papel. Para que as duas crianças escreverem a mesma letra, a segunda criança deverá escolher a mesma letra que a primeira criança.
   Como existem 5 letras (número de casos possíveis) e apenas uma foi escolhida pela primeira criança (número de casos favoráveis) recorrendo à Regra de Laplace, a probabilidade da segunda criança escolher, ao acaso, a letra igual à da primeira criança é $\frac{1}{5}$

   Resposta: **Opção C**

3. Como a variável X segue uma distribuição normal, com $\mu = 5$, temos que:
   $P(X \geq 5) = 0{,}5$, logo, como $P(5 \leq X \leq 6) = 0{,}4$, e assim:

   $$P(5 \leq X \leq 6) = P(X \geq 5) - P(X \geq 6) \Leftrightarrow 0{,}4 = 0{,}5 - P(X \geq 6) \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow P(X \geq 6) = 0{,}5 - 0{,}4 \Leftrightarrow P(X \geq 6) = 0{,}1$$

   Como a distribuição é simétrica relativamente ao valor médio, temos que $P(X \geq 6) = P(X \leq 4)$ logo $P(X \leq 4) = 0{,}1$, e desta forma:

   - Como $P(X \leq 4) = 0{,}1$ então $P(X \geq 4) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$, pelo que $P(X \geq 2) \geq P(X \geq 4) \Leftrightarrow P(X \geq 2) \geq 0{,}9$
   - $P(4 \leq X \leq 5) = P(5 \leq X \leq 6) = 0{,}4$
   - $P(4 \leq X \leq 6) = P(4 \leq X \leq 5) + P(5 \leq X \leq 6) = 0{,}4 + 0{,}4 = 0{,}8$
   - $P(X \leq 4) = P(X \geq 6)$ logo $P(X \leq 4) = 0{,}1$

   Resposta: **Opção B**

4. Temos que:

$$b = a^2 \underset{a>1}{\Leftrightarrow} a = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b^{\frac{1}{2}}$$

Assim, usando as propriedades dos logaritmos, vem que:

$$1 + \log_b a = 1 + \log_b \left(b^{\frac{1}{2}}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Resposta: **Opção D**

5. Calculando a derivada da função f temos:

$$f'(x) = \left(\operatorname{sen}(2x)\right)' = (2x)' \cos(2x) = 2\cos(2x)$$

Calculando o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\frac{\pi}{8}$ vem:

$$f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Resposta: **Opção A**

6. Como a abcissa do ponto P é positiva, porque este se deslocar sobre o semieixo positivo das abcissas, então podemos considerar a base do triângulo o lado $[OP]$ e a sua medida é a abcissa do ponto P, pelo que $\overline{OP} = x$

Como relativamente à base $[OP]$, a altura é o lado $[PA]$, e a medida da altura é a ordenada do ponto A, temos que $\overline{PA} = f(x) = e^x$

Assim, a área do triângulo $[OAP]$ em função de x (abcissa do ponto P) é:

$$A_{[OAP]} = \frac{\overline{OP} \times \overline{PA}}{2} = \frac{x \times f(x)}{2} = \frac{x.e^x}{2}$$

Resposta: **Opção B**

7. Como $i = \operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$, podemos fazer a multiplicação na forma trigonométrica:

$$z = i.\operatorname{cis}(\theta) = \operatorname{cis}\frac{\pi}{2} \times \operatorname{cis}\theta = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

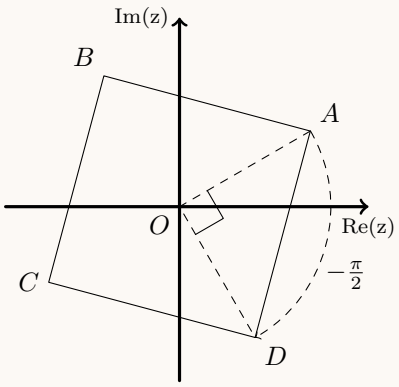
Assim o conjugado de z é:

$$\overline{z} = \operatorname{cis}\left(-\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right) = \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

Resposta: **Opção A**

8. Como w é um dos vértices do quadrado, o número complexo que tem como imagem geométrica o ponto D, é um número complexo z, tal que:

   - $|z| = |w| = 2$, porque o quadrado está centrado na origem, logo, todos os vértices estão a igual distância do centro
   - $\arg(z) = \arg(w) - \frac{\pi}{2}$, porque a imagem geométrica do número complexo w é o ponto A, visto que $0 \leq \arg(w) \leq \frac{\pi}{2}$, ou seja é um ângulo do primeiro quadrante, e o ângulo AOD é reto



   Assim, temos que:

$$z = 2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = 2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{6}\right) = 2\,\text{cis}\left(-\frac{2\pi}{6}\right) = 2\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

   Acrescentando 2π ao argumento calculado temos:

$$z = 2\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = 2\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{6\pi}{3}\right) = 2\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

   Resposta: **Opção D**

GRUPO II

1. Temos que $i^{43} = i^{4\times 10+3} = i^3 = -i$

   Calculando z_1^2 temos: $z_1^2 = (3-2i)^2 = 3^2 - 2\times 3(2i) + (2i)^2 = 9 - 12i + 4i^2 = 9 - 4 - 12i = 5 - 12i$

   Como $8\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -8i$, calculando z na forma algébrica, temos:

$$z = \frac{z_1 + z_1^2 + 2i^{43}}{8\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{(3-2i) + (5-12i) + 2(-i)}{-8i} = \frac{8-16i}{-8i} = \frac{1-2i}{-i} =$$

$$= \frac{(1-2i)\times i}{-i\times i} = \frac{i - 2i^2}{-i^2} = \frac{i - 2(-1)}{-(-1)} = 2 + i$$

2. Escrevendo $1+\sqrt{3}i$ na f.t. temos $1+\sqrt{3}i = \rho \operatorname{cis}\theta$, onde:

   - $\rho = |1+\sqrt{3}i| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
   - $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$; como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

   Assim $1+\sqrt{3}i = 2\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{3}$

   Calculando o quadrado e, depois, o produto na f.t. temos:

$$(2\operatorname{cis}\theta)^2 \times (1+\sqrt{3}i) = 2^2 \operatorname{cis}(2\theta) \times 2\operatorname{cis}\frac{\pi}{3} = (4\times 2)\operatorname{cis}\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right) = 8\operatorname{cis}\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

   Para que a imagem geométrica do número complexo $(2\operatorname{cis}\theta)^2 \times (1+\sqrt{3}i)$ pertença à bissetriz do 3.º quadrante, o seu argumento deve ser igual a $\dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pelo que podemos calcular o valor de θ com a igualdade:

$$2\theta+\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{4}+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z} \ \Leftrightarrow\ 2\theta = \frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z} \ \Leftrightarrow\ 2\theta = \frac{15\pi}{12}-\frac{4\pi}{12}+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2\theta = \frac{11\pi}{12}+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z} \ \Leftrightarrow\ \theta = \frac{11\pi}{24}+k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$$

   Como $\theta \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, para $k=0$, temos que $\theta = \dfrac{11\pi}{24}$

3. Temos que:

$$\begin{aligned}
P(B)+P\left(\overline{A}\right)+P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right) &= P(B)+P\left(\overline{A}\right)+P\left(\overline{A}\right)+P\left(\overline{B}\right)-P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right) && (1)\\
&= 2P\left(\overline{A}\right)+P(B)+P\left(\overline{B}\right)-P\left(\overline{A\cup B}\right) && (2)\\
&= 2P\left(\overline{A}\right)+1-P\left(\overline{A\cup B}\right) && (3)\\
&= 2P\left(\overline{A}\right)+1-\Big(1-P(A\cup B)\Big) && (4)\\
&= 2P\left(\overline{A}\right)+1-1+P(A\cup B)\\
&= 2P\left(\overline{A}\right)+P(A\cup B)
\end{aligned}$$

   (1) Teorema: $P(X\cup Y) = P(X)+P(Y)-P(X\cap Y)$
   (2) Leis de De Morgan: $\overline{X}\cap\overline{Y} = \overline{X\cup Y}$
   (3) Teorema: $P(X)+P\left(\overline{X}\right)=1$
   (4) Teorema: $P\left(\overline{X}\right) = 1-P(X)$

   Logo, $P(B)+P\left(\overline{A}\right)+P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right) = 2P\left(\overline{A}\right)+P(A\cup B)$ *q.e.d.*

4.

   4.1. Como se pretende que os números sejam pares, para o algarismo das unidades temos apenas 2 hipóteses (o «6» e o «8»).
   Como se pretende que das restantes 3 posições, duas sejam ocupadas por algarismos «5» temos ${}^3C_2$ hipóteses de escolher 2 das 3 posições para os algarismos «5».
   Para a posição restante existem ainda 4 hipóteses (todos os elementos do conjunto A, à exceção do «5»).
   Assim, a quantidade de números números que se podem formar, nestas condições, é

$$2\times {}^3C_2 \times 4 = 24$$

4.2. Analisando o número de divisores de cada elemento do conjunto A, temos:

- $D_1 = \{1\}$, ou seja, o número de divisores de 1 é 1
- $D_3 = \{1,3\}$, ou seja, o número de divisores de 3 é 2
- $D_5 = \{1,5\}$, ou seja, o número de divisores de 5 é 2
- $D_6 = \{1,2,3,6\}$, ou seja, o número de divisores de 6 é 4
- $D_8 = \{1,2,4,8\}$, ou seja, o número de divisores de 8 é 4

Assim o número de divisores do elemento escolhido pode ser 1 (que ocorre 1 em cada 5 vezes), 2 (que ocorre 2 em cada 5 vezes) ou 4 (que ocorre 2 em cada 5 vezes), pelo que a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	1	2	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

E o valor médio da variável aleatória X é:

$$\mu = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{2}{5} + 4 \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} + \frac{8}{5} = \frac{13}{5}$$

5. O único gráfico que pode representar a função f é o **Gráfico 4**.

- O **Gráfico 1** não pode representar a função f, porque para $x = 1$, ou seja quando as coordenadas do ponto P são (1,0), a distância ao ponto $A(1,1)$ é 1, pelo que podemos afirmar que $f(1) = 1$
  Como na função representada por este gráfico temos que a imagem do objeto 1 é inferior a 1, então este gráfico não pode representar a função f
- O **Gráfico 2** não pode representar a função f, porque como o ponto P se afasta arbitrariamente do ponto A a distância entre os dois aumenta indefinidamente sem nunca tender para um valor finito.
  Como na função representada por este gráfico existe um valor finito, superior a todas as imagens, então este gráfico não pode representar a função f
- O **Gráfico 3** não pode representar a função f, porque para $x = 0$ e para $x = 2$, ou seja quando as coordenadas do ponto P são (0,0) e (2,0), respetivamente a distância ao ponto $A(1,1)$ é igual ao comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1, pelo que podemos afirmar que $f(0) = f(2)$
  Como na função representada por este gráfico temos que a imagem do objeto 0 é maior que a imagem do objeto 2, então este gráfico não pode representar a função f

(pode consultar a construção animada do gráfico da função no GeoGebra)

6. Como a função g é contínua em $\mathbb{R}$, porque resulta de operações entre funções contínuas em $\mathbb{R}$, o gráfico de g não tem qualquer assíntota vertical.

Averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de g, de equação $y = mx + b$, quando $x \to -\infty$, vem que:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{e^x+3}{e^x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x+3}{xe^x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{e^x}{xe^x} + \frac{3}{xe^x}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{3e^{-x}}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x}\right) + \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{-3e^{-x}}{-x}\right) = \frac{1}{-\infty} - 3 \times \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{e^{-x}}{-x}\right) = 0 - 3 \times \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{e^{-x}}{-x}\right) =$$

(fazendo $y = -x$, temos que se $x \to -\infty$, então $y \to +\infty$)

$$= -3 \times \underbrace{\lim_{y\to+\infty} \left(\frac{e^y}{y}\right)}_{\text{Lim. Notável}} = -3 \times (+\infty) = -\infty$$

Logo, não o gráfico de g não tem assíntotas não verticais, quando $x \to -\infty$

Averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de g, de equação $y = mx + b$, quando $x \to +\infty$, vem que:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x+3}{e^x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+3}{xe^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{xe^x} + \frac{3}{xe^x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right) + \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{xe^x}\right) = \frac{1}{+\infty} + \frac{3}{+\infty \times (+\infty)} = 0 + \frac{3}{+\infty} = 0 + 0 = 0$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 0 \times x) = \lim_{x\to+\infty} (f(x)) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x+3}{e^x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{e^x} + \frac{3}{e^x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{3}{e^x}\right) = \lim_{x\to+\infty} 1 + \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{e^x}\right) = 1 + \frac{3}{+\infty} = 1 + 0 = 1$$

E assim, vem que o gráfico de g só tem uma assíntota e a sua equação é $y = 1$

7.

7.1. Começamos por determinar a expressão da derivada da função:

$$f'(x) = \left(e^x.\cos x\right)' = (e^x)'\cos x + e^x(\cos x)' = e^x\cos x + e^x(-\operatorname{sen} x) = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$$

Determinando os zeros da derivada, vem:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{Eq Imp},e^x>0} \vee \cos x - \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \operatorname{sen} x$$

No domínio da função, o intervalo $[0,\pi[$, a única solução da equação é $x = \frac{\pi}{4}$.
Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

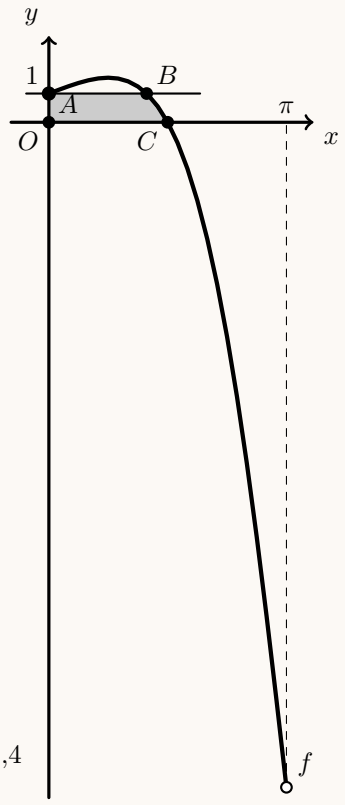
x	0		$\frac{\pi}{4}$		π
$f'(x)$	+	+	0	−	n.d
$f(x)$	min	↗	Máx	↘	n.d.

Assim, podemos concluir que a função f:

- é crescente no intervalo $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$;
- é decrescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{4},\pi\right[$;
- tem um mínimo, cujo minimizante é $(x = 0)$ e um máximo, cujo é maximizante $\left(x = \frac{\pi}{4}\right)$

Assim o mínimo relativo da função é $f(0) = e^0 \times \cos(0) = 1 \times 1 = 1$ e o máximo é
$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{\pi}{4}} \times \cos(\frac{\pi}{4}) = e^{\frac{\pi}{4}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}{2}$

7.2. Começamos por representar o gráfico de f, no domínio definido (reproduzido na figura ao lado), numa janela compatível com o domínio da função.



Calculando a ordenada do ponto A, temos:

$$y_A = f(0) = e^0 \times \cos(0) = 1 \times 1 = 1$$

Assim, traçamos também a reta de equação $y = 1$ para determinar a abcissa do ponto B. Usando a função da calculadora gráfica para determinar valores aproximados das coordenadas de pontos de interseção de dois gráficos (o gráfico de f e a reta $y = 1$), encontramos as coordenadas do ponto B, arredondadas com duas casas decimais, que são: $B(1{,}293; 1)$

Com a função da calculadora gráfica para determinar valores aproximados do zero de uma função, obtemos o valor da abcissa do ponto C, ou seja, do zero da função, que arredondado com duas casas decimais é, $x_C = 1{,}57$

Assim, calculando a área do trapézio, (também reproduzido na figura ao lado) e arredondando o resultado às décimas, temos:

$$A_{[OABC]} = \frac{\overline{OC} + \overline{AB}}{2} \times \overline{OA} = \frac{x_C + x_B}{2} \times y_A = \frac{1{,}57 + 1{,}29}{2} \times 1 \approx 1{,}4$$

8.

8.1. Como $M_1 = 0{,}67 \log E_1 - 3{,}25$ e $M_2 = 0{,}67 \log E_2 - 3{,}25$, temos que

$$M_1 - M_2 = 1 \Leftrightarrow 0{,}67 \log E_1 - 3{,}25 - (0{,}67 \log E_2 - 3{,}25) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}67 \log E_1 - 3{,}25 - 0{,}67 \log E_2 + 3{,}25 = 1 \Leftrightarrow 0{,}67 \log E_1 - 0{,}67 \log E_2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}67(\log E_1 - \log E_2) = 1 \Leftrightarrow \log E_1 - \log E_2 = \frac{1}{0{,}67} \Leftrightarrow \log \frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{0{,}67} \Leftrightarrow \frac{E_1}{E_2} = 10^{\frac{1}{0{,}67}}$$

E assim temos que $\frac{E_1}{E_2} \approx 31$

Assim, no contexto da situação descrita, como $M_1 - M_2 = 1$ e $\frac{E_1}{E_2} \approx 31 \Leftrightarrow E_1 \approx 31E_2$, temos que para quaisquer dois sismos cujas magnitudes tenham a diferença de uma unidade (na escala de Richter) a energia libertada (em joules) pela sismo de maior magnitude é aproximadamente 31 vezes superior à que é libertada pelo sismo de menor magnitude.

8.2. Como o sismo teve magnitude 4,7, na escala de Richter, vem que $M = 4{,}7$

E assim, substituindo o valor de M na expressão $M = 0{,}67 \log E - 3{,}25$, e calculando o valor de E, vem:

$$4{,}7 = 0{,}67 \log E - 3{,}25 \Leftrightarrow 4{,}7 + 3{,}25 = 0{,}67 \log E \Leftrightarrow \frac{7{,}95}{0{,}67} \log E \Leftrightarrow E = 10^{\frac{7{,}95}{0{,}67}}$$

Assim, a energia libertada nesse sismo, em notação científica, foi de, aproximadamente 7×10^{11} joules

2010

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/1.ª Fase 13 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2010

VERSÃO 1

Na folha de respostas, indique, de forma legível, a versão da prova.

A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens do Grupo I.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica, sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva, de forma legível, a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção correcta.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 4, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$
(r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \dfrac{\theta + 2k\pi}{n},\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção seleccionada.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $P(A) = 30\%$;
- $P(A \cup B) = 70\%$;
- A e B são incompatíveis.

Qual é o valor de $P(B)$?

(A) 21% **(B)** 40% **(C)** 60% **(D)** 61%

2. Num grupo de dez trabalhadores de uma fábrica, vão ser escolhidos três, ao acaso, para frequentarem uma acção de formação. Nesse grupo de dez trabalhadores, há três amigos, o João, o António e o Manuel, que gostariam de frequentar essa acção.

Qual é a probabilidade de serem escolhidos, exactamente, os três amigos?

(A) $\frac{1}{{}^{10}A_3}$ **(B)** $\frac{3}{{}^{10}A_3}$ **(C)** $\frac{1}{{}^{10}C_3}$ **(D)** $\frac{3}{{}^{10}C_3}$

3. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	2a	a

Qual das igualdades seguintes é verdadeira, considerando os valores da tabela?

(A) $P(X = 0) = P(X > 1)$

(B) $P(X = 0) = P(X = 2)$

(C) $P(X = 0) = P(X = 3)$

(D) $P(X < 2) = P(X = 3)$

4. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função afim f, de domínio $\mathbb{R}$

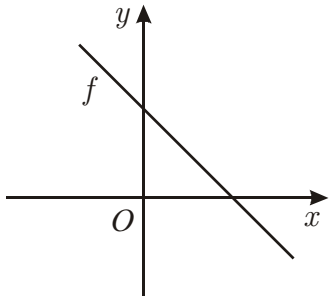
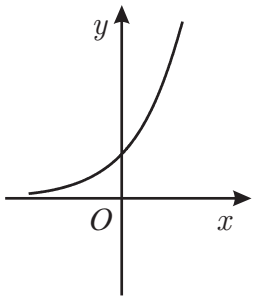


Figura 1

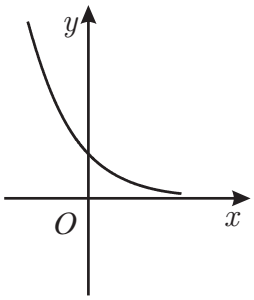
Seja h a função definida por $h(x) = f(x) + e^x$

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função h'', segunda derivada de h?

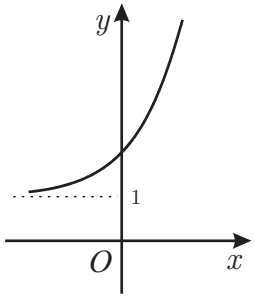
(A)



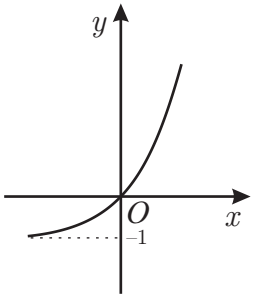
(B)



(C)



(D)



5. Na Figura 2, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f, contínua, de domínio $]-\infty, 1[$

Tal como a Figura 2 sugere, a recta de equação $x = 1$ é assimptota do gráfico de f

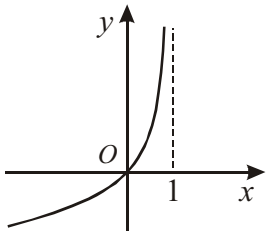


Figura 2

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{3x}{f(x)}$?

(A) $-\infty$ **(B)** 3 **(C)** 0 **(D)** $+\infty$

6. Seja g a função, de domínio $]-2, +\infty[$, definida por $g(x) = \ln(x+2)$

Considere, num referencial o.n. xOy, um triângulo $[OAB]$ tal que:

- O é a origem do referencial;
- A é um ponto de ordenada 5;
- B é o ponto de intersecção do gráfico da função g com o eixo das abcissas.

Qual é a área do triângulo $[OAB]$?

(A) $\dfrac{5}{2}$ **(B)** $\dfrac{1}{2}$ **(C)** $\dfrac{5\ \ln 2}{2}$ **(D)** $\dfrac{\ln 2}{2}$

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = 3\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{8} - \theta\right)$, com $\theta \in \mathbb{R}$

Para qual dos valores seguintes de θ podemos afirmar que z é um número imaginário puro?

(A) $-\frac{\pi}{2}$ **(B)** $\frac{\pi}{2}$ **(C)** $\frac{\pi}{8}$ **(D)** $\frac{5\pi}{8}$

8. Na Figura 3, está representada, no plano complexo, a sombreado, parte do semiplano definido pela condição $\text{Re}(z) > 3$

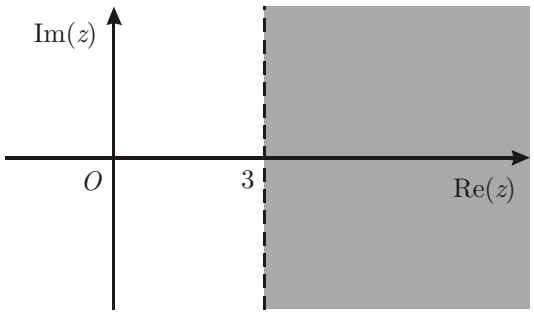


Figura 3

Qual dos números complexos seguintes tem a sua imagem geométrica na região representada a sombreado?

(A) $\sqrt{3}\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

(B) $3\sqrt{3}\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

(C) $\sqrt{3}\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

(D) $3\sqrt{3}\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \text{cis}\left(\frac{\pi}{7}\right)$ e $z_2 = 2 + i$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

1.1. Determine o número complexo $w = \dfrac{3 - i \times (z_1)^7}{\overline{z}_2}$

(i designa a unidade imaginária, e $\overline{z}_2$ designa o conjugado de z_2)

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

1.2. Mostre que $\left|z_1 + z_2\right|^2 = 6 + 4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)$

2. Dos alunos de uma escola, sabe-se que:

- a quinta parte dos alunos tem computador portátil;
- metade dos alunos não sabe o nome do director;
- a terça parte dos alunos que não sabe o nome do director tem computador portátil.

2.1. Determine a probabilidade de um aluno dessa escola, escolhido ao acaso, não ter computador portátil e saber o nome do director.

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

2.2. Admita que essa escola tem 150 alunos. Pretende-se formar uma comissão de seis alunos para organizar a viagem de finalistas.

Determine de quantas maneiras diferentes se pode formar uma comissão com, exactamente, quatro dos alunos que têm computador portátil.

3. Considere o problema seguinte:

«Num saco, estão dezoito bolas, de duas cores diferentes, de igual tamanho e textura, indistinguíveis ao tacto. Das dezoito bolas do saco, doze bolas são azuis, e seis bolas são vermelhas.

Se tirarmos duas bolas do saco, simultaneamente, ao acaso, qual é a probabilidade de elas formarem um par da mesma cor?»

Uma resposta correcta para este problema é $\dfrac{12\times11+6\times5}{18\times17}$

Numa composição, explique porquê.

A sua composição deve incluir:

- uma referência à regra de Laplace;
- uma explicação do número de casos possíveis;
- uma explicação do número de casos favoráveis.

4. Na *Internet*, no dia 14 de Outubro de 2009, pelas 14 horas, colocaram-se à venda todos os bilhetes de um espectáculo. O último bilhete foi vendido cinco horas após o início da venda.

Admita que, t horas após o início da venda, o número de bilhetes vendidos, em **centenas**, é dado, aproximadamente, por

$$N(t) = 8\log_4(3t+1)^3 - 8\log_4(3t+1), \quad t \in \left[0,\, 5\right]$$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

4.1. Mostre que $N(t) = 16\log_4(3t+1)$, para qualquer $t \in \left[0,\, 5\right]$

4.2. Determine quanto tempo foi necessário para vender 2400 bilhetes.

Apresente o resultado em horas e minutos.

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais, apresentando os minutos arredondados às unidades.

5. Considere uma função f, de domínio $]0, 3[$, cuja derivada f', de domínio $]0, 3[$, é definida por

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$$

Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar os intervalos de monotonia da função f;
- assinalar e indicar as coordenadas dos pontos relevantes, com arredondamento às centésimas.

6. Considere a função f, de domínio $]-\infty, 2\pi]$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax + b + e^x & \text{se } x \leq 0 \\ \\ \dfrac{x - \operatorname{sen}(2x)}{x} & \text{se } 0 < x \leq 2\pi \end{cases} \qquad \text{com } a, b \in \mathbb{R}$$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

6.1. Prove que a recta de equação $y = ax + b$, com $a \neq 0$, é uma assimptota oblíqua do gráfico de f

6.2. Determine o valor de b, de modo que f seja contínua em $x = 0$

7. Na Figura 4, estão representados, num referencial o.n. xOy, uma circunferência e o triângulo $[OAB]$.

Sabe-se que:

- a circunferência tem diâmetro $[OA]$;
- o ponto A tem coordenadas $(2, 0)$;
- o vértice O do triângulo $[OAB]$ coincide com a origem do referencial;
- o ponto B desloca-se ao longo da semicircunferência superior.

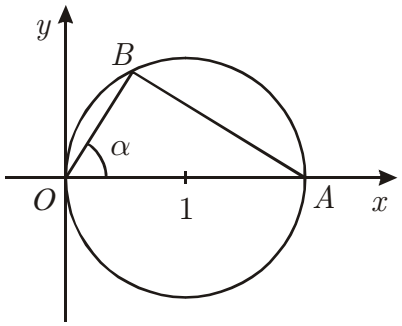


Figura 4

Para cada posição do ponto B, seja α a amplitude do ângulo AOB, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

7.1. Mostre que o perímetro do triângulo $[OAB]$ é dado, em função de α, por

$$f(\alpha) = 2(1 + \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)$$

7.2. Determine o valor de α para o qual o perímetro do triângulo $[OAB]$ é máximo.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

GRUPO II

1.

1.1. ..... 15 pontos
1.2. ..... 15 pontos

2.

2.1. ..... 15 pontos
2.2. ..... 10 pontos

3. ..... 15 pontos

4.

4.1. ..... 10 pontos
4.2. ..... 15 pontos

5. ..... 15 pontos

6.

6.1. ..... 15 pontos
6.2. ..... 10 pontos

7.

7.1. ..... 10 pontos
7.2. ..... 15 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/1.ª Fase 11 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2010

COTAÇÕES

GRUPO I

..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

GRUPO II

1.
1.1. ..... 15 pontos
1.2. ..... 15 pontos

2.
2.1. ..... 15 pontos
2.2. ..... 10 pontos

3. ..... 15 pontos

4.
4.1. ..... 10 pontos
4.2. ..... 15 pontos

5. ..... 15 pontos

6.
6.1. ..... 15 pontos
6.2. ..... 10 pontos

7.
7.1. ..... 10 pontos
7.2. ..... 15 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

A classificação da prova deve respeitar integralmente os critérios gerais e os critérios específicos a seguir apresentados.

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos de classificação apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro, previsto na grelha de classificação.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos. No entanto, em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar, inequivocamente, o item a que diz respeito.

Se o examinando responder a um mesmo item mais do que uma vez, não eliminando, inequivocamente, a(s) resposta(s) que não deseja que seja(m) classificada(s), deve ser considerada apenas a resposta que surgir em primeiro lugar.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova (Versão 1 ou Versão 2) implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de escolha múltipla.

Nos itens de escolha múltipla, a cotação total do item é atribuída às respostas que apresentem, de forma inequívoca, a única opção correcta.

São classificadas com zero pontos as respostas em que é assinalada:

– uma opção incorrecta;

– mais do que uma opção.

Não há lugar a classificações intermédias.

Os critérios de classificação dos itens de resposta aberta apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação. No caso de, ponderados todos os dados contidos nos descritores, permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

Nos itens de resposta aberta, com cotação igual ou superior a quinze pontos e que impliquem a produção de um texto, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea das competências específicas da disciplina e das competências de comunicação escrita em língua portuguesa. A avaliação das competências de comunicação escrita em língua portuguesa contribui para valorizar a classificação atribuída ao desempenho no domínio das competências específicas da disciplina. Esta valorização é cerca de 10% da cotação do item e faz-se de acordo com os níveis de desempenho descritos no quadro seguinte.

Níveis	Descritores
3	Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
2	Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
1	Composição sem estruturação aparente, com erros graves de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é de zero pontos. Neste caso, não é classificado o domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

Havendo escolas em que os alunos já contactam com as novas regras ortográficas, uma vez que o Acordo Ortográfico de 1990 já foi ratificado e dado que qualquer cidadão, nesta fase de transição, pode optar pela ortografia prevista quer no Acordo de 1945, quer no de 1990, são consideradas correctas, na classificação das provas de exame nacional, as grafias que seguirem o que se encontra previsto em qualquer um destes normativos.

As respostas aos itens de resposta aberta que apresentem pontos de vista diferentes dos mencionados nos critérios específicos de classificação devem ser classificadas, se o seu conteúdo for considerado cientificamente válido e estiver adequado ao solicitado. Nestes casos, os elementos cientificamente válidos devem ser classificados, seguindo procedimentos análogos aos previstos nos descritores apresentados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar em situações não descritas anteriormente.

Situação	Classificação
1. Classificação de um item cujo critério se apresenta organizado por etapas.	A cotação indicada para cada etapa é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A classificação da resposta resulta da soma das pontuações das diferentes etapas, à qual se subtrai ou subtraem, eventualmente, um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 14 e/ou 19.
2. Pontuação de uma etapa dividida em passos.	A cotação indicada para cada passo é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A classificação da etapa resulta da soma das pontuações dos diferentes passos.
3. Classificação de um item ou pontuação de uma etapa cujo critério se apresenta organizado por níveis de desempenho.	A resposta é enquadrada numa das descrições apresentadas. À classificação/pontuação correspondente subtraem-se, eventualmente, um, dois ou três pontos, de acordo com o previsto nas situações 9, 10 e/ou 19.
4. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite e classificado qualquer processo de resolução cientificamente correcto. O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante a distribuição da cotação do item pelas etapas* percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.
5. Apresentação apenas do resultado final, embora a resolução do item exija cálculos e/ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
6. Utilização de processos de resolução que não respeitam as instruções dadas [exemplo: «usando métodos analíticos»].	A etapa em que a instrução não é respeitada é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
7. Ausência de apresentação dos cálculos e/ou das justificações necessárias à resolução de uma etapa*.	A etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
8. Ausência de apresentação explícita de uma dada etapa.	Se a resolução apresentada permitir perceber, inequivocamente, que a etapa foi percorrida, a mesma é pontuada com a cotação total para ela prevista.
9. Transposição incorrecta de dados do enunciado.	Se o grau de dificuldade da resolução não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.

* Em situações em que o critério é aplicável tanto a **etapas** como a **passos**, utiliza-se apenas o termo «etapas», por razões de simplificação da apresentação.

Situação	Classificação
10. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre.
11. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
12. Ocorrência de um erro na resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada de acordo com o erro cometido. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido: – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
13. Resolução incompleta de uma etapa.	Se, à resolução da etapa, faltar apenas o passo final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
14. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação de um arredondamento incorrecto.	É subtraído um ponto à classificação total da resposta, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
15. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fracção, e a resposta apresenta-se na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final [exemplo: «15» em vez de «15 metros»].	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a cotação total para ela prevista.
17. Apresentação do resultado final com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exacto.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
18. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, e/ou apresentação do resultado final incorrectamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
19. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à classificação total da resposta, excepto: – se as incorrecções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a **8.** ..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

As respostas correctas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	B	C	B	A	C	A	D	B
Versão 2	C	B	C	D	B	D	A	C

GRUPO II

É de aceitar qualquer processo de resolução cientificamente correcto, ainda que não esteja previsto nestes critérios específicos, nem no Programa (ver n.º 4 dos critérios gerais).

1.1. ..... **15 pontos**

Escrever o numerador da fracção na forma algébrica ..... 4 pontos

Escrever $\left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{7}\right)^7 = \operatorname{cis}\pi$ ..... 2 pontos

Escrever $\operatorname{cis}\pi = -1$ ..... 1 ponto

Obter $3 + i$ ..... 1 ponto

Escrever $\overline{z}_2 = 2 - i$ ..... 2 pontos

Calcular $\frac{3+i}{2-i}$ na forma algébrica ..... 4 pontos

Multiplicar ambos os termos da fracção por $2 + i$ ..... 1 ponto

Obter $1 + i$ ..... 3 pontos

Calcular $1 + i$ na forma trigonométrica ..... 4 pontos

Escrever $\left|w\right| = \sqrt{2}$ ..... 2 pontos

Indicar $\arg w = \frac{\pi}{4}$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Escrever o resultado na forma pedida $\left(w = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\right)$ ..... 1 ponto

1.2. ..... **15 pontos**

Escrever $z_1 + z_2 = \text{cis}\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2 + i$ ..... 1 ponto

Escrever $\text{cis}\left(\frac{\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)$ ..... 2 pontos

Determinar $\left|z_1 + z_2\right|^2$ ..... 5 pontos

Escrever $z_1 + z_2 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2\right) + i\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) + 1\right)$ ..... 2 pontos

Obter $\left|z_1 + z_2\right|^2 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2\right)^2 + \left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) + 1\right)^2$ (**ver nota**) 3 pontos

Obter $\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 4$ ..... 2 pontos

Obter $\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) + 1$ ..... 2 pontos

Utilizar a Fórmula Fundamental da Trigonometria $\left(\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) = 1\right)$... 1 ponto

Concluir que $\left|z_1 + z_2\right|^2 = 6 + 4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)$ ..... 2 pontos

Nota – Caso o examinando escreva apenas $\left|z_1 + z_2\right|^2 = (z_1 + z_2) \times (\overline{z_1 + z_2})$, esta etapa deve ser pontuada com 2 pontos.

2.1. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, quatro processos:

No que se segue, vamos designar por A o acontecimento «o aluno tem computador portátil» e por B o acontecimento «o aluno sabe o nome do director». Podem ser admitidas outras designações para os acontecimentos.

1.º Processo:

Escrever $P(A) = \frac{1}{5}$ ..... 1 ponto

Escrever $P(B) = \frac{1}{2}$ ou $P(\overline{B}) = \frac{1}{2}$ ..... 1 ponto

Escrever $P(A \mid \overline{B}) = \frac{1}{3}$ ..... 1 ponto

Calcular $P(A \cap \overline{B}) = \frac{1}{6}$ ..... 4 pontos

Calcular $P(A \cap B) = \frac{1}{30}$ $\left(\text{ou } P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{3}\right)$ ..... 4 pontos

Calcular o valor pedido $P(\overline{A} \cap B) = \frac{7}{15}$ ..... 4 pontos

2.º Processo:

Escrever $P(A)=\frac{1}{5}$ ..... 1 ponto

Escrever $P(B)=\frac{1}{2}$ ou $P(\overline{B})=\frac{1}{2}$ ..... 1 ponto

Escrever $P(A \mid \overline{B})=\frac{1}{3}$ ..... 1 ponto

Calcular $P(A \cap B)=\frac{1}{30}$ ..... 4 pontos

Calcular $P(A \mid B)=\frac{1}{15}$ ..... 2 pontos

Calcular $P(\overline{A} \mid B)=\frac{14}{15}$ ..... 2 pontos

Calcular o valor pedido $P(\overline{A} \cap B)=\frac{7}{15}$ ..... 4 pontos

3.º Processo:

Escrever $P(\overline{A} \cap B)=P(B)-P(A \cap B)$ ..... 6 pontos

Escrever $P(B)=\frac{1}{2}$ ou $P(\overline{B})=\frac{1}{2}$ ..... 1 ponto

Calcular $P(A \cap B)=\frac{1}{30}$ ..... 4 pontos

Calcular o valor pedido $P(\overline{A} \cap B)=\frac{7}{15}$ ..... 4 pontos

4.º Processo:

Seja N o número de alunos da escola.

Referir que o número de alunos que têm computador portátil é $\frac{N}{5}$ ..... 1 ponto

Referir que o número de alunos que não têm computador portátil é $\frac{4N}{5}$ ..... 1 ponto

Referir que o número de alunos que não sabem o nome do director é $\frac{N}{2}$ ..... 1 ponto

Referir que $\frac{1}{3}\times\frac{N}{2}=\frac{N}{6}$ é o número de alunos que não sabem o nome do director e têm computador portátil ..... 4 pontos

Referir que há $\frac{N}{2}-\frac{N}{6}=\frac{N}{3}$ alunos que não têm computador portátil e não sabem o nome do director ..... 4 pontos

Referir que o número de alunos que não têm computador portátil e sabem o nome do director é $\frac{4N}{5} - \frac{N}{3} = \frac{7N}{15}$ ..... 2 pontos

Concluir que o valor pedido é $\frac{7}{15}$ ..... 2 pontos

2.2. ..... **10 pontos**

Calcular, correctamente, o número de alunos que têm computador portátil $\left(\frac{1}{5} \times 150 = 30\right)$ ..... 1 ponto

Escrever a expressão que dá o valor pedido (**ver nota 1**) ..... 7 pontos

Calcular o valor pedido $(195\ 671\ 700)$ (**ver nota 2**) ..... 2 pontos

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva pontuação a atribuir.

${}^{30}C_4 \times {}^{120}C_2$ (ou equivalente)	7 pontos
${}^{30}C_4$ ou ${}^{30}C_4 + {}^{120}C_2$	3 pontos
${}^{30}A_4 \times {}^{120}A_2$ (ou equivalente)	2 pontos
Outras situações	0 pontos

2. A pontuação relativa a esta etapa só é atribuída se na etapa anterior não tiverem sido atribuídos zero pontos.

3. ..... **15 pontos**

A composição deve abordar os pontos seguintes:

- enunciar a regra de Laplace: a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, quando estes são todos equiprováveis (ou equivalente);
- explicar o número de casos possíveis: uma vez que é indiferente tirar 2 bolas, simultaneamente, ou tirar primeiro uma e depois a outra, sem repor a primeira bola extraída, o número de casos possíveis corresponde a todos os arranjos de 2 das 18 bolas, em número de 18×17 (**ver nota**);
- explicar o número de casos favoráveis: pretendendo-se que as 2 bolas sejam da mesma cor, os casos favoráveis são de dois tipos – os arranjos de 2 das 12 bolas azuis e os arranjos de 2 das 6 bolas vermelhas, em número de $12 \times 11 + 6 \times 5$ (**ver nota**).

Na tabela seguinte, indica-se como deve ser classificada a resposta a este item, de acordo com os níveis de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa, descritos nos critérios gerais, e os níveis de desempenho no domínio específico da disciplina.

Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina		Descritores do nível de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa	Níveis*		
			1	2	3
Níveis	3	A composição aborda, correctamente, os três pontos.	13	14	15
	2	A composição aborda, correctamente, apenas dois pontos.	8	9	10
	1	A composição aborda, correctamente, apenas um ponto.	3	4	5

* Descritores apresentados nos critérios gerais.

Nota – Se o examinando apresentar uma explicação equivalente, considerada cientificamente válida, os elementos de resposta devem ser pontuados seguindo os mesmos procedimentos previstos nos descritores apresentados.

4.1. ..... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Escrever $N(t) = 24\log_4(3t+1) - 8\log_4(3t+1)$ ..... 4 pontos

Concluir que $N(t) = 16\ \log_4(3t+1)$ ..... 6 pontos

2.º Processo:

Escrever $N(t) = 8\ \log_4\left(\dfrac{(3t+1)^3}{3t+1}\right)$ ..... 4 pontos

Obter $N(t) = 8\ \log_4(3t+1)^2$ ..... 2 pontos

Concluir que $N(t) = 16\ \log_4(3t+1)$ ..... 4 pontos

4.2. ..... **15 pontos**

Escrever $N(t) = 24$ (**ver nota 1**)..... 3 pontos

Resolver a equação $N(t) = 24$ ..... 8 pontos

Escrever $\log_4(3t+1) = \dfrac{3}{2}$ ..... 2 pontos

Escrever $3t+1 = 4^{\frac{3}{2}}$ ..... 4 pontos

Escrever $t = \dfrac{-1+4^{\frac{3}{2}}}{3}$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Calcular o valor de t, em horas e minutos $(t = 2$ horas e 20 minutos$)$
(**ver notas 2** e **3**)..... 4 pontos

Notas:

1. Caso o examinando escreva $N(t) = 2400$, a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser desvalorizada em 2 pontos.

2. A pontuação relativa a esta etapa só é atribuída se na etapa anterior não tiverem sido atribuídos zero pontos.

3. Se o examinando concluir que os 2400 bilhetes estavam vendidos ao fim de cerca de 2 horas e 20 minutos, a pontuação a atribuir, nesta etapa, não deve ser desvalorizada.

5. ..... **15 pontos**

Representar graficamente a função f' (**ver nota 1**) ..... 4 pontos

Assinalar, no gráfico, o zero de $f'\,(x = 0{,}57)$ ..... 2 pontos

Estudar o sinal de f', com recurso a um quadro (**ver nota 2**)..... 5 pontos

- Primeira linha do quadro ..... 1 ponto
- Sinal de f' ..... 2 pontos
- Relação entre o sinal de f' e a monotonia de f ..... 2 pontos

Indicar os intervalos de monotonia de f ..... 2 pontos

Referir a existência do extremo de f ..... 2 pontos

Notas:

1. Se o examinando representar graficamente a função f' num intervalo diferente de $]0,\ 3[$, a pontuação a atribuir, nesta etapa, é de 2 pontos.

2. Se o examinando não recorrer a um quadro, mas apresentar uma justificação equivalente, a pontuação a atribuir, nesta etapa, não deve ser desvalorizada.

6.1. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Referir que a recta $y = ax + b$ é assimptota do gráfico de f,
se $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ ..... 5 pontos

Calcular $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (ax + b))$ ..... 10 pontos

- Escrever $\lim\limits_{x \to -\infty} ((ax + b + e^x) - (ax + b))$ ..... 3 pontos
- Obter $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x$ ..... 3 pontos
- Calcular $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x$ ..... 4 pontos

2.º Processo:

Calcular $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ..... 6 pontos

Calcular $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - ax)$ ..... 6 pontos

Concluir que $y = ax + b$ é assimptota do gráfico de f quando $x \to -\infty$ .. 3 pontos

6.2. ..... **10 pontos**

Referir que f é contínua em $x = 0$ se $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ ..... 1 ponto

Calcular $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ ou $f(0)$ ..... 2 pontos

Calcular $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ ..... 4 pontos

Levantar a indeterminação (**ver nota**) ..... 2 pontos

Indicar o valor de $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ ..... 2 pontos

Obter o valor de b ..... 3 pontos

Nota – O examinando deve explicitar o limite notável, ou seja, exige-se que multiplique ambos os termos da fracção por 2 ou que faça uma mudança de variável.

7.1. ..... **10 pontos**

Referir que o perímetro do triângulo $[OAB]$ é igual a $\overline{OB} + \overline{OA} + \overline{AB}$ .... 1 ponto

Escrever $\overline{OA} = 2$ ..... 2 pontos

Justificar que $\overline{OB} = 2\cos\alpha \quad \left(\cos\alpha = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}}\right)$ ..... 2 pontos

Justificar que $\overline{AB} = 2\,\text{sen}\,\alpha \quad \left(\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}}\right)$ ..... 2 pontos

Concluir que $f(\alpha) = 2(1 + \cos\alpha + \text{sen}\,\alpha)$ ..... 3 pontos

7.2. ..... **15 pontos**

Determinar f' ..... 5 pontos

Determinar $(\cos\,\alpha)'$ ..... 2 pontos

Determinar $(\text{sen}\,\alpha)'$ ..... 2 pontos

Obter $f'(\alpha) = -2\,\text{sen}\,\alpha + 2\cos\alpha$ ..... 1 ponto

Estudar o sinal de f', com recurso a um quadro (**ver nota**)..... 9 pontos

Primeira linha do quadro (relativa à variável α, de acordo com o domínio da função) ..... 1 ponto

Sinal de f' ..... 5 pontos

$f'(\alpha) = 0$ para $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ ..... 1 ponto

$f'(\alpha) > 0$ para $\alpha < \dfrac{\pi}{4}$ ..... 2 pontos

$f'(\alpha) < 0$ para $\alpha > \dfrac{\pi}{4}$ ..... 2 pontos

Relação entre o sinal de f' e a monotonia de f ..... 2 pontos

Assinalar o extremo relativo de f ..... 1 ponto

Indicar o valor de α para o qual o perímetro do triângulo é máximo $\left(\alpha = \dfrac{\pi}{4}\right)$.. 1 ponto

Nota – Se o examinando não recorrer a um quadro, mas apresentar uma justificação equivalente, a pontuação a atribuir, nesta etapa, não deve ser desvalorizada.

Exame nacional de Matemática A **(2010, 1.ª fase)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como A e B são acontecimentos incompatíveis, temos que $A \cap B = \emptyset$, ou seja, $P(A \cap B) = 0$

   Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = P(B)$, calculamos o valor de $P(B)$, substituindo os valores conhecidos:

   $$P(B) = 70\% + 0\% - 30\% = 40\%$$

   Resposta: **Opção B**

2. Considerando que a ordem de seleção dos 3 trabalhadores é irrelevante, por não existir diferenciação dentro do grupo, existem ${}^{10}C_3$ grupos diferentes compostos por 3 dos 10 trabalhadores.
   Como os 3 amigos estão presentes simultaneamente apenas em apenas 1 destes grupos (porque a ordem foi considerada irrelevante), a probabilidade de serem escolhidos, exatamente, os três amigos é $\frac{1}{{}^{10}C_3}$

   Resposta: **Opção C**

3. Como a soma das probabilidades é 1, temos que:

   $$\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + 2a + a = 1 \Leftrightarrow 3a = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3a = \frac{10}{10} - \frac{2}{10} - \frac{5}{10} \Leftrightarrow 3a = \frac{3}{10} \Leftrightarrow a = \frac{3}{30} \Leftrightarrow a = \frac{1}{10}$$

   Logo, temos que $P(X = 2) = 2 \times \frac{1}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, e assim

   $$P(X = 0) = P(X = 2) = \frac{1}{5}$$

   Resposta: **Opção B**

4. Como $h(x) = f(x) + e^x$ e a derivada de uma função afim é o valor do declive (o seu gráfico é uma reta), determinando a expressão da primeira, e depois da segunda derivada, vem:

   $$h'(x) = \big(f(x) + e^x\big)' = \big(f(x)\big)' + (e^x)' = m + e^x$$

   $$h''(x) = \big(m + e^x\big)' = (m)' + (e^x)' = 0 + e^x = e^x$$

   Assim, apenas o gráfico da opção (A) é compatível com a expressão determinada para a segunda derivada.

   Resposta: **Opção A**

5. Como o domínio da função f é $]-\infty,1[$,e a reta de equação $x=1$ é assíntota do gráfico da função, então, de acordo com o gráfico, temos que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$$

E assim

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{3x}{f(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1^-}(3x)}{\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)} = \frac{3\times 1^-}{+\infty} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

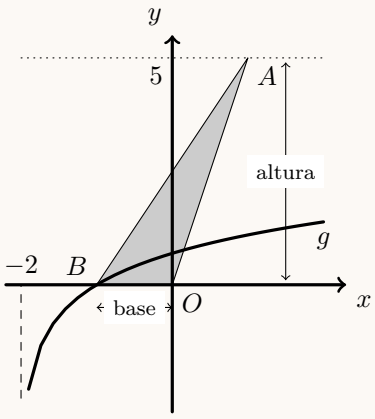
Resposta: **Opção C**

6. Como o ponto B é o ponto de intersecção do gráfico da função g com o eixo das abcissas, podemos determinar a sua abcissa, calculando o zero da função g:

$$g(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x+2)=0 \Leftrightarrow x+2=e^0 \Leftrightarrow x=1-2 \Leftrightarrow x=-1$$

E assim, considerando o lado $[OB]$ do triângulo como a base, a altura será a ordenada do ponto A, (independentemente da sua abcissa), pelo que a área do triângulo é:

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{OB}\times y_A}{2} = \frac{|x_B|\times y_A}{2} = \frac{1\times 5}{2} = \frac{5}{2}$$



Resposta: **Opção A**

7. z é um imaginário puro, se $\arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Assim temos que:

$$\frac{\pi}{8}-\theta = \frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{2}-k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{8}-\frac{4\pi}{8}-k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta = -\frac{3\pi}{8}-k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Atribuíndo valores a k, temos:

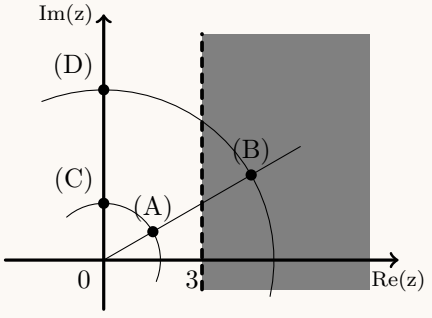
- Se $k=0$, $\theta = -\frac{3\pi}{8}$
- Se $k=-1$, $\theta = -\frac{3\pi}{8}+\pi = -\frac{3\pi}{8}+\frac{8\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}$

Resposta: **Opção D**

8. Os números complexos das opções (A) e (C) não pertencem ao semiplano apresentado, porque as respetivas representações geométricas distam menos de 3 unidades da origem. Como o número complexo da opção (D) está sobre o eixo imaginário, também não pertence ao semiplano apresentado.

Como $\text{Re}\left(3\sqrt{3}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 3\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} = 3\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\times 3}{2} = \frac{9}{2}$

Temos que $\text{Re}\left(3\sqrt{3}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) > 3$



Resposta: **Opção B**

GRUPO II

1.

1.1. Começamos por determinar $(z_1)^7$, recorrendo à fórmula de Moivre, e escrever o resultado na f.a.:

$$(z_1)^7 = \left(\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)^7 = \operatorname{cis}\left(7 \times \frac{\pi}{7}\right) = \operatorname{cis}\pi = -1$$

Como $\overline{z_2} = 2 - i$, temos que:

$$w = \frac{3 - i \times (z_1)^7}{\overline{z_2}} = \frac{3 - i \times (-1)}{2 - i} = \frac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{6 + 3i + 2i + i^2}{2^2 - i^2} = \frac{6 - 1 + 5i}{4 + 1} = \frac{5 + 5i}{5} = 1 + i$$

Escrevendo w na f.t. temos $w = \rho \operatorname{cis}\theta$, onde:

- $\rho = |w| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{1} = 1$; como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \frac{\pi}{4}$

Logo $w = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$

1.2. Como não podemos calcular somas na f.t., devemos escrever z_1 na f.a.:
$z_1 = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{7}\right) = \cos\frac{\pi}{7} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$

Assim temos que:
$z_1 + z_2 = \cos\frac{\pi}{7} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{7} + 2 + i = 2 + \cos\frac{\pi}{7} + i\left(1 + \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right)$

Logo, $|z_1 + z_2|^2 = \left(\sqrt{\left(2 + \cos\frac{\pi}{7}\right)^2 + \left(1 + \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right)^2}\right)^2 = \left(2 + \cos\frac{\pi}{7}\right)^2 + \left(1 + \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right)^2 =$

$$= 2^2 + 2 \times 2 \times \cos\frac{\pi}{7} + \left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^2 + 1^2 + 2 \times 1 \times \operatorname{sen}\frac{\pi}{7} + \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right)^2 =$$

$$= 4 + 4\cos\frac{\pi}{7} + \left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^2 + 1 + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7} + \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right)^2 =$$

$$= 5 + 4\cos\frac{\pi}{7} + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7} + \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right)^2 + \left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^2 = 5 + 4\cos\frac{\pi}{7} + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7} + 1 =$$

$$= 6 + 4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

2.

2.1. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um dos alunos da escola , e os acontecimentos:
C:«O aluno tem computador portátil»
D:«O aluno sabe o nome do diretor»

Temos que $P(C) = \frac{1}{5}$; $P\left(\overline{D}\right) = \frac{1}{2}$ e $P\left(C|\overline{D}\right) = \frac{1}{3}$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

	C	$\overline{C}$	
D	$\frac{1}{30}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{2}$
$\overline{D}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{5}$		1

- $P\left(C|\overline{D}\right) = P\left(\overline{D}\right) \times P(C|\overline{D}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
- $P(C \cap D) = P(C) - P\left(C|\overline{D}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$
- $P(D) = 1 - P\left(\overline{D}\right) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

Assim, calculando a probabilidade de um aluno dessa escola, escolhido ao acaso, não ter computador portátil e saber o nome do diretor, e escrevendo o resultado na forma de fração irredutível, temos

$$P\left(\overline{C} \cap D\right) = P(D) - P(C \cap D) = \frac{1}{2} - \frac{1}{30} = \frac{7}{15}$$

2.2. Como a quinta parte dos alunos tem computador portátil e existem 150 alunos, temos que o número de alunos com computador portátil é $\frac{1}{5} \times 150 = 30$.
Assim, o número de conjuntos de 4 alunos formados a partir destes 30, é ${}^{30}C_4$.
A cada um destes grupos de 4 alunos podem juntar-se ${}^{120}C_2$ pares de alunos sem computador portátil (existem $150 - 30 = 120$ alunos sem computador portátil).
Assim, o número de comissões diferentes que se pode formar com, exatamente, quatro dos alunos que têm computador portátil é

$${}^{30}C_4 \times {}^{120}C_2 = 195\,671\,700$$

3. De acordo com a Regra de Laplace, a probabilidade é calculada pelo quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis, sendo os casos possíveis equiprováveis.
Relativamente ao número de casos possíveis, como existem 18 bolas no saco e são retiradas duas, simultaneamente, podem ser formados 18×17 pares de bolas, considerando a ordenação relevante.
Quanto ao número de casos favoráveis, considerando a ordenação relevante, para garantir a coerência com o cálculo do número de casos possíveis, temos que o par de bolas da mesma cor pode ser formado por duas bolas azuis: 12×11 pares, ou duas bolas vermelhas: 6×5 pares.
Assim temos que o número de casos favoráveis é $12 \times 11 + 6 \times 5$ e a probabilidade de tirar duas bolas do saco, simultaneamente, ao acaso, e elas formarem um par da mesma cor é $\frac{12 \times 11 + 6 \times 5}{18 \times 17}$

4.

4.1. Aplicando as regras operatórias dos logaritmos, vem que, para qualquer valor de $t \in [0,5]$:

$$N(t) = 8\log_4(3t+1)^3 - 8\log_4(3t+1) = 8 \times 3\log_4(3t+1) - 8\log_4(3t+1) =$$

$$= 24\log_4(3t+1) - 8\log_4(3t+1) = 16\log_4(3t+1)$$

4.2. Como $N(t)$ é o número de bilhetes vendidos, em centenas, t horas após o início da venda, e 2400 bilhetes são 24 centenas de bilhetes, o tempo necessário para vender 2400 bilhetes é a solução da equação $N(t) = 24$:

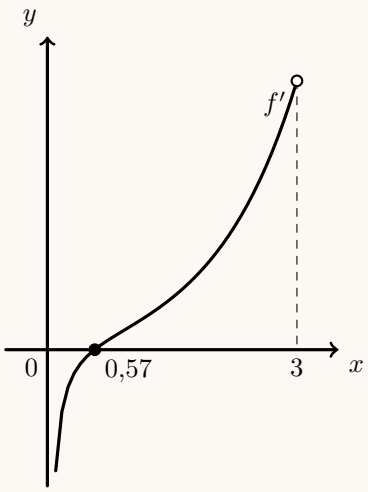
$$N(t) = 24 \Leftrightarrow 16\log_4(3t+1) = 24 \Leftrightarrow \log_4(3t+1) = \frac{24}{16} \Leftrightarrow \log_4(3t+1) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3t+1 = 4^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3t+1 = \sqrt{4^3} \Leftrightarrow 3t+1 = \sqrt{64} \Leftrightarrow 3t+1 = 8 \Leftrightarrow 3t = 8-1 \Leftrightarrow t = \frac{7}{3}$$

Escrevendo o resultado em horas e minutos, temos que $t = \frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$, e como $\frac{1}{3}$ de hora são 20 minutos, temos que serão necessárias 2 horas e 20 minutos para que sejam vendidos 2400 bilhetes.

5. Para estudar a monotonia da função f, devemos analisar o sinal da função f', pelo que podemos traçar o gráfico de f' na calculadora gráfica, numa janela compatível com o domínio da função, para obter o gráfico reproduzido na figura seguinte.

Depois, recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados para um zero de uma função, num intervalo, podemos encontrar a solução da equação $f'(x) = 0$, com aproximação às centésimas: $x \approx 0{,}57$.



Pela análise do gráfico podemos ainda determinar a variação do sinal da função f', para depois relacionar com a monotonia da função f:

x	0		0,57		3
$f'(x)$	n.d.	$-$	0	$+$	n.d.
$f(x)$	n.d.	↘	min	↗	n.d.

Assim temos que a função f:

- é decrescente no intervalo $]0; 0{,}57[$
- é crescente no intervalo $]0{,}57; 3[$
- tem um mínimo absoluto para $x \approx 0{,}57$

6.

6.1. Como o domínio da função é f é $]-\infty, 2\pi]$, o comportamento assintótico do gráfico é verificado quando $x \to -\infty$, pelo que, pela definição de assíntota, $y = ax + b$ é uma assíntota do gráfico de f se

$$\lim_{x\to-\infty}\Big(f(x) - (ax+b)\Big) = 0$$

Calculando o valor do limite, temos

$$\lim_{x\to-\infty}\Big(f(x) - (ax+b)\Big) = \lim_{x\to-\infty}(ax + b + e^x - ax - b)) = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$$

Pelo que podemos concluir que a reta de equação $y = ax + b$ é uma assíntota oblíqua do gráfico de f

6.2. Para que a função f seja contínua em $x=0$, tem que se verificar $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

- $f(0)=a(0)+b+e^0=0+b+1=b+1$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(ax+b+e^x)=a(0)+b+e^0=0+b+1=b+1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x-\operatorname{sen}(2x)}{x}\right)=\dfrac{0-\operatorname{sen}0}{0}=\dfrac{0}{0}$ (indeterminação)

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{x}-\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(1-\frac{2\times\operatorname{sen}(2x)}{2\times x}\right)=1-\lim_{x\to 0^+}\left(2\times\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}\right)=$$

$$=1-2\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}\underset{(1)}{=}1-2\underbrace{\lim_{y\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}=1-2\times 1=1-2=-1$$

(1) (fazendo $y=2x$, se $x\to 0^+$ então $y\to 0^+$)

Assim, podemos determinar o valor de b:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)\iff b-1=-1\iff b=-2$$

7.

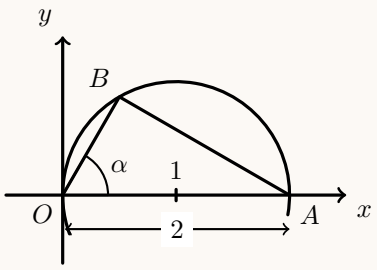
7.1. Como o triângulo está inscrito numa semicircunferência é um triângulo retângulo. Sabemos que a hipotenusa coincide com o diâmetro e tem comprimento 2 ($\overline{OA}=2$).

Assim, recorrendo à definição de seno temos:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}\iff \operatorname{sen}\alpha=\frac{\overline{AB}}{2}\iff \overline{AB}=2\operatorname{sen}\alpha$$

Analogamente, pela definição de cosseno, vem:

$$\cos\alpha=\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}\iff \cos\alpha=\frac{\overline{OB}}{2}\iff \overline{OB}=2\cos\alpha$$



Logo, o perímetro do triângulo é:

$$P_{[OAB]}=\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{OB}=2+2\operatorname{sen}\alpha+2\cos\alpha=2(1+\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha)$$

Ou seja, para cada valor de $\alpha\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, o perímetro do triângulo $[OAB]$ é dado, em função de α, por

$$f(\alpha)=2(1+\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha)$$

7.2. Determinando a expressão da derivada da função, vem:

$$f'(\alpha)=\big(2(1+\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha)\big)'=2\big((1)'+(\cos\alpha)'+(\operatorname{sen}\alpha)'\big)=2(0-\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)=2(\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha)$$

Assim: $f'(\alpha)=0\iff 2(\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha)=0\iff \cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha=0\iff \cos\alpha=\operatorname{sen}\alpha$

Logo, como $\alpha\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, sabemos que $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ é a única solução da equação $f'(\alpha)=0$, pelo que podemos estudar a variação do sinal de f' para relacionar com a monotonia de f:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	n.d.	+	0	−	n.d.
$f(x)$	n.d.	↗	Máx	↘	n.d.

Logo, o maximizante de f, ou seja, o valor de α para o qual o perímetro do triângulo é máximo, é $\dfrac{\pi}{4}$

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/2.ª Fase 12 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2010

VERSÃO 1

Na folha de respostas, indique, de forma legível, a versão da prova.

A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens do Grupo I.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica, sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva, de forma legível, a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção correcta.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 4, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\,\pi\, r^3$
(r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ \operatorname{cis} \dfrac{\theta + 2k\pi}{n},\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção seleccionada.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Uma caixa contém bolas indistinguíveis ao tacto e de duas cores diferentes: azul e roxo.

Sabe-se que:

- o número de bolas azuis é 8
- extraindo-se, ao acaso, uma bola da caixa, a probabilidade de ela ser azul é igual a $\frac{1}{2}$

Quantas bolas roxas há na caixa?

(A) 16 **(B)** 12 **(C)** 8 **(D)** 4

2. Considere todos os números de cinco algarismos que se podem formar com os algarismos $5, 6, 7, 8$ e 9.

De entre estes números, quantos têm, exactamente, três algarismos 5?

(A) ${}^5C_3 \times {}^4A_2$ **(B)** ${}^5C_3 \times 4^2$ **(C)** ${}^5A_3 \times 4^2$ **(D)** ${}^5A_3 \times {}^4C_2$

3. Na sequência seguinte, reproduzem-se os três primeiros elementos e os três últimos elementos de uma linha do Triângulo de Pascal.

$$1 \quad 15 \quad 105 \quad \ldots \quad 105 \quad 15 \quad 1$$

São escolhidos, ao acaso, dois elementos dessa linha.

Qual é a probabilidade de a soma desses dois elementos ser igual a 105?

(A) 1 **(B)** $\frac{1}{60}$ **(C)** $\frac{1}{120}$ **(D)** 0

4. De uma função h, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- h é uma função par;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}(h(x)-2x)=0$

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)$?

(A) $+\infty$ **(B)** -2 **(C)** 0 **(D)** $-\infty$

5. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x)=\begin{cases}e^x & \text{se } x\leq 0\\ \ln x & \text{se } x>0\end{cases}$$

Considere a sucessão de termo geral $u_n=\dfrac{1}{n}$

Qual é o valor de $\lim\limits_{n\to+\infty}g(u_n)$?

(A) $+\infty$ **(B)** 1 **(C)** 0 **(D)** $-\infty$

6. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f', primeira derivada de f

Seja $a\in\mathbb{R}^+$ um ponto do domínio de f, tal que $f'(a)=0$

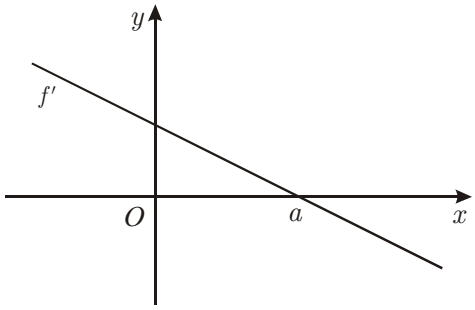


Figura 1

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A função f tem um mínimo para $x=a$

(B) A função f tem um ponto de inflexão para $x=a$

(C) A função f é crescente em $]0,\ a[$

(D) A função f é decrescente em $\mathbb{R}$

7. A Figura 2 representa um pentágono $[ABCDE]$ no plano complexo.

Os vértices do pentágono são as imagens geométricas das raízes de índice n de um número complexo w

O vértice A tem coordenadas $(1, 0)$

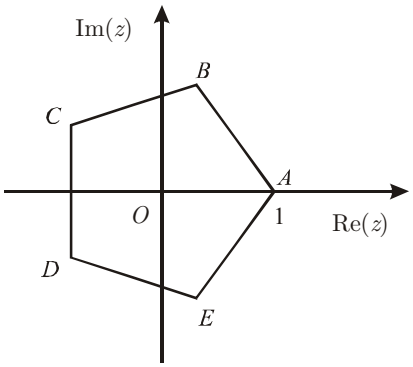


Figura 2

Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o vértice D do pentágono?

(A) $5\,\mathrm{cis}\left(\frac{6\pi}{5}\right)$ **(B)** $\mathrm{cis}\left(\frac{6\pi}{5}\right)$ **(C)** $\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ **(D)** $\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)$

8. Seja w o número complexo cuja imagem geométrica está representada na Figura 3.

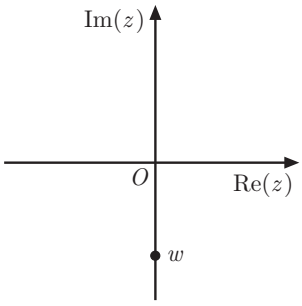


Figura 3

A qual das rectas seguintes pertence a imagem geométrica de w^6 ?

(A) Eixo real

(B) Eixo imaginário

(C) Bissectriz dos quadrantes ímpares

(D) Bissectriz dos quadrantes pares

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \sqrt{2}\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e $z_2 = 3$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

1.1. Determine o número complexo $w = \frac{{z_1}^4 + 4i}{i}$

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

1.2. Escreva uma condição, em $\mathbb{C}$, que defina, no plano complexo, a circunferência que tem centro na imagem geométrica de z_2 e que passa na imagem geométrica de z_1

2. A Figura 4 e a Figura 5 representam, respectivamente, as planificações de dois dados cúbicos equilibrados, A e B.

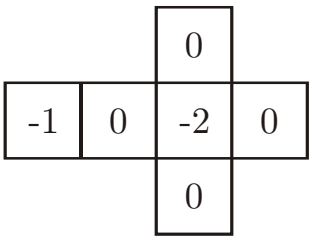


Figura 4

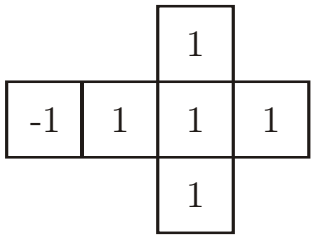


Figura 5

Lançam-se, simultaneamente, os dois dados.

2.1. Seja X a variável aleatória «soma dos números saídos nas faces voltadas para cima, em cada um dos dados».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X

Apresente as probabilidades na forma de fracção.

2.2. Considere que o número da face voltada para cima no dado A (Figura 4) é a abcissa de um ponto Q do referencial o.n. xOy, e que o número da face voltada para cima no dado B (Figura 5) é a ordenada desse ponto Q.

Considere agora os acontecimentos:

J: «o número saído no dado A é negativo»;

L: «o ponto Q pertence ao terceiro quadrante».

Indique o valor de $P(L \mid J)$, sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada.

Apresente o resultado na forma de fracção.

Numa composição, explique o seu raciocínio, começando por referir o significado de $P(L \mid J)$ no contexto da situação descrita.

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos tais que $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ e $P(B) \neq 0$

Mostre que $\dfrac{P(A \cup B)}{P(B)} - P(\overline{A} \mid B) = \dfrac{P(A)}{P(B)}$

(P designa probabilidade; $\overline{A}$ designa o acontecimento contrário de A; $P(\overline{A} \mid B)$ designa a probabilidade de $\overline{A}$, dado B)

4. Considere a função f, de domínio $]0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 3x}{x} & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ \\ \dfrac{1}{5}x - \ln x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Resolva os itens **4.1.** e **4.2.**, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

4.1. Estude a função f quanto à existência de assimptotas oblíquas.

4.2. Mostre que a função f tem um extremo relativo no intervalo $]2, +\infty[$

4.3. Determine a área do triângulo $[ABC]$, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Sabe-se que:

- A, B e C são pontos do gráfico da função f
- A e B são os pontos cujas abcissas são as soluções, no intervalo $]0, 2]$, da equação $f(x) = f(15)$
- C é o ponto cuja ordenada é o mínimo da função f, no intervalo $]0, 2]$, e cuja abcissa pertence ao intervalo $]0, 2]$

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as coordenadas dos pontos A, B e C, com arredondamento às centésimas;
- apresentar o resultado pedido, com arredondamento às décimas.

5. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x + e^{2x^3 - 1}$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

5.1. Mostre que $f(x) = 1{,}5$ tem, pelo menos, uma solução em $\left]-2, -1\right[$

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

5.2. Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = 0$

6. Um depósito de combustível tem a forma de uma esfera.

A Figura 6 e a Figura 7 representam dois cortes do mesmo depósito, com alturas de combustível distintas.

Os cortes são feitos por um plano vertical que passa pelo centro da esfera.

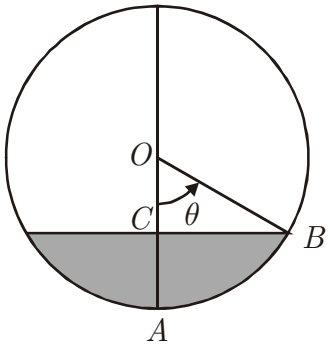


Figura 6

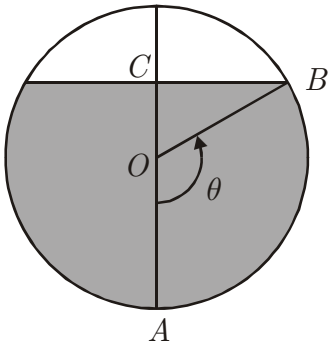


Figura 7

Sabe-se que:

- o ponto O é o centro da esfera;
- a esfera tem 6 metros de diâmetro;
- a amplitude θ, em radianos, do arco AB é igual à amplitude do ângulo ao centro AOB correspondente.

A altura $\overline{AC}$, em metros, do combustível existente no depósito é dada, em função de θ, por h, de domínio $[0, \pi]$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

6.1. Mostre que $h(\theta) = 3 - 3\cos(\theta)$, para qualquer $\theta \in]0, \pi[$

6.2. Resolva a condição $h(\theta) = 3, \quad \theta \in]0, \pi[$

Interprete o resultado obtido no contexto da situação apresentada.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

GRUPO II

1.

1.1. ..... 15 pontos
1.2. ..... 15 pontos

2.

2.1. ..... 15 pontos
2.2. ..... 15 pontos

3. ..... 15 pontos

4.

4.1. ..... 10 pontos
4.2. ..... 10 pontos
4.3. ..... 15 pontos

5.

5.1. ..... 15 pontos
5.2. ..... 10 pontos

6.

6.1. ..... 15 pontos
6.2. ..... 10 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/2.ª Fase 11 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2010

COTAÇÕES

GRUPO I

..... (8 × 5 pontos)..... **40 pontos**

GRUPO II

1.
1.1. ..... 15 pontos
1.2. ..... 15 pontos

2.
2.1. ..... 15 pontos
2.2. ..... 15 pontos

3. ..... 15 pontos

4.
4.1. ..... 10 pontos
4.2. ..... 10 pontos
4.3. ..... 15 pontos

5.
5.1. ..... 15 pontos
5.2. ..... 10 pontos

6.
6.1. ..... 15 pontos
6.2. ..... 10 pontos

160 pontos

TOTAL..... **200 pontos**

A classificação da prova deve respeitar integralmente os critérios gerais e os critérios específicos a seguir apresentados.

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos de classificação apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro, previsto na grelha de classificação.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos. No entanto, em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar, inequivocamente, o item a que diz respeito.

Se o examinando responder a um mesmo item mais do que uma vez, não eliminando, inequivocamente, a(s) resposta(s) que não deseja que seja(m) classificada(s), deve ser considerada apenas a resposta que surgir em primeiro lugar.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova (Versão 1 ou Versão 2) implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de escolha múltipla.

Nos itens de escolha múltipla, a cotação total do item é atribuída às respostas que apresentem, de forma inequívoca, a única opção correcta.

São classificadas com zero pontos as respostas em que é assinalada:

– uma opção incorrecta;

– mais do que uma opção.

Não há lugar a classificações intermédias.

Os critérios de classificação dos itens de resposta aberta apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação. No caso de, ponderados todos os dados contidos nos descritores, permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

Nos itens de resposta aberta, com cotação igual ou superior a quinze pontos e que impliquem a produção de um texto, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea das competências específicas da disciplina e das competências de comunicação escrita em língua portuguesa. A avaliação das competências de comunicação escrita em língua portuguesa contribui para valorizar a classificação atribuída ao desempenho no domínio das competências específicas da disciplina. Esta valorização é cerca de 10% da cotação do item e faz-se de acordo com os níveis de desempenho descritos no quadro seguinte.

Níveis	Descritores
3	Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
2	Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
1	Composição sem estruturação aparente, com erros graves de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é de zero pontos. Neste caso, não é classificado o domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

Havendo escolas em que os alunos já contactam com as novas regras ortográficas, uma vez que o Acordo Ortográfico de 1990 já foi ratificado e dado que qualquer cidadão, nesta fase de transição, pode optar pela ortografia prevista quer no Acordo de 1945, quer no de 1990, são consideradas correctas, na classificação das provas de exame nacional, as grafias que seguirem o que se encontra previsto em qualquer um destes normativos.

As respostas aos itens de resposta aberta que apresentem pontos de vista diferentes dos mencionados nos critérios específicos de classificação devem ser classificadas, se o seu conteúdo for considerado cientificamente válido e estiver adequado ao solicitado. Nestes casos, os elementos cientificamente válidos devem ser classificados, seguindo-se procedimentos análogos aos previstos nos descritores apresentados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar em situações não descritas anteriormente.

Situação	Classificação
1. Classificação de um item cujo critério se apresenta organizado por etapas.	A cotação indicada para cada etapa é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A classificação da resposta resulta da soma das pontuações das diferentes etapas, à qual se subtrai ou subtraem, eventualmente, um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 14 e/ou 19.
2. Pontuação de uma etapa dividida em passos.	A cotação indicada para cada passo é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A classificação da etapa resulta da soma das pontuações dos diferentes passos.
3. Classificação de um item ou pontuação de uma etapa cujo critério se apresenta organizado por níveis de desempenho.	A resposta é enquadrada numa das descrições apresentadas. À classificação/pontuação correspondente subtraem-se, eventualmente, um, dois ou três pontos, de acordo com o previsto nas situações 9, 10 e/ou 19.
4. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite e classificado qualquer processo de resolução cientificamente correcto. O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante a distribuição da cotação do item pelas etapas* percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.
5. Apresentação apenas do resultado final, embora a resolução do item exija cálculos e/ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
6. Utilização de processos de resolução que não respeitam as instruções dadas [exemplo: «usando métodos analíticos»].	A etapa em que a instrução não é respeitada é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
7. Ausência de apresentação dos cálculos e/ou das justificações necessárias à resolução de uma etapa*.	A etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
8. Ausência de apresentação explícita de uma dada etapa.	Se a resolução apresentada permitir perceber, inequivocamente, que a etapa foi percorrida, a mesma é pontuada com a cotação total para ela prevista.
9. Transposição incorrecta de dados do enunciado.	Se o grau de dificuldade da resolução não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.

* Em situações em que o critério é aplicável tanto a **etapas** como a **passos**, utiliza-se apenas o termo «etapas», por razões de simplificação da apresentação.

Situação	Classificação
10. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre.
11. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
12. Ocorrência de um erro na resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada de acordo com o erro cometido. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido: – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
13. Resolução incompleta de uma etapa.	Se, à resolução da etapa, faltar apenas o passo final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
14. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação de um arredondamento incorrecto.	É subtraído um ponto à classificação total da resposta, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
15. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fracção, e a resposta apresenta-se na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final [exemplo: «15» em vez de «15 metros»].	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a cotação total para ela prevista.
17. Apresentação do resultado final com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exacto.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
18. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, e/ou apresentação do resultado final incorrectamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
19. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à classificação total da resposta, excepto: – se as incorrecções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a **8.** ..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

As respostas correctas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	C	B	D	A	D	C	B	A
Versão 2	B	C	A	D	A	B	C	D

GRUPO II

É de aceitar qualquer processo de resolução cientificamente correcto, ainda que não esteja previsto nestes critérios específicos, nem no Programa (ver critério 4 dos critérios gerais).

1.1. ..... **15 pontos**

Escrever o numerador da fracção na forma algébrica ..... 5 pontos

Escrever $z_1{}^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 \operatorname{cis}(\pi)$ ..... 3 pontos

Escrever $4 \operatorname{cis}(\pi) = -4$ ..... 1 ponto

Obter $-4 + 4i$ ..... 1 ponto

Calcular $\dfrac{-4 + 4\,i}{i}$ na forma algébrica ..... 5 pontos

Multiplicar ambos os termos da fracção por $(-i)$ (ou equivalente) 2 pontos

Obter $4 + 4i$ ..... 3 pontos

Calcular $4 + 4\,i$ na forma trigonométrica ..... 4 pontos

Determinar $\left|w\right|$ ..... 2 pontos

Indicar $\arg w = \dfrac{\pi}{4}$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Escrever o resultado na forma pedida $\left(w = \sqrt{32} \operatorname{cis} \dfrac{\pi}{4}\right)$ ..... 1 ponto

1.2. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Calcular o raio da circunferência ..... 10 pontos

Escrever z_1 na forma algébrica ..... 4 pontos

Calcular $z_2 - z_1$ ou $z_1 - z_2$ ..... 3 pontos

Calcular $\left|z_2 - z_1\right|$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

Apresentar a condição pedida (**ver nota**)..... 5 pontos

2.º Processo:

Representar a imagem geométrica de z_2 no plano ou indicar as coordenadas.. 1 ponto

Representar a imagem geométrica de z_1 no plano ou indicar as coordenadas .. 5 pontos

Determinar a distância entre as imagens geométricas de z_1 e de z_2 $(\sqrt{5})$ ... 4 pontos

Apresentar a condição pedida (**ver nota**)..... 5 pontos

Nota – Caso o examinando não determine o raio da circunferência, mas escreva a condição $\left|z - z_2\right| = r$, ou equivalente, a pontuação a atribuir, nesta etapa, é de 2 pontos.

Caso o examinando escreva $\left|z - z_2\right| \leq \sqrt{5}$, ou equivalente, a pontuação a atribuir, nesta etapa, é de 3 pontos.

2.1. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Construir uma tabela de dupla entrada para a variável X (ou equivalente)..... 5 pontos

Indicar os valores que a variável X pode tomar $(\{-3, -2, -1, 0, 1\})$ ..... 3 pontos

Indicar a probabilidade de cada um dos valores da variável X ..... 5 pontos

Apresentar a tabela de distribuição de probabilidades (**ver nota**) ..... 2 pontos

2.º Processo:

Indicar os valores que a variável X pode tomar $(\{-3, -2, -1, 0, 1\})$ ..... 3 pontos

Calcular a probabilidade de cada um dos valores da variável X $(2+2+2+2+2)$. 10 pontos

Apresentar a tabela de distribuição de probabilidades (**ver nota**) ..... 2 pontos

Nota – A pontuação relativa a esta etapa só é atribuída se, na etapa anterior, não tiverem sido atribuídos zero pontos.

2.2. ..... **15 pontos**

A composição deve abordar os seguintes pontos:

1. Referir que a probabilidade pedida é $\frac{1}{6}$ (ou equivalente).

2. Explicar o significado de $P(L \mid J)$ no contexto da situação descrita (probabilidade de o ponto Q pertencer ao 3.º quadrante, sabendo que o número saído no dado A é negativo) (**ver nota**).

3. Referir que, para Q pertencer ao 3.º quadrante, o número saído no dado B tem de ser -1 (**ver nota**).

Na tabela seguinte, indica-se como deve ser classificada a resposta a este item, de acordo com os níveis de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa, descritos nos critérios gerais, e os níveis de desempenho no domínio específico da disciplina.

Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina			Descritores do nível de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa – Níveis*		
			1	2	3
Níveis	4	A composição aborda, correctamente, os três pontos.	13	14	15
	3	A composição aborda, correctamente, apenas dois dos três pontos.	9	10	11
	2	A composição aborda, correctamente, apenas o ponto 2 ou apenas o ponto 3.	5	6	7
	1	A composição aborda, correctamente, apenas o ponto 1.	3	3	3

* Descritores apresentados nos critérios gerais.

Nota – Se o examinando apresentar uma explicação equivalente, considerada cientificamente válida, os elementos de resposta devem ser pontuados seguindo-se os mesmos procedimentos previstos nos descritores apresentados.

3. ..... **15 pontos**

Apresenta-se, a seguir, um exemplo de resposta (**ver nota**).

$$\frac{P(A \cup B)}{P(B)} - P(\overline{A} \mid B) = \frac{P(A \cup B)}{P(B)} - \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{\big(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\big) - \big(P(B) - P(A \cap B)\big)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

De acordo com o exemplo apresentado, a resposta do examinando deve incluir a aplicação das propriedades seguintes:

- propriedade relativa à probabilidade condicionada $\left(P(\overline{A} \mid B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)}\right)$
- propriedade relativa à probabilidade da reunião de acontecimentos $\big(P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)\big)$
- propriedade relativa à probabilidade da intersecção do acontecimento contrário de A com o acontecimento B ou um diagrama que a ilustre claramente.

Níveis	Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina	Pontuação
4	O examinando aplica, correctamente, as três propriedades e conclui o pretendido.	15
3	O examinando aplica, correctamente, as três propriedades, mas não conclui o pretendido.	11
2	O examinando aplica, correctamente, apenas duas propriedades.	7
1	O examinando aplica, correctamente, apenas uma propriedade.	3

Nota – Se o examinando apresentar uma resposta equivalente, considerada cientificamente válida, os elementos de resposta devem ser pontuados seguindo-se os mesmos procedimentos previstos nos descritores apresentados.

4.1. ..... **10 pontos**

Estudar a função f quanto à existência de assimptotas oblíquas do seu gráfico (**ver nota**).

Determinar m ..... 5 pontos

Escrever $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ..... 1 ponto

Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ..... 4 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{\ln x}{x}\right)$ ..... 1 ponto

Referir que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ ..... 2 pontos

Obter $m = \dfrac{1}{5}$ ..... 1 ponto

Averiguar a existência de b ..... 3 pontos

Escrever $b = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - \dfrac{1}{5}x\right)$ ..... 1 ponto

Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - \dfrac{1}{5}x\right)$ ..... 2 pontos

Concluir que o gráfico de f não tem assimptotas oblíquas ..... 2 pontos

Nota – Se o examinando calcular outro(s) limite(s) para além dos indicados, a classificação a atribuir a este item deve ser desvalorizada em 2 pontos. Se, da aplicação desta nota, resultar uma classificação negativa, este item deve ser classificado com zero pontos.

4.2. ..... **10 pontos**

Determinar f' ..... 3 pontos

Determinar $\left(\frac{1}{5}x\right)'$ ..... 1 ponto

Determinar $(\ln x)'$ ..... 1 ponto

Escrever a expressão de f' ..... 1 ponto

Determinar o zero de f' ..... 2 pontos

Estudar o sinal de f', com recurso a um quadro (**ver nota**) ..... 4 pontos

Primeira linha do quadro ..... 1 ponto

Sinal de f' ..... 1 ponto

Relação entre o sinal de f' e a monotonia de f ..... 1 ponto

Assinalar o extremo relativo de f ..... 1 ponto

Concluir que f tem um extremo relativo ..... 1 ponto

Nota – Se o examinando não recorrer a um quadro, mas apresentar uma justificação equivalente, a pontuação a atribuir, nesta etapa, não deve ser desvalorizada.

4.3. ..... **15 pontos**

Calcular $f(15)$ $(3 - \ln 15)$ ..... 2 pontos

Representar graficamente f (**ver nota**) ..... 2 pontos

Indicar as coordenadas do ponto A $\big((0{,}50\ ,\ 0{,}29)\big)$ ..... 2 pontos

Indicar as coordenadas do ponto B $\big((1{,}75\ ,\ 0{,}29)\big)$ ..... 2 pontos

Indicar as coordenadas do ponto C $\big((1{,}00\ ,\ -0{,}28)\big)$ ..... 1 ponto

Calcular a área do triângulo $[ABC]$ ..... 6 pontos

Determinar $\overline{AB}$ ..... 2 pontos

Determinar a altura do triângulo $[ABC]$ relativa à base $[AB]$.. 2 pontos

Apresentar o resultado ..... 2 pontos

Nota – Se o examinando apresentar um gráfico que não respeite o domínio de f, a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser desvalorizada em 1 ponto.

5.1. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Justificar que a função f é contínua em $[-2, -1]$ (**ver notas 1** e **2**) ..... 4 pontos

Justificar que $f(-1) < 1{,}5 < f(-2)$ ..... 6 pontos

- Calcular $f(-2)$ ..... 2 pontos
- Calcular $f(-1)$ ..... 2 pontos
- Escrever $f(-1) < 1{,}5 < f(-2)$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Concluir o pretendido (**ver nota 3**) ..... 5 pontos

2.º Processo:

Se o examinando considerar $g(x) = f(x) - 1{,}5$

Justificar que a função g é contínua em $[-2, -1]$ (**ver notas 1** e **2**) ..... 4 pontos

Justificar que $g(-1) \times g(-2) < 0$ (ou equivalente) ..... 6 pontos

- Calcular $g(-2)$ ..... 2 pontos
- Calcular $g(-1)$ ..... 2 pontos
- Concluir que $g(-1) \times g(-2) < 0$ ..... 2 pontos

Concluir o pretendido (**ver nota 3**) ..... 5 pontos

Notas:

1. Se o examinando não referir que a função é contínua em $[-2, -1]$, mas afirmar que a função é contínua em todo o seu domínio, a pontuação a atribuir, nesta etapa, não deve ser desvalorizada.
2. Se o examinando referir que a função é contínua em $]-2, -1[$, a pontuação a atribuir, nesta etapa, é de zero pontos.
3. Se o examinando não referir que a conclusão resulta do Teorema de Bolzano ou do seu corolário, a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser desvalorizada em 2 pontos.

5.2. ..... **10 pontos**

Determinar f' ..... 4 pontos

- Determinar $(-x)'$ ..... 1 ponto
- Determinar $(e^{2x^3-1})'$ ..... 2 pontos
- Escrever a expressão de f' ..... 1 ponto

Calcular $f'(0)$ ..... 2 pontos

Calcular $f(0)$ ..... 2 pontos

Escrever a equação reduzida da recta pedida $(y = -x + e^{-1}$ ou equivalente$)$ 2 pontos

6.1. ..... **15 pontos**

Mostrar que $h(\theta) = 3 - 3\cos(\theta)$, para $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ (**ver nota**)..... 7 pontos

Justificar que $\overline{CO} = 3\cos(\theta)$ ..... 4 pontos

Indicar $\overline{AO}\ (3\,\mathrm{m})$ ..... 1 ponto

Concluir que $h(\theta) = 3 - 3\cos(\theta)$ ..... 2 pontos

Mostrar que $h(\theta) = 3 - 3\cos(\theta)$, para $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ ..... 7 pontos

Escrever $\overline{CO}$ em função de $\cos(\pi - \theta)$ ..... 2 pontos

Escrever $\overline{CO}$ em função de $\cos(\theta)$ ..... 2 pontos

Indicar $\overline{AO}\ (3\,\mathrm{m})$ ..... 1 ponto

Concluir que $h(\theta) = 3 - 3\cos(\theta)$ ..... 2 pontos

Concluir que $h(\theta) = 3 - 3\cos(\theta)$, $\forall\ \theta \in \left]0, \pi\right[$ ..... 1 ponto

Nota – Se o examinando considerar $\theta \in \left]0, \pi\right[$ em vez de $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, esta etapa deve ser pontuada com 5 pontos (3 + 1 + 1).

6.2. ..... **10 pontos**

Escrever $3 - 3\cos(\theta) = 3$ ..... 2 pontos

Obter $\cos(\theta) = 0$ ..... 2 pontos

Concluir que $\theta = \frac{\pi}{2}$ ..... 3 pontos

Interpretar o valor obtido, no contexto da situação apresentada (**ver nota**)..... 3 pontos

Nota – Apresenta-se, a seguir, um exemplo de uma interpretação correcta: «Se o depósito tem 3 metros de altura de combustível, o ângulo θ tem amplitude igual a $\frac{\pi}{2}$ radianos ».

Exame nacional de Matemática A (2010, 2.ª fase)

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como só existem bolas azuis e roxas, e a probabilidade de extrair uma bola da caixa, e ela ser azul é igual a $\frac{1}{2}$, então existem tantas bolas azuis como roxas, ou seja, existem 8 bolas roxas na caixa.

   Resposta: **Opção C**

2. Como os números têm cinco algarismos, e três deles são o algarismo «5» podemos calcular o número de formas diferentes de dispor os 3 algarismos «5» nas 5 posições do número (${}^5C_3$, não se considera relevante a ordem, por serem algarismos iguais).
   Assim, por cada disposição dos algarismos «5» existem 4 hipóteses («6», «7», «8» e o «9») para ocupar a primeira posição livre do algarismo, e ainda outras 4 para a segunda posição livre do algarismo.
   Logo, a quantidade de números deste tipo que tem exatamente 3 algarismos «5» é

   $$ {}^5C_3 \times 4 \times 4 = {}^5C_3 \times 4^2 $$

   Resposta: **Opção B**

3. Somando quaisquer dois números, dos que estão reproduzidos no enunciado, o resultado é sempre um número diferente de 105.
   Como os restantes números da mesma linha do triângulo de Pascal são todos maiores que 105, somando quaisquer dois deles, ou um deles com um dos elementos reproduzidos, o resultado será sempre superior a 105.
   Assim, não existe qualquer par de elementos desta linha do triângulo de Pascal, cuja soma seja 105, ou seja, a probabilidade da soma de dois elementos desta linha do triângulo de Pascal ser igual a 105, é nula.

   Resposta: **Opção D**

4. Como $\lim\limits_{x\to+\infty}(h(x)-2x)=0$, temos que

   $$ \lim_{x\to+\infty}(h(x)-2x)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}h(x)-\lim_{x\to+\infty}(2x)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x) \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}(h(x))=+\infty $$

   Como a função h é par, temos que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $f(-x)=f(x)$ e assim,

   $$ \lim_{x\to-\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}h(x)=+\infty $$

   Resposta: **Opção A**

5. Como $\lim u_n = \lim\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{+\infty} = 0^+$, então:

$$\lim_{n\to+\infty} g(u_n) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln x = \ln 0^+ = -\infty$$

Resposta: **Opção D**

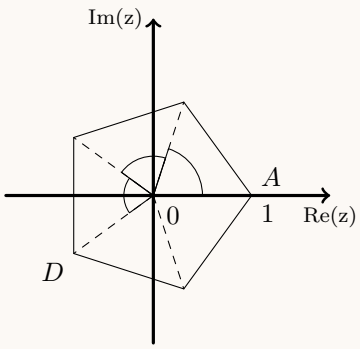
6. Representando a informação do gráfico sob a forma de uma tabela, temos:

x		0		a	
$f'(x)$	+	+	+	0	−
$f(x)$	↗		↗	Máx	↘

Assim, podemos verificar que a função f é crescente em $]0, a[$

Resposta: **Opção C**

7. Os vértices do pentágono são a representação geométrica de 5 números complexos, que são raízes de índice 5 do mesmo número complexo. Sejam z e w os números complexos que têm por imagens geométricas os pontos A e D, respetivamente.



Como o ponto A tem de coordenadas (1,0), temos que $z = \text{cis}\,0$.

Como $|z| = |w|$ e $\arg(w) = 3 \times \frac{2\pi}{5} = \frac{6\pi}{5}$, porque os vértices do pentágono dividem o ângulo giro em 5 partes iguais, temos que $w = \text{cis}\,\frac{6\pi}{5}$

Resposta: **Opção B**

8. Como a representação geométrica de w está sobre a parte negativa do eixo imaginário, sabemos que $w = \rho\,\text{cis}\,\frac{3\pi}{2}$.

Assim, recorrendo à fórmula de Moivre, temos que $w^6 = \rho^6\,\text{cis}\left(6 \times \frac{3\pi}{2}\right) = \rho^6\,\text{cis}\,\frac{18\pi}{2} = \rho^6\,\text{cis}\,(9\pi)$

Descontando as voltas completas, temos que $w^6 = \rho^6\,\text{cis}\,(9\pi) = \rho^6\,\text{cis}\,(9\pi - 8\pi) = \rho^6\,\text{cis}\,\pi$, logo podemos concluir que w^6 é um número real negativo.

Resposta: **Opção A**

GRUPO II

1.

1.1. Começamos por determinar z^4, recorrendo à fórmula de Moivre:

$$z^4 = \left(\sqrt{2}\,\text{cis}\,\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^4 = (\sqrt{2})^4\,\text{cis}\,\left(4\times\frac{\pi}{4}\right) = 4\,\text{cis}\,\pi = -4+0i = -4$$

Assim temos que:

$$w = \frac{z^4+4i}{i} = \frac{-4+4i}{i} = \frac{(-4+4i)\times i}{i\times i} = \frac{-4i+4i^2}{i^2} = \frac{-4-4i}{-1} = 4+4i$$

Escrevendo w na f.t. temos $w = \rho\,\text{cis}\,\theta$, onde:

- $\rho = |w| = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{4^2\times 2} = 4\sqrt{2}$
- $\text{tg}\,\theta = \frac{1}{1} = 1$; como $\text{sen}\,\theta > 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \frac{\pi}{4}$

Logo $w = 4\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4}$

1.2. Começamos por escrever z_1 na f.a.:

$$z_1 = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{2}{2}+\frac{2}{2}i = 1+i$$

O raio da da circunferência é $|z_2-z_1|$, ou seja, a distância entre as representações geométricas dos dois números complexos. Logo temos que :

$|z_2-z_1| = |3-(1+i)| = |3-1-i| = |2-i| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

Assim a circunferência que tem centro na imagem geométrica de z_2 e que passa na imagem geométrica de z_1 é definida por:

$$|z-z_2| = |z_2-z_1| \quad\Leftrightarrow\quad |z-3| = \sqrt{5}$$

2.

2.1. Organizando todas as somas possíveis numa tabela, temos:

Dado B \ Dado A	0	0	0	0	-1	-2
-1	-1	-1	-1	-1	-2	-3
1	1	1	1	1	0	-1
1	1	1	1	1	0	-1
1	1	1	1	1	0	-1
1	1	1	1	1	0	-1
1	1	1	1	1	0	-1

Logo, pela observação da tabela, podemos observar os valores possíveis para a soma e as respetivas probabilidades:

- $P(X=-3) = \frac{1}{36}$
- $P(X=-2) = \frac{1}{36}$
- $P(X=-1) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$
- $P(X=0) = \frac{5}{36}$
- $P(X=1) = \frac{4\times 5}{36} = \frac{4\times 5}{4\times 9} = \frac{5}{9}$

E assim, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	-3	-2	-1	0	1
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{9}$

2.2. No contexto da situação descrita, $P(L|J)$ é a probabilidade de que lançando os dois dados e usando os números indicados pelos dados como coordenadas do ponto Q, este ponto pertença ao terceiro quadrante, sabendo que o número indicado pelo dado A é negativo.
Como é sabido que a abcissa do ponto Q é negativa, este ponto pertence ao terceiro quadrante se a ordenada também for negativa, o que ocorre 1 em cada 6 vezes, visto que das 6 faces do dado B, apenas uma tem um número negativo inscrito.
Assim, usando a Regra de Laplace, e escrevendo o resultado na forma de fração, temos

$$P(L|J) = \frac{1}{6}$$

3. Temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{P(A\cup B)}{P(B)} - P\left(\overline{A}|B\right) &= \frac{P(A\cup B)}{P(B)} - \frac{P\left(\overline{A}\cap B\right)}{P(B)} && \text{Definição: } P(X|Y) = \frac{P(X\cap Y)}{P(Y)} \\
&= \frac{P(A\cup B) - P\left(\overline{A}\cap B\right)}{P(B)} \\
&= \frac{P(A\cup B) - \Big(P(B) - P(A\cap B)\Big)}{P(B)} && \text{Teorema: } P\left(X\cap\overline{Y}\right) = P(X) - P(X\cap Y) \\
&= \frac{P(A\cup B) - P(B) + P(A\cap B)}{P(B)} \\
&= \frac{P(A)}{P(B)} && \text{Teorema: } P(X) = P(X\cup Y) + P(X\cap Y) - P(Y)
\end{aligned}$$

Logo, se $P(B)\neq 0$ então $\dfrac{P(A\cup B)}{P(B)} - P\left(\overline{A}|B\right) = \dfrac{P(A)}{P(B)}$ *q.e.d.*

4.

4.1. Como o domínio da função f é $]0,+\infty[$, só pode existir uma assíntota não oblíqua quando $x\to+\infty$.
Assim, averiguando a existência de uma assíntota de equação $y = mx + b$, quando $x\to+\infty$, vem:

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{5}x - \ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{5}x}{x} - \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - mx\big) = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - \frac{1}{5}\times x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{5}x - \ln x - \frac{1}{5}x\right) = \lim_{x\to+\infty}(-\ln x) = -\infty$$

Logo, (como o b não é um número real) não existe qualquer assíntota oblíqua do gráfico de f

4.2. Começamos por determinar a expressão da derivada para $x > 2$:

$$\left(\frac{1}{5}x - \ln x\right)' = \left(\frac{1}{5}x\right)' - (\ln x)' = \frac{1}{5} - \frac{1}{x}$$

Calculando os zeros da derivada, em $]2, +\infty[$, temos:

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 5 \wedge \underbrace{x \neq 0}_{\text{PV, } x>2}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	2		5	$+\infty$
$f'(x)$	n.d.	$-$	0	$+$
$f(x)$	n.d.	↘	min	↗

Assim, como f é decrescente no intervalo $]0,5]$ e crescente no intervalo $[5, +\infty[$ podemos concluir que 5 é único o minimizante da função no intervalo $]2, +\infty[$, pelo que $f(5)$ é um mínimo da função neste intervalo.

4.3. Como as abcissas dos pontos A e B são soluções da equação $f(x) = f(15)$, começamos por calcular $f(15) = \frac{1}{5}(15) - \ln(15) = 3 - \ln(15) \approx 0{,}29$

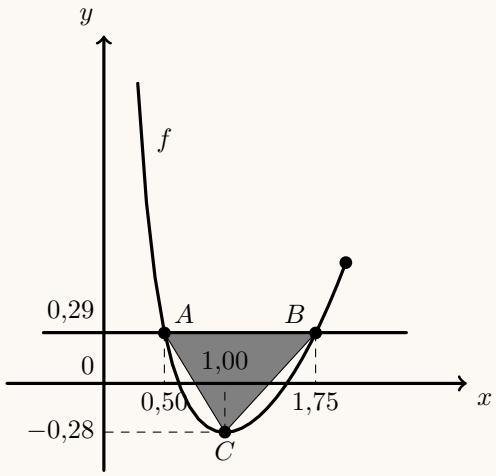
Podemos depois traçar na calculadora o gráfico da função f, no intervalo $]0,2]$, e a reta $y = 0{,}29$, para determinar os valores aproximados das soluções da equação $f(x) = f(15)$, ou seja as abcissas dos pontos A e B, e obtemos o gráfico que se reproduz na figura seguinte.

Recorrendo à função da calculadora que permite determinar as coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, determinamos valores aproximados, às centésimas, das coordenadas dos pontos A e B:

$$A(0{,}50; 0{,}29) \text{ e } B(1{,}75; 0{,}29)$$

Para determinar as coordenadas do ponto C, usamos a função da calculadora que permite determinar o mínimo (e o minimizante) de uma função, num intervalo, e obtemos valores aproximados para as coordenadas do ponto C:

$$C(1{,}00; -0{,}28)$$



Logo podemos considerar como a medida da base do triângulo, a diferença das abcissas dos pontos A e B, e como a medida da altura a soma dos valores absolutos das ordenadas dos pontos A e C (como se pode ver na figura).
Assim, calculando a área do triângulo, e arredondando o resultado às décimas, vem:

$$A_{[OAB]} = \frac{(x_B - x_A) \times (y_A + |y_C|)}{2} \approx \frac{(1{,}75 - 0{,}50)(0{,}29 + 0{,}28)}{2} \approx 0{,}4$$

5.

5.1. Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}$, é contínua em $\mathbb{R}$, e também, em $[-2,-1]$, porque $[-2,-1] \subset \mathbb{R}$

Como $1{,}050 < 1{,}5 < 2{,}000$, ou seja, $f(-1) < 1{,}5 < f(-2)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]-2,-1[$ tal que $f(c) = 1{,}5$, ou seja, que a equação $f(x) = 1{,}5$ tem, pelo menos, uma solução em $]-2,-1[$

C.A.

$$f(-2) = -(-2) + e^{2(-2)^3-1} = 2 + e^{2(-8)-1} =$$

$$= 2 + e^{-17} \approx 2{,}000$$

$$f(-1) = -(-1) + e^{2(-1)^3-1} = 1 + e^{2(-1)-1} =$$

$$= -1 + e^{-3} \approx 1{,}050$$

5.2. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(-x + e^{2x^3-1}\right)' = -(x)' + \left(e^{2x^3-1}\right)' = -1 + (2x^3-1)'e^{2x^3-1} = -1 + 6x^2e^{2x^3-1}$$

Como o declive (m) da reta tangente ao gráfico de f em $x = 0$ é $f'(0)$, temos que:

$$m = f'(0) = -1 + 6(0)^2e^{2(0)^3-1} = -1 + 0 = -1$$

Determinando a ordenada do ponto do gráfico da função que tem abcissa zero, temos:

$$f(0) = -0 + e^{2(0)^3-1} = 0 + e^{0-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Como o ponto de abcissa 0, também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx + b$, para calcular o valor de b:

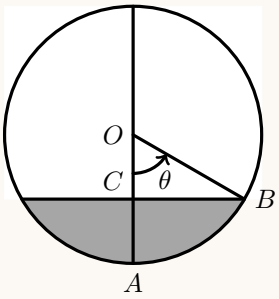
$$\frac{1}{e} = -1 \times 0 + b \Leftrightarrow \frac{1}{e} = 0 + b \Leftrightarrow b = \frac{1}{e}$$

Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0, é:

$$y = -x + \frac{1}{e}$$

6.

6.1. Analisando as figuras podemos dividir o cálculo da altura em dois casos:
No primeiro caso, $\left(\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$, $h = 3 - \overline{OC}$



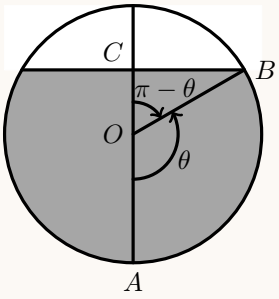
Como $\overline{OB} = 3$, recorrendo à definição de cosseno de um ângulo, temos:

$$\cos\theta = \frac{\overline{OC}}{3} \Leftrightarrow \overline{OC} = 3\cos\theta$$

e assim,

$$h = 3 - \overline{OC} = 3 - 3\cos\theta$$

No segundo caso, $\left(\theta \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\right)$, $h = 3 + \overline{OC}$



Como $\overline{OB} = 3$, recorrendo à definição de cosseno de um ângulo, temos:

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{\overline{OC}}{3} \Leftrightarrow \overline{OC} = 3\cos(\pi - \theta) \Leftrightarrow \overline{OC} = 3(-\cos\theta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{OC} = -3\cos\theta$$

e assim,

$$h = 3 + \overline{OC} = 3 + (-3\cos\theta) = 3 - 3\cos\theta$$

Ou seja em ambos os casos, isto é, para qualquer $\theta \in]0,\pi[$, a altura h pode ser calculada como que $h(\theta) = 3 - 3\cos(\theta)$.

6.2. Como $h(\theta) = 3 - 3\cos(\theta)$, temos que:

$$h(\theta) = 3 \Leftrightarrow 3 - 3\cos(\theta) = 3 \Leftrightarrow -3\cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(\theta) = \cos\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $\theta \in]0,\pi[$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ é a única solução da equação.

Calcular θ tal que $h(\theta) = 3$, significa determinar o ângulo associado a uma quantidade de combustível no depósito com 3 metros de altura.
Assim a solução calculada significa que, quando o combustível no depósito tiver uma altura de 3 metros, o ângulo θ será um ângulo reto $\left(\frac{\pi}{2}\text{ rad.}\right)$.

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/Época Especial

14 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2010

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica, sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva, de forma legível, a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção correcta.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 4, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$
(r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ \operatorname{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{n},\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção seleccionada.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. A Rita tem oito livros, todos diferentes, sendo três de Matemática, três de Português e dois de Biologia. A Rita pretende arrumar, numa prateleira, os oito livros, uns a seguir aos outros.

De quantas maneiras diferentes o pode fazer, ficando os livros de Matemática todos juntos numa das pontas?

(A) 72

(B) 240

(C) 720

(D) 1440

2. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}4$
- $P(\overline{B}) = 0{,}3$
- $P(A \cap B) = 0{,}3$

Qual é o valor de $P(A \cup B)$?

(A) $0{,}4$

(B) $0{,}6$

(C) $0{,}7$

(D) $0{,}8$

3. Numa prateleira de uma perfumaria existe um conjunto de dez perfumes diferentes, sendo três de homem e sete de senhora. A gerente pretende escolher, ao acaso, seis desses dez perfumes para colocar na montra.

Seja X a variável aleatória «número de perfumes de homem que se colocam na montra».

Qual é a distribuição de probabilidades da variável aleatória X?

(A)

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{{}^{10}C_6}$	$\frac{63}{{}^{10}C_6}$	$\frac{105}{{}^{10}C_6}$	$\frac{35}{{}^{10}C_6}$

(B)

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{35}{{}^{10}C_6}$	$\frac{105}{{}^{10}C_6}$	$\frac{70}{{}^{10}C_6}$

(C)

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{70}{{}^{10}C_6}$	$\frac{105}{{}^{10}C_6}$	$\frac{35}{{}^{10}C_6}$

(D)

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{35}{{}^{10}C_6}$	$\frac{105}{{}^{10}C_6}$	$\frac{63}{{}^{10}C_6}$	$\frac{7}{{}^{10}C_6}$

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^-$, definida por $f(x) = \ln(-3x)$

Qual é a solução da equação $f(x) = 2$?

(A) $\frac{1}{2}e^3$ **(B)** $-\frac{1}{2}e^3$ **(C)** $-\frac{1}{3}e^2$ **(D)** $\frac{1}{3}e^2$

5. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}^+$, e a recta de equação $y = -4$, assimptota do gráfico de h

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{2x}\right)}{h(x)}$?

(A) $-\infty$ **(B)** $+\infty$ **(C)** -4 **(D)** 0

6. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função derivada, f', de uma função f

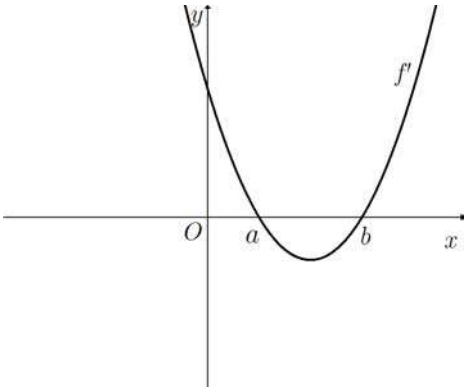
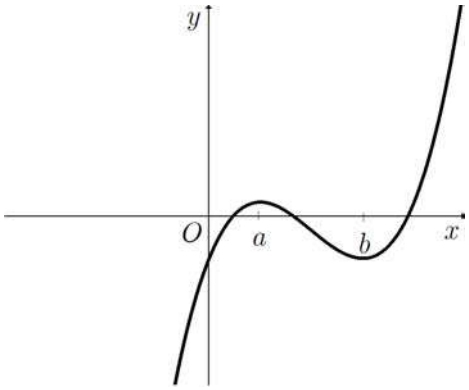


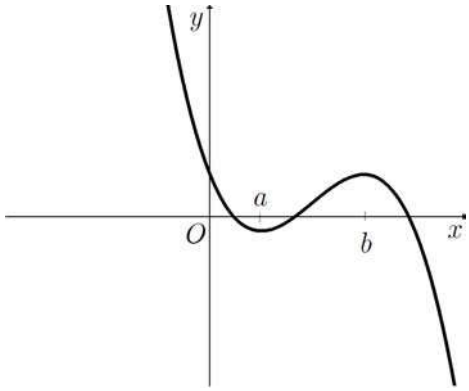
Figura 1

Em qual das figuras seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f ?

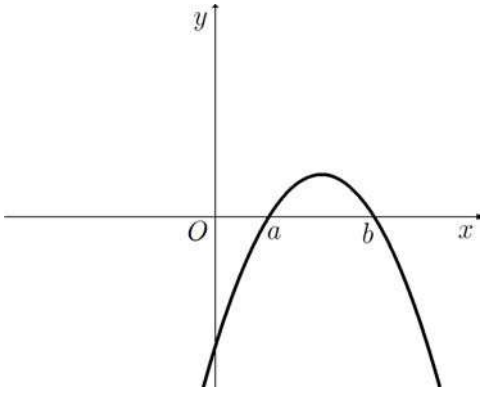
(A)



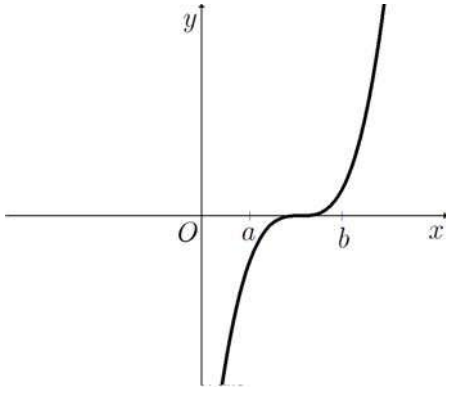
(B)



(C)



(D)



7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o conjunto $A = \left\{z \in \mathbb{C} : i \times (z + \overline{z}) = 0\right\}$

(i designa a unidade imaginária, e $\overline{z}$ designa o conjugado de z)

Qual das rectas seguintes pode ser a representação geométrica, no plano complexo, do conjunto A?

(A) o eixo real

(B) o eixo imaginário

(C) a bissectriz dos quadrantes pares

(D) a bissectriz dos quadrantes ímpares

8. Na Figura 2, estão representados, no plano complexo, os pontos P, Q, R, S e T.

O ponto P é a imagem geométrica de um número complexo z

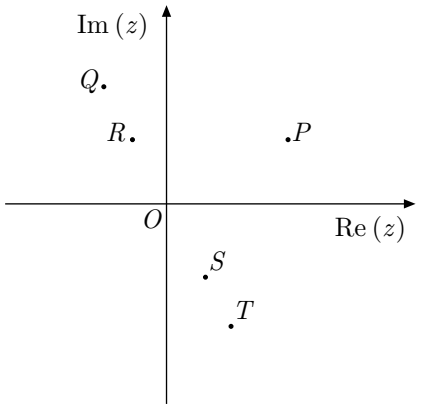


Figura 2

Qual dos pontos seguintes, representados na Figura 2, é a imagem geométrica do número complexo $-i \times z$?

(A) Q

(B) R

(C) S

(D) T

PÁGINA EM BRANCO

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número complexo

$$z = \frac{(-1-i)^8}{\left(\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2} \times \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{2}\right)$$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

1.1. Verifique que $z = 16\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

1.2. Determine a área do polígono cujos vértices, no plano complexo, são as imagens geométricas das raízes quartas de z

2. Uma turma é constituída por 27 alunos, dos quais 17 são rapazes. A Maria e o Manuel são alunos dessa turma. A professora de Português vai escolher, ao acaso, um grupo de cinco alunos para definirem as regras de um Jogo de Palavras.

2.1. Determine quantos grupos diferentes se podem formar, sabendo que em cada grupo tem de estar, pelo menos, um aluno de cada sexo.

2.2. Considere os acontecimentos:

$A:$ «a Maria e o Manuel são escolhidos para definirem as regras do jogo»;

$B:$ «dos cinco alunos escolhidos, dois são rapazes e três são raparigas».

Uma resposta correcta para a probabilidade condicionada $P(B \mid A)$ é $\frac{16 \times {}^{9}C_{2}}{{}^{25}C_{3}}$

Numa composição, explique porquê.

A sua composição deve incluir:

- a interpretação do significado de $P(B \mid A)$, no contexto da situação descrita;
- uma referência à regra de Laplace;
- uma explicação do número de casos possíveis;
- uma explicação do número de casos favoráveis.

3. A Ana e a Joana são amigas e vão acampar nas férias do Carnaval. A mãe da Ana e a mãe da Joana pediram às filhas que, quando chegassem ao acampamento, lhes telefonassem, pedido que é hábito fazerem sempre que as jovens se ausentam de casa por períodos de tempo alargados. Admita-se que o facto de uma delas telefonar é independente de a outra também o fazer.

Sabe-se pela experiência que elas nem sempre satisfazem o pedido das mães.

Considere os acontecimentos:

$A:$ «a Ana telefona à mãe»;

$B:$ «a Joana telefona à mãe».

Determine a probabilidade de, pelo menos, uma das amigas telefonar à sua mãe, sabendo que $P(A) = 70\%$, que $P(B) = 80\%$ e que A e B são acontecimentos independentes.

Apresente o resultado em percentagem.

4. Considere a função f, de domínio $\left]0, \pi\right[$, definida por $f(x) = \ln x \times \cos x$

Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- A é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo Ox, que se situa mais próximo da origem O;
- B é o ponto de intersecção do gráfico da função f com a recta bissectriz dos quadrantes pares.

Determine a área do triângulo $[OAB]$, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as coordenadas dos pontos A e B, arredondando às milésimas as coordenadas do ponto B;
- desenhar o triângulo $[OAB]$, assinalando os pontos que representam os seus vértices;
- apresentar o resultado pedido, com arredondamento às centésimas.

5. Seja uma função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, e seja a recta de equação $y = 1$ a única assimptota do gráfico de f

Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x) + x$

Prove que o gráfico de g tem uma assimptota oblíqua paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares.

6. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x} - e^x}{x} & \text{se } x > 0 \\ \ln(x^2 + 1) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

6.1. Estude a continuidade da função h em $x = 0$

6.2. Resolva, no intervalo $\left]-\infty, 0\right]$, a inequação $h(x) > h(-4)$

7. Admita que, numa certa marina, a profundidade da água, em metros, t horas após as zero horas de um certo dia, é dada por $P(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 8$, em que $t \in \left[0, 24\right]$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

7.1. Determine a profundidade da água da marina às três horas da tarde, desse dia.

7.2. Determine, recorrendo ao estudo da função derivada, a profundidade mínima, em metros, da água da marina, nesse dia.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

GRUPO II

1.

1.1. ..... 15 pontos
1.2. ..... 15 pontos

2.

2.1. ..... 15 pontos
2.2. ..... 15 pontos

3. ..... 15 pontos

4. ..... 15 pontos

5. ..... 15 pontos

6.

6.1. ..... 15 pontos
6.2. ..... 15 pontos

7.

7.1. ..... 10 pontos
7.2. ..... 15 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

Exame nacional de Matemática A **(2010, Época especial)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. O grupo dos 3 livros de Matemática pode ser arrumado de ${}^3A_3 = P_3 = 3!$ formas diferentes.
   Como a prateleira tem duas pontas, o grupo dos três livros pode ser colocado de 2 formas.
   Os restantes 5 livros podem ser arrumados de ${}^5A_5 = P_5 = 5!$ formas diferentes.
   Logo, o número de arrumações diferentes é

   $$3! \times 2 \times 5! = 1440$$

   Resposta: **Opção D**

2. Como $P\left(\overline{B}\right) = 0{,}3$, pelo teorema $P(X) = 1 - P\left(\overline{X}\right)$, temos que:

   $$P(B) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$$

   Assim, pelo teorema $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$, temos que:

   $$P(A \cup B) = 0{,}4 + 0{,}7 - 0{,}3 = 0{,}8$$

   Resposta: **Opção D**

3. Como existem 7 perfumes de senhora e são escolhidos 6 ao acaso, podem ser escolhidos 6 perfumes de senhora, e portanto zero perfumes de homem, logo $P(X = 0) > 0$, pelo que podemos excluir as opções (B) e (C).

   Calculando a probabilidade de escolher 6 perfumes de senhora, do conjunto dos 10, temos:

   $$P(X = 0) = \frac{{}^7C_6}{{}^{10}C_6} = \frac{7}{{}^{10}C_6}$$

   Logo, apenas a opção (A) é compatível com este cálculo.

   Resposta: **Opção A**

4. Resolvendo a equação, temos:

   $$f(x) = 2 \Leftrightarrow \ln(-3x) = 2 \Leftrightarrow -3x = e^2 \Leftrightarrow x = \frac{e^2}{-3} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}e^2$$

   Resposta: **Opção C**

5. Como a reta de equação $y = -4$ é assíntota do gráfico da função h, de domínio $\mathbb{R}^+$, então temos que:

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = -4$$

Logo, vem que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{2x}\right)}{h(x)} = \frac{\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{2x}\right)}{\lim_{x \to +\infty} h(x)} = \frac{\ln\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{-4} = \frac{\ln(0^+)}{-4} = \frac{-\infty}{-4} = +\infty$$

Resposta: **Opção B**

6. Através da análise do gráfico, podemos descrever a variação do sinal da derivada para relacionar com a monotonia da função f:

x		a		b	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	Máx	↘	min	↗

Logo, o único gráfico apresentado compatível com a monotonia estudada é o gráfico da opção (A).

Resposta: **Opção A**

7. Considerando $z = a + bi$ (com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$), temos que:

- $\overline{z} = a - bi$
- $z + \overline{z} = a + bi + a - bi = 2a$
- $i \times (z + \overline{z}) = i(2a) = 2ia$
- $i \times (z + \overline{z}) = 0 \Leftrightarrow 2ia = 0 \Leftrightarrow a = 0$

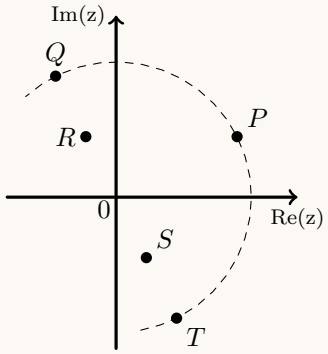
Ou seja o conjunto A é o conjunto dos números complexos z, tais que $\text{Re}(z) = 0$, ou seja a sua representação geométrica coincide com o eixo imaginário.

Resposta: **Opção B**

8. A operação "*multiplicar por i*" corresponde geometricamente a "fazer uma rotação de centro em O e amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos".

Assim temos que $i \times z = w$, sendo w o número complexo que tem por imagem geométrica o ponto Q.

Logo $-i \times z = -w$, ou seja o número complexo que tem por imagem geométrica o ponto T.



Resposta: **Opção D**

GRUPO II

1.

1.1. Começamos por escrever $(-1-i)$ na f.t.:
Seja $-1-i=\rho\,\mathrm{cis}\,\theta$:

- $\rho=|-1-i|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$
- $\theta=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$, porque $\mathrm{tg}\,\theta=\frac{-1}{-1}=1$, logo $\theta=\frac{\pi}{4}\vee\theta=\pi+\frac{\pi}{4}$, mas como $\mathrm{sen}\,\theta<0$ e $\cos\theta<0$, logo θ é um ângulo do 3º quadrante.

Assim, aplicando a fórmula de Moivre para a potência, temos que
$(-1-i)^8=\left(\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,\frac{5\pi}{4}\right)^8=(\sqrt{2})^8\,\mathrm{cis}\left(8\times\frac{5\pi}{4}\right)=16\,\mathrm{cis}\,\frac{40\pi}{4}=16\,\mathrm{cis}\,(10\pi)=16\,\mathrm{cis}\,0$

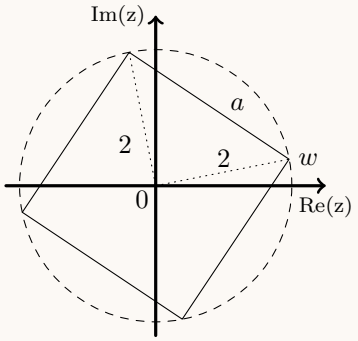
Da mesma forma temos que $\left(\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2=\mathrm{cis}\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)=\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Assim temos que $z=\dfrac{(-1-i)^8}{\left(\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2}\times\mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{2}\right)=\dfrac{16\,\mathrm{cis}\,0}{\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)}\times\mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{2}\right)=16\,\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\times\mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{2}\right)=$

$=16\,\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{2}\right)=16\,\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{10\pi}{4}\right)=16\,\mathrm{cis}\left(\frac{9\pi}{4}\right)=16\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)=16\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{4}$

1.2. Sabemos que as quatro raízes quartas de z são números complexos cujas imagens geométricas são os vértices de um quadrado, centrado na origem.

Seja w uma das raízes quartas de z, como $z=16\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{4}$, recorrendo à fórmula de Moivre, temos que $|w|=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$, ou seja a distância dos vértices do quadrado ao centro é 2.



Assim, podemos calcular o lado a do quadrado, recorrendo ao teorema de Pitágoras:
$a^2=2^2+2^2\Leftrightarrow a^2=4+4\Leftrightarrow a^2=8\Leftrightarrow a=\sqrt{8}$
(consideramos apenas a raiz positiva por se tratar de uma medida).

Temos assim que a área A do polígono cujos vértices, no plano complexo, são as imagens geométricas das raízes quartas de z é dada por $A=(\sqrt{8})^2=8$

2.

2.1. Se ao total do número de grupos diferentes de 5 alunos que se podem formar com os 27 alunos ($^{27}C_5$, não se considera relevante a ordem por não haver diferenciação dentro do grupo), subtrairmos os grupos que são formados apenas por rapazes ($^{17}C_5$) e também os que são formados apenas por raparigas ($^{10}C_5$, como existem 17 rapazes na turma, o número de raparigas é $27-17=10$), o resultado é o número de grupos em que existe pelo menos um aluno de cada sexo, ou seja

$$^{27}C_5-{}^{17}C_5-{}^{10}C_5=74\,290$$

2.2. No contexto da situação descrita, $P(B|A)$, é a probabilidade de ter sido escolhido um grupo composto por 2 rapazes e 3 raparigas, sabendo que a Maria e o Manuel integram o grupo.
Assim, $\frac{16 \times^9 C_2}{^{25}C_3}$ é um cálculo da probabilidade recorrendo à regra de Laplace, ou seja calculando o quociente entre o número de casos favoráveis ($16 \times^9 C_2$) e o número de casos possíveis ($^{25}C_3$).
O número de casos possíveis, consiste em determinar o número de grupos de 3 elementos que se podem formar com os 25 alunos da turma ($^{25}C_3$) (excluindo a Maria e o Manuel, e não considerando a ordem relevante por não existir diferenciação dentro do grupo). A qualquer um destes grupos juntam-se a Maria e o Manuel, formando um grupo de 5 alunos que incluí estes dois.
O número de casos favoráveis, consiste em determinar o número de grupos de 3 elementos que se podem formar com os 25 alunos da turma, escolhendo 1 de entre os restantes 16 rapazes e 2 de entre as restantes 9 raparigas ($16 \times^9 C_2$), excluindo a Maria e o Manuel. Como ao rapaz selecionado se junta o Manuel, o grupo será composto por 2 rapazes e como ao conjunto de duas raparigas se junta a Maria, o grupo terá 3 raparigas na sua composição.
Desta forma $P(B|A) = \frac{16 \times^9 C_2}{^{25}C_3}$

3. Como a probabilidade de pelo menos, uma das amigas telefonar à sua mãe, é $P(A \cup B)$
Como os acontecimentos A e B são independentes, temos que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
Assim, pelo teorema $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$, temos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

Pelo que

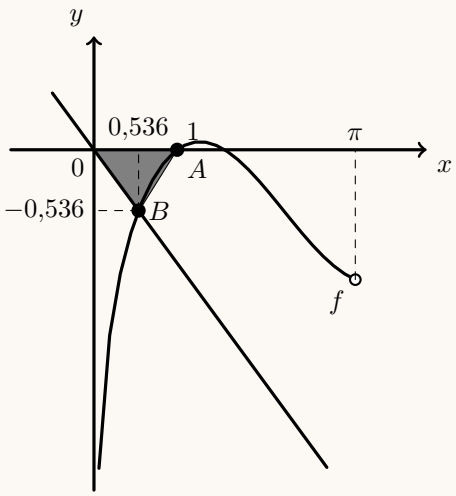
$$P(A \cup B) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}94$$

Apresentando o valor da probabilidade calculada em percentagem, temos $P(A \cup B) = 94\%$

4. Traçando na calculadora o gráfico da função f e a bissetriz dos quadrantes pares, ou seja a reta de equação $y = -x$ numa janela compatível com o domínio de f, obtemos o gráfico que se reproduz na figura seguinte.

Logo podemos considerar como a medida da base do triângulo, a abcissa do ponto A, e como a medida da altura o valor absoluto da ordenada do ponto B (como se pode ver na figura).

Recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores dos zeros de uma função, determinamos o valor da abcissa do ponto A, $x_A = 1$. Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados de um ponto de interseção de dois gráficos determinamos o valor (aproximado às centésimas) da ordenada do ponto B, $y_B \approx -0{,}536$.



Assim, calculando a área do triângulo, e arredondando o resultado às centésimas, vem:

$$A_{[OAB]} = \frac{x_A \times |y_B|}{2} \approx \frac{1 \times 0{,}536}{2} \approx 0{,}268 \approx 0{,}27$$

5. Como a reta de equação $y = 1$ é a única assíntota do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, então, como é uma reta de declive igual a zero, vem que

$$m_f = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = 0$$

E assim, determinando o declive da assíntota oblíqua da função g, quando $x \to +\infty$, (porque o domínio da função é $\mathbb{R}^+$), vem:

$$m_g = \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) + \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}\right) = 0+1 = 1$$

E como a reta de equação $y = 1$ é assíntota do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, então, vem que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

E assim, determinando a ordenada na origem da assíntota oblíqua da função g, quando $x \to +\infty$, (porque o domínio da função é $\mathbb{R}^+$), vem:

$$b = \lim_{x\to+\infty}\big(g(x) - mx\big) = \lim_{x\to+\infty}\big(f(x) + x - 1\times x\big) = \lim_{x\to+\infty}\big(f(x)\big) = 1$$

Logo, temos que a reta de equação $y = x + 1$ é a assíntota oblíqua gráfico de g, que como tem declive 1 é paralela à reta de equação $y = x$, ou seja a bissetriz dos quadrantes ímpares.

6.

6.1. Para averiguar se a função h é contínua em $x = 0$, temos que verificar se $h(0) = \lim\limits_{x\to0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to0^+} h(x)$

- $h(0) = 3\ln(0^2+1) = 3\ln(1) = 3\times0 = 0$
- $\lim\limits_{x\to0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to0^-}\big(3\ln(x^2+1)\big) = 3\ln\big((0^-)^2+1\big) = 3\ln(0+1) = 3\ln(1) = 3\times0 = 0$
- $\lim\limits_{x\to0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{2x}-e^x}{x} = \dfrac{e^0-e^0}{0} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to0^+} h(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{e^{2x}-e^x}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{e^{x+x}-e^x}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{e^x\times e^x-e^x}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{e^x(e^x-1)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to0^+} e^x \times \underbrace{\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = e^0\times1 = 1\times1 = 1$$

Como $\lim\limits_{x\to0^+} h(x) \neq \lim\limits_{x\to0^-} h(x)$, então a função h não é contínua em $x = 0$

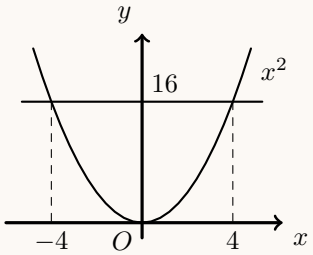
6.2. Temos que

$$h(-4) = ln\left((-4)^2+1\right) = \ln(16+1) = \ln(17)$$

Assim, resolvendo a inequação, em $]-\infty,0]$, temos :

$$h(x) > h(-4) \Leftrightarrow \ln\left(x^2+1\right) > \ln(17) \Leftrightarrow x^2+1 > 17 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 > 17-1 \Leftrightarrow x^2 > 16 \Leftrightarrow x < -4 \ \vee \ x > 4$$



Como o domínio de valência da inequação é $]-\infty,0]$, o conjunto solução é:

$$]-\infty,0] \cap \Big(]-\infty,-4[\cup]4,+\infty[\Big) =]-\infty,-4[$$

7.

7.1. As três horas da tarde desse dia correspondem a $t = 15$.
Assim, a profundidade correspondente é dada por:

$$P(15) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} \times 15\right) + 8 = 2\cos\left(\frac{3 \times 5 \times \pi}{3 \times 2}\right) + 8 = 2\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + 8 = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 8 = 2 \times 0 + 8 = 8$$

Ou seja, às 15 horas, a profundidade da água na marina era de 8 metros.

7.2. Determinando a expressão da derivada, temos:

$$P'(t) = \left(2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 8\right)' = \left(2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right)' + (8)' = 2\left(\frac{\pi}{6}t\right)'\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right) + 0 = \frac{2\pi}{6}\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right) =$$

$$= -\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

Calculando os zeros da derivada, vem:

$$P'(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \operatorname{sen} 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6}t = 0 + 2k\pi \ \vee \ \frac{\pi}{6}t = \pi - 0 + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{6(2k\pi)}{\pi} \ \vee \ t = \frac{6(\pi + 2k\pi)}{\pi} \ , \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 12k \ \vee \ t = 6 + 12k \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

Como $t \in [0{,}24]$, atribuindo valores a k ($k = 0$, $k = 1$ e $k = 2$), obtemos o conjunto dos zeros da função derivada: $\{0{,}6{,}12{,}18{,}24\}$

Desta forma, estudando a variação de sinal de P' e relacionando com a monotonia da função P, vem:

t	0		6		12		18		24
$P'(t)$	0	-	0	+	0	-	0	+	0
$P(t)$	Máx	↘	min	↗	Máx	↘	min	↗	Máx

Logo, a profundidade mínima, que ocorreu às 6 horas e depois novamente às 18 horas, pode ser calculada como:

$$P(6) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} \times 6\right) + 8 = 2\cos(\pi) + 8 = 2(-1) + 8 = -2 + 8 = 6$$

Ou seja a profundidade mínima na marina, nesse dia, foi de 6 metros.

2011

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/1.ª Fase 15 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2011

VERSÃO 1

Página em branco

Na folha de respostas, indique de forma legível a versão da prova. A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens do Grupo I.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 4, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\dfrac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$

(α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\ r\ g$

(r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\ \pi\ r^2$

(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3\ (r - raio)$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}a \cdot \cos b + \operatorname{sen}b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen}a \cdot \operatorname{sen}b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b}{1 - \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis}\theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis}\theta} = \sqrt[n]{\rho}\ \operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right),\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega \quad \text{e} \quad B \subset \Omega)$ independentes, com $P(A) \neq 0$

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) $P\left(A\right) + P\left(B\right) = 1$

(B) $P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right)$

(C) $P\left(A\right) \neq P\left(B\right)$

(D) $P\left(B \mid A\right) = P\left(B\right)$

2. O código de um auto-rádio é constituído por uma sequência de quatro algarismos. Por exemplo, 0137

Quantos desses códigos têm dois e só dois algarismos iguais a 7 ?

(A) 486

(B) 810

(C) 432

(D) 600

3. Na Figura 1, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico de uma função g, de domínio $]-3,+\infty[$

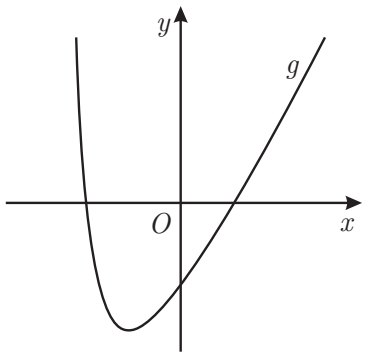


Figura 1

A recta de equação $y = 2x - 4$ é assimptota do gráfico de g

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(g(x)-2x-4\big)=0$

(B) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{g(x)}=2$

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(g(x)-2x+4\big)=0$

(D) $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(g(x)-2x\big)=0$

4. Seja f uma função de domínio $[0,+\infty[$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}2^x-9 & \text{se } 0\leq x<5\\ \dfrac{1-e^x}{x} & \text{se } x\geq 5\end{cases}$$

Em qual dos intervalos seguintes o teorema de Bolzano permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f?

(A) $]0,1[$ **(B)** $]1,4[$ **(C)** $]4,6[$ **(D)** $]6,7[$

5. Qual é o valor de $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right)$?

(A) 4

(B) 0

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{1}{2}$

6. Na Figura 2, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f de grau 3, de domínio $\mathbb{R}$

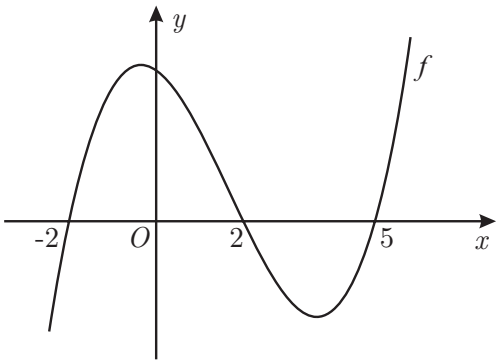


Figura 2

Sabe-se que:

- -2, 2 e 5 são zeros de f
- f' representa a função derivada de f

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $f'(0) \times f'(6) = 0$

(B) $f'(-3) \times f'(6) < 0$

(C) $f'(-3) \times f'(0) > 0$

(D) $f'(0) \times f'(6) < 0$

7. Na Figura 3, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de quatro números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4

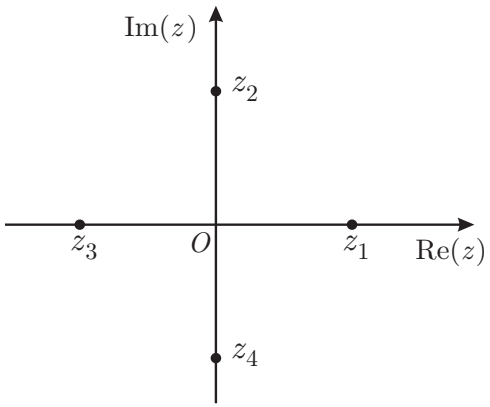


Figura 3

Qual é o número complexo que, com $n \in \mathbb{N}$, pode ser igual a $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2}$?

(A) z_1

(B) z_2

(C) z_3

(D) z_4

8. Na Figura 4, está representado, no plano complexo, a sombreado, um sector circular.

Sabe-se que:

- o ponto A está situado no 1.º quadrante;
- o ponto B está situado no 4.º quadrante;
- $[AB]$ é um dos lados de um polígono regular cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice 5 do complexo $32\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$
- o arco AB está contido na circunferência de centro na origem do referencial e raio igual a $\overline{OA}$

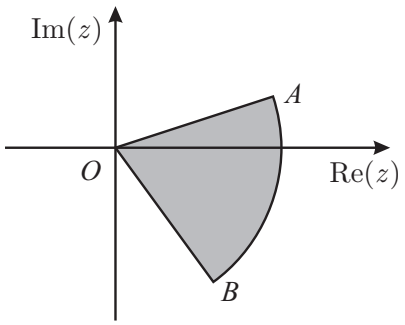


Figura 4

Qual dos números seguintes é o valor da área do sector circular AOB ?

(A) $\frac{\pi}{5}$

(B) $\frac{4\pi}{5}$

(C) $\frac{2\pi}{5}$

(D) $\frac{8\pi}{5}$

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = 1\,,\ \ z_2 = 5\,i \quad \text{e} \quad z_3 = \operatorname{cis}\left(\frac{n\,\pi}{40}\right),\ \ n \in \mathbb{N}$$

Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

1.1. O complexo z_1 é raiz do polinómio $z^3 - z^2 + 16z - 16$

Determine, em $\mathbb{C}$, as restantes raízes do polinómio.

Apresente as raízes obtidas na forma trigonométrica.

1.2. Determine o menor valor de n natural para o qual a imagem geométrica de $z_2 \times z_3$, no plano complexo, está no terceiro quadrante e pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares.

2. Uma companhia aérea vende bilhetes a baixo custo exclusivamente para viagens cujos destinos sejam Berlim ou Paris.

2.1. Nove jovens decidem ir a Berlim e escolhem essa companhia aérea. Cada jovem paga o bilhete com cartão multibanco, ou não, independentemente da forma de pagamento utilizada pelos outros jovens. Considere que a probabilidade de um jovem utilizar cartão multibanco, para pagar o seu bilhete, é igual a $0{,}6$.

Determine a probabilidade de exactamente 6 desses jovens utilizarem cartão multibanco para pagarem o seu bilhete.

Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

2.2. A companhia aérea constatou que, quando o destino é Berlim, 5% dos seus passageiros perdem o voo e que, quando o destino é Paris, 92% dos passageiros seguem viagem. Sabe-se que 30% dos bilhetes a baixo custo que a companhia aérea vende têm por destino Berlim.

Determine a probabilidade de um passageiro, que comprou um bilhete a baixo custo nessa companhia aérea, perder o voo.

Apresente o resultado na forma de dízima.

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega \text{ e } B \subset \Omega)$, com $P(A) \neq 0$

Mostre que $P(B \mid A) \geq 1 - \dfrac{1 - P(B)}{P(A)}$

4. Num museu, a temperatura ambiente em graus centígrados, t horas após as zero horas do dia 1 de Abril de 2010, é dada, aproximadamente, por

$$T(t) = 15 + 0{,}1\,t^2 e^{-0{,}15t}, \quad \text{com} \quad t \in [0, 20]$$

Determine o instante em que a temperatura atingiu o valor máximo recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Apresente o resultado em horas e minutos, apresentando os minutos arredondados às unidades.

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

5. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{2 + \ln x}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

5.1. O gráfico de f admite uma assimptota horizontal.

Seja P o ponto de intersecção dessa assimptota com a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa e.

Determine as coordenadas do ponto P recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

5.2. Existem dois pontos no gráfico de f cujas ordenadas são o cubo das abcissas.

Determine as coordenadas desses pontos recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- assinalar esses pontos;
- indicar as coordenadas desses pontos com arredondamento às centésimas.

6. Na Figura 5, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 4\cos(2x)$

Sabe-se que:

- os vértices A e D do trapézio $[ABCD]$ pertencem ao eixo Ox
- o vértice B do trapézio $[ABCD]$ pertence ao eixo Oy
- o vértice D do trapézio $[ABCD]$ tem abcissa $-\frac{\pi}{6}$
- os pontos A e C pertencem ao gráfico de f
- a recta CD é paralela ao eixo Oy

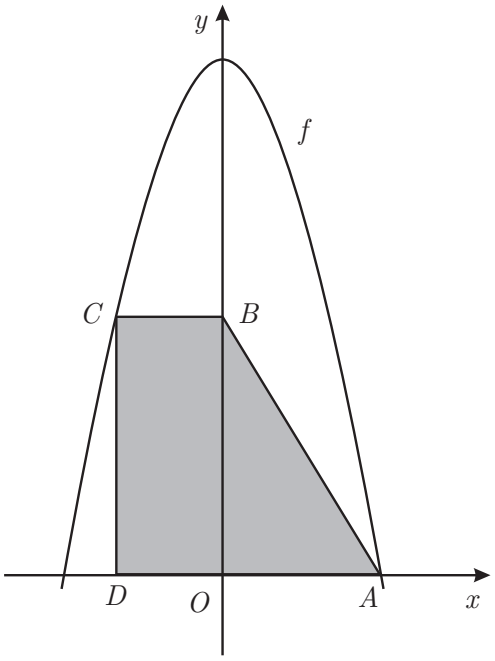


Figura 5

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

6.1. Determine o valor exacto da área do trapézio $[ABCD]$

6.2. Seja f' a primeira derivada da função f, e seja f'' a segunda derivada da função f

Mostre que $f(x)+f'(x)+f''(x) = -4\left(3\cos(2x)+2\,\mathrm{sen}(2x)\right)$, para qualquer número real x

7. Na Figura 6, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função g

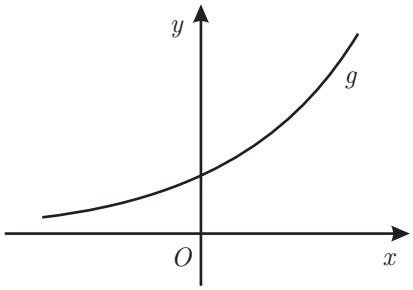


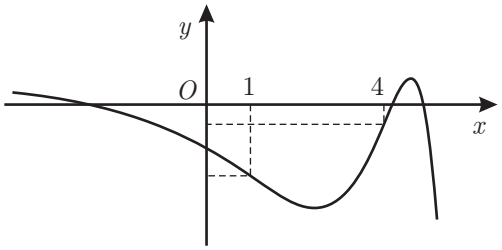
Figura 6

Sabe-se que:

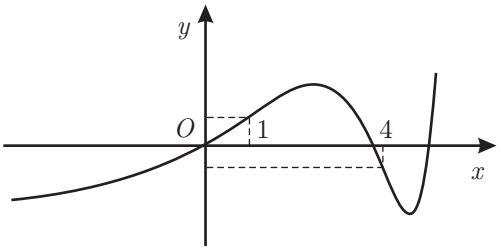
- g é uma função contínua em $\mathbb{R}$
- g não tem zeros
- a segunda derivada, f'', de uma certa função f tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $f''(x) = g(x) \times (x^2 - 5x + 4)$
- $f(1) \times f(4) > 0$

Apenas uma das opções seguintes pode representar a função f

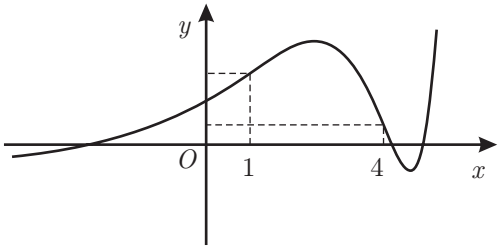
I



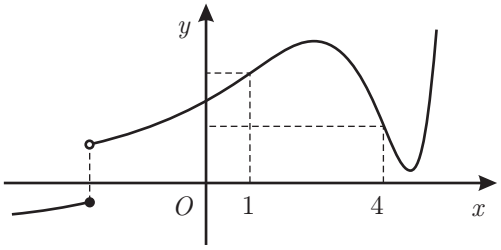
II



III



IV



Elabore uma composição na qual:

- indique a opção que pode representar f
- apresente as razões que o levam a rejeitar as restantes opções

Apresente três razões, uma por cada gráfico rejeitado.

FIM

Página em branco

COTAÇÕES

GRUPO I

(8 × 5 pontos)	40 pontos
	40 pontos

GRUPO II

1.		
	1.1.	15 pontos
	1.2.	15 pontos
2.		
	2.1.	10 pontos
	2.2.	15 pontos
3.		15 pontos
4.		15 pontos
5.		
	5.1.	20 pontos
	5.2.	15 pontos
6.		
	6.1.	15 pontos
	6.2.	10 pontos
7.		15 pontos
		160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/1.ª Fase 11 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2011

COTAÇÕES

GRUPO I

(8 × 5 pontos) ..... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1.		
	1.1.	15 pontos
	1.2.	15 pontos
2.		
	2.1.	10 pontos
	2.2.	15 pontos
3.		15 pontos
4.		15 pontos
5.		
	5.1.	20 pontos
	5.2.	15 pontos
6.		
	6.1.	15 pontos
	6.2.	10 pontos
7.		15 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

A classificação da prova deve respeitar integralmente os critérios gerais e os critérios específicos a seguir apresentados.

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos de classificação apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro, previsto na grelha de classificação.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos. No entanto, em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se o examinando responder a um mesmo item mais do que uma vez, não eliminando inequivocamente a(s) resposta(s) que não deseja que seja(m) classificada(s), deve ser considerada apenas a resposta que surgir em primeiro lugar.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova (Versão 1 ou Versão 2) implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de selecção (escolha múltipla).

Nos itens de selecção (escolha múltipla), a cotação total do item é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a única opção correcta.

São classificadas com zero pontos as respostas em que seja assinalada:

– uma opção incorrecta;

– mais do que uma opção.

Não há lugar a classificações intermédias.

Os critérios de classificação dos itens de construção apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação. No caso de, ponderados todos os dados contidos nos descritores, permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

Nos itens de construção com cotação igual ou superior a quinze pontos e que impliquem a produção de um texto, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea das competências específicas da disciplina e das competências de comunicação escrita em língua portuguesa. A avaliação das competências de comunicação escrita em língua portuguesa contribui para valorizar a classificação atribuída ao desempenho no domínio das competências específicas da disciplina. Esta valorização é cerca de 10% da cotação do item e faz-se de acordo com os níveis de desempenho descritos no quadro seguinte.

Níveis	Descritores
3	Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
2	Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
1	Composição sem estruturação aparente, com erros graves de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é zero pontos. Neste caso, não é classificado o desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

Havendo escolas em que os examinandos já contactam com as novas regras ortográficas, uma vez que o Acordo Ortográfico de 1990 já foi ratificado e dado que qualquer cidadão, nesta fase de transição, pode optar pela ortografia prevista quer no Acordo de 1945, quer no de 1990, são consideradas correctas, na classificação das provas, as grafias que seguirem o que se encontra previsto em qualquer um destes normativos.

Nos itens de construção, as respostas que apresentem pontos de vista diferentes dos mencionados nos critérios específicos de classificação devem ser classificadas segundo procedimentos análogos aos previstos nos descritores apresentados, desde que o conteúdo dessas respostas seja considerado cientificamente válido e adequado ao solicitado.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar em situações não descritas anteriormente.

Situação	Classificação
1. Classificação da resposta a um item cujo critério se apresenta organizado por etapas.	A pontuação indicada para cada etapa é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A classificação da resposta resulta da soma das pontuações das diferentes etapas, à qual se subtrai ou subtraem, eventualmente, um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 14 e/ou 19.
2. Pontuação de uma etapa dividida em passos.	A pontuação indicada para cada passo é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A pontuação da etapa resulta da soma das pontuações dos diferentes passos.
3. Classificação da resposta a um item ou pontuação de uma etapa cujo critério se apresenta organizado por níveis de desempenho.	A resposta é enquadrada numa das descrições apresentadas. À classificação/pontuação correspondente subtraem-se, eventualmente, um, dois ou três pontos, de acordo com o previsto nas situações 9, 10 e/ou 19.
4. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite e classificado qualquer processo de resolução cientificamente correcto. O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante distribuição da cotação do item pelas etapas* percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.
5. Apresentação apenas do resultado final, embora a resolução do item exija cálculos e/ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
6. Utilização de processos de resolução que não respeitam as instruções dadas [exemplo: «usando métodos analíticos»].	A etapa em que a instrução não é respeitada é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário, no critério específico de classificação.
7. Ausência de apresentação dos cálculos e/ou das justificações necessárias à resolução de uma etapa*.	A etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário, no critério específico de classificação.
8. Ausência de apresentação explícita de uma dada etapa.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, a mesma é pontuada com a cotação total para ela prevista.

Situação	Classificação
9. Transposição incorrecta de dados do enunciado.	Se o grau de dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
10. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre.
11. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.	A pontuação máxima a atribuir nessa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
12. Ocorrência de um erro na resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada de acordo com o erro cometido. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido: – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
13. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas o passo final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
14. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação de um arredondamento incorrecto.	É subtraído um ponto à classificação da resposta, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
15. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fracção, e a resposta apresenta-se na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final [exemplo: «15» em vez de «15 metros»].	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a cotação para ela prevista.
17. Apresentação do resultado final com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exacto.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
18. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação do resultado final incorrectamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
19. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à classificação da resposta, excepto: – se as incorrecções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

* Em situações em que o critério é aplicável tanto a **etapas** como a **passos**, utiliza-se apenas o termo «etapas» por razões de simplificação da apresentação.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. ..... (8 × 5 pontos)..... **40 pontos**

As respostas correctas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	D	A	C	B	C	D	B	B
Versão 2	B	C	A	D	C	A	C	D

GRUPO II

É de aceitar qualquer processo de resolução cientificamente correcto, ainda que não esteja previsto nestes critérios específicos, nem no Programa (ver n.º 4 dos critérios gerais).

1.1. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Efectuar a divisão inteira de $z^3 - z^2 + 16z - 16$ por $z - z_1$ (ou equivalente)..... 4 pontos

Obter $z^2 + 16$ ..... 1 ponto

Resolver a equação $z^2 + 16 = 0$ ..... 6 pontos

- Escrever $z^2 + 16 = 0$ (**ver nota**) ..... 1 ponto
- Obter $z^2 = -16$ ..... 1 ponto
- Obter $z = \sqrt{-16}$ ..... 1 ponto
- Obter $z = -\sqrt{-16}$ ..... 1 ponto
- Obter $z = 4i$ ..... 1 ponto
- Obter $z = -4i$ ..... 1 ponto

Escrever $4i$ na forma trigonométrica ..... 2 pontos

Escrever $-4i$ na forma trigonométrica ..... 2 pontos

2.º Processo

Efectuar a divisão inteira de $z^3 - z^2 + 16z - 16$ por $z - z_1$ (ou equivalente)..... 4 pontos

Obter $z^2 + 16$ ..... 1 ponto

Resolver a equação $z^2 + 16 = 0$ ..... 10 pontos

- Escrever $z^2 + 16 = 0$ (**ver nota**) ..... 1 ponto
- Obter $z^2 = -16$ ..... 1 ponto
- Escrever $z^2 = 16\operatorname{cis}\pi$ ..... 2 pontos
- Obter $z = \sqrt{16\operatorname{cis}\pi}$ ..... 1 ponto
- Escrever $z = 4\operatorname{cis}\frac{\pi + 2k\pi}{2},\ k \in \{0,1\}$ ..... 3 pontos

Obter $z = 4\text{cis}\,\frac{\pi}{2}$ ..... 1 ponto

Obter $z = 4\text{cis}\,\frac{3\pi}{2}$ ..... 1 ponto

Nota – Se o examinando não explicitar esta etapa, mas evidenciar que a considerou na sua resposta, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

1.2. ..... **15 pontos**

Escrever z_2 na forma trigonométrica ..... 2 pontos

Indicar um argumento de $z_2 \times z_3$ ..... 4 pontos

Escrever uma condição para que a imagem geométrica de $z_2 \times z_3$ esteja no 3.º quadrante e pertença à bissectriz dos quadrantes ímpares (**ver notas 1** e **2**) .. 4 pontos

Obter $n = 30 + 80k,\ k \in \mathbb{Z}$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

Concluir que $n = 30$ ..... 2 pontos

Notas:

1. Se o examinando considerar apenas que $z_2 \times z_3$ pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares, a pontuação a atribuir, nesta etapa, é 2 pontos.

2. Se o examinando considerar apenas que $z_2 \times z_3$ está no 3.º quadrante, a pontuação a atribuir, nesta etapa, é 2 pontos.

2.1. ..... **10 pontos**

Escrever a expressão que dá o valor pedido (**ver nota 1**) ..... 8 pontos

Calcular o valor pedido (**ver nota 2**) ..... 2 pontos

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, e a pontuação a atribuir em cada caso.

$^9C_6 \times (0{,}6)^6 \times (0{,}4)^3$ (ou equivalente) ..... 8 pontos

$^9C_6 \times (0{,}4)^6 \times (0{,}6)^3$ (ou equivalente) ..... 6 pontos

$(0{,}6)^6 \times (0{,}4)^3$ (ou equivalente) ..... 4 pontos

$(0{,}6)^3 \times (0{,}4)^6$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Outras situações ..... 0 pontos

2. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se o resultado estiver de acordo com a expressão escrita pelo examinando, e se essa expressão não tiver sido pontuada com zero pontos.

2.2. ..... **15 pontos**

No que se segue, vamos designar por A o acontecimento «viagem a Berlim», por B o acontecimento «perder o voo» (podem ser admitidas outras designações para os acontecimentos).

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $P(A) = 0{,}3$ ..... 1 ponto

Escrever $P(B \mid A) = 0{,}05$ ..... 2 pontos

Escrever $P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 0{,}92$ ..... 2 pontos

Obter $P(\overline{A})$ ..... 1 ponto

Calcular $P(A \cap B)$ ..... 3 pontos

Calcular $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ ..... 3 pontos

Calcular $P(B)$ (**ver nota**) ..... 3 pontos

2.º Processo

Escrever $P(A) = 0{,}3$ ..... 1 ponto

Escrever $P(B \mid A) = 0{,}05$ ..... 2 pontos

Escrever $P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 0{,}92$ ..... 2 pontos

Obter $P(\overline{A})$ ..... 1 ponto

Calcular $P(A \cap B)$ ..... 3 pontos

Calcular $P(B \mid \overline{A})$ ..... 2 pontos

Calcular $P(\overline{A} \cap B)$ ..... 1 ponto

Calcular $P(B)$ (**ver nota**) ..... 3 pontos

Nota – Se o examinando obtiver o valor de $P(B)$ apresentando uma tabela ou um diagrama em árvore, as etapas anteriores devem ser pontuadas segundo procedimentos análogos aos apresentados.

3. ..... **15 pontos**

A resposta do examinando deve incluir os pontos seguintes:

- $P\left(B\middle|A\right) = \dfrac{P\left(A \cap B\right)}{P\left(A\right)}$
- $P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right)$
- $P\left(A \cup B\right) \leq 1$

Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina			Pontuação
Níveis	**4**	O examinando aplica correctamente os três pontos e conclui o pretendido.	15
	3	O examinando aplica correctamente os três pontos, mas não conclui o pretendido.	11
	2	O examinando aplica correctamente apenas dois pontos.	7
	1	O examinando aplica correctamente apenas um ponto.	3

4. ..... **15 pontos**

Determinar T' ..... 6 pontos

Escrever $\left(15 + 0{,}1\,t^2\,e^{-0{,}15\,t}\right)'$ ..... 1 ponto

Escrever $\left((15)' + (0{,}1t^2)'\,e^{-0{,}15t} + 0{,}1t^2\left(e^{-0{,}15t}\right)'\right)$ ..... 2 pontos

Determinar $\left(e^{-0{,}15t}\right)'$ ..... 1 ponto

Determinar $\left(0{,}1\,t^2\right)'$ ..... 1 ponto

Obter T' ..... 1 ponto

Estudar o sinal de T' recorrendo a um quadro (**ver nota**) ..... 7 pontos

Preencher a primeira linha do quadro (relativa à variável t, de acordo com o domínio da função) ..... 1 ponto

Indicar o sinal de T' ..... 4 pontos

Determinar os zeros de T' 2

Concluir que $T'(t) > 0$ para $0 < t < \dfrac{40}{3}$ 1

Concluir que $T'(t) < 0$ para $\dfrac{40}{3} < t \leq 20$ 1

Relacionar o sinal de T' com a monotonia de T..... 2 pontos

Apresentar o valor de t na forma pedida ..... 2 pontos

Nota – Se o examinando não recorrer a um quadro, mas apresentar uma justificação equivalente, a pontuação a atribuir, nesta etapa, não deve ser desvalorizada.

5.1. ..... **20 pontos**

Calcular $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ..... 2 pontos

Escrever uma equação da assimptota horizontal ..... 1 ponto

Identificar o declive da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa e com $f'(e)$ ..... 2 pontos

Determinar f' em $]1,+\infty[$ ..... 7 pontos

- Escrever $\left(\frac{2+\ln x}{x}\right)'$ ..... 1 ponto
- Escrever $\frac{(2+\ln x)'\,x-(2+\ln x)\,x'}{x^2}$ ..... 2 pontos
- Determinar $(x)'$ ..... 1 ponto
- Determinar $(2+\ln x)'$ ..... 2 pontos
- Obter f' ..... 1 ponto

Determinar $f'(e)$ ..... 1 ponto

Determinar $f(e)$ ..... 1 ponto

Escrever uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa e .... 3 pontos

Determinar a abcissa do ponto de intersecção da assimptota do gráfico de f com a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa e ..... 2 pontos

Indicar as coordenadas do ponto P ..... 1 ponto

5.2. ..... **15 pontos**

Equacionar o problema ..... 5 pontos

Reproduzir os gráficos visualizados na calculadora (**ver notas 1** e **2**) ..... 6 pontos

- Reproduzir o gráfico de f se $x<1$ ..... 2 pontos
- Reproduzir o gráfico de f se $x\geq 1$ ..... 2 pontos
- Reproduzir a curva $y=x^3$ ..... 2 pontos

Determinar as coordenadas dos pontos cujas ordenadas são o cubo das abcissas ..... 4 pontos

- Assinalar no gráfico o ponto cuja abcissa é solução da equação $f(x)=x^3$ se $x<1$ ..... 1 ponto
- Assinalar no gráfico o ponto cuja abcissa é solução da equação $f(x)=x^3$ se $x\geq 1$ ..... 1 ponto
- Indicar as coordenadas dos pontos na forma pedida ..... 2 pontos

Notas:

1. Se o examinando não apresentar o referencial, a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser desvalorizada em 1 ponto.

2. Se o examinando apresentar um gráfico que não respeite o domínio de f, a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser desvalorizada em 1 ponto.

6.1. ..... **15 pontos**

Referir que a área do trapézio $[ABCD]$ é igual a $\frac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}\times\overline{CD}$ (ou equivalente) ..... 1 ponto

Indicar o valor de $\overline{CD}$ ..... 2 pontos

Indicar o valor de $\overline{BC}$ ..... 2 pontos

Determinar $\overline{OA}$ ..... 7 pontos

- Escrever $4\cos(2x)=0$ ..... 1 ponto
- Resolver a equação trigonométrica ..... 3 pontos
- Indicar a abcissa do ponto A ..... 2 pontos
- Indicar o valor de $\overline{OA}$ ..... 1 ponto

Calcular o valor exacto da área do trapézio $[ABCD]$ ..... 3 pontos

6.2. ..... **10 pontos**

Determinar f' ..... 3 pontos

Determinar f'' ..... 3 pontos

Escrever $4\cos(2x)-8\,\mathrm{sen}(2x)-16\cos(2x)$ ..... 1 ponto

Concluir o pretendido ..... 3 pontos

7. ..... **15 pontos**

A composição deve apresentar os pontos seguintes:

A) identificar a opção que representa f
B) indicar uma razão que permita rejeitar a opção I
C) indicar uma razão que permita rejeitar a opção II
D) indicar uma razão que permita rejeitar a opção IV

Na tabela seguinte, indica-se como deve ser classificada a resposta a este item, de acordo com os níveis de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa e os níveis de desempenho no domínio específico da disciplina.

Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina / Descritores do nível de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa			**Níveis***		
			1	**2**	**3**
Níveis	**6**	Apresenta correctamente os quatro pontos, OU apenas os pontos B, C e D.	13	14	15
	5	Apresenta correctamente apenas os pontos A, B e C, OU apenas os pontos A, B e D, OU apenas os pontos A, C e D.	10	11	12
	4	Apresenta correctamente apenas os pontos B e C, OU apenas os pontos B e D, OU apenas os pontos C e D.	7	8	9
	3	Apresenta correctamente apenas os pontos A e B, OU apenas os pontos A e C, OU apenas os pontos A e D.	4	5	6
	2	Apresenta correctamente apenas o ponto B, OU apenas o ponto C, OU apenas o ponto D.	1	2	3
	1	Apresenta apenas o ponto A.	1	1	1

***** Descritores apresentados nos Critérios Gerais de Classificação.

Exame nacional de Matemática A **(2011, 1.ª fase)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. A igualdade da opção A é válida para acontecimentos contrários, a igualdade da opção B é válida para acontecimentos incompatíveis e a condição da opção C é válida para acontecimentos não equiprováveis.
Como A e B são dois acontecimentos independentes, sabemos que $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$; e assim, temos que:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(A)} = P(B)$$

Resposta: **Opção D**

2. Como o código tem 4 algarismos e sabemos que 2 deles são «7» e os restantes 2 são diferentes de «7», podemos começar por calcular o número de situações diferentes em que os algarismos 7 podem ser dispostos ($^4C_2$, que corresponde a selecionar 2 das 4 posições do código, sem considerar a ordem, porque estas posições serão ambas ocupadas por algarismos iguais - o algarismo «7»).
Depois, por cada uma destas escolhas, existem 9 hipóteses (todos os algarismos à excepção do «7») para ocupar a primeira posição não ocupada, e outras 9 para a segunda posição não ocupada, pelo que o número total de códigos pode ser calculado como:

$$^4C_2 \times 9 \times 9 = 486$$

Resposta: **Opção A**

3. Como a reta $y = 2x - 4$ é assíntota do gráfico de g, temos que:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 2$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) - 2x) = -4$

Da definição de assíntota temos que

$$\lim_{x \to +\infty} \big(g(x) - \big(2x - 4\big)\big) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} (g(x) - 2x + 4) = 0$$

Resposta: **Opção C**

4. Analisando cada uma das opções, temos:

   - Como $f(0) = 2^0 - 9 = 1 - 9 = -8$ e $f(1) = 2^1 - 9 = 2 - 9 = -7$, não se verifica a condição $f(0) < 0 < f(1)$, pelo que o teorema de Bolzano não permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f no intervalo $]0,1[$
   - Como $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} (2^x - 9) = 2^5 - 9 = 23$ e $f(5) = \dfrac{1-e^5}{5}$, temos que $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) \neq f(5)$, pelo que a função f não é contínua para $x = 5$, logo não é contínua no intervalo $]4,6[$, pelo que o teorema de Bolzano não permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f nesse intervalo
   - Como $f(6) = \dfrac{1-e^6}{6} \approx -67$ e $f(7) = \dfrac{1-e^7}{7} \approx -157$, não se verifica a condição $f(6) < 0 < f(7)$, pelo que o teorema de Bolzano não permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f no intervalo $]6,7[$

   Assim, de entre as opções apresentadas o intervalo $]1{,}4[$ é o único em que o teorema de Bolzano permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f:

Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $[0{,}5[$, é contínua em $[0{,}5[$, e também, em $[1,4]$, porque $[1,4] \subset [0{,}5[$ Como $-7 < 0 < 7$, ou seja, $f(1) < 0 < f(4)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]1{,}4[$ tal que $f(c) = 0$, ou seja, que existe, pelo menos, um zero da função f no intervalo $]1{,}4[$	C.A. $f(1) = 2^1 - 9 = 2 - 9 = -7$ $f(4) = 2^4 - 9 = 16 - 9 = 7$

   Resposta: **Opção B**

5. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)^2 =$$

   (fazendo $y = \dfrac{x}{2}$ temos que $x = 2y$, e se $x \to 0$, então $y \to 0$)

   $$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{2y}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\times\frac{\operatorname{sen} y}{y}\right)\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\times 1\right)^2 = \frac{1}{4}$$

   Resposta: **Opção C**

6. Pela observação do gráfico podemos afirmar que:

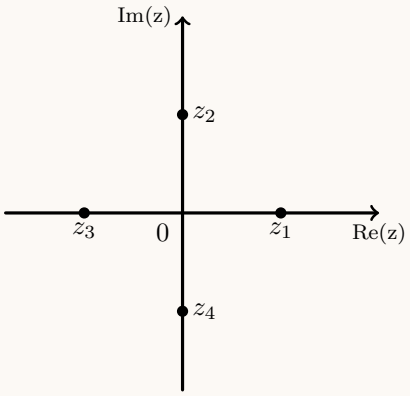
   - Em $x = -3$ a função é crescente, ou seja, $f'(-3) > 0$
   - Em $x = 0$ a função é decrescente, ou seja, $f'(0) < 0$
   - Em $x = 6$ a função é crescente, ou seja, $f'(6) > 0$

   Assim, temos que:

   - $f'(0) \times f'(6) < 0$
   - $f'(-3) \times f'(6) > 0$
   - $f'(-3) \times f'(0) < 0$
   - $f'(0) \times f'(6) < 0$

   Resposta: **Opção D**

7. Sabemos que $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$, e que é válida a igualdade $i^n = i^k$, onde k é o resto da divisão inteira de n por 4.



Assim,

- como $4n = 4 \times n + \mathbf{0}$, temos que $i^{4n} = i^0 = 1$
- como $4n + 1 = 4 \times n + \mathbf{1}$ temos que $i^{4n+1} = i^1 = i$
- como $4n + 2 = 4 \times n + \mathbf{2}$ temos que $i^{4n+2} = i^2 = -1$

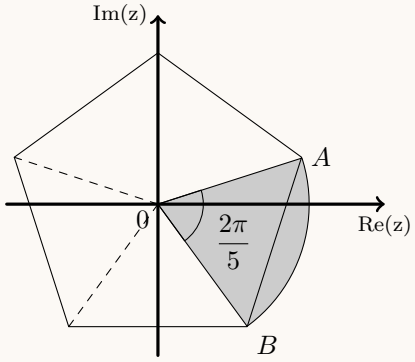
Assim temos que:

$i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} = 1 + i - 1 = i$, pelo que, de acordo com a figura, temos que $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} = z_2$

Resposta: **Opção B**

8. Como a área do setor circular é dada por $\dfrac{\alpha r^2}{2}$, onde α é a amplitude do ângulo ao centro do setor circular e r o raio da circunferência, e designado por w o número complexos que tem por imagem geométrica o ponto A, temos que:

- $r = |w| = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$ (usando a fórmula de Moivre);
- α é a amplitude do ângulo AOB e como A e B são vértices adjacentes de um pentágono regular centrado na origem (por serem raízes de índice 5 de um mesmo número complexo) temos que $\alpha = \dfrac{2\pi}{5}$



Logo o valor da área do setor circular AOB é

$$\frac{\alpha r^2}{2} = \frac{\frac{2\pi}{5} \times 2^2}{2} = \frac{2\pi}{5} \times 2 = \frac{4\pi}{5}$$

Resposta: **Opção B**

GRUPO II

1.

1.1. Como z_1 é raíz do polinómio, este é divisível por $(z-1)$, pelo que podemos usar a regra de Ruffini para fazer a divisão e obter um polinómio de grau 2.

	1	-1	16	-16
1		1	0	16
	1	0	16	0

E assim temos que
$z^3 - z^2 + 16z - 16 = (z-1)(z^2 + 0z + 16) + 0 = (z-1)(z^2 + 16)$

Podemos agora determinar as raízes do polinómio $z^2 + 16$ (que também são raízes do polinómio $z^3 - z^2 + 16z - 16$) resolvendo a equação $z^2 + 16 = 0$:

$$z^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -16 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{-16} \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{16 \times (-1)} \Leftrightarrow z = 4i \vee z = -4i$$

Escrevendo as raízes encontradas na f.t., temos:
$z = 4\,\mathrm{cis}\,\dfrac{\pi}{2} \vee z = 4\,\mathrm{cis}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$

1.2. Começamos por escrever z_2 na f.t. e calcular o produto $z_2 \times z_3$ na f.t.:

Como z_2 é um imaginário puro, $\arg(z_2) = \frac{\pi}{2}$ e $|z_2| = 5$, pelo que $z_2 = 5\,\text{cis}\,\frac{\pi}{2}$

Assim temos que:
$z_2 \times z_3 = \left(5\,\text{cis}\,\frac{\pi}{2}\right) \times \left(\text{cis}\left(\frac{n\pi}{40}\right)\right) = (5\times 1)\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{40}\right) = 5\,\text{cis}\left(\frac{20\pi}{40}+\frac{n\pi}{40}\right) = 5\,\text{cis}\,\frac{20\pi+n\pi}{40}$

Como a representação geométrica do número complexo $z_2 \times z_3$ está no terceiro quadrante e pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares se
$\arg(z_2 \times z_3) = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{4\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{8k\pi}{4} = \frac{5\pi+8k\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$, vem que:

$$\frac{20\pi+n\pi}{40} = \frac{5\pi+8k\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{20\pi+n\pi}{40} = \frac{50\pi+80k\pi}{40} \Leftrightarrow 20\pi+n\pi = 50\pi+80k\pi \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 20+n = 50+80k \Leftrightarrow n = 30+80k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Substituindo k por valores inteiros, vem que:

- $k = -1$, temos $n = -50$;
- $k = 0$, temos $n = 30$;
- $k = 1$, temos $n = 110$;

Logo, o menor valor natural de n é 30.

2.

2.1. Como a experiência «*Um jovem compra o bilhete*» se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades da variável X:«*Número de jovens que usa o multibanco no pagamento*», segue o modelo binomial $\left(P(X=k) =^n C_k\, p^k\, q^{n-k}\right)$.

Temos que:

- $n = 9$ (serão comprados bilhetes 9 vezes de forma independente).
- $p = 0{,}6$ (é a probabilidade do sucesso, ou seja "*O jovem usa o multibanco no pagamento*")
- $q = 0{,}4$, a probabilidade do insucesso pode ser calculada como $q = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

Assim, calculando da ocorrência de 6 sucessos ($k = 6$) no conjunto das 9 repetições da experiência, e arredondando o resultado às centésimas, temos:

$$P(X=6) =^9 C_6\,(0{,}6)^6\,(0{,}4)^3 \approx 0{,}25$$

2.2. Considerando a experiência aleatória que consiste em seleccionar, ao acaso, um cliente desta companhia aérea, e os acontecimentos:
B:«O cliente ter comprado um bilhete para Berlim»
V:«O cliente faz a viagem sem perder o voo»
Temos que $P\left(\overline{V}|B\right) = \frac{5}{100} = 0{,}05$, $P\left(V|\overline{B}\right) = \frac{92}{100} = 0{,}92$ e $P(B) = \frac{30}{100} = 0{,}3$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(\overline{V}\cap B\right) = P(B)\times P\left(\overline{V}|B\right) = 0{,}3\times 0{,}05 = 0{,}015$
- $P\left(\overline{B}\right) = P(B) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$
- $P\left(V\cap\overline{B}\right) = P\left(\overline{B}\right)\times P\left(V|\overline{B}\right) = 0{,}7\times 0{,}92 = 0{,}644$
- $P\left(\overline{V}\cap\overline{B}\right) = P\left(\overline{B}\right) - P\left(V\cap\overline{B}\right) = 0{,}7 - 0{,}664 = 0{,}056$

	B	$\overline{B}$	
V		0,644	
$\overline{V}$	0,015	0,056	0,071
	0,3	0,7	1

Assim, calculando a probabilidade de um passageiro desta companhia aérea perder o voo, e escrevendo o resultado na forma de dízima, temos

$$P\left(\overline{V}\right) = P\left(\overline{V}\cap B\right) + P\left(\overline{V}\cap\overline{B}\right) = 0{,}015 + 0{,}056 = 0{,}071$$

3. Temos que:

$$\begin{aligned}
1-\frac{1-P(B)}{P(A)} &= \frac{P(A)}{P(A)}-\frac{1-P(B)}{P(A)} && \\
&= \frac{P(A)-1+P(B)}{P(A)} && \\
&= \frac{P(A)+P(B)-\left(P(A\cup B)+P\left(\overline{A\cup B}\right)\right)}{P(A)} && \text{Teorema: } P(X)+P\left(\overline{X}\right)=1 \\
&= \frac{P(A)+P(B)-P(A\cup B)-P\left(\overline{A\cup B}\right)}{P(A)} && \\
&= \frac{P(A\cap B)-P\left(\overline{A\cup B}\right)}{P(A)} && \text{Teorema: } P(X\cap Y)=P(X)-P(Y)-P(X\cup Y) \\
&= \frac{P(A\cap B)}{P(A)}-\frac{P\left(\overline{A\cup B}\right)}{P(A)} && \\
&= P(B|A)-\frac{P\left(\overline{A\cup B}\right)}{P(A)} && \text{Definição: } P(X|Y)=\frac{P(X\cap Y)}{P(Y)}
\end{aligned}$$

Logo $1-\dfrac{1-P(B)}{P(A)} = P(B|A)-\dfrac{P\left(\overline{A\cup B}\right)}{P(A)} \Leftrightarrow P(B|A) = 1-\dfrac{1-P(B)}{P(A)}+\dfrac{P\left(\overline{A\cup B}\right)}{P(A)}$

Como $\dfrac{P\left(\overline{A\cup B}\right)}{P(A)} \geq 0$, então $P(B|A) \geq 1-\dfrac{1-P(B)}{P(A)}$ *q.e.d.*

4. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$T'(t) = \left(15+0{,}1t^2e^{-0{,}15t}\right)' = (15)' + \left(0{,}1t^2e^{-0{,}15t}\right)' = 0+0{,}1\left((t^2)'e^{-0{,}15t}+t^2(e^{-0{,}15t})'\right) =$$

$$= 0{,}1\left(2t\times e^{-0{,}15t}+t^2(-0{,}15)e^{-0{,}15t}\right) = 0{,}1\left(2te^{-0{,}15t}-0{,}15t^2e^{-0{,}15t}\right) =$$

$$= 0{,}2te^{-0{,}15t}-0{,}015t^2e^{-0{,}15t} = te^{-0{,}15t}(0{,}2-0{,}015t)$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$T'(t)=0 \Leftrightarrow te^{-0{,}15t}(0{,}2-0{,}015t)=0 \Leftrightarrow t=0 \vee \underbrace{e^{-0{,}15t}=0}_{\text{Eq. Imp.},\,e^{-0{,}15t}>0} \vee\, 0{,}2-0{,}015t=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=0 \vee 0{,}2=0{,}015t \Leftrightarrow t=0 \vee \frac{0{,}2}{0{,}015}=t \Leftrightarrow t=0 \vee t=\frac{40}{3}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

t	0		$\frac{40}{3}$		20
$T'(x)$	0	+	0	−	−
$T(x)$	min	↗	Máx	↘	

Assim, como C é crescente no intervalo $\left[0,\frac{40}{3}\right]$ e decrescente no intervalo $\left[\frac{40}{3},20\right]$ podemos concluir que $\frac{40}{3}$ é único o maximizante da função.

Como $\frac{40}{3} \approx 13{,}333$ corresponde a 13 horas e $0{,}333\times 60$ minutos (ou seja 20 minutos), temos que às 13 horas e 20 minutos do dia 1 de Abril de 2010, se registou, no museu, a temperatura ambiente máxima.

5.

5.1. Averiguando a existência de assintotas horizontais, temos:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{x-1} = \dfrac{3}{-\infty-1} = \dfrac{3}{-\infty} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{\ln x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} + \underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}}_{\text{Lim notável}} = \dfrac{2}{+\infty} + 0 = 0+0 = 0$

Pelo que podemos afirmar que a reta de equação $y = 0$ é a assintota horizontal do gráfico de f.

Determinando a expressão da derivada, para $x > 1$, temos:

$$\left(\frac{2+\ln x}{x}\right)' = \frac{(2+\ln x)'(x) - (2+\ln x)(x)'}{x^2} = \frac{(0+\frac{1}{x})(x) - (2+\ln x)(1)}{x^2} = \frac{1-2-\ln x}{x^2} = \frac{-1-\ln x}{x^2}$$

Como $e > 1$, o declive da reta tangente no ponto de abcissa e, é dado por:

$$m = f'(e) = \frac{-1-\ln e}{e^2} = \frac{-1-1}{e^2} = \frac{-2}{e^2}$$

Determinando a ordenada do ponto do gráfico de abcissa e, temos:

$$f(e) = \frac{2+\ln e}{e} = \frac{2+1}{e} = \frac{3}{e}$$

Como o ponto de abcissa e, também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx + b$, para calcular o valor de b:

$$\frac{3}{e} = \frac{-2}{e^2} \times e + b \;\Leftrightarrow\; \frac{3}{e} = -\frac{2}{e} + b \;\Leftrightarrow\; \frac{3}{e} + \frac{2}{e} = b \;\Leftrightarrow\; \frac{5}{e} = b$$

Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa e, é:

$$y = -\frac{2}{e^2} \times x + \frac{5}{e}$$

E a abcissa do ponto de intersecção com a reta de equação $y = 0$ (a assintota horizontal), pode ser calculada como:

$$y = -\frac{2}{e^2} \times x + \frac{5}{e} \;\wedge\; y = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 = -\frac{2}{e^2} \times x + \frac{5}{e} \;\Leftrightarrow\; \frac{2}{e^2} \times x = \frac{5}{e} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{5e^2}{2e} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{5e}{2}$$

Ou seja, as coordenadas do ponto de interseção da assintota horizontal com a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa e, são

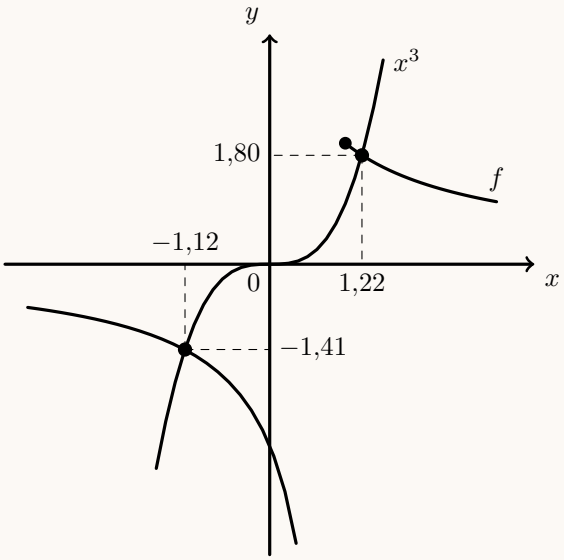
$$P\left(\frac{5e}{2}, 0\right)$$

5.2. Os pontos do plano cuja ordenada é o cubo da abcissa estão sobre o gráfico da função $g(x) = x^3$.

Assim, as abcissas dos pontos do gráfico de f que verificam esta condição são as soluções da equaçao:

$$f(x) = x^3$$

Logo, traçando na calculadora o gráfico da função f, respeitando o domínio de cada um dos ramos, e a função $g(x) = x^3$ numa janela que permita identificar os pontos de interseção dos gráficos, obtemos o gráfico que se reproduz na figura ao lado.



Recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados de um ponto de interseção de dois gráficos, determinamos o valor das coordenadas dos dois pontos em que o gráfico da função f interseta o gráfico da função g. Os valores das coordenadas (com aproximação às centésimas) são $(-1{,}12; -1.41)$ e $(1{,}22, 1{,}80)$

6.

6.1. Podemos calcular a área do trapézio como a soma das áreas do retângulo $[ODCB]$ e do triângulo $[OAB]$.

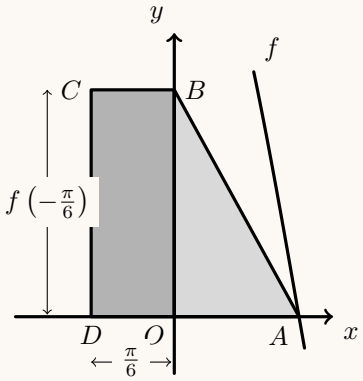
A base do retângulo é dada pela distância do ponto D à origem:

$$\overline{OD} = |x_D| = \left|-\frac{\pi}{6}\right| = \frac{\pi}{6}$$

e a altura é a ordenada do ponto C:

$$\overline{DC} = f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\left(2\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 4\cos\frac{\pi}{3} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$



A altura do triângulo também é ordenada do ponto C, $\overline{OB} = \overline{DC}$ e a base é a menor é a abcissa do ponto $\overline{OA}$, ou seja, a solução positiva da equação $f(x) = 0$.

Assim, resolvendo a equação vem:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\,, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, para $k = 0$, a menor solução positiva da equação é $x = \frac{\pi}{4}$

Assim, calculando a área do trapézio, vem:

$$A_{[ABCD]} = A_{[ODCB]} + A_{[OAB]} = \overline{OD} \times \overline{DC} + \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \frac{\pi}{6} \times 2 + \frac{\frac{\pi}{4} \times 2}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$$

6.2. Determinando a expressão da primeira derivada de f, vem:

$$f'(x) = (4\cos(2x))' = 4(2x)'(-\operatorname{sen}(2x)) = 4 \times 2 \times (-\operatorname{sen}(2x)) = -8\operatorname{sen}(2x)$$

Depois, determinando a expressão da segunda derivada, vem:

$$f''(x) = (f'(x))' = (-8\operatorname{sen}(2x))' = -8(2x)'\cos(2x) = -16\cos(2x)$$

Assim, temos que, para qualquer número real x,

$$f(x)+f'(x)+f''(x) = \Big(4\cos(2x)\Big)+\Big(-8\operatorname{sen}(2x)\Big)+\Big(-16\cos(2x)\Big) = 4\cos(2x)-16\cos(2x)-8\operatorname{sen}(2x) =$$

$$= -12\cos(2x) - 8\operatorname{sen}(2x) = -4 \times 3\cos(2x) - 4 \times 2\operatorname{sen}(2x) = -4\Big(3\cos(2x) + 2\operatorname{sen}(2x)\Big)\ ,\ \ q.e.d.$$

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/2.ª Fase 12 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2010

VERSÃO 1

Na folha de respostas, indique, de forma legível, a versão da prova.

A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens do Grupo I.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica, sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva, de forma legível, a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção correcta.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 4, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\,\pi\, r^3$
(r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ \operatorname{cis} \dfrac{\theta + 2k\pi}{n},\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção seleccionada.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Uma caixa contém bolas indistinguíveis ao tacto e de duas cores diferentes: azul e roxo.

Sabe-se que:

- o número de bolas azuis é 8
- extraindo-se, ao acaso, uma bola da caixa, a probabilidade de ela ser azul é igual a $\frac{1}{2}$

Quantas bolas roxas há na caixa?

(A) 16 **(B)** 12 **(C)** 8 **(D)** 4

2. Considere todos os números de cinco algarismos que se podem formar com os algarismos $5, 6, 7, 8$ e 9.

De entre estes números, quantos têm, exactamente, três algarismos 5?

(A) ${}^5C_3 \times {}^4A_2$ **(B)** ${}^5C_3 \times 4^2$ **(C)** ${}^5A_3 \times 4^2$ **(D)** ${}^5A_3 \times {}^4C_2$

3. Na sequência seguinte, reproduzem-se os três primeiros elementos e os três últimos elementos de uma linha do Triângulo de Pascal.

$$1 \quad 15 \quad 105 \quad \ldots \quad 105 \quad 15 \quad 1$$

São escolhidos, ao acaso, dois elementos dessa linha.

Qual é a probabilidade de a soma desses dois elementos ser igual a 105?

(A) 1 **(B)** $\frac{1}{60}$ **(C)** $\frac{1}{120}$ **(D)** 0

4. De uma função h, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- h é uma função par;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}(h(x)-2x)=0$

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)$?

(A) $+\infty$ **(B)** -2 **(C)** 0 **(D)** $-\infty$

5. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x)=\begin{cases}e^x & \text{se } x\leq 0\\ \ln x & \text{se } x>0\end{cases}$$

Considere a sucessão de termo geral $u_n=\dfrac{1}{n}$

Qual é o valor de $\lim\limits_{n\to+\infty}g(u_n)$?

(A) $+\infty$ **(B)** 1 **(C)** 0 **(D)** $-\infty$

6. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f', primeira derivada de f

Seja $a\in\mathbb{R}^+$ um ponto do domínio de f, tal que $f'(a)=0$

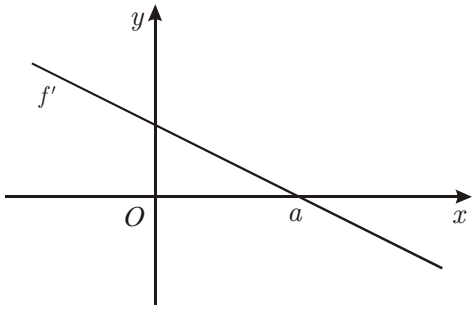


Figura 1

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A função f tem um mínimo para $x=a$

(B) A função f tem um ponto de inflexão para $x=a$

(C) A função f é crescente em $]0,\ a[$

(D) A função f é decrescente em $\mathbb{R}$

7. A Figura 2 representa um pentágono $[ABCDE]$ no plano complexo.

Os vértices do pentágono são as imagens geométricas das raízes de índice n de um número complexo w

O vértice A tem coordenadas $(1, 0)$

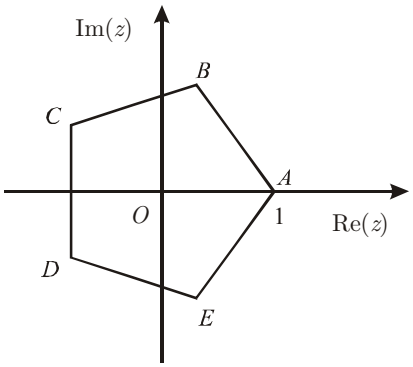


Figura 2

Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o vértice D do pentágono?

(A) $5\,\mathrm{cis}\left(\frac{6\pi}{5}\right)$ **(B)** $\mathrm{cis}\left(\frac{6\pi}{5}\right)$ **(C)** $\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ **(D)** $\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)$

8. Seja w o número complexo cuja imagem geométrica está representada na Figura 3.

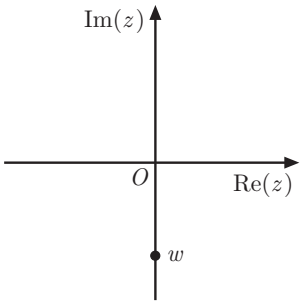


Figura 3

A qual das rectas seguintes pertence a imagem geométrica de w^6 ?

(A) Eixo real

(B) Eixo imaginário

(C) Bissectriz dos quadrantes ímpares

(D) Bissectriz dos quadrantes pares

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \sqrt{2}\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e $z_2 = 3$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

1.1. Determine o número complexo $w = \frac{{z_1}^4 + 4i}{i}$

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

1.2. Escreva uma condição, em $\mathbb{C}$, que defina, no plano complexo, a circunferência que tem centro na imagem geométrica de z_2 e que passa na imagem geométrica de z_1

2. A Figura 4 e a Figura 5 representam, respectivamente, as planificações de dois dados cúbicos equilibrados, A e B.

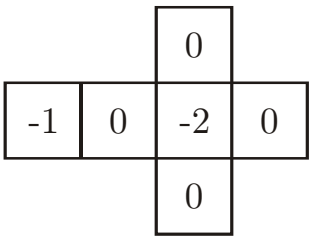


Figura 4

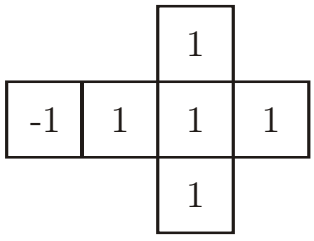


Figura 5

Lançam-se, simultaneamente, os dois dados.

2.1. Seja X a variável aleatória «soma dos números saídos nas faces voltadas para cima, em cada um dos dados».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X

Apresente as probabilidades na forma de fracção.

2.2. Considere que o número da face voltada para cima no dado A (Figura 4) é a abcissa de um ponto Q do referencial o.n. xOy, e que o número da face voltada para cima no dado B (Figura 5) é a ordenada desse ponto Q.

Considere agora os acontecimentos:

J: «o número saído no dado A é negativo»;

L: «o ponto Q pertence ao terceiro quadrante».

Indique o valor de $P(L \mid J)$, sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada.

Apresente o resultado na forma de fracção.

Numa composição, explique o seu raciocínio, começando por referir o significado de $P(L \mid J)$ no contexto da situação descrita.

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos tais que $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ e $P(B) \neq 0$

Mostre que $\dfrac{P(A \cup B)}{P(B)} - P(\overline{A} \mid B) = \dfrac{P(A)}{P(B)}$

(P designa probabilidade; $\overline{A}$ designa o acontecimento contrário de A; $P(\overline{A} \mid B)$ designa a probabilidade de $\overline{A}$, dado B)

4. Considere a função f, de domínio $]0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 3x}{x} & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ \\ \dfrac{1}{5}x - \ln x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Resolva os itens **4.1.** e **4.2.**, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

4.1. Estude a função f quanto à existência de assimptotas oblíquas.

4.2. Mostre que a função f tem um extremo relativo no intervalo $]2, +\infty[$

4.3. Determine a área do triângulo $[ABC]$, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Sabe-se que:

- A, B e C são pontos do gráfico da função f
- A e B são os pontos cujas abcissas são as soluções, no intervalo $]0, 2]$, da equação $f(x) = f(15)$
- C é o ponto cuja ordenada é o mínimo da função f, no intervalo $]0, 2]$, e cuja abcissa pertence ao intervalo $]0, 2]$

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as coordenadas dos pontos A, B e C, com arredondamento às centésimas;
- apresentar o resultado pedido, com arredondamento às décimas.

5. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x + e^{2x^3 - 1}$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

5.1. Mostre que $f(x) = 1{,}5$ tem, pelo menos, uma solução em $\left]-2, -1\right[$

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

5.2. Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = 0$

6. Um depósito de combustível tem a forma de uma esfera.

A Figura 6 e a Figura 7 representam dois cortes do mesmo depósito, com alturas de combustível distintas.

Os cortes são feitos por um plano vertical que passa pelo centro da esfera.

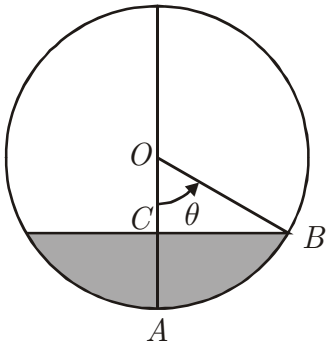


Figura 6

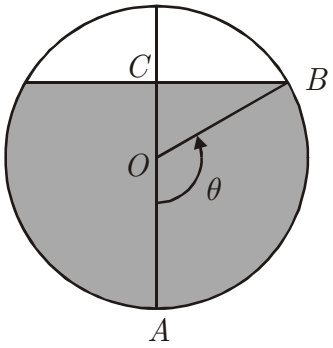


Figura 7

Sabe-se que:

- o ponto O é o centro da esfera;
- a esfera tem 6 metros de diâmetro;
- a amplitude θ, em radianos, do arco AB é igual à amplitude do ângulo ao centro AOB correspondente.

A altura $\overline{AC}$, em metros, do combustível existente no depósito é dada, em função de θ, por h, de domínio $[0, \pi]$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

6.1. Mostre que $h(\theta) = 3 - 3\cos(\theta)$, para qualquer $\theta \in]0, \pi[$

6.2. Resolva a condição $h(\theta) = 3, \quad \theta \in]0, \pi[$

Interprete o resultado obtido no contexto da situação apresentada.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

GRUPO II

1.

1.1. ..... 15 pontos
1.2. ..... 15 pontos

2.

2.1. ..... 15 pontos
2.2. ..... 15 pontos

3. ..... 15 pontos

4.

4.1. ..... 10 pontos
4.2. ..... 10 pontos
4.3. ..... 15 pontos

5.

5.1. ..... 15 pontos
5.2. ..... 10 pontos

6.

6.1. ..... 15 pontos
6.2. ..... 10 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/2.ª Fase 11 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2010

COTAÇÕES

GRUPO I

..... (8 × 5 pontos)..... **40 pontos**

GRUPO II

1.
1.1. ..... 15 pontos
1.2. ..... 15 pontos

2.
2.1. ..... 15 pontos
2.2. ..... 15 pontos

3. ..... 15 pontos

4.
4.1. ..... 10 pontos
4.2. ..... 10 pontos
4.3. ..... 15 pontos

5.
5.1. ..... 15 pontos
5.2. ..... 10 pontos

6.
6.1. ..... 15 pontos
6.2. ..... 10 pontos

160 pontos

TOTAL..... **200 pontos**

A classificação da prova deve respeitar integralmente os critérios gerais e os critérios específicos a seguir apresentados.

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos de classificação apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro, previsto na grelha de classificação.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos. No entanto, em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar, inequivocamente, o item a que diz respeito.

Se o examinando responder a um mesmo item mais do que uma vez, não eliminando, inequivocamente, a(s) resposta(s) que não deseja que seja(m) classificada(s), deve ser considerada apenas a resposta que surgir em primeiro lugar.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova (Versão 1 ou Versão 2) implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de escolha múltipla.

Nos itens de escolha múltipla, a cotação total do item é atribuída às respostas que apresentem, de forma inequívoca, a única opção correcta.

São classificadas com zero pontos as respostas em que é assinalada:

– uma opção incorrecta;

– mais do que uma opção.

Não há lugar a classificações intermédias.

Os critérios de classificação dos itens de resposta aberta apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação. No caso de, ponderados todos os dados contidos nos descritores, permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

Nos itens de resposta aberta, com cotação igual ou superior a quinze pontos e que impliquem a produção de um texto, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea das competências específicas da disciplina e das competências de comunicação escrita em língua portuguesa. A avaliação das competências de comunicação escrita em língua portuguesa contribui para valorizar a classificação atribuída ao desempenho no domínio das competências específicas da disciplina. Esta valorização é cerca de 10% da cotação do item e faz-se de acordo com os níveis de desempenho descritos no quadro seguinte.

Níveis	Descritores
3	Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
2	Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
1	Composição sem estruturação aparente, com erros graves de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é de zero pontos. Neste caso, não é classificado o domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

Havendo escolas em que os alunos já contactam com as novas regras ortográficas, uma vez que o Acordo Ortográfico de 1990 já foi ratificado e dado que qualquer cidadão, nesta fase de transição, pode optar pela ortografia prevista quer no Acordo de 1945, quer no de 1990, são consideradas correctas, na classificação das provas de exame nacional, as grafias que seguirem o que se encontra previsto em qualquer um destes normativos.

As respostas aos itens de resposta aberta que apresentem pontos de vista diferentes dos mencionados nos critérios específicos de classificação devem ser classificadas, se o seu conteúdo for considerado cientificamente válido e estiver adequado ao solicitado. Nestes casos, os elementos cientificamente válidos devem ser classificados, seguindo-se procedimentos análogos aos previstos nos descritores apresentados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar em situações não descritas anteriormente.

Situação	Classificação
1. Classificação de um item cujo critério se apresenta organizado por etapas.	A cotação indicada para cada etapa é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A classificação da resposta resulta da soma das pontuações das diferentes etapas, à qual se subtrai ou subtraem, eventualmente, um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 14 e/ou 19.
2. Pontuação de uma etapa dividida em passos.	A cotação indicada para cada passo é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A classificação da etapa resulta da soma das pontuações dos diferentes passos.
3. Classificação de um item ou pontuação de uma etapa cujo critério se apresenta organizado por níveis de desempenho.	A resposta é enquadrada numa das descrições apresentadas. À classificação/pontuação correspondente subtraem-se, eventualmente, um, dois ou três pontos, de acordo com o previsto nas situações 9, 10 e/ou 19.
4. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite e classificado qualquer processo de resolução cientificamente correcto. O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante a distribuição da cotação do item pelas etapas* percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.
5. Apresentação apenas do resultado final, embora a resolução do item exija cálculos e/ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
6. Utilização de processos de resolução que não respeitam as instruções dadas [exemplo: «usando métodos analíticos»].	A etapa em que a instrução não é respeitada é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
7. Ausência de apresentação dos cálculos e/ou das justificações necessárias à resolução de uma etapa*.	A etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
8. Ausência de apresentação explícita de uma dada etapa.	Se a resolução apresentada permitir perceber, inequivocamente, que a etapa foi percorrida, a mesma é pontuada com a cotação total para ela prevista.
9. Transposição incorrecta de dados do enunciado.	Se o grau de dificuldade da resolução não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.

* Em situações em que o critério é aplicável tanto a **etapas** como a **passos**, utiliza-se apenas o termo «etapas», por razões de simplificação da apresentação.

Situação	Classificação
10. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre.
11. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
12. Ocorrência de um erro na resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada de acordo com o erro cometido. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido: – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
13. Resolução incompleta de uma etapa.	Se, à resolução da etapa, faltar apenas o passo final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
14. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação de um arredondamento incorrecto.	É subtraído um ponto à classificação total da resposta, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
15. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fracção, e a resposta apresenta-se na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final [exemplo: «15» em vez de «15 metros»].	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a cotação total para ela prevista.
17. Apresentação do resultado final com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exacto.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
18. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, e/ou apresentação do resultado final incorrectamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
19. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à classificação total da resposta, excepto: – se as incorrecções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a **8.** ..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

As respostas correctas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	C	B	D	A	D	C	B	A
Versão 2	B	C	A	D	A	B	C	D

GRUPO II

É de aceitar qualquer processo de resolução cientificamente correcto, ainda que não esteja previsto nestes critérios específicos, nem no Programa (ver critério 4 dos critérios gerais).

1.1. ..... **15 pontos**

Escrever o numerador da fracção na forma algébrica ..... 5 pontos

Escrever $z_1{}^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 \operatorname{cis}(\pi)$ ..... 3 pontos

Escrever $4 \operatorname{cis}(\pi) = -4$ ..... 1 ponto

Obter $-4 + 4i$ ..... 1 ponto

Calcular $\dfrac{-4 + 4\,i}{i}$ na forma algébrica ..... 5 pontos

Multiplicar ambos os termos da fracção por $(-i)$ (ou equivalente) 2 pontos

Obter $4 + 4i$ ..... 3 pontos

Calcular $4 + 4\,i$ na forma trigonométrica ..... 4 pontos

Determinar $\left|w\right|$ ..... 2 pontos

Indicar $\arg w = \dfrac{\pi}{4}$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Escrever o resultado na forma pedida $\left(w = \sqrt{32} \operatorname{cis} \dfrac{\pi}{4}\right)$ ..... 1 ponto

1.2. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Calcular o raio da circunferência ..... 10 pontos

Escrever z_1 na forma algébrica ..... 4 pontos

Calcular $z_2 - z_1$ ou $z_1 - z_2$ ..... 3 pontos

Calcular $\left|z_2 - z_1\right|$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

Apresentar a condição pedida (**ver nota**)..... 5 pontos

2.º Processo:

Representar a imagem geométrica de z_2 no plano ou indicar as coordenadas.. 1 ponto

Representar a imagem geométrica de z_1 no plano ou indicar as coordenadas .. 5 pontos

Determinar a distância entre as imagens geométricas de z_1 e de z_2 $(\sqrt{5})$ ... 4 pontos

Apresentar a condição pedida (**ver nota**)..... 5 pontos

Nota – Caso o examinando não determine o raio da circunferência, mas escreva a condição $\left|z - z_2\right| = r$, ou equivalente, a pontuação a atribuir, nesta etapa, é de 2 pontos.

Caso o examinando escreva $\left|z - z_2\right| \leq \sqrt{5}$, ou equivalente, a pontuação a atribuir, nesta etapa, é de 3 pontos.

2.1. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Construir uma tabela de dupla entrada para a variável X (ou equivalente)..... 5 pontos

Indicar os valores que a variável X pode tomar $(\{-3, -2, -1, 0, 1\})$ ..... 3 pontos

Indicar a probabilidade de cada um dos valores da variável X ..... 5 pontos

Apresentar a tabela de distribuição de probabilidades (**ver nota**) ..... 2 pontos

2.º Processo:

Indicar os valores que a variável X pode tomar $(\{-3, -2, -1, 0, 1\})$ ..... 3 pontos

Calcular a probabilidade de cada um dos valores da variável X $(2+2+2+2+2)$. 10 pontos

Apresentar a tabela de distribuição de probabilidades (**ver nota**) ..... 2 pontos

Nota – A pontuação relativa a esta etapa só é atribuída se, na etapa anterior, não tiverem sido atribuídos zero pontos.

2.2. ..... **15 pontos**

A composição deve abordar os seguintes pontos:

1. Referir que a probabilidade pedida é $\frac{1}{6}$ (ou equivalente).

2. Explicar o significado de $P(L \mid J)$ no contexto da situação descrita (probabilidade de o ponto Q pertencer ao 3.º quadrante, sabendo que o número saído no dado A é negativo) (**ver nota**).

3. Referir que, para Q pertencer ao 3.º quadrante, o número saído no dado B tem de ser -1 (**ver nota**).

Na tabela seguinte, indica-se como deve ser classificada a resposta a este item, de acordo com os níveis de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa, descritos nos critérios gerais, e os níveis de desempenho no domínio específico da disciplina.

Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina			Descritores do nível de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa – Níveis*		
			1	2	3
Níveis	4	A composição aborda, correctamente, os três pontos.	13	14	15
	3	A composição aborda, correctamente, apenas dois dos três pontos.	9	10	11
	2	A composição aborda, correctamente, apenas o ponto 2 ou apenas o ponto 3.	5	6	7
	1	A composição aborda, correctamente, apenas o ponto 1.	3	3	3

* Descritores apresentados nos critérios gerais.

Nota – Se o examinando apresentar uma explicação equivalente, considerada cientificamente válida, os elementos de resposta devem ser pontuados seguindo-se os mesmos procedimentos previstos nos descritores apresentados.

3. ..... **15 pontos**

Apresenta-se, a seguir, um exemplo de resposta (**ver nota**).

$$\frac{P(A \cup B)}{P(B)} - P(\overline{A} \mid B) = \frac{P(A \cup B)}{P(B)} - \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{\big(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\big) - \big(P(B) - P(A \cap B)\big)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

De acordo com o exemplo apresentado, a resposta do examinando deve incluir a aplicação das propriedades seguintes:

- propriedade relativa à probabilidade condicionada $\left(P(\overline{A} \mid B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)}\right)$
- propriedade relativa à probabilidade da reunião de acontecimentos $\big(P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)\big)$
- propriedade relativa à probabilidade da intersecção do acontecimento contrário de A com o acontecimento B ou um diagrama que a ilustre claramente.

Níveis	Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina	Pontuação
4	O examinando aplica, correctamente, as três propriedades e conclui o pretendido.	15
3	O examinando aplica, correctamente, as três propriedades, mas não conclui o pretendido.	11
2	O examinando aplica, correctamente, apenas duas propriedades.	7
1	O examinando aplica, correctamente, apenas uma propriedade.	3

Nota – Se o examinando apresentar uma resposta equivalente, considerada cientificamente válida, os elementos de resposta devem ser pontuados seguindo-se os mesmos procedimentos previstos nos descritores apresentados.

4.1. ..... **10 pontos**

Estudar a função f quanto à existência de assimptotas oblíquas do seu gráfico (**ver nota**).

Determinar m ..... 5 pontos

Escrever $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ..... 1 ponto

Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ..... 4 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{\ln x}{x}\right)$ ..... 1 ponto

Referir que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ ..... 2 pontos

Obter $m = \dfrac{1}{5}$ ..... 1 ponto

Averiguar a existência de b ..... 3 pontos

Escrever $b = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - \dfrac{1}{5}x\right)$ ..... 1 ponto

Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - \dfrac{1}{5}x\right)$ ..... 2 pontos

Concluir que o gráfico de f não tem assimptotas oblíquas ..... 2 pontos

Nota – Se o examinando calcular outro(s) limite(s) para além dos indicados, a classificação a atribuir a este item deve ser desvalorizada em 2 pontos. Se, da aplicação desta nota, resultar uma classificação negativa, este item deve ser classificado com zero pontos.

4.2. ..... **10 pontos**

Determinar f' ..... 3 pontos

Determinar $\left(\frac{1}{5}x\right)'$ ..... 1 ponto

Determinar $(\ln x)'$ ..... 1 ponto

Escrever a expressão de f' ..... 1 ponto

Determinar o zero de f' ..... 2 pontos

Estudar o sinal de f', com recurso a um quadro (**ver nota**) ..... 4 pontos

Primeira linha do quadro ..... 1 ponto

Sinal de f' ..... 1 ponto

Relação entre o sinal de f' e a monotonia de f ..... 1 ponto

Assinalar o extremo relativo de f ..... 1 ponto

Concluir que f tem um extremo relativo ..... 1 ponto

Nota – Se o examinando não recorrer a um quadro, mas apresentar uma justificação equivalente, a pontuação a atribuir, nesta etapa, não deve ser desvalorizada.

4.3. ..... **15 pontos**

Calcular $f(15)$ $(3 - \ln 15)$ ..... 2 pontos

Representar graficamente f (**ver nota**) ..... 2 pontos

Indicar as coordenadas do ponto A $\big((0{,}50\ ,\ 0{,}29)\big)$ ..... 2 pontos

Indicar as coordenadas do ponto B $\big((1{,}75\ ,\ 0{,}29)\big)$ ..... 2 pontos

Indicar as coordenadas do ponto C $\big((1{,}00\ ,\ -0{,}28)\big)$ ..... 1 ponto

Calcular a área do triângulo $[ABC]$ ..... 6 pontos

Determinar $\overline{AB}$ ..... 2 pontos

Determinar a altura do triângulo $[ABC]$ relativa à base $[AB]$.. 2 pontos

Apresentar o resultado ..... 2 pontos

Nota – Se o examinando apresentar um gráfico que não respeite o domínio de f, a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser desvalorizada em 1 ponto.

5.1. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Justificar que a função f é contínua em $[-2, -1]$ (**ver notas 1** e **2**) ..... 4 pontos

Justificar que $f(-1) < 1{,}5 < f(-2)$ ..... 6 pontos

- Calcular $f(-2)$ ..... 2 pontos
- Calcular $f(-1)$ ..... 2 pontos
- Escrever $f(-1) < 1{,}5 < f(-2)$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Concluir o pretendido (**ver nota 3**) ..... 5 pontos

2.º Processo:

Se o examinando considerar $g(x) = f(x) - 1{,}5$

Justificar que a função g é contínua em $[-2, -1]$ (**ver notas 1** e **2**) ..... 4 pontos

Justificar que $g(-1) \times g(-2) < 0$ (ou equivalente) ..... 6 pontos

- Calcular $g(-2)$ ..... 2 pontos
- Calcular $g(-1)$ ..... 2 pontos
- Concluir que $g(-1) \times g(-2) < 0$ ..... 2 pontos

Concluir o pretendido (**ver nota 3**) ..... 5 pontos

Notas:

1. Se o examinando não referir que a função é contínua em $[-2, -1]$, mas afirmar que a função é contínua em todo o seu domínio, a pontuação a atribuir, nesta etapa, não deve ser desvalorizada.
2. Se o examinando referir que a função é contínua em $]-2, -1[$, a pontuação a atribuir, nesta etapa, é de zero pontos.
3. Se o examinando não referir que a conclusão resulta do Teorema de Bolzano ou do seu corolário, a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser desvalorizada em 2 pontos.

5.2. ..... **10 pontos**

Determinar f' ..... 4 pontos

- Determinar $(-x)'$ ..... 1 ponto
- Determinar $(e^{2x^3-1})'$ ..... 2 pontos
- Escrever a expressão de f' ..... 1 ponto

Calcular $f'(0)$ ..... 2 pontos

Calcular $f(0)$ ..... 2 pontos

Escrever a equação reduzida da recta pedida $(y = -x + e^{-1}$ ou equivalente$)$ 2 pontos

6.1. ..... **15 pontos**

Mostrar que $h(\theta) = 3 - 3\cos(\theta)$, para $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ (**ver nota**)..... 7 pontos

Justificar que $\overline{CO} = 3\cos(\theta)$ ..... 4 pontos

Indicar $\overline{AO}\ (3\,\mathrm{m})$ ..... 1 ponto

Concluir que $h(\theta) = 3 - 3\cos(\theta)$ ..... 2 pontos

Mostrar que $h(\theta) = 3 - 3\cos(\theta)$, para $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ ..... 7 pontos

Escrever $\overline{CO}$ em função de $\cos(\pi - \theta)$ ..... 2 pontos

Escrever $\overline{CO}$ em função de $\cos(\theta)$ ..... 2 pontos

Indicar $\overline{AO}\ (3\,\mathrm{m})$ ..... 1 ponto

Concluir que $h(\theta) = 3 - 3\cos(\theta)$ ..... 2 pontos

Concluir que $h(\theta) = 3 - 3\cos(\theta)$, $\forall\ \theta \in \left]0, \pi\right[$ ..... 1 ponto

Nota – Se o examinando considerar $\theta \in \left]0, \pi\right[$ em vez de $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, esta etapa deve ser pontuada com 5 pontos (3 + 1 + 1).

6.2. ..... **10 pontos**

Escrever $3 - 3\cos(\theta) = 3$ ..... 2 pontos

Obter $\cos(\theta) = 0$ ..... 2 pontos

Concluir que $\theta = \frac{\pi}{2}$ ..... 3 pontos

Interpretar o valor obtido, no contexto da situação apresentada (**ver nota**)..... 3 pontos

Nota – Apresenta-se, a seguir, um exemplo de uma interpretação correcta: «Se o depósito tem 3 metros de altura de combustível, o ângulo θ tem amplitude igual a $\frac{\pi}{2}$ radianos ».

Exame nacional de Matemática A (2010, 2.ª fase)

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como só existem bolas azuis e roxas, e a probabilidade de extrair uma bola da caixa, e ela ser azul é igual a $\frac{1}{2}$, então existem tantas bolas azuis como roxas, ou seja, existem 8 bolas roxas na caixa.

   Resposta: **Opção C**

2. Como os números têm cinco algarismos, e três deles são o algarismo «5» podemos calcular o número de formas diferentes de dispor os 3 algarismos «5» nas 5 posições do número (${}^5C_3$, não se considera relevante a ordem, por serem algarismos iguais).
   Assim, por cada disposição dos algarismos «5» existem 4 hipóteses («6», «7», «8» e o «9») para ocupar a primeira posição livre do algarismo, e ainda outras 4 para a segunda posição livre do algarismo.
   Logo, a quantidade de números deste tipo que tem exatamente 3 algarismos «5» é

   $$ {}^5C_3 \times 4 \times 4 = {}^5C_3 \times 4^2 $$

   Resposta: **Opção B**

3. Somando quaisquer dois números, dos que estão reproduzidos no enunciado, o resultado é sempre um número diferente de 105.
   Como os restantes números da mesma linha do triângulo de Pascal são todos maiores que 105, somando quaisquer dois deles, ou um deles com um dos elementos reproduzidos, o resultado será sempre superior a 105.
   Assim, não existe qualquer par de elementos desta linha do triângulo de Pascal, cuja soma seja 105, ou seja, a probabilidade da soma de dois elementos desta linha do triângulo de Pascal ser igual a 105, é nula.

   Resposta: **Opção D**

4. Como $\lim\limits_{x\to+\infty}(h(x)-2x)=0$, temos que

   $$ \lim_{x\to+\infty}(h(x)-2x)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}h(x)-\lim_{x\to+\infty}(2x)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x) \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}(h(x))=+\infty $$

   Como a função h é par, temos que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $f(-x)=f(x)$ e assim,

   $$ \lim_{x\to-\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}h(x)=+\infty $$

   Resposta: **Opção A**

5. Como $\lim u_n = \lim\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{+\infty} = 0^+$, então:

$$\lim_{n\to+\infty} g(u_n) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln x = \ln 0^+ = -\infty$$

Resposta: **Opção D**

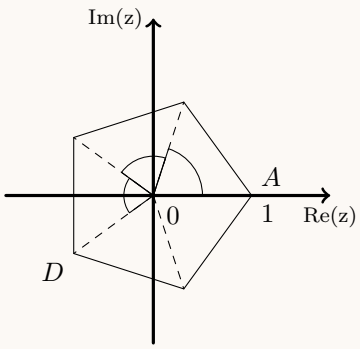
6. Representando a informação do gráfico sob a forma de uma tabela, temos:

x		0		a	
$f'(x)$	+	+	+	0	−
$f(x)$	↗		↗	Máx	↘

Assim, podemos verificar que a função f é crescente em $]0, a[$

Resposta: **Opção C**

7. Os vértices do pentágono são a representação geométrica de 5 números complexos, que são raízes de índice 5 do mesmo número complexo. Sejam z e w os números complexos que têm por imagens geométricas os pontos A e D, respetivamente.



Como o ponto A tem de coordenadas (1,0), temos que $z = \text{cis}\,0$.

Como $|z| = |w|$ e $\arg(w) = 3 \times \frac{2\pi}{5} = \frac{6\pi}{5}$, porque os vértices do pentágono dividem o ângulo giro em 5 partes iguais, temos que $w = \text{cis}\,\frac{6\pi}{5}$

Resposta: **Opção B**

8. Como a representação geométrica de w está sobre a parte negativa do eixo imaginário, sabemos que $w = \rho\,\text{cis}\,\frac{3\pi}{2}$.

Assim, recorrendo à fórmula de Moivre, temos que $w^6 = \rho^6\,\text{cis}\left(6 \times \frac{3\pi}{2}\right) = \rho^6\,\text{cis}\,\frac{18\pi}{2} = \rho^6\,\text{cis}\,(9\pi)$

Descontando as voltas completas, temos que $w^6 = \rho^6\,\text{cis}\,(9\pi) = \rho^6\,\text{cis}\,(9\pi - 8\pi) = \rho^6\,\text{cis}\,\pi$, logo podemos concluir que w^6 é um número real negativo.

Resposta: **Opção A**

GRUPO II

1.

1.1. Começamos por determinar z^4, recorrendo à fórmula de Moivre:

$$z^4 = \left(\sqrt{2}\,\text{cis}\,\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^4 = (\sqrt{2})^4\,\text{cis}\,\left(4\times\frac{\pi}{4}\right) = 4\,\text{cis}\,\pi = -4+0i = -4$$

Assim temos que:

$$w = \frac{z^4+4i}{i} = \frac{-4+4i}{i} = \frac{(-4+4i)\times i}{i\times i} = \frac{-4i+4i^2}{i^2} = \frac{-4-4i}{-1} = 4+4i$$

Escrevendo w na f.t. temos $w = \rho\,\text{cis}\,\theta$, onde:

- $\rho = |w| = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{4^2\times 2} = 4\sqrt{2}$
- $\text{tg}\,\theta = \frac{1}{1} = 1$; como $\text{sen}\,\theta > 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \frac{\pi}{4}$

Logo $w = 4\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4}$

1.2. Começamos por escrever z_1 na f.a.:

$$z_1 = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{2}{2}+\frac{2}{2}i = 1+i$$

O raio da da circunferência é $|z_2-z_1|$, ou seja, a distância entre as representações geométricas dos dois números complexos. Logo temos que :

$|z_2-z_1| = |3-(1+i)| = |3-1-i| = |2-i| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

Assim a circunferência que tem centro na imagem geométrica de z_2 e que passa na imagem geométrica de z_1 é definida por:

$$|z-z_2| = |z_2-z_1| \quad\Leftrightarrow\quad |z-3| = \sqrt{5}$$

2.

2.1. Organizando todas as somas possíveis numa tabela, temos:

Dado B \ Dado A	0	0	0	0	-1	-2
-1	-1	-1	-1	-1	-2	-3
1	1	1	1	1	0	-1
1	1	1	1	1	0	-1
1	1	1	1	1	0	-1
1	1	1	1	1	0	-1
1	1	1	1	1	0	-1

Logo, pela observação da tabela, podemos observar os valores possíveis para a soma e as respetivas probabilidades:

- $P(X=-3) = \frac{1}{36}$
- $P(X=-2) = \frac{1}{36}$
- $P(X=-1) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$
- $P(X=0) = \frac{5}{36}$
- $P(X=1) = \frac{4\times 5}{36} = \frac{4\times 5}{4\times 9} = \frac{5}{9}$

E assim, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	-3	-2	-1	0	1
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{9}$

2.2. No contexto da situação descrita, $P(L|J)$ é a probabilidade de que lançando os dois dados e usando os números indicados pelos dados como coordenadas do ponto Q, este ponto pertença ao terceiro quadrante, sabendo que o número indicado pelo dado A é negativo.
Como é sabido que a abcissa do ponto Q é negativa, este ponto pertence ao terceiro quadrante se a ordenada também for negativa, o que ocorre 1 em cada 6 vezes, visto que das 6 faces do dado B, apenas uma tem um número negativo inscrito.
Assim, usando a Regra de Laplace, e escrevendo o resultado na forma de fração, temos

$$P(L|J) = \frac{1}{6}$$

3. Temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{P(A\cup B)}{P(B)} - P\left(\overline{A}|B\right) &= \frac{P(A\cup B)}{P(B)} - \frac{P\left(\overline{A}\cap B\right)}{P(B)} && \text{Definição: } P(X|Y) = \frac{P(X\cap Y)}{P(Y)} \\
&= \frac{P(A\cup B) - P\left(\overline{A}\cap B\right)}{P(B)} \\
&= \frac{P(A\cup B) - \Big(P(B) - P(A\cap B)\Big)}{P(B)} && \text{Teorema: } P\left(X\cap\overline{Y}\right) = P(X) - P(X\cap Y) \\
&= \frac{P(A\cup B) - P(B) + P(A\cap B)}{P(B)} \\
&= \frac{P(A)}{P(B)} && \text{Teorema: } P(X) = P(X\cup Y) + P(X\cap Y) - P(Y)
\end{aligned}$$

Logo, se $P(B)\neq 0$ então $\dfrac{P(A\cup B)}{P(B)} - P\left(\overline{A}|B\right) = \dfrac{P(A)}{P(B)}$ *q.e.d.*

4.

4.1. Como o domínio da função f é $]0,+\infty[$, só pode existir uma assíntota não oblíqua quando $x\to+\infty$.
Assim, averiguando a existência de uma assíntota de equação $y = mx + b$, quando $x\to+\infty$, vem:

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{5}x - \ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{5}x}{x} - \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - mx\big) = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - \frac{1}{5}\times x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{5}x - \ln x - \frac{1}{5}x\right) = \lim_{x\to+\infty}(-\ln x) = -\infty$$

Logo, (como o b não é um número real) não existe qualquer assíntota oblíqua do gráfico de f

4.2. Começamos por determinar a expressão da derivada para $x > 2$:

$$\left(\frac{1}{5}x - \ln x\right)' = \left(\frac{1}{5}x\right)' - (\ln x)' = \frac{1}{5} - \frac{1}{x}$$

Calculando os zeros da derivada, em $]2, +\infty[$, temos:

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 5 \wedge \underbrace{x \neq 0}_{\text{PV, } x>2}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	2		5	$+\infty$
$f'(x)$	n.d.	$-$	0	$+$
$f(x)$	n.d.	↘	min	↗

Assim, como f é decrescente no intervalo $]0,5]$ e crescente no intervalo $[5, +\infty[$ podemos concluir que 5 é único o minimizante da função no intervalo $]2, +\infty[$, pelo que $f(5)$ é um mínimo da função neste intervalo.

4.3. Como as abcissas dos pontos A e B são soluções da equação $f(x) = f(15)$, começamos por calcular $f(15) = \frac{1}{5}(15) - \ln(15) = 3 - \ln(15) \approx 0{,}29$

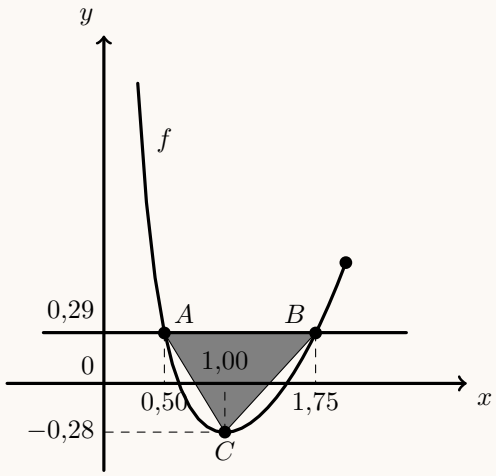
Podemos depois traçar na calculadora o gráfico da função f, no intervalo $]0,2]$, e a reta $y = 0{,}29$, para determinar os valores aproximados das soluções da equação $f(x) = f(15)$, ou seja as abcissas dos pontos A e B, e obtemos o gráfico que se reproduz na figura seguinte.

Recorrendo à função da calculadora que permite determinar as coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, determinamos valores aproximados, às centésimas, das coordenadas dos pontos A e B:

$$A(0{,}50; 0{,}29) \text{ e } B(1{,}75; 0{,}29)$$

Para determinar as coordenadas do ponto C, usamos a função da calculadora que permite determinar o mínimo (e o minimizante) de uma função, num intervalo, e obtemos valores aproximados para as coordenadas do ponto C:

$$C(1{,}00; -0{,}28)$$



Logo podemos considerar como a medida da base do triângulo, a diferença das abcissas dos pontos A e B, e como a medida da altura a soma dos valores absolutos das ordenadas dos pontos A e C (como se pode ver na figura).
Assim, calculando a área do triângulo, e arredondando o resultado às décimas, vem:

$$A_{[OAB]} = \frac{(x_B - x_A) \times (y_A + |y_C|)}{2} \approx \frac{(1{,}75 - 0{,}50)(0{,}29 + 0{,}28)}{2} \approx 0{,}4$$

5.

5.1. Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}$, é contínua em $\mathbb{R}$, e também, em $[-2,-1]$, porque $[-2,-1] \subset \mathbb{R}$

Como $1{,}050 < 1{,}5 < 2{,}000$, ou seja, $f(-1) < 1{,}5 < f(-2)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]-2,-1[$ tal que $f(c) = 1{,}5$, ou seja, que a equação $f(x) = 1{,}5$ tem, pelo menos, uma solução em $]-2,-1[$

C.A.

$$f(-2) = -(-2) + e^{2(-2)^3-1} = 2 + e^{2(-8)-1} =$$

$$= 2 + e^{-17} \approx 2{,}000$$

$$f(-1) = -(-1) + e^{2(-1)^3-1} = 1 + e^{2(-1)-1} =$$

$$= -1 + e^{-3} \approx 1{,}050$$

5.2. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(-x + e^{2x^3-1}\right)' = -(x)' + \left(e^{2x^3-1}\right)' = -1 + (2x^3-1)'e^{2x^3-1} = -1 + 6x^2e^{2x^3-1}$$

Como o declive (m) da reta tangente ao gráfico de f em $x = 0$ é $f'(0)$, temos que:

$$m = f'(0) = -1 + 6(0)^2e^{2(0)^3-1} = -1 + 0 = -1$$

Determinando a ordenada do ponto do gráfico da função que tem abcissa zero, temos:

$$f(0) = -0 + e^{2(0)^3-1} = 0 + e^{0-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Como o ponto de abcissa 0, também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx + b$, para calcular o valor de b:

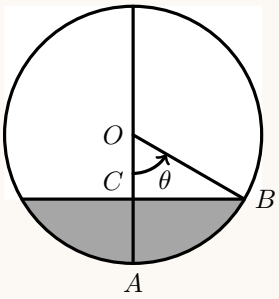
$$\frac{1}{e} = -1 \times 0 + b \Leftrightarrow \frac{1}{e} = 0 + b \Leftrightarrow b = \frac{1}{e}$$

Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0, é:

$$y = -x + \frac{1}{e}$$

6.

6.1. Analisando as figuras podemos dividir o cálculo da altura em dois casos:
No primeiro caso, $\left(\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$, $h = 3 - \overline{OC}$



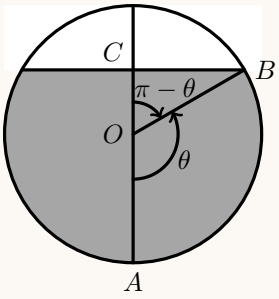
Como $\overline{OB} = 3$, recorrendo à definição de cosseno de um ângulo, temos:

$$\cos\theta = \frac{\overline{OC}}{3} \Leftrightarrow \overline{OC} = 3\cos\theta$$

e assim,

$$h = 3 - \overline{OC} = 3 - 3\cos\theta$$

No segundo caso, $\left(\theta \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\right)$, $h = 3 + \overline{OC}$



Como $\overline{OB} = 3$, recorrendo à definição de cosseno de um ângulo, temos:

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{\overline{OC}}{3} \Leftrightarrow \overline{OC} = 3\cos(\pi - \theta) \Leftrightarrow \overline{OC} = 3(-\cos\theta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{OC} = -3\cos\theta$$

e assim,

$$h = 3 + \overline{OC} = 3 + (-3\cos\theta) = 3 - 3\cos\theta$$

Ou seja em ambos os casos, isto é, para qualquer $\theta \in]0,\pi[$, a altura h pode ser calculada como que $h(\theta) = 3 - 3\cos(\theta)$.

6.2. Como $h(\theta) = 3 - 3\cos(\theta)$, temos que:

$$h(\theta) = 3 \Leftrightarrow 3 - 3\cos(\theta) = 3 \Leftrightarrow -3\cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(\theta) = \cos\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $\theta \in]0,\pi[$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ é a única solução da equação.

Calcular θ tal que $h(\theta) = 3$, significa determinar o ângulo associado a uma quantidade de combustível no depósito com 3 metros de altura.
Assim a solução calculada significa que, quando o combustível no depósito tiver uma altura de 3 metros, o ângulo θ será um ângulo reto $\left(\frac{\pi}{2}\text{ rad.}\right)$.

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/Época Especial

14 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2010

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica, sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva, de forma legível, a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção correcta.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 4, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$
(r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ \operatorname{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{n},\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção seleccionada.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. A Rita tem oito livros, todos diferentes, sendo três de Matemática, três de Português e dois de Biologia. A Rita pretende arrumar, numa prateleira, os oito livros, uns a seguir aos outros.

De quantas maneiras diferentes o pode fazer, ficando os livros de Matemática todos juntos numa das pontas?

(A) 72

(B) 240

(C) 720

(D) 1440

2. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}4$
- $P(\overline{B}) = 0{,}3$
- $P(A \cap B) = 0{,}3$

Qual é o valor de $P(A \cup B)$?

(A) $0{,}4$

(B) $0{,}6$

(C) $0{,}7$

(D) $0{,}8$

3. Numa prateleira de uma perfumaria existe um conjunto de dez perfumes diferentes, sendo três de homem e sete de senhora. A gerente pretende escolher, ao acaso, seis desses dez perfumes para colocar na montra.

Seja X a variável aleatória «número de perfumes de homem que se colocam na montra».

Qual é a distribuição de probabilidades da variável aleatória X?

(A)

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{{}^{10}C_6}$	$\frac{63}{{}^{10}C_6}$	$\frac{105}{{}^{10}C_6}$	$\frac{35}{{}^{10}C_6}$

(B)

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{35}{{}^{10}C_6}$	$\frac{105}{{}^{10}C_6}$	$\frac{70}{{}^{10}C_6}$

(C)

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{70}{{}^{10}C_6}$	$\frac{105}{{}^{10}C_6}$	$\frac{35}{{}^{10}C_6}$

(D)

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{35}{{}^{10}C_6}$	$\frac{105}{{}^{10}C_6}$	$\frac{63}{{}^{10}C_6}$	$\frac{7}{{}^{10}C_6}$

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^-$, definida por $f(x) = \ln(-3x)$

Qual é a solução da equação $f(x) = 2$?

(A) $\frac{1}{2}e^3$ **(B)** $-\frac{1}{2}e^3$ **(C)** $-\frac{1}{3}e^2$ **(D)** $\frac{1}{3}e^2$

5. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}^+$, e a recta de equação $y = -4$, assimptota do gráfico de h

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{2x}\right)}{h(x)}$?

(A) $-\infty$ **(B)** $+\infty$ **(C)** -4 **(D)** 0

6. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função derivada, f', de uma função f

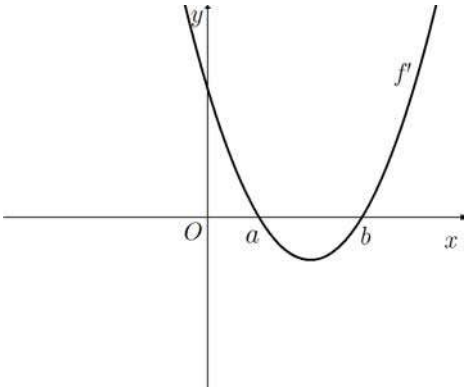
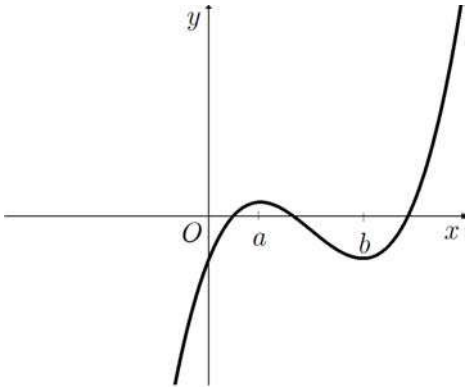


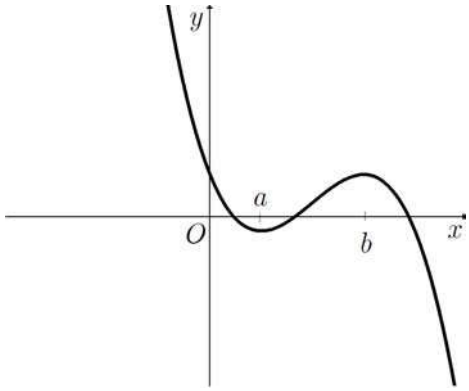
Figura 1

Em qual das figuras seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f ?

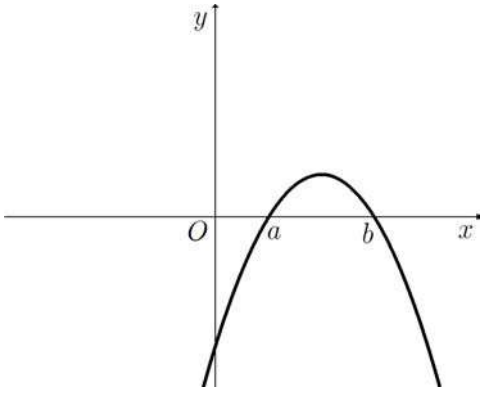
(A)



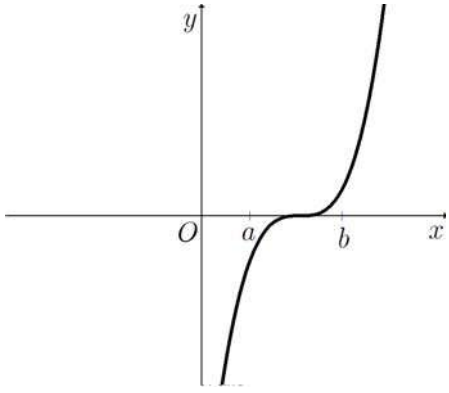
(B)



(C)



(D)



7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o conjunto $A = \left\{z \in \mathbb{C} : i \times (z + \overline{z}) = 0\right\}$

(i designa a unidade imaginária, e $\overline{z}$ designa o conjugado de z)

Qual das rectas seguintes pode ser a representação geométrica, no plano complexo, do conjunto A?

(A) o eixo real

(B) o eixo imaginário

(C) a bissectriz dos quadrantes pares

(D) a bissectriz dos quadrantes ímpares

8. Na Figura 2, estão representados, no plano complexo, os pontos P, Q, R, S e T.

O ponto P é a imagem geométrica de um número complexo z

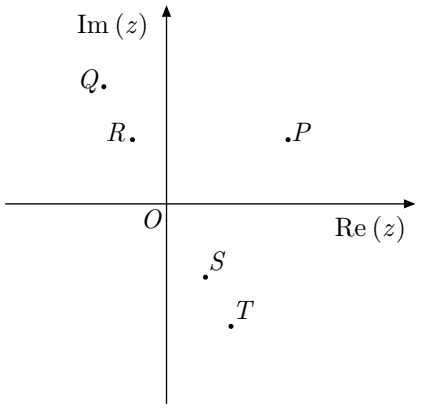


Figura 2

Qual dos pontos seguintes, representados na Figura 2, é a imagem geométrica do número complexo $-i \times z$?

(A) Q

(B) R

(C) S

(D) T

PÁGINA EM BRANCO

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número complexo

$$z = \frac{(-1-i)^8}{\left(\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2} \times \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{2}\right)$$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

1.1. Verifique que $z = 16\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

1.2. Determine a área do polígono cujos vértices, no plano complexo, são as imagens geométricas das raízes quartas de z

2. Uma turma é constituída por 27 alunos, dos quais 17 são rapazes. A Maria e o Manuel são alunos dessa turma. A professora de Português vai escolher, ao acaso, um grupo de cinco alunos para definirem as regras de um Jogo de Palavras.

2.1. Determine quantos grupos diferentes se podem formar, sabendo que em cada grupo tem de estar, pelo menos, um aluno de cada sexo.

2.2. Considere os acontecimentos:

$A:$ «a Maria e o Manuel são escolhidos para definirem as regras do jogo»;

$B:$ «dos cinco alunos escolhidos, dois são rapazes e três são raparigas».

Uma resposta correcta para a probabilidade condicionada $P(B \mid A)$ é $\frac{16 \times {}^{9}C_{2}}{{}^{25}C_{3}}$

Numa composição, explique porquê.

A sua composição deve incluir:

- a interpretação do significado de $P(B \mid A)$, no contexto da situação descrita;
- uma referência à regra de Laplace;
- uma explicação do número de casos possíveis;
- uma explicação do número de casos favoráveis.

3. A Ana e a Joana são amigas e vão acampar nas férias do Carnaval. A mãe da Ana e a mãe da Joana pediram às filhas que, quando chegassem ao acampamento, lhes telefonassem, pedido que é hábito fazerem sempre que as jovens se ausentam de casa por períodos de tempo alargados. Admita-se que o facto de uma delas telefonar é independente de a outra também o fazer.

Sabe-se pela experiência que elas nem sempre satisfazem o pedido das mães.

Considere os acontecimentos:

$A:$ «a Ana telefona à mãe»;

$B:$ «a Joana telefona à mãe».

Determine a probabilidade de, pelo menos, uma das amigas telefonar à sua mãe, sabendo que $P(A) = 70\%$, que $P(B) = 80\%$ e que A e B são acontecimentos independentes.

Apresente o resultado em percentagem.

4. Considere a função f, de domínio $\left]0, \pi\right[$, definida por $f(x) = \ln x \times \cos x$

Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- A é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo Ox, que se situa mais próximo da origem O;
- B é o ponto de intersecção do gráfico da função f com a recta bissectriz dos quadrantes pares.

Determine a área do triângulo $[OAB]$, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as coordenadas dos pontos A e B, arredondando às milésimas as coordenadas do ponto B;
- desenhar o triângulo $[OAB]$, assinalando os pontos que representam os seus vértices;
- apresentar o resultado pedido, com arredondamento às centésimas.

5. Seja uma função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, e seja a recta de equação $y = 1$ a única assimptota do gráfico de f

Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x) + x$

Prove que o gráfico de g tem uma assimptota oblíqua paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares.

6. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x} - e^x}{x} & \text{se } x > 0 \\ \ln(x^2 + 1) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

6.1. Estude a continuidade da função h em $x = 0$

6.2. Resolva, no intervalo $\left]-\infty, 0\right]$, a inequação $h(x) > h(-4)$

7. Admita que, numa certa marina, a profundidade da água, em metros, t horas após as zero horas de um certo dia, é dada por $P(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 8$, em que $t \in \left[0, 24\right]$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

7.1. Determine a profundidade da água da marina às três horas da tarde, desse dia.

7.2. Determine, recorrendo ao estudo da função derivada, a profundidade mínima, em metros, da água da marina, nesse dia.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

GRUPO II

1.

1.1. ..... 15 pontos
1.2. ..... 15 pontos

2.

2.1. ..... 15 pontos
2.2. ..... 15 pontos

3. ..... 15 pontos

4. ..... 15 pontos

5. ..... 15 pontos

6.

6.1. ..... 15 pontos
6.2. ..... 15 pontos

7.

7.1. ..... 10 pontos
7.2. ..... 15 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

Exame nacional de Matemática A **(2010, Época especial)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. O grupo dos 3 livros de Matemática pode ser arrumado de ${}^3A_3 = P_3 = 3!$ formas diferentes.
   Como a prateleira tem duas pontas, o grupo dos três livros pode ser colocado de 2 formas.
   Os restantes 5 livros podem ser arrumados de ${}^5A_5 = P_5 = 5!$ formas diferentes.
   Logo, o número de arrumações diferentes é

   $$3! \times 2 \times 5! = 1440$$

   Resposta: **Opção D**

2. Como $P\left(\overline{B}\right) = 0{,}3$, pelo teorema $P(X) = 1 - P\left(\overline{X}\right)$, temos que:

   $$P(B) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$$

   Assim, pelo teorema $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$, temos que:

   $$P(A \cup B) = 0{,}4 + 0{,}7 - 0{,}3 = 0{,}8$$

   Resposta: **Opção D**

3. Como existem 7 perfumes de senhora e são escolhidos 6 ao acaso, podem ser escolhidos 6 perfumes de senhora, e portanto zero perfumes de homem, logo $P(X = 0) > 0$, pelo que podemos excluir as opções (B) e (C).

   Calculando a probabilidade de escolher 6 perfumes de senhora, do conjunto dos 10, temos:

   $$P(X = 0) = \frac{{}^7C_6}{{}^{10}C_6} = \frac{7}{{}^{10}C_6}$$

   Logo, apenas a opção (A) é compatível com este cálculo.

   Resposta: **Opção A**

4. Resolvendo a equação, temos:

   $$f(x) = 2 \Leftrightarrow \ln(-3x) = 2 \Leftrightarrow -3x = e^2 \Leftrightarrow x = \frac{e^2}{-3} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}e^2$$

   Resposta: **Opção C**

5. Como a reta de equação $y = -4$ é assíntota do gráfico da função h, de domínio $\mathbb{R}^+$, então temos que:

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = -4$$

Logo, vem que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{2x}\right)}{h(x)} = \frac{\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{2x}\right)}{\lim_{x \to +\infty} h(x)} = \frac{\ln\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{-4} = \frac{\ln(0^+)}{-4} = \frac{-\infty}{-4} = +\infty$$

Resposta: **Opção B**

6. Através da análise do gráfico, podemos descrever a variação do sinal da derivada para relacionar com a monotonia da função f:

x		a		b	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	Máx	↘	min	↗

Logo, o único gráfico apresentado compatível com a monotonia estudada é o gráfico da opção (A).

Resposta: **Opção A**

7. Considerando $z = a + bi$ (com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$), temos que:

- $\overline{z} = a - bi$
- $z + \overline{z} = a + bi + a - bi = 2a$
- $i \times (z + \overline{z}) = i(2a) = 2ia$
- $i \times (z + \overline{z}) = 0 \Leftrightarrow 2ia = 0 \Leftrightarrow a = 0$

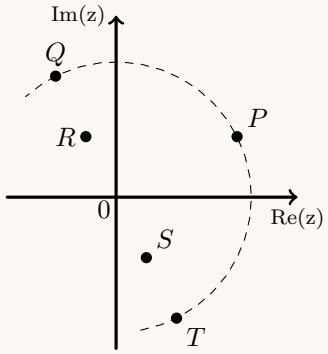
Ou seja o conjunto A é o conjunto dos números complexos z, tais que $\text{Re}(z) = 0$, ou seja a sua representação geométrica coincide com o eixo imaginário.

Resposta: **Opção B**

8. A operação "*multiplicar por i*" corresponde geometricamente a "fazer uma rotação de centro em O e amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos".

Assim temos que $i \times z = w$, sendo w o número complexo que tem por imagem geométrica o ponto Q.

Logo $-i \times z = -w$, ou seja o número complexo que tem por imagem geométrica o ponto T.



Resposta: **Opção D**

GRUPO II

1.

1.1. Começamos por escrever $(-1-i)$ na f.t.:
Seja $-1-i=\rho\,\mathrm{cis}\,\theta$:

- $\rho=|-1-i|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$
- $\theta=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$, porque $\mathrm{tg}\,\theta=\frac{-1}{-1}=1$, logo $\theta=\frac{\pi}{4}\vee\theta=\pi+\frac{\pi}{4}$, mas como $\mathrm{sen}\,\theta<0$ e $\cos\theta<0$, logo θ é um ângulo do 3º quadrante.

Assim, aplicando a fórmula de Moivre para a potência, temos que
$(-1-i)^8=\left(\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,\frac{5\pi}{4}\right)^8=(\sqrt{2})^8\,\mathrm{cis}\left(8\times\frac{5\pi}{4}\right)=16\,\mathrm{cis}\,\frac{40\pi}{4}=16\,\mathrm{cis}\,(10\pi)=16\,\mathrm{cis}\,0$

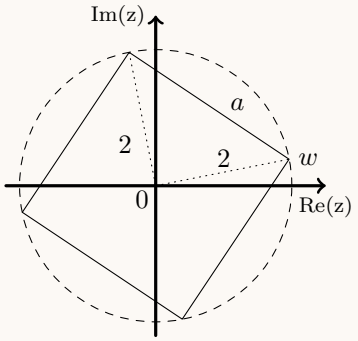
Da mesma forma temos que $\left(\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2=\mathrm{cis}\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)=\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Assim temos que $z=\dfrac{(-1-i)^8}{\left(\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2}\times\mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{2}\right)=\dfrac{16\,\mathrm{cis}\,0}{\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)}\times\mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{2}\right)=16\,\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\times\mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{2}\right)=$

$=16\,\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{2}\right)=16\,\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{10\pi}{4}\right)=16\,\mathrm{cis}\left(\frac{9\pi}{4}\right)=16\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)=16\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{4}$

1.2. Sabemos que as quatro raízes quartas de z são números complexos cujas imagens geométricas são os vértices de um quadrado, centrado na origem.

Seja w uma das raízes quartas de z, como $z=16\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{4}$, recorrendo à fórmula de Moivre, temos que $|w|=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$, ou seja a distância dos vértices do quadrado ao centro é 2.



Assim, podemos calcular o lado a do quadrado, recorrendo ao teorema de Pitágoras:
$a^2=2^2+2^2\Leftrightarrow a^2=4+4\Leftrightarrow a^2=8\Leftrightarrow a=\sqrt{8}$
(consideramos apenas a raiz positiva por se tratar de uma medida).

Temos assim que a área A do polígono cujos vértices, no plano complexo, são as imagens geométricas das raízes quartas de z é dada por $A=(\sqrt{8})^2=8$

2.

2.1. Se ao total do número de grupos diferentes de 5 alunos que se podem formar com os 27 alunos ($^{27}C_5$, não se considera relevante a ordem por não haver diferenciação dentro do grupo), subtrairmos os grupos que são formados apenas por rapazes ($^{17}C_5$) e também os que são formados apenas por raparigas ($^{10}C_5$, como existem 17 rapazes na turma, o número de raparigas é $27-17=10$), o resultado é o número de grupos em que existe pelo menos um aluno de cada sexo, ou seja

$$^{27}C_5-{}^{17}C_5-{}^{10}C_5=74\,290$$

2.2. No contexto da situação descrita, $P(B|A)$, é a probabilidade de ter sido escolhido um grupo composto por 2 rapazes e 3 raparigas, sabendo que a Maria e o Manuel integram o grupo.
Assim, $\frac{16 \times^9 C_2}{^{25}C_3}$ é um cálculo da probabilidade recorrendo à regra de Laplace, ou seja calculando o quociente entre o número de casos favoráveis ($16 \times^9 C_2$) e o número de casos possíveis ($^{25}C_3$).
O número de casos possíveis, consiste em determinar o número de grupos de 3 elementos que se podem formar com os 25 alunos da turma ($^{25}C_3$) (excluindo a Maria e o Manuel, e não considerando a ordem relevante por não existir diferenciação dentro do grupo). A qualquer um destes grupos juntam-se a Maria e o Manuel, formando um grupo de 5 alunos que incluí estes dois.
O número de casos favoráveis, consiste em determinar o número de grupos de 3 elementos que se podem formar com os 25 alunos da turma, escolhendo 1 de entre os restantes 16 rapazes e 2 de entre as restantes 9 raparigas ($16 \times^9 C_2$), excluindo a Maria e o Manuel. Como ao rapaz selecionado se junta o Manuel, o grupo será composto por 2 rapazes e como ao conjunto de duas raparigas se junta a Maria, o grupo terá 3 raparigas na sua composição.
Desta forma $P(B|A) = \frac{16 \times^9 C_2}{^{25}C_3}$

3. Como a probabilidade de pelo menos, uma das amigas telefonar à sua mãe, é $P(A \cup B)$
Como os acontecimentos A e B são independentes, temos que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
Assim, pelo teorema $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$, temos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

Pelo que

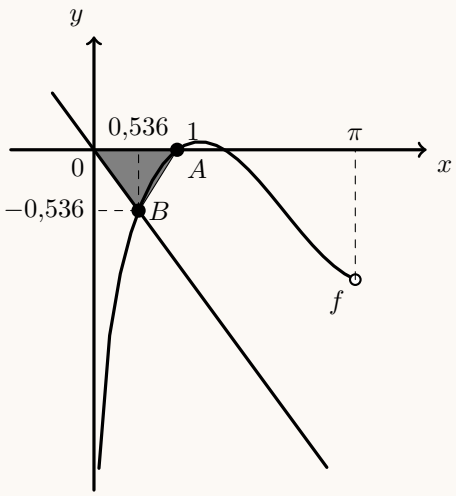
$$P(A \cup B) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}94$$

Apresentando o valor da probabilidade calculada em percentagem, temos $P(A \cup B) = 94\%$

4. Traçando na calculadora o gráfico da função f e a bissetriz dos quadrantes pares, ou seja a reta de equação $y = -x$ numa janela compatível com o domínio de f, obtemos o gráfico que se reproduz na figura seguinte.

Logo podemos considerar como a medida da base do triângulo, a abcissa do ponto A, e como a medida da altura o valor absoluto da ordenada do ponto B (como se pode ver na figura).

Recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores dos zeros de uma função, determinamos o valor da abcissa do ponto A, $x_A = 1$. Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados de um ponto de interseção de dois gráficos determinamos o valor (aproximado às centésimas) da ordenada do ponto B, $y_B \approx -0{,}536$.



Assim, calculando a área do triângulo, e arredondando o resultado às centésimas, vem:

$$A_{[OAB]} = \frac{x_A \times |y_B|}{2} \approx \frac{1 \times 0{,}536}{2} \approx 0{,}268 \approx 0{,}27$$

5. Como a reta de equação $y = 1$ é a única assíntota do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, então, como é uma reta de declive igual a zero, vem que

$$m_f = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = 0$$

E assim, determinando o declive da assíntota oblíqua da função g, quando $x \to +\infty$, (porque o domínio da função é $\mathbb{R}^+$), vem:

$$m_g = \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) + \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}\right) = 0+1 = 1$$

E como a reta de equação $y = 1$ é assíntota do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, então, vem que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

E assim, determinando a ordenada na origem da assíntota oblíqua da função g, quando $x \to +\infty$, (porque o domínio da função é $\mathbb{R}^+$), vem:

$$b = \lim_{x\to+\infty}\big(g(x) - mx\big) = \lim_{x\to+\infty}\big(f(x) + x - 1\times x\big) = \lim_{x\to+\infty}\big(f(x)\big) = 1$$

Logo, temos que a reta de equação $y = x + 1$ é a assíntota oblíqua gráfico de g, que como tem declive 1 é paralela à reta de equação $y = x$, ou seja a bissetriz dos quadrantes ímpares.

6.

6.1. Para averiguar se a função h é contínua em $x = 0$, temos que verificar se $h(0) = \lim\limits_{x\to0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to0^+} h(x)$

- $h(0) = 3\ln(0^2+1) = 3\ln(1) = 3\times0 = 0$
- $\lim\limits_{x\to0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to0^-}\big(3\ln(x^2+1)\big) = 3\ln\big((0^-)^2+1\big) = 3\ln(0+1) = 3\ln(1) = 3\times0 = 0$
- $\lim\limits_{x\to0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{2x}-e^x}{x} = \dfrac{e^0-e^0}{0} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to0^+} h(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{e^{2x}-e^x}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{e^{x+x}-e^x}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{e^x\times e^x-e^x}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{e^x(e^x-1)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to0^+} e^x \times \underbrace{\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = e^0\times1 = 1\times1 = 1$$

Como $\lim\limits_{x\to0^+} h(x) \neq \lim\limits_{x\to0^-} h(x)$, então a função h não é contínua em $x = 0$

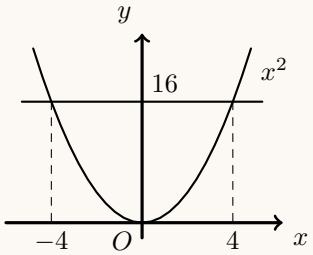
6.2. Temos que

$$h(-4) = ln\left((-4)^2+1\right) = \ln(16+1) = \ln(17)$$

Assim, resolvendo a inequação, em $]-\infty,0]$, temos :

$$h(x) > h(-4) \Leftrightarrow \ln\left(x^2+1\right) > \ln(17) \Leftrightarrow x^2+1 > 17 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 > 17-1 \Leftrightarrow x^2 > 16 \Leftrightarrow x < -4 \ \vee \ x > 4$$



Como o domínio de valência da inequação é $]-\infty,0]$, o conjunto solução é:

$$]-\infty,0] \cap \Big(]-\infty,-4[\cup]4,+\infty[\Big) =]-\infty,-4[$$

7.

7.1. As três horas da tarde desse dia correspondem a $t = 15$.
Assim, a profundidade correspondente é dada por:

$$P(15) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} \times 15\right) + 8 = 2\cos\left(\frac{3 \times 5 \times \pi}{3 \times 2}\right) + 8 = 2\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + 8 = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 8 = 2 \times 0 + 8 = 8$$

Ou seja, às 15 horas, a profundidade da água na marina era de 8 metros.

7.2. Determinando a expressão da derivada, temos:

$$P'(t) = \left(2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 8\right)' = \left(2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right)' + (8)' = 2\left(\frac{\pi}{6}t\right)'\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right) + 0 = \frac{2\pi}{6}\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right) =$$

$$= -\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

Calculando os zeros da derivada, vem:

$$P'(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \operatorname{sen} 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6}t = 0 + 2k\pi \ \vee \ \frac{\pi}{6}t = \pi - 0 + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{6(2k\pi)}{\pi} \ \vee \ t = \frac{6(\pi + 2k\pi)}{\pi} \ , \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 12k \ \vee \ t = 6 + 12k \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

Como $t \in [0{,}24]$, atribuindo valores a k ($k = 0$, $k = 1$ e $k = 2$), obtemos o conjunto dos zeros da função derivada: $\{0{,}6{,}12{,}18{,}24\}$

Desta forma, estudando a variação de sinal de P' e relacionando com a monotonia da função P, vem:

t	0		6		12		18		24
$P'(t)$	0	-	0	+	0	-	0	+	0
$P(t)$	Máx	↘	min	↗	Máx	↘	min	↗	Máx

Logo, a profundidade mínima, que ocorreu às 6 horas e depois novamente às 18 horas, pode ser calculada como:

$$P(6) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} \times 6\right) + 8 = 2\cos(\pi) + 8 = 2(-1) + 8 = -2 + 8 = 6$$

Ou seja a profundidade mínima na marina, nesse dia, foi de 6 metros.

2011

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/1.ª Fase 15 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2011

VERSÃO 1

Página em branco

Na folha de respostas, indique de forma legível a versão da prova. A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens do Grupo I.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 4, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\dfrac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$

(α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\ r\ g$

(r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\ \pi\ r^2$

(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3\ (r - raio)$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}a \cdot \cos b + \operatorname{sen}b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen}a \cdot \operatorname{sen}b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b}{1 - \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis}\theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis}\theta} = \sqrt[n]{\rho}\ \operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right),\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega \quad \text{e} \quad B \subset \Omega)$ independentes, com $P(A) \neq 0$

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) $P\left(A\right) + P\left(B\right) = 1$

(B) $P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right)$

(C) $P\left(A\right) \neq P\left(B\right)$

(D) $P\left(B \mid A\right) = P\left(B\right)$

2. O código de um auto-rádio é constituído por uma sequência de quatro algarismos. Por exemplo, 0137

Quantos desses códigos têm dois e só dois algarismos iguais a 7 ?

(A) 486

(B) 810

(C) 432

(D) 600

3. Na Figura 1, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico de uma função g, de domínio $]-3,+\infty[$

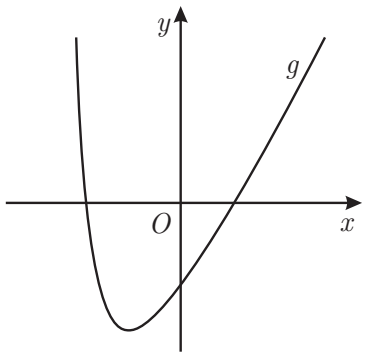


Figura 1

A recta de equação $y = 2x - 4$ é assimptota do gráfico de g

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(g(x)-2x-4\big)=0$

(B) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{g(x)}=2$

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(g(x)-2x+4\big)=0$

(D) $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(g(x)-2x\big)=0$

4. Seja f uma função de domínio $[0,+\infty[$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}2^x-9 & \text{se } 0\leq x<5\\ \dfrac{1-e^x}{x} & \text{se } x\geq 5\end{cases}$$

Em qual dos intervalos seguintes o teorema de Bolzano permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f?

(A) $]0,1[$ **(B)** $]1,4[$ **(C)** $]4,6[$ **(D)** $]6,7[$

5. Qual é o valor de $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right)$?

(A) 4

(B) 0

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{1}{2}$

6. Na Figura 2, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f de grau 3, de domínio $\mathbb{R}$

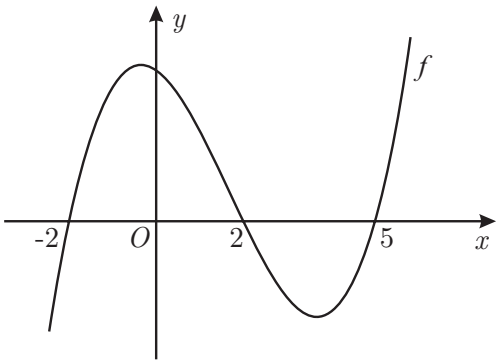


Figura 2

Sabe-se que:

- -2, 2 e 5 são zeros de f
- f' representa a função derivada de f

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $f'(0) \times f'(6) = 0$

(B) $f'(-3) \times f'(6) < 0$

(C) $f'(-3) \times f'(0) > 0$

(D) $f'(0) \times f'(6) < 0$

7. Na Figura 3, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de quatro números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4

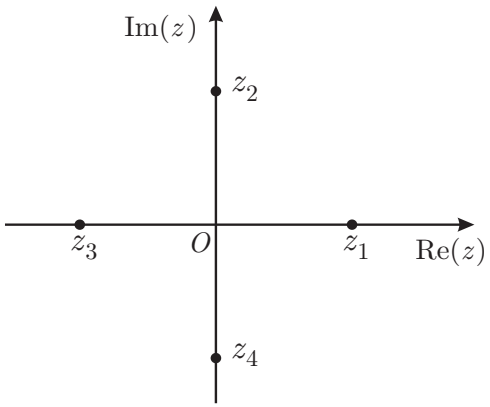


Figura 3

Qual é o número complexo que, com $n \in \mathbb{N}$, pode ser igual a $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2}$?

(A) z_1

(B) z_2

(C) z_3

(D) z_4

8. Na Figura 4, está representado, no plano complexo, a sombreado, um sector circular.

Sabe-se que:

- o ponto A está situado no 1.º quadrante;
- o ponto B está situado no 4.º quadrante;
- $[AB]$ é um dos lados de um polígono regular cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice 5 do complexo $32\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$
- o arco AB está contido na circunferência de centro na origem do referencial e raio igual a $\overline{OA}$

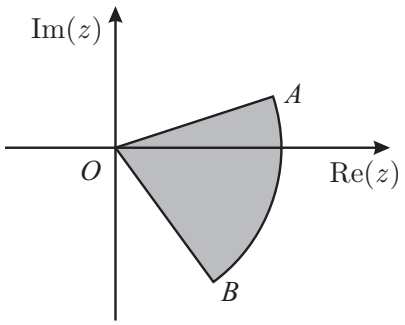


Figura 4

Qual dos números seguintes é o valor da área do sector circular AOB ?

(A) $\frac{\pi}{5}$

(B) $\frac{4\pi}{5}$

(C) $\frac{2\pi}{5}$

(D) $\frac{8\pi}{5}$

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = 1\,,\ \ z_2 = 5\,i \quad \text{e} \quad z_3 = \operatorname{cis}\left(\frac{n\,\pi}{40}\right),\ \ n \in \mathbb{N}$$

Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

1.1. O complexo z_1 é raiz do polinómio $z^3 - z^2 + 16z - 16$

Determine, em $\mathbb{C}$, as restantes raízes do polinómio.

Apresente as raízes obtidas na forma trigonométrica.

1.2. Determine o menor valor de n natural para o qual a imagem geométrica de $z_2 \times z_3$, no plano complexo, está no terceiro quadrante e pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares.

2. Uma companhia aérea vende bilhetes a baixo custo exclusivamente para viagens cujos destinos sejam Berlim ou Paris.

2.1. Nove jovens decidem ir a Berlim e escolhem essa companhia aérea. Cada jovem paga o bilhete com cartão multibanco, ou não, independentemente da forma de pagamento utilizada pelos outros jovens. Considere que a probabilidade de um jovem utilizar cartão multibanco, para pagar o seu bilhete, é igual a $0{,}6$.

Determine a probabilidade de exactamente 6 desses jovens utilizarem cartão multibanco para pagarem o seu bilhete.

Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

2.2. A companhia aérea constatou que, quando o destino é Berlim, 5% dos seus passageiros perdem o voo e que, quando o destino é Paris, 92% dos passageiros seguem viagem. Sabe-se que 30% dos bilhetes a baixo custo que a companhia aérea vende têm por destino Berlim.

Determine a probabilidade de um passageiro, que comprou um bilhete a baixo custo nessa companhia aérea, perder o voo.

Apresente o resultado na forma de dízima.

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega \text{ e } B \subset \Omega)$, com $P(A) \neq 0$

Mostre que $P(B \mid A) \geq 1 - \dfrac{1 - P(B)}{P(A)}$

4. Num museu, a temperatura ambiente em graus centígrados, t horas após as zero horas do dia 1 de Abril de 2010, é dada, aproximadamente, por

$$T(t) = 15 + 0{,}1\,t^2 e^{-0{,}15t}, \quad \text{com} \quad t \in [0, 20]$$

Determine o instante em que a temperatura atingiu o valor máximo recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Apresente o resultado em horas e minutos, apresentando os minutos arredondados às unidades.

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

5. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{2 + \ln x}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

5.1. O gráfico de f admite uma assimptota horizontal.

Seja P o ponto de intersecção dessa assimptota com a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa e.

Determine as coordenadas do ponto P recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

5.2. Existem dois pontos no gráfico de f cujas ordenadas são o cubo das abcissas.

Determine as coordenadas desses pontos recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- assinalar esses pontos;
- indicar as coordenadas desses pontos com arredondamento às centésimas.

6. Na Figura 5, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 4\cos(2x)$

Sabe-se que:

- os vértices A e D do trapézio $[ABCD]$ pertencem ao eixo Ox
- o vértice B do trapézio $[ABCD]$ pertence ao eixo Oy
- o vértice D do trapézio $[ABCD]$ tem abcissa $-\frac{\pi}{6}$
- os pontos A e C pertencem ao gráfico de f
- a recta CD é paralela ao eixo Oy

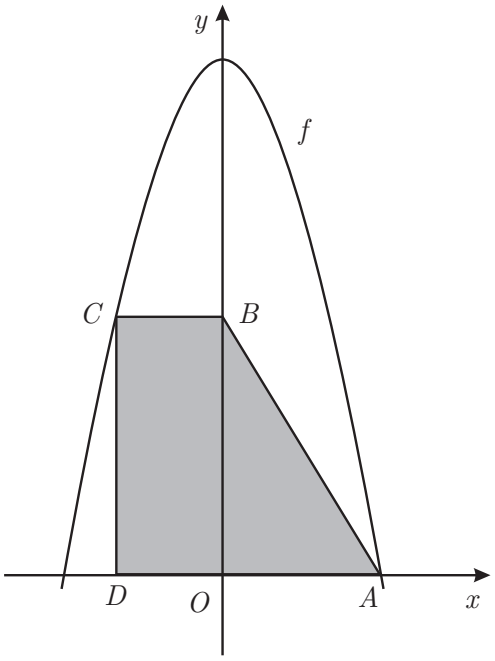


Figura 5

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

6.1. Determine o valor exacto da área do trapézio $[ABCD]$

6.2. Seja f' a primeira derivada da função f, e seja f'' a segunda derivada da função f

Mostre que $f(x)+f'(x)+f''(x) = -4\left(3\cos(2x)+2\,\mathrm{sen}(2x)\right)$, para qualquer número real x

7. Na Figura 6, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função g

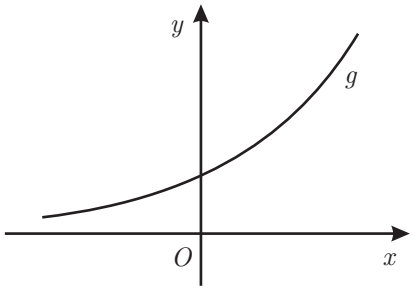


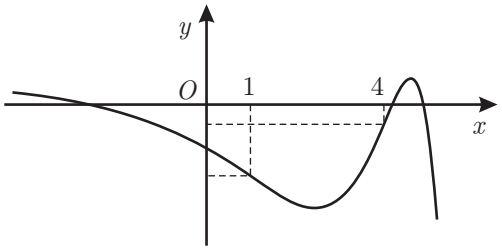
Figura 6

Sabe-se que:

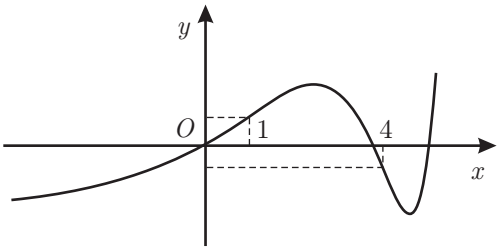
- g é uma função contínua em $\mathbb{R}$
- g não tem zeros
- a segunda derivada, f'', de uma certa função f tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $f''(x) = g(x) \times (x^2 - 5x + 4)$
- $f(1) \times f(4) > 0$

Apenas uma das opções seguintes pode representar a função f

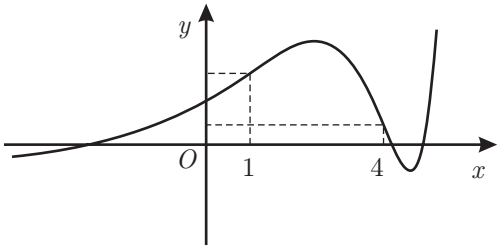
I



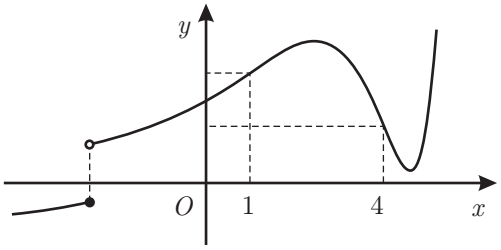
II



III



IV



Elabore uma composição na qual:

- indique a opção que pode representar f
- apresente as razões que o levam a rejeitar as restantes opções

Apresente três razões, uma por cada gráfico rejeitado.

FIM

Página em branco

COTAÇÕES

GRUPO I

(8 × 5 pontos)	40 pontos
	40 pontos

GRUPO II

1.		
	1.1.	15 pontos
	1.2.	15 pontos
2.		
	2.1.	10 pontos
	2.2.	15 pontos
3.		15 pontos
4.		15 pontos
5.		
	5.1.	20 pontos
	5.2.	15 pontos
6.		
	6.1.	15 pontos
	6.2.	10 pontos
7.		15 pontos
		160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/1.ª Fase 11 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2011

COTAÇÕES

GRUPO I

(8 × 5 pontos) ..... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1.		
	1.1.	15 pontos
	1.2.	15 pontos
2.		
	2.1.	10 pontos
	2.2.	15 pontos
3.		15 pontos
4.		15 pontos
5.		
	5.1.	20 pontos
	5.2.	15 pontos
6.		
	6.1.	15 pontos
	6.2.	10 pontos
7.		15 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

A classificação da prova deve respeitar integralmente os critérios gerais e os critérios específicos a seguir apresentados.

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos de classificação apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro, previsto na grelha de classificação.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos. No entanto, em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se o examinando responder a um mesmo item mais do que uma vez, não eliminando inequivocamente a(s) resposta(s) que não deseja que seja(m) classificada(s), deve ser considerada apenas a resposta que surgir em primeiro lugar.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova (Versão 1 ou Versão 2) implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de selecção (escolha múltipla).

Nos itens de selecção (escolha múltipla), a cotação total do item é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a única opção correcta.

São classificadas com zero pontos as respostas em que seja assinalada:

– uma opção incorrecta;

– mais do que uma opção.

Não há lugar a classificações intermédias.

Os critérios de classificação dos itens de construção apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação. No caso de, ponderados todos os dados contidos nos descritores, permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

Nos itens de construção com cotação igual ou superior a quinze pontos e que impliquem a produção de um texto, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea das competências específicas da disciplina e das competências de comunicação escrita em língua portuguesa. A avaliação das competências de comunicação escrita em língua portuguesa contribui para valorizar a classificação atribuída ao desempenho no domínio das competências específicas da disciplina. Esta valorização é cerca de 10% da cotação do item e faz-se de acordo com os níveis de desempenho descritos no quadro seguinte.

Níveis	Descritores
3	Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
2	Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
1	Composição sem estruturação aparente, com erros graves de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é zero pontos. Neste caso, não é classificado o desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

Havendo escolas em que os examinandos já contactam com as novas regras ortográficas, uma vez que o Acordo Ortográfico de 1990 já foi ratificado e dado que qualquer cidadão, nesta fase de transição, pode optar pela ortografia prevista quer no Acordo de 1945, quer no de 1990, são consideradas correctas, na classificação das provas, as grafias que seguirem o que se encontra previsto em qualquer um destes normativos.

Nos itens de construção, as respostas que apresentem pontos de vista diferentes dos mencionados nos critérios específicos de classificação devem ser classificadas segundo procedimentos análogos aos previstos nos descritores apresentados, desde que o conteúdo dessas respostas seja considerado cientificamente válido e adequado ao solicitado.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar em situações não descritas anteriormente.

Situação	Classificação
1. Classificação da resposta a um item cujo critério se apresenta organizado por etapas.	A pontuação indicada para cada etapa é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A classificação da resposta resulta da soma das pontuações das diferentes etapas, à qual se subtrai ou subtraem, eventualmente, um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 14 e/ou 19.
2. Pontuação de uma etapa dividida em passos.	A pontuação indicada para cada passo é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A pontuação da etapa resulta da soma das pontuações dos diferentes passos.
3. Classificação da resposta a um item ou pontuação de uma etapa cujo critério se apresenta organizado por níveis de desempenho.	A resposta é enquadrada numa das descrições apresentadas. À classificação/pontuação correspondente subtraem-se, eventualmente, um, dois ou três pontos, de acordo com o previsto nas situações 9, 10 e/ou 19.
4. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite e classificado qualquer processo de resolução cientificamente correcto. O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante distribuição da cotação do item pelas etapas* percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.
5. Apresentação apenas do resultado final, embora a resolução do item exija cálculos e/ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
6. Utilização de processos de resolução que não respeitam as instruções dadas [exemplo: «usando métodos analíticos»].	A etapa em que a instrução não é respeitada é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário, no critério específico de classificação.
7. Ausência de apresentação dos cálculos e/ou das justificações necessárias à resolução de uma etapa*.	A etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário, no critério específico de classificação.
8. Ausência de apresentação explícita de uma dada etapa.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, a mesma é pontuada com a cotação total para ela prevista.

Situação	Classificação
9. Transposição incorrecta de dados do enunciado.	Se o grau de dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
10. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre.
11. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.	A pontuação máxima a atribuir nessa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
12. Ocorrência de um erro na resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada de acordo com o erro cometido. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido: – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
13. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas o passo final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
14. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação de um arredondamento incorrecto.	É subtraído um ponto à classificação da resposta, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
15. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fracção, e a resposta apresenta-se na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final [exemplo: «15» em vez de «15 metros»].	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a cotação para ela prevista.
17. Apresentação do resultado final com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exacto.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
18. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação do resultado final incorrectamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
19. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à classificação da resposta, excepto: – se as incorrecções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

* Em situações em que o critério é aplicável tanto a **etapas** como a **passos**, utiliza-se apenas o termo «etapas» por razões de simplificação da apresentação.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. ..... (8 × 5 pontos)..... **40 pontos**

As respostas correctas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	D	A	C	B	C	D	B	B
Versão 2	B	C	A	D	C	A	C	D

GRUPO II

É de aceitar qualquer processo de resolução cientificamente correcto, ainda que não esteja previsto nestes critérios específicos, nem no Programa (ver n.º 4 dos critérios gerais).

1.1. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Efectuar a divisão inteira de $z^3 - z^2 + 16z - 16$ por $z - z_1$ (ou equivalente)..... 4 pontos

Obter $z^2 + 16$ ..... 1 ponto

Resolver a equação $z^2 + 16 = 0$ ..... 6 pontos

- Escrever $z^2 + 16 = 0$ (**ver nota**) ..... 1 ponto
- Obter $z^2 = -16$ ..... 1 ponto
- Obter $z = \sqrt{-16}$ ..... 1 ponto
- Obter $z = -\sqrt{-16}$ ..... 1 ponto
- Obter $z = 4i$ ..... 1 ponto
- Obter $z = -4i$ ..... 1 ponto

Escrever $4i$ na forma trigonométrica ..... 2 pontos

Escrever $-4i$ na forma trigonométrica ..... 2 pontos

2.º Processo

Efectuar a divisão inteira de $z^3 - z^2 + 16z - 16$ por $z - z_1$ (ou equivalente)..... 4 pontos

Obter $z^2 + 16$ ..... 1 ponto

Resolver a equação $z^2 + 16 = 0$ ..... 10 pontos

- Escrever $z^2 + 16 = 0$ (**ver nota**) ..... 1 ponto
- Obter $z^2 = -16$ ..... 1 ponto
- Escrever $z^2 = 16\operatorname{cis}\pi$ ..... 2 pontos
- Obter $z = \sqrt{16\operatorname{cis}\pi}$ ..... 1 ponto
- Escrever $z = 4\operatorname{cis}\frac{\pi + 2k\pi}{2},\ k \in \{0,1\}$ ..... 3 pontos

Obter $z = 4\text{cis}\,\frac{\pi}{2}$ ..... 1 ponto

Obter $z = 4\text{cis}\,\frac{3\pi}{2}$ ..... 1 ponto

Nota – Se o examinando não explicitar esta etapa, mas evidenciar que a considerou na sua resposta, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

1.2. ..... **15 pontos**

Escrever z_2 na forma trigonométrica ..... 2 pontos

Indicar um argumento de $z_2 \times z_3$ ..... 4 pontos

Escrever uma condição para que a imagem geométrica de $z_2 \times z_3$ esteja no 3.º quadrante e pertença à bissectriz dos quadrantes ímpares (**ver notas 1** e **2**) .. 4 pontos

Obter $n = 30 + 80k,\ k \in \mathbb{Z}$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

Concluir que $n = 30$ ..... 2 pontos

Notas:

1. Se o examinando considerar apenas que $z_2 \times z_3$ pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares, a pontuação a atribuir, nesta etapa, é 2 pontos.

2. Se o examinando considerar apenas que $z_2 \times z_3$ está no 3.º quadrante, a pontuação a atribuir, nesta etapa, é 2 pontos.

2.1. ..... **10 pontos**

Escrever a expressão que dá o valor pedido (**ver nota 1**) ..... 8 pontos

Calcular o valor pedido (**ver nota 2**) ..... 2 pontos

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, e a pontuação a atribuir em cada caso.

$^9C_6 \times (0{,}6)^6 \times (0{,}4)^3$ (ou equivalente) ..... 8 pontos

$^9C_6 \times (0{,}4)^6 \times (0{,}6)^3$ (ou equivalente) ..... 6 pontos

$(0{,}6)^6 \times (0{,}4)^3$ (ou equivalente) ..... 4 pontos

$(0{,}6)^3 \times (0{,}4)^6$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Outras situações ..... 0 pontos

2. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se o resultado estiver de acordo com a expressão escrita pelo examinando, e se essa expressão não tiver sido pontuada com zero pontos.

2.2. ..... **15 pontos**

No que se segue, vamos designar por A o acontecimento «viagem a Berlim», por B o acontecimento «perder o voo» (podem ser admitidas outras designações para os acontecimentos).

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $P(A) = 0{,}3$ ..... 1 ponto

Escrever $P(B \mid A) = 0{,}05$ ..... 2 pontos

Escrever $P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 0{,}92$ ..... 2 pontos

Obter $P(\overline{A})$ ..... 1 ponto

Calcular $P(A \cap B)$ ..... 3 pontos

Calcular $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ ..... 3 pontos

Calcular $P(B)$ (**ver nota**) ..... 3 pontos

2.º Processo

Escrever $P(A) = 0{,}3$ ..... 1 ponto

Escrever $P(B \mid A) = 0{,}05$ ..... 2 pontos

Escrever $P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 0{,}92$ ..... 2 pontos

Obter $P(\overline{A})$ ..... 1 ponto

Calcular $P(A \cap B)$ ..... 3 pontos

Calcular $P(B \mid \overline{A})$ ..... 2 pontos

Calcular $P(\overline{A} \cap B)$ ..... 1 ponto

Calcular $P(B)$ (**ver nota**) ..... 3 pontos

Nota – Se o examinando obtiver o valor de $P(B)$ apresentando uma tabela ou um diagrama em árvore, as etapas anteriores devem ser pontuadas segundo procedimentos análogos aos apresentados.

3. ..... **15 pontos**

A resposta do examinando deve incluir os pontos seguintes:

- $P\left(B\middle|A\right) = \dfrac{P\left(A \cap B\right)}{P\left(A\right)}$
- $P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right)$
- $P\left(A \cup B\right) \leq 1$

Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina			Pontuação
Níveis	**4**	O examinando aplica correctamente os três pontos e conclui o pretendido.	15
	3	O examinando aplica correctamente os três pontos, mas não conclui o pretendido.	11
	2	O examinando aplica correctamente apenas dois pontos.	7
	1	O examinando aplica correctamente apenas um ponto.	3

4. ..... **15 pontos**

Determinar T' ..... 6 pontos

Escrever $\left(15 + 0{,}1\,t^2\,e^{-0{,}15\,t}\right)'$ ..... 1 ponto

Escrever $\left((15)' + (0{,}1t^2)'\,e^{-0{,}15t} + 0{,}1t^2\left(e^{-0{,}15t}\right)'\right)$ ..... 2 pontos

Determinar $\left(e^{-0{,}15t}\right)'$ ..... 1 ponto

Determinar $\left(0{,}1\,t^2\right)'$ ..... 1 ponto

Obter T' ..... 1 ponto

Estudar o sinal de T' recorrendo a um quadro (**ver nota**) ..... 7 pontos

Preencher a primeira linha do quadro (relativa à variável t, de acordo com o domínio da função) ..... 1 ponto

Indicar o sinal de T' ..... 4 pontos

Determinar os zeros de T' 2

Concluir que $T'(t) > 0$ para $0 < t < \dfrac{40}{3}$ 1

Concluir que $T'(t) < 0$ para $\dfrac{40}{3} < t \leq 20$ 1

Relacionar o sinal de T' com a monotonia de T..... 2 pontos

Apresentar o valor de t na forma pedida ..... 2 pontos

Nota – Se o examinando não recorrer a um quadro, mas apresentar uma justificação equivalente, a pontuação a atribuir, nesta etapa, não deve ser desvalorizada.

5.1. ..... **20 pontos**

Calcular $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ..... 2 pontos

Escrever uma equação da assimptota horizontal ..... 1 ponto

Identificar o declive da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa e com $f'(e)$ ..... 2 pontos

Determinar f' em $]1,+\infty[$ ..... 7 pontos

- Escrever $\left(\frac{2+\ln x}{x}\right)'$ ..... 1 ponto
- Escrever $\frac{(2+\ln x)'\,x-(2+\ln x)\,x'}{x^2}$ ..... 2 pontos
- Determinar $(x)'$ ..... 1 ponto
- Determinar $(2+\ln x)'$ ..... 2 pontos
- Obter f' ..... 1 ponto

Determinar $f'(e)$ ..... 1 ponto

Determinar $f(e)$ ..... 1 ponto

Escrever uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa e .... 3 pontos

Determinar a abcissa do ponto de intersecção da assimptota do gráfico de f com a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa e ..... 2 pontos

Indicar as coordenadas do ponto P ..... 1 ponto

5.2. ..... **15 pontos**

Equacionar o problema ..... 5 pontos

Reproduzir os gráficos visualizados na calculadora (**ver notas 1** e **2**) ..... 6 pontos

- Reproduzir o gráfico de f se $x<1$ ..... 2 pontos
- Reproduzir o gráfico de f se $x\geq 1$ ..... 2 pontos
- Reproduzir a curva $y=x^3$ ..... 2 pontos

Determinar as coordenadas dos pontos cujas ordenadas são o cubo das abcissas ..... 4 pontos

- Assinalar no gráfico o ponto cuja abcissa é solução da equação $f(x)=x^3$ se $x<1$ ..... 1 ponto
- Assinalar no gráfico o ponto cuja abcissa é solução da equação $f(x)=x^3$ se $x\geq 1$ ..... 1 ponto
- Indicar as coordenadas dos pontos na forma pedida ..... 2 pontos

Notas:

1. Se o examinando não apresentar o referencial, a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser desvalorizada em 1 ponto.

2. Se o examinando apresentar um gráfico que não respeite o domínio de f, a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser desvalorizada em 1 ponto.

6.1. ..... **15 pontos**

Referir que a área do trapézio $[ABCD]$ é igual a $\frac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}\times\overline{CD}$ (ou equivalente) ..... 1 ponto

Indicar o valor de $\overline{CD}$ ..... 2 pontos

Indicar o valor de $\overline{BC}$ ..... 2 pontos

Determinar $\overline{OA}$ ..... 7 pontos

- Escrever $4\cos(2x)=0$ ..... 1 ponto
- Resolver a equação trigonométrica ..... 3 pontos
- Indicar a abcissa do ponto A ..... 2 pontos
- Indicar o valor de $\overline{OA}$ ..... 1 ponto

Calcular o valor exacto da área do trapézio $[ABCD]$ ..... 3 pontos

6.2. ..... **10 pontos**

Determinar f' ..... 3 pontos

Determinar f'' ..... 3 pontos

Escrever $4\cos(2x)-8\,\mathrm{sen}(2x)-16\cos(2x)$ ..... 1 ponto

Concluir o pretendido ..... 3 pontos

7. ..... **15 pontos**

A composição deve apresentar os pontos seguintes:

A) identificar a opção que representa f
B) indicar uma razão que permita rejeitar a opção I
C) indicar uma razão que permita rejeitar a opção II
D) indicar uma razão que permita rejeitar a opção IV

Na tabela seguinte, indica-se como deve ser classificada a resposta a este item, de acordo com os níveis de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa e os níveis de desempenho no domínio específico da disciplina.

Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina / Descritores do nível de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa			**Níveis***		
			1	**2**	**3**
Níveis	**6**	Apresenta correctamente os quatro pontos, OU apenas os pontos B, C e D.	13	14	15
	5	Apresenta correctamente apenas os pontos A, B e C, OU apenas os pontos A, B e D, OU apenas os pontos A, C e D.	10	11	12
	4	Apresenta correctamente apenas os pontos B e C, OU apenas os pontos B e D, OU apenas os pontos C e D.	7	8	9
	3	Apresenta correctamente apenas os pontos A e B, OU apenas os pontos A e C, OU apenas os pontos A e D.	4	5	6
	2	Apresenta correctamente apenas o ponto B, OU apenas o ponto C, OU apenas o ponto D.	1	2	3
	1	Apresenta apenas o ponto A.	1	1	1

***** Descritores apresentados nos Critérios Gerais de Classificação.

Exame nacional de Matemática A **(2011, 1.ª fase)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. A igualdade da opção A é válida para acontecimentos contrários, a igualdade da opção B é válida para acontecimentos incompatíveis e a condição da opção C é válida para acontecimentos não equiprováveis.
Como A e B são dois acontecimentos independentes, sabemos que $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$; e assim, temos que:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(A)} = P(B)$$

Resposta: **Opção D**

2. Como o código tem 4 algarismos e sabemos que 2 deles são «7» e os restantes 2 são diferentes de «7», podemos começar por calcular o número de situações diferentes em que os algarismos 7 podem ser dispostos ($^4C_2$, que corresponde a selecionar 2 das 4 posições do código, sem considerar a ordem, porque estas posições serão ambas ocupadas por algarismos iguais - o algarismo «7»).
Depois, por cada uma destas escolhas, existem 9 hipóteses (todos os algarismos à excepção do «7») para ocupar a primeira posição não ocupada, e outras 9 para a segunda posição não ocupada, pelo que o número total de códigos pode ser calculado como:

$$^4C_2 \times 9 \times 9 = 486$$

Resposta: **Opção A**

3. Como a reta $y = 2x - 4$ é assíntota do gráfico de g, temos que:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 2$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) - 2x) = -4$

Da definição de assíntota temos que

$$\lim_{x \to +\infty} \big(g(x) - \big(2x - 4\big)\big) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} (g(x) - 2x + 4) = 0$$

Resposta: **Opção C**

4. Analisando cada uma das opções, temos:

   - Como $f(0) = 2^0 - 9 = 1 - 9 = -8$ e $f(1) = 2^1 - 9 = 2 - 9 = -7$, não se verifica a condição $f(0) < 0 < f(1)$, pelo que o teorema de Bolzano não permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f no intervalo $]0,1[$
   - Como $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} (2^x - 9) = 2^5 - 9 = 23$ e $f(5) = \dfrac{1-e^5}{5}$, temos que $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) \neq f(5)$, pelo que a função f não é contínua para $x = 5$, logo não é contínua no intervalo $]4,6[$, pelo que o teorema de Bolzano não permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f nesse intervalo
   - Como $f(6) = \dfrac{1-e^6}{6} \approx -67$ e $f(7) = \dfrac{1-e^7}{7} \approx -157$, não se verifica a condição $f(6) < 0 < f(7)$, pelo que o teorema de Bolzano não permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f no intervalo $]6,7[$

   Assim, de entre as opções apresentadas o intervalo $]1{,}4[$ é o único em que o teorema de Bolzano permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f:

Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $[0{,}5[$, é contínua em $[0{,}5[$, e também, em $[1,4]$, porque $[1,4] \subset [0{,}5[$ Como $-7 < 0 < 7$, ou seja, $f(1) < 0 < f(4)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]1{,}4[$ tal que $f(c) = 0$, ou seja, que existe, pelo menos, um zero da função f no intervalo $]1{,}4[$	C.A. $f(1) = 2^1 - 9 = 2 - 9 = -7$ $f(4) = 2^4 - 9 = 16 - 9 = 7$

   Resposta: **Opção B**

5. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)^2 =$$

   (fazendo $y = \dfrac{x}{2}$ temos que $x = 2y$, e se $x \to 0$, então $y \to 0$)

   $$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{2y}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\times\frac{\operatorname{sen} y}{y}\right)\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\times 1\right)^2 = \frac{1}{4}$$

   Resposta: **Opção C**

6. Pela observação do gráfico podemos afirmar que:

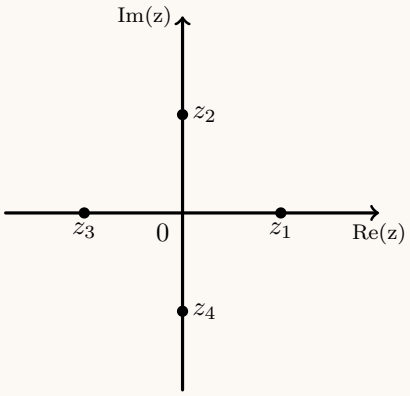
   - Em $x = -3$ a função é crescente, ou seja, $f'(-3) > 0$
   - Em $x = 0$ a função é decrescente, ou seja, $f'(0) < 0$
   - Em $x = 6$ a função é crescente, ou seja, $f'(6) > 0$

   Assim, temos que:

   - $f'(0) \times f'(6) < 0$
   - $f'(-3) \times f'(6) > 0$
   - $f'(-3) \times f'(0) < 0$
   - $f'(0) \times f'(6) < 0$

   Resposta: **Opção D**

7. Sabemos que $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$, e que é válida a igualdade $i^n = i^k$, onde k é o resto da divisão inteira de n por 4.



Assim,

- como $4n = 4 \times n + \mathbf{0}$, temos que $i^{4n} = i^0 = 1$
- como $4n + 1 = 4 \times n + \mathbf{1}$ temos que $i^{4n+1} = i^1 = i$
- como $4n + 2 = 4 \times n + \mathbf{2}$ temos que $i^{4n+2} = i^2 = -1$

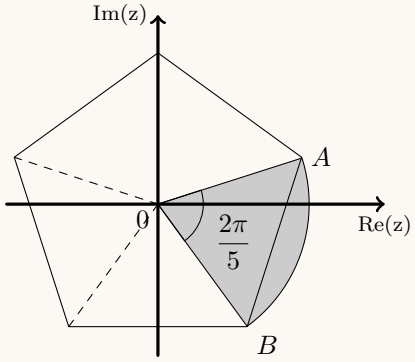
Assim temos que:

$i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} = 1 + i - 1 = i$, pelo que, de acordo com a figura, temos que $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} = z_2$

Resposta: **Opção B**

8. Como a área do setor circular é dada por $\dfrac{\alpha r^2}{2}$, onde α é a amplitude do ângulo ao centro do setor circular e r o raio da circunferência, e designado por w o número complexos que tem por imagem geométrica o ponto A, temos que:

- $r = |w| = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$ (usando a fórmula de Moivre);
- α é a amplitude do ângulo AOB e como A e B são vértices adjacentes de um pentágono regular centrado na origem (por serem raízes de índice 5 de um mesmo número complexo) temos que $\alpha = \dfrac{2\pi}{5}$



Logo o valor da área do setor circular AOB é

$$\frac{\alpha r^2}{2} = \frac{\frac{2\pi}{5} \times 2^2}{2} = \frac{2\pi}{5} \times 2 = \frac{4\pi}{5}$$

Resposta: **Opção B**

GRUPO II

1.

1.1. Como z_1 é raíz do polinómio, este é divisível por $(z-1)$, pelo que podemos usar a regra de Ruffini para fazer a divisão e obter um polinómio de grau 2.

	1	-1	16	-16
1		1	0	16
	1	0	16	0

E assim temos que
$z^3 - z^2 + 16z - 16 = (z-1)(z^2 + 0z + 16) + 0 = (z-1)(z^2 + 16)$

Podemos agora determinar as raízes do polinómio $z^2 + 16$ (que também são raízes do polinómio $z^3 - z^2 + 16z - 16$) resolvendo a equação $z^2 + 16 = 0$:

$$z^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -16 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{-16} \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{16 \times (-1)} \Leftrightarrow z = 4i \vee z = -4i$$

Escrevendo as raízes encontradas na f.t., temos:
$z = 4\,\mathrm{cis}\,\dfrac{\pi}{2} \vee z = 4\,\mathrm{cis}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$

1.2. Começamos por escrever z_2 na f.t. e calcular o produto $z_2 \times z_3$ na f.t.:

Como z_2 é um imaginário puro, $\arg(z_2) = \frac{\pi}{2}$ e $|z_2| = 5$, pelo que $z_2 = 5\,\text{cis}\,\frac{\pi}{2}$

Assim temos que:
$z_2 \times z_3 = \left(5\,\text{cis}\,\frac{\pi}{2}\right) \times \left(\text{cis}\left(\frac{n\pi}{40}\right)\right) = (5\times 1)\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{40}\right) = 5\,\text{cis}\left(\frac{20\pi}{40}+\frac{n\pi}{40}\right) = 5\,\text{cis}\,\frac{20\pi+n\pi}{40}$

Como a representação geométrica do número complexo $z_2 \times z_3$ está no terceiro quadrante e pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares se
$\arg(z_2 \times z_3) = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{4\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{8k\pi}{4} = \frac{5\pi+8k\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$, vem que:

$$\frac{20\pi+n\pi}{40} = \frac{5\pi+8k\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{20\pi+n\pi}{40} = \frac{50\pi+80k\pi}{40} \Leftrightarrow 20\pi+n\pi = 50\pi+80k\pi \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 20+n = 50+80k \Leftrightarrow n = 30+80k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Substituindo k por valores inteiros, vem que:

- $k = -1$, temos $n = -50$;
- $k = 0$, temos $n = 30$;
- $k = 1$, temos $n = 110$;

Logo, o menor valor natural de n é 30.

2.

2.1. Como a experiência «*Um jovem compra o bilhete*» se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades da variável X:«*Número de jovens que usa o multibanco no pagamento*», segue o modelo binomial $\left(P(X=k) =^n C_k\, p^k\, q^{n-k}\right)$.

Temos que:

- $n = 9$ (serão comprados bilhetes 9 vezes de forma independente).
- $p = 0{,}6$ (é a probabilidade do sucesso, ou seja "*O jovem usa o multibanco no pagamento*")
- $q = 0{,}4$, a probabilidade do insucesso pode ser calculada como $q = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

Assim, calculando da ocorrência de 6 sucessos ($k = 6$) no conjunto das 9 repetições da experiência, e arredondando o resultado às centésimas, temos:

$$P(X=6) =^9 C_6\,(0{,}6)^6\,(0{,}4)^3 \approx 0{,}25$$

2.2. Considerando a experiência aleatória que consiste em seleccionar, ao acaso, um cliente desta companhia aérea, e os acontecimentos:
B:«O cliente ter comprado um bilhete para Berlim»
V:«O cliente faz a viagem sem perder o voo»
Temos que $P\left(\overline{V}|B\right) = \frac{5}{100} = 0{,}05$, $P\left(V|\overline{B}\right) = \frac{92}{100} = 0{,}92$ e $P(B) = \frac{30}{100} = 0{,}3$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(\overline{V}\cap B\right) = P(B)\times P\left(\overline{V}|B\right) = 0{,}3\times 0{,}05 = 0{,}015$
- $P\left(\overline{B}\right) = P(B) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$
- $P\left(V\cap\overline{B}\right) = P\left(\overline{B}\right)\times P\left(V|\overline{B}\right) = 0{,}7\times 0{,}92 = 0{,}644$
- $P\left(\overline{V}\cap\overline{B}\right) = P\left(\overline{B}\right) - P\left(V\cap\overline{B}\right) = 0{,}7 - 0{,}664 = 0{,}056$

	B	$\overline{B}$	
V		0,644	
$\overline{V}$	0,015	0,056	0,071
	0,3	0,7	1

Assim, calculando a probabilidade de um passageiro desta companhia aérea perder o voo, e escrevendo o resultado na forma de dízima, temos

$$P\left(\overline{V}\right) = P\left(\overline{V}\cap B\right) + P\left(\overline{V}\cap\overline{B}\right) = 0{,}015 + 0{,}056 = 0{,}071$$

3. Temos que:

$$\begin{aligned}
1-\frac{1-P(B)}{P(A)} &= \frac{P(A)}{P(A)}-\frac{1-P(B)}{P(A)} && \\
&= \frac{P(A)-1+P(B)}{P(A)} && \\
&= \frac{P(A)+P(B)-\left(P(A\cup B)+P\left(\overline{A\cup B}\right)\right)}{P(A)} && \text{Teorema: } P(X)+P\left(\overline{X}\right)=1 \\
&= \frac{P(A)+P(B)-P(A\cup B)-P\left(\overline{A\cup B}\right)}{P(A)} && \\
&= \frac{P(A\cap B)-P\left(\overline{A\cup B}\right)}{P(A)} && \text{Teorema: } P(X\cap Y)=P(X)-P(Y)-P(X\cup Y) \\
&= \frac{P(A\cap B)}{P(A)}-\frac{P\left(\overline{A\cup B}\right)}{P(A)} && \\
&= P(B|A)-\frac{P\left(\overline{A\cup B}\right)}{P(A)} && \text{Definição: } P(X|Y)=\frac{P(X\cap Y)}{P(Y)}
\end{aligned}$$

Logo $1-\dfrac{1-P(B)}{P(A)} = P(B|A)-\dfrac{P\left(\overline{A\cup B}\right)}{P(A)} \Leftrightarrow P(B|A) = 1-\dfrac{1-P(B)}{P(A)}+\dfrac{P\left(\overline{A\cup B}\right)}{P(A)}$

Como $\dfrac{P\left(\overline{A\cup B}\right)}{P(A)} \geq 0$, então $P(B|A) \geq 1-\dfrac{1-P(B)}{P(A)}$ *q.e.d.*

4. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$T'(t) = \left(15+0{,}1t^2e^{-0{,}15t}\right)' = (15)' + \left(0{,}1t^2e^{-0{,}15t}\right)' = 0+0{,}1\left((t^2)'e^{-0{,}15t}+t^2(e^{-0{,}15t})'\right) =$$

$$= 0{,}1\left(2t\times e^{-0{,}15t}+t^2(-0{,}15)e^{-0{,}15t}\right) = 0{,}1\left(2te^{-0{,}15t}-0{,}15t^2e^{-0{,}15t}\right) =$$

$$= 0{,}2te^{-0{,}15t}-0{,}015t^2e^{-0{,}15t} = te^{-0{,}15t}(0{,}2-0{,}015t)$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$T'(t)=0 \Leftrightarrow te^{-0{,}15t}(0{,}2-0{,}015t)=0 \Leftrightarrow t=0 \vee \underbrace{e^{-0{,}15t}=0}_{\text{Eq. Imp.},\,e^{-0{,}15t}>0} \vee\, 0{,}2-0{,}015t=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=0 \vee 0{,}2=0{,}015t \Leftrightarrow t=0 \vee \frac{0{,}2}{0{,}015}=t \Leftrightarrow t=0 \vee t=\frac{40}{3}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

t	0		$\frac{40}{3}$		20
$T'(x)$	0	+	0	−	−
$T(x)$	min	↗	Máx	↘	

Assim, como C é crescente no intervalo $\left[0,\frac{40}{3}\right]$ e decrescente no intervalo $\left[\frac{40}{3},20\right]$ podemos concluir que $\frac{40}{3}$ é único o maximizante da função.

Como $\frac{40}{3} \approx 13{,}333$ corresponde a 13 horas e $0{,}333\times 60$ minutos (ou seja 20 minutos), temos que às 13 horas e 20 minutos do dia 1 de Abril de 2010, se registou, no museu, a temperatura ambiente máxima.

5.

5.1. Averiguando a existência de assintotas horizontais, temos:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{x-1} = \dfrac{3}{-\infty-1} = \dfrac{3}{-\infty} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{\ln x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} + \underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}}_{\text{Lim notável}} = \dfrac{2}{+\infty} + 0 = 0+0 = 0$

Pelo que podemos afirmar que a reta de equação $y = 0$ é a assintota horizontal do gráfico de f.

Determinando a expressão da derivada, para $x > 1$, temos:

$$\left(\frac{2+\ln x}{x}\right)' = \frac{(2+\ln x)'(x) - (2+\ln x)(x)'}{x^2} = \frac{(0+\frac{1}{x})(x) - (2+\ln x)(1)}{x^2} = \frac{1-2-\ln x}{x^2} = \frac{-1-\ln x}{x^2}$$

Como $e > 1$, o declive da reta tangente no ponto de abcissa e, é dado por:

$$m = f'(e) = \frac{-1-\ln e}{e^2} = \frac{-1-1}{e^2} = \frac{-2}{e^2}$$

Determinando a ordenada do ponto do gráfico de abcissa e, temos:

$$f(e) = \frac{2+\ln e}{e} = \frac{2+1}{e} = \frac{3}{e}$$

Como o ponto de abcissa e, também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx + b$, para calcular o valor de b:

$$\frac{3}{e} = \frac{-2}{e^2} \times e + b \;\Leftrightarrow\; \frac{3}{e} = -\frac{2}{e} + b \;\Leftrightarrow\; \frac{3}{e} + \frac{2}{e} = b \;\Leftrightarrow\; \frac{5}{e} = b$$

Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa e, é:

$$y = -\frac{2}{e^2} \times x + \frac{5}{e}$$

E a abcissa do ponto de intersecção com a reta de equação $y = 0$ (a assintota horizontal), pode ser calculada como:

$$y = -\frac{2}{e^2} \times x + \frac{5}{e} \;\wedge\; y = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 = -\frac{2}{e^2} \times x + \frac{5}{e} \;\Leftrightarrow\; \frac{2}{e^2} \times x = \frac{5}{e} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{5e^2}{2e} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{5e}{2}$$

Ou seja, as coordenadas do ponto de interseção da assintota horizontal com a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa e, são

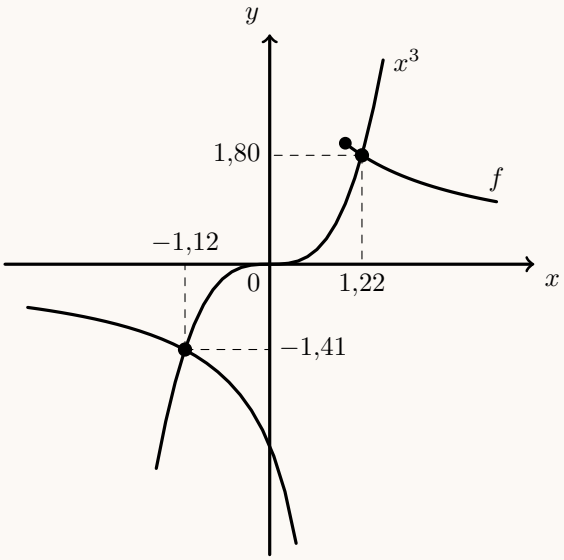
$$P\left(\frac{5e}{2}, 0\right)$$

5.2. Os pontos do plano cuja ordenada é o cubo da abcissa estão sobre o gráfico da função $g(x) = x^3$.

Assim, as abcissas dos pontos do gráfico de f que verificam esta condição são as soluções da equaçao:

$$f(x) = x^3$$

Logo, traçando na calculadora o gráfico da função f, respeitando o domínio de cada um dos ramos, e a função $g(x) = x^3$ numa janela que permita identificar os pontos de interseção dos gráficos, obtemos o gráfico que se reproduz na figura ao lado.



Recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados de um ponto de interseção de dois gráficos, determinamos o valor das coordenadas dos dois pontos em que o gráfico da função f interseta o gráfico da função g. Os valores das coordenadas (com aproximação às centésimas) são $(-1{,}12; -1.41)$ e $(1{,}22, 1{,}80)$

6.

6.1. Podemos calcular a área do trapézio como a soma das áreas do retângulo $[ODCB]$ e do triângulo $[OAB]$.

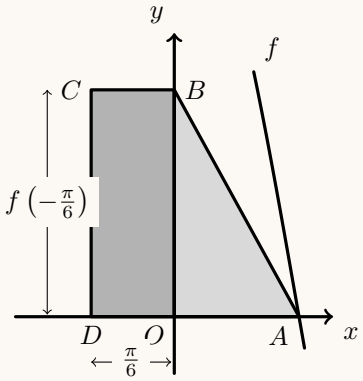
A base do retângulo é dada pela distância do ponto D à origem:

$$\overline{OD} = |x_D| = \left|-\frac{\pi}{6}\right| = \frac{\pi}{6}$$

e a altura é a ordenada do ponto C:

$$\overline{DC} = f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\left(2\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 4\cos\frac{\pi}{3} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$



A altura do triângulo também é ordenada do ponto C, $\overline{OB} = \overline{DC}$ e a base é a menor é a abcissa do ponto $\overline{OA}$, ou seja, a solução positiva da equação $f(x) = 0$.

Assim, resolvendo a equação vem:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\,, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, para $k = 0$, a menor solução positiva da equação é $x = \frac{\pi}{4}$

Assim, calculando a área do trapézio, vem:

$$A_{[ABCD]} = A_{[ODCB]} + A_{[OAB]} = \overline{OD} \times \overline{DC} + \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \frac{\pi}{6} \times 2 + \frac{\frac{\pi}{4} \times 2}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$$

6.2. Determinando a expressão da primeira derivada de f, vem:

$$f'(x) = (4\cos(2x))' = 4(2x)'(-\operatorname{sen}(2x)) = 4 \times 2 \times (-\operatorname{sen}(2x)) = -8\operatorname{sen}(2x)$$

Depois, determinando a expressão da segunda derivada, vem:

$$f''(x) = (f'(x))' = (-8\operatorname{sen}(2x))' = -8(2x)'\cos(2x) = -16\cos(2x)$$

Assim, temos que, para qualquer número real x,

$$f(x)+f'(x)+f''(x) = \Big(4\cos(2x)\Big)+\Big(-8\operatorname{sen}(2x)\Big)+\Big(-16\cos(2x)\Big) = 4\cos(2x)-16\cos(2x)-8\operatorname{sen}(2x) =$$

$$= -12\cos(2x) - 8\operatorname{sen}(2x) = -4 \times 3\cos(2x) - 4 \times 2\operatorname{sen}(2x) = -4\Big(3\cos(2x) + 2\operatorname{sen}(2x)\Big)\ ,\ \ q.e.d.$$

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/2.ª Fase 13 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2011

VERSÃO 1

Página em branco

Na folha de respostas, indique de forma legível a versão da prova. A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens do Grupo I.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 4, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: $\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Sector circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$

(α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\ r\ g$

(r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\ \pi\ r^2$

(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3\ (r - \textit{raio})$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ \operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right),\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Os medicamentos produzidos num laboratório são embalados em caixas de igual aspecto exterior e indistinguíveis ao tacto. Um lote contém dez caixas de um medicamento X e vinte caixas de um medicamento Y. Desse lote, retiram-se, ao acaso, simultaneamente, quatro caixas para controlo de qualidade.

Qual é a probabilidade de as caixas retiradas serem todas do medicamento Y?

(A) $\frac{^{10}C_4}{^{30}C_4}$ **(B)** $\frac{^{20}C_4}{^{30}C_4}$ **(C)** $\frac{4}{^{30}C_4}$ **(D)** $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

2. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte.

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$2a$	a	b	b	b	$\frac{1}{10}$

Sabe-se que:

- a e b são números reais
- $P(X \leq 1) = 3P(X = 5)$

Qual é o valor de b?

(A) $\frac{1}{10}$ **(B)** $\frac{4}{15}$ **(C)** $\frac{7}{30}$ **(D)** $\frac{1}{5}$

3. Seja a um número real positivo e seja X uma variável aleatória com distribuição Normal $N(0, 1)$

Qual das igualdades seguintes é verdadeira?

(A) $P(X \leq a) + P(X \geq -a) = 0$

(B) $P(X \leq a) = P(X \geq -a)$

(C) $P(X \leq a) + P(X \geq -a) = 1$

(D) $P(X \leq a) = P(X > a)$

4. Na Figura 1, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f, de grau 4.

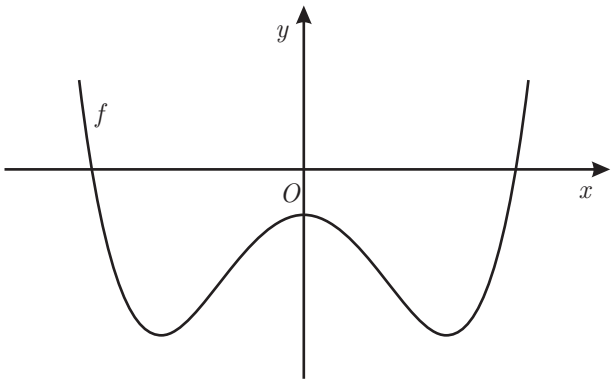


Figura 1

Qual das expressões seguintes pode definir a função f'', segunda derivada de f?

(A) $(x - 3)^2$

(B) $(x + 3)^2$

(C) $9 - x^2$

(D) $x^2 - 9$

5. Para um certo número real positivo, k, a função g definida em $\mathbb{R}$ por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{3x} & \text{se} \quad x > 0 \\ \ln(k - x) & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$ é contínua.

Qual é o valor de k?

(A) $\sqrt[3]{e}$ **(B)** e^3 **(C)** $\dfrac{e}{3}$ **(D)** $3\,e$

6. Na Figura 2, está representado, num referencial o. n. xOy, o círculo trigonométrico.

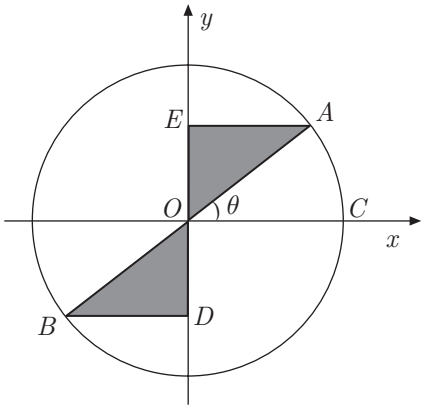


Figura 2

Sabe-se que:

- C é o ponto de coordenadas $(1, 0)$
- os pontos D e E pertencem ao eixo Oy
- $[AB]$ é um diâmetro do círculo trigonométrico
- as rectas EA e BD são paralelas ao eixo Ox
- θ é a amplitude do ângulo COA
- $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

Qual das expressões seguintes dá o perímetro da região sombreada na Figura 2?

(A) $2\,(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)$

(B) $\cos\theta + \operatorname{sen}\theta$

(C) $2\,(1 + \cos\theta + \operatorname{sen}\theta)$

(D) $1 + \cos\theta + \operatorname{sen}\theta$

7. Na Figura 3, está representado, no plano complexo, a sombreado, um sector circular.

Sabe-se que:

- o ponto A é a imagem geométrica do número complexo $-\sqrt{3}+i$
- o ponto B tem abcissa negativa, ordenada nula, e pertence à circunferência de centro na origem do referencial e raio igual a $\overline{OA}$

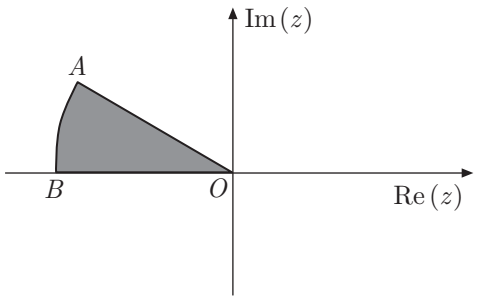


Figura 3

Qual das condições seguintes define, em $\mathbb{C}$, a região a sombreado, incluindo a fronteira?

(Considere como $\arg(z)$ a determinação que pertence ao intervalo $[0,\, 2\pi\,[$)

(A) $\left|z\right| \leq 2 \ \wedge \ \dfrac{2\pi}{3} \leq \arg(z) \leq \pi$

(B) $\left|z\right| \leq 2 \ \wedge \ \dfrac{5\pi}{6} \leq \arg(z) \leq \pi$

(C) $\left|z\right| \leq 4 \ \wedge \ \dfrac{2\pi}{3} \leq \arg(z) \leq \pi$

(D) $\left|z\right| \leq 4 \ \wedge \ \dfrac{5\pi}{6} \leq \arg(z) \leq \pi$

8. Na Figura 4, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de seis números complexos z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 e z_6

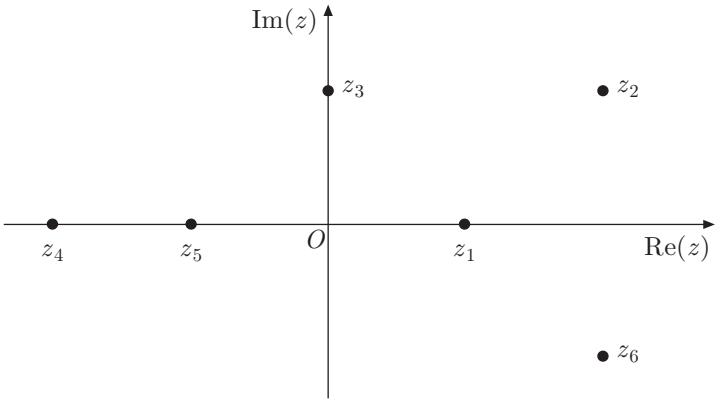


Figura 4

Qual é o número complexo que pode ser igual a $(z_2 + z_4) \times i$?

(A) z_1

(B) z_3

(C) z_5

(D) z_6

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Resolva os dois itens seguintes, sem recorrer à calculadora.

1.1. Considere $z_1 = 1 + 2i$ e $w = \dfrac{z_1 \times i^{4n+3} - b}{\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)}$, com $b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$

Determine o valor de b para o qual w é um número real.

1.2. Seja z um número complexo tal que $|z| = 1$

Mostre que $\left|1 + z\right|^2 + \left|1 - z\right|^2 = 4$

2. A MatFinance é uma empresa de consultoria financeira.

2.1. Dos funcionários da MatFinance, sabe-se que:

- 60% são licenciados;
- dos que são licenciados, 80% têm idade inferior a 40 anos;
- dos que não são licenciados, 10% têm idade inferior a 40 anos.

Determine a probabilidade de um desses funcionários, escolhido ao acaso, ser licenciado, sabendo que tem idade não inferior a 40 anos.

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

2.2. Considere o problema seguinte.

«Foi pedido a 15 funcionários da MatFinance que se pronunciassem sobre um novo horário de trabalho.

Desses 15 funcionários, 9 estão a favor do novo horário, 4 estão contra, e os restantes estão indecisos. Escolhe-se, ao acaso, 3 funcionários de entre os 15 funcionários considerados.

De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos os 3 funcionários, de forma que pelo menos 2 dos funcionários escolhidos estejam a favor do novo horário de trabalho?»

Apresentam-se, em seguida, duas respostas.

Resposta I: $^{15}C_3 - {}^{6}C_3$ Resposta II: $6\times{}^{9}C_2+{}^{9}C_3$

Apenas uma das respostas está correcta.

Elabore uma composição na qual:

- identifique a resposta correcta;
- explique um raciocínio que conduza à resposta correcta;
- proponha uma alteração na expressão correspondente à resposta incorrecta, de modo a torná-la correcta;
- explique, no contexto do problema, a razão da alteração proposta.

3. Na estufa de um certo jardim botânico, existem dois lagos aquecidos, o lago A e o lago B. Às zero horas do dia 1 de Março de 2010, cada lago recebeu uma espécie diferente de nenúfares, a saber, *Victoria amazonica* e *Victoria cruziana*.

$N_A(t)$ é o número aproximado de nenúfares existentes no lago A, t dias após as zero horas do dia 1 de Março de 2010. Esses nenúfares são da espécie *Victoria amazonica* e desenvolvem-se segundo o modelo

$$N_A(t) = \frac{120}{1+7\times e^{-0,2t}} \quad \text{com } t \geq 0$$

$N_B(t)$ é o número aproximado de nenúfares existentes no lago B, t dias após as zero horas do dia 1 de Março de 2010. Esses nenúfares são da espécie *Victoria cruziana* e desenvolvem-se segundo o modelo

$$N_B(t) = \frac{150}{1+50\times e^{-0,4t}} \quad \text{com } t \geq 0$$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

3.1. Como foi referido, às zero horas do dia 1 de Março de 2010, o lago A recebeu um certo número de nenúfares da espécie *Victoria amazonica*. Decorridos 7 dias, esse número aumentou.

Determine de quanto foi esse aumento.

Apresente o resultado com arredondamento às unidades.

3.2. Determine quantos dias foram necessários, após as zero horas do dia 1 de Março de 2010, para que o número de nenúfares existentes no lago A fosse igual ao número de nenúfares existentes no lago B.

Apresente o resultado com arredondamento às unidades.

4. Considere a função f, de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $f(x) = e^{2x} + \cos x - 2x^2$

Sabe-se que:

- B é um ponto do gráfico de f
- a recta de equação $y = 8x$ é paralela à recta tangente ao gráfico de f no ponto B

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto B

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

5. Considere a função f, de domínio $[0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2-x} - 1}{x - 2} & \text{se} \quad 0 \leq x < 2 \\ \dfrac{x + 1}{\ln(x + 1)} & \text{se} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Resolva os três itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

5.1. Estude f quanto à existência de assimptotas verticais do seu gráfico.

5.2. Mostre, sem resolver a equação, que $f(x) = -3$ tem, pelo menos, uma solução em $\left]0, \frac{1}{2}\right[$

5.3. Estude f quanto à monotonia em $]2, +\infty[$

6. Para a, b e n, números reais positivos, considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a\cos(nx) + b\,\text{sen}(nx)$

Seja f'' a segunda derivada da função f

Mostre que $f''(x) + n^2 f(x) = 0$, para qualquer número real x

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

.....(8 × 5 pontos).....	40 pontos
	40 pontos

GRUPO II

1.		
	1.1.	15 pontos
	1.2.	15 pontos
2.		
	2.1.	20 pontos
	2.2.	15 pontos
3.		
	3.1.	10 pontos
	3.2.	15 pontos
4.		15 pontos
5.		
	5.1.	15 pontos
	5.2.	10 pontos
	5.3.	15 pontos
6.		15 pontos
		160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/2.ª Fase 11 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2011

COTAÇÕES

GRUPO I

(8 × 5 pontos) ..... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1.
- **1.1.** ..... 15 pontos
- **1.2.** ..... 15 pontos

2.
- **2.1.** ..... 20 pontos
- **2.2.** ..... 15 pontos

3.
- **3.1.** ..... 10 pontos
- **3.2.** ..... 15 pontos

4. ..... 15 pontos

5.
- **5.1.** ..... 15 pontos
- **5.2.** ..... 10 pontos
- **5.3.** ..... 15 pontos

6. ..... 15 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

A classificação da prova deve respeitar integralmente os critérios gerais e os critérios específicos a seguir apresentados.

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos de classificação apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro, previsto na grelha de classificação.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos. No entanto, em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se o examinando responder a um mesmo item mais do que uma vez, não eliminando inequivocamente a(s) resposta(s) que não deseja que seja(m) classificada(s), deve ser considerada apenas a resposta que surgir em primeiro lugar.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova (Versão 1 ou Versão 2) implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de selecção (escolha múltipla).

Nos itens de selecção (escolha múltipla), a cotação total do item é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a única opção correcta.

São classificadas com zero pontos as respostas em que seja assinalada:

– uma opção incorrecta;

– mais do que uma opção.

Não há lugar a classificações intermédias.

Os critérios de classificação dos itens de construção apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação. No caso de, ponderados todos os dados contidos nos descritores, permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

Nos itens de construção com cotação igual ou superior a quinze pontos e que impliquem a produção de um texto, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea das competências específicas da disciplina e das competências de comunicação escrita em língua portuguesa. A avaliação das competências de comunicação escrita em língua portuguesa contribui para valorizar a classificação atribuída ao desempenho no domínio das competências específicas da disciplina. Esta valorização é cerca de 10% da cotação do item e faz-se de acordo com os níveis de desempenho descritos no quadro seguinte.

Níveis	Descritores
3	Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
2	Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
1	Composição sem estruturação aparente, com erros graves de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é zero pontos. Neste caso, não é classificado o desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

Havendo escolas em que os examinandos já contactam com as novas regras ortográficas, uma vez que o Acordo Ortográfico de 1990 já foi ratificado e dado que qualquer cidadão, nesta fase de transição, pode optar pela ortografia prevista quer no Acordo de 1945, quer no de 1990, são consideradas correctas, na classificação das provas, as grafias que seguirem o que se encontra previsto em qualquer um destes normativos.

Nos itens de construção, as respostas que apresentem pontos de vista diferentes dos mencionados nos critérios específicos de classificação devem ser classificadas segundo procedimentos análogos aos previstos nos descritores apresentados, desde que o conteúdo dessas respostas seja considerado cientificamente válido e adequado ao solicitado.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar em situações não descritas anteriormente.

Situação	Classificação
1. Classificação da resposta a um item cujo critério se apresenta organizado por etapas.	A pontuação indicada para cada etapa é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A classificação da resposta resulta da soma das pontuações das diferentes etapas, à qual se subtrai ou subtraem, eventualmente, um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 14 e/ou 19.
2. Pontuação de uma etapa dividida em passos.	A pontuação indicada para cada passo é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A pontuação da etapa resulta da soma das pontuações dos diferentes passos.
3. Classificação da resposta a um item ou pontuação de uma etapa cujo critério se apresenta organizado por níveis de desempenho.	A resposta é enquadrada numa das descrições apresentadas. À classificação/pontuação correspondente subtraem-se, eventualmente, um, dois ou três pontos, de acordo com o previsto nas situações 9, 10 e/ou 19.
4. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite e classificado qualquer processo de resolução cientificamente correcto. O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante distribuição da cotação do item pelas etapas* percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.
5. Apresentação apenas do resultado final, embora a resolução do item exija cálculos e/ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
6. Utilização de processos de resolução que não respeitam as instruções dadas [exemplo: «usando métodos analíticos»].	A etapa em que a instrução não é respeitada é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário, no critério específico de classificação.
7. Ausência de apresentação dos cálculos e/ou das justificações necessárias à resolução de uma etapa*.	A etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário, no critério específico de classificação.
8. Ausência de apresentação explícita de uma dada etapa.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, a mesma é pontuada com a cotação total para ela prevista.

Situação	Classificação
9. Transposição incorrecta de dados do enunciado.	Se o grau de dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
10. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre.
11. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.	A pontuação máxima a atribuir nessa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
12. Ocorrência de um erro na resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada de acordo com o erro cometido. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido: – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
13. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas o passo final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
14. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação de um arredondamento incorrecto.	É subtraído um ponto à classificação da resposta, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
15. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fracção, e a resposta apresenta-se na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final [exemplo: «15» em vez de «15 metros»].	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a cotação para ela prevista.
17. Apresentação do resultado final com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exacto.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
18. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação do resultado final incorrectamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
19. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à classificação da resposta, excepto: – se as incorrecções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

* Em situações em que o critério é aplicável tanto a **etapas** como a **passos**, utiliza-se apenas o termo «etapas» por razões de simplificação da apresentação.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. ..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

As respostas correctas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	B	D	B	D	A	C	B	C
Versão 2	C	A	C	A	B	D	B	B

GRUPO II

É de aceitar qualquer processo de resolução cientificamente correcto, ainda que não esteja previsto nestes critérios específicos, nem no Programa (ver n.º 4 dos critérios gerais).

1.1. ..... **15 pontos**

Substituir z_1 por $1 + 2i$ ..... 1 ponto

Concluir que $i^{4n+3} = -i$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Escrever $\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ na forma algébrica ..... 2 pontos

Obter $\frac{2-b-i}{-1-i}$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Indicar a multiplicação de ambos os termos da fracção pelo conjugado do denominador ..... 1 ponto

Efectuar a multiplicação do numerador ..... 2 pontos

Efectuar a multiplicação do denominador ..... 1 ponto

Referir que w é um número real se $3 - b = 0$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

Concluir que $b = 3$ ..... 1 ponto

1.2. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Considerar $z = a + bi$

Substituir z por $a + bi$ na expressão $|1 + z|^2 + |1 - z|^2$ ..... 1 ponto

Obter $(1 + a)^2 + b^2 + (1 - a)^2 + b^2$ ..... 4 pontos

Desenvolver $(1 + a)^2$ ..... 2 pontos

Desenvolver $(1 - a)^2$ ..... 2 pontos

Obter $2+2(a^2+b^2)$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Referir que $a^2+b^2=1$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

Concluir o pretendido ..... 1 ponto

2.º Processo

Considerar $z=\rho\,\mathrm{cis}\,\theta$

Referir que $z=\mathrm{cis}\,\theta$ se $|z|=1$ ..... 1 ponto

Substituir z por $\mathrm{cis}\,\theta$ na expressão $|1+z|^2+|1-z|^2$ ..... 1 ponto

Escrever $|1+\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\theta|^2+|1-\cos\theta-i\,\mathrm{sen}\theta|^2$ ..... 1 ponto

Obter $(1+\cos\theta)^2+\mathrm{sen}^2\theta+(1-\cos\theta)^2+\mathrm{sen}^2\theta$ ..... 4 pontos

Desenvolver $(1+\cos\theta)^2$ ..... 2 pontos

Desenvolver $(1-\cos\theta)^2$ ..... 2 pontos

Obter $1+\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\theta+1+\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\theta$ ..... 2 pontos

Referir que $\mathrm{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$ ..... 1 ponto

Concluir o pretendido ..... 1 ponto

3.º Processo

Considerar $z\,\bar{z}=|z|^2$

Escrever $|1+z|^2=(1+z)(\overline{1+z})$ ..... 2 pontos

Escrever $|1-z|^2=(1-z)(\overline{1-z})$ ..... 2 pontos

Escrever $\overline{1+z}=\bar{1}+\bar{z}$ ..... 1 ponto

Escrever $\overline{1-z}=\bar{1}-\bar{z}$ ..... 1 ponto

Concluir que $\bar{1}=1$ ..... 1 ponto

Escrever $(1+z)(1+\bar{z})=1+z+\bar{z}+|z|^2$ ..... 3 pontos

Escrever $(1-z)(1-\bar{z})=1-z-\bar{z}+|z|^2$ ..... 3 pontos

Substituir $|z|$ por 1 ..... 1 ponto

Concluir o pretendido ..... 1 ponto

2.1. ..... **20 pontos**

No que se segue, vamos designar por A o acontecimento «o funcionário é licenciado» e por B o acontecimento «o funcionário tem idade inferior a 40 anos».

Podem ser admitidas outras designações para os acontecimentos.

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $P(A) = 0{,}6$ ..... 1 ponto

Escrever $P(B \mid A) = 0{,}8$ ..... 2 pontos

Escrever $P(B \mid \overline{A}) = 0{,}1$ ..... 2 pontos

Identificar o pedido com $P(A \mid \overline{B})$ ..... 2 pontos

Escrever $P(A \mid \overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$ (ou equivalente) **(ver nota 1)** ..... 1 ponto

Calcular $P(\overline{A})$ ..... 1 ponto

Calcular $P(A \cap \overline{B})$ ..... 4 pontos

- Calcular $P(\overline{B} \mid A)$ ..... 2 pontos
- Calcular $P(\overline{B} \mid A) \times P(A)$ ..... 2 pontos

Calcular $P(\overline{B})$ ..... 5 pontos

- Calcular $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ ..... 4 pontos
  - Calcular $P(\overline{B} \mid \overline{A})$ 2
  - Calcular $P(\overline{B} \mid \overline{A}) \times P(\overline{A})$ 2
- Obter $P(\overline{B})$ ..... 1 ponto

Obter $P(A \mid \overline{B})$ (**ver nota 2**) ..... 2 pontos

2.º Processo

Escrever $P(A) = 0{,}6$ ..... 1 ponto

Escrever $P(B \mid A) = 0{,}8$ ..... 2 pontos

Escrever $P(B \mid \overline{A}) = 0{,}1$ ..... 2 pontos

Identificar o pedido com $P(A \mid \overline{B})$ ..... 2 pontos

Escrever $P(A \mid \overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$ (ou equivalente) **(ver nota 1)** ..... 1 ponto

Calcular $P(\overline{A})$ ..... 1 ponto

Calcular $P(A \cap \overline{B})$ ..... 4 pontos

- Calcular $P(\overline{B} \mid A)$ ..... 2 pontos
- Calcular $P(\overline{B} \mid A) \times P(A)$ ..... 2 pontos

Calcular $P(\overline{B})$ ..... 5 pontos

- Calcular $P(A \cap B)$ ..... 2 pontos
- Calcular $P(\overline{A} \cap B)$ ..... 2 pontos
- Obter $P(\overline{B})$ ..... 1 ponto

Obter $P(A \mid \overline{B})$ (**ver nota 2**) ..... 2 pontos

Notas:

1. Se o examinando não escrever $P(A \mid \overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$ e obtiver o valor de $P(A \mid \overline{B})$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

2. Se o examinando obtiver o valor de $P(A \mid \overline{B})$ apresentando uma tabela ou um diagrama em árvore, as etapas anteriores devem ser pontuadas segundo procedimentos análogos aos apresentados.

2.2. ..... **15 pontos**

A composição deve contemplar os pontos seguintes:

A) identificação da resposta correcta;
B) explicação do raciocínio que conduz à resposta correcta;
C) proposta de alteração na expressão da resposta incorrecta, de modo a torná-la correcta;
D) explicação, no contexto do problema, da razão da alteração proposta.

Na tabela seguinte, indica-se como deve ser classificada a resposta a este item, de acordo com os níveis de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa e os níveis de desempenho no domínio específico da disciplina.

Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina / Descritores do nível de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa			Níveis*		
			1	**2**	**3**
Níveis	**5**	A composição contempla correctamente os quatro pontos, OU apenas os pontos B, C e D.	13	14	15
	4	A composição contempla correctamente apenas os pontos A, B e C, OU apenas os pontos A, C e D, OU apenas os pontos B e C, OU apenas os pontos C e D.	10	11	12
	3	A composição contempla correctamente apenas os pontos A e B, OU apenas o ponto B.	7	8	9
	2	A composição contempla correctamente apenas os pontos A e C, OU apenas o ponto C.	6	6	6
	1	A composição contempla correctamente apenas o ponto A.	3	3	3

***** Descritores apresentados nos Critérios Gerais de Classificação.

3.1. ..... **10 pontos**

Identificar que o aumento é dado por $N_A(7) - N_A(0)$ ..... 2 pontos

Calcular $N_A(0)$ ..... 3 pontos

Calcular $N_A(7)$ ..... 3 pontos

Calcular $N_A(7) - N_A(0)$ ..... 2 pontos

3.2. ..... **15 pontos**

Equacionar o problema $\left(N_A(t) = N_B(t)\right)$ ..... 2 pontos

Resolver a equação $N_A(t) = N_B(t)$ ..... 11 pontos

Obter $200\,e^{-0,4\,t} - 35\,e^{-0,2t} - 1 = 0$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

Concluir que $e^{-0,2t} = 0,2 \ \vee \ e^{-0,2t} = -0,025$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

Reconhecer que $e^{-0,2t} = -0,025$ é uma equação impossível .... 2 pontos

Obter $-0,2\,t = \ln(0,2)$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Obter o valor de t ..... 1 ponto

Concluir o pretendido ..... 2 pontos

4. ..... **15 pontos**

Equacionar o problema $\left(f'(x)=8\right)$ (**ver nota 1**) ..... 5 pontos

Reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados na calculadora (**ver notas 2, 3**, **4** e **5**) ..... 6 pontos

Determinar a abcissa do ponto pedido ..... 4 pontos

Notas:

1. Se o examinando apenas identificar 8 como o declive da recta tangente ao gráfico de f no ponto B, a pontuação a atribuir, nesta etapa, é 3 pontos.

2. Se o examinando não apresentar o referencial, a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser desvalorizada em 1 ponto.

3. Se o examinando apresentar um gráfico que não respeite o domínio de f, a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser desvalorizada em 1 ponto.

4. Se o examinando determinar f' analiticamente, a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser distribuída do seguinte modo:

Determinar $\left(e^{2x}+\cos x-2x^2\right)'$ ..... (1 + 1 + 1) ..... 3 pontos

Apresentar o(s) gráfico(s) (**ver nota 6**) ..... 3 pontos

5. Se o examinando resolver graficamente a equação $f(x)=8$ em vez de $f'(x)=8$, a pontuação máxima a atribuir, nesta etapa, é 3 pontos.

6. Se o examinando obtiver uma expressão incorrecta da derivada de f, considera-se que o gráfico está correcto se estiver de acordo com a expressão obtida.

5.1. ..... **15 pontos**

Estudar a existência de assimptotas verticais do gráfico de f (**ver nota 1**).

Calcular $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ ..... 10 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{e^{2-x}-1}{x-2}$ ..... 1 ponto

Levantar a indeterminação ..... 6 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{e^{2-x}-1}{-(2-x)}\right)$ (ou equivalente) 2

Escrever $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{e^{2-x}-1}{-(2-x)}\right)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^{y}-1}{-y}$ (**ver nota 2**) 3

Referir o limite notável $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^{y}-1}{y}=1$ (ou equivalente) .. 1

Obter o valor de $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ ..... 3 pontos

Calcular $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ (**ver nota 3**) ..... 2 pontos

Concluir que o gráfico de f não tem assimptota vertical em $x = 2$ ..... 1 ponto

Concluir que o gráfico de f não admite outras assimptotas verticais por f ser contínua em $\left[0, +\infty\right[\setminus \{2\}$ ..... 2 pontos

Notas:

1. Se o examinando calcular, para além dos limites indicados, $\lim_{x \to 0^-} f(x)$, a classificação a atribuir a esta resposta deve ser desvalorizada em 2 pontos. Se da aplicação desta nota resultar uma classificação negativa deve ser classificada com zero pontos.

2. Se o examinando referir que $x \to 2^-$ é equivalente a $x - 2 \to 0^-$ ou $2 - x \to 0^+$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

3. Se o examinando não calcular $\lim_{x \to 2^+} f(x)$, mas referir que f é contínua à direita em $x = 2$, a pontuação a atribuir, nesta etapa, não deve ser desvalorizada.

5.2. ..... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Referir que a função f é contínua em $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ..... (**ver notas 1** e **2**) ..... 2 pontos

Concluir que $f(0) < -3 < f\left(\frac{1}{2}\right)$ ..... 6 pontos

- Calcular $f(0)$ ..... 2 pontos
- Calcular $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ..... 2 pontos
- Escrever $f(0) < -3 < f\left(\frac{1}{2}\right)$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Concluir o pretendido (**ver nota 3**) ..... 2 pontos

2.º Processo

Se o examinando considerar $g(x) = f(x) + 3$

Referir que a função g é contínua em $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ..... (**ver notas 1** e **2**) ..... 2 pontos

Concluir que $g(0) \times g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ (ou equivalente) ..... 6 pontos

- Calcular $g(0)$ ..... 2 pontos
- Calcular $g\left(\frac{1}{2}\right)$ ..... 2 pontos
- Escrever $g(0) \times g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ ..... 2 pontos

Concluir o pretendido (**ver nota 3**) ..... 2 pontos

Notas:

1. Se o examinando não referir que a função é contínua em $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, a pontuação a atribuir, nesta etapa, é zero pontos.

2. Se o examinando referir que a função é contínua em $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, a pontuação a atribuir, nesta etapa, é zero pontos.

3. Se o examinando não referir que a conclusão resulta do teorema de Bolzano, a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser desvalorizada em 1 ponto.

5.3. ..... **15 pontos**

Determinar $f'(x)$ se $x > 2$ ..... 6 pontos

Escrever $f'(x) = \dfrac{(x+1)'\ \ln(x+1) - (x+1)\left[\ln(x+1)\right]'}{\left[\ln(x+1)\right]^2}$

(ou equivalente) ..... 2 pontos

Determinar $\left[\ln(x+1)\right]'$ ..... 2 pontos

Obter $f'(x)$ se $x > 2$ ..... 2 pontos

Estudar f quanto à monotonia (**ver nota**) ..... 9 pontos

Concluir que $e - 1$ não pertence a $]2, +\infty[$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

Referir que o intervalo considerado é um intervalo aberto ..... 2 pontos

Concluir que f' não se anula em $]2, +\infty[$ ..... 2 pontos

Concluir que f é crescente em $]2, +\infty[$ ..... 2 pontos

Nota – Se o examinando recorrer a um quadro, a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser distribuída do seguinte modo:

Concluir que $e - 1$ não pertence a $]2, +\infty[$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

Preencher a primeira linha do quadro (relativa à variável x, de acordo com o domínio da função) ..... 1 ponto

Indicar o sinal de f' ..... 2 pontos

Relacionar o sinal de f' com a monotonia de f ..... 1 ponto

Concluir que f é crescente em $]2, +\infty[$ ..... 2 pontos

6. ..... **15 pontos**

Determinar f' ..... 7 pontos

Determinar $\left(a\cos(n\,x)\right)'$ ..... 3 pontos

Determinar $\left(b\,\mathrm{sen}(n\,x)\right)'$ ..... 3 pontos

Escrever f' ..... 1 ponto

Escrever f'' ..... 3 pontos

Calcular $n^2\,f(x)$ (**ver nota**) ..... 3 pontos

Concluir o pretendido ..... 2 pontos

Nota – Se o examinando escrever $f''(x) = -n^2\left(a\cos(nx) + b\,\mathrm{sen}(nx)\right)$, a pontuação a atribuir, nesta etapa, não deve ser desvalorizada.

Exame nacional de Matemática A (2011, 2.ª fase)

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como no lote existem em total de 30 caixas, ao selecionar 4, podemos obter um conjunto de ${}^{30}C_4$ amostras diferentes, ou seja, ${}^{30}C_4$ casos possíveis.
   O número de casos favoráveis corresponde a todos os lotes de 4 caixas do medicamento Y, ou seja conjuntos de 4 caixas escolhidas de entre as 20 caixas de medicamento Y, ou seja, ${}^{20}C_4$ hipóteses.
   Assim, a probabilidade de selecionar um lote 4 as caixas e serem todas do medicamento Y é $\frac{{}^{20}C_4}{{}^{30}C_4}$

   Resposta: **Opção B**

2. Como $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 2a + a = 3a$ e $P(X = 5) = \frac{1}{10}$, temos que:

$$P(X \leq 1) = 3P(X = 5) \Leftrightarrow 3a = 3 \times \frac{1}{10} \Leftrightarrow a = \frac{1}{10}$$

   Também sabemos que:

$$2a + a + b + b + b + \frac{1}{10} = 1 \Leftrightarrow 3a + 3b = 1 - \frac{1}{10} \Leftrightarrow 3a + 3b = \frac{10}{10} - \frac{1}{10} \Leftrightarrow 3a + 3b = \frac{9}{10}$$

   Substituindo o valor de a, temos:

$$3 \times \frac{1}{10} + 3b = \frac{9}{10} \Leftrightarrow 3b = \frac{9}{10} - \frac{3}{10} \Leftrightarrow 3b = \frac{6}{10} \Leftrightarrow b = \frac{\frac{6}{10}}{3} \Leftrightarrow b = \frac{6}{30} \Leftrightarrow b = \frac{1}{5}$$

   Resposta: **Opção D**

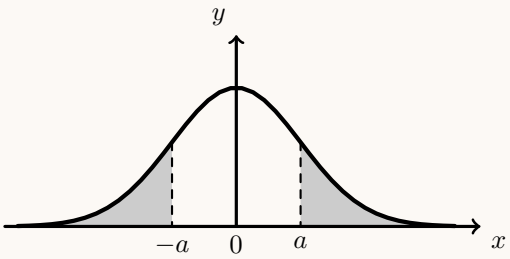
3. Como $a \in \mathbb{R}^+$, e a variável X segue uma distribuição normal, com $\mu = 0$, sabemos que a distribuição é simétrica relativamente à reta $x = 0$.
Assim, como $P(X \geq 0) = P(X \leq 0) = 0{,}5$, temos que:

   - Como $a > 0$, então $P(X \geq a) < 0{,}5$, logo $P(X \leq -a) < 0{,}5$
   - $P(X \leq a) = 1 - P(X \geq a)$, pelo que, $P(X \leq a) > 0{,}5$ e também $P(X \geq -a) > 0{,}5$

   Desta forma podemos afirmar que:

   - $P(X \leq a) + P(X \geq -a) > 0$
   - $P(X \leq a) + P(X \geq -a) < 1$
   - $P(X \leq a) > P(X \geq a)$

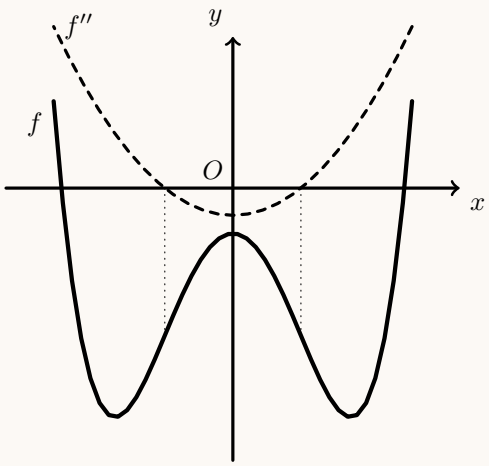
   Como a distribuição é simétrica e a e $-a$ são valores equidistantes do valor médio, temos que $P(X \leq a) = P(X \geq -a)$



   Resposta: **Opção B**

4. Os gráficos das funções apresentadas nas opções (A) e (B) são parábolas cujo vértice está sobre o eixo das abcissas, ou seja, ambas têm um zero, mas que não está associado a uma mudança de sinal, pelo que, cada uma destas funções é a segunda derivada de uma função sem pontos de inflexão, e pela observação do gráfico, podemos constatar que a função f tem dois pontos de inflexão, pelo que nenhuma destas opções é correta.

   O gráfico da função da opção (C), é uma parábola com dois zeros simétricos, e por isso coerente com os pontos de inflexão observados no gráfico de f, mas esta função é negativa quando o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima, e é positiva quando o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo, pelo que, esta também não é a opção correta.



   Resposta: **Opção D**

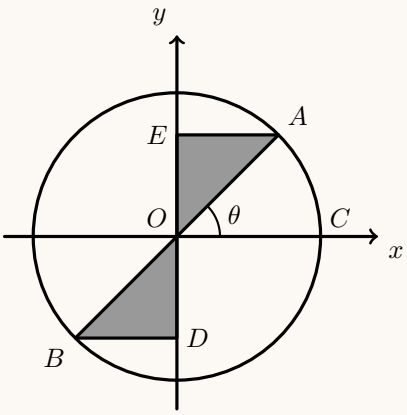
5. Como a função g é contínua, é contínua em $x = 0$, ou seja, verifica a condição: $g(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$
   Assim, temos que:

   - $g(0) = \ln(k - 0) = \ln k$
   - $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (\ln(k - x)) = \ln k$
   - $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{3x} = \dfrac{1}{3} \underbrace{\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = \dfrac{1}{3} \times 1 = \dfrac{1}{3}$

   Logo, temos que: $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) \Leftrightarrow \ln k = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow k = e^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow k = \sqrt[3]{3}$

   Resposta: **Opção A**

6. Como $\overline{OA} = 1$, usando as definições de seno e cosseno temos:



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\overline{OE}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{\overline{OE}}{1} \Leftrightarrow \overline{OE} = \operatorname{sen}\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\overline{EA}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{\overline{EA}}{1} \Leftrightarrow \overline{EA} = \cos\theta$$

E assim, o perímetro da região sombreada é:

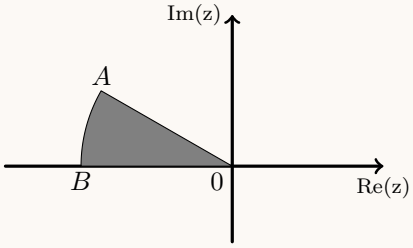
$$P_{[ABDE]} = \overline{AO} + \overline{OB} + \overline{BD} + \overline{DO} + \overline{OE} + \overline{EA}$$

Como $\overline{AO} = \overline{OB}$; $\overline{BD} = \overline{EA}$ e $\overline{DO} = \overline{OE}$, temos:

$$P_{[ABDE]} = 2\overline{AO} + 2\overline{EA} + 2\overline{OE} = 2 \times 1 + 2\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta = 2(1 + \cos\theta + \operatorname{sen}\theta)$$

Resposta: **Opção C**

7. A região apresentada na figura é definida pelo interior da circunferência de centro na origem e raio $\overline{OA}$ e pelo conjuntos de pontos que representam números complexos com argumentos compreendidos entre $\arg(-\sqrt{3}+i)$ e π. Assim temos que $\overline{OA} = |-\sqrt{3}+i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^{+}1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$



E, sendo $\theta = \arg(-\sqrt{3}+i)$, vem que:

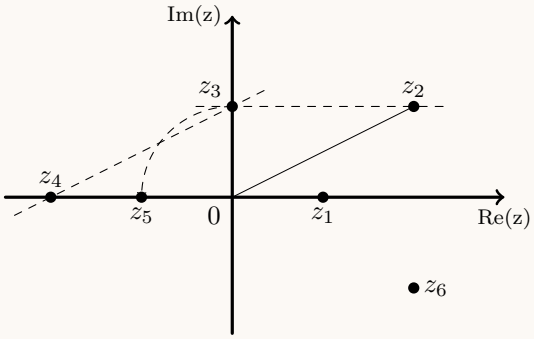
$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{1}{-\sqrt{3}} = -\dfrac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta < 0$, θ é um ângulo do 2º quadrante,

logo $\theta = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{6\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$

Desta forma $|z| < |-\sqrt{3}+i| \wedge \arg(-\sqrt{3}+i) \leq \arg(z) \leq \pi \Leftrightarrow |z| \leq 2 \wedge \dfrac{5\pi}{6} \leq \arg(z) \leq \pi$

Resposta: **Opção B**

8. Pela observação da figura podemos adicionar geometricamente os afixos de z_2 e de z_4 e temos que $z_2 + z_4 = z_3$



A operação "*multiplicar por i*" corresponde geometricamente a "fazer uma rotação de centro em O e amplitude $\frac{\pi}{2}$", pelo que $z_3 \times i = z_5$.

Logo $(z_2 + z_4) \times i = z_3 \times i = z_5$.

Resposta: **Opção C**

GRUPO II

1.

1.1. Como $i^{4n+3} = i^3 = -i$, vem que:
$z_1 \times i^{4n+3} - b = (1+2i)(-i) - b = -i - 2i^2 - b = -i - 2(-1) - b = 2 - b - i$

E como:
$\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{4} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -1 - i$

Logo temos que:

$$w = \frac{z_1 \times i^{4n+3} - b}{\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)} = \frac{2-b-i}{-1-i} = \frac{(2-b-i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)} = \frac{-2+b+i+2i-bi-i^2}{(-1)^2-i^2} =$$
$$= \frac{-2+b+3i-bi-(-1)}{1-(-1)} = \frac{-2+1+b+i(3-b)}{1+1} = \frac{-1+b+i(3-b)}{2} = \frac{-1+b}{2} + \frac{3-b}{2}i$$

Assim para que w seja um número real, $\text{Im}\,(w) = 0$, ou seja:

$$\text{Im}\,(w) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{3-b}{2} = 0 \;\Leftrightarrow\; 3-b = 0 \;\Leftrightarrow\; 3 = b$$

1.2. Seja $z = a + bi$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$.
Temos que:

- $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, pelo que se $|z| = 1$ então:

  $\sqrt{a^2+b^2} = 1 \;\Leftrightarrow\; \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = 1^2 \;\Leftrightarrow\; a^2+b^2 = 1$
- $|1+z|^2 = |1+a+bi|^2 = \left(\sqrt{(1+a)^2+b^2}\right)^2 = \left(\sqrt{1+2a+a^2+b^2}\right)^2 = 1+2a+a^2+b^2$
- $|1-z|^2 = |1-a-bi|^2 = \left(\sqrt{(1-a)^2+(-b)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{1-2a+a^2+b^2}\right)^2 = 1-2a+a^2+b^2$

Assim temos que:
$|1+z|^2 + |1-z|^2 = 1+2a+a^2+b^2+1-2a+a^2+b^2 = 2+2a^2+2b^2 = 2+2\left(a^2+b^2\right) = 2+2(1) = 4$

2.

2.1. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher ao acaso um funcionário da empresa, e os acontecimentos:
L:«O funcionário é licenciado»
Q:«O funcionário tem idade não inferior a 40 anos»
Temos que $P(L) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$, $P\left(\overline{Q}|L\right) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$ e $P\left(\overline{Q}|\overline{L}\right) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(L \cap \overline{Q}\right) = P\left(L\right) \times P\left(\overline{Q}|L\right) = \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{25}$
- $P\left(\overline{L}\right) = 1 - P(L) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$
- $P\left(\overline{L} \cap \overline{Q}\right) = P\left(\overline{L}\right) \times P\left(\overline{Q}|\overline{L}\right) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{2}{50} = \frac{1}{25}$
- $P\left(\overline{Q}\right) = P\left(L \cap \overline{Q}\right) + P\left(\overline{L} \cap \overline{Q}\right) = \frac{12}{25} + \frac{1}{25} = \frac{13}{25}$
- $P(L \cap Q) = P(L) - P\left(L \cap \overline{Q}\right) = \frac{3}{5} - \frac{12}{25} = \frac{3}{25}$
- $P(Q) = 1 - P\left(\overline{L}\right) = 1 - \frac{13}{25} = \frac{12}{25}$

	L	$\overline{L}$	
Q	$\frac{3}{25}$		$\frac{12}{25}$
$\overline{Q}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{13}{25}$
	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

Assim, calculando a probabilidade de, ao escolher, ao acaso, um funcionário desta empresa e ele ser licenciado, sabendo que tem uma idade não inferior a 40 anos, e escrevendo o resultado na forma de fração irredutível, temos:

$$P(L|Q) = \frac{P(L \cap Q)}{P(Q)} = \frac{\frac{3}{25}}{\frac{12}{25}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

2.2. A resposta correta é a **Resposta II**.
Relativamente a esta resposta, o número de formas diferentes de escolher os 3 funcionários, de forma que pelo menos 2 dos funcionários escolhidos estejam a favor do novo horário de trabalho, é calculado como a soma dos números de casos de duas situações distintas:
- 2 dos 3 funcionários escolhidos são favoráveis à alteração, ou seja, escolher 1 funcionário de entre os 6 que não estão no grupo dos que são favoráveis, e por cada uma das 6 escolhas possíveis, escolher um conjunto de 2 de entre os 9 trabalhadores que são favoráveis ($6 \times {}^9C_2$);
- escolher 3 trabalhadores que sejam favoráveis à alteração, ou seja, escolher um grupo de 3, do conjunto de 9 trabalhadores que são favoráveis (${}^9C_3$).

Outra forma de fazer este cálculo, consiste em subtrair ao total dos conjuntos de 3 trabalhadores que podemos fazer com os 15 funcionários (${}^{15}C_3$), o número de grupos onde nenhum trabalhador é favorável à alteração, ou apenas 1 é favorável à alteração.
Observando a Resposta I, podemos identificar este raciocínio, embora tenham sido subtraídos apenas os conjuntos em que nenhum trabalhador é favorável (${}^6C_3$, que consiste em calcular o número de conjuntos de 3 que podemos fazer com os 6 trabalhadores que não estão no grupo dos que são favoráveis). Assim, para que o cálculo fique correto, deve ser ainda subtraído o número ${}^6C_2 \times 9$, ou seja, o número de conjuntos em que são escolhidos 2 de entre os 6 trabalhadores que não estão no grupo dos que são favoráveis e um terceiro trabalhador do grupo dos 9 apoiantes da alteração.
Desta forma, alterando a Resposta I para: ${}^{15}C_3 - {}^6C_3 - {}^6C_2 \times 9$, obtemos outra resposta correta.

3.

3.1. Começamos por calcular o número de nenúfares, às zero horas do dia 1 de Março de 2010, no lago A, ou seja, aos zero dias:

$$N_A(0) = \frac{120}{1 + 7 \times e^{-0{,}2 \times 0}} = \frac{120}{1 + 7 \times e^0} = \frac{120}{1 + 7 \times 1} = \frac{120}{8} = 15$$

Calculando o número aproximado de nenúfares, no lago A, 7 dias depois, temos:

$$N_A(7) = \frac{120}{1 + 7 \times e^{-0{,}2 \times 7}} = \frac{120}{1 + 7 \times e^{-1{,}4}} \approx 44{,}02$$

Assim temos que o aumento do número de nenúfares, no lago A, nos primeiros 7 dias, arredondado às unidades é

$$N_A(7) - N_A(0) \approx 44{,}02 - 15 \approx 29 \text{ nenúfares}$$

3.2. O número de dias necessários, após as zero horas do dia 1 de Março de 2010, para que o número de nenúfares existentes no lago A seja igual ao número de nenúfares existentes no lago B é a solução da equação $N_A(t) = N_B(t)$:

$$N_A(t) = N_B(t) \Leftrightarrow \frac{120}{1+7\times e^{-0,2t}} = \frac{150}{1+50\times e^{-0,4t}} \Leftrightarrow 120\left(1+50\times e^{-0,4t}\right) = 150\left(1+7\times e^{-0,2t}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 120+6000\times e^{-0,4t} = 150+1050\times e^{-0,2t} \ \Leftrightarrow\ 6000\times e^{-0,4t} - 1050\times e^{-0,2t} + 120 - 150 = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 6000\times \left(e^{-0,2t}\right)^2 - 1050\times e^{-0,2t} - 30 = 0 \ \Leftrightarrow$$

Fazendo a substituição de variável $y = e^{-0,2t}$, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$\Leftrightarrow\ 6000y^2 - 1050y - 30 = 0 \ \Leftrightarrow\ y = \frac{1050 \pm \sqrt{(-1050)^2 - 4(6000)(-30)}}{2(6000)} \ \Leftrightarrow\ y = \frac{1050 \pm 1350}{12\,000} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ y = -\frac{1}{40} \ \vee\ y = \frac{1}{5}$$

Como $y = e^{-0,2t}$, temos que:

$$e^{-0,2t} = -\frac{1}{40} \ \vee\ e^{-0,2t} = \frac{1}{5}$$

E como a equação $e^{-0,2t} = -\frac{1}{40}$ é impossível, podemos determinar única solução da equação:

$$e^{-0,2t} = \frac{1}{5} \ \Leftrightarrow\ -0,2t = \ln\left(\frac{1}{5}\right) \ \Leftrightarrow\ t = \frac{\ln 1 - \ln 5}{-0,2} \ \Leftrightarrow\ t = \frac{0 - \ln 5}{-0,2} \ \Leftrightarrow\ t = \frac{\ln 5}{0,2}$$

Assim, arredondando o resultado às unidades, temos $t \approx 8$ dias

4. Sabemos que o declive da reta tangente ao gráfico de f, no ponto B, é 8, porque a tangente a uma reta de declive 8.

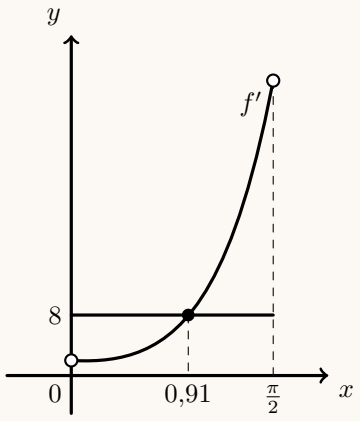
Por outro lado o declive (m) da reta tangente em qualquer ponto é $m = f'(x)$, pelo que é necessário determinar a derivada de f:

$$f'(x) = (e^{2x} + \cos x - 2x^2)' = (e^{2x})' + (\cos x)' - (2x^2)' = 2e^{2x} - \operatorname{sen} x - 4x$$

Assim, como $m = f'(x)$ e $m = 8$, temos que a abcissa do ponto B é a solução da equação:

$$f'(x) = 8 \ \Leftrightarrow\ 2e^{2x} - \operatorname{sen} x - 4x = 8$$

Logo, podemos traçar na calculadora o gráfico da função f' e a reta de equação $y = 8$ numa janela compatível com o domínio de f (que coincide com o domínio de f'), que se reproduz na figura ao lado.



Recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados de um ponto de interseção de dois gráficos, determinamos o valor da abcissa (com aproximação às centésimas) do ponto do gráfico de f' que tem ordenada 8, ou seja a abcissa do ponto B:

$$x \approx 0,91$$

5.

5.1. Como a função f resulta de operações entre funções contínuas, em $[0,2[$ e em $[2,+\infty[$ é contínua em $[0,2[$ e em $[2,+\infty[$, e como o seu domínio é $[0+\infty[$, então a única reta que pode ser assíntota vertical do gráfico de f é a reta de equação $x=2$

Para averiguar se a reta de equação $x=2$ é assíntota do gráfico de f, vamos calcular $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{e^{2-x}-1}{x-2} = \frac{e^{2-2^-}-1}{2^- -2} = \frac{e^0-1}{0} = \frac{0}{0} \quad \text{(Indeterminação)}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{e^{2-x}-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{e^{2-x}-1}{-(-x+2)} = \lim_{x\to 2^-} \left(-\frac{e^{2-x}-1}{2-x}\right) = -\lim_{x\to 2^-} \frac{e^{2-x}-1}{2-x}$$

(fazendo $y=2-x$, temos que se $x\to 2^-$, então $y\to 0^+$)

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\underbrace{\lim_{y\to 0^+} \frac{e^y-1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = -1$$

Assim, como $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ é uma valor finito, concluímos que a reta de equação $x=2$ não é assíntota vertical do gráfico de f (e que não existe qualquer outra assíntota vertical).

5.2.

Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $[0,2[$, é contínua em $[0,2[$, e também, em $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, porque $\left[0,\frac{1}{2}\right] \subset [0,2[$

Como $-3{,}19 < -3 < -2{,}32$, ou seja, $f(0) < -3 < f\left(\frac{1}{2}\right)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$ tal que $f(c) = -3$, ou seja, que a equação $f(x) = -3$ tem, pelo menos, uma solução em $\left]0,\frac{1}{2}\right[$

C.A.

$$f(0) = \frac{e^{2-0}-1}{0-2} = \frac{e^2-1}{-2} \approx -3{,}19$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{2-\frac{1}{2}}-1}{\frac{1}{2}-2} = \frac{e^{\frac{3}{2}}-1}{-\frac{3}{2}} \approx -2{,}32$$

5.3. Começamos por determinar a expressão da derivada, em $]2,+\infty[$:

$$\left(\frac{x+1}{\ln(x+1)}\right)' = \frac{(x+1)'\ln(x+1)-(x+1)\big(\ln(x+1)\big)'}{\big(\ln(x+1)\big)^2} = \frac{(1+0)\ln(x+1)-(x+1)\times\dfrac{(x+1)'}{(x+1)}}{\big(\ln(x+1)\big)^2)} =$$

$$= \frac{\ln(x+1)-(x+1)'}{\big(\ln(x+1)\big)^2} = \frac{\ln(x+1)-1}{\big(\ln(x+1)\big)^2}$$

Determinando os zeros da derivada, em $]2,+\infty[$, temos:

$$\frac{\ln(x+1)-1}{\big(\ln(x+1)\big)^2}=0 \Leftrightarrow \ln(x+1)-1=0 \wedge \underbrace{\big(\ln(x+1)\big)^2\neq 0}_{PV, x>2\Rightarrow \ln(x+1)>\ln 3} \Leftrightarrow \ln(x+1)=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)=e^1 \Leftrightarrow x=e-1$$

Logo, como $e-1<2$, a função derivada não tem zeros em $]2,+\infty[$.
Como, para $x>2$,

- $\ln(x+1)-1>\ln(3)-1$, temos que $\ln(x+1)-1>0\,,\forall x\in]2,+\infty[$
- $\ln(x+1)\neq 0$, temos que $\big(\ln(x+1)\big)^2>0\,,\forall x\in]2,+\infty[$

temos que f' é sempre positiva no intervalo $]2,+\infty[$, o que significa que a função f é sempre crescente neste intervalo.

6. Começamos por determinar $f'(x)$:
$f'(x)=(a\cos(nx)+b\,\mathrm{sen}\,(nx))'=(a\cos(nx))'+(b\,\mathrm{sen}\,(nx))'=a(nx)'(-\,\mathrm{sen}\,(nx))+(b(nx)'\cos(nx)=$
$=-an\,\mathrm{sen}\,(nx)+bn\cos(nx)$

Determinamos em seguida $f''(x)$:
$f''(x)=(f'(x))'=(-an\,\mathrm{sen}\,(nx)+bn\cos(nx))'=(-an\,\mathrm{sen}\,(nx))'+(bn\cos(nx))'=$
$=-an(nx)'\cos(nx)+bn(nx)'(-\,\mathrm{sen}\,(nx))=-an^2\cos(nx)-bn^2\,\mathrm{sen}\,(nx)=$
$=-n^2\,(a\cos(nx)+b\,\mathrm{sen}\,(nx))=$
$=-n^2\,(f(x))$

Assim temos que: $f''(x)+n^2f(x)=-n^2f(x)+n^2f(x)=0\,,$ *q.e.d.*

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/Época Especial

12 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2011

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 3, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$

(α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\ r\ g$

(r – *raio da base; g – geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\ \pi\ r^2$

(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3\ (r - raio)$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}a \cdot \cos b + \operatorname{sen}b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen}a \cdot \operatorname{sen}b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b}{1 - \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis}\theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis}\theta} = \sqrt[n]{\rho}\ \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right),\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Num determinado clube desportivo praticam-se apenas dois desportos, futebol e andebol. Dos jovens inscritos nesse clube, 28 jogam apenas futebol, 12 jogam apenas andebol e 12 jogam futebol e andebol. Escolhe-se, ao acaso, um dos jovens inscritos.

Qual é a probabilidade de o jovem escolhido jogar andebol sabendo que joga futebol?

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{3}{10}$ **(C)** $\frac{7}{10}$ **(D)** $\frac{3}{7}$

2. Lança-se cinco vezes consecutivas um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, e regista-se, em cada lançamento, o número inscrito na face voltada para cima.

Considere os acontecimentos seguintes.

I: «sair face ímpar em exactamente dois dos cinco lançamentos»;

J: «sair face 4 em exactamente dois dos cinco lançamentos».

Qual dos acontecimentos seguintes é mais provável?

(A) acontecimento I

(B) acontecimento $\overline{I}$

(C) acontecimento J

(D) acontecimento $\overline{J}$

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega \text{ e } B \subset \Omega)$ incompatíveis.

Sabe-se que $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}3$ e que $P(A) = 0{,}5$

Qual é o valor de $P(B)$?

(A) $0{,}2$ **(B)** 0 **(C)** $0{,}5$ **(D)** $0{,}4$

4. Considere uma função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{3\}$, contínua em todo o seu domínio.

Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$
- $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=-2$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+2x\right)=0$

Em qual das opções seguintes as equações definem duas assimptotas do gráfico de f?

(A) $x=-2$ e $y=1$

(B) $x=3$ e $y=-2x$

(C) $y=-2x$ e $y=1$

(D) $y=2x$ e $y=-1$

5. Para um certo número real a, seja a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=ax^2-1$

Na Figura 1, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função f'', segunda derivada da função f

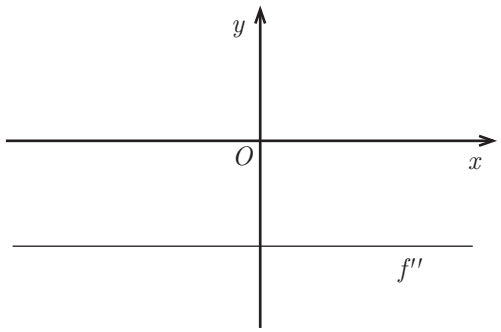


Figura 1

Qual dos valores seguintes pode ser o valor de a?

(A) 0

(B) π

(C) 3

(D) -3

6. Na Figura 2, estão representados, num referencial o. n. xOy, uma circunferência e o triângulo $[OAB]$

Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- a circunferência tem centro no ponto O e raio 1
- A é o ponto de coordenadas $(-1, 0)$
- B pertence à circunferência e tem ordenada negativa;
- o ângulo AOB tem amplitude igual a $\frac{2\pi}{3}$ radianos.

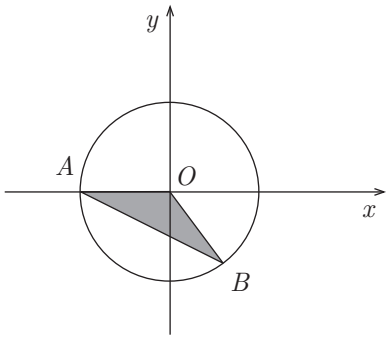


Figura 2

Qual é a área do triângulo $[OAB]$?

(A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\sqrt{3}$

7. Sejam k e p dois números reais e sejam $z_1 = (3k+2) + p\,i$ e $z_2 = (3p-4) + (2-5k)i$ dois números complexos.

Quais são os valores de k e de p para os quais z_1 é igual ao conjugado de z_2?

(A) $k = -1$ e $p = 3$

(B) $k = 1$ e $p = 3$

(C) $k = 0$ e $p = -2$

(D) $k = 1$ e $p = -3$

8. Considere, em $\mathbb{C}$, um número complexo w

No plano complexo, a imagem geométrica de w é o vértice A do octógono $[ABCDEFGH]$, representado na Figura 3.

Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice 8 de um certo número complexo.

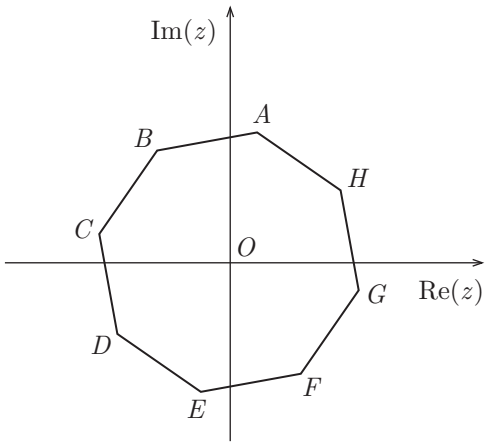


Figura 3

Qual dos números complexos seguintes tem como imagem geométrica o vértice C do octógono $[ABCDEFGH]$?

(A) $-w$

(B) $w + 1$

(C) $i \times w$

(D) $i^3 \times w$

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

1.1. Considere $z_1 = 2 + \sqrt{3}\,i + i^{4n+2014}, \quad n \in \mathbb{N}$

Sabe-se que z_1 é uma das raízes cúbicas de um certo complexo z

Determine z

Apresente o resultado na forma algébrica.

1.2. Considere $z_2 = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

No plano complexo, a região definida pela condição $|z - z_2| \leq 1 \wedge \frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq 2\pi \wedge |z| \geq |z - z_2|$ está representada geometricamente numa das opções I, II, III e IV, apresentadas na página seguinte.

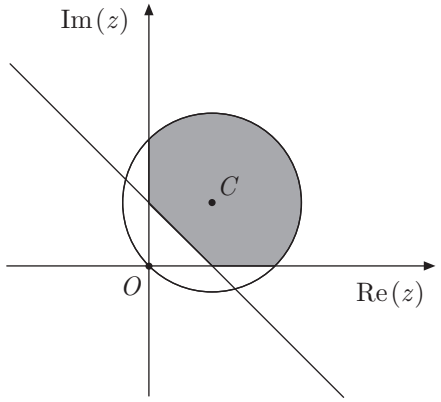
(Considere como $\arg(z)$ a determinação que pertence ao intervalo $]0, 2\pi]$)

Sabe-se que, em cada uma das opções:

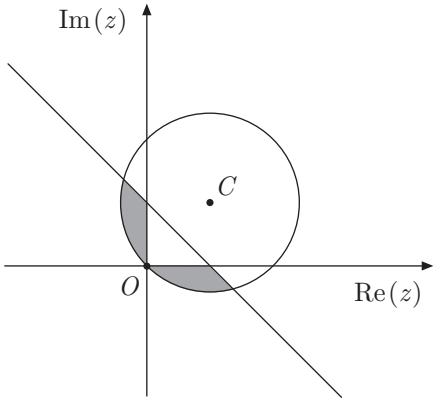
- O é a origem do referencial;
- C é a imagem geométrica de z_2
- $\overline{OC}$ é o raio da circunferência.

Apenas uma das opções está correcta.

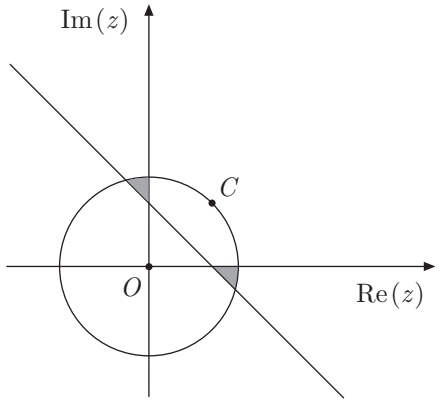
I



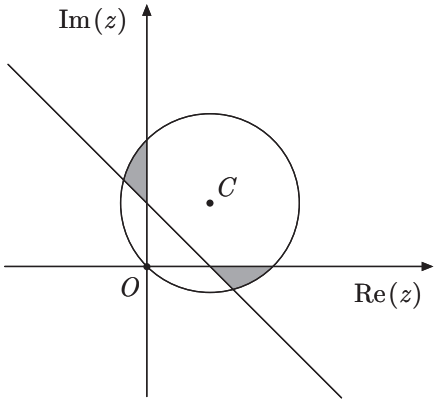
II



III



IV



Elabore uma composição na qual:

- indique a opção correcta;
- apresente as razões que o levam a rejeitar as restantes opções.

Apresente três razões, uma por cada opção rejeitada.

2. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos tais que $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$, com $P(B) \neq 0$

Mostre que $P\left(\overline{A \cap B} \mid B\right) = P\left(\overline{A} \mid B\right)$

3. Considere as 13 cartas do naipe de copas: ás, três figuras (rei, dama e valete) e mais nove cartas (do 2 ao 10).

3.1. As cartas vão ser dispostas, ao acaso, sobre uma mesa, lado a lado, de modo a formarem uma sequência de 13 cartas.

Determine o número de sequências diferentes que é possível construir, de modo que as três figuras fiquem juntas.

3.2. Determine a probabilidade de, ao retirar, ao acaso, 4 das 13 cartas do naipe de copas, obter pelo menos duas figuras.

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4. Para um certo valor real de k, admita que a quantidade de combustível, em litros, existente no depósito de uma certa máquina agrícola, t minutos após ter começado a funcionar, é dada aproximadamente por

$$Q(t) = 12 + \log_3(81 - k\,t^2), \quad \text{com} \quad t \in [0, 20]$$

Considere que essa máquina agrícola funcionou durante 20 minutos e que, nesse período de tempo, consumiu 2 litros de combustível.

Determine o valor de k recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

5. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{1-e^{x+1}} + 1 & \text{se } x \neq -1 \\ a+2 & \text{se } x = -1 \end{cases} \quad (a \text{ é um número real.})$$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

5.1. Determine a sabendo que f é contínua em $x = -1$

5.2. Seja f' a primeira derivada de f

Mostre, sem resolver a equação, que $f'(x) = \dfrac{1}{4}$ tem, pelo menos, uma solução em $]0, 1[$

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

6. De duas funções f e g sabe-se que:

- f tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $f(x) = \pi - 4\text{sen}(5x)$
- g tem domínio $\left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$ e g', primeira derivada de g, tem domínio $\left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$ e é definida por $g'(x) = \log_2\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)$

Resolva os itens **6.1.** e **6.2.** recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

6.1. Calcule o valor de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{f(x) - \pi}$

6.2. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão no intervalo $\left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$

Resolva o item **6.3.** recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

6.3. Seja h a função, de domínio $\left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$, definida por $h(x) = f(x) - g(x)$

O ponto A pertence ao gráfico da função h

Sabe-se que a recta tangente ao gráfico da função h no ponto A é paralela ao eixo Ox

Determine a abcissa do ponto A.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abcissa do ponto com arredondamento às décimas.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

.....(8 × 5 pontos)..... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1.

1.1. ..... 15 pontos

1.2. ..... 15 pontos

2. ..... 15 pontos

3.

3.1. ..... 10 pontos

3.2. ..... 15 pontos

4. ..... 15 pontos

5.

5.1. ..... 15 pontos

5.2. ..... 15 pontos

6.

6.1. ..... 15 pontos

6.2. ..... 15 pontos

6.3. ..... 15 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/Época Especial

11 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2011

COTAÇÕES

GRUPO I

(8 × 5 pontos)	40 pontos
	40 pontos

GRUPO II

1.		
	1.1.	15 pontos
	1.2.	15 pontos
2.		15 pontos
3.		
	3.1.	10 pontos
	3.2.	15 pontos
4.		15 pontos
5.		
	5.1.	15 pontos
	5.2.	15 pontos
6.		
	6.1.	15 pontos
	6.2.	15 pontos
	6.3.	15 pontos
		160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

A classificação da prova deve respeitar integralmente os critérios gerais e os critérios específicos a seguir apresentados.

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos de classificação apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro, previsto na grelha de classificação.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos. No entanto, em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se o examinando responder a um mesmo item mais do que uma vez, não eliminando inequivocamente a(s) resposta(s) que não deseja que seja(m) classificada(s), deve ser considerada apenas a resposta que surgir em primeiro lugar.

Nos itens de selecção (escolha múltipla), a cotação total do item é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a única opção correcta.

São classificadas com zero pontos as respostas em que seja assinalada:

– uma opção incorrecta;

– mais do que uma opção.

Não há lugar a classificações intermédias.

Os critérios de classificação dos itens de construção apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação. No caso de, ponderados todos os dados contidos nos descritores, permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

Nos itens de construção com cotação igual ou superior a quinze pontos e que impliquem a produção de um texto, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea das competências específicas da disciplina e das competências de comunicação escrita em língua portuguesa. A avaliação das competências de comunicação escrita em língua portuguesa contribui para valorizar a classificação atribuída ao desempenho no domínio das competências específicas da disciplina. Esta valorização é cerca de 10% da cotação do item e faz-se de acordo com os níveis de desempenho descritos no quadro seguinte.

Níveis	Descritores
3	Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
2	Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
1	Composição sem estruturação aparente, com erros graves de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é zero pontos. Neste caso, não é classificado o desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

Havendo escolas em que os examinandos já contactam com as novas regras ortográficas, uma vez que o Acordo Ortográfico de 1990 já foi ratificado e dado que qualquer cidadão, nesta fase de transição, pode optar pela ortografia prevista quer no Acordo de 1945, quer no de 1990, são consideradas correctas, na classificação das provas, as grafias que seguirem o que se encontra previsto em qualquer um destes normativos.

Nos itens de construção, as respostas que apresentem pontos de vista diferentes dos mencionados nos critérios específicos de classificação devem ser classificadas segundo procedimentos análogos aos previstos nos descritores apresentados, desde que o conteúdo dessas respostas seja considerado cientificamente válido e adequado ao solicitado.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar em situações não descritas anteriormente.

Situação	Classificação
1. Classificação da resposta a um item cujo critério se apresenta organizado por etapas.	A pontuação indicada para cada etapa é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A classificação da resposta resulta da soma das pontuações das diferentes etapas, à qual se subtrai ou subtraem, eventualmente, um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 14 e/ou 19.
2. Pontuação de uma etapa dividida em passos.	A pontuação indicada para cada passo é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A pontuação da etapa resulta da soma das pontuações dos diferentes passos.
3. Classificação da resposta a um item ou pontuação de uma etapa cujo critério se apresenta organizado por níveis de desempenho.	A resposta é enquadrada numa das descrições apresentadas. À classificação/pontuação correspondente subtraem-se, eventualmente, um, dois ou três pontos, de acordo com o previsto nas situações 9, 10 e/ou 19.
4. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite e classificado qualquer processo de resolução cientificamente correcto. O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante distribuição da cotação do item pelas etapas* percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.
5. Apresentação apenas do resultado final, embora a resolução do item exija cálculos e/ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
6. Utilização de processos de resolução que não respeitam as instruções dadas [exemplo: «usando métodos analíticos»].	A etapa em que a instrução não é respeitada é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário, no critério específico de classificação.
7. Ausência de apresentação dos cálculos e/ou das justificações necessárias à resolução de uma etapa*.	A etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário, no critério específico de classificação.
8. Ausência de apresentação explícita de uma dada etapa.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, a mesma é pontuada com a cotação total para ela prevista.

Situação	Classificação
9. Transposição incorrecta de dados do enunciado.	Se o grau de dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
10. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre.
11. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.	A pontuação máxima a atribuir nessa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
12. Ocorrência de um erro na resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada de acordo com o erro cometido. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido: – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
13. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas o passo final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
14. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação de um arredondamento incorrecto.	É subtraído um ponto à classificação da resposta, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
15. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fracção, e a resposta apresenta-se na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final [exemplo: «15» em vez de «15 metros»].	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a cotação para ela prevista.
17. Apresentação do resultado final com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exacto.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
18. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação do resultado final incorrectamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
19. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à classificação da resposta, excepto: – se as incorrecções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

* Em situações em que o critério é aplicável tanto a **etapas** como a **passos**, utiliza-se apenas o termo «etapas» por razões de simplificação da apresentação.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. ..... (8 × 5 pontos)..... **40 pontos**

As respostas correctas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
	B	D	A	C	D	A	B	C

GRUPO II

É de aceitar qualquer processo de resolução cientificamente correcto, ainda que não esteja previsto nestes critérios específicos, nem no Programa (ver n.º 4 dos critérios gerais).

1.1. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $i^{4n+2014} = -1$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Escrever z_1 na forma algébrica ..... 1 ponto

Referir que, se z_1 é raiz cúbica de z, então $z = {z_1}^3$ (**ver nota**) ..... 3 pontos

Escrever z_1 na forma trigonométrica ..... 4 pontos

- Determinar módulo de z_1 ..... 2 pontos
- Indicar um argumento de z_1 ..... 2 pontos

Calcular z na forma trigonométrica ..... 4 pontos

- Determinar $|z_1|^3$ ..... 2 pontos
- Determinar $\arg\left({z_1}^3\right)$ ..... 2 pontos

Escrever z na forma algébrica ..... 1 ponto

2.º Processo

Escrever $i^{4n+2014} = -1$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Escrever z_1 na forma algébrica ..... 1 ponto

Referir que, se z_1 é raiz cúbica de z, então $z = {z_1}^3$ (**ver nota**) ..... 3 pontos

Escrever z na forma algébrica ..... 9 pontos

- Escrever ${z_1}^3 = {z_1}^2 \times z_1$ (**ver nota**)..... 2 pontos
- Obter ${z_1}^2 = -2 + 2\sqrt{3}\ i$ ..... 4 pontos
- Obter z na forma algébrica ..... 3 pontos

Nota – Se o examinando não explicitar esta etapa, mas evidenciar que a considerou na sua resposta, a pontuação a atribuir, nesta etapa, não deve ser desvalorizada.

1.2. ..... **15 pontos**

A composição deve apresentar os pontos seguintes:

A) indicar a opção correcta;
B) indicar uma razão que permita rejeitar a opção I;
C) indicar uma razão que permita rejeitar a opção II;
D) indicar uma razão que permita rejeitar a opção III.

Na tabela seguinte, indica-se como deve ser classificada a resposta a este item, de acordo com os níveis de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa e os níveis de desempenho no domínio específico da disciplina.

Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina \ Descritores do nível de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa			Níveis*		
			1	**2**	**3**
Níveis	**6**	Apresenta correctamente os quatro pontos, OU apenas os pontos B, C e D.	13	14	15
	5	Apresenta correctamente apenas os pontos A, B e C, OU apenas os pontos A, B e D, OU apenas os pontos A, C e D.	10	11	12
	4	Apresenta correctamente apenas os pontos B e C, OU apenas os pontos B e D, OU apenas os pontos C e D.	7	8	9
	3	Apresenta correctamente apenas os pontos A e B, OU apenas os pontos A e C, OU apenas os pontos A e D.	4	5	6
	2	Apresenta correctamente apenas o ponto B, OU apenas o ponto C, OU apenas o ponto D.	1	2	3
	1	Apresenta apenas o ponto A.	1	1	1

***** Descritores apresentados nos Critérios Gerais de Classificação.

2. ..... **15 pontos**

A resposta do examinando deve incluir os pontos seguintes:

- $P\left(\overline{A \cap B} \mid B\right) = \dfrac{P\left(\left(\overline{A \cap B}\right) \cap B\right)}{P(B)}$ OU $P\left(\overline{A} \mid B\right) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap B = (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap B)$
- $\overline{B} \cap B = \varnothing$
- $(\overline{A} \cap B) \cup \varnothing = \overline{A} \cap B$

Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina			Pontuação
Níveis	**6**	O examinando aplica correctamente os cinco pontos e conclui o pretendido.	15
	5	O examinando aplica correctamente os cinco pontos, mas não conclui o pretendido.	13
	4	O examinando aplica correctamente apenas quatro pontos.	10
	3	O examinando aplica correctamente apenas três pontos.	7
	2	O examinando aplica correctamente apenas dois pontos.	4
	1	O examinando aplica correctamente apenas um ponto.	1

3.1. ..... **10 pontos**

Escrever a expressão que dá o valor pedido (**ver nota 1**) ..... 8 pontos

Calcular o valor pedido (**ver nota 2**) ..... 2 pontos

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, e a pontuação a atribuir em cada caso.

$11! \times 3!$ (ou equivalente) ..... 8 pontos

$10! \times 3!$ (ou equivalente) ..... 6 pontos

$11 \times 3!$ (ou equivalente) ..... 4 pontos

$3!$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Outras situações ..... 0 pontos

2. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se o resultado estiver de acordo com a expressão escrita pelo examinando, e se essa expressão não tiver sido pontuada com zero pontos.

3.2. ..... **15 pontos**

Escrever a expressão que dá o valor pedido (**ver nota 1**) ..... 12 pontos

Calcular o valor pedido (**ver nota 2**) ..... 3 pontos

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, e a pontuação a atribuir em cada caso.

$\frac{{}^{3}C_{2} \times {}^{10}C_{2} + 10}{{}^{13}C_{4}}$ (ou equivalente) ..... 12 pontos

$\frac{{}^{3}C_{2} \times {}^{10}C_{2}}{{}^{13}C_{4}}$ (ou equivalente) ..... 9 pontos

$\frac{10}{{}^{13}C_{4}}$ (ou equivalente) ..... 6 pontos

Outras fracções próprias com denominador ${}^{13}C_{4}$ ..... 3 pontos

Outras situações ..... 0 pontos

2. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se o resultado estiver de acordo com a expressão escrita pelo examinando, e se essa expressão não tiver sido pontuada com zero pontos.

4. ..... **15 pontos**

Equacionar o problema ..... 3 pontos

Resolver a equação $Q(0)-Q(20)=2$ ..... 10 pontos

Obter $Q(0)$ ..... 2 pontos

Obter $Q(20)$ ..... 2 pontos

Escrever $\log_3(81)-\log_3\left(81-20^2\,k\right)=2$ (ou equivalente) ..... 1 ponto

Obter $\log_3(81-400k)=2$ ..... 2 pontos

Obter $81-400k=9$ ..... 3 pontos

Obter o valor de k ..... 2 pontos

5.1. ..... **15 pontos**

Referir que, se f é contínua em $x=-1$, então $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=f(-1)$ ..... 3 pontos

Calcular $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ ..... 8 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{x+1}{1-e^{x+1}}+1\right)$ ..... 1 ponto

Levantar a indeterminação ..... 6 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to-1}\left(-\dfrac{x+1}{e^{x+1}-1}\right)$ (ou equivalente) 2

Escrever $\lim\limits_{x\to-1}\left(-\dfrac{x+1}{e^{x+1}-1}\right)=\lim\limits_{y\to0}\left(-\dfrac{y}{e^{y}-1}\right)$ (**ver nota**) .. 3

Referir o limite notável $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{e^{y}-1}{y}=1$ (ou equivalente) .. 1

Obter o valor de $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ ..... 1 ponto

Calcular o valor de a ..... 4 pontos

Calcular $f(-1)$ ..... 2 pontos

Obter o valor de a ..... 2 pontos

Nota – Se o examinando referir que $x\to-1$ é equivalente a $x+1\to0$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

5.2. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Calcular $f'(x)$ em $[0,1]$ ..... 5 pontos

Escrever $f'(x)=\dfrac{(x+1)'(1-e^{x+1})-(x+1)(1-e^{x+1})'}{(1-e^{x+1})^2}+1'$
(ou equivalente) ..... 1 ponto

Determinar $(1-e^{x+1})'$ ..... 2 pontos

Obter $f'(x)$ em $[0,1]$ ..... 2 pontos

Referir que a função f' é contínua em $[0,1]$ (**ver notas 1** e **2**)..... 3 pontos

Concluir que $\frac{1}{4}$ está compreendido entre $f'(0)$ e $f'(1)$ ..... 5 pontos

Calcular $f'(0)$ ..... 1 ponto

Calcular $f'(1)$ ..... 1 ponto

Escrever que $\frac{1}{4}$ está compreendido entre $f'(0)$ e $f'(1)$ ..... 3 pontos

Concluir o pretendido (**ver nota 3**) ..... 2 pontos

2.º Processo

Se o examinando considerar a função g definida por $g(x)=f'(x)-\frac{1}{4}$

Calcular $f'(x)$ em $[0,1]$ ..... 5 pontos

Escrever $f'(x)=\dfrac{(x+1)'(1-e^{x+1})-(x+1)(1-e^{x+1})'}{(1-e^{x+1})^2}+1'$
(ou equivalente) ..... 1 ponto

Determinar $(1-e^{x+1})'$ ..... 2 pontos

Obter $f'(x)$ em $[0,1]$ ..... 2 pontos

Referir que a função g é contínua em $[0,1]$ (**ver notas 1** e **2**)..... 3 pontos

Justificar que $g(0)\times g(1)<0$ (ou equivalente) ..... 5 pontos

Calcular $g(0)$ ..... 1 ponto

Calcular $g(1)$ ..... 1 ponto

Concluir que $g(0)\times g(1)<0$ ..... 3 pontos

Concluir o pretendido (**ver nota 3**) ..... 2 pontos

Notas:

1. Se o examinando não referir que a função é contínua em $[0,\,1]$, a pontuação a atribuir, nesta etapa, é zero pontos.

2. Se o examinando referir que a função é contínua em $]0,\,1[$, a pontuação a atribuir, nesta etapa, é zero pontos.

3. Se o examinando não referir que a conclusão resulta do Teorema de Bolzano, a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser desvalorizada em 1 ponto.

6.1. ..... **15 pontos**

Escrever $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{\pi-4\operatorname{sen}(5x)-\pi}$ (ou equivalente) ..... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{-4\operatorname{sen}(5x)}$ ..... 1 ponto

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{-4\operatorname{sen}(5x)}$ ..... 13 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{-4\operatorname{sen}(5x)}=-\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(5x)}$ (ou equivalente).. 2 pontos

Levantar a indeterminação ..... 8 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(5x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\times\dfrac{x}{\operatorname{sen}(5x)}\right)$ 3

Referir o limite notável $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}=1$ 1

Escrever $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{sen}(5x)}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\frac{y}{5}}{\frac{\operatorname{sen} y}{y}\times y}$ (**ver nota**) 4

Concluir que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{-4\operatorname{sen}(5x)}=-\dfrac{1}{20}$ ..... 3 pontos

Nota – Se o examinando referir que $x\to 0$ é equivalente a $5x\to 0$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

6.2. ..... **15 pontos**

Determinar g'' ..... 4 pontos

Escrever $\dfrac{\left(-\frac{\pi}{6}-x\right)'}{\left(-\frac{\pi}{6}-x\right)\times\ln 2}$ ..... 2 pontos

Obter $\dfrac{-1}{\left(-\frac{\pi}{6}-x\right)\times\ln 2}$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Concluir que $g''(x)<0$ para qualquer $x\in\left]-\dfrac{2\pi}{3},-\dfrac{\pi}{3}\right[$ ..... 5 pontos

Concluir que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo em $x\in\left]-\dfrac{2\pi}{3},-\dfrac{\pi}{3}\right[$ 3 pontos

Concluir que o gráfico de g não tem pontos de inflexão ..... 3 pontos

6.3. ..... **15 pontos**

Equacionar o problema $\left(h'(x)=0\right)$ (**ver nota 1**)..... 5 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora (**ver notas 2, 3** e **4**) ..... 6 pontos

Indicar a abcissa pedida ..... 4 pontos

Notas:

1. Se o examinando apenas referir que o declive de uma recta paralela ao eixo das abcissas é 0, a pontuação a atribuir, nesta etapa, é 3 pontos.

2. Se o examinando apresentar um gráfico que não respeite o domínio de h', a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser desvalorizada em 1 ponto.

3. Se o examinando não apresentar o referencial, a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser desvalorizada em 1 ponto.

4. Se o examinando determinar h' analiticamente, a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser distribuída do seguinte modo:

Escrever $\left(\pi-4\operatorname{sen}(5x)\right)'=\left(\pi\right)'-\left(4\operatorname{sen}(5x)\right)'$ ..... 1 ponto

Determinar $\left(\pi\right)'$ ..... 1 ponto

Determinar $\left(\operatorname{sen}(5x)\right)'$ ..... 1 ponto

Apresentar o(s) gráfico(s) (**ver nota 5**) ..... 3 pontos

5. Se o examinando obtiver uma expressão incorrecta da derivada de h, considera-se que o gráfico está correcto se estiver de acordo com a expressão obtida.

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/1.ª Fase – Prova Especial

14 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2011

Página em branco

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 4, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\dfrac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$

(α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\ r\ g$

(r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\ \pi\ r^2$

(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3\ (r - raio)$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}a \cdot \cos b + \operatorname{sen}b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen}a \cdot \operatorname{sen}b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b}{1 - \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis}\theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis}\theta} = \sqrt[n]{\rho}\ \operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right),\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega \text{ e } B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- $P(\overline{A}) = 0,9$
- $P(A \cup B) = 0,73$
- A e B são acontecimentos independentes

Qual é o valor de $P(B)$?

(A) $0,63$ **(B)** $0,657$ **(C)** $0,073$ **(D)** $0,7$

2. Uma turma do 12.º ano de uma escola secundária tem 18 raparigas e 10 rapazes. Nessa turma, 20 alunos têm Inglês. Dos alunos da turma que têm Inglês só 4 são rapazes.

Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa turma.

Qual é a probabilidade de o aluno escolhido não ter Inglês, sabendo que é rapariga?

(A) $\frac{1}{9}$ **(B)** $\frac{2}{9}$ **(C)** $\frac{3}{5}$ **(D)** $\frac{1}{4}$

3. O terceiro elemento de uma linha do triângulo de Pascal é $61\,075$

A soma dos três primeiros elementos dessa linha é $61\,426$

Qual é a soma dos três últimos elementos da linha seguinte?

(A) $61\,425$ **(B)** $61\,426$ **(C)** $61\,777$ **(D)** $122\,501$

4. Considere a função f, de domínio $]0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ \frac{4}{x} + 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Seja (u_n) uma sucessão de números reais, de termos positivos, tal que $\lim f(u_n) = 3$

Qual das expressões seguintes pode definir o termo geral da sucessão (u_n)?

(A) $2 - \frac{1}{n}$

(B) $2 + \frac{1}{n}$

(C) $3 - \frac{1}{n}$

(D) $3 + \frac{1}{n}$

5. Na Figura 1, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico de uma função h', primeira derivada de h

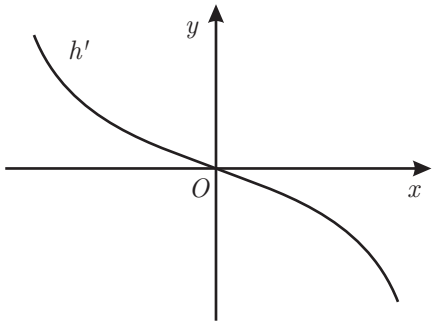
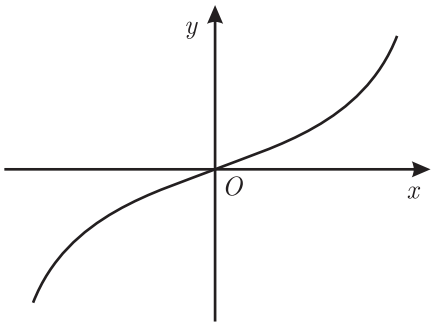


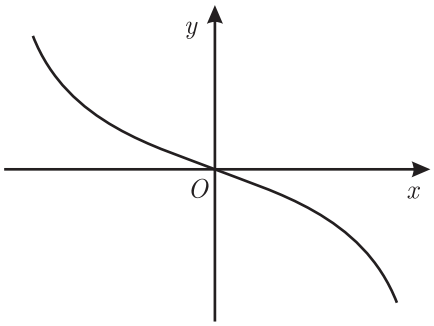
Figura 1

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função h ?

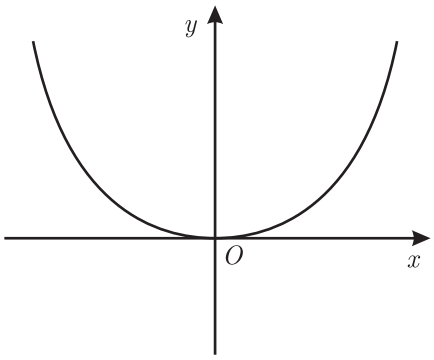
(A)



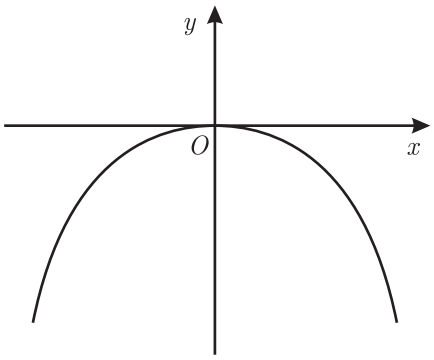
(B)



(C)



(D)



6. Sejam f e g duas funções deriváveis em $\mathbb{R}$

Sabe-se que:

- $f(1) = f'(1) = 1$
- $g(x) = (2x-1) \times f(x)$, para todo o valor real de x

Qual é a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1?

(A) $y = 3x - 2$

(B) $y = 3x + 4$

(C) $y = 2x - 1$

(D) $y = -3x + 2$

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = 8\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Qual dos números complexos seguintes é uma das raízes de índice seis de z?

(A) $\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{25\pi}{36}\right)$

(B) $\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{36}\right)$

(C) $2\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{25\pi}{36}\right)$

(D) $2\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{36}\right)$

8. Na Figura 2, estão representados, no plano complexo, seis pontos, M, N, P, Q, R e S

Sabe-se que:

- o ponto M é a imagem geométrica do número complexo $z_1 = 2 + i$
- o ponto N é a imagem geométrica do número complexo $z_1 \times z_2$

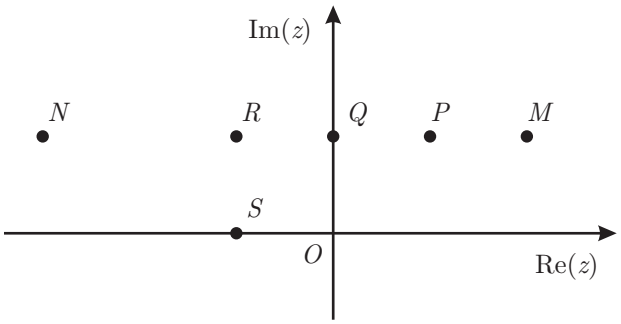


Figura 2

Qual dos pontos seguintes pode ser a imagem geométrica do número complexo z_2 ?

(A) ponto P

(B) ponto Q

(C) ponto R

(D) ponto S

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

1.1. Seja w o número complexo com coeficiente da parte imaginária positivo que é solução da equação $z^2+z+1=0$

Determine $\frac{1}{w}$

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

1.2. Seja z um número complexo.

Mostre que $(\bar{z}+i)\times(z-i)=|z-i|^2$, para qualquer número complexo z

($\bar{z}$ designa o conjugado de z)

2. Na Figura 3, está representado um tetraedro com as faces numeradas de 1 a 4

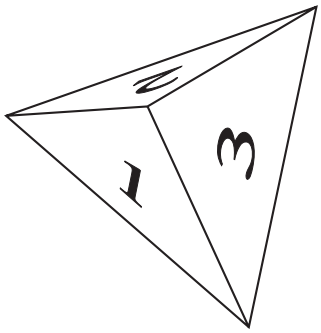


Figura 3

2.1. O João tem um catálogo de tintas com 12 cores diferentes, uma das quais é a sua preferida.

O João selecciona, ao acaso, 4 cores diferentes para pintar as quatro faces do tetraedro.

Cada uma das faces é pintada com uma única cor.

Determine a probabilidade de o tetraedro ter uma das faces pintadas com a cor preferida do João.

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

2.2. Considere a experiência aleatória que consiste em lançar 3 vezes o tetraedro representado na Figura 3 e registar, em cada lançamento, o número inscrito na face voltada para baixo.

Seja X a variável aleatória *«número de vezes que, nesses três lançamentos do tetraedro, se regista o número 1».*

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X

Apresente as probabilidades na forma de fracção.

2.3. Considere, agora, a experiência aleatória que consiste em lançar 4 vezes o tetraedro representado na Figura 3 e registar, em cada lançamento, o número inscrito na face voltada para baixo.

Sejam I e J os acontecimentos seguintes.

I: *«o número registado nos três primeiros lançamentos do tetraedro é o número 2»;*

J: *«a soma dos números registados nos quatro lançamentos do tetraedro é menor do que 10».*

Indique o valor de $P(J \mid I)$ sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada.

Numa composição, explique o seu raciocínio, começando por referir o significado de $P(J \mid I)$ no contexto da situação descrita.

3. O momento sísmico, M_0, é uma medida da quantidade total de energia que se transforma durante um sismo. Só uma pequena fracção do momento sísmico é convertida em energia sísmica irradiada, E, que é a que os sismógrafos registam.

A energia sísmica irradiada é estimada, em Joules, por $E = M_0 \times 1{,}6 \times 10^{-5}$

A magnitude, M, de um sismo é estimada por $M = \frac{2}{3}\log_{10}(E) - 2{,}9$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

3.1. Admita que um sismo que ocorreu no Haiti, em 2010, teve magnitude $7{,}1$

Determine o momento sísmico, M_0, para esse sismo.

Escreva o resultado na forma $a \times 10^n$, com n inteiro relativo e com a entre 1 e 10

3.2. Sejam M_1 e M_2 as magnitudes de dois sismos.

Mostre que, se a diferença entre a magnitude M_1 e a magnitude M_2 é igual a $\frac{2}{3}$, então a energia sísmica irradiada por um dos sismos é dez vezes superior à energia sísmica irradiada pelo outro sismo.

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} k+\dfrac{1-e^{x-1}}{x-1} & \text{se } x<1 \\ -x+\ln x & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$$

(k designa um número real)

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

4.1. Determine k, sabendo que f é contínua em $x=1$

4.2. Considere, agora, $k=3$

Estude a função f quanto à existência de assimptotas horizontais do gráfico de f

5. Na Figura 4, está representado, num referencial o. n. xOy, o gráfico da função g, de domínio $\left]-\pi, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $g(x)=x-2\cos x$

Sabe-se que C e D são pontos do gráfico de g cujas ordenadas são extremos relativos de g

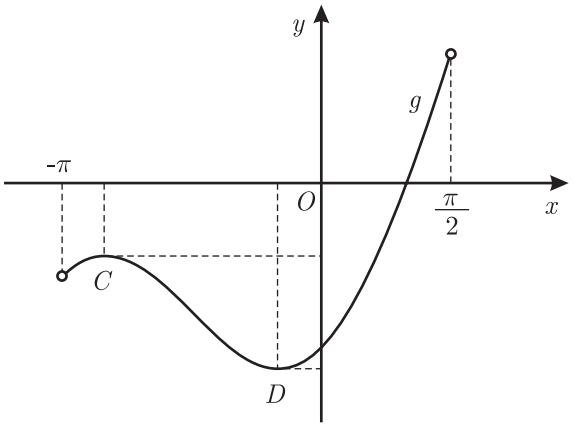


Figura 4

Determine os valores exactos das coordenadas dos pontos C e D recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

6. Na Figura 5, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função f, de domínio $]-\infty, 6[$, definida por $f(x) = 2 + 15\ln\left(3 - \frac{1}{2}x\right)$

Considere que um ponto C se desloca ao longo do gráfico de f, e que C tem coordenadas positivas.

Para cada posição do ponto C, considere o rectângulo $[OACB]$, em que o ponto A pertence ao eixo das abcissas e o ponto B pertence ao eixo das ordenadas.

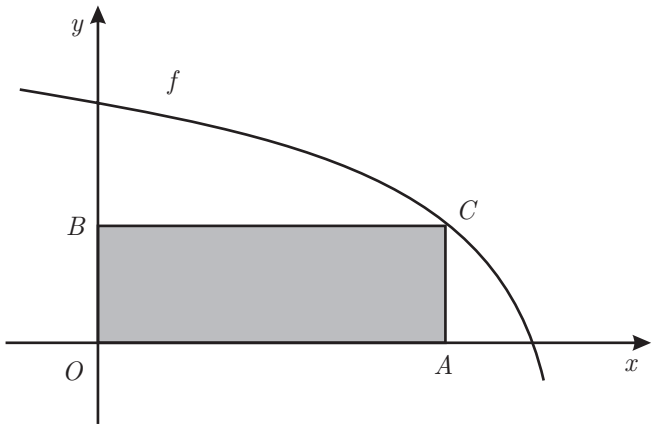


Figura 5

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto A para a qual a área do rectângulo $[OACB]$ é máxima.

Na sua resposta, deve:

- escrever a expressão que dá a área do rectângulo $[OACB]$ em função da abcissa do ponto A;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abcissa do ponto A com arredondamento às centésimas.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

(8 × 5 pontos)	40 pontos
	40 pontos

GRUPO II

1.		
	1.1.	15 pontos
	1.2.	15 pontos
2.		
	2.1.	10 pontos
	2.2.	15 pontos
	2.3.	15 pontos
3.		
	3.1.	15 pontos
	3.2.	15 pontos
4.		
	4.1.	15 pontos
	4.2.	15 pontos
5.		15 pontos
6.		15 pontos
		160 pontos

TOTAL	**200 pontos**

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/1.ª Fase – Prova Especial

11 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2011

COTAÇÕES

GRUPO I

(8 × 5 pontos)	40 pontos
	40 pontos

GRUPO II

1.		
	1.1.	15 pontos
	1.2.	15 pontos
2.		
	2.1.	10 pontos
	2.2.	15 pontos
	2.3.	15 pontos
3.		
	3.1.	15 pontos
	3.2.	15 pontos
4.		
	4.1.	15 pontos
	4.2.	15 pontos
5.		15 pontos
6.		15 pontos
		160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

A classificação da prova deve respeitar integralmente os critérios gerais e os critérios específicos a seguir apresentados.

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos de classificação apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro, previsto na grelha de classificação.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos. No entanto, em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se o examinando responder a um mesmo item mais do que uma vez, não eliminando inequivocamente a(s) resposta(s) que não deseja que seja(m) classificada(s), deve ser considerada apenas a resposta que surgir em primeiro lugar.

Nos itens de selecção (escolha múltipla), a cotação total do item é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a única opção correcta.

São classificadas com zero pontos as respostas em que seja assinalada:

– uma opção incorrecta;

– mais do que uma opção.

Não há lugar a classificações intermédias.

Os critérios de classificação dos itens de construção apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação. No caso de, ponderados todos os dados contidos nos descritores, permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

Nos itens de construção com cotação igual ou superior a quinze pontos e que impliquem a produção de um texto, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea das competências específicas da disciplina e das competências de comunicação escrita em língua portuguesa. A avaliação das competências de comunicação escrita em língua portuguesa contribui para valorizar a classificação atribuída ao desempenho no domínio das competências específicas da disciplina. Esta valorização é cerca de 10% da cotação do item e faz-se de acordo com os níveis de desempenho descritos no quadro seguinte.

Níveis	Descritores
3	Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
2	Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
1	Composição sem estruturação aparente, com erros graves de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é zero pontos. Neste caso, não é classificado o desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

Havendo escolas em que os examinandos já contactam com as novas regras ortográficas, uma vez que o Acordo Ortográfico de 1990 já foi ratificado e dado que qualquer cidadão, nesta fase de transição, pode optar pela ortografia prevista quer no Acordo de 1945, quer no de 1990, são consideradas correctas, na classificação das provas, as grafias que seguirem o que se encontra previsto em qualquer um destes normativos.

Nos itens de construção, as respostas que apresentem pontos de vista diferentes dos mencionados nos critérios específicos de classificação devem ser classificadas segundo procedimentos análogos aos previstos nos descritores apresentados, desde que o conteúdo dessas respostas seja considerado cientificamente válido e adequado ao solicitado.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar em situações não descritas anteriormente.

Situação	Classificação
1. Classificação da resposta a um item cujo critério se apresenta organizado por etapas.	A pontuação indicada para cada etapa é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A classificação da resposta resulta da soma das pontuações das diferentes etapas, à qual se subtrai ou subtraem, eventualmente, um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 14 e/ou 19.
2. Pontuação de uma etapa dividida em passos.	A pontuação indicada para cada passo é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A pontuação da etapa resulta da soma das pontuações dos diferentes passos.
3. Classificação da resposta a um item ou pontuação de uma etapa cujo critério se apresenta organizado por níveis de desempenho.	A resposta é enquadrada numa das descrições apresentadas. À classificação/pontuação correspondente subtraem-se, eventualmente, um, dois ou três pontos, de acordo com o previsto nas situações 9, 10 e/ou 19.
4. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite e classificado qualquer processo de resolução cientificamente correcto. O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante distribuição da cotação do item pelas etapas* percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.
5. Apresentação apenas do resultado final, embora a resolução do item exija cálculos e/ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
6. Utilização de processos de resolução que não respeitam as instruções dadas [exemplo: «usando métodos analíticos»].	A etapa em que a instrução não é respeitada é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário, no critério específico de classificação.
7. Ausência de apresentação dos cálculos e/ou das justificações necessárias à resolução de uma etapa*.	A etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário, no critério específico de classificação.
8. Ausência de apresentação explícita de uma dada etapa.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, a mesma é pontuada com a cotação total para ela prevista.

Situação	Classificação
9. Transposição incorrecta de dados do enunciado.	Se o grau de dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
10. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre.
11. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.	A pontuação máxima a atribuir nessa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
12. Ocorrência de um erro na resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada de acordo com o erro cometido. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido: – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
13. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas o passo final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
14. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação de um arredondamento incorrecto.	É subtraído um ponto à classificação da resposta, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
15. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fracção, e a resposta apresenta-se na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final [exemplo: «15» em vez de «15 metros»].	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a cotação para ela prevista.
17. Apresentação do resultado final com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exacto.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
18. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação do resultado final incorrectamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
19. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à classificação da resposta, excepto: – se as incorrecções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

* Em situações em que o critério é aplicável tanto a **etapas** como a **passos**, utiliza-se apenas o termo «etapas» por razões de simplificação da apresentação.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. ..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

As respostas correctas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
	D	A	C	B	D	A	A	C

GRUPO II

É de aceitar qualquer processo de resolução cientificamente correcto, ainda que não esteja previsto nestes critérios específicos, nem no Programa (ver n.º 4 dos critérios gerais).

1.1. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Resolver a equação $z^2 + z + 1 = 0$ ..... 6 pontos

- Escrever $z^2 + z + 1 = 0$ ..... 1 ponto
- Escrever $z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$ ..... 1 ponto
- Obter $z = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ ..... 2 pontos
- Obter $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ ..... 1 ponto
- Obter $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ ..... 1 ponto

Identificar w ..... 1 ponto

Escrever w na forma trigonométrica ..... 4 pontos

- Indicar o valor de $|w|$ ..... 2 pontos
- Indicar um argumento de w ..... 2 pontos

Escrever $\frac{1}{w}$ na forma trigonométrica ..... 4 pontos

- Indicar o valor de $\left|\frac{1}{w}\right|$ ..... 1 ponto
- Indicar um argumento de $\frac{1}{w}$ ..... 2 pontos
- Obter $\frac{1}{w}$ na forma trigonométrica ..... 1 ponto

2.º Processo

Resolver a equação $z^2 + z + 1 = 0$ ..... 6 pontos

- Escrever $z^2 + z + 1 = 0$ ..... 1 ponto
- Escrever $z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$ ..... 1 ponto
- Obter $z = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ ..... 2 pontos
- Obter $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ ..... 1 ponto
- Obter $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ ..... 1 ponto

Identificar w ..... 1 ponto

Escrever $\frac{1}{w}$ na forma algébrica ..... 4 pontos

- Multiplicar ambos os termos da fracção por $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$ (ou equivalente) ..... 1 ponto
- Obter $\frac{1}{w}$ na forma algébrica ..... 3 pontos

Escrever $\frac{1}{w}$ na forma trigonométrica ..... 4 pontos

- Indicar o valor de $\left|\frac{1}{w}\right|$ ..... 1 ponto
- Indicar um argumento de $\frac{1}{w}$ ..... 2 pontos
- Obter $\frac{1}{w}$ na forma trigonométrica ..... 1 ponto

1.2. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Considerar $z = a + b\,i$

Substituir z por $a + b\,i$ na expressão $(\bar{z} + i)(z - i)$ ..... 1 ponto

Substituir $\bar{z}$ por $a - b\,i$ na expressão $(\bar{z} + i)(z - i)$ ..... 1 ponto

Utilizar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição ..... 3 pontos

Substituir i^2 por -1 ..... 1 ponto

Obter $a^2 + b^2 - 2b + 1$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Substituir z por $a + b\,i$ na expressão $|z - i|^2$ ..... 1 ponto

Escrever $\left|a + i(b-1)\right|^2$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Obter $a^2 + (b-1)^2$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Concluir o pretendido ..... 2 pontos

2.º Processo

Escrever $|z-i|^2 = \overline{(z-i)}\,(z-i)$ ..... 5 pontos

Escrever $\overline{(z-i)} = \bar{z}-\bar{i}$ ..... 4 pontos

Escrever $\bar{z}-\bar{i} = \bar{z}+i$ ..... 4 pontos

Concluir o pretendido ..... 2 pontos

2.1. ..... **10 pontos**

Escrever a expressão que dá o valor pedido (**ver nota 1**) ..... 8 pontos

Calcular o valor pedido (**ver nota 2**) ..... 2 pontos

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, e a pontuação a atribuir em cada caso.

$\dfrac{4\times {}^{11}A_3}{{}^{12}A_4}$ ou $\dfrac{{}^{11}C_3}{{}^{12}C_4}$ (ou equivalente) ..... 8 pontos

$\dfrac{{}^{11}A_3}{{}^{12}A_4}$ (ou equivalente) ..... 6 pontos

$\dfrac{4}{{}^{12}A_4}$ (ou equivalente) ..... 4 pontos

Outras fracções próprias com denominador ${}^{12}A_4$ ou ${}^{12}C_4$ ..... 2 pontos

Outras situações ..... 0 pontos

2. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se o resultado estiver de acordo com a expressão escrita pelo examinando e se essa expressão não tiver sido pontuada com zero pontos.

2.2. ..... **15 pontos**

Indicar os valores que a variável X pode tomar ..... 2 pontos

Calcular a probabilidade de cada um dos valores da variável X ...(3 + 3 + 3 + 3)... 12 pontos

Apresentar a tabela de distribuição de probabilidades (**ver nota**) ..... 1 ponto

Nota – A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a etapa anterior não tiver sido pontuada com zero pontos.

2.3. ..... **15 pontos**

A composição deverá contemplar os pontos seguintes:

A) referir o significado de $P(J \mid I)$ no contexto da situação descrita

B) referir que a probabilidade pedida é $\dfrac{3}{4}$

C) referir que a soma dos números registados nos quatro lançamentos do tetraedro só é menor do que 10, se, no 4.º lançamento, sair 1, ou sair 2, ou sair 3

Na tabela seguinte, indica-se como deve ser classificada a resposta a este item, de acordo com os níveis de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa e os níveis de desempenho no domínio específico da disciplina.

Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina \ Descritores do nível de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa			Níveis*		
			1	2	3
Níveis	4	A composição contempla correctamente os pontos A, B e C.	13	14	15
	3	A composição contempla correctamente apenas os pontos A e B, OU apenas os pontos B e C, OU apenas os pontos A e C.	9	10	11
	2	A composição contempla correctamente apenas o ponto A, OU apenas o ponto C.	5	6	7
	1	A composição contempla correctamente apenas o ponto B.	3	3	3

***** Descritores apresentados nos Critérios Gerais de Classificação.

3.1. ..... **15 pontos**

Resolver a equação $M = 7{,}1$ ..... 8 pontos

Escrever $\frac{2}{3}\log_{10}(E) - 2{,}9 = 7{,}1$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Escrever $\log_{10}(E) = \frac{30}{2}$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Obter $E = 10^{15}$ (ou equivalente) ..... 4 pontos

Resolver a equação $M_0 \times 1{,}6 \times 10^{-5} = 10^{15}$ ..... 5 pontos

Escrever $M_0 \times 1{,}6 \times 10^{-5} = 10^{15}$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Escrever $M_0 = \frac{10^{20}}{1{,}6}$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

Indicar o valor de M_0 na forma pedida ..... 2 pontos

3.2. ..... **15 pontos**

Escrever $M_1 - M_2 = \frac{2}{3}$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Escrever $\frac{2}{3}\log_{10}(E_1) - 2{,}9 - \frac{2}{3}\log_{10}(E_2) + 2{,}9 = \frac{2}{3}$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Escrever $\frac{2}{3}\left(\log_{10}(E_1) - \log_{10}(E_2)\right) = \frac{2}{3}$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Escrever $\log_{10}(E_1) - \log_{10}(E_2) = 1$ (ou equivalente) ..... 1 ponto

Obter $\log_{10}\left(\frac{E_1}{E_2}\right) = 1$ ..... 3 pontos

Obter $\frac{E_1}{E_2} = 10$ ..... 3 pontos

Concluir o pretendido ..... 2 pontos

4.1. ..... **15 pontos**

Referir que, se f é contínua em $x=1$, então $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$ (**ver nota 1**)..... 3 pontos

Calcular $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ ..... 10 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(k+\dfrac{1-e^{x-1}}{x-1}\right)$ ..... 1 ponto

Levantar a indeterminação ..... 6 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 1^-} k+\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{-\left(e^{x-1}-1\right)}{x-1}\right)$ (ou equivalente) 2

Escrever $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-\left(e^{x-1}-1\right)}{x-1}=\lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{-\left(e^{y}-1\right)}{y}$ (**ver nota 2**).. 3

Referir o limite notável $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^{y}-1}{y}=1$ (ou equivalente) .. 1

Obter o valor de $\lim\limits_{x\to 1^-} k+\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{-\left(e^{x-1}-1\right)}{x-1}\right)$ ..... 3 pontos

Calcular k ..... 2 pontos

Calcular $f(1)$ ..... 1 ponto

Obter o valor de k ..... 1 ponto

Notas:

1. Se o examinando referir que, se f é contínua em $x=1$, então $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ é igual a $f(1)$, a pontuação a atribuir, nesta etapa, não deve ser desvalorizada.

2. Se o examinando referir que $x\to 1^-$ é equivalente a $x-1\to 0^-$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

4.2. ..... **15 pontos**

Estudar a função f quanto à existência de assimptotas horizontais do seu gráfico quando x tende para $+\infty$

Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ..... 8 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+\ln x\right)$ ..... 1 ponto

Levantar a indeterminação ..... 5 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(-1+\dfrac{\ln x}{x}\right)\right)$ 4

Referir o limite notável $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ 1

Obter o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ..... 2 pontos

Concluir que o gráfico de f não tem assimptota horizontal quando x tende para $+\infty$ ..... 2 pontos

Estudar a função f quanto à existência de assimptotas horizontais do seu gráfico quando x tende para $-\infty$

Calcular $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ..... 3 pontos

Escrever $\lim_{x\to-\infty}\left(3+\frac{1-e^{x-1}}{x-1}\right)$ ..... 1 ponto

Obter o valor de $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ..... 2 pontos

Concluir que a recta de equação $y=3$ é assimptota horizontal do gráfico de f quando x tende para $-\infty$ ..... 2 pontos

5. ..... **15 pontos**

Determinar g' ..... 3 pontos

Determinar $(x)'$ ..... 1 ponto

Determinar $(\cos x)'$ ..... 1 ponto

Obter a expressão de $g'(x)$ ..... 1 ponto

Relacionar os zeros de g' com a existência de extremos relativos de g (**ver nota**) .. 8 pontos

Referir que o domínio é um intervalo aberto ..... 1 ponto

Referir que a função é derivável em todos os pontos de $\left]-\pi,\frac{\pi}{2}\right[$ ... 1 ponto

Referir que as abcissas dos pontos C e D são zeros de g' ..... 2 pontos

Escrever $g'(x)=0$ ..... 1 ponto

Resolver a equação $g'(x)=0$ ..... 2 pontos

Referir que a equação tem exactamente duas soluções em $\left]-\pi,\frac{\pi}{2}\right[$ 1 ponto

Indicar as coordenadas de C ..... 2 pontos

Indicar a abcissa ..... 1 ponto

Indicar a ordenada ..... 1 ponto

Indicar as coordenadas de D ..... 2 pontos

Indicar a abcissa ..... 1 ponto

Indicar a ordenada ..... 1 ponto

Nota – Se o examinando estudar o sinal de g' com recurso a um quadro, a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser distribuída do seguinte modo:

Preencher a primeira linha do quadro (relativa à variável x, de acordo com o domínio da função) ..... 1 ponto

Indicar o sinal de g' ..... 6 pontos

Escrever $g'(x)=0$ 1

Resolver a equação $g'(x)=0$ 2

Concluir que $g'(x)>0$ se $x\in\left]-\pi,-\frac{5\pi}{6}\right[$ 1

Concluir que $g'(x)<0$ se $x\in\left]-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right[$ 1

Concluir que $g'(x)>0$ se $x\in\left]-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right[$ 1

Relacionar o sinal de g' com a monotonia de g ..... 1 ponto

6. ..... **15 pontos**

Escrever a expressão que dá a área do rectângulo $[OACB]$ em função da abcissa do ponto A ..... 7 pontos

Indicar que a área é $\overline{OA} \times \overline{OB}$ (ou equivalente)..... 3 pontos

Indicar $\overline{OA} = x$ ..... 2 pontos

Indicar $\overline{OB} = f(x)$ ..... 2 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora (**ver notas 1** e **2**) ..... 4 pontos

Indicar a abcissa do ponto A na forma pedida ..... 4 pontos

Notas:

1. Se o examinando apresentar um gráfico que não respeite o domínio da função que exprime a área do rectângulo $[OACB]$ em função da abcissa do ponto A, a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser desvalorizada em 1 ponto.

2. Se o examinando não apresentar o referencial, a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser desvalorizada em 1 ponto.

Exame nacional de Matemática A **(2011, Prova especial)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Temos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, e como A e B são acontecimentos independentes, vem que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

   Assim,

   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) - P(A) = P(B) - P(A) \times P(B) \Leftrightarrow$$
   $$\Leftrightarrow P(A \cup B) - P(A) = P(B)\left(1 - P(A)\right) \Leftrightarrow P(A \cup B) - P(A) = P(B) \times P\left(\overline{A}\right) \Leftrightarrow$$
   $$\Leftrightarrow \frac{P(A \cup B) - P(A)}{P\left(\overline{A}\right)} = P(B)$$

   Como $P\left(A\right) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$, temos que:

   $$P(B) = \frac{0{,}73 - 0{,}1}{0{,}9} = \frac{0{,}63}{0{,}9} = 0{,}7$$

   Resposta: **Opção D**

2. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno da turma, e os acontecimentos:
   R:«O aluno ser uma rapariga»
   I:«O ter Inglês»
   O número de raparigas que tem Inglês é $20 - 4 = 16$
   Assim, como a turma tem 18 raparigas, o número de raparigas que não tem Inglês é $18 - 16 = 2$
   Logo a probabilidade de selecionar um aluno que não tem inglês, de entre o conjunto das raparigas é

   $$P\left(\overline{I}|R\right) = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

   Resposta: **Opção A**

3. Como a soma dos três primeiros elementos de uma linha do triângulo de Pascal é 61 426 e o terceiro elemento dessa linha é 61 075 e, como sabemos que o primeiro é 1, podemos calcular o segundo número (b):

$$61\,426 = 1 + b + 61\,075 \quad \Leftrightarrow \quad 61\,426 - 1 - 61\,075 = b \quad \Leftrightarrow \quad b = 350$$

E assim podemos calcular os primeiros números da linha seguinte ($350+1 = 351$ e $350+61\,075 = 61\,425$):

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 350 & & 61\,075 & \ldots \\ 1 & & 351 & & 61\,425 & \ldots & \end{array}$$

Como a soma dos últimos três elementos de qualquer linha é igual à soma dos primeiros 3 elementos dessa linha, temos que a soma pretendida é:

$$61\,425 + 351 + 1 = 61\,777$$

Resposta: **Opção C**

4. Se $\lim u_n = k$, então $\lim f(u_n) = 3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to k} f(x) = 3$

Calculado $k = \lim u_n$ e $\lim\limits_{x\to k} f(x)$ para cada uma das sucessões apresentadas, temos:

- $\lim u_n = \lim\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{+\infty} = 2 - 0^+ = 2^-$

  E assim, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (e^x - 1) = e^{2^-} - 1 = e^2 - 1$
- $\lim u_n = \lim\left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2 + \frac{1}{+\infty} = 2 + 0^+ = 2^+$

  E assim, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \left(\frac{4}{x} + 1\right) = \frac{4}{2^+} + 1 = 2 + 1 = 3$
- $\lim u_n = \lim\left(3 - \frac{1}{n}\right) = 3 - \frac{1}{+\infty} = 3 - 0^+ = 3^-$

  E assim, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \left(\frac{4}{x} + 1\right) = \frac{4}{3^-} + 1 = \frac{4}{3} + \frac{3}{3} = \frac{7}{3}$
- $\lim u_n = \lim\left(3 + \frac{1}{n}\right) = 3 + \frac{1}{+\infty} = 3 + 0^+ = 3^+$

  E assim, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \left(\frac{4}{x} + 1\right) = \frac{4}{3^+} + 1 = \frac{4}{3} + \frac{3}{3} = \frac{7}{3}$

Desta forma, de entre as hipóteses apresentadas, a única sucessão em que $\lim f(u_n) = 3$ é $2 + \frac{1}{n}$

Resposta: **Opção B**

5. Podemos descrever a variação do sinal de h', pela análise do gráfico, e relacionar com a monotonia da função h:

x		0	
$h'(x)$	+	0	−
$h(x)$	↗	Máx	↘

Ou seja, a função h é crescente se $x \leq 0$ e decrescente se $x \geq 0$, e apenas o gráfico da opção (D), é compatível com esta conclusão.

Resposta: **Opção D**

6. Como o declive (m), da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1 é $g'(1)$, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$g'(x) = \big((2x-1)\times f(x)\big)' = (2x-1)'f(x) + (2x-1)\big(f(x)\big)' = 2f(x) + (2x-1)f'(x)$$

Calculando o declive da reta tangente temos:

$$m = g'(1) = 2f(1) + (2x-1)f'(1) = 2\times 1 + (2(1)-1)\times 1 = 2 + 1\times 1 = 3$$

Calculando as coordenadas do ponto de tangência, temos: $g(1) = (2(1)-1)\times f(1) = (2-1)\times 1 = 1$, ou seja, o ponto $P(1,1)$ é um ponto do gráfico de g que também pertence à reta tangente.
Substituindo o valor do declive na equação da reta, vem $y = 3x + b$
Substituindo as coordenadas do ponto na equação da reta, calculamos o valor da ordenada na origem:

$$1 = 3\times 1 + b \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 3 = b \quad \Leftrightarrow \quad -2 = b$$

Logo, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa $x = 1$ é:

$$y = 3x - 2$$

Resposta: **Opção A**

7. Usando a fórmula de Moivre para a radiciação temos que:
$\sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{8}\,\text{cis}\left(\dfrac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{6}\right), k \in \{0,1,2,3,4,5\}$, temos que

- $|w| = \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$
- Para cada $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$, $\arg(w) = \dfrac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{6} = \dfrac{\pi}{36} + \dfrac{2k\pi}{6} = \dfrac{\pi}{36} + \dfrac{12k\pi}{36} = \dfrac{\pi + 12k\pi}{36}$

Assim, se $k = 2$, temos que $\arg(w) = \dfrac{\pi + 24\pi}{36} = \dfrac{25\pi}{36}$

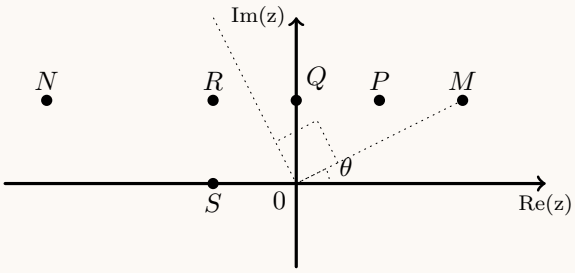
Resposta: **Opção A**

8. Como o ponto M é a imagem geométrica do número complexo z_1 que vamos designar por $z_1 = \rho_1 \operatorname{cis}\theta$, em que $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ porque M é um ponto do primeiro quadrante e $\operatorname{Re}(z_1) > \operatorname{Im}(z_1)$.

- Podemos excluir o ponto da opção (D), o ponto S porque é a imagem geométrica de um número complexo z da forma $z = \rho_3 \operatorname{cis}\pi$, e assim, $z_1 \times z = \rho_1\rho_3 \operatorname{cis}(\pi + \theta)$; e como $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ então a imagem geométrica de $z_1 \times z$ seria um ponto do 3º quadrante e não o ponto N
- Podemos excluir o ponto da opção (B), o ponto Q porque é a imagem geométrica de um número complexo z da forma $z = \rho_4 \operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$, e assim, $z_1 \times z = \rho_1\rho_3 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$; ou seja a imagem geométrica de $z_1 \times z$ seria um ponto sobre a reta perpendicular a à reta OM pelo ponto O e não o ponto N
- Podemos excluir o ponto da opção (A), o ponto P porque é a imagem geométrica de um número complexo z da forma $z = \rho_5 \operatorname{cis}\alpha$, e assim, $z_1 \times z = \rho_1\rho_5 \operatorname{cis}(\theta + \alpha)$; e como $\alpha < \frac{\pi}{2}$, então a imagem geométrica de $z_1 \times z$ seria um ponto do quadrante definido pela reta OM e pela perpendicular pelo ponto O e não o ponto N

Logo o ponto R é o único, de entre as opções apresentadas, que pode ser a imagem geométrica do número complexo z_2

Resposta: **Opção C**



GRUPO II

1.

1.1. Resolvendo a equação, vem:

$$z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-1^2 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{3 \times (-1)}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{3} \times \sqrt{-1}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

C.S.: $\left\{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \ ; \ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

Como w é a solução com coeficiente da parte imaginária positivo, $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Escrevendo w na f.t. temos $w = \rho \operatorname{cis}\theta$, onde:

- $\rho = |w| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$; como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta < 0$, θ é um ângulo do 2º quadrante, logo $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

Assim $z_1 = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$ e logo $\frac{1}{w} = \frac{1 \operatorname{cis} 0}{\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{1} \operatorname{cis}\left(0 - \frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

1.2. Seja $z = a + bi$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$.

Assim temos que $\overline{z} = a - bi$, pelo que:
$(\overline{z} + i) \times (z - i) = (a - bi + i)(a + bi - i) = a^2 + abi - ai - abi - b^2 i^2 + bi^2 + ai + bi^2 - i^2 =$
$= a^2 - b^2(-1) + b(-1) + b(-1) - (-1) = a^2 + b^2 - 2b + 1$

E como $|z - i|^2 = |a + bi - i|^2 = |a + i(b-1)|^2 = \left(\sqrt{a^2 + (b-1)^2}\right)^2 = a^2 + (b-1)^2 = a^2 + b^2 - 2b + 1$

Temos que $(\overline{z} + i) \times (z - i) = |z - i|^2$

2.

2.1. Como o João escolhe 4 cores de entre um conjunto de 12, e cada cor se destina a pintar uma das faces numeradas, a ordem da seleção é relevante. Assim, o João pode pintar o tetraedro de ${}^{12}A_4$ formas diferentes, sendo este o número de casos possíveis.

Se pretendermos que a cor preferida do João esteja entre as cores escolhidas, ainda podemos pintar qualquer uma das 4 faces com essa cor, pelo que existem 4 casos a considerar.
Por cada um destes 4 casos, devemos selecionar 3 cores de entre as restantes 11, considerando a ordem relevante. Ou seja, o número de casos favoráveis é $4 \times {}^{11}A_3$

Assim, a probabilidade de o tetraedro ter uma das faces pintadas com a cor preferida do João é

$$\frac{4 \times {}^{11}A_3}{{}^{12}A_4} = \frac{1}{3}$$

2.2. Como a experiência se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades segue o modelo binomial $\left(P(X = k) = {}^{n}C_k \, p^k \, q^{n-k}\right)$.

Temos que:

- $n = 3$ (o dado é lançado 3 vezes de forma independente).
- $p = \frac{1}{4}$ (a probabilidade do sucesso, ou seja «*Sair a face com o número 1*» é $\frac{1}{4}$, porque o dado tem 4 faces, das quais apenas uma tem o número 1)
- $q = \frac{3}{4}$, a probabilidade do insucesso pode ser calculada como $q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Assim, calculando a probabilidade da face com o número 1, ocorrer 0,1,2 ou 3 vezes, temos:

- $P(X = 0) = {}^{3}C_0 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 1 \times 1 \times \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$
- $P(X = 1) = {}^{3}C_1 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{3^2}{4^2} = \frac{3 \times 1 \times 3^2}{4^3} = \frac{27}{64}$
- $P(X = 2) = {}^{3}C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^1 = 3 \times \frac{1}{4^2} \times \frac{3}{4} = \frac{3 \times 1 \times 3}{4^3} = \frac{9}{64}$
- $P(X = 3) = {}^{3}C_3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1 \times \frac{1}{4^3} \times 1 = \frac{1}{64}$

Logo a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

2.3. No contexto da situação descrita, $P(J|I)$ é a probabilidade de que ao lançar 4 vezes o tetraedro, a soma dos números registados nos quatro lançamentos seja menor do que 10, sabendo que nos 3 primeiros lançamentos saiu sempre o número dois.
Como sabemos que a soma relativa aos 3 primeiros lançamentos é $2+2+2=6$, para que a soma dos 4 lançamentos seja inferior a 10, no último lançamento podem sair as faces com os números, um (que resultará na soma 7), dois (soma 8) ou três (soma 9).
Assim, usando a Regra de Laplace, para a determinação da probabilidade, temos 4 casos possíveis, correspondentes às faces que podem sair no quarto lançamento, e 3 casos favoráveis, correspondendo às faces que correspondem a uma soma inferior a 10, pelo que

$$P(J|I)=\frac{3}{4}$$

3.

3.1. Sabendo que $M=7{,}1$, podemos calcular a energia sísmica irradiada, substituindo o valor dado em $M=\frac{2}{3}\log_{10}(E)-2{,}9$:

$$7{,}1=\frac{2}{3}\log_{10}(E)-2{,}9 \Leftrightarrow \frac{(7{,}1+2{,}9)\times 3}{2}=\log_{10}(E) \Leftrightarrow \log_{10}(E)=15 \Leftrightarrow E=10^{15}$$

Como a relação entre o momento sísmico e a energia libertada é $E=M_0\times 1{,}6\times 10^{-5}$, substituindo o valor de E nesta expressão, vem:

$$10^{15}=M_0\times 1{,}6\times 10^{-5} \Leftrightarrow \frac{10^{15}}{1{,}6\times 10^{-5}}=M_0 \Leftrightarrow M_0=0{,}625\times 10^{15}\times 10^{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M_0=6{,}25\times 10^{-1}\times 10^{20} \Leftrightarrow M_0=6{,}25\times 10^{19}$$

3.2. Sabemos que $M_1-M_2=\frac{2}{3}$.
Sejam E_1 a energia sísmica irradiada pelo sismo de magnitude M_1 e E_2 a energia sísmica irradiada pelo sismo de magnitude M_2.
Assim, temos que $M_1=\frac{2}{3}\log_{10}(E_1)-2{,}9$ e $M_2=\frac{2}{3}\log_{10}(E_2)-2{,}9$, pelo que
$M_1-M_2=\frac{2}{3}\log_{10}(E_1)-2{,}9-\left(\frac{2}{3}\log_{10}(E_2)-2{,}9\right)$
Logo:

$$\frac{2}{3}\log_{10}(E_1)-2{,}9-\left(\frac{2}{3}\log_{10}(E_2)-2{,}9\right)=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\log_{10}(E_1)-2{,}9-\frac{2}{3}\log_{10}(E_2)+2{,}9=\frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\log_{10}(E_1)-\frac{2}{3}\log_{10}(E_2)=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(\log_{10}(E_1)-\log_{10}(E_2)\right)=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \log_{10}(E_1)-\log_{10}(E_2)=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{10}\left(\frac{E_1}{E_2}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{E_1}{E_2}=10^1 \Leftrightarrow E_1=10\times E_2$$

Assim, a energia sísmica irradiada pelo sismo de magnitude M_1 é dez vezes superior à energia sísmica irradiada pelo sismo de magnitude M_2.

4.

4.1. Sabendo que f é contínua em $x = 1$, temos que $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$, e mais especificamente que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$

Como $f(1) = -1 + \ln 1 = -1 + 0 = -1$, vamos calcular $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ para determinar o valor de k :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(k + \frac{1-e^{x-1}}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1^-} k + \lim_{x\to 1^-} \frac{1-e^{x-1}}{x-1} = k + \lim_{x\to 1^-} \frac{-(e^{x-1}-1)}{x-1} =$$

$$= k - \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} \underset{(1)}{=} k - \underbrace{\lim_{y\to 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = k - 1$$

(1) Se $y = x - 1$, então como $x \to 1^-$, logo $y \to 0^-$

Assim, como f é contínua em $x = 1$ temos que $f(1) = k - 1$, ou seja

$$-1 = k - 1 \Leftrightarrow k = 0$$

4.2. Para averiguar a existência de assíntotas horizontais do gráfico de f temos que calcular $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

Assim temos que:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \left(3 + \frac{1-e^{x-1}}{x-1}\right) = \lim_{x\to -\infty} 3 + \lim_{x\to -\infty} \frac{1-e^{x-1}}{x-1} = 3 + \frac{1-e^{-\infty-1}}{-\infty-1} = 3 + \frac{1-0}{-\infty} = 3 - 0 = 3$$

Pelo que podemos afirmar que a reta de equação $y = 3$ é assíntota do gráfico de f (quando $x \to -\infty$)

Temos ainda que:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (-x + \ln x) = \lim_{x\to +\infty} \left(x\left(-1 + \frac{\ln x}{x}\right)\right) = \lim_{x\to +\infty} x \times \lim_{x\to +\infty} \left(-1 + \frac{\ln x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} x \times \left(\lim_{x\to +\infty} (-1) + \underbrace{\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}\right) = +\infty \times (-1 + 0) = +\infty \times (-1) = -\infty$$

Pelo que podemos afirmar que o gráfico de f não tem assíntotas horizontais quando $x \to +\infty$, ou seja, $y = 3$ é a única assíntota horizontal do gráfico de f

5. Como se pretende determinar os extremos da função, vamos recorrer aos zeros da derivada, e por isso, começamos por derivar a função:

$$g'(x) = (x - 2\cos x)' = (x)' - (2\cos x)' = 1 - 2(-\operatorname{sen} x) = 1 + 2\operatorname{sen} x$$

Depois determinamos os zeros da derivada, ou seja as abcissas dos pontos C e D:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi\,, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$$

Atribuindo valores inteiros a k, podemos encontrar os valores de x que pertencem ao domínio da função:

$$x = -\frac{\pi}{6}\,(k = 0) \ \text{ e } \ x = -\frac{5\pi}{6}\left(k = -1, x = \frac{7\pi}{6} - 2\pi\right)$$

Assim, estudando a variação de sinal de g' e relacionando com a monotonia da função g, vem:

x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	n.d.	$+$	0	$-$	0	$+$	n.d.
$g(x)$	n.d.	↗	Máx	↘	min	↗	n.d.

Assim, temos que a abcissa do ponto C é $x_C = -\frac{5\pi}{6}$, e a ordenada é

$$g\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6} - 2\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6} - 2\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} - 2\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6} - 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - \frac{5\pi}{6}$$

Ou seja, o ponto C tem coordenadas $C\left(-\frac{5\pi}{6}, \sqrt{3} - \frac{5\pi}{6}\right)$

De forma análoga, temos que a abcissa do ponto D é $x_D = -\frac{\pi}{6}$, e a ordenada é

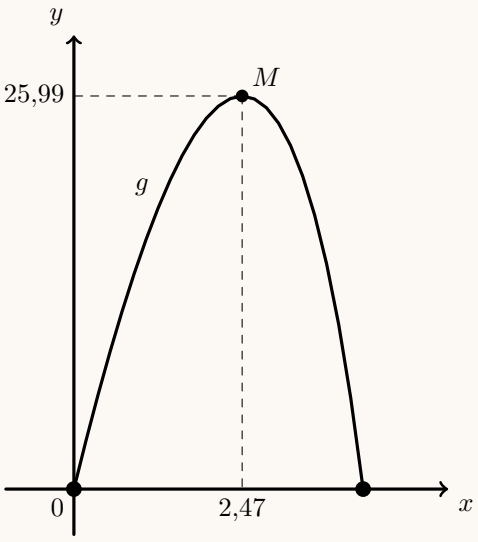
$$g\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} - 2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} - 2\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}$$

Ou seja, o ponto D tem coordenadas $D\left(-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}\right)$

6. Considerando a abcissa x do ponto A, como a medida do lado horizontal do retângulo e a medida (correspondente) do lado vertical é $f(x)$, ou seja, a área $A_{[OACB]}$ é dada pela função g definida, pela condição:

$$g(x) = x \times f(x) = x\left(2 + 15\ln\left(3 - \frac{1}{2}x\right)\right)\,, (g(x) \geq 0)$$

Traçando na calculadora gráfica o gráfico da função g, numa janela compatível com o domínio, obtemos o gráfico reproduzido na figura ao lado.



Utilizando a função da calculadora gráfica que permite determinar valores aproximados para o maximizante (e para o máximo) da função, determinamos as coordenadas do ponto $M(2{,}47; 25{,}99)$, o que nos permite concluir que o retângulo $[OACB]$ tem área máxima quando o ponto A (e o ponto C) tem abcissa $x \approx 2{,}5$

Exame nacional de Matemática A **(2011, Época especial)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um jovem inscrito no clube, e os acontecimentos:
   A:«O jovem pratica andebol»
   F:«O jovem pratica futebol»
   Sabemos que existem 28 jogadores que jogam apenas futebol e 12 que jogam futebol e andebol, ou seja, o número total de praticantes de futebol é de $28 + 12 = 40$
   De entre estes, apenas 12 jogam andebol, pelo que a probabilidade de selecionar ao acaso um jovem inscrito, de entre os praticantes de futebol, e ele também jogar andebol é

   $$P(A|F) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$$

   Resposta: **Opção B**

2. Usando o modelo binomial $\left(P(X = k) =^n C_k\, p^k\, q^{n-k}\right)$, temos que $n = 5$.
   Para o acontecimento I, $p = q = \frac{1}{2}$ e $k = 2$.
   Para o acontecimento J, $p = \frac{1}{6}$, pelo que $q = \frac{5}{6}$ e $k = 2$.

   Assim, temos que:

   - $P(I) = P(X = 2) =^5 C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 10\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{2^5} = \frac{5}{16} \approx 0{,}31$
   - $P\left(\overline{I}\right) = 1 - P(I) = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16} \approx 0{,}69$
   - $P(J) = P(Y = 2) =^5 C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 10\left(\frac{5^3}{6^5}\right) \approx 0{,}16$
   - $P\left(\overline{J}\right) = 1 - P(J) = 1 - \frac{10 \times 5^3}{6^5} \approx 0{,}84$

   Logo o acontecimento mais provável é o acontecimento $\overline{J}$.

   Resposta: **Opção D**

3. Como A e B são acontecimentos incompatíveis, temos que $A \cap B = \emptyset$, ou seja, $P(A \cap B) = 0$

   Pelas leis de De Morgan temos que $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0{,}3 \Leftrightarrow P\left(\overline{A \cup B}\right) = 0{,}3$, e assim

   $$P(A \cup B) = 1 - P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$$

   Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = P(B)$, calculamos o valor de $P(B)$, substituindo os valores conhecidos:

   $$P(B) = 0{,}7 + 0 - 0{,}5 = 0{,}2$$

   Resposta: **Opção A**

4. - Como $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ então a reta de equação $y = 1$ é assíntota do gráfico de f
   - Como $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) + 2x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (-2x)) = 0$ então a reta de equação $y = -2x + 0$ é assíntota do gráfico de f

   Logo as assíntotas do gráfico de f são definidas por $y = 1$ e $y = -2x$

   Resposta: **Opção C**

5. Determinando a expressão da primeira, e depois da segunda derivada, temos:

   $$f'(x) = (ax^2 - 1)' = 2ax + 0 = 2ax$$

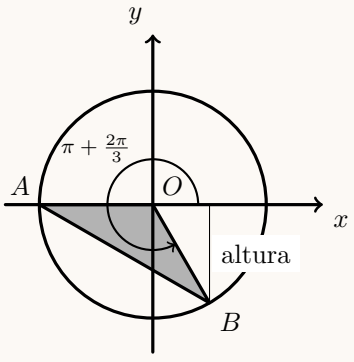
   $$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = (2ax)' = 2a$$

   Como o gráfico de f'' é a reta de equação $y = 2a$, e pela observação do gráfico, podemos constatar que $2a < 0$, logo $a < 0$.
   Assim, das opções apresentadas, apenas o valor -3 é compatível com a condição $a < 0$.

   Resposta: **Opção D**

6. Como se trata de um círculo trigonométrico, o ponto B tem coordenadas $B\left(\cos\frac{5\pi}{3}, \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right)$, porque o segmento $[OB]$, define com o semieixo postivo Ox um ângulo de $\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ radianos.

   Podemos considerar como a medida da base do triângulo $\overline{OA} = 1$ e o valor absoluto da ordenada de B como a medida da altura:
   $|y_B| = \left|\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right| = \left|-\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right| = \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

   Assim, calculando a área do triângulo vem:

   $$A_{[OAB]} = \frac{\overline{OA} \times |y_B|}{2} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

   Resposta: **Opção A**

7. Para que z_1 seja igual ao conjugado de z_2, tem que se verificar a condição
$\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2) \ \wedge \ \text{Im}(z_1) = -\text{Im}(z_2)$

Logo:

$$\begin{cases} \text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2) \\ \\ \text{Im}(z_1) = -\text{Im} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k+2 = 3p-4 \\ \\ p = -(2-5k) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k+6 = 3p \\ \\ p = 5k-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+2 = p \\ \\ k+2 = 5k-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k+2 = p \\ \\ 2+2 = 5k-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+2 = p \\ \\ 4 = 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2 = p \\ \\ 1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = p \\ \\ 1 = k \end{cases}$$

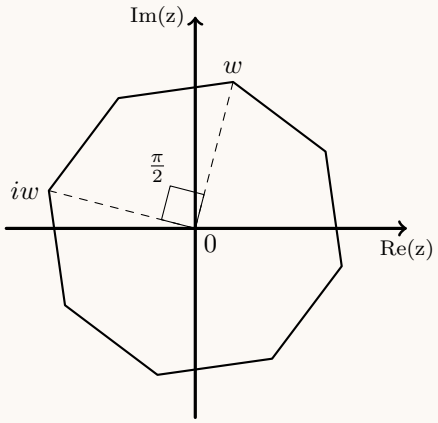
Resposta: **Opção B**

8. Sendo a imagem geométrica de w o vértice A do octógono, designemos por z a imagem geométrica do vértice C do octógono.

Como os dois números complexos são raízes de índice 8 de um mesmo número complexo, temos que $|w| = |z|$.

Como o octógono está centrado na origem, e tem oito lados, o ângulo AOB tem de amplitude $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ radianos. Como o ângulo BOC tem a mesma amplitude, temos que o ângulo AOC tem de amplitude $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ radianos.

Ou seja $\arg(z) = \arg(w) + \frac{\pi}{2}$, e como $|w| = |z|$ podemos afirmar que $z = w \times i$



Resposta: **Opção C**

GRUPO II

1.

1.1. Como $i^{4n+2014} = i^{4n+4\times 53+2} = i^{4(n+53)+2} = i^2 = -1$, temos que $z_1 = 2 + \sqrt{3}i + (-1) = 1 + \sqrt{3}i$

Escrevendo z_1 na f.t. temos $z_1 = \rho \operatorname{cis} \theta$, onde:

- $\rho = |z_1| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\text{tg}\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ como $\text{sen}\,\theta > 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \frac{\pi}{3}$

Assim $z_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$, e como $\sqrt[3]{z} = z_1$, recorrendo à fórmula de Moivre para a potência, temos que:

$z = (z_1)^3 = \left(2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}\right)^3 = 2^3 \operatorname{cis} \left(3 \times \frac{\pi}{3}\right) = 8 \operatorname{cis} \pi = -8$

1.2. **A opção (I) não representa a região** definida pela condição porque não satisfaz a condição $\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq 2\pi$.
Os números complexos que verificam esta condição têm as respetivas representações geométricas nos 2º, 3º e 4º quadrantes, ao contrário dos pontos assinalados na opção (I).

A opção (II) não representa a região definida pela condição porque não satisfaz a condição $|z| \geq |z - z_2|$.
Os números complexos que satisfazem esta condição têm as repetivas representações geométricas no semiplano delimitado pela bissetriz do segmento de reta $[OC]$ e que contém o ponto C, ou seja os pontos cuja distância à origem é não inferior à distância ao ponto C. Os pontos assinalados na opção (II) estão mais perto da origem do que do ponto C.

A opção (III) não representa a região definida pela condição porque não satisfaz a condição $|z - z_2| \leq 1$.
Os números complexos que verificam esta condição têm as respetivas representações geométricas no interior da circunferência de raio 1 e centro em C, e alguns pontos assinalados na opção (III) estão no exterior desta circunferência (pertencem ao interior da circunferência com o mesmo raio, mas centrada na origem).

Logo **a opção correta é a opção (IV)**.

2. Temos que:

$$\begin{aligned}
P\left(\overline{A \cap B}|B\right) &= \frac{P\left(\left(\overline{A \cap B}\right) \cap B\right)}{P(B)} && \text{Definição: } P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} \\
&= \frac{P\left(\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cap B\right)}{P(B)} && \text{Leis de De Morgan: } \overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y} \\
&= \frac{P\left(\left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(\overline{B} \cap B\right)\right)}{P(B)} && \\
&= \frac{P\left(\overline{A} \cap B\right)}{P(B)} && \overline{B} \cap B = \emptyset \text{ e } X \cup \emptyset = X \\
&= P(\overline{A}|B) && \text{Definição: } P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}
\end{aligned}$$

Logo, se $P(B) \neq 0$ então $P\left(\overline{A \cap B}|B\right) = P(\overline{A}|B)$ *q.e.d.*

3.

3.1. Se considerarmos o bloco das três cartas como um elemento único, temos um conjunto de 11 elementos (o bloco das 3 figuras e as restantes 10 cartas) para serem dispostos em 11 posições, ou seja, ${}^{11}A_{11} = P_{11} = 11!$ disposições diferentes.
Por cada uma das disposições anteriores, temos que considerar, adicionalmente, as trocas possíveis das 3 figuras no bloco das 3 cartas, ou seja, ${}^{3}A_{3} = P_3 = 3!$ trocas possíveis.

Assim, o número de sequências diferentes que é possível construir, de modo que as três figuras fiquem juntas é

$$11! \times 3! = 239\,500\,800$$

3.2. Ao retirar 4 cartas de um conjunto de 13, podemos obter ${}^{13}C_4$ conjuntos diferentes de 4 cartas (entendendo a extração simultânea, e por isso, considerando irrelevante a ordem), ou seja, ${}^{13}C_4$ é o número de casos possíveis.
Como, obter pelo menos duas figuras, significa, obter 2 figuras ou obter 3 figuras, podemos calcular o número de casos favoráveis, como a soma dos números de casos relativos a duas situações distintas:

- Retirar 3 figuras e uma das outras cartas.
  Nesta situação, existem ${}^{3}C_3 \times {}^{10}C_1 = 1 \times 10 = 10$ conjuntos diferentes.
- Retirar duas figuras e duas das outras cartas.
  Nesta situação, existem ${}^{3}C_2 \times {}^{10}C_2$ conjuntos diferentes, correspondentes a selecionar as 2 figuras de entre as 3 existentes e 2 das restantes 10 cartas.

Assim, a probabilidade de, ao retirar, ao acaso, 4 das 13 cartas do naipe de copas, obter pelo menos duas figuras, é

$$\frac{10 + {}^{3}C_2 \times {}^{10}C_2}{{}^{13}C_4} = \frac{29}{143}$$

4. Como a máquina agrícola funcionou durante 20 minutos e, nesse período de tempo, consumiu 2 litros de combustível, logo a quantidade de combustível que existia no depósito no momento inicial era a quantidade medida ao fim de 20 minutos acrescida dos 2 litros consumidos, ou seja,

$$Q(0) = Q(20) + 2 \Leftrightarrow Q(0) - Q(20) = 2$$

Logo, determinando o valor de k, temos que

$$Q(0) - Q(20) = 2 \Leftrightarrow 12 + \log_3(81 - k \times 0^2) - \left(12 + \log_3(81 - k \times 20^2)\right) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12 + \log_3(81 - 0) - 12 - \log_3(81 - 400k) = 2 \Leftrightarrow \log_3(81) - \log_3(81 - 400k) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 - \log_3(81 - 400k) = 2 \Leftrightarrow -\log_3(81 - 400k) = 2 - 4 \Leftrightarrow \log_3(81 - 400k) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^2 = 81 - 400k \Leftrightarrow 400k = 81 - 3^2 \Leftrightarrow k = \frac{72}{400} \Leftrightarrow k = \frac{9}{50}$$

5.

5.1. Sabendo que f é contínua em $x = -1$, temos que $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$

Calculando $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ vem:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \left(\frac{x+1}{1 - e^{x+1}} + 1\right) = \frac{-1+1}{1 - e^{-1+1}} + 1 = \frac{0}{0} + 1 \text{ (Indeterminação)}$$

(fazendo $y = x + 1$, temos que se $x \to -1$, então $y \to 0$)

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \left(\frac{x+1}{1 - e^{x+1}}\right) + \lim_{x \to -1} 1 = \lim_{y \to 0} \left(\frac{y}{1 - e^{y}}\right) + 1 = \lim_{y \to 0} \left(\frac{1}{\frac{1 - e^{y}}{y}}\right) + 1 =$$

$$= \frac{\lim\limits_{y \to 0} 1}{\lim\limits_{y \to 0} \frac{-(-1 + e^{y})}{y}} + 1 = \frac{1}{-\underbrace{\lim\limits_{y \to 0} \frac{e^{y} - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} + 1 = \frac{1}{-1} + 1 = -1 + 1 = 0$$

Assim, como $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$ e $f(-1) = a + 2$, podemos determinar o valor de a:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$$

5.2. Começamos por determinar a expressão da derivada para $x \neq -1$:

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{1-e^{x+1}} + 1\right)' = \left(\frac{x+1}{1-e^{x+1}}\right)' + (1)' = \frac{(x+1)'(1-e^{x+1}) - (x+1)(1-e^{x+1})'}{(1-e^{x+1})^2} + 0 =$$

$$= \frac{1 \times (1-e^{x+1}) - (x+1)\big((1)' - (x+1)'e^{x+1}\big)}{(1-e^{x+1})^2} = \frac{1 - e^{x+1} - (x+1)\big(0 - 1 \times e^{x+1}\big)}{(1-e^{x+1})^2} =$$

$$= \frac{1 - e^{x+1} - (x+1)\big(-e^{x+1}\big)}{(1-e^{x+1})^2} = \frac{1 - e^{x+1} - \big(-xe^{x+1} - e^{x+1}\big)}{(1-e^{x+1})^2} =$$

$$= \frac{1 - e^{x+1} + xe^{x+1} + e^{x+1}}{(1-e^{x+1})^2} = \frac{1 + xe^{x+1}}{(1-e^{x+1})^2}$$

Como a função f' resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}$, é uma função contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, e, por isso, também é contínua em [0,1].

Como $\frac{1}{4} = 0{,}25$, temos que $0{,}21 < \frac{1}{4} < 0{,}34$, ou seja, $f'(1) < \frac{1}{4} < f'(0)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]0{,}1[$ tal que $f'(c) = \frac{1}{4}$, ou seja, que a equação $f'(x) = \frac{1}{4}$ tem, pelo menos, uma solução em $]0{,}1[$.

C.A.

$$f'(0) = \frac{1 + 0 \times e^{0+1}}{(1-e^{0+1})^2} = \frac{1+0}{(1-e^1)^2} = \frac{1}{(1-e)^2} \approx 0{,}34$$

$$f'(1) = \frac{1 + 1 \times e^{1+1}}{(1-e^{1+1})^2} = \frac{1+e^2}{(1-e^2)^2} = \frac{1}{(1-e)^2} \approx 0{,}21$$

6.

6.1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{f(x) - \pi} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\pi - 4\operatorname{sen}(5x) - \pi} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{-4\operatorname{sen}(5x)} = -\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \frac{x}{\operatorname{sen}(5x)}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen}(5x)} = -\frac{1}{4} \times 1 \times \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\operatorname{sen}(5x)}{x}} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(5x)}{x}} =$$

(fazendo $y = 5x$ temos que $x = \frac{y}{5}$, e se $x \to 0$, então $y \to 0$)

$$= -\frac{1}{4} \times \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(y)}{\frac{y}{5}}} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{5\operatorname{sen}(y)}{y}} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{5\operatorname{sen}(y)}{y}} =$$

$$= -\frac{1}{4} \times \frac{1}{5\underbrace{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(y)}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{5 \times 1} = -\frac{1}{20}$$

6.2. Para estudar o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$g''(x) = \big(g'(x)\big)' = \left(\log_2\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)\right)' = \frac{\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)'}{\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)\ln 2} = \frac{-\left(\frac{\pi}{6}\right)' - (x)'}{\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)\ln 2} = \frac{-1}{\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)\ln 2}$$

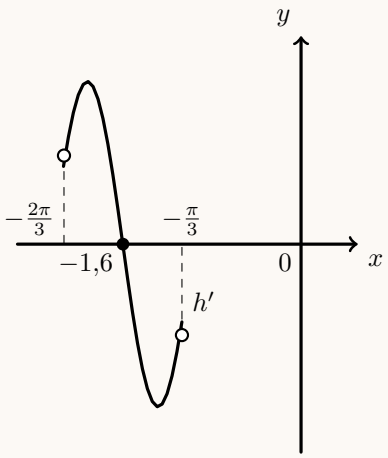
Assim temos que a equação $g''(x) = 0$ é impossível, pelo que o gráfico da função g **não tem qualquer ponto de inflexão**.
Relativamente ao sentido das concavidades do gráficos, temos que, no intervalo em qua a função está definida, $-\frac{\pi}{6} - x > 0$, pelo que também $\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)\ln 2 > 0$
Assim, o quociente $\frac{-1}{\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)\ln 2}$ toma sempre valores negativos no domínio da função, isto é, $g''(x) < 0\,,\ \forall x \in \left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$, ou seja, o gráfico de g **tem a concavidade voltada para baixo** em todo o domínio.

7. Sabemos que o declive da reta tangente ao gráfico de h, no ponto A, é zero, porque a tangente é paralela ao eixo Ox.

Por outro lado o declive (m) da reta tangente em qualquer ponto é
$m = h'(x)$, e $h'(x) = (f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$, pelo que é necessário determinar a derivada de f:

$$f'(x) = (\pi - 4\operatorname{sen}(5x))' = (\pi)' - (4\operatorname{sen}(5x))' = 0 - 4 \times 5\cos(5x) = -20\cos(5x)$$

Assim, como $m = h'(x)$ e $m = 0$, temos que a abcissa do ponto A é a solução da equação:
$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - g'(x) = 0 \Leftrightarrow -20\cos(5x) - \log_2\left(-\frac{\pi}{6} - x\right) = 0$
Logo, podemos traçar na calculadora o gráfico da função h', numa janela compatível com o domínio (ou seja o domínio de g'), que se reproduz na figura ao lado.



Recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados dos zeros de uma função, podemos determinar o valor (aproximado às décimas) do único zero da função, que coincide com a abcissa do ponto A:

$$x \approx -1{,}6$$

2012

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de março

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/1.ª Fase 8 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2012

VERSÃO 1

Na folha de respostas, indique de forma legível a versão da prova (Versão 1 ou Versão 2). A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens do Grupo I.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respetivas respostas.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 2, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: $\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \ \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \ \text{e} \ n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\ e^u$

$(a^u)' = u'\ a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega \text{ e } B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- A e B são acontecimentos independentes;
- $P(\overline{A}) = \frac{7}{10}$
- $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$

Qual é o valor de $P(B)$?

(A) $\frac{5}{14}$ **(B)** $\frac{9}{14}$ **(C)** $\frac{9}{20}$ **(D)** $\frac{11}{20}$

2. Para assistirem a um espetáculo, o João, a Margarida e cinco amigos sentam-se, ao acaso, numa fila com sete lugares.

Qual é a probabilidade de o João e a Margarida não ficarem sentados um ao lado do outro?

(A) $\frac{2 \times 5!}{7!}$ **(B)** $\frac{5!}{7!}$ **(C)** $\frac{2}{7}$ **(D)** $\frac{5}{7}$

3. Numa caixa com 12 compartimentos, pretende-se arrumar 10 copos, com tamanho e forma iguais: sete brancos, um verde, um azul e um roxo. Em cada compartimento pode ser arrumado apenas um copo.

De quantas maneiras diferentes se podem arrumar os 10 copos nessa caixa?

(A) ${}^{12}A_7 \times 3!$ **(B)** ${}^{12}A_7 \times {}^{5}C_3$ **(C)** ${}^{12}C_7 \times {}^{5}A_3$ **(D)** ${}^{12}C_7 \times {}^{12}A_3$

4. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x - 3$

Em qual dos intervalos seguintes o teorema de Bolzano permite afirmar que a equação $f(x) = -x - \frac{3}{2}$ tem, pelo menos, uma solução?

(A) $\left]0, \frac{1}{5}\right[$ **(B)** $\left]\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right[$ **(C)** $\left]\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right[$ **(D)** $\left]\frac{1}{3}, 1\right[$

5. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função g, de domínio $[a, +\infty[$, com $a < -\frac{1}{3}$

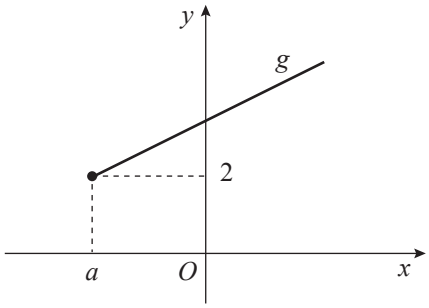


Figura 1

Para esse valor de a, a função f, contínua em $\mathbb{R}$, é definida por $f(x) = \begin{cases} \log_3\left(-x - \frac{1}{3}\right) & \text{se } x < a \\ g(x) & \text{se } x \geq a \end{cases}$

Qual é o valor de a?

(A) $-\frac{28}{3}$ **(B)** $-\frac{25}{3}$ **(C)** $-\frac{19}{3}$ **(D)** $-\frac{8}{3}$

6. Na Figura 2, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$

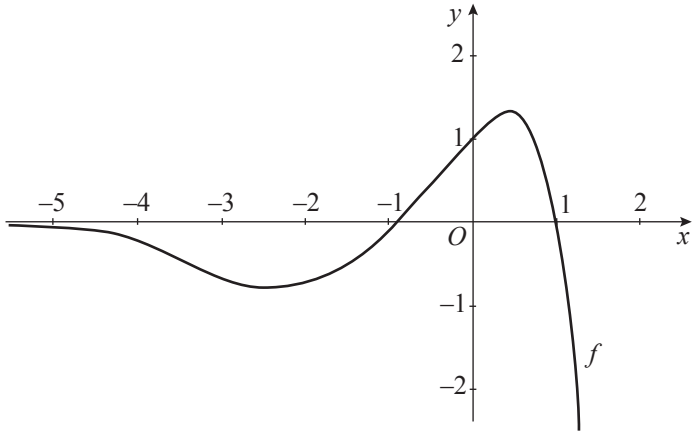


Figura 2

Sejam f' e f'', de domínio $\mathbb{R}$, a primeira derivada e a segunda derivada de f, respetivamente.

Qual dos valores seguintes pode ser positivo?

(A) $f'(1)$ **(B)** $f'(-3)$ **(C)** $f''(-3)$ **(D)** $f''(1)$

7. Na Figura 3, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de cinco números complexos: w, z_1, z_2, z_3 e z_4

Qual é o número complexo que pode ser igual a $\frac{w}{3i}$?

(A) z_1

(B) z_2

(C) z_3

(D) z_4

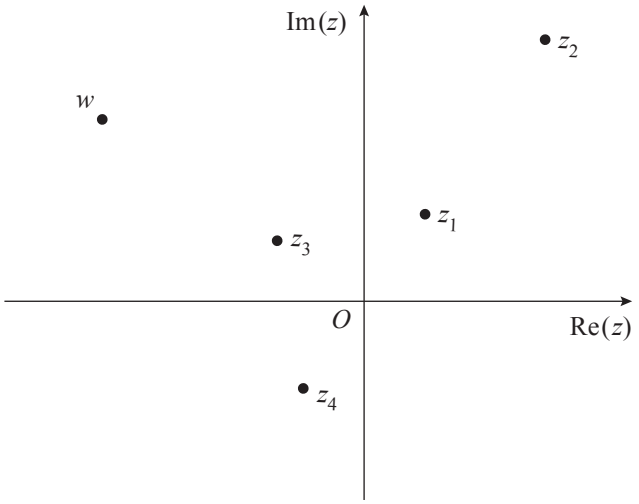


Figura 3

8. Na Figura 4, está representada, a sombreado, no plano complexo, parte de uma coroa circular.

Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- o ponto Q é a imagem geométrica do complexo $-1+i$
- a reta PQ é paralela ao eixo real;
- as circunferências têm centro na origem;
- os raios das circunferências são iguais a 3 e a 6

Considere como $\arg(z)$ a determinação que pertence ao intervalo $[-\pi, \pi[$

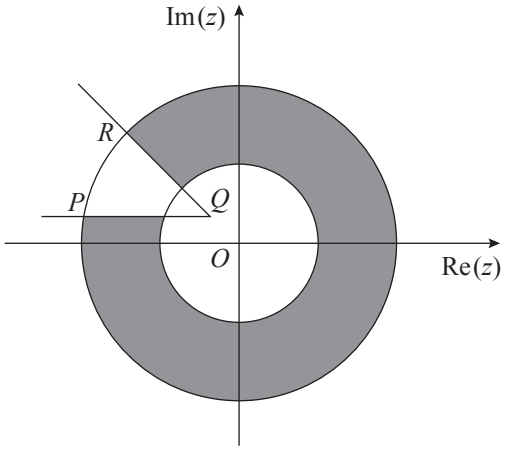


Figura 4

Qual das condições seguintes pode definir, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a região a sombreado, incluindo a fronteira?

(A) $3 \leq |z| \leq 6 \ \wedge \ -\pi \leq \arg(z-1+i) \leq \frac{3\pi}{4}$

(B) $9 \leq |z| \leq 36 \ \wedge \ -\pi \leq \arg(z+1-i) \leq \frac{3\pi}{4}$

(C) $3 \leq |z| \leq 6 \ \wedge \ -\pi \leq \arg(z+1-i) \leq \frac{3\pi}{4}$

(D) $9 \leq |z| \leq 36 \ \wedge \ -\pi \leq \arg(z-1+i) \leq \frac{3\pi}{4}$

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = (-2+i)^3$ e $z_2 = \frac{1+28i}{2+i}$

1.1. Resolva a equação $z^3 + z_1 = z_2$, sem recorrer à calculadora.

Apresente as soluções da equação na forma trigonométrica.

1.2. Seja w um número complexo não nulo.

Mostre que, se w e $\frac{1}{w}$ são raízes de índice n de um mesmo número complexo z, então $z = 1$ ou $z = -1$

2. Numa escola, realizou-se um estudo sobre os hábitos alimentares dos alunos. No âmbito desse estudo, analisou-se o peso de todos os alunos.

Sabe-se que:

- 55% dos alunos são raparigas;
- 30% das raparigas têm excesso de peso;
- 40% dos rapazes não têm excesso de peso.

2.1. Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa escola.

Determine a probabilidade de o aluno escolhido ser rapaz, sabendo que tem excesso de peso.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2.2. Considere agora que a escola onde o estudo foi realizado tem 200 alunos.

Pretende-se escolher, ao acaso, três alunos para representarem a escola num concurso.

Determine a probabilidade de serem escolhidos duas raparigas e um rapaz.

Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

3. Num saco estão cinco bolas, indistinguíveis ao tato, cada uma delas numerada com um número diferente: $-2, -1, 0, 1$ e 2

Extraem-se, ao acaso e em simultâneo, quatro bolas do saco.

Seja X a variável aleatória «produto dos números inscritos nas bolas extraídas».

A tabela de distribuição de probabilidades da variável X é a seguinte.

x_i	0	4
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

Elabore uma composição na qual:

- explique os valores da variável X
- justifique cada uma das probabilidades.

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, e a função g, de domínio $]0,+\infty[$, definidas por

$$f(x)=e^{x-2}-\frac{4e^{-x}+4}{e^2} \qquad \text{e} \qquad g(x)=-\ln(x)+4$$

4.1. Mostre que $\ln(2+2\sqrt{2})$ é o único zero da função f, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

4.2. Considere, num referencial o. n. xOy, os gráficos das funções f e g e o triângulo $[OAB]$

Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- A e B são pontos do gráfico de f
- a abcissa do ponto A é o zero da função f
- o ponto B é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o gráfico da função g

Determine a área do triângulo $[OAB]$, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir os gráficos das funções f e g, devidamente identificados, incluindo o referencial;
- assinalar os pontos A e B
- indicar a abcissa do ponto A e as coordenadas do ponto B com arredondamento às centésimas;
- apresentar o valor da área pedida com arredondamento às décimas.

5. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} x\ln(x+1)-x\ln(x)+3x & \text{se } x>0 \\ x\,e^{1-x} & \text{se } x\leq 0 \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

5.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas não verticais do seu gráfico.

5.2. Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $x=-1$

6. Na Figura 5, está representado um trapézio retângulo $[ABCD]$

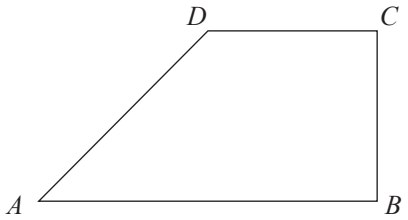


Figura 5

Sabe-se que:

- $\overline{BC} = 1$
- $\overline{CD} = 1$
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo ADC
- $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

6.1. Mostre que o perímetro do trapézio $[ABCD]$ é dado, em função de α, por $P(\alpha) = 3 + \frac{1 - \cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$

6.2. Para um certo número real θ, tem-se que $tg\theta = -\sqrt{8}$, com $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

Determine o valor exato de $P'(\theta)$

Comece por mostrar que $P'(\alpha) = \frac{1 - \cos\alpha}{\text{sen}^2\alpha}$

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** ..... (8 × 5 pontos)	40 pontos
	40 pontos

GRUPO II

1.	
1.1.	15 pontos
1.2.	15 pontos
2.	
2.1.	15 pontos
2.2.	10 pontos
3.	15 pontos
4.	
4.1.	15 pontos
4.2.	15 pontos
5.	
5.1.	15 pontos
5.2.	15 pontos
6.	
6.1.	15 pontos
6.2.	15 pontos
	160 pontos
TOTAL	**200 pontos**

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de março

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/1.ª Fase

Critérios de Classificação 10 Páginas

2012

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** ..... (8 × 5 pontos) ..... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1.

1.1. ..... 15 pontos
1.2. ..... 15 pontos

2.

2.1. ..... 15 pontos
2.2. ..... 10 pontos

3. ..... 15 pontos

4.

4.1. ..... 15 pontos
4.2. ..... 15 pontos

5.

5.1. ..... 15 pontos
5.2. ..... 15 pontos

6.

6.1. ..... 15 pontos
6.2. ..... 15 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

A classificação da prova deve respeitar integralmente os critérios gerais e os critérios específicos a seguir apresentados.

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos de classificação apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro, previsto na grelha de classificação.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos. No entanto, em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se o examinando responder a um mesmo item mais do que uma vez, não eliminando inequivocamente a(s) resposta(s) que não deseja que seja(m) classificada(s), deve ser considerada apenas a resposta que surgir em primeiro lugar.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova (Versão 1 ou Versão 2) implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de seleção (escolha múltipla).

Nos itens de seleção (escolha múltipla), a cotação total do item é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a única opção correta.

São classificadas com zero pontos as respostas em que seja assinalada:

– uma opção incorreta;

– mais do que uma opção.

Não há lugar a classificações intermédias.

Os critérios de classificação das respostas aos itens de construção apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

Nos itens de construção com cotação igual ou superior a quinze pontos e que impliquem a produção de um texto, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea das competências específicas da disciplina e das competências de comunicação escrita em língua portuguesa. A avaliação das competências de comunicação escrita em língua portuguesa contribui para valorizar a classificação atribuída ao desempenho no domínio das competências específicas da disciplina. Esta valorização corresponde a cerca de 10% da cotação do item e faz-se de acordo com os níveis de desempenho a seguir descritos.

Níveis	Descritores
3	Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
2	Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
1	Composição sem estruturação aparente, com erros graves de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é zero pontos. Neste caso, não é classificado o desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

Até ao ano letivo 2013/2014, na classificação das provas, continuarão a ser consideradas corretas as grafias que seguirem o que se encontra previsto quer no Acordo de 1945, quer no Acordo de 1990 (atualmente em vigor), mesmo quando se utilizem as duas grafias numa mesma prova.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar em situações não descritas anteriormente.

Situação	Classificação
1. Classificação da resposta a um item cujo critério se apresenta organizado por etapas.	A pontuação indicada para cada etapa é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A classificação da resposta resulta da soma das pontuações das diferentes etapas, à qual se subtrai, eventualmente, um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 13 e/ou 18.
2. Pontuação de uma etapa dividida em passos.	A pontuação indicada para cada passo é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A pontuação da etapa resulta da soma das pontuações dos diferentes passos.
3. Classificação da resposta a um item ou pontuação de uma etapa cujo critério se apresenta organizado por níveis de desempenho.	A resposta é enquadrada numa das descrições apresentadas. À classificação/pontuação correspondente subtrai-se, eventualmente, um ou dois pontos, se ocorrer um erro ocasional num cálculo, e/ou se se utilizar simbologia ou expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.
4. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite e classificado qualquer processo de resolução cientificamente correto. O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante distribuição da cotação do item pelas etapas* percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.
5. Apresentação apenas do resultado final, se a resolução do item exige cálculos e/ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
6. Utilização de processos de resolução que não respeitam as instruções dadas [exemplo: «usando métodos analíticos»].	A etapa em que a instrução não é respeitada é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
7. Ausência de apresentação dos cálculos e/ou das justificações necessárias à resolução de uma etapa*.	A etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
8. Ausência de apresentação explícita de uma dada etapa que não envolva cálculos e/ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, a mesma é pontuada com a pontuação total para ela prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.

* Em situações em que o critério é aplicável tanto a **etapas** como a **passos**, utiliza-se apenas o termo «etapas» por razões de simplificação da apresentação.

Situação	Classificação
9. Transposição incorreta de dados do enunciado e/ou transposição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se o grau de dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.
10. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre.
11. Ocorrência de um erro ocasional que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.	A pontuação máxima a atribuir nessa etapa deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.
12. Ocorrência de um erro ocasional na resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada de acordo com o erro cometido. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido: – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.
13. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à classificação da resposta, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
14. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
15. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final [exemplo: «15» em vez de «15 metros»].	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação para ela prevista.
16. Apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
17. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, e/ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à classificação da resposta, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. ..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

As respostas corretas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	B	D	C	B	A	C	A	C
Versão 2	C	B	D	B	C	A	D	A

GRUPO II

É de aceitar qualquer processo de resolução cientificamente correto, ainda que não esteja previsto nestes critérios específicos, nem no Programa (ver n.º 4 dos Critérios Gerais de Classificação).

1.1. ..... **15 pontos**

Determinar z_1 na forma algébrica (**ver nota**) ..... 3 pontos

- Escrever $z_1 = (-2+i)^2 \times (-2+i)$ ..... 1 ponto
- Obter $(-2+i)^2$ ..... 1 ponto
- Obter z_1 na forma algébrica ..... 1 ponto

Determinar z_2 na forma algébrica (**ver nota**) ..... 3 pontos

- Indicar a multiplicação de ambos os termos da fração pelo conjugado do denominador ..... 1 ponto
- Efetuar a multiplicação no numerador ..... 1 ponto
- Efetuar a multiplicação no denominador ..... 1 ponto

Obter $z^3 = 8$ ..... 2 pontos

Obter $z = \sqrt[3]{8}$ ..... 1 ponto

Escrever $z = \sqrt[3]{8 \operatorname{cis} 0}$ ..... 1 ponto

Escrever $z = 2 \operatorname{cis} \frac{2k\pi}{3},\ k \in \{0, 1, 2\}$ ..... 2 pontos

Obter $z = 2 \operatorname{cis} 0$ ..... 1 ponto

Obter $z = 2 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$ ..... 1 ponto

Obter $z = 2 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}$ ..... 1 ponto

Nota – Se o examinando determinar o complexo na forma algébrica utilizando processos de resolução que não respeitam a instrução dada, a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos e a pontuação das etapas subsequentes não deve ser desvalorizada.

1.2. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $w^n = \left(\frac{1}{w}\right)^n$ (ou equivalente) ..... 5 pontos

Resolver a equação $w^n = \left(\frac{1}{w}\right)^n$ ..... 10 pontos

- Obter $w^{2n} = 1$ ..... 2 pontos
- Referir que $w^n = z$ ..... 2 pontos
- Referir que $w^{2n} = z^2$ (ou equivalente) ..... 2 pontos
- Escrever $z^2 = 1$ ..... 2 pontos
- Obter $z = 1$ ou $z = -1$ ..... 2 pontos

2.º Processo

Considerar $w = \rho \operatorname{cis}\theta$

Referir que $z = w^n$ ..... 2 pontos

Escrever $w^n = \left(\frac{1}{w}\right)^n$ (ou equivalente) ..... 5 pontos

Resolver a equação $w^n = \left(\frac{1}{w}\right)^n$ ..... 5 pontos

- Escrever $w^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ..... 1 ponto
- Escrever $\left(\frac{1}{w}\right)^n = \left(\frac{1}{\rho}\right)^n \operatorname{cis}(-n\theta)$ ..... 2 pontos
- Obter $\rho^{2n} = 1$ ..... 1 ponto
- Obter $n\theta = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ..... 1 ponto

Obter $z = 1 \operatorname{cis} k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ..... 1 ponto

Obter $z = 1$ ou $z = -1$ ..... 2 pontos

2.1. ..... **15 pontos**

Seja A o acontecimento «o aluno ser rapariga», e seja B o acontecimento «o aluno ter excesso de peso».

Podem ser admitidas outras designações para os acontecimentos.

Calcular $P(A \cap B)$ ..... 4 pontos

- Escrever $P(A) = 0{,}55$ ..... 1 ponto
- Escrever $P(B \mid A) = 0{,}3$ ..... 2 pontos
- Obter $P(A \cap B)$ ..... 1 ponto

Calcular $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ ..... 4 pontos

- Escrever $P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 0{,}4$ ..... 2 pontos
- Obter $P(\overline{A})$ ..... 1 ponto
- Obter $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ ..... 1 ponto

Calcular $P(\overline{A} \cap B)$ ..... 2 pontos

Calcular $P(B)$ ..... 2 pontos

Identificar o pedido com $P(\overline{A} \mid B)$ ..... 1 ponto

Escrever $P(\overline{A} \mid B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)}$ (ou equivalente) ..... 1 ponto

Obter $P(\overline{A} \mid B)$ ..... 1 ponto

2.2. ..... **10 pontos**

Escrever a expressão que dá o valor pedido (**ver nota 1**) ..... 8 pontos

Calcular o valor pedido (**ver nota 2**) ..... 2 pontos

Notas:

1. Esta etapa deve ser classificada de acordo com os seguintes níveis de desempenho.

$\frac{^{110}C_2 \times 90}{^{200}C_3}$ (ou equivalente) ..... 8 pontos

$\frac{^{110}A_2 \times 90}{^{200}A_3}$ (ou equivalente) ..... 5 pontos

Outras frações próprias com denominador $^{200}C_3$ ..... 2 pontos

Outras respostas ..... 0 pontos

2. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se o resultado estiver de acordo com a expressão escrita pelo examinando e se essa expressão não tiver sido pontuada com zero pontos.

3. ..... **15 pontos**

A composição deve contemplar os pontos seguintes.

A) uma explicação para $X = 0$
B) uma explicação para $X = 4$
C) uma justificação para $P(X = 0)$
D) uma justificação para $P(X = 4)$

Na tabela seguinte, indica-se como deve ser classificada a resposta a este item, de acordo com os níveis de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa e com os níveis de desempenho no domínio específico da disciplina.

Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina \ Descritores do nível de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa			Níveis*		
			1	**2**	**3**
Níveis	**4**	A composição contempla corretamente os quatro pontos.	13	14	15
	3	A composição contempla corretamente apenas três dos quatro pontos.	10	11	12
	2	A composição contempla corretamente apenas dois dos quatro pontos.	7	8	9
	1	A composição contempla corretamente apenas um dos quatro pontos.	4	5	6

***** Descritores apresentados nos Critérios Gerais de Classificação.

4.1. ..... **15 pontos**

Escrever $f(x) = 0$ ..... 1 ponto

Resolver a equação $f(x) = 0$ ..... 14 pontos

Obter $e^x - 4e^{-x} - 4 = 0$ ..... 4 pontos

Obter $(e^x)^2 - 4e^x - 4 = 0$ ..... 3 pontos

Concluir que $e^x = 2 \pm 2\sqrt{2}$ (**ver nota**) ..... 3 pontos

Reconhecer que $e^x = 2 - 2\sqrt{2}$ é uma equação impossível..... 2 pontos

Obter $x = \ln(2 + 2\sqrt{2})$ ..... 2 pontos

Nota – Se o examinando utilizar a calculadora para determinar a solução da equação do 2.º grau, a pontuação a atribuir nesta etapa não deve ser desvalorizada.

4.2. ..... **15 pontos**

Reproduzir os gráficos visualizados na calculadora (**ver notas 1** e **2**) ..... 4 pontos

Reproduzir o gráfico de f ..... 2 pontos

Reproduzir o gráfico de g ..... 2 pontos

Assinalar os pontos A e B ..... (1 + 1) ..... 2 pontos

Indicar a abcissa do ponto A ..... 1 ponto

Indicar as coordenadas do ponto B ..... 2 pontos

Identificar a base do triângulo $[OAB]$ ..... 1 ponto

Identificar a altura do triângulo $[OAB]$ ..... 2 pontos

Calcular a área do triângulo $[OAB]$ ..... 3 pontos

Notas:

1. Se o examinando não apresentar o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

2. Se o examinando apresentar um gráfico que não respeite o domínio da função, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

5.1. ..... **15 pontos**

Estudar a existência de assíntotas não verticais do gráfico da função f quando $x \to -\infty$ ..... 3 pontos

Calcular $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ ..... 2 pontos

Concluir que o gráfico de f não tem assíntota não vertical quando $x \to -\infty$ ..... 1 ponto

Estudar a existência de assíntotas não verticais do gráfico da função f quando $x \to +\infty$ ..... 12 pontos

Determinar $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ..... 5 pontos

Escrever $\lim_{x \to +\infty} \left(\ln(x+1) - \ln(x) + 3\right)$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim_{x \to +\infty} \left(\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + 3\right)$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim_{x \to +\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + 3\right)$ ..... 1 ponto

Obter o valor de $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ..... 2 pontos

Determinar $\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx\right)$ ..... 6 pontos

Escrever $\lim_{x \to +\infty} \left(x \ln(x+1) - x \ln(x)\right)$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim_{x \to +\infty} \left(x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right)$ ..... 1 ponto

Levantar a indeterminação ..... 3 pontos

Escrever

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{y}$$

(ou equivalente) (**ver nota**) ..... 2 pontos

Referir o limite notável $\lim_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{y}$ 1 ponto

Obter o valor de $b = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx\right)$ ..... 1 ponto

Concluir que o gráfico de f tem uma assíntota não vertical quando $x \to +\infty$ ..... 1 ponto

Nota – Se o examinando referir que $x \to +\infty$ é equivalente a $\frac{1}{x} \to 0$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

5.2. ..... **15 pontos**

Determinar f' ..... 5 pontos

Escrever $(x\,e^{1-x})' = x'\,e^{1-x} + x(e^{1-x})'$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Obter f' ..... 3 pontos

Identificar o declive da reta tangente com $f'(-1)$ ..... 3 pontos

Calcular $f'(-1)$ ..... 2 pontos

Calcular $f(-1)$ ..... 2 pontos

Escrever a equação reduzida da reta pedida ..... 3 pontos

6.1. ..... **15 pontos**

Referir que o perímetro do trapézio $[ABCD]$ é igual a $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD}$ (ou equivalente) ..... 1 ponto

Escrever $\overline{AB} = 1 + \overline{AD_1}$, sendo D_1 a projeção ortogonal de D sobre AB (ou equivalente) ..... 2 pontos

Determinar $\overline{AD_1}$ ..... 5 pontos

Escrever $\overline{AD_1} = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ ..... 2 pontos

Obter $\overline{AD_1} = -\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

Determinar $\overline{AD}$ ..... 4 pontos

Escrever $\overline{AD} = \frac{1}{\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$ ..... 2 pontos

Obter $\overline{AD} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$ ..... 2 pontos

Concluir o pretendido ..... 3 pontos

6.2. ..... **15 pontos**

Determinar P' ..... 7 pontos

Escrever $\left(3 + \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right)'$ ..... 1 ponto

Escrever $\left(3 + \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right)' = \frac{(1-\cos\alpha)'\operatorname{sen}\alpha - (1-\cos\alpha)(\operatorname{sen}\alpha)'}{\operatorname{sen}^2\alpha}$ 2 pontos

Determinar $(1-\cos\alpha)'$ ..... 1 ponto

Determinar $(\operatorname{sen}\alpha)'$ ..... 1 ponto

Substituir $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha$ por 1 ..... 1 ponto

Obter $P'(\alpha)$ ..... 1 ponto

Determinar $P'(\theta)$ ..... 8 pontos

Determinar $\cos\theta$ ..... 3 pontos

Determinar $\operatorname{sen}\theta$ ..... 3 pontos

Calcular o valor exato de $P'(\theta)$ ..... 2 pontos

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO 2012

- 1.ª FASE -

DOCUMENTO GAVE

DISCIPLINA: MATEMÁTICA A _ PROVA 635

Grupo II

Item 1.1. (15 pontos)

Situação 1: O examinando determina z_1 e z_2 na forma algébrica, obtém uma equação da forma $z^3 = a + bi$, com $a+bi \neq 8$, obtém $z = \sqrt[3]{a+bi}$ e utiliza um valor aproximado para um argumento de $a+bi$

Classificação proposta: 3+3+0+1+0+0+0+0+0

Item 2.1. (15 pontos)

Situação 1: O examinando apresenta corretamente um diagrama em árvore, identifica o pedido com $P(\overline{A} \mid B)$, escreve $P(\overline{A} \mid B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)}$ (ou equivalente) e obtém $P(\overline{A} \mid B)$

Classificação proposta: 15 (CG4)

Adaptação do critério específico:

Escrever $P(A) = 0{,}55$ ..... 1 ponto
Escrever $P(B \mid A) = 0{,}3$ ..... 2 pontos
Obter $P(A \cap B)$ ..... 1 ponto
Obter $P(\overline{A})$ ..... 1 ponto
Escrever $P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 0{,}4$ ..... 2 pontos
Obter $P(B \mid \overline{A})$ ..... 1 ponto
Obter $P(\overline{A} \cap B)$ ..... 2 pontos
Calcular $P(B)$ ..... 2 pontos
Identificar o pedido com $P(\overline{A} \mid B)$ ..... 1 ponto
Escrever $P(\overline{A} \mid B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)}$ (ou equivalente) ..... 1 ponto
Obter $P(\overline{A} \mid B)$ ..... 1 ponto

Situação 2: O examinando apresenta uma tabela, considera $P(A \cap B) = 0{,}3$ e $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}4$, e identifica o pedido com $P(\overline{A} \mid B)$, escreve $P(\overline{A} \mid B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)}$ (ou equivalente) e obtém $P(\overline{A} \mid B)$

Classificação proposta: 1(1+0+0)+1(0+1+0)+2+2+1+1+1

Situação 3: O examinando escreve $P(\overline{A} \mid B) = \dfrac{0{,}45 \times 0{,}6}{0{,}45 \times 0{,}6 + 0{,}55 \times 0{,}3} = \dfrac{18}{29}$

Classificação proposta: 15

Item 2.2. (10 pontos)

Situação 1: O examinando utiliza o modelo binomial sem qualquer justificação.

Classificação proposta: 0

Situação 2: O examinando utiliza o modelo binomial e justifica que é válido pois o tamanho da população (200) é bem maior que o tamanho da amostra (3).

Classificação proposta: 10 (CG4)

Item 4.1. (15 pontos)

Situação 1: O examinando escreve $f\left(\ln\left(2+2\sqrt{2}\right)\right)=0$, calcula $f\left(\ln\left(2+2\sqrt{2}\right)\right)$, determina f', estuda f quanto à monotonia e conclui que o zero da função f é único.

Classificação proposta: 15 (CG4)

Adaptação do critério específico:

Escrever $f\left(\ln\left(2+2\sqrt{2}\right)\right)=0$ ..... 1 ponto
Calcular $f\left(\ln\left(2+2\sqrt{2}\right)\right)$ ..... 3 pontos
Calcular f' ..... 5 pontos
Estudar a monotonia de f ..... 3 pontos
Concluir que $\ln\left(2+2\sqrt{2}\right)$ é o único zero da função f ..... 3 pontos

Situação 2: O examinando escreve $f(x)=0$, obtém $e^x - 4e^{-x} - 4 = 0$, obtém $\left(e^x\right)^2 - 4e^x - 4 = 0$ e determina um valor aproximado da solução da equação do 2.º grau.

Classificação proposta: 1+ 7(4+3+0(CG6)+0+0)

Item 4.2. (15 pontos)

Situação 1: O examinando reproduz os gráficos visualizados na calculadora mas não os identifica, assinala os pontos A e B, indica o valor exato da abcissa do ponto A, indica as coordenadas do ponto B com arredondamento às centésimas, identifica a base e a altura do triângulo $[OAB]$ e calcula a área do triângulo $[OAB]$ com arredondamento às décimas.

Classificação proposta: 4+2+0+2+1+2+3

Item 5.1. (15 pontos)

Situação 1: O examinando apenas estuda a função f quanto à existência de assíntotas horizontais do seu gráfico, e conclui que o gráfico da função f não tem assíntotas não verticais.

Classificação proposta: 0

Item 5.2. (15 pontos)

Situação 1: O examinando determina f', identifica o declive da reta tangente com $f'(-1)$, obtém $f'(-1)$ e $f(-1)$ com valores aproximados e escreve a equação reduzida da reta pedida.

Classificação proposta: 5 + 3 + 2 + 2 + 2 (CG16)

Item 6.1. (15 pontos)

Situação 1: O examinando refere que o perímetro do trapézio $[ABCD]$ é igual a $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}$ (ou equivalente), escreve $\overline{AB}=1+\overline{AD_1}$, sendo D_1 a projeção ortogonal de D sobre AB (ou equivalente), determina $\overline{AD_1}$ e $\overline{AD}$, determina o perímetro do trapézio $[ABCD]$, considerando que α é a amplitude do ângulo DAD_1, ou considerando que α é a amplitude do ângulo ADD_1

Classificação proposta: 1 + 2 + 1 (0+1) (CG12) + 1 (0+1) (CG12) + 0

Situação 2: O examinando refere que o perímetro do trapézio $[ABCD]$ é igual a $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}$ (ou equivalente), escreve $\overline{AB}=1+\overline{AD_1}$, sendo D_1 a projeção ortogonal de D sobre AB (ou equivalente), determina $\overline{AD_1}$ e $\overline{AD}$, determina o perímetro do trapézio $[ABCD]$, considerando que $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ é a amplitude do ângulo DAD_1, ou considerando que $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ é a amplitude do ângulo ADD_1

Classificação proposta: 1 + 2 + 3 (0+3) (CG12) + 2 (0+2) (CG12) + 0

Item 6.2. (15 pontos)

Situação 1: O examinando determina P' e determina o valor exato de $P'(\theta)$, calculando $\cos\theta$, e calculando $sen^2\theta$

Classificação proposta: 15

Exame nacional de Matemática A **(2012, 1.ª fase)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Temos que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

Como A e B são independentes, então $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$, pelo que, podemos escrever que

$$P(A) + P(B) - P(A \cup B) = P(A) \times P(B) \qquad (1)$$

Como $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{10}{10} - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$, substituindo os valores conhecidos na igualdade (1), vem:

$$\frac{3}{10} + P(B) - \frac{3}{4} = \frac{3}{10} \times P(B) \Leftrightarrow \frac{6}{20} + \frac{20P(B)}{20} - \frac{15}{20} = \frac{6P(B)}{20} \Leftrightarrow 6 + 20P(B) - 15 = 6P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20P(B) - 6P(B) = 15 - 6 \Leftrightarrow 14P(B) = 9 \Leftrightarrow P(B) = \frac{9}{14}$$

Resposta: **Opção B**

2. Calculando a probabilidade do acontecimento contrário, ou seja, a probabilidade de que o João e a Margarida fiquem sentados ao lado um do outro, vem:

   - O cálculo dos casos possíveis, pode resultar de considerar as trocas de todos os 7 amigos pelas 7 posições, ou seja, ${}^7A_7 = P_7 = 7!$
   - Relativamente aos casos favoráveis, podemos considerar o par de amigos como um elemento único, resultando assim, nas trocas de 6 elementos (o par de amigos mais as restantes 5 pessoas), em 6 posições possíveis, ou seja, ${}^6A_6 = P_6 = 6!$, multiplicado por 2, porque o João pode ficar à direita ou à esquerda da Margarida.

Assim, recorrendo à probabilidade do acontecimento contrário, a probabilidade de o João e a Margarida não ficarem sentados um ao lado do outro é

$$1 - \frac{6! \times 2}{7!} = 1 - \frac{6! \times 2}{7 \times 6!} = 1 - \frac{2}{7} = \frac{7}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

Resposta: **Opção D**

3. Selecionando 7 dos 12 compartimentos para colocar os copos brancos, que por serem iguais, a ordem da seleção não é relevante, temos ${}^{12}C_7$ formas de arrumar os copos brancos.
Por cada arrumação diferente dos copos brancos, devemos considerar ${}^{5}A_3$ hipóteses diferentes para colocar os copos de outras cores, que correspondem a selecionar 3 dos 5 compartimentos (ainda) vazios, e em que a ordem da seleção é relevante por se destinarem a copos de cor diferente.
Assim o número de arrumações diferentes é ${}^{12}C_7 \times {}^{5}A_3$

   Resposta: **Opção C**

4. Como

$$f(x) = -x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow e^x - 3 = -x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow e^x - 3 + x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow e^x + x + \frac{3}{2} - \frac{6}{2} = 0 \Leftrightarrow e^x + x - \frac{3}{2} = 0$$

   afirmar que a equação $f(x) = -x - \frac{3}{2}$ tem, pelo menos, uma solução, é equivalente a afirmar que a função g, também de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = e^x + x - \frac{3}{2}$ tem, pelo menos, um zero.

   Desta forma, como a função g é contínua em $\mathbb{R}$, por ser resultar de operações entre funções contínuas em $\mathbb{R}$, e recorrendo ao corolário do Teorema de Bolzano, podemos analisar cada uma das hipóteses apresentadas:

   - Como $g(0) = e^0 + 0 - \frac{3}{2} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$, ou seja $g(0) < 0$ e $g\left(\frac{1}{5}\right) = e^{\frac{1}{5}} + \frac{1}{5} - \frac{3}{2} \approx -0{,}08$, ou seja, $g\left(\frac{1}{5}\right) > 0$, temos que, $g(0) \times g\left(\frac{1}{5}\right) > 0$, e por isso, não é garantida a existência de um zero da função g no intervalo $\left]0, \frac{1}{5}\right[$
   - Como $g\left(\frac{1}{5}\right) = e^{\frac{1}{5}} + \frac{1}{5} - \frac{3}{2} \approx -0{,}08$, ou seja, $g\left(\frac{1}{5}\right) < 0$ e $g\left(\frac{1}{4}\right) = e^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \approx 0{,}03$, ou seja, $g\left(\frac{1}{4}\right) > 0$, temos que, $g\left(\frac{1}{5}\right) \times g\left(\frac{1}{4}\right) < 0$, e por isso, é garantida a existência de um zero da função g no intervalo $\left]\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right[$
   - Como $g\left(\frac{1}{4}\right) = e^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \approx 0{,}03$, ou seja, $g\left(\frac{1}{4}\right) > 0$ e $g\left(\frac{1}{3}\right) = e^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} \approx 0{,}23$, ou seja, $g\left(\frac{1}{3}\right) > 0$,temos que, $g\left(\frac{1}{4}\right) \times g\left(\frac{1}{4}\right) > 0$, e por isso, não é garantida a existência de um zero da função g no intervalo $\left]\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right[$
   - Como $g\left(\frac{1}{3}\right) = e^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} \approx 0{,}23$, ou seja, $g\left(\frac{1}{3}\right) > 0$ e $g(1) = e^1 + 1 - \frac{3}{2} \approx 2{,}22$, ou seja, $g(1) > 0$, temos que, $g\left(\frac{1}{3}\right) \times g1) > 0$, e por isso, não é garantida a existência de um zero da função g no intervalo $\left]\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right[$

   Resposta: **Opção B**

5. Como a função é contínua em $\mathbb{R}$, também é contínua em $x = a$, pelo que

$$f(a) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Pela observação do gráfico da função g, temos que

$$f(a) = g(a) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 2$$

E calculando $\lim_{x \to a^-} f(x)$, vem

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^-} \log_3\left(-x - \frac{1}{3}\right) = \log_3\left(-a - \frac{1}{3}\right)$$

Como $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$, temos que

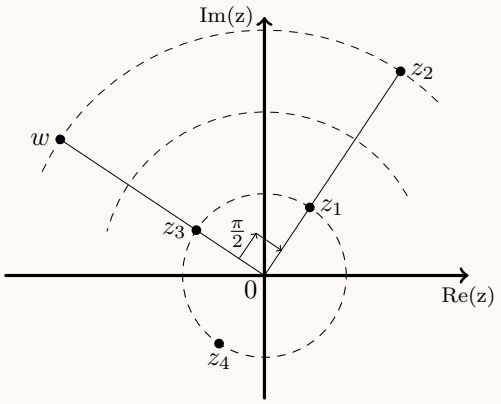
$$\log_3\left(-a - \frac{1}{3}\right) - 1 = 2 \Leftrightarrow -a - \frac{1}{3} = 3^2 \Leftrightarrow -a = 9 + \frac{1}{3} \Leftrightarrow -a = \frac{27}{3} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow -a = \frac{28}{3} \Leftrightarrow a = -\frac{28}{3}$$

Resposta: **Opção A**

6. As retas tangentes ao gráfico nos pontos de abcissas $x = -3$ e $x = 1$ têm declive negativo, ou seja, em $x = -3$ e $x = 1$ a função é decrescente, pelo que $f'(-3) < 0$ e também $f'(1) < 0$.
Relativamente ao sentido das concavidades, em $x = 1$, o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo, pelo que $f''(1) < 0$.
Em $x = -3$, o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima, pelo que $f''(-3) > 0$

Resposta: **Opção C**

7. As operações "*dividir por i*" e "*dividir por 3*" correspondem geometricamente a "fazer uma rotação de centro em O e amplitude $-\frac{\pi}{2}$ radianos" e "dividir a distância ao centro por 3", respetivamente.

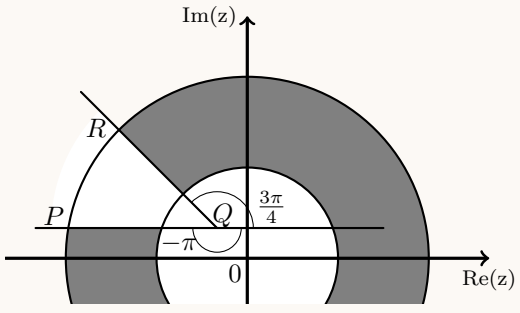


Assim, podemos fazer as operações por qualquer ordem e, por isso, temos duas alternativas:

- $\frac{w}{i} = z_2$ e $\frac{z_2}{3} = z_1$, ou então
- $\frac{w}{3} = z_3$ e $\frac{z_3}{i} = z_1$

Resposta: **Opção A**

8. A coroa circular representada é o conjunto dos pontos que distam da origem entre 3 e 6 unidades, ou seja a representação dos números complexos z, tais que $3 \leq |z| \leq 6$



Os pontos assinalados devem ainda satisfazer a condição de que o ângulo (medido a partir da representação geométrica do complexo $-1 + i$ está compreendido entre $-\pi$ *rad* e $\frac{3\pi}{4}$*rad*.

Ou seja: $-\pi \leq \arg(z - (-1 + i)) \leq \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\pi \leq \arg(z + 1 - i) \leq \frac{3\pi}{4}$$

Resposta: **Opção C**

GRUPO II

1.

1.1. Começamos por simplificar as expressões de z_1 e de z_2:

Recorrendo aos coeficientes da linha 3 do Triângulo de Pascal (1 3 3 1), temos que:
$z_1 = (-2+i)^3 = 1(-2)^3+3(-2)^2(i)+3(-2)(i)^2+1(i)^3 = -8+12i-6i^2-i = -8+6+12i-i = -2+11i$

$$z_2 = \frac{1+28i}{2+i} = \frac{(1+28i)\times(2-i)}{(2+i)\times(2-i)} = \frac{2-i+56i-28i^2}{2^2-i^2} = \frac{2-28(-1)+55i}{4-(-1)} = \frac{30+55i}{5} = 6+11i$$

Assim, temos que
$z^3+z_1 = z_2 \Leftrightarrow z^3+(-2+11i) = 6+11i \Leftrightarrow z^3-2+11i = 6+11i \Leftrightarrow z^3 = 8 \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8}\,\mathrm{cis}\,0 \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8}\,\mathrm{cis}\,\frac{0+2k\pi}{3}, k\in\{0,1,2\} \Leftrightarrow z = 2\,\mathrm{cis}\,\frac{2k\pi}{3}, k\in\{0,1,2\}$$

Ou seja, temos 3 raízes de índice 3, que são as 3 soluções da equação:

- $k=0 \rightarrow z = 2\,\mathrm{cis}\,0$
- $k=1 \rightarrow z = 2\,\mathrm{cis}\,\frac{2\pi}{3}$
- $k=2 \rightarrow z = 2\,\mathrm{cis}\,\frac{4\pi}{3}$

1.2. Se w e $\frac{1}{w}$ são raízes de índice n de um mesmo número complexo z, então $w^n = z$ e $\left(\frac{1}{w}\right)^n = z$
Logo temos que:
$w^n = \left(\frac{1}{w}\right)^n \Leftrightarrow w^n = \frac{1}{w^n} \Leftrightarrow w^n \times w^n = 1 \Leftrightarrow (w^n)^2 = 1 \Leftrightarrow w^n = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow w^n = \pm 1$
Como $w^n = z$ temos que $w^n = \pm 1 \Leftrightarrow z = \pm 1 \Leftrightarrow z = 1 \vee z = -1$

2.

2.1. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno dessa escola, e os acontecimentos:
R:«O aluno é um rapaz»
E:«O aluno tem excesso de peso»
Temos que $P\left(\overline{R}\right) = 0{,}55$, $P\left(E|\overline{R}\right) = 0{,}3$ e $P\left(\overline{E}|R\right) = 0{,}4$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(E\cap\overline{R}\right) = P\left(\overline{R}\right)\times P\left(E|\overline{R}\right) = 0{,}55\times 0{,}3 = 0{,}165$
- $P(R) = 1-P\left(\overline{R}\right) = 1-0{,}55 = 0{,}45$
- $P\left(\overline{E}\cap R\right) = P(R)\times P\left(\overline{E}|R\right) = 0{,}45\times 0{,}4 = 0{,}18$
- $P(R\cap E) = P(R)-P\left(\overline{E}\cap R\right) = 0{,}45-0{,}18 = 0{,}27$
- $P(E) = P(R\cap E)+P\left(\overline{R}\cap E\right) = 0{,}27+0{,}165 = 0{,}435$

	R	$\overline{R}$	
E	0,27	0,165	0,435
$\overline{E}$	0,18		
	0,45	0,55	1

Assim, calculando a probabilidade de o aluno escolhido ser rapaz, sabendo que tem excesso de peso, e escrevendo o resultado na forma de fração irredutível, temos

$$P(R|E) = \frac{P(R\cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}25}{0{,}435} = \frac{18}{29}$$

2.2. Como 55% dos alunos são raparigas e existem 200 alunos, podemos calcular o número de raparigas como $200 \times 0{,}55 = 110$ e o número de rapazes é $200 - 110 = 90$.

O número de conjuntos de 3 alunos que podem ser escolhidos (o número de casos possíveis) é ${}^{200}C_3$. O número de conjuntos com 2 raparigas e 1 rapaz (o número de casos favoráveis) pode ser calculado considerando que se escolhe 1 de entre os 90 rapazes, e 2 de entre as 110 raparigas, ou seja $90 \times {}^{110}C_2$

Assim, calculando a probabilidade de serem escolhidos duas raparigas e um rapaz e arredondando o resultado às centésimas, temos

$$\frac{90 \times {}^{110}C_2}{{}^{200}C_3} \approx 0{,}41$$

3. Como no saco estão 5 bolas e extraímos 4, temos apenas 5 conjuntos de bolas que podem ser extraídos:

- bolas com os números $\{-2, -1, 0, 1\}$, produto correspondente: $-2 \times (-1) \times 0 \times 1 = 2 \times 0 = 0$
- bolas com os números $\{-2, -1, 0, 2\}$, produto correspondente: $-2 \times (-1) \times 0 \times 2 = 4 \times 0 = 0$
- bolas com os números $\{-2, -1, 1, 2\}$, produto correspondente: $-2 \times (-1) \times 1 \times 2 = 4$
- bolas com os números $\{-2, 0, 1, 2\}$, produto correspondente: $-2 \times 0 \times 1 \times 2 = -4 \times 0 = 0$
- bolas com os números $\{-1, 0, 1, 2\}$, produto correspondente: $-1 \times 0 \times 1 \times 2 = -2 \times 0 = 0$

Ou seja, os produtos possíveis são apenas 0 e 4.
Quando a bola com o número 0 é extraída, o que acontece 4 em cada 5 vezes, o produto é 0, ou seja, $P(X = 0) = \frac{4}{5}$
Quando a bola com o número 0 não é extraída, o que acontece 1 em cada 5 vezes, o produto é 4, ou seja, $P(X = 4) = \frac{1}{5}$

4.

4.1. Resolvendo a equação $f(x) = 0$, temos que

$$e^{x-2} - \frac{4e^{-x} + 4}{e^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{e^2 \times e^{x-2}}{e^2} - \frac{4e^{-x} + 4}{e^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{e^2 \times e^{x-2}}{e^2} - \frac{4e^{-x} + 4}{e^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x}{e^2} - \frac{4e^{-x} + 4}{e^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^2} - \frac{4e^{-x} + 4}{e^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 4e^{-x} - 4}{e^2} = 0 \underset{e^2 \neq 0}{\Leftrightarrow} e^x - 4e^{-x} - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x - 4 \times \frac{1}{e^x} - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x \times e^x}{e^x} - \frac{4}{e^x} - \frac{4e^x}{e^x} = 0 \underset{e^x \neq 0}{\Leftrightarrow} (e^x)^2 - 4e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

Fazendo a substituição de variável $y = e^x$, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$\Leftrightarrow y^2 - 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-4)}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 16}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{32}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow y = 2 + 2\sqrt{2} \vee y = 2 - 2\sqrt{2}$$

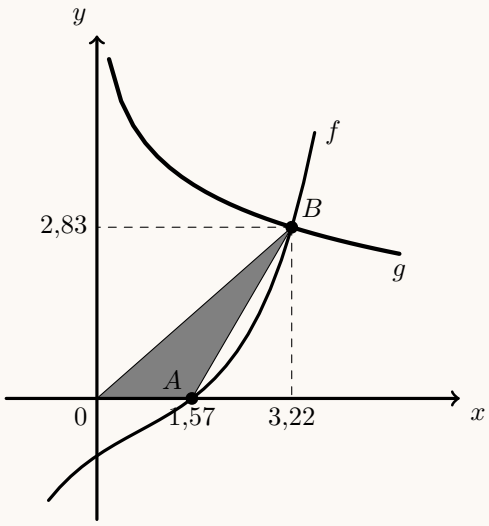
Como $y = e^x$, temos que:

$$e^x = 2 + 2\sqrt{2} \vee e^x = 2 - 2\sqrt{2}$$

E como $2 - 2\sqrt{2} < 0$, a equação $e^x = 2 - 2\sqrt{2}$ é impossível, pelo que podemos determinar o valor do único zero da função f:

$$e^x = 2 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \ln(2 + 2\sqrt{2})$$

4.2. Assim, traçando, na calculadora gráfica, os gráficos das funções f e g, numa janela que permita visualizar a interseção dos dois gráficos, bem como a interseção do gráfico de f com o eixo das abcissas, obtemos o gráfico reproduzido na figura ao lado.



Determinando um valor aproximado às centésimas do zero da função f, com a opção de determinar o valor dos zeros de uma função, obtemos as coordenadas do ponto $A(1{,}57; 0)$, belo que podemos assumir o valor 1,57 para a medida da base do triângulo.

Usando a opção da calculadora para determinar as coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos os valores, aproximados às centésimas, para as coordenadas do ponto $B(3{,}22; 2{,}83)$. Logo podemos considerar o valor da ordenada (2,83) como a medida da altura do triângulo.

Assim, calculando o valor da área do triângulo $[OAB]$, arredondado às décimas, vem:

$$A_{[OAB]} \approx \frac{1{,}57 \times 2{,}83}{2} \approx 2{,}2$$

5.

5.1. Como o domínio da função f é $\mathbb{R}$, poderão existir assíntotas não verticais quando $x \to -\infty$ e quando $x \to +\infty$. Assim, vamos averiguar em primeiro lugar a existência de uma assíntota de equação $y = mx + b$, quando $x \to -\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^{1-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} (e^{1-x}) = e^{1-(-\infty)} = e^{1+\infty} = +\infty$$

Pelo que, como $m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ não é constante, podemos afirmar que não existe uma assínta não vertical do gráfico de f, quando $x \to -\infty$

Averiguando a existência de uma assíntota de equação $y = mx + b$, quando $x \to +\infty$, vem:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln(x+1) - x\ln(x) + 3x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \big(\ln(x+1) - \ln(x) + 3\big) = +\infty - \infty \text{ (Indeterminação)}$$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \big(\ln(x+1) - \ln(x) + 3\big) = \lim_{x\to+\infty} \big(\ln(x+1) - \ln(x)\big) + \lim_{x\to+\infty} 3 = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln \frac{x+1}{x}\right) + 3 =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) + 3 = \ln\left(1 + \frac{1}{+\infty}\right) + 3 = \ln\left(1 + 0^+\right) + 3 = \ln(1) + 3 = 0 + 3 = 3$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - 3 \times x\big) = \lim_{x\to+\infty} \big(x\ln(x+1) - x\ln(x) + 3x - 3x\big) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \Big(x\big(\ln(x+1) - \ln(x)\big)\Big) = \lim_{x\to+\infty} \left(x \times \ln \frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = +\infty \times 0 \text{ (Indeterminação)}$$

(fazendo $y = \dfrac{1}{x}$, temos $x = \dfrac{1}{y}$ e se $x \to +\infty$, então $y \to 0^+$)

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{y\to0^+} \left(\frac{1}{y} \ln\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{y}}\right)\right) = \lim_{y\to0^+} \left(\frac{1}{y}\ln(1+y)\right) =$$

$$= \lim_{y\to0^+} \left(\frac{\ln(1+y)}{y}\right) = \underbrace{\lim_{y\to0^+} \left(\frac{\ln(y+1)}{y}\right)}_{\text{Lim. Notável}} = 1$$

Assim temos que a reta de equação $y = 3x + 1$ é uma assíntota do gráfico de f (e não existem outras assíntotas não verticais).

5.2. Como o declive (m), da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1 é $f'(-1)$, começamos por determinar a expressão da derivada, para $x < 0$:

$$f'(x) = \big(xe^{1-x}\big)' = (x)'e^{1-x} + x\big(e^{1-x}\big)' = 1 \times e^{1-x} + x(1-x)'e^{1-x} = e^{1-x} + x(-1)e^{1-x} = e^{1-x} - xe^{1-x}$$

Calculando o declive da reta tangente temos:

$$m = f'(-1) = e^{1-(-1)} - (-1)e^{1-(-1)} = e^2 + e^2 = 2e^2$$

Calculando as coordenadas do ponto de tangência, temos: $f(-1) = (-1)e^{1-(-1)} = -e^2$, ou seja, o ponto $P(-1, -e^2)$ é um ponto do gráfico de f que também pertence à reta tangente.
Substituindo o valor do declive na equação da reta, vem $y = 2e^2 \times x + b$
Substituindo as coordenadas do ponto na equação da reta, calculamos o valor da ordenada na origem:

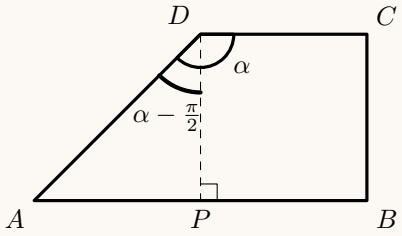
$$-e^2 = 2e^2 \times (-1) + b \iff -e^2 = -2e^2 + b \iff -e^2 + 2e^2 = b \iff e^2 = b$$

Logo, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $x = -1$ é:

$$y = 2e^2 \times x + e^2$$

6.

6.1. Considerando um ponto P, sobre o lado $[AB]$ do trapézio, tal que o segmento $[DP]$ seja perpendicular ao lado $[AB]$, consideramos o ângulo ADP com amplitude $\frac{\pi}{2} - \alpha$



Como $\overline{DP} = 1$, recorrendo à definição de cosseno, temos:

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\overline{DP}}{\overline{DA}} \Leftrightarrow \overline{DA} = \frac{1}{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$$

e como $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\alpha$, temos que: $\overline{DA} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$

Da definição de tangente de um ângulo, e como $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ temos:

$$\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\overline{AP}}{\overline{DP}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\overline{AP}}{1} \Leftrightarrow \overline{AP} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Logo, o perímetro do trapézio é:

$$P_{[ABCD]} = \overline{PB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} + \overline{AP} = 1 + 1 + 1 + \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} + \left(-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right) =$$

$$= 3 + \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} - \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}} = 3 + \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = 3 + \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Ou seja, para cada valor de $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, o perímetro do trapézio $[ABCD]$ é $P(\alpha) = 3 + \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

6.2. Começando por determinar a expressão da derivada, temos:

$$P'(\alpha) = \left(3 + \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right)' = (3)' + \left(\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right)' = 0 + \frac{(1-\cos\alpha)'(\operatorname{sen}\alpha) - (1-\cos\alpha)(\operatorname{sen}\alpha)'}{(\operatorname{sen}\alpha)^2} =$$

$$= \frac{0 - (-\operatorname{sen}\alpha)(\operatorname{sen}\alpha) - (1-\cos\alpha)(\cos\alpha)}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha - (\cos\alpha - \cos^2\alpha)}{\operatorname{sen}^2\alpha} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\alpha - \cos\alpha + \cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha - \cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}$$

Como $\operatorname{tg}^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$ e $\operatorname{tg}\theta = -\sqrt{8}$, vem:

$$(-\sqrt{8})^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow 8 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow \cos\theta = \pm\frac{1}{3}$$

Como $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, $\cos\theta < 0$, logo $\cos\theta = -\frac{1}{3}$

E também: $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = \frac{8}{9}$

Assim, $P'(\theta) = \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}{\frac{8}{9}} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{4 \times 9}{3 \times 8} = \frac{3}{2}$

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de março

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/2.ª Fase 8 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2012

VERSÃO 1

Na folha de respostas, indique de forma legível a versão da prova (Versão 1 ou Versão 2). A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens do Grupo I.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respetivas respostas.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 2, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: $\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \ \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \ \text{e} \ n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\ e^u$

$(a^u)' = u'\ a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. O código de acesso a uma conta de *e-mail* é constituído por quatro letras e três algarismos. Sabe-se que um código tem quatro «a», dois «5» e um «2», como, por exemplo, o código $2aa5a5a$

Quantos códigos diferentes existem nestas condições?

(A) 105 **(B)** 210 **(C)** 5040 **(D)** 39

2. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte.

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	b^3	a	$2a$

Sabe-se que:

- a e b são números reais;
- o valor médio da variável aleatória X é $\frac{35}{24}$

Qual é o valor de b?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{1}{5}$

3. Numa certa linha do triângulo de Pascal, o penúltimo elemento é 111

Escolhe-se, ao acaso, um elemento dessa linha.

Qual é a probabilidade de esse elemento ser maior do que 10^5?

(A) $\frac{3}{56}$ **(B)** $\frac{53}{56}$ **(C)** $\frac{2}{37}$ **(D)** $\frac{35}{37}$

4. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f, de domínio $]-1, 3[$

Sabe-se que:

- $f(1) = -4$
- a reta de equação $x = 1$ é assíntota do gráfico de f
- (x_n) é uma sucessão com termos em $]-1, 1[$
- $\lim(x_n) = 1$

Qual é o valor de $\lim\left(f\left(x_n\right)\right)$?

(A) $+\infty$

(B) -4

(C) -5

(D) -6

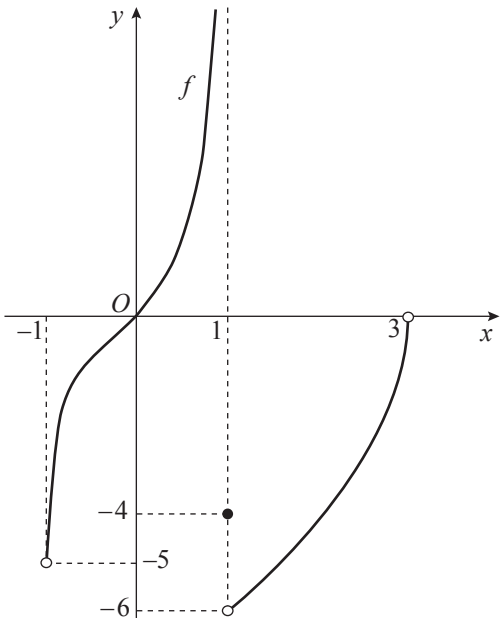


Figura 1

5. Na Figura 2, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f, de domínio $]-6, +\infty[$, definida por $f(x) = \ln\left(\frac{x}{3} + 2\right)$

Sabe-se que:

- a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a
- a inclinação da reta r é, em radianos, $\frac{\pi}{4}$

Qual é o valor de a?

(A) -4

(B) $-\frac{9}{2}$

(C) $-\frac{11}{2}$

(D) -5

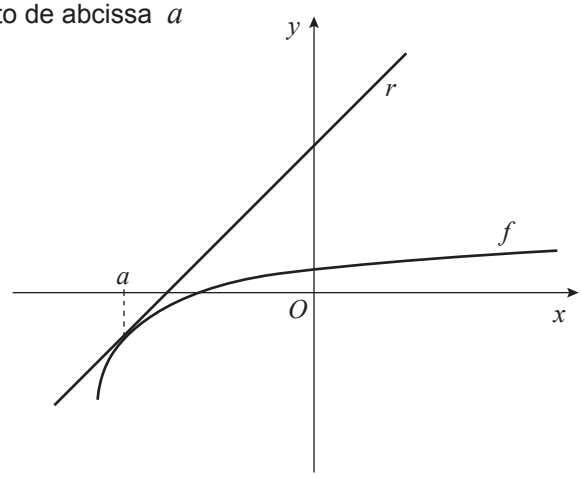


Figura 2

6. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$

Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - 2x \right) = 1$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$

Em qual das opções seguintes as duas equações definem assíntotas do gráfico da função f ?

(A) $x = 1$ e $y = -2x + 1$

(B) $x = 1$ e $y = 2x + 1$

(C) $y = 3$ e $y = -2x + 1$

(D) $y = 2$ e $y = 2x + 1$

7. Seja k um número real, e sejam $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = 3 - ki$ dois números complexos.

Qual é o valor de k para o qual $z_1 \times \overline{z_2}$ é um imaginário puro?

(A) $\frac{3}{2}$ **(B)** $-\frac{3}{2}$ **(C)** 1 **(D)** 6

8. Na Figura 3, está representado, no plano complexo, um polígono regular $[ABCDEFGHI]$

Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice n de um número complexo z

O vértice A tem coordenadas $(0, -3)$

Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o vértice F ?

(A) $3 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{18}$

(B) $3 \operatorname{cis} \frac{11\pi}{18}$

(C) $3 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$

(D) $3 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{9}$

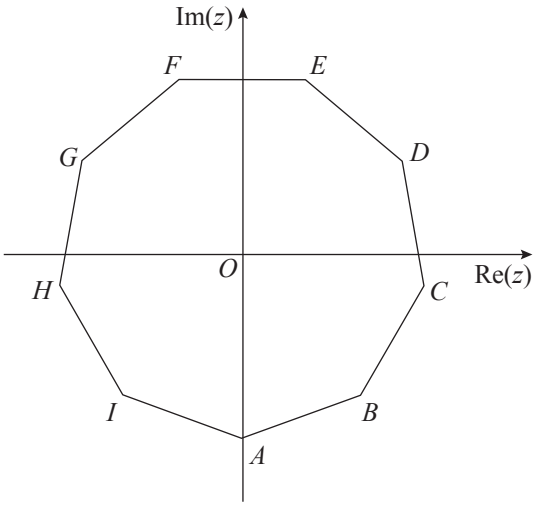


Figura 3

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

1.1. Seja n um número natural.

Determine $\dfrac{\sqrt{3}\times i^{4n-6}+2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)}$, sem recorrer à calculadora.

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

1.2. Seja $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$

Sejam z_1 e z_2 dois números complexos tais que $z_1 = \operatorname{cis}\alpha$ e $z_2 = \operatorname{cis}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$

Mostre, analiticamente, que a imagem geométrica de $z_1 + z_2$, no plano complexo, pertence ao 2.º quadrante.

2. A empresa AP comercializa pacotes de açúcar.

2.1. Seja Y a variável aleatória «massa, em gramas, de um pacote de açúcar comercializado pela empresa AP».

A variável aleatória Y segue uma distribuição normal de valor médio $6{,}5$ gramas e desvio padrão $0{,}4$ gramas.

Um pacote de açúcar encontra-se em condições de ser comercializado se a sua massa estiver compreendida entre $5{,}7$ gramas e $7{,}3$ gramas.

Determine o valor aproximado da probabilidade de, em 10 desses pacotes de açúcar, exatamente oito estarem em condições de serem comercializados.

Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às milésimas.

2.2. Considere o problema seguinte.

«A empresa AP pretende aplicar, junto dos seus funcionários, um programa de reeducação alimentar. De entre os 500 funcionários da empresa AP vão ser selecionados 30 para formarem um grupo para frequentar esse programa. A Joana e a Margarida são irmãs e são funcionárias da empresa AP. Quantos grupos diferentes podem ser formados de modo que, pelo menos, uma das duas irmãs, a Joana ou a Margarida, não seja escolhida para esse grupo?»

Apresentam-se, em seguida, duas respostas corretas.

I) ${}^{500}C_{30} - {}^{498}C_{28}$ II) $2\times {}^{498}C_{29} + {}^{498}C_{30}$

Numa composição, apresente o raciocínio que conduz a cada uma dessas respostas.

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega \text{ e } B \subset \Omega)$, com $P(B) \neq 0$

Mostre que $P(\overline{A \cap B} \mid B) + P(A \mid B) = 1$

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \sqrt{1 - x^3}} & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{k+1} & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{1 - e^{4x}}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases} \qquad \text{com } k \in \mathbb{R}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

4.1. Determine k, de modo que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$

4.2. Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

4.3. Seja g uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, cuja derivada, g', de domínio $\mathbb{R}^+$, é dada por $g'(x) = f(x) - \dfrac{1}{x}$

Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

5. Considere a função f, de domínio $[-7, 0[$, definida por

$$f(x) = e^x + \ln(x^2) + 3$$

Sejam A e B os pontos de intersecção do gráfico de f com a bissetriz dos quadrantes pares, e seja d a distância entre os pontos A e B

Determine d, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- assinalar os pontos A e B
- indicar as coordenadas dos pontos A e B com arredondamento às centésimas;
- apresentar o valor de d com arredondamento às centésimas.

6. Na Figura 4, está representado o quadrado $[ABCD]$

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 4$
- $\overline{AE} = \overline{AH} = \overline{BE} = \overline{BF} = \overline{CF} = \overline{CG} = \overline{DG} = \overline{DH}$
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo EAB
- $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$

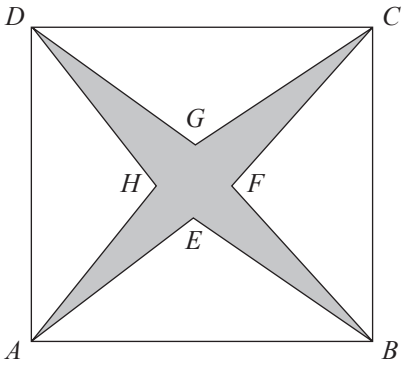


Figura 4

6.1. Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de x, por $a(x) = 16(1 - \operatorname{tg} x)$

6.2. Mostre que existe um valor de x compreendido entre $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{\pi}{5}$ para o qual a área da região sombreada é 5

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** .....(8 × 5 pontos).....	40 pontos
	40 pontos

GRUPO II

1.	
1.1.	15 pontos
1.2.	15 pontos
2.	
2.1.	15 pontos
2.2.	15 pontos
3.	15 pontos
4.	
4.1.	10 pontos
4.2.	15 pontos
4.3.	20 pontos
5.	15 pontos
6.	
6.1.	10 pontos
6.2.	15 pontos
	160 pontos
TOTAL	**200 pontos**

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de março

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/2.ª Fase

Critérios de Classificação 11 Páginas

2012

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** ..... (8 × 5 pontos) ..... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1.

1.1. ..... 15 pontos
1.2. ..... 15 pontos

2.

2.1. ..... 15 pontos
2.2. ..... 15 pontos

3. ..... 15 pontos

4.

4.1. ..... 10 pontos
4.2. ..... 15 pontos
4.3. ..... 20 pontos

5. ..... 15 pontos

6.

6.1. ..... 10 pontos
6.2. ..... 15 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

A classificação da prova deve respeitar integralmente os critérios gerais e os critérios específicos a seguir apresentados.

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos de classificação apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro, previsto na grelha de classificação.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos. No entanto, em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se o examinando responder a um mesmo item mais do que uma vez, não eliminando inequivocamente a(s) resposta(s) que não deseja que seja(m) classificada(s), deve ser considerada apenas a resposta que surgir em primeiro lugar.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova (Versão 1 ou Versão 2) implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de seleção (escolha múltipla).

Nos itens de seleção (escolha múltipla), a cotação total do item é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a única opção correta.

São classificadas com zero pontos as respostas em que seja assinalada:

– uma opção incorreta;

– mais do que uma opção.

Não há lugar a classificações intermédias.

Os critérios de classificação das respostas aos itens de construção apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

Nos itens de construção com cotação igual ou superior a quinze pontos e que impliquem a produção de um texto, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea das competências específicas da disciplina e das competências de comunicação escrita em língua portuguesa. A avaliação das competências de comunicação escrita em língua portuguesa contribui para valorizar a classificação atribuída ao desempenho no domínio das competências específicas da disciplina. Esta valorização corresponde a cerca de 10% da cotação do item e faz-se de acordo com os níveis de desempenho a seguir descritos.

Níveis	Descritores
3	Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
2	Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
1	Composição sem estruturação aparente, com erros graves de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é zero pontos. Neste caso, não é classificado o desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

Até ao ano letivo 2013/2014, na classificação das provas, continuarão a ser consideradas corretas as grafias que seguirem o que se encontra previsto quer no Acordo de 1945, quer no Acordo de 1990 (atualmente em vigor), mesmo quando se utilizem as duas grafias numa mesma prova.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar em situações não descritas anteriormente.

Situação	Classificação
1. Classificação da resposta a um item cujo critério se apresenta organizado por etapas.	A pontuação indicada para cada etapa é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A classificação da resposta resulta da soma das pontuações das diferentes etapas, à qual se subtrai, eventualmente, um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 13 e/ou 18.
2. Pontuação de uma etapa dividida em passos.	A pontuação indicada para cada passo é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A pontuação da etapa resulta da soma das pontuações dos diferentes passos.
3. Classificação da resposta a um item ou pontuação de uma etapa cujo critério se apresenta organizado por níveis de desempenho.	A resposta é enquadrada numa das descrições apresentadas. À classificação/pontuação correspondente subtrai-se, eventualmente, um ou dois pontos, se ocorrer um erro ocasional num cálculo, e/ou se se utilizar simbologia ou expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.
4. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite e classificado qualquer processo de resolução cientificamente correto. O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante distribuição da cotação do item pelas etapas* percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.
5. Apresentação apenas do resultado final, se a resolução do item exige cálculos e/ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
6. Utilização de processos de resolução que não respeitam as instruções dadas [exemplo: «usando métodos analíticos»].	A etapa em que a instrução não é respeitada é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
7. Ausência de apresentação dos cálculos e/ou das justificações necessárias à resolução de uma etapa*.	A etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
8. Ausência de apresentação explícita de uma dada etapa que não envolva cálculos e/ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, a mesma é pontuada com a pontuação total para ela prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.

* Em situações em que o critério é aplicável tanto a **etapas** como a **passos**, utiliza-se apenas o termo «etapas» por razões de simplificação da apresentação.

Situação	Classificação
9. Transposição incorreta de dados do enunciado e/ou transposição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se o grau de dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.
10. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre.
11. Ocorrência de um erro ocasional que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.	A pontuação máxima a atribuir nessa etapa deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.
12. Ocorrência de um erro ocasional na resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada de acordo com o erro cometido. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido: – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.
13. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à classificação da resposta, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
14. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
15. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final [exemplo: «15» em vez de «15 metros»].	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação para ela prevista.
16. Apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
17. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, e/ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à classificação da resposta, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. ..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

As respostas corretas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	A	C	B	A	D	B	D	B
Versão 2	C	A	D	D	A	C	B	D

GRUPO II

É de aceitar qualquer processo de resolução cientificamente correto, ainda que não esteja previsto nestes critérios específicos, nem no Programa (ver n.º 4 dos Critérios Gerais de Classificação).

1.1. ..... **15 pontos**

Calcular o numerador na forma algébrica ..... 9 pontos

Calcular i^{4n-6} ..... 3 pontos

Escrever $i^{4n}=1$ ..... 1 ponto

Escrever $i^{-6}=-1$ ..... 1 ponto

Concluir que $i^{4n-6}=-1$ ..... 1 ponto

Calcular $2\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ na forma algébrica ..... 4 pontos

Escrever $2\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ 1 ponto

Escrever $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ..... 1 ponto

Escrever $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$ ..... 1 ponto

Escrever $2\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ na forma $a+bi$ ..... 1 ponto

Obter o numerador na forma algébrica ..... 2 pontos

Calcular $\frac{-i}{2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)}$ na forma trigonométrica ..... 6 pontos

Escrever $-i=\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ ..... 2 pontos

Efetuar a divisão na forma trigonométrica ..... 4 pontos

1.2. ..... **15 pontos**

Escrever $z_1 + z_2 = \text{cis}\,\alpha + \text{cis}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ ..... 1 ponto

Escrever $\text{cis}\,\alpha = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha$ ..... 1 ponto

Escrever $\text{cis}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ ..... 1 ponto

Escrever $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\text{sen}\,\alpha$ ..... 2 pontos

Escrever $\text{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$ ..... 2 pontos

Obter $z_1 + z_2 = (\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha) + i(\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha)$ (ou equivalente) ..... 1 ponto

Concluir que $\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha > 0$ se $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ ..... 2 pontos

Concluir que $\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha < 0$ se $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ (**ver nota**) ..... 4 pontos

Concluir o pretendido ..... 1 ponto

Nota – Se o examinando não referir que a conclusão resulta de $\text{sen}\,\alpha > \cos\alpha$ quando $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 2 pontos.

2.1. ..... **15 pontos**

Escrever $P(5{,}7 < Y < 7{,}3) \approx 0{,}9545$ (**ver nota 1**) ..... 5 pontos

Escrever a expressão que dá o valor pedido (**ver nota 2**) ..... 8 pontos

Calcular o valor pedido (**ver nota 3**) ..... 2 pontos

Notas:

1. Se o examinando escrever $P(5{,}7 < Y < 7{,}3) = 0{,}9545$ ou $P(5{,}7 \leq Y \leq 7{,}3) = 0{,}9545$, a pontuação a atribuir nesta etapa não deve ser desvalorizada.

2. Esta etapa deve ser classificada de acordo com os seguintes níveis de desempenho.

$(0{,}9545)^8 \times (0{,}0455)^2 \times {}^{10}C_8$ (ou equivalente) ..... 8 pontos

$(0{,}9545)^8 \times (0{,}0455)^2 \times 8$ (ou equivalente)
OU
$(0{,}9545)^8 \times (0{,}0455)^2 \times 10$ (ou equivalente) ..... 6 pontos

$(0{,}9545)^2 \times (0{,}0455)^8 \times {}^{10}C_8$ (ou equivalente) ..... 4 pontos

$(0{,}9545)^8 \times (0{,}0455)^2$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

$(0{,}9545)^2 \times (0{,}0455)^8$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Outras respostas ..... 0 pontos

3. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se o resultado estiver de acordo com a expressão escrita pelo examinando na etapa imediatamente anterior e se essa expressão não tiver sido pontuada com zero pontos.

2.2. ..... **15 pontos**

A composição deve contemplar os pontos seguintes.

- explicar $^{498}C_{28}$
- explicar a razão pela qual a diferença entre $^{500}C_{30}$ e $^{498}C_{28}$ é uma resposta correta (I)
- explicar $2 \times {}^{498}C_{29}$
- explicar $^{498}C_{30}$
- explicar a razão pela qual a soma entre $2 \times {}^{498}C_{29}$ e $^{498}C_{30}$ é uma resposta correta (II)

Na tabela seguinte, indica-se como deve ser classificada a resposta a este item, de acordo com os níveis de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa e com os níveis de desempenho no domínio específico da disciplina.

Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina \ Descritores do nível de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa			**Níveis***		
			1	**2**	**3**
Níveis	**5**	A composição contempla corretamente os cinco pontos.	13	14	15
	4	A composição contempla corretamente apenas quatro dos cinco pontos.	10	11	12
	3	A composição contempla corretamente apenas três dos cinco pontos.	7	8	9
	2	A composição contempla corretamente apenas dois dos cinco pontos.	4	5	6
	1	A composição contempla corretamente apenas um dos cinco pontos.	1	2	3

***** Descritores apresentados nos Critérios Gerais de Classificação.

3. ..... **15 pontos**

A resposta deve incluir os pontos seguintes.

- $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ou $P(\overline{A \cap B} \mid B) = \dfrac{P(\overline{A \cap B} \cap B)}{P(B)}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap B = (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap B)$
- $\overline{B} \cap B = \{\ \}$
- $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$ (ou equivalente)

Níveis	Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina	Pontuação
6	A resposta apresenta corretamente os cinco pontos e a conclusão pretendida.	15
5	A resposta apresenta corretamente os cinco pontos, mas não apresenta a conclusão pretendida.	11
4	A resposta apresenta corretamente apenas quatro dos cinco pontos.	9
3	A resposta apresenta corretamente apenas três dos cinco pontos.	7
2	A resposta apresenta corretamente apenas dois dos cinco pontos.	5
1	A resposta apresenta corretamente apenas um dos cinco pontos.	3

4.1. ..... **10 pontos**

Calcular $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ ..... 7 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 - e^{4x}}{x}$ ..... 1 ponto

Levantar a indeterminação ..... 5 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 - e^{4x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-(e^{4x} - 1)}{x}$
(ou equivalente) ..... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-(e^{4x} - 1)}{x} = \lim\limits_{4x \to 0^+} \left(-4 \times \dfrac{e^{4x} - 1}{4x}\right)$
(ou equivalente) (**ver nota**) ..... 2 pontos

Referir o limite notável $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{e^y - 1}{y} = 1$
(ou equivalente) ..... 1 ponto

Obter o valor de $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ ..... 1 ponto

Escrever $f(0) = 1 - e^{k+1}$ ..... 1 ponto

Obter o valor de k ..... 2 pontos

Nota – Se o examinando escrever $x \to 0^+$ em vez de $4x \to 0^+$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

4.2. ..... **15 pontos**

Estudar a existência de assíntotas verticais do gráfico da função f quando $x \to 0^-$ ..... 12 pontos

Calcular $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ ..... 10 pontos

Escrever $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1-\sqrt{1-x^3}}$ ..... 1 ponto

Levantar a indeterminação ..... 5 pontos

Indicar a multiplicação de ambos os termos da fração por $1+\sqrt{1-x^3}$ .. 2 pontos

Efetuar a multiplicação no denominador ..... 2 pontos

Referir o limite notável $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ ..... 1 ponto

Obter o valor de $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ ..... 4 pontos

Concluir que há assíntota vertical ..... 2 pontos

Concluir que o gráfico de f não admite outras assíntotas verticais por f ser contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ..... 3 pontos

4.3. ..... **20 pontos**

Determinar g'' ..... 12 pontos

Escrever $g''(x) = f'(x) - \left(\frac{1}{x}\right)'$ (ou equivalente) ..... 1 ponto

Determinar $f'(x)$ se $x > 0$ ..... 6 pontos

Escrever $\left(\frac{1-e^{4x}}{x}\right)' = \frac{(1-e^{4x})'x - (1-e^{4x})x'}{x^2}$ 1 ponto

Determinar $(1-e^{4x})'$ ..... 2 pontos

Determinar $(x)'$ ..... 1 ponto

Obter $f'(x)$ se $x > 0$ ..... 2 pontos

Determinar $\left(\frac{1}{x}\right)'$ ..... 2 pontos

Obter g'' ..... 3 pontos

Estudar a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico ..... 6 pontos

Concluir que g'' é negativa em $\left]\frac{1}{4}, +\infty\right[$ ..... 1 ponto

Concluir que g'' é positiva em $\left]0, \frac{1}{4}\right[$ ..... 1 ponto

Concluir que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo em $\left]\frac{1}{4}, +\infty\right[$ ..... 2 pontos

Concluir que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima em $\left]0, \frac{1}{4}\right[$ ..... 2 pontos

Concluir que o gráfico de g tem um ponto de inflexão ..... 2 pontos

5. ..... **15 pontos**

Reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados na calculadora (**ver notas 1** e **2**) ..... 4 pontos

Reproduzir o gráfico de f ..... 2 pontos

Reproduzir a bissetriz dos quadrantes pares ..... 2 pontos

Assinalar os pontos A e B ..... (1 + 1) ..... 2 pontos

Indicar as coordenadas do ponto A ..... 1 ponto

Indicar as coordenadas do ponto B ..... 1 ponto

Determinar a diferença entre a abcissa do ponto A e a abcissa do ponto B ..... 1 ponto

Determinar a diferença entre a ordenada do ponto A e a ordenada do ponto B .... 1 ponto

Calcular d ..... 5 pontos

Notas:

1. Se o examinando não apresentar o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

2. Se o examinando apresentar um gráfico que não respeite o domínio da função, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

6.1. ..... **10 pontos**

Escrever que a área da região sombreada é igual à área do quadrado $[ABCD]$ menos quatro vezes a área do triângulo $[ABE]$ (ou equivalente)..... 2 pontos

Calcular a área do quadrado $[ABCD]$ ..... 1 ponto

Calcular a área do triângulo $[ABE]$ (ou equivalente) ..... 4 pontos

Identificar uma base do triângulo $[ABE]$ (ou equivalente)..... 1 ponto

Determinar a altura do triângulo $[ABE]$, de acordo com a base do triângulo considerada, em função de x ..... 2 pontos

Escrever $\operatorname{tg} x = \frac{\overline{EE_1}}{2}$, em que E_1 é a projeção ortogonal de E sobre $[AB]$ ..... 1 ponto

Escrever $\overline{EE_1} = 2 \operatorname{tg} x$ ..... 1 ponto

Obter a área do triângulo $[ABE]$ igual a $4 \operatorname{tg} x$ (ou equivalente).. 1 ponto

Concluir o pretendido ..... 3 pontos

6.2. ..... **15 pontos**

Referir que a função a é contínua em $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{5}\right]$ (**ver notas 1**, **2** e **3**)..... 3 pontos

Calcular $a\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ..... 3 pontos

Calcular $a\left(\frac{\pi}{5}\right)$ ..... 3 pontos

Escrever $a\left(\frac{\pi}{5}\right) < 5 < a\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (ou equivalente) ..... 4 pontos

Referir que o pretendido resulta do teorema de Bolzano ..... 2 pontos

Notas:

1. Se o examinando não referir que a função é contínua em $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{5}\right]$, a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos.

2. Se o examinando referir que a função é contínua em $\left]\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{5}\right[$, a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos.

3. Se o examinando referir que a função é contínua no domínio, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO 2012

- 2.ª FASE -

DOCUMENTO GAVE

DISCIPLINA: MATEMÁTICA A _ PROVA 635

Grupo II

Item 1.1. (15 pontos)

Situação 1: O examinando escreve apenas $i^{4n-6}=-1$

Classificação proposta: 1(1(0+0+1)+0+0)+0

Situação 2: O examinando escreve $i^{4n-6}=i^{-6}=-1$, calcula $2cis\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ na forma algébrica, obtém o numerador na forma algébrica e calcula $\frac{-i}{2cis\left(\frac{\pi}{5}\right)}$ na forma trigonométrica.

Classificação proposta: 15

Situação 3: O examinando escreve $\frac{\sqrt{3}\times i^{4n-6}}{2cis\left(\frac{\pi}{5}\right)}+\frac{2cis\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{2cis\left(\frac{\pi}{5}\right)}$, calcula i^{4n-6}, escreve $-\sqrt{3}$ na forma trigonométrica e efetua corretamente as divisões na forma trigonométrica.

Classificação proposta: 3 (3+0+0)+6

Gabinete de Avaliação Educacional
Travessa das Terras de Sant'Ana, 15, 1250 – 269 Lisboa, PORTUGAL
TEL: + 351 213 895 200 • **FAX:** + 351 213 895 150
EMAIL: gave-direcao@gave.min-edu.pt • **SITE:** **www.gave.min-edu.pt**

Item 1.2. (15 pontos)

Situação 1: O examinando escreve $z_2 = cis\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = i\,cis\alpha$, resolve corretamente e conclui o pretendido (a imagem geométrica de $z_1 + z_2$ pertence ao 2.º quadrante).

Classificação proposta: 15 (CG4)

Adaptação do critério específico

Escrever $z_1 + z_2 = cis\alpha + cis(\alpha + \frac{\pi}{2})$	1 ponto
Escrever $cis(\alpha + \frac{\pi}{2}) = cis\alpha \times cis\left(\frac{\pi}{2}\right)$	2 pontos
Escrever $cis\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$	1 ponto
Escrever $z_1 + z_2 = cis\alpha + i\,cis\alpha$	1 ponto
Obter $z_1 + z_2 = cis\alpha\,(1+i)$	1 ponto
Escrever $1 + i = \sqrt{2}\,cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$	1 ponto
Obter $z_1 + z_2 = \sqrt{2}\;cis\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$	2 pontos
Concluir que, se $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ então $\alpha + \frac{\pi}{4} \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right[$	4 pontos
Concluir que $\alpha + \frac{\pi}{4}$ pertence ao 2.ºquadrante	1 ponto
Concluir o pretendido	1 ponto

Item 2.1. (15 pontos)

Situação 1: O examinando utiliza um arredondamento incorreto, escreve, por exemplo, $P(5{,}7 < Y < 7{,}3) \approx 0{,}9$, escreve a expressão que dá o valor pedido e calcula o valor pedido.

Classificação proposta: 14 (CG13)

Situação 2: O examinando escreve, por exemplo, $P(5{,}7 < Y < 7{,}3) = 0{,}4$, e utiliza esse valor para determinar o valor aproximado da probabilidade pedida.

Classificação proposta: 0(CG11)+8+2

Gabinete de Avaliação Educacional
Travessa das Terras de Sant'Ana, 15, 1250 – 269 Lisboa, PORTUGAL
TEL: + 351 213 895 200 • **FAX:** + 351 213 895 150
EMAIL: gave-direcao@gave.min-edu.pt • **SITE:** **www.gave.min-edu.pt**

Item 3. (15 pontos)

Situação 1: O examinando conclui o pretendido, utilizando a propriedade $P(\overline{A\cap B}\,|B)=1-P(A\cap B|B)$

Classificação proposta: 15 (CG4)

Adaptação do critério específico

A resposta do examinando deve incluir os pontos seguintes.

- $P(A\,|\,B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ ou $P(A\cap B|B)=\dfrac{P((A\cap B)\cap B)}{P(B)}$
- $P(\overline{A\cap B}\,|B)=1-P(A\cap B|B)$
- $(A\cap B)\cap B=A\cap B$

Níveis	Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina	Pontuação
4	A resposta apresenta corretamente os três pontos e a conclusão pretendida.	15
3	A resposta apresenta corretamente os três pontos, mas não apresenta a conclusão pretendida	11
2	A resposta apresenta corretamente apenas dois dos três pontos.	7
1	A resposta apresenta corretamente apenas um dos três pontos.	3

Situação 2: O examinando escreve $P(\overline{A\cap B}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$, ilustrando com um Diagrama de Venn, e conclui o pretendido.

Classificação proposta: 15 (CG4)

Adaptação do critério específico

A resposta do examinando deve incluir os pontos seguintes.

- $P(A\,|\,B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ ou $P(\overline{A\cap B}\,|B)=\dfrac{P(\overline{A\cap B}\cap B)}{P(B)}$
- $P(\overline{A\cap B}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$

Níveis	Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina	Pontuação
3	A resposta apresenta corretamente os dois pontos e a conclusão pretendida.	15
2	A resposta apresenta corretamente os dois pontos, mas não apresenta a conclusão pretendida.	11
1	A resposta apresenta corretamente apenas um dos dois pontos.	3

Gabinete de Avaliação Educacional
Travessa das Terras de Sant'Ana, 15, 1250 – 269 Lisboa, PORTUGAL
TEL: + 351 213 895 200 • **FAX:** + 351 213 895 150
EMAIL: gave-direcao@gave.min-edu.pt • **SITE:** **www.gave.min-edu.pt**

Item 4.3. (20 pontos)

Situação 1: O examinando escreve $g'(x)=-\frac{e^{4x}}{x}$, determina g'' ,estuda a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Classificação proposta: 20 (CG4)

Adaptação do critério específico

Obter $g'(x)=-\frac{e^{4x}}{x}$	3 pontos
Escrever $g''(x)=\left(-\frac{e^{4x}}{x}\right)'$	1 ponto
Determinar g''	8 pontos
Escrever $\frac{(-e^{4x})'x-(-e^{4x})x'}{x^2}$	1 ponto
Determinar $(-e^{4x})'$	2 pontos
Determinar $(x)'$	1 ponto
Obter g''	4 pontos
Estudar a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico	6 pontos
Concluir que o gráfico de g tem um ponto de inflexão	2 pontos

Situação 2: O examinando determina corretamente g'' ,estuda a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, recorrendo a um quadro.

Classificação proposta: 20 (CG4)

Adaptação do critério específico

Determinar g''	12 pontos
Estudar a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, recorrendo a um quadro	8 pontos
Preencher a primeira linha do quadro (relativa à variável x, de acordo com o domínio da função)	2 pontos
Indicar o sinal de g''	2 pontos
Relacionar o sinal de g'' com o sentido da concavidade do gráfico de g	2 pontos
Concluir que o gráfico de g tem um ponto de inflexão	2 pontos

Gabinete de Avaliação Educacional
Travessa das Terras de Sant'Ana, 15, 1250 – 269 Lisboa, PORTUGAL
TEL: + 351 213 895 200 • **FAX:** + 351 213 895 150
EMAIL: gave-direcao@gave.min-edu.pt • **SITE:** **www.gave.min-edu.pt**

Item 5. (15 pontos)

Situação 1: O examinando reproduz a bissetriz dos quadrantes pares e parte do gráfico da função $h(x)=e^x+\ln(x^2)+3$ de domínio $IR\setminus\{0\}$, assinala dois pontos de interseção, um ponto *A* no 2.º quadrante e um ponto *B* no 4.º quadrante, indica as coordenadas dos pontos com arredondamento às centésimas e apresenta o valor da distância entre os pontos assinalados.

Classificação proposta: 3(1+2)+1+1+0+1+1+5

Situação 2: O examinando reproduz a bissetriz dos quadrantes ímpares e parte do gráfico da função $h(x)=e^x+\ln(x^2)+3$ de domínio $IR\setminus\{0\}$, assinala dois pontos de interseção, um ponto *A* no 1.º quadrante e um ponto *B* no 3.º quadrante, indica as coordenadas dos pontos com arredondamento às centésimas e apresenta o valor da distância entre os pontos assinalados.

Classificação proposta: 1(1+0)+1+0+1+1+1+5

Item 6.2 (15 pontos)

Situação 1: O examinando obtém $tg\,x=\frac{11}{16}$, refere que a função tangente é contínua em $\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{5}\right]$ e mostra, recorrendo ao teorema de Bolzano, que existe um valor de x compreendido entre $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{\pi}{5}$ para o qual $tg\,x=\frac{11}{16}$

Classificação proposta: 15 (CG4)

Adaptação do critério específico

Escrever $a(x)=5$	1 ponto
Obter $tg\,x=\frac{11}{16}$	1 ponto
Calcular $tg\left(\frac{\pi}{12}\right)$	2 pontos
Calcular $tg\left(\frac{\pi}{5}\right)$	2 pontos
Escrever $tg\left(\frac{\pi}{12}\right)<\frac{11}{16}<tg\left(\frac{\pi}{5}\right)$ (ou equivalente)	4 pontos
Referir que a função tangente é contínua.....	3 pontos
Concluir o pretendido, referindo o teorema de Bolzano.....	2 pontos

Gabinete de Avaliação Educacional
Travessa das Terras de Sant'Ana, 15, 1250 – 269 Lisboa, PORTUGAL
TEL: + 351 213 895 200 • **FAX:** + 351 213 895 150
EMAIL: gave-direcao@gave.min-edu.pt • **SITE:** **www.gave.min-edu.pt**

Exame nacional de Matemática A (2012, 2.ª fase)

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Para calcular o número de códigos diferentes, de acordo com as restrições impostas, podemos começar por escolher a posição do «2», e assim existem 7 posições possíveis.
Por cada uma das 7 escolhas anteriores, escolhemos outras duas posições (de entre as 6 disponíveis para posicionar os «5», logo existem ${}^{6}C_{2}$ escolhas diferentes.
Como as restantes posições são todas ocupadas por «a», a colocação dos «a» corresponde a uma única hipótese de posicionamento. Assim temos que o número total de hipóteses possíveis é

$$7 \times {}^{6}C_{2} \times 1 = 105$$

Resposta: **Opção A**

2. Como o valor médio da variável aleatória X é $\frac{35}{24}$, temos que:

$$\frac{35}{24} = 0 \times b^3 + 1 \times a + 2 \times 2a \Leftrightarrow \frac{35}{24} = 0 + a + 4a \Leftrightarrow \frac{35}{24} = 5a \Leftrightarrow \frac{7 \times 5}{24 \times 5} = a \Leftrightarrow \frac{7}{24} = a$$

Também sabemos que:

$$b^3 + a + 2a = 1 \Leftrightarrow b^3 + 3a = 1 \Leftrightarrow b^3 = 1 - 3a$$

Substituindo o valor de a, temos:

$$b^3 = 1 - 3 \times \frac{7}{24} \Leftrightarrow b^3 = 1 - \frac{21}{24} \Leftrightarrow b^3 = \frac{24}{24} - \frac{21}{24} \Leftrightarrow b^3 = \frac{3}{24} \Leftrightarrow b^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$$

Resposta: **Opção C**

3. Como o penúltimo elemento da linha do triângulo de Pascal é 111, sabemos que essa linha tem 112 elementos, todas da forma ${}^{112}C_{n}$.

Logo só existem 6 elementos desta linha que são inferiores a 10^5:
${}^{111}C_0 = {}^{111}C_{111} (= 1)$; ${}^{111}C_1 = {}^{111}C_{110} (= 111)$ e ainda ${}^{111}C_2 = {}^{111}C_{109} (= 6105)$
Porque
${}^{111}C_3 = {}^{111}C_{108} = 221\,815$ e todos os restantes são superiores a estes.

Logo, sabemos que existem $112 - 6 = 106$ elementos superiores a 10^5, num total de 112, ou seja, o valor da probabilidade é $\frac{106}{112} = \frac{53}{56}$

Resposta: **Opção B**

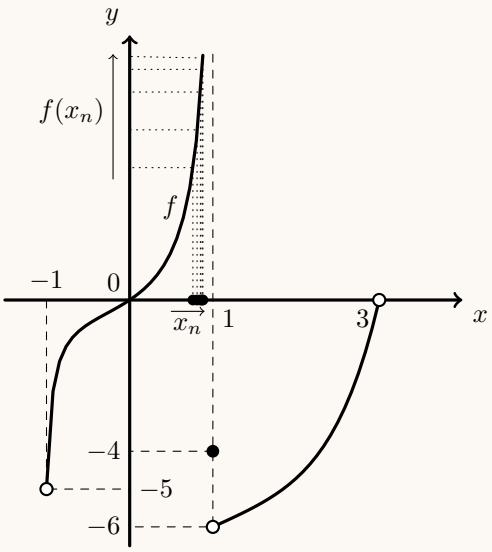
4. Como (x_n) é uma sucessão com termos em $]-1,1[$ e $\lim(x_n) = 1$, então:

$$\lim x_n = 1^-$$

E assim, de acordo com o gráfico, temos que:

$$\lim f(x_n) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (x_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $f(x_n)$, que tendem para $+\infty$, quando (x_n) tende para 1



Resposta: **Opção A**

5. Sabemos que o declive da reta tangente (m) por ser calculado por:

- a tangente da inclinação: $m = \text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1$
- o valor da derivada no ponto de abcissa a
  Determinando a expressão da derivada, vem:

$$f'(x) = \left(\ln\left(\frac{x}{3}+2\right)\right)' = \frac{\left(\frac{x}{3}+2\right)'}{\frac{x}{3}+2} = \frac{\left(\frac{x}{3}\right)'+(2)'}{\frac{x}{3}+\frac{6}{3}} = \frac{\frac{1}{3}+0}{\frac{x+6}{3}} = \frac{1}{x+6}$$

Logo, $m = f'(a) = \dfrac{1}{a+6}$

Desta forma temos que:

$$\frac{1}{a+6} = 1 \;\Leftrightarrow\; 1 = a+6 \;\wedge\; a \neq -6 \;\Leftrightarrow\; a = -5$$

Resposta: **Opção D**

6. Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$ podemos afirmar que a reta horizontal definida pela equação $y = 3$ é uma assíntota do gráfico de f

Como $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ podemos afirmar que a reta vertical definida pela equação $x = 1$ é uma assíntota do gráfico de f

Como $y = mx + b$ é uma assíntota não vertical do gráfico de f se $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - mx) = b$, então como $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - 2x) = 1$, temos que a reta definida por $y = 2x+1$ é uma assíntota não vertical do gráfico de f

Assim, a única opção em que são indicadas duas das três assíntotas identificadas é a opção (B).

Resposta: **Opção B**

7. Como $\overline{z_2} = 3 + ki$ temos:

   $z_1 \times \overline{z_2} = (2+i)(3+ki) = 6 + 2ki + 3i + ki^2 = 6 - 1 \times k + i(2k+3) = (6-k) + (2k+3)i$

   Para que $z_1 \times \overline{z_2}$ seja um imaginário puro $\text{Re}\,(z_1 \times \overline{z_2}) = 0$

   Logo $6 - k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6 = k$

   Resposta: **Opção D**

8. Designado por z e w os números complexos que têm por imagens geométricas os pontos F e A, respetivamente. Assim temos que $|z| = |w| = 3$, porque os pontos A e F estão a igual distância da origem.

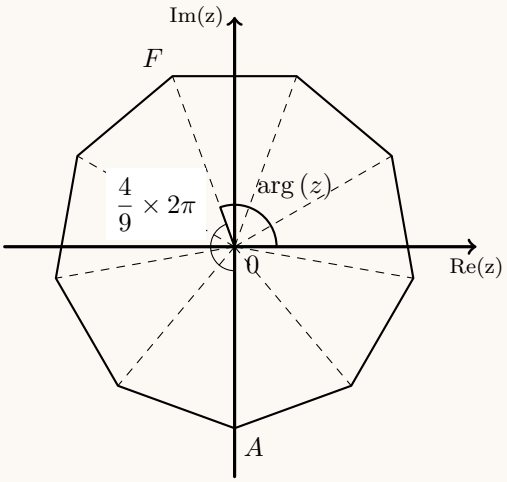
   Sabemos que o ângulo FOA tem amplitude $\frac{4}{9} \times 2\pi = \frac{8\pi}{9}$, porque os vértices do polígono dividem o ângulo giro em 9 partes iguais.

   Logo $\arg(w) = \arg(z) + \frac{10\pi}{9}$

   Como o ponto A está dobre a parte negativa do eixo imaginário temos que $\arg(w) = \frac{3\pi}{2}$, pelo que, substituindo na igualdade anterior, vem:

   $\frac{3\pi}{2} = \arg(z) + \frac{8\pi}{9} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3\pi}{2} - \frac{8\pi}{9} = \arg(z) \quad \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \quad \frac{27\pi}{18} - \frac{16\pi}{18} = \arg(z) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{11\pi}{18} = \arg(z)$

   Resposta: **Opção B**

GRUPO II

1.

1.1. Sabemos que $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$, e que é válida a igualdade $i^n = i^k$, onde k é o resto da divisão inteira de n por 4.
Assim, como $4n - 6 = 4n - 8 + 2 = 4(n-2)+\mathbf{2}$ temos que $i^{4n-6} = i^2 = -1$

Devemos escrever $2\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ na f.a. para podermos somar as parcelas do numerador:

$2\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

Assim temos que:

$$\frac{\sqrt{3} \times i^{4n-6} + 2\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{\sqrt{3} \times (-1) + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)}{2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{3} - \frac{2}{2}i}{2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{-i}{2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)} =$$

$$= \frac{\text{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{1}{2}\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\,\text{cis}\left(-\frac{7\pi}{10}\right) = \frac{1}{2}\,\text{cis}\left(\frac{13\pi}{10}\right)$$

1.2. Como $z_1 = \operatorname{cis}\alpha = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha$ e

$z_2 = \operatorname{cis}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\alpha + i\cos\alpha$, vem que:

$z_1 + z_2 = (\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) + (-\operatorname{sen}\alpha + i\cos\alpha) = (\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha) + i(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)$

Assim,

- $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha$ e como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$, logo
  $\cos\alpha < \operatorname{sen}\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha < 0$, logo temos que $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) < 0$
- $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha$ e como α é um ângulo do 1º quadrante,
  $\operatorname{sen}\alpha > 0 \wedge \cos\alpha > 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha > 0$, logo temos que $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) > 0$

Ou seja, a representação geométrica de $z_1 + z_2$ no plano complexo, pertence ao 2.º quadrante.

2.

2.1. Como a experiência «*Analisar um pacote de açucar*» se repete dez vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades da variável X:«*Número de pacotes em condições de serem comercializados*», segue o modelo binomial $\left(P(X = k) = {}^{n}C_k\, p^k\, q^{n-k}\right)$.

Considerando como sucesso o acontecimento «*Pacote estar em condições de ser comercializado*», a respetiva probabilidade, é:

$$p = P(5{,}7 < Y < 7{,}3) = P(6{,}5 - 2 \times 0{,}4 < Y < 6{,}5 + 2 \times 0{,}4) = P(\mu - 2\sigma < Y < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$$

Logo, $q = 1 - p = 1 - P(5{,}7 < Y < 7{,}3) \approx 1 - 0{,}9545 = 0{,}0455$

Assim temos $n = 10$, vem $p \approx 0{,}9545$ e $q \approx 0{,}0455$, pelo que:

$$P(X = 8) = {}^{10}C_8 \times (0{,}9545)^8 \times (0{,}0455)^2 \approx 0{,}064$$

2.2. A resposta (I) $({}^{500}C_{30} - {}^{498}C_{28})$ pode ser interpretada como:
O número total de grupos de 30 funcionários que se podem escolher são ${}^{500}C_{30}$. Naturalmente em alguns destes estão presentes as duas irmãs.
Se ao número total destes grupos subtrairmos o número de grupos em que as duas irmãs estão presentes, ou seja, os grupos de 30 elementos que incluem as duas irmãs e mais 28 de entre os restantes 498 funcionários $({}^{498}C_{28})$, restam apenas os grupos onde está apenas uma das irmãs ou então nenhuma delas, o que significa que pelo menos uma delas não integrará o grupo de funcionários escolhidos.

A resposta (II) $(2 \times {}^{498}C_{29} + {}^{498}C_{30})$ pode ser interpretada como:
Os grupos de 30 funcionários, que respeitam a condição defina, podem ser de dois tipos:

- Apenas uma das irmãs pertence ao grupo.
  Existem $2 \times {}^{498}C_{29}$ grupos deste tipo, pois resultam de incluir 1 das 2 irmãs e mais 29 funcionários, escolhidos de entre os restantes 498.
- Nenhuma das irmãs pertence ao grupo. Existem ${}^{498}C_{30}$ grupos deste tipo, pois resultam da escolha de 30 funcionários do grupo de 498 funcionários que não incluí as irmãs.

Assim, $2 \times {}^{498}C_{29} + {}^{498}C_{30}$ representa o número de grupos que incluí apenas uma das irmãs, adicionado ao número de grupos que não incluí nenhuma das irmãs.

3. Temos que:

$$\begin{aligned}
P\left(\overline{A\cap B}|B\right)+P(A|B) &= \frac{P\left(\left(\overline{A\cap B}\right)\cap B\right)}{P(B)}+\frac{P(A\cap B)}{P(B)} && \text{Definição: } P(X|Y)=\frac{P(X\cap Y)}{P(Y)}\\
&= \frac{P\left(\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\cap B\right)+P(A\cap B)}{P(B)} && \text{Leis de De Morgan: } \overline{X\cap Y}=\overline{X}\cup\overline{Y}\\
&= \frac{P\left(\left(\overline{A}\cap B\right)\cup\left(\overline{B}\cap B\right)\right)+P(A\cap B)}{P(B)} &&\\
&= \frac{P\left(\overline{A}\cap B\right)+P(A\cap B)}{P(B)} && \overline{B}\cap B=\emptyset \text{ e } X\cup\emptyset=X\\
&= \frac{P(B)-P(A\cap B)+P(A\cap B)}{P(B)} && \text{Teorema: } P\left(X\cap\overline{Y}\right)=P(X)-P(X\cap Y)\\
&= \frac{P(B)}{P(B)} &&\\
&= 1 && \text{Hipótese: } P(B)\neq 0
\end{aligned}$$

Logo, se $P(B)\neq 0$ então $P\left(\overline{A\cap B}|B\right)+P(A|B)=1$ *q.e.d.*

4.

4.1. Temos que $f(0)=1-e^{k+1}$

Calculando $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, vem

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{4x}}{x}=\frac{1-e^{4(0^+)}}{0^+}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}\ \text{(Indeterminação)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{4x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-(-1+e^{4x})}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{4}{4}\times\frac{-(e^{4x}-1)}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(-4\times\frac{(e^{4x}-1)}{4x}\right)=\lim_{x\to 0^+}(-4)\times\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^{4x}-1)}{4x}}_{\text{Lim. Notável}}=-4\times 1=-4$$

Como se pretende que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$, vem

$$-4=1-e^{k+1}\ \Leftrightarrow\ e^{k+1}=1+4\ \Leftrightarrow\ e^{k+1}=5\ \Leftrightarrow\ k+1=\ln 5\ \Leftrightarrow\ k=-1+\ln 5$$

4.2. Como a função f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, porque resulta de operações sucessivas entre funções contínuas, só podem existir assíntotas verticais quando $x \to 0^-$ ou quando $x \to 0^+$.
Calculando os limites temos:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-e^{4x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-\left(e^{4x}-1\right)}{\frac{1}{4}\times 4x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-4\left(e^{4x}-1\right)}{4x} = -4\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{4x}-1}{4x} = -4$

  (fazendo $y = 4x$, se $x \to 0^+$, então $y \to 0^+$)

  $$= -4 \underbrace{\lim_{y\to 0^+} \frac{e^y-1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = -4 \times 1 = -4$$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\sqrt{1-x^3}} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{(\operatorname{sen} x)(1+\sqrt{1-x^3})}{(1-\sqrt{1-x^3})(1+\sqrt{1-x^3})} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{(\operatorname{sen} x)(1+\sqrt{1-x^3})}{1^2-(\sqrt{1-x^3})^2} =$

  $$= \lim_{x\to 0^-} \frac{(\operatorname{sen} x)(1+\sqrt{1-x^3})}{1-(1-x^3)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(\operatorname{sen} x)(1+\sqrt{1-x^3})}{1-1+x^3} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(\operatorname{sen} x)(1+\sqrt{1-x^3})}{x^3} =$$

  $$= \underbrace{\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x\to 0^-} \frac{1+\sqrt{1-x^3}}{x^2} = 1 \times \frac{1+\sqrt{1}}{(0^-)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Assim podemos concluir que $x = 0$ é a única assíntota vertical do gráfico de f (quando $x \to 0^-$).

4.3. Para estudar o sentido o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$\text{Como } x \in \mathbb{R}^+ \,,\ g'(x) = f(x) - \frac{1}{x} = \frac{1-e^{4x}}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1-e^{4x}-1}{x} = -\frac{e^{4x}}{x}$$

$$g''(x) = \left(g'(x)\right)' = \left(-\frac{e^{4x}}{x}\right)' = -\left(\frac{e^{4x}}{x}\right)' = -\frac{(e^{4x})' \times x - e^{4x} \times (x)'}{x^2} = -\frac{(4x)'e^{4x} \times x - e^{4x}}{x^2} =$$

$$= -\frac{4e^{4x} \times x - e^{4x}}{x^2} = -\frac{e^{4x}(4x-1)}{x^2}$$

Determinando os zeros da segunda derivada, vem:

$$g''(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ -\frac{e^{4x}(4x-1)}{x^2} = 0 \ \Leftrightarrow\ -e^{4x}(4x-1) = 0 \wedge \underbrace{x^2 \neq 0}_{\text{PV, } x>0} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \underbrace{-e^{4x} = 0}_{\text{Eq Imp}} \vee 4x - 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ x = \frac{1}{4}$$

Assim, estudando a variação de sinal de g'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de g, vem:

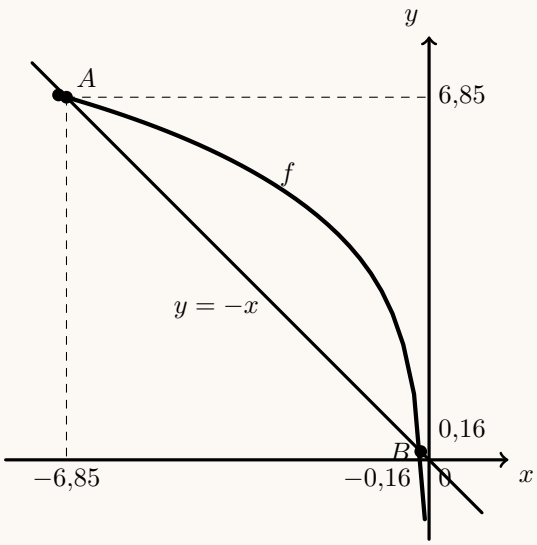
x	0		$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$g''(x)$	n.d.	$+$	0	$-$
$g(x)$	n.d.	∪	Pt. I.	∩

Logo, podemos concluir que o gráfico de g:

- tem um único ponto de inflexão (de abcissa $x = \frac{1}{4}$)
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]0, \frac{1}{4}[$
- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]\frac{1}{4}, +\infty[$

5. A bissetriz dos quadrantes pares, é a reta de equação $y = -x$, logo as coordenadas dos pontos A e B podem ser determinadas através da interseção do gráfico da função f com a reta $y = -x$.

Assim, traçando, na calculadora gráfica, os gráficos da função f e da reta, numa janela compatível como o domínio da função f, $(-7 \leq x < 0)$ - reproduzidos na figura ao lado - e recorrendo à função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, obtemos valores, aproximado às centésimas, para as coordenadas dos pontos $A(-6{,}85; 6{,}85)$ e $B(-0{,}16; 0{,}16)$

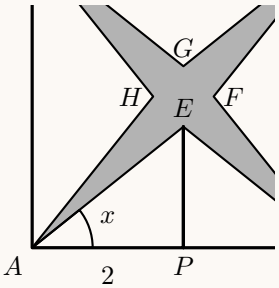


Calculando a distância entre dois pontos pela fórmula $d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2)}$ vem que:

$d \approx \sqrt{(-0.16 - (-6.85))^2 + (0.16 - 6.85)^2} \approx$
$\approx \sqrt{6{,}69^2 + (-6{,}69)^2} \approx \sqrt{44{,}756 + 44{,}756} \approx$
$\approx \sqrt{89{,}512} \approx 9{,}46$

6.

6.1. Definindo o ponto P, como o ponto médio do lado $[AB]$, a área da região sombreada pode ser calculada como a diferença entre a área do quadrado e a soma das áreas de 8 triângulos retângulos (o triângulo $[AEP]$ e os restantes 7 semelhantes a este):



$$A_{[AEBFCGDH]} = A_{[ABCD]} - 8 \times A_{[AEP]}$$

Como P é o ponto médio de $[AB]$, temos que $\overline{AP} = 2$, podemos determinar $\overline{EP}$, recorrendo à definição de tangente de um ângulo:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{EP}}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{EP}}{2} \Leftrightarrow \overline{EP} = 2 \operatorname{tg} x$$

Assim, calculando a área da região sombreada, vem:

$$A_{[AEBFCGDH]} = A_{[ABCD]} - 8 \times A_{[AEP]} = \overline{AB}^2 - 8 \times \frac{\overline{AP} \times \overline{EP}}{2} = 4^2 - 8 \times \frac{2 \times 2 \operatorname{tg} x}{2} =$$
$$= 16 - 8 \times 2 \operatorname{tg} x = 16 - 16 \operatorname{tg} x = 16(1 - \operatorname{tg} x)$$

Logo, para cada valor de $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, a área da região sombreada é dada por $a(x) = 16(1 - \operatorname{tg} x)$

6.2. Como a função a resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{5}\right]$.

Como $4{,}38 < 5 < 11{,}71$, ou seja, $a\left(\frac{\pi}{5}\right) < 5 < a\left(\frac{\pi}{12}\right)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $\alpha \in \left]\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{5}\right[$, tal que $a(\alpha) = 5$, ou seja, que existe um ângulo α com amplitude compreendida entre $\frac{\pi}{12}\ rad$ e $\frac{\pi}{5}\ rad$, que define uma região sombreada com área 5.

C.A.

$$a\left(\frac{\pi}{12}\right) = 16\left(1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) \approx 11{,}71$$

$$a\left(\frac{\pi}{5}\right) = 16\left(1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) \approx 4{,}38$$

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de março

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/Época Especial

14 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2012

Página em branco

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respetivas respostas.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 4, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr $(\alpha - amplitude,\ em\ radianos,\ do\ ângulo\ ao\ centro;\ \ r - raio)$

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ $(\alpha - amplitude,\ em\ radianos,\ do\ ângulo\ ao\ centro;\ \ r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ $(r - raio\ da\ base;\ \ g - geratriz)$

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ $(r - raio)$

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ $(r - raio)$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a\ \cos b + \operatorname{sen} b\ \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\ \cos b - \operatorname{sen} a\ \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a\ \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u'\ \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\ e^u$

$(a^u)' = u'\ a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Uma sequência de algarismos cuja leitura da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita dá o mesmo número designa-se por capicua. Por exemplo, 103301 é capicua.

Quantos números com seis algarismos são capicuas?

(A) 729 **(B)** 900 **(C)** $810\,000$ **(D)** $900\,000$

2. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte.

x_i	-1	0	1
$P(X = x_i)$	$1 - 3a$	$2a$	a

Sabe-se que $P(X = 0 \vee X = 1) = 0{,}81$

Qual é o valor médio de X?

(A) $0{,}46$ **(B)** $0{,}27$ **(C)** $0{,}08$ **(D)** 0

3. Considere um dado cúbico, com as faces numeradas de 1 a 6, e um saco que contém cinco bolas, indistinguíveis ao tato, cada uma delas numerada com um número diferente: $0, 1, 2, 3$ e 4.

Lança-se o dado uma vez e retira-se, ao acaso, uma bola do saco, registando-se os números que saíram.

Qual é a probabilidade de o produto desses números ser igual a zero?

(A) 0 **(B)** $\frac{1}{15}$ **(C)** $\frac{1}{30}$ **(D)** $\frac{1}{5}$

4. Na Figura 1, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico de h'', segunda derivada de uma função h, de domínio $\mathbb{R}$

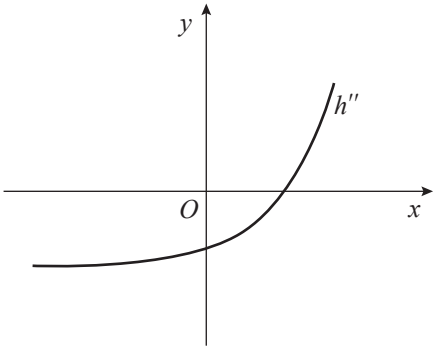
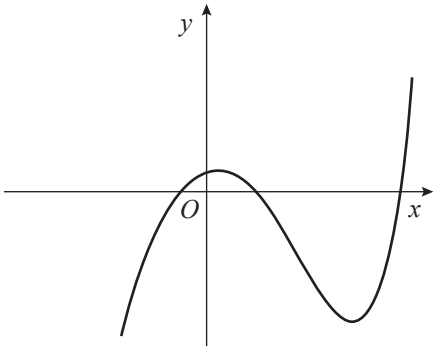


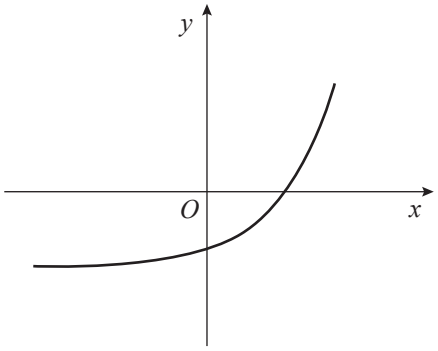
Figura 1

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função h?

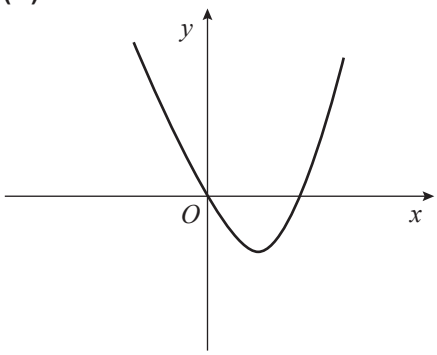
(A)



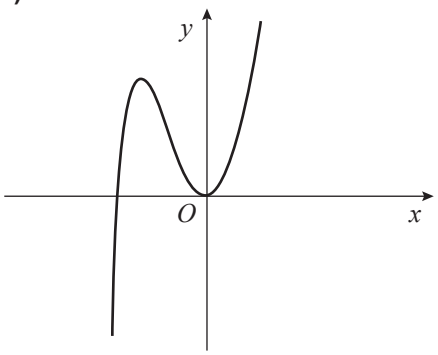
(B)



(C)



(D)



5. Sejam f e g funções de domínio $]0,+\infty[$

Sabe-se que:

- a reta de equação $y=3$ é assíntota horizontal do gráfico de f
- f não tem zeros;
- $g(x)=\dfrac{e^{-x}-3}{f(x)}$

Qual das opções seguintes define uma assíntota horizontal do gráfico de g?

(A) $y=3$ **(B)** $y=e$ **(C)** $y=0$ **(D)** $y=-1$

6. Sejam $a,\ b$ e c três números tais que $a\in]1,+\infty[,\ b\in\mathbb{R}^+$ e $c\in\mathbb{R}^+$

Sabe-se que $\log_a b=c$ e que $\log_a\sqrt{c}=3$

Qual das expressões seguintes é equivalente a $\log_a\sqrt{b\times c}$?

(A) $c+3$ **(B)** $c-3$ **(C)** $\dfrac{c}{2}+3$ **(D)** $\dfrac{c}{2}-3$

7. Sejam k e p dois números reais tais que os números complexos $z=1+i$ e $w=(k-1)+2p\,i^{11}$ sejam inversos um do outro.

Qual é o valor de $k+p$?

(A) $-\dfrac{1}{4}$ **(B)** $\dfrac{1}{2}$ **(C)** $\dfrac{5}{4}$ **(D)** $\dfrac{7}{4}$

8. Na Figura 2, estão representadas, no plano complexo, uma circunferência, de centro na origem e de raio 1, e uma reta r, definida por $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$

Seja z_1 o número complexo cuja imagem geométrica está no 1.º quadrante e é o ponto de intersecção da circunferência com a reta r

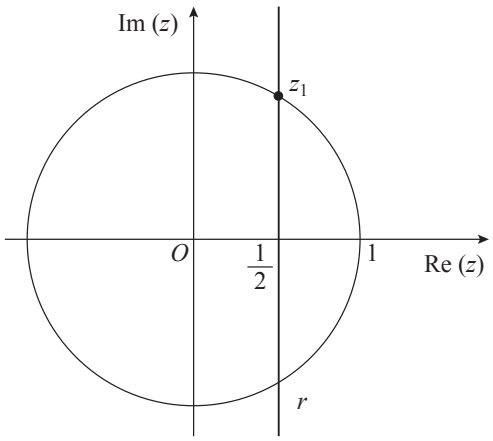


Figura 2

Qual das opções seguintes apresenta uma equação de que z_1 é solução?

(A) $|z-1| = |z-i|$ **(B)** $\mathrm{Im}(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **(C)** $\left|z - \frac{1}{2}\right| = 1$ **(D)** $|1-z| = \sqrt{2}$

Página em branco

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Resolva os itens seguintes, sem recorrer à calculadora.

1.1. Considere o número complexo $z = 8\sqrt{3} - 8i$

Determine as raízes de índice 4 de z

Apresente as raízes na forma trigonométrica.

1.2. Seja w um número complexo não nulo.

Mostre que, se o conjugado de w é igual a metade do inverso de w, então a imagem geométrica de w pertence à circunferência de centro na origem e de raio $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Considere uma empresa em que:

- 80% dos funcionários apostam no euromilhões;
- dos funcionários que apostam no euromilhões, 25% apostam no totoloto;
- 5% dos funcionários não apostam no euromilhões nem no totoloto.

2.1. Determine a probabilidade de, ao escolher, ao acaso, um funcionário dessa empresa, ele apostar no totoloto.

2.2. Considere agora que essa empresa tem 50 funcionários.

Escolhem-se, ao acaso, oito funcionários dessa empresa.

Determine a probabilidade de, pelo menos, sete desses funcionários serem apostadores no euromilhões.

Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Mostre que, se A e B são dois acontecimentos independentes, então

$$P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A}) \times \left(1 - P(B)\right) = P(\overline{A})$$

4. Admita que a concentração de um produto químico na água, em gramas por litro, t minutos após a sua colocação na água, é dada, aproximadamente, por

$$C(t) = 0{,}5t^2 \times e^{-0{,}1t}, \text{ com } t \geq 0$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

4.1. Mostre que, durante os primeiros 15 minutos após a colocação desse produto químico na água, houve, pelo menos, um instante em que a concentração do produto foi 13 gramas por litro.

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

4.2. Determine o valor de t para o qual a concentração desse produto químico na água é máxima.

5. Considere as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por

$$f(x) = -x + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ e^k - 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{com } k \in \mathbb{R}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

5.1. Determine k de modo que a função g seja contínua.

5.2. Determine, em $]-2\pi, 5\pi[$, as soluções da equação $2f'(x) = \left(f(x) + x\right)^2 - 1$

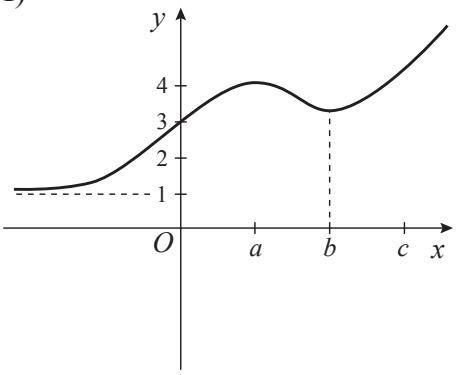
6. Considere, num referencial o. n. xOy, o gráfico de uma função h, de domínio $\mathbb{R}$

Sabe-se que:

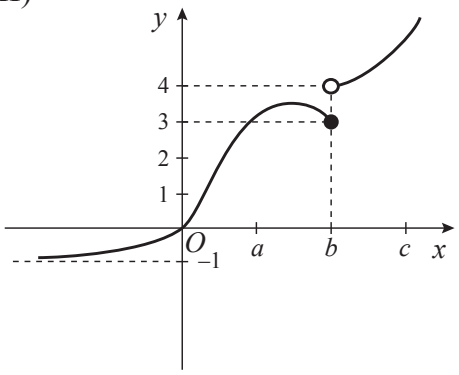
- a, b e c são números reais positivos e $a < b < c$
- h tem um mínimo relativo em $]a, c[$
- h é crescente em $]-\infty, 0[$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(h(x) - 1\right) = 0$
- a segunda derivada, h'', da função h é tal que $h''(x) > 0$ para $x > b$

Apenas uma das opções seguintes pode representar uma parte do gráfico da função h

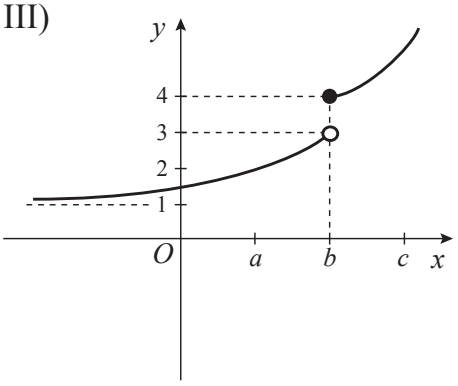
I)



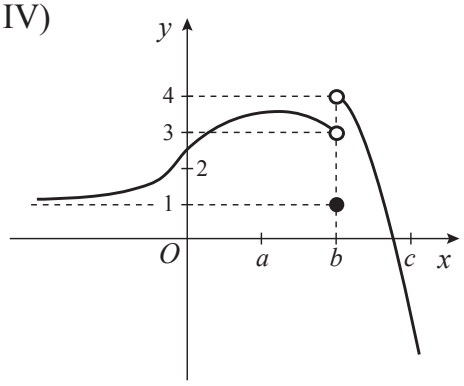
II)



III)



IV)



Elabore uma composição na qual:

- indique a opção que pode representar h
- apresente três razões para rejeitar as restantes opções, uma por cada opção rejeitada.

7. Considere, num referencial o. n. xOy, o gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$$f(x) = e^{0,1x} + \ln(3x + 1)$$

Seja P um ponto do gráfico de f

A distância do ponto P à origem é igual a 2

Determine a abcissa do ponto P, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abcissa do ponto P com arredondamento às centésimas.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** .....(8 × 5 pontos)..... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1.
- **1.1.** ..... 15 pontos
- **1.2.** ..... 15 pontos

2.
- **2.1.** ..... 15 pontos
- **2.2.** ..... 15 pontos

3. ..... 15 pontos

4.
- **4.1.** ..... 10 pontos
- **4.2.** ..... 15 pontos

5.
- **5.1.** ..... 15 pontos
- **5.2.** ..... 15 pontos

6. ..... 15 pontos

7. ..... 15 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de março

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/Época Especial

Critérios de Classificação — 10 Páginas

2012

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** ..... (8 × 5 pontos) ..... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1.

1.1. ..... 15 pontos

1.2. ..... 15 pontos

2.

2.1. ..... 15 pontos

2.2. ..... 15 pontos

3. ..... 15 pontos

4.

4.1. ..... 10 pontos

4.2. ..... 15 pontos

5.

5.1. ..... 15 pontos

5.2. ..... 15 pontos

6. ..... 15 pontos

7. ..... 15 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

A classificação da prova deve respeitar integralmente os critérios gerais e os critérios específicos a seguir apresentados.

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos de classificação apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro, previsto na grelha de classificação.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos. No entanto, em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se o examinando responder a um mesmo item mais do que uma vez, não eliminando inequivocamente a(s) resposta(s) que não deseja que seja(m) classificada(s), deve ser considerada apenas a resposta que surgir em primeiro lugar.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova (Versão 1 ou Versão 2) implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de seleção (escolha múltipla).

Nos itens de seleção (escolha múltipla), a cotação total do item é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a única opção correta.

São classificadas com zero pontos as respostas em que seja assinalada:

– uma opção incorreta;

– mais do que uma opção.

Não há lugar a classificações intermédias.

Os critérios de classificação das respostas aos itens de construção apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

Nos itens de construção com cotação igual ou superior a quinze pontos e que impliquem a produção de um texto, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea das competências específicas da disciplina e das competências de comunicação escrita em língua portuguesa. A avaliação das competências de comunicação escrita em língua portuguesa contribui para valorizar a classificação atribuída ao desempenho no domínio das competências específicas da disciplina. Esta valorização corresponde a cerca de 10% da cotação do item e faz-se de acordo com os níveis de desempenho a seguir descritos.

Níveis	Descritores
3	Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
2	Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
1	Composição sem estruturação aparente, com erros graves de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é zero pontos. Neste caso, não é classificado o desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

Até ao ano letivo 2013/2014, na classificação das provas, continuarão a ser consideradas corretas as grafias que seguirem o que se encontra previsto quer no Acordo de 1945, quer no Acordo de 1990 (atualmente em vigor), mesmo quando se utilizem as duas grafias numa mesma prova.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar em situações não descritas anteriormente.

Situação	Classificação
1. Classificação da resposta a um item cujo critério se apresenta organizado por etapas.	A pontuação indicada para cada etapa é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A classificação da resposta resulta da soma das pontuações das diferentes etapas, à qual se subtrai, eventualmente, um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 13 e/ou 18.
2. Pontuação de uma etapa dividida em passos.	A pontuação indicada para cada passo é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A pontuação da etapa resulta da soma das pontuações dos diferentes passos.
3. Classificação da resposta a um item ou pontuação de uma etapa cujo critério se apresenta organizado por níveis de desempenho.	A resposta é enquadrada numa das descrições apresentadas. À classificação/pontuação correspondente subtrai-se, eventualmente, um ou dois pontos, se ocorrer um erro ocasional num cálculo, e/ou se se utilizar simbologia ou expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.
4. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite e classificado qualquer processo de resolução cientificamente correto. O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante distribuição da cotação do item pelas etapas* percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.
5. Apresentação apenas do resultado final, se a resolução do item exige cálculos e/ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
6. Utilização de processos de resolução que não respeitam as instruções dadas [exemplo: «usando métodos analíticos»].	A etapa em que a instrução não é respeitada é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
7. Ausência de apresentação dos cálculos e/ou das justificações necessárias à resolução de uma etapa*.	A etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
8. Ausência de apresentação explícita de uma dada etapa que não envolva cálculos e/ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, a mesma é pontuada com a pontuação total para ela prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.

* Em situações em que o critério é aplicável tanto a **etapas** como a **passos**, utiliza-se apenas o termo «etapas» por razões de simplificação da apresentação.

Situação	Classificação
9. Transposição incorreta de dados do enunciado e/ou transposição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se o grau de dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.
10. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre.
11. Ocorrência de um erro ocasional que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.	A pontuação máxima a atribuir nessa etapa deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.
12. Ocorrência de um erro ocasional na resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada de acordo com o erro cometido. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido: – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.
13. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à classificação da resposta, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
14. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
15. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final [exemplo: «15» em vez de «15 metros»].	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação para ela prevista.
16. Apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
17. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, e/ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à classificação da resposta, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. ..... (8 × 5 pontos)..... **40 pontos**

As respostas corretas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
	B	C	D	A	D	C	D	B

GRUPO II

É de aceitar qualquer processo de resolução cientificamente correto, ainda que não esteja previsto nestes critérios específicos, nem no Programa (ver n.º 4 dos Critérios Gerais de Classificação).

1.1. ..... **15 pontos**

Obter z na forma trigonométrica ..... 6 pontos

Indicar um argumento de z ..... 3 pontos

Indicar o módulo de z ..... 3 pontos

Calcular as raízes de índice 4 de z ..... 9 pontos

Escrever $\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16 \operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{6}\right)}$ ..... 2 pontos

Escrever $\sqrt[4]{z} = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{11\pi + 12k\pi}{24}\right),\ k \in \{0,1,2,3\}$ ..... 3 pontos

Obter $2 \operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{24}\right)$ ..... 1 ponto

Obter $2 \operatorname{cis}\left(\frac{23\pi}{24}\right)$ ..... 1 ponto

Obter $2 \operatorname{cis}\left(\frac{35\pi}{24}\right)$ ..... 1 ponto

Obter $2 \operatorname{cis}\left(\frac{47\pi}{24}\right)$ ..... 1 ponto

1.2. ..... **15 pontos**

Escrever $\overline{w} = \frac{1}{2w}$ ..... 4 pontos

Escrever $\overline{w} \times w = \frac{1}{2}$ ..... 1 ponto

Referir que $\overline{w} \times w = |w|^2$ ..... 5 pontos

Obter $|w| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ..... 2 pontos

Concluir que $|w| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ define a circunferência de centro na origem e de raio $\frac{\sqrt{2}}{2}$.. 3 pontos

2.1. ..... **15 pontos**

Seja A o acontecimento «o funcionário aposta no euromilhões», e seja B o acontecimento «o funcionário aposta no totoloto».

Podem ser admitidas outras designações para os acontecimentos.

Calcular $P(A \cap B)$ ..... 6 pontos

- Escrever $P(A) = 0{,}8$ ..... 1 ponto
- Escrever $P(B \mid A) = 0{,}25$ ..... 2 pontos
- Obter $P(A \cap B)$ ..... 3 pontos

Identificar o pedido com $P(B)$ ..... 1 ponto

Determinar $P(B)$ ..... 8 pontos

- Escrever $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}05$ ..... 2 pontos
- Calcular $P(\overline{A} \cap B)$ ..... 4 pontos
  - Escrever $P(\overline{A}) = 0{,}2$ ..... 2 pontos
  - Obter $P(\overline{A} \cap B)$ ..... 2 pontos
- Obter $P(B)$ ..... 2 pontos

OU

- Escrever $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}05$ ..... 2 pontos
- Calcular $P(A \cap \overline{B})$ ..... 2 pontos
- Calcular $P(\overline{B})$ ..... 2 pontos
- Obter $P(B)$ ..... 2 pontos

2.2. ..... **15 pontos**

Escrever a expressão que dá o valor pedido (**ver nota 1**) ..... 13 pontos

Calcular o valor pedido (**ver nota 2**) ..... 2 pontos

Notas:

1. Esta etapa deve ser classificada de acordo com os seguintes níveis de desempenho.

$\frac{{}^{40}C_7 \times 10 + {}^{40}C_8}{{}^{50}C_8}$ (ou equivalente) ..... 13 pontos

$\frac{^{40}C_7 \times 10}{^{50}C_8}$ OU $\frac{^{40}C_8}{^{50}C_8}$ (ou equivalente) ..... 6 pontos

Outras frações próprias com denominador $^{50}C_8$ ..... 2 pontos

Outras respostas ..... 0 pontos

2. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se o resultado estiver de acordo com a expressão escrita pelo examinando e se essa expressão não tiver sido pontuada com zero pontos.

3. ..... **15 pontos**

A resposta deve incluir os pontos seguintes.

- $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $\left(1 - P(A)\right) \times \left(1 - P(B)\right) = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \times P(B)$
- $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ se A e B são acontecimentos independentes.

Níveis	Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina	Pontuação
5	A resposta apresenta corretamente os quatro pontos e a conclusão pretendida.	15
4	A resposta apresenta corretamente os quatro pontos, mas não apresenta a conclusão pretendida.	12
3	A resposta apresenta corretamente apenas três pontos.	9
2	A resposta apresenta corretamente apenas dois pontos.	6
1	A resposta apresenta corretamente apenas um ponto.	3

4.1. ..... **10 pontos**

Referir que a função C é contínua em $[0, 15]$ (**ver notas 1**, **2** e **3**) ..... 3 pontos

Calcular $C(0)$ ..... 1 ponto

Calcular $C(15)$ ..... 1 ponto

Escrever $C(0) < 13 < C(15)$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

Referir que o pretendido resulta do teorema de Bolzano ..... 2 pontos

Notas:

1. Se o examinando não referir que a função é contínua em $[0, 15]$, a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos.

2. Se o examinando referir que a função é contínua em $]0, 15[$, a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos.

3. Se o examinando referir que a função é contínua no domínio, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

4.2. ..... **15 pontos**

Determinar C' ..... 6 pontos

Escrever $\left(0{,}5t^2 \times e^{-0{,}1t}\right)'$ ..... 1 ponto

Escrever $\left(0{,}5t^2\right)' \times e^{-0{,}1t} + 0{,}5t^2 \times \left(e^{-0{,}1t}\right)'$ (ou equivalente).. 2 pontos

Determinar $\left(0{,}5t^2\right)'$ ..... 1 ponto

Determinar $\left(e^{-0{,}1t}\right)'$ ..... 1 ponto

Obter C' ..... 1 ponto

Estudar o sinal de C', recorrendo a um quadro (**ver nota**) ..... 7 pontos

Preencher a primeira linha do quadro (de acordo com o domínio da função) ..... 1 ponto

Indicar o sinal de C' ..... 4 pontos

Determinar os zeros de C' ..... 2 pontos

Concluir que C' é negativa em $]20, +\infty[$ ..... 1 ponto

Concluir que C' é positiva em $]0, 20[$ ..... 1 ponto

Relacionar o sinal de C' com a monotonia de C ..... 2 pontos

Apresentar o valor de t ..... 2 pontos

Nota – Se o examinando não recorrer a um quadro, mas apresentar uma justificação equivalente, a pontuação a atribuir nesta etapa não deve ser desvalorizada.

5.1. ..... **15 pontos**

Referir que, para g ser contínua, g tem de ser contínua em $x = 0$ ..... 1 ponto

Referir que, para g ser contínua em $x = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = g(0)$ ..... 2 pontos

Calcular $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ ..... 8 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$ ..... 1 ponto

Levantar a indeterminação ..... 6 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 0} \left(-1 + \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{x} \right)$ (ou equivalente).. 2 pontos

Escrever $\lim_{x\to 0}\left(-1+\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)=$

$=-1+\lim_{\frac{x}{2}\to 0}\left(\frac{1}{2}\times\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)$ (**ver nota**) ..... 3 pontos

Referir o limite notável $\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(y)}{y}=1$
(ou equivalente) ..... 1 ponto

Obter o valor de $\lim_{x\to 0} g(x)$ ..... 1 ponto

Calcular o valor de k ..... 4 pontos

Escrever $g(0)=e^k-1$ ..... 2 pontos

Obter o valor de k ..... 2 pontos

Nota – Se o examinando escrever $x\to 0$ em vez de $\frac{x}{2}\to 0$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

5.2. ..... **15 pontos**

Determinar f' ..... 5 pontos

Escrever $\left(-x+\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)'$ ..... 1 ponto

Escrever $\left(-x+\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)'=(-x)'+\left(\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)'$ ..... 1 ponto

Determinar $(-x)'$ ..... 1 ponto

Determinar $\left(\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)'$ ..... 1 ponto

Obter f' ..... 1 ponto

Resolver a equação $2f'(x)=(f(x)+x)^2-1$ em $]-2\pi,\,5\pi[$ ..... 10 pontos

Obter $-2+\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)-1$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Substituir $\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)-1$ por $\left(-\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ ..... 1 ponto

Obter $-2+\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)=0$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Obter $\cos\left(\frac{x}{2}\right)=1 \vee \cos\left(\frac{x}{2}\right)=-2$ ..... 2 pontos

Reconhecer que $\cos\left(\frac{x}{2}\right)=-2$ é uma equação impossível .... 1 ponto

Concluir que $x=0 \vee x=4\pi$ ..... 2 pontos

6. ..... **15 pontos**

A composição deve contemplar os pontos seguintes.

A) A opção que pode representar h
B) Uma razão que permita rejeitar a opção II
C) Uma razão que permita rejeitar a opção III
D) Uma razão que permita rejeitar a opção IV

Na tabela seguinte, indica-se como deve ser classificada a resposta a este item, de acordo com os níveis de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa e com os níveis de desempenho no domínio específico da disciplina.

Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina		Descritores do nível de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa	Níveis*		
			1	**2**	**3**
Níveis	**6**	A composição contempla corretamente os quatro pontos, OU apenas os pontos B, C e D.	13	14	15
	5	A composição contempla corretamente apenas os pontos A, B e C, OU apenas os pontos A, B e D, OU apenas os pontos A, C e D.	10	11	12
	4	A composição contempla corretamente apenas os pontos B e C, OU apenas os pontos B e D, OU apenas os pontos C e D.	7	8	9
	3	A composição contempla corretamente apenas os pontos A e B, OU apenas os pontos A e C, OU apenas os pontos A e D.	4	5	6
	2	A composição contempla corretamente apenas o ponto B, OU apenas o ponto C, OU apenas o ponto D.	1	2	3
	1	A composição contempla apenas o ponto A.	1	1	1

***** Descritores apresentados nos Critérios Gerais de Classificação.

7. ..... **15 pontos**

Equacionar o problema (**ver nota 1**) ..... 7 pontos

Reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados na calculadora (**ver notas 2** e **3**) ..... 5 pontos

Indicar a abcissa do ponto pedido ..... 3 pontos

Notas:

1. Se o examinando escrever a equação $x^2+\left(f(x)\right)^2=2$ (ou equivalente), em vez de $x^2+\left(f(x)\right)^2=4$, a pontuação máxima a atribuir nesta etapa é 3 pontos.

2. Se o examinando não apresentar o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

3. Se o examinando apresentar um gráfico que não respeite o domínio da função, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

Exame nacional de Matemática A **(2012, Época especial)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como o primeiro e último algarismo são iguais, o segundo e o penúltimo também, o mesmo acontecendo com o terceiro e o antepenúltimo, apenas consideramos as escolhas para os 3 primeiros algarismos, sendo os restantes, a repetição das escolhas já feitas, por ordem inversa.

   Assim, para o primeiro algarismo existem 9 hipóteses de escolha (excluímos o algarismo zero). Para o segundo e o terceiro podemos considerar 10 hipóteses para cada um, porque podem ocorrer repetições de algarismos e o zero pode ocorrer em todas as posições à excepção da primeira.

   Assim o um número total de capicuas diferentes (com 6 algarismos) é

   $$9 \times 10 \times 10 = 900$$

   Resposta: **Opção B**

2. Como

   $P(X = 0 \vee X = 1) = 0{,}81 \Leftrightarrow P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}81 \Leftrightarrow 2a + a = 0{,}81 \Leftrightarrow 3a = 0{,}81 \Leftrightarrow a = 0{,}27$

   Temos que o valor médio da variável X, é:

   $$\mu = -1 \times (1 - 3a) + 0 \times 2a + 1 \times a = -1 + 3a + 0 + a = 4a - 1$$

   Substituindo o valor de a, vem:

   $$\mu = 4 \times 0{,}27 - 1 = 0{,}08$$

   Resposta: **Opção C**

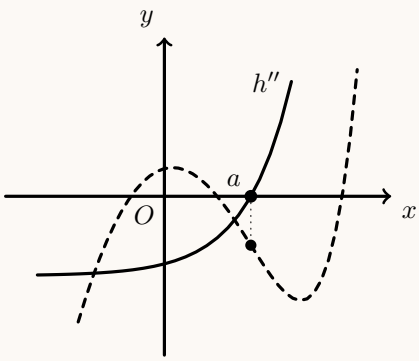
3. Como o zero é o elemento neutro da multiplicação, o produto dos números saídos é zero, se, pelo menos um deles for zero.
   Como no dado não existe qualquer face com o número zero, a ocorrência de um produto igual a zero, depende da bola extraída ter o número zero, independentemente da face do dado que sair.

   Assim, a probabilidade de o produto dos números ser igual a zero é igual à probabilidade de extrair a bola com o número zero do saco, e como existem 5 bolas no saco (número de casos possíveis) e apenas 1 tem o número zero (número de casos possíveis), recorrendo à Regra de Laplace, temos que a probabilidade de o produto dos números ser igual a zero é

   $$p = \frac{1}{5}$$

   Resposta: **Opção D**

4. Seja a, o único zero da segunda derivada ($h''(a) = 0$). Como o zero está associado a uma mudança de sinal da segunda derivada, é um ponto de inflexão do gráfico de h.



Os gráficos das opções (B) e (C) têm a concavidade voltada para cima para todos os valores do domínio.
O gráfico da opção (D) tem um ponto de inflexão de abcissa negativa, por isso, incompatível com a segunda derivada apresentada.
O único gráfico compatível com a abcissa do ponto de inflexão detetado é o gráfico da opção (A).

Resposta: **Opção A**

5. Como o domínio de g é $]0, +\infty[$, a reta defina por $x = k$ é assíntota do gráfico de g, se

$$k = \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

Assim, como a reta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal do gráfico de f, (e o domínio de f é $]0, +\infty[$), temos que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$.
Logo

$$k = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}-3}{f(x)} = \frac{\lim_{x\to+\infty}(e^{-x}-3)}{\lim_{x\to+\infty} f(x)} = \frac{e^{-\infty}-3}{3} = \frac{0^+-3}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

Pelo que a reta de equação $y = -1$ é uma assíntota do gráfico de e quando x tende para $+\infty$

Resposta: **Opção D**

6. Como

$$\log_a \sqrt{c} = 3 \Leftrightarrow \log_a (c)^{\frac{1}{2}} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_a c = 3 \Leftrightarrow \log_a c = 6$$

e $\log_a b = c$, usando as propriedades dos logaritmos, temos que

$$\log_a \sqrt{b\times c} = \log_a (b\times c)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_a (b\times c) = \frac{1}{2}(\log_a b + \log_a c) = \frac{1}{2}(c+6) = \frac{c+6}{2} = \frac{c}{2}+3$$

Resposta: **Opção C**

7. Se z e w são inversos um do outro, temos que $\frac{1}{z} = w$

Por um lado $\frac{1}{z} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1-i)(1-i)} = \frac{1-i}{1^2-i^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

Por outro lado. como $11 = 4\times 2+3$, sabemos que $i^{11} = i^3 = -i$ e assim
$w = (k-1) + 2pi^{11} = (k-1) + 2p(-i) = (k-1) - (2p)i$

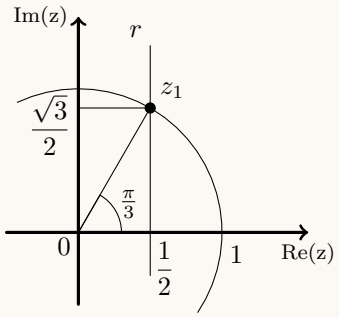
Como $\frac{1}{z} = w$ temos que $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = (k-1) - (2p)i$

Logo $\frac{1}{2} = k-1 \ \wedge \ \frac{1}{2} = 2p \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}+1 = k \ \wedge \ \frac{1}{4} = p \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2} = k \ \wedge \ \frac{1}{4} = p$

Assim temos que $k+p = \frac{3}{2}+\frac{1}{4} = \frac{6}{4}+\frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

Resposta: **Opção D**

8. Seja $\theta = \arg(z_1)$. Como $\text{Re}(z_1) = \frac{1}{2} = \cos\theta$, $|z_1| = 1$ e θ é um ângulo do 1º quadrante, temos que $\theta = \frac{\pi}{3}$



Logo, temos que:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{Im}(z)$$

Resposta: **Opção B**

GRUPO II

1.

1.1. Escrevendo z na f.t. temos $z = \rho\,\text{cis}\,\theta$, onde:

- $\rho = |z| = \sqrt{(8\sqrt{3})^2 + (-8)^2} = \sqrt{64\times 3 + 64} = \sqrt{64\times 4} = 8\times 2 = 16$
- $\text{tg}\,\theta = \frac{-8}{8\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
  como $\text{sen}\,\theta < 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 4º quadrante, logo $\theta = -\frac{\pi}{6}$

Assim $z = 16\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, e por isso, usando a fórmula de Moivre, temos:

$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16}\,\text{cis}\left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{4}\right)$, $k \in \{0,1,2,3\}$, ou seja, temos 4 raízes de índice 4:

- $k = 0 \;\rightarrow\; z_1 = 2\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{24}\right)$
- $k = 1 \;\rightarrow\; z_2 = 2\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{24} + \frac{2\pi}{4}\right) = 2\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{24} + \frac{12\pi}{24}\right) = 2\,\text{cis}\,\frac{11\pi}{24}$
- $k = 2 \;\rightarrow\; z_3 = 2\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{24} + \frac{4\pi}{4}\right) = 2\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{24} + \frac{24\pi}{24}\right) = 2\,\text{cis}\,\frac{23\pi}{24}$
- $k = 3 \;\rightarrow\; z_4 = 2\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{24} + \frac{6\pi}{4}\right) = 2\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{24} + \frac{36\pi}{24}\right) = 2\,\text{cis}\,\frac{35\pi}{24}$

1.2. Temos que metade do inverso de w é $\frac{\frac{1}{w}}{2} = \frac{1}{2w}$

Logo, como o conjugado de w é igual a metade do inverso de w, vem que: $\overline{w} = \frac{1}{2w} \;\Leftrightarrow\; w\times\overline{w} = \frac{1}{2}$

Se $w = \rho\,\text{cis}\,\theta$, então $\overline{w} = \rho\,\text{cis}\,(-\theta)$ e, por isso, $w\times\overline{w} = (\rho\times\rho)\,\text{cis}\,(\theta + (-\theta)) = \rho^2 cis0 = \rho^2 = |w|^2$

Assim, temos que:

$\overline{w} = \frac{1}{2w} \;\Leftrightarrow\; w\times\overline{w} = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; |w|^2 = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; |w| = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \;\Leftrightarrow\; |w| = \pm\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} \;\Leftrightarrow\; |w| = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Como $|w|$ é um valor positivo, temos que $\overline{w} = \frac{1}{2w} \;\Leftrightarrow\; |w| = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\Leftrightarrow\; |w-0| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ é a condição que define os números complexos, cujas imagens geométricas, no plano complexo, pertencem à circunferência de centro na origem e de raio $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2.

2.1. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um funcionário desta empresa, e os acontecimentos:
T:«O funcionário aposta no totoloto»
E:«O funcionário aposta no euromilhões»
Temos que $P(E) = 0{,}8$, $P(T|E) = 0{,}25$ e $P\left(\overline{T} \cap \overline{E}\right) = 0{,}05$

Organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P(E) = 1 - P(F) = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$
- $P\left(\overline{E}\right) = 1 - P(E) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$
- $P\left(T \cap \overline{E}\right) = P\left(\overline{E}\right) - P\left(\overline{T} \cap \overline{E}\right) = 0{,}2 - 0{,}05 = 0{,}15$

	T	$\overline{T}$	
E	0,2		0,8
$\overline{E}$	0,15	0,05	0,2
	0,35		1

Assim, a probabilidade de, ao escolher, ao acaso, um funcionário dessa empresa, ele apostar no totoloto é

$$P(T) = P(T \cap E) + P\left(T \cap \overline{E}\right) = 0{,}2 + 0{,}15 = 0{,}35$$

2.2. Como selecionamos 8 trabalhadores de entre o total de 50, sem considerar a ordem relevante, temos ${}^{50}C_8$ grupos possíveis de serem selecionados.

Como 80% são apostadores no euromilhões, temos exatamente $50 \times 0{,}8 = 40$ trabalhadores que apostam no euromilhões.
Assim, a probabilidade de selecionar 8 trabalhadores que sejam apostadores pode ser calculada como $\frac{{}^{40}C_8}{{}^{50}C_8}$, sendo o número de casos possíveis, o número de grupos de 8 trabalhadores que se podem fazer com os 40 que são apostadores no euromilhões.

Como existem , $50 - 40 = 10$ trabalhadores que não jogam no euromilhões, temos que existem ${}^{40}C_7 \times 10$ grupos de 8 trabalhadores, onde 7 são apostadores no euromilhões e 1 (de entre 10), não é. Pelo que a probabilidade de selecionar um grupo de 8, onde 7 são apostadores no euromilhões é $\frac{{}^{40}C_7 \times 10}{{}^{50}C_8}$

Assim, calculando a probabilidade de, pelo menos, sete dos oito funcionários selecionados serem apostadores no euromilhões como a soma das duas probabilidades anteriores, e arredondando o resultado às centésimas, vem

$$\frac{{}^{40}C_7 \times 10}{{}^{50}C_8} + \frac{{}^{40}C_8}{{}^{50}C_8} = \frac{{}^{40}C_7 \times 10 + {}^{40}C_8}{{}^{50}C_8} \approx 0{,}49$$

3. Como A e B são acontecimentos independentes, temos que:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

E desta forma, podemos verificar que:

$$\begin{aligned}
P\left(\overline{A} \cap B\right) + P\left(\overline{A}\right) \times \left(1 - P(B)\right) &= P\left(\overline{A} \cap B\right) + \left(1 - P(A)\right) \times \left(1 - P(B)\right) && (1)\\
&= P\left(\overline{A} \cap B\right) + 1 - P(B) - P(A) + P(A) \times P(B)\\
&= P\left(\overline{A} \cap B\right) + 1 - P(B) - P(A) + P(A \cap B) && (2)\\
&= P\left(\overline{A} \cap B\right) + P(A \cap B) + 1 - P(B) - P(A)\\
&= P(B) + 1 - P(B) - P(A) && (3)\\
&= 1 - P(A)\\
&= P\left(\overline{A}\right) && (1)
\end{aligned}$$

(1) Teorema: $P\left(\overline{X}\right) = 1 - P(X)$
(2) Hipótese: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
(3) Teorema: $P(X) = P(X \cap Y) + P\left(X \cap \overline{Y}\right)$

Logo $P\left(\overline{A} \cap B\right) + P\left(\overline{A}\right) \times \left(1 - P(B)\right) = P\left(\overline{A}\right)$ *q.e.d.*

4.

4.1.

Como a função C resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}_0^+$, é contínua em $\mathbb{R}_0^+$, e também, em $[0{,}15]$, porque $[0{,}15] \subset \mathbb{R}_0^+$

Como $0 < 13 < 25{,}102$, ou seja, como $C(0) < 13 < C(15)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $t_0 \in]0{,}15[$ tal que $C(t_0) = 13$, ou seja que, durante os primeiros 15 minutos após a colocação do produto químico na água, houve, pelo menos, um instante em que a concentração do produto foi 13 gramas por litro.

C.A.

$C(0) = 0{,}5(0)^2 \times e^{-0{,}1 \times 0} =$

$= 0 \times e^0 = 0$

$C(15) = 0{,}5(15)^2 \times e^{-0{,}1 \times 15} \approx$

$\approx 25{,}102$

4.2. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$C'(t) = \left(0{,}5t^2 \times e^{-0{,}1t}\right)' = 0{,}5\left((t^2)' \times e^{-0{,}1t} + t^2 \times (e^{-0{,}1t})'\right) = 0{,}5\left(2te^{-0{,}1t} + t^2(-0{,}1e^{-0{,}1t})\right) =$$
$$= 0{,}5 \times 2te^{-0{,}1t} - 0{,}5 \times 0{,}1t^2e^{-0{,}1t} = te^{-0{,}1t} - 0{,}05t^2e^{-0{,}1t} = te^{-0{,}1t}(1 - 0{,}05t)$$

Calculando os zeros da derivada, vem:

$$C'(t) = 0 \Leftrightarrow t \times e^{-0{,}1t} \times (1 - 0{,}05t) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{t = 0}_{\text{Eq.Imp.},t>0} \vee \underbrace{e^{-0{,}1t} = 0}_{\text{Eq.Imp.},e^{-0{,}1t}>0} \vee 1 - 0{,}05t = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -0{,}05t = -1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{0{,}05} \Leftrightarrow t = 20$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

t	0		20	$+\infty$
$C'(t)$	+	+	0	−
$C(t)$	min	↗	Máx	↘

Assim, como C é crescente no intervalo $]0{,}20]$ e decrescente no intervalo $[20, +\infty[$ podemos concluir que quando $t = 20$, a concentração do produto químico na água é máxima.

5.

5.1. A função g é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ porque resulta de operações sucessivas entre funções contínuas. Para que a função g seja contínua em $\mathbb{R}$, tem que ser contínua em $x=0$, ou seja, tem que verificar a condição $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{-x+\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} -\frac{x}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = -1 + \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{2y} =$$

$$= -1 + \frac{1}{2}\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = -1+\frac{1}{2}(1) = -\frac{1}{2}$$

Seja $y=\frac{x}{2}$

logo $x = 2y$

Se $x\to 0$ então $y\to 0$

Como $f(0) = e^k - 1$, para que a função seja contínua, tem que se verificar:

$$e^k - 1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^k = 1-\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow k = \ln 1 - \ln 2 \Leftrightarrow k = -\ln 2$$

5.2. Para resolver a equação, começamos por determinar a expressão analítica de f':

$$f'(x) = \left(-x+\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = (-x)' + \left(\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = -1 + \left(\frac{x}{2}\right)'\cos\left(\frac{x}{2}\right) = -1+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Logo, vem que:

$$2f'(x) = (f(x)+x)^2 - 1 \Leftrightarrow 2\left(-1+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \left(-x+\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)+x\right)^2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2+\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \Leftrightarrow -2+\cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow$$

(fórmula fundamental)

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

Se $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-2)}}{2(1)} \Leftrightarrow y = 1 \vee y = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \vee \cos\left(\frac{x}{2}\right) = -2$$

Como $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = -2$ é uma equação impossível, temos:

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 2k\pi\,, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 4k\pi\,, k\in\mathbb{Z}$$

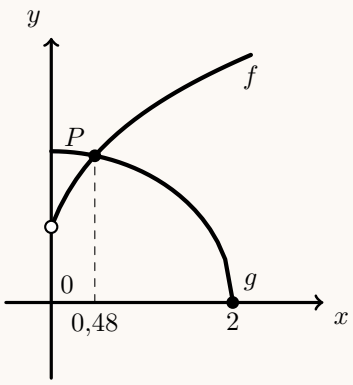
Logo, o conjunto das soluções da equação (em $]-2\pi,5\pi[$), é $\{0,4\}$

6. Das funções representadas graficamente, a única que satisfaz cumulativamente todas as condições definidas é a **opção (I)**.
Podemos rejeitar:

- a **opção (II)**, porque sabemos que $\lim\limits_{x\to-\infty}(h(x)-1) = 0$, ou seja $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 1$, e na função representada nesta opção temos que $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -1$
- a **opção (III)**, porque sabemos que h tem um mínimo relativo em $]a,c[$, porque a função representada nesta opção é crescente neste intervalo, pelo que não se verifica a existência de um mínimo.
- a **opção (IV)**, porque sabemos que $h''(x) > 0$ para $x > b$, ou seja, no intervalo $]b,+\infty[$, o gráfico tem a concavidade voltada para cima, e no gráfico da função representada nesta opção, verifica-se o oposto - no intervalo $]b,+\infty[$, o gráfico tem a concavidade voltada para baixo.

7. Para que um ponto esteja a 2 unidades de distância da origem, deve estar sobre a circunferência de centro na origem e raio 2, ou seja verificar a condição $x^2 + y^2 = 2^2 \Leftrightarrow y^2 = 4 - x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2}$

Logo temos que a abcissa do ponto do gráfico de f que dista 2 unidades da origem é a solução da equação $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ou então da equação $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$



Assim, traçando, na calculadora gráfica, os gráficos da função f, numa janela compatível com o domínio f, $(x > 0)$ - reproduzidos na figura ao lado, vemos que a abcissa pretendida é a solução da equação $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, pelo que também é necessário traçar o gráfico de $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ (também reproduzido na figura ao lado).

Recorrendo à função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, obtemos o valor, aproximado às centésimas, de 0,48 para a abcissa do ponto P

2013

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/1.ª Fase 15 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2013

VERSÃO 1

Página em branco

Na folha de respostas, indique de forma legível a versão da prova (Versão 1 ou Versão 2). A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos de todas as respostas aos itens de escolha múltipla.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 5, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \ \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \ \text{e} \ n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\ e^u$

$(a^u)' = u'\ a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Num grupo de nove pessoas, constituído por seis homens e três mulheres, vão ser escolhidos três elementos para formarem uma comissão.

Quantas comissões diferentes se podem formar com exatamente duas mulheres?

(A) ${}^3C_2$ **(B)** $6 \times {}^3C_2$ **(C)** ${}^9A_3$ **(D)** $6 \times {}^3A_2$

2. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	a	$2a$	b	b

Sabe-se que:

- a e b são números reais;
- $P(X > 1) = P(X < 2)$

Qual é o valor médio da variável aleatória X?

(A) $\frac{3}{2}$ **(B)** $\frac{7}{5}$ **(C)** $\frac{17}{9}$ **(D)** $\frac{19}{12}$

3. Considere uma variável aleatória X com distribuição normal de valor médio 11 e desvio padrão σ

Sabe-se que σ é um número natural e que $P(X > 23) \approx 0{,}02275$

Qual é o valor de σ ?

(A) 12 **(B)** 11 **(C)** 6 **(D)** 4

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(-x)}{x}$

Considere a sucessão de números reais (x_n) tal que $x_n=\dfrac{1}{n}$

Qual é o valor de $\lim f(x_n)$?

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

5. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$

Sabe-se que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x+f(x)}{3x}=1$

Qual das equações seguintes pode definir uma assíntota do gráfico da função f?

(A) $y=\dfrac{1}{3}x$ **(B)** $y=\dfrac{2}{3}x$ **(C)** $y=x$ **(D)** $y=3x$

6. Considere, para um certo número real a superior a 1, as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $f(x)=a^x$ e $g(x)=a^{-x}$

Considere as afirmações seguintes.

I) Os gráficos das funções f e g não se intersectam.

II) As funções f e g são monótonas crescentes.

III) $f'(-1)-g'(1)=\dfrac{2\ln a}{a}$

Qual das opções seguintes é a correta?

(A) II e III são verdadeiras.

(B) I é falsa e III é verdadeira.

(C) I é verdadeira e III é falsa.

(D) II e III são falsas.

7. Na Figura 1, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de quatro números complexos: w_1, w_2, w_3 e w_4

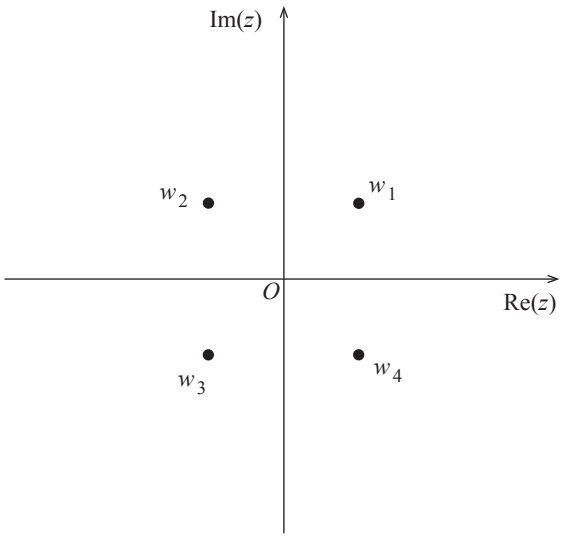


Figura 1

Qual é o número complexo que, com $n \in \mathbb{N}$, pode ser igual a $i^{8n} \times i^{8n-1} + i^{8n-2}$?

(A) w_1 **(B)** w_2

(C) w_3 **(D)** w_4

8. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = -8 + 6i$ e $w = \frac{-i \times z^2}{\overline{z}}$

Seja α um argumento do número complexo z

Qual das opções seguintes é verdadeira?

(A) $w = 10cis\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ **(B)** $w = 2cis\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

(C) $w = 10cis\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ **(D)** $w = 2cis\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

Página em branco

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \sqrt{2} + 2\,cis\frac{3\pi}{4}$ e $z_2 = 1 + i$

1.1. Sabe-se que $\frac{z_1}{z_2}$ é uma raiz quarta de um certo número complexo w

Determine w na forma algébrica, sem utilizar a calculadora.

1.2. Seja $z_3 = cis\,\alpha$

Determine o valor de α pertencente ao intervalo $]-2\pi, -\pi[$, sabendo que $z_3 + \overline{z_2}$ é um número real.

2. Uma caixa contém apenas bolas brancas e bolas pretas, indistinguíveis ao tato.

Todas as bolas estão numeradas com um único número natural.

Sabe-se que:

- duas bolas em cada cinco são pretas;
- 20% das bolas pretas têm um número par;
- 40% das bolas brancas têm um número ímpar.

2.1. Retira-se, ao acaso, uma bola dessa caixa.

Determine a probabilidade de essa bola ser preta, sabendo que tem um número par.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2.2. Admita agora que a caixa tem n bolas.

Extraem-se, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da caixa.

Determine n, sabendo que a probabilidade de ambas as bolas serem brancas é igual a $\frac{7}{20}$

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- $P(B) = \frac{1}{4}$
- $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{15}{16}$
- $P(A \mid \overline{B}) = \frac{7}{12}$

Determine $P(A)$

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{e^{4x} - 1} & \text{se } x < 0 \\ \\ x \ln(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens **4.1.** e **4.2.**, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

4.2. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x) - x + \ln^2 x$

Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos em $]0, e]$

Resolva o item **4.3.**, recorrendo à calculadora gráfica.

4.3. Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x) - x + \ln^2 x$

Sabe-se que:

- A é o ponto de coordenadas $(2, 0)$
- B é o ponto de coordenadas $(5, 0)$
- P é um ponto que se desloca ao longo do gráfico da função g

Para cada posição do ponto P, considere o triângulo $[ABP]$

Determine as abcissas dos pontos P para os quais a área do triângulo $[ABP]$ é 1

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as abcissas dos pontos P com arredondamento às centésimas.

5. Na Figura 2 , está representada, num referencial ortogonal xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f, de grau 3

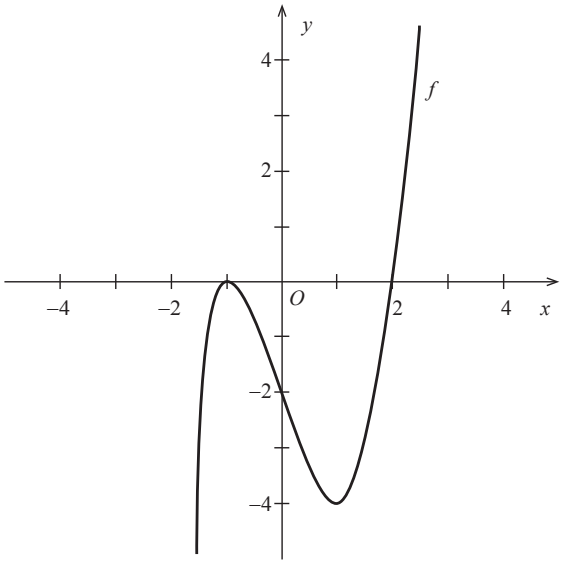


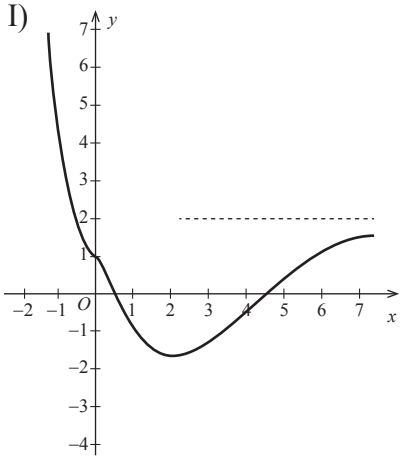
Figura 2

Sabe-se que:

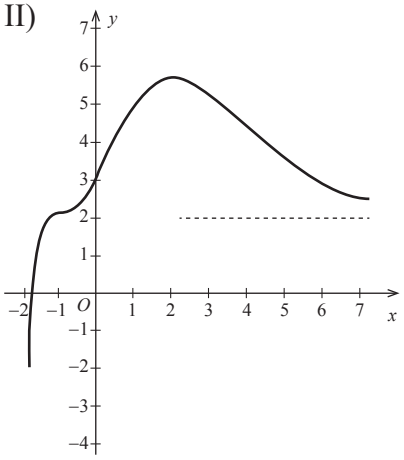
- -1 e 2 são os únicos zeros da função f
- g', a primeira derivada de uma certa função g, tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $g'(x) = f(x) \times e^{-x}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[g(x) - 2 \right] = 0$

Apenas uma das opções seguintes pode representar a função g

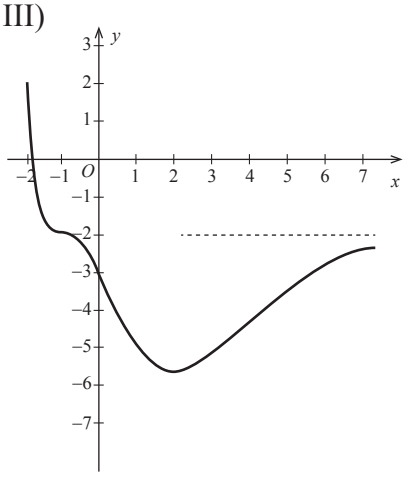
I)



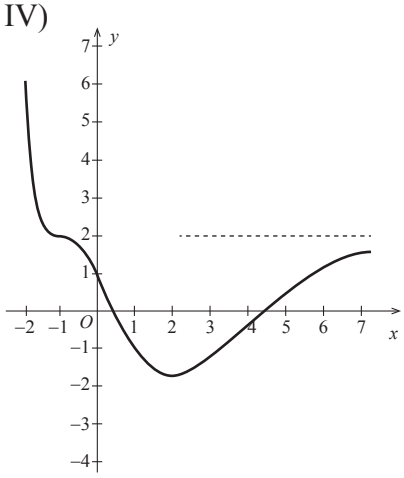
II)



III)



IV)



Nota – Em cada uma das opções estão representadas parte do gráfico de uma função e, a tracejado, uma assíntota desse gráfico.

Elabore uma composição na qual:

- identifique a opção que pode representar a função g
- apresente as razões para rejeitar as restantes opções.

Apresente três razões diferentes, uma por cada gráfico rejeitado.

6. Considere a função g, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, definida por $g(x) = \operatorname{sen}(2x) - \cos x$

Seja a um número real do domínio de g

A reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa a é paralela à reta de equação $y = \frac{x}{2} + 1$

Determine o valor de a, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

7. Considere, para um certo número real a positivo, uma função f, contínua, de domínio $[-a, a]$

Sabe-se que $f(-a) = f(a)$ e $f(a) > f(0)$

Mostre que a condição $f(x) = f(x + a)$ tem, pelo menos, uma solução em $]-a, 0[$

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.**	(8 × 5 pontos)	40 pontos
		40 pontos

GRUPO II

1.		
1.1.		15 pontos
1.2.		10 pontos
2.		
2.1.		15 pontos
2.2.		15 pontos
3.		15 pontos
4.		
4.1.		15 pontos
4.2.		15 pontos
4.3.		15 pontos
5.		15 pontos
6.		15 pontos
7.		15 pontos
		160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/1.ª Fase

Critérios de Classificação 12 Páginas

2013

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** ..... (8 × 5 pontos) ..... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1.

1.1. ..... 15 pontos

1.2. ..... 10 pontos

2.

2.1. ..... 15 pontos

2.2. ..... 15 pontos

3. ..... 15 pontos

4.

4.1. ..... 15 pontos

4.2. ..... 15 pontos

4.3. ..... 15 pontos

5. ..... 15 pontos

6. ..... 15 pontos

7. ..... 15 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

A classificação da prova deve respeitar integralmente os critérios gerais e os critérios específicos a seguir apresentados.

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos de classificação apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro, previsto na grelha de classificação.

A ausência de indicação inequívoca da versão (Versão 1 ou Versão 2) implica a classificação com zero pontos de todas as respostas aos itens de escolha múltipla.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos. No entanto, em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se o examinando responder a um mesmo item mais do que uma vez, não eliminando inequivocamente a(s) resposta(s) que não deseja que seja(m) classificada(s), deve ser considerada apenas a resposta que surgir em primeiro lugar.

Até ao ano letivo 2013/2014, na classificação das provas, continuarão a ser consideradas corretas as grafias que seguirem o que se encontra previsto quer no Acordo de 1945, quer no Acordo de 1990 (atualmente em vigor), mesmo quando se utilizem as duas grafias numa mesma prova.

Itens de seleção

ESCOLHA MÚLTIPLA

A cotação total do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a única opção correta.

São classificadas com zero pontos as respostas em que seja assinalada:

– uma opção incorreta;

– mais do que uma opção.

Não há lugar a classificações intermédias.

Itens de construção

Os critérios de classificação das respostas aos itens de construção apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada etapa e a cada nível de desempenho corresponde uma dada pontuação.

No item de composição, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea do desempenho no domínio específico da disciplina e no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa. A avaliação do desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa faz-se de acordo com os níveis a seguir apresentados.

Níveis	Descritores
3	Texto bem estruturado e linguisticamente correto*, ou com falhas esporádicas que não afetem a inteligibilidade do discurso.
2	Texto bem estruturado, mas com incorreções linguísticas que conduzam a alguma perda de inteligibilidade do discurso. OU Texto linguisticamente correto, mas com deficiências de estruturação que conduzam a alguma perda de inteligibilidade do discurso.
1	Texto com deficiências de estruturação e com incorreções linguísticas, embora globalmente inteligível.

* Por «texto linguisticamente correto» entende-se um texto correto nos planos da sintaxe, da pontuação e da ortografia.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é zero pontos. Neste caso, não é classificado o desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

Na resposta aos itens de construção, caso o aluno apresente elementos em excesso face ao solicitado e tais elementos piorem a consistência da resposta e/ou afetem a caracterização do desempenho, a resposta deve ser classificada com zero pontos.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar em situações não descritas anteriormente.

Situação	Classificação
1. Classificação da resposta a um item cujo critério se apresenta organizado por etapas.	A pontuação indicada para cada etapa é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A classificação da resposta resulta da soma das pontuações atribuídas às diferentes etapas, à qual se subtrai, eventualmente, um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 14 e/ou 20.
2. Pontuação de uma etapa dividida em passos.	A pontuação indicada para cada passo é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A pontuação da etapa resulta da soma das pontuações dos diferentes passos.
3. Classificação da resposta a um item ou pontuação de uma etapa cujo critério se apresenta organizado por níveis de desempenho.	A resposta é enquadrada numa das descrições apresentadas. À classificação/pontuação correspondente subtrai-se, eventualmente, um ou dois pontos, se ocorrer um erro ocasional num cálculo, e/ou se se utilizar simbologia ou expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.

Situação	Classificação
4. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite e classificado qualquer processo de resolução cientificamente correto. O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante distribuição da cotação do item pelas etapas* percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.
5. Utilização de processos de resolução que não respeitam as instruções dadas [exemplo: «sem recorrer à calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Apresentação apenas do resultado final, se a resolução do item exige cálculos e/ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
7. Ausência de apresentação dos cálculos e/ou das justificações necessárias à resolução de uma etapa*.	A etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
8. Ausência de apresentação explícita de uma dada etapa que não envolva cálculos e/ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, a mesma é pontuada com a pontuação total para ela prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
9. Transposição incorreta de dados do enunciado, que não altera o que se pretende avaliar com o item.	Se o grau de dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se o grau de dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – na(s) etapa(s) em que o grau de dificuldade diminuir, a pontuação máxima a atribuir a esta(s) etapa(s) deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista; – na(s) etapa(s) em que o grau de dificuldade não diminuir, esta(s) deve(m) ser pontuada(s) de acordo com os critérios específicos de classificação.
10. Transposição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se o grau de dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido: – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.

* Em situações em que o critério é aplicável tanto a **etapas** como a **passos**, utiliza-se apenas o termo «etapas» por razões de simplificação da apresentação.

Situação	Classificação
11. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido: – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
12. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido: – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
13. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas o passo final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
14. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
15. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
17. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.
18. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, e/ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
19. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final [por exemplo, «15» em vez de «15 metros»].	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a cotação total para ela prevista.
20. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. ..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

As respostas corretas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	B	D	C	A	D	B	C	A
Versão 2	C	A	B	D	D	C	B	B

GRUPO II

1.1. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $2cis\frac{3\pi}{4}$ na forma algébrica ..... 2 pontos

Obter z_1 na forma algébrica ..... 1 ponto

Calcular $\frac{z_1}{z_2}$ na forma algébrica ..... 3 pontos

- Indicar a multiplicação de ambos os termos da fração pelo conjugado do denominador ..... 1 ponto
- Efetuar a multiplicação do numerador ..... 1 ponto
- Efetuar a multiplicação do denominador ..... 1 ponto

Referir que $w=\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4$ ..... 3 pontos

Determinar w ..... 5 pontos

- Escrever $\frac{z_1}{z_2}$ na forma trigonométrica ..... 3 pontos
- Obter $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4$ na forma trigonométrica ..... 2 pontos

Obter w na forma algébrica ..... 1 ponto

2.º Processo

Escrever $2cis\frac{3\pi}{4}$ na forma algébrica ..... 2 pontos

Obter z_1 na forma algébrica ..... 1 ponto

Calcular $\frac{z_1}{z_2}$ na forma trigonométrica ..... 6 pontos

Escrever z_1 na forma trigonométrica ..... 2 pontos

Escrever z_2 na forma trigonométrica ..... 2 pontos

Efetuar a divisão na forma trigonométrica ..... 2 pontos

Referir que $w = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4$ ..... 3 pontos

Obter w na forma trigonométrica ..... 2 pontos

Obter w na forma algébrica ..... 1 ponto

1.2. ..... **10 pontos**

Determinar $z_3 + \overline{z_2}$ na forma algébrica ..... 4 pontos

Escrever $cis\alpha = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha$ ..... 1 ponto

Escrever $\overline{z_2}$ na forma algébrica ..... 1 ponto

Obter $z_3 + \overline{z_2}$ na forma algébrica ..... 2 pontos

Escrever uma condição para que a imagem geométrica de $z_3 + \overline{z_2}$ pertença ao eixo real ..... 3 pontos

Obter o valor de α ..... 3 pontos

2.1. ..... **15 pontos**

Seja A o acontecimento «a bola ser preta», e seja B o acontecimento «a bola ter número par».

Podem ser admitidas outras designações para os acontecimentos.

Identificar o pedido com $P(A \mid B)$ ..... 2 pontos

Escrever $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (ou equivalente) ..... 1 ponto

Calcular $P(A \cap B)$ ..... 4 pontos

Escrever $P(A) = \frac{2}{5}$ (ou equivalente) ..... 1 ponto

Escrever $P(B \mid A) = 0{,}2$ ..... 2 pontos

Obter $P(A \cap B)$ ..... 1 ponto

Calcular $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ ..... 4 pontos

Escrever $P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 0{,}4$ ..... 2 pontos

Obter $P(\overline{A})$ ..... 1 ponto

Obter $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ ..... 1 ponto

Calcular $P(\overline{A} \cap B)$ ..... 2 pontos

Calcular $P(B)$ ..... 1 ponto

Obter $P(A \mid B)$ ..... 1 ponto

2.2. ..... **15 pontos**

Seja C o acontecimento «as duas bolas são brancas».

Podem ser admitidas outras designações para o acontecimento.

Referir que, se existem n bolas, então estão $\frac{2}{5} \times n$ bolas pretas na caixa OU estão $\frac{3}{5} \times n$ bolas brancas na caixa ..... 3 pontos

Escrever $P(C) = \frac{7}{20}$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Determinar n ..... 10 pontos

Obter a probabilidade de a primeira bola retirada ser branca ..... 2 pontos

Obter, em função de n, a probabilidade de a segunda bola retirada ser branca se a primeira bola retirada foi branca e não houve reposição ..... 3 pontos

Obter $P(C)$ em função de n ..... 3 pontos

Obter n ..... 2 pontos

3. ..... **15 pontos**

Escrever $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B})$ ..... 2 pontos

Escrever $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$ ..... 2 pontos

Obter $P(A \cap B)$ ..... 2 pontos

Escrever $P(A \mid \overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$ ..... 2 pontos

Escrever $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$ ..... 2 pontos

Obter $P(\overline{B})$ ..... 2 pontos

Obter $P(A)$ ..... 3 pontos

4.1. ..... **15 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ ..... 7 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{e^{4x} - 1}$ ..... 1 ponto

Levantar a indeterminação ..... 6 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{e^{4x} - 1} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\frac{e^x - 1}{x}}{\frac{e^{4x} - 1}{x}}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^{4x} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{4(e^{4x} - 1)}{4x}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{4(e^{4x} - 1)}{4x} = \lim\limits_{y \to 0^-} \frac{4(e^y - 1)}{y}$

(ou equivalente) (**ver nota 1**) ..... 2 pontos

Referir o limite notável $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ ..... 1 ponto

Obter o valor de $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ ..... 1 ponto

Determinar $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ..... 7 pontos

Escrever $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)$ ..... 1 ponto

Levantar a indeterminação ..... 6 pontos

Escrever $\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}{y}$

(ou equivalente) (**ver nota 2**)..... 2 pontos

Escrever $\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}{y}=\lim_{y\to+\infty}\frac{-\ln y}{y}$ ..... 1 ponto

Referir o limite notável $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ..... 1 ponto

Obter o valor de $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ..... 1 ponto

Concluir que o gráfico de f não admite outras assíntotas verticais por f ser contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ..... 1 ponto

Notas:

1. Se o examinando referir que $x\to 0^-$ é equivalente a $4x\to 0^-$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

2. Se o examinando referir que $x\to 0^+$ é equivalente a $\frac{1}{x}\to+\infty$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

4.2. ..... **15 pontos**

Determinar $g'(x)$ em $]0,+\infty[$ ..... 6 pontos

Determinar $(x\ln x)'$ ..... 2 pontos

Determinar x' ..... 1 ponto

Determinar $(\ln^2 x)'$ ..... 2 pontos

Obter $g'(x)$ ..... 1 ponto

Determinar o zero de $g'(x)$ em $]0,e]$ ..... 2 pontos

Estudar a função g quanto à monotonia em $]0,e]$ ..... 4 pontos

Concluir que g' é negativa em $]0,1[$ ..... 1 ponto

Concluir que g' é positiva em $]1,e]$ ..... 1 ponto

Concluir que g é decrescente em $]0,1]$ (**ver nota 1**) ..... 1 ponto

Concluir que g é crescente em $[1,e]$ (**ver nota 2**) ..... 1 ponto

Concluir que a função g tem um mínimo em $]0,e]$ ..... 1 ponto

Concluir que a função g tem um máximo relativo em $]0,e]$ ..... 2 pontos

Notas:

1. Se o examinando referir que f é decrescente em $]0,1[$, em vez de $]0,1]$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

2. Se o examinando referir que f é decrescente em $]1,e]$, em vez de $[1,e]$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

4.3. ..... **15 pontos**

Equacionar o problema ..... 7 pontos

Determinar a altura do triângulo $[ABP]$ referente a $[AB]$ ..... 3 pontos

Escrever $|g(x)| = \frac{2}{3}$ (ou equivalente) (**ver nota 1**) ..... 4 pontos

Reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados na calculadora (**ver notas 2** e **3**) ..... 4 pontos

Obter as abcissas dos pontos P ..... 4 pontos

Indicar as abcissas dos pontos com ordenada positiva ... (1 + 1) .. 2 pontos

Indicar as abcissas dos pontos com ordenada negativa ... (1 + 1) .. 2 pontos

Notas:

1. Se o examinando escrever $g(x) = \frac{2}{3}$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 2 pontos.

2. Se o examinando não apresentar o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

3. Se o examinando apresentar um gráfico que não respeite o domínio da função, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

5. ..... **15 pontos**

Na composição, são contemplados os pontos seguintes:
A) identificar a opção que pode representar a função g;
B) apresentar uma razão que permita rejeitar a opção I;
C) apresentar uma razão que permita rejeitar a opção II;
D) apresentar uma razão que permita rejeitar a opção III.

Na tabela seguinte, indica-se como deve ser classificada a resposta a este item, de acordo com os níveis de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa e com os níveis de desempenho no domínio específico da disciplina.

Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina \ Descritores do nível de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa			Níveis*		
			1	**2**	**3**
Níveis	**6**	Na composição, são contemplados corretamente os quatro pontos, OU apenas os pontos B, C e D.	13	14	15
	5	Na composição, são contemplados corretamente apenas os pontos A, B e C, OU apenas os pontos A, B e D, OU apenas os pontos A, C e D.	10	11	12
	4	Na composição, são contemplados corretamente apenas os pontos B e C, OU apenas os pontos B e D, OU apenas os pontos C e D.	8	9	10
	3	Na composição, são contemplados corretamente apenas os pontos A e B, OU apenas os pontos A e C, OU apenas os pontos A e D.	5	6	7
	2	Na composição, é contemplado corretamente apenas o ponto B, OU apenas o ponto C, OU apenas o ponto D.	3	4	5
	1	Na composição, é contemplado apenas o ponto A.	2	2	2

***** Descritores apresentados nos Critérios Gerais de Classificação.

6. ..... **15 pontos**

Equacionar o problema ..... 2 pontos

Determinar $g'(x)$ ..... 5 pontos

- Escrever $\left(\operatorname{sen}(2x)-\cos x\right)'=\left(\operatorname{sen}(2x)\right)'-\left(\cos x\right)'$ (ou equivalente) 1 ponto
- Determinar $\left(\operatorname{sen}(2x)\right)'$ ..... 2 pontos
- Determinar $\left(\cos x\right)'$ ..... 1 ponto
- Obter $g'(x)$ ..... 1 ponto

Resolver a equação $g'(a)=\frac{1}{2}$ ..... 8 pontos

- Escrever $2(\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a)+\operatorname{sen} a=\frac{1}{2}$ ..... 1 ponto
- Substituir $\cos^2 a$ por $1-\operatorname{sen}^2 a$ ..... 1 ponto
- Obter $-8\operatorname{sen}^2 a+2\operatorname{sen} a+3=0$ ..... 1 ponto
- Obter $\left(\operatorname{sen} a=-\frac{1}{2}\ \vee\ \operatorname{sen} a=\frac{3}{4}\right)$ ..... 2 pontos
- Reconhecer que a equação $\operatorname{sen} a=\frac{3}{4}$ é impossível em $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ .. 1 ponto
- Obter a ..... 2 pontos

7. ..... **15 pontos**

Referir que $f(x) = f(x+a)$ é equivalente a $f(x) - f(x+a) = 0$ ..... 2 pontos

Referir que, em $[-a, 0]$, a função g, definida por $g(x) = f(x) - f(x+a)$, é contínua (**ver notas 1** e **2**) ..... 2 pontos

Calcular $g(-a)$ ..... 2 pontos

Calcular $g(0)$ ..... 2 pontos

Escrever $g(-a) \times g(0) < 0$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

Concluir que a função g tem, pelo menos, um zero em $]-a, 0[$ (**ver nota 3**)..... 3 pontos

Concluir o pretendido ..... 1 ponto

Notas:

1. Se o examinando referir que a função é contínua no domínio, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

2. Se o examinando referir que a função é contínua em $]-a, 0[$, a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos.

3. Se o examinando não referir que a conclusão resulta do teorema de Bolzano, a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO 2013

- 1.ª FASE -

DISCIPLINA: MATEMÁTICA A _ PROVA 635

Grupo II

Item 1.1. (15 pontos)

Situação 1: O examinando escreve $2cis\frac{3\pi}{4}=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, obtém z_1 na forma algébrica, calcula $\frac{z_1}{z_2}$ na forma algébrica, refere que $\sqrt[4]{w}=\frac{z_1}{z_2}$, determina w na forma trigonométrica e obtém w na forma algébrica.

Classificação proposta: 15+(-1)(CG20)

Situação 2: O examinando escreve $2cis\frac{3\pi}{4}=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, obtém z_1 na forma algébrica, calcula $\frac{z_1}{z_2}$ na forma algébrica, refere que $w=\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4$ e determina $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4$ na forma algébrica.

Classificação proposta: 2+1+3+3+6

Adaptação do critério específico

Escrever $2cis\frac{3\pi}{4}$ na forma algébrica ..... 2 pontos

Obter z_1 na forma algébrica ..... 1 ponto

Escrever $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ na forma algébrica ..... 3 pontos

Referir que $w=\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4$ ..... 3 pontos

Determinar $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4$ na forma algébrica ..... 6 pontos

Escrever $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4=\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2\times\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$ (ou equivalente)... 2 pontos

Calcular $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$ ..... 2 pontos

Obter w na forma algébrica ..... 2 pontos

Item 1.2. (10 pontos)

Situação 1: O examinando determina $z_3 + \bar{z}_2$ na forma algébrica, escreve $sen\,\alpha - 1 = 0$ e obtém $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$

Classificação proposta: 4+3+1(CG13)

Situação 2: O examinando determina $z_3 + \bar{z}_2$ na forma algébrica, escreve $sen\,\alpha - 1 = 0$ e conclui que $\alpha = -\frac{3\pi}{2}$

Classificação proposta: 10

Situação 3: O examinando substitui z_3 por $a + b\,i$, determina $z_3 + \bar{z}_2$ na forma algébrica, escreve $b = 1 \wedge |z_3| = 1$ e conclui que $z_3 = i$ e que $\alpha = -\frac{3\pi}{2}$

Classificação proposta: 10

Situação 4: O examinando substitui z_3 por $a + b\,i$, determina $z_3 + \bar{z}_2$ na forma algébrica, escreve $b = 1$ e conclui que $z_3 = i$ e que $\alpha = -\frac{3\pi}{2}$.

Classificação proposta: 4+1(CG13)+3

Item 2.1. (15 pontos)

Situação 1: O examinando refere que a caixa tem, por exemplo, 50 bolas. Resolve o item partindo deste pressuposto e obtém a probabilidade pedida.

Classificação proposta: 15

Item 2.2. (15 pontos)

Situação 1: O examinando escreve $\frac{{}^{\frac{3}{5}n}C_2}{{}^{n}C_2}=\frac{7}{20}$ e determina n

Classificação proposta: 15 (CG4)

Adaptação do critério específico

Seja *C* o acontecimento «as duas bolas são brancas».
Podem ser admitidas outras designações para o acontecimento.

Referir que, se existem n bolas, então estão $\frac{2}{5}\times n$ bolas pretas na caixa

OU estão $\frac{3}{5}\times n$ bolas brancas na caixa ..... 3 pontos

Escrever $P(C)=\frac{7}{20}$ (ou equivalente)..... 2 pontos

Determinar ..... 10 pontos

Escrever $\frac{{}^{\frac{3}{5}n}C_2}{{}^{n}C_2}=\frac{7}{20}$ ..... 2 pontos

Escrever $\frac{{}^{0,6n}C_2}{{}^{n}C_2}=\frac{\frac{(0,6n)!}{(0,6n-2)!\times 2!}}{\frac{n!}{(n-2)!\times 2!}}$ ..... 3 pontos

Obter $\frac{0,6\left(0,6n-1\right)}{n-1}$ ..... 3 pontos

Obter n ..... 2 pontos

Situação 2: O examinando considera $n=25$, refere que, nesse caso, há 10 bolas pretas e 15 bolas brancas e verifica que a probabilidade de ambas as bolas serem brancas é $\frac{7}{20}$

Classificação proposta: 0+2+5(CG12)

Situação 3: O examinando refere que a probabilidade de a primeira bola ser branca é $\frac{3}{5}$, que a probabilidade de ambas as bolas serem brancas é $\frac{3}{5}\times\frac{x-1}{n-1}$, e afirma que $\frac{3}{5}\times\frac{x-1}{n-1}$ é igual a $\frac{7}{20}$ se $x-1$ for 14 e $n-1$ for 24, concluindo que $n=25$

Classificação proposta: 0+2+5(CG12)

Item 3. (15 pontos)

Situação 1: O examinando escreve $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})$, calcula $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ e obtém $P(A)$

Classificação proposta: 15 (CG4)

Adaptação do critério específico

Escrever $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})$ ..... 2 pontos

Obter $P(\overline{B})$ ..... 2 pontos

Obter $P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})$ ..... 2 pontos

Escrever $P(\overline{A} \mid \overline{B}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$ ..... 2 pontos

Obter $P(\overline{A} \mid \overline{B})$ ..... 2 pontos

Obter $P(\overline{A})$ ..... 3 pontos

Obter $P(A)$ ..... 2 pontos

Item 4.1. (15 pontos)

Situação 1: O examinando calcula apenas $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$, escrevendo $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{4\left(e^{4x} - 1\right)}{4x} = 4$

Classificação proposta: 7+0+0

Situação 2: O examinando determina apenas $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$, utilizando processos cientificamente corretos, não devidamente justificados, e escreve $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(x \ln x\right) = 0$

Classificação proposta: 4(1+3(CG13))+1(1+0(CG7))+0

Item 4.2. (15 pontos)

Situação 1: O examinando determina $g'(x)$, determina o zero de $g'(x)$ em $]0,+\infty[$, estuda g quanto à monotonia em $]0,+\infty[$ e conclui que g tem um mínimo em $]0,+\infty[$, apresentando uma tabela.

Classificação proposta: 6+2+4+1+0

Situação 2: O examinando determina $g'(x)$, determina o zero de $g'(x)$ em $]0,e]$, estuda g quanto à monotonia em $]0,e]$ e conclui que g tem dois extremos em $]0,e]$, apresentando uma tabela.

Classificação proposta: 15

Item 4.3. (15 pontos)

Situação 1: O examinando equaciona o problema, digita $\ln(x^2)$ em vez de $\ln^2 x$, reproduz o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) e obtém as abcissas de dois pontos.

Classificação proposta: 7+4+2(CG9)

Situação 2: O examinando equaciona incorretamente o problema, escreve $g(x)=\frac{2}{3}$, digita $\ln(x^2)$ em vez de $\ln^2 x$, reproduz o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) e obtém a abcissa de um ponto.

Classificação proposta: 5(3+2)+4+1(CG9)

Situação 3: O examinando considera $\overline{AB}=2$, equaciona o problema, escrevendo $|g(x)|=1$, reproduz o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) e obtém as abcissas de três pontos.

Classificação proposta: 6(CG11)+4+3(2+1)

Item 6. (15 pontos)

Situação 1: O examinando equaciona o problema, determina $g'(x)$, escreve $g'\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ e conclui que $a=-\frac{\pi}{6}$

Classificação proposta: 15

Item 7. (15 pontos)

Situação 1: O examinando apenas calcula $f(-a)-f(0)$ e $f(0)-f(a)$ e escreve $(f(-a)-f(0))\times(f(0)-f(a))<0$

Classificação proposta: 0+0+2+2+3+0+0

Situação 2: O examinando não refere que $f(x)=f(x+a)$ é equivalente a $f(x)-f(x+a)=0$, mas conclui que a condição $f(x)=f(x+a)$ tem, pelo menos, uma solução em $]-a\,,0[$, referindo o teorema de Bolzano.

Classificação proposta: 0

Exame nacional de Matemática A (2013, 1.ª fase)

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como a comissão deve ter exatamente 2 mulheres, num total de 3 pessoas, será constituída por um único homem.
   Logo, como existem 6 homens no grupo, existem 6 formas distintas de escolher o homem que integra a comissão.
   Por cada uma das 6 escolhas anteriores, existem ${}^3C_2$ formas de escolher 2 de entre as 3 mulheres que existem no grupo (não se considera a ordem relevante, porque não existe referência a diferentes estatutos na comissão).
   Assim, existem $6 \times {}^3C_2$ formas de escolher os elementos da comissão, de acordo com a restrição imposta.

   Resposta: **Opção B**

2. Sabemos que: $P(X > 1) = P(X = 2) + P(X = 3) = b + b = 2b$,
   e que $P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = a + 2a = 3a$
   Assim $P(X > 1) = P(X < 2) \Leftrightarrow 2b = 3a \Leftrightarrow b = \dfrac{3a}{2}$
   e também $a + 2a + b + b = 1 \Leftrightarrow 3a + 2b = 1$

   Logo, podemos calcular os valores de a e b:

   $$\begin{cases} b = \dfrac{3a}{2} \\ 3a + 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{3a}{2} \\ 3a + 2 \times \dfrac{3a}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{3a}{2} \\ 3a + 3a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{6} \\ a = \dfrac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{3}{12} \\ a = \dfrac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{1}{4} \\ a = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

   Assim, calculando o valor médio da variável x, vem:

   $$\mu = 0 \times a + 1 \times 2a + 2 \times b + 3 \times b = 0 + 2a + 2b + 3b = 2a + 5b$$

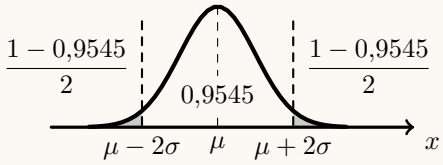
   Substituindo os valores de a e de b, temos:

   $$\mu = 2 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{4} = \frac{2}{6} + \frac{5}{4} = \frac{1}{3} + \frac{5}{4} = \frac{4}{12} + \frac{15}{12} = \frac{19}{12}$$

   Resposta: **Opção D**

3. Como $P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)\approx 0{,}9545$ e $P(X<\mu-2\sigma)=P(X>\mu+2\sigma)$, temos que:

$$P(X>\mu+2\sigma)\approx\frac{1-0{,}9545}{2}=0{,}02275$$



Assim, $\mu+2\sigma=23$, e como $\mu=11$, vem:

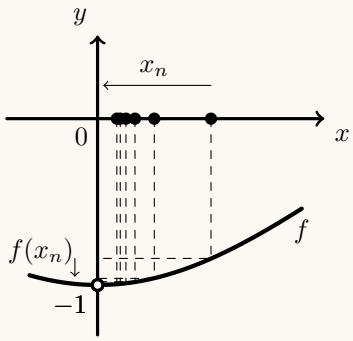
$$11+2\sigma=23 \Leftrightarrow \sigma=\frac{23-11}{2} \Leftrightarrow \sigma=\frac{12}{2} \Leftrightarrow \sigma=6$$

Resposta: **Opção C**

4. Como $\lim\frac{1}{n}=0^+$, então $\lim f(x_n)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, e assim, como $\operatorname{sen}(-x)=-\operatorname{sen}x$:

$$\lim f(x_n)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}(-x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{\operatorname{sen}x}{x}=$$

$$=-\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}=-1$$



Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (x_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $f(x_n)$, que se aproximam progressivamente de -1, quando o valor de n aumenta.

Resposta: **Opção A**

5. Como sabemos que $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$, em que m é o declive de uma assíntota do gráfico de f, vem que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+f(x)}{3x}=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{3x}+\frac{f(x)}{3x}\right)=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{3x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{3x}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}+\frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1 \Leftrightarrow 0+\frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=3$$

Logo uma assíntota do gráfico de f, se existir, é uma reta de declive 3, pelo que a única equação, de entre as hipóteses apresentadas, que pode definir uma assíntota do gráfico da função f é $y=3x$

Resposta: **Opção D**

6.
- Como $f(0)=a^0=1$ e $g(0)=a^{-0}=a^0=1$, o ponto $P(0,1)$ pertence aos gráficos das duas funções, pelo que **a afirmação (I) é falsa**.
- Como $a>1$ a função $g(x)=a^{-x}$ é estritamente decrescente, pelo que também **a afirmação (II) é falsa**.
- Como $f'(x)=\left(a^x\right)'=a^x\ln a$, logo, $f'(-1)=a^{-1}\ln a=\frac{1}{a}\ln a=\frac{\ln a}{a}$
  e como $g'(x)=\left(a^{-x}\right)'=-a^{-x}\ln a$, logo $g'(1)=-a^{-1}\ln a=-\frac{1}{a}\ln a=-\frac{\ln a}{a}$
  E assim,
  $$f'(-1)-g'(1)=\frac{\ln a}{a}-\left(-\frac{\ln a}{a}\right)=\frac{\ln a}{a}+\frac{\ln a}{a}=\frac{2\ln a}{a}$$
  pelo que **a afirmação (III) é verdadeira**.

Resposta: **Opção B**

7. Sabemos que $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$, e que é válida a igualdade $i^n = i^k$, onde k é o resto da divisão inteira de n por 4.

   Assim,

   - como $8n = 4 \times 2n\mathbf{+0}$, temos que $i^{8n} = i^0 = 1$
   - como $8n - 1 = 8n - 4 + 3 = 4(2n - 1)\mathbf{+3}$ temos que $i^{8n-1} = i^3 = -i$
   - como $8n - 2 = 8n - 4 + 2 = 4(2n - 1)\mathbf{+2}$ temos que $i^{8n-2} = i^2 = -1$

   Temos que $i^{8n} \times i^{8n-1} + i^{8n-2} = i^0 \times i^3 + i^2 = 1 \times (-i) + (-1) = -i - 1$

   Logo a imagem geométrica de $i^{8n} \times i^{8n-1} + i^{8n-2}$ pertence ao terceiro quadrante.

   Resposta: **Opção C**

8. Temos que $|z| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$
   e sabemos que: $\text{Arg}\,(z) = \alpha$, pelo que podemos escrever que $z = 10\,\text{cis}\,\alpha$

   Assim, temos que

$$
\begin{aligned}
w &= \frac{-i \times z^2}{\overline{z}} && \text{(do enunciado)} \\
&= \frac{-i \times (10^2\,\text{cis}\,(2\alpha))}{10\,\text{cis}\,(-\alpha)} && \text{(calculado } z^2 \text{ e escrevendo } \overline{z} \text{ na f.t.)} \\
&= -i \times (10\,\text{cis}\,(2\alpha - (-\alpha)) && \text{(fazendo a divisão na f.t.)} \\
&= \text{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \times \left(10\,\text{cis}\,(3\alpha)\right) && \text{(escrevendo } -i \text{ na f.t.)} \\
&= 10\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{2} + 3\alpha\right) && \text{(fazendo o produto na f.t.)} \\
&= 10\,\text{cis}\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

   Resposta: **Opção A**

GRUPO II

1.

1.1. Começamos por simplificar a expressão de z_1 fazendo a soma na f.a.:

$$z_1 = \sqrt{2} + 2\,\text{cis}\,\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} + 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{2}i = \sqrt{2}i$$

Escrevendo os números complexos na f.t. temos

$z_1 = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{2}$ e

$z_2 = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4}$, porque $|z_2| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ e para $\theta = \arg(z_2)$ temos $\text{tg}\,\theta = \frac{1}{1} = 1$ e $\theta \in 1^{\text{o}}$ Q

Assim $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1\,\text{cis}\left(\frac{2\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \text{cis}\,\frac{\pi}{4}$

Como $\frac{z_1}{z_2}$ é uma raiz quarta de w, aplicando a fórmula de Moivre e escrevendo w na f.a., temos que:

$w = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4 = \left(\text{cis}\,\frac{\pi}{4}\right)^4 = 1^4\,\text{cis}\left(4 \times \frac{\pi}{4}\right) = \text{cis}\,\pi = -1$

1.2. Temos que $z_3 = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha$ e que $\overline{z_2} = 1 - i$, pelo que
$z_3 + \overline{z_2} = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha + 1 - i = \cos\alpha + 1 + i(\text{sen}\,\alpha - 1)$

Como $z_3 + \overline{z_2}$ é um número real se $\text{Im}\,(z_3 + \overline{z_2}) = 0$ temos que:

$$\text{sen}\,\alpha - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \text{sen}\,\alpha = 1 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Como $\alpha \in]-2\pi, -\pi[$, seja $k = -1$, e assim $\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$

2.

2.1. Considerando a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, uma bola da caixa, e os acontecimentos:
B:«A bola retirada é branca»
I:«A bola retirada tem número ímpar»
Temos que $P\left(\overline{B}\right)=\frac{2}{5}$, $P\left(\overline{I}|\overline{B}\right)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$ e $P(I|B)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(\overline{I}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{B}\right)\times P\left(\overline{I}|\overline{B}\right)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{25}$
- $P(B)=1-P\left(\overline{B}\right)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$
- $P(I\cap B)=P(B)\times P(I|B)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$
- $P\left(B\cap\overline{I}\right)=P(B)-P(B\cap I)=\frac{3}{5}-\frac{6}{25}=\frac{9}{25}$
- $P\left(\overline{I}\right)=P\left(B\cap\overline{I}\right)+P\left(\overline{B}\cap\overline{I}\right)=\frac{9}{25}+\frac{2}{25}=\frac{11}{25}$

	B	$\overline{B}$	
I	$\frac{6}{25}$		
$\overline{I}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{11}{25}$
	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

Assim, calculando a probabilidade de, ao retirar, ao acaso, uma bola da caixa, ela ser preta, sabendo que tem um número par, e escrevendo o resultado na forma de fração irredutível, temos:

$$P\left(\overline{B}|\overline{I}\right)=\frac{P\left(\overline{B}\cap\overline{I}\right)}{P\left(\overline{I}\right)}=\frac{\frac{2}{25}}{\frac{11}{25}}=\frac{2}{11}$$

2.2. Como a caixa tem n bolas e 2 em cada 5 são pretas, o número de bolas pretas é $n\times\frac{2}{5}$
Logo, o número de bolas brancas é $n\times\frac{3}{5}$
Como a extração é feita sem reposição, a probabilidade da primeira bola extraída ser branca é $\frac{n\times\frac{3}{5}}{n}=\frac{3}{5}$ e a probabilidade da segunda bola ser branca, sabendo que a primeira também é branca é $\frac{n\times\frac{3}{5}-1}{n-1}$
Assim, usando a probabilidade conhecida podemos escrever e resolver a equação:

$$\frac{3}{5}\times\frac{n\times\frac{3}{5}-1}{n-1}=\frac{7}{20}\Leftrightarrow\frac{\frac{3n}{5}-\frac{5}{5}}{n-1}=\frac{35}{60}\Leftrightarrow\frac{3n-5}{5(n-1)}=\frac{35}{60}\Leftrightarrow\frac{3n-5}{n-1}=\frac{5\times35}{5\times12}\underset{n\neq1}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 12(3n-5)=35(n-1)\Leftrightarrow 36n-60=35n-35\Leftrightarrow 36n-35n=60-35\Leftrightarrow n=25$$

3. Pelas leis de De Morgan, e usando o teorema do acontecimento contrário temos que $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P(A \cap B)$, e assim $\frac{15}{16} = 1 - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16}$

   Assim, organizando este e os restantes dados do enunciado numa tabela obtemos:

   - $P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
   - $P\left(A \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{B}\right) \times P\left(A|\overline{B}\right) = \frac{3}{4} \times \frac{7}{12} = \frac{21}{48}$

   E assim, vem que:

$$P(A) = P(A \cap B) + P\left(A \cap \overline{B}\right) = \frac{1}{16} + \frac{21}{48} = \frac{1}{2}$$

	A	$\overline{A}$	
B	$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{4}$
$\overline{B}$	$\frac{21}{48}$		$\frac{3}{4}$
	$\frac{1}{2}$		1

Exame – 2013, 1ª Fase

4.

4.1. Como a função, em ambos os ramos, resulta de operações e composições de funções contínuas em $\mathbb{R}^-$ e em $\mathbb{R}^+$, a função é contínua em $\mathbb{R}^-$ e em $\mathbb{R}^+$, pelo que a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f é a reta $x = 0$
Averiguando se $x = 0$ é assíntota do gráfico de f, temos:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x \ln x) = 0^+ \times \ln(0^+) = 0^+ \times (-\infty) \text{ (indeterminação)}$$

(fazendo $y = \frac{1}{x}$, temos $x = \frac{1}{y}$ e se $x \to 0^+$, então $y \to +\infty$)

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x \ln x) = \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{1}{y} \times \ln \frac{1}{y}\right) = \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{1}{y} \times (\ln 1 - \ln y)\right) =$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{1}{y} \times (-\ln y)\right) = \lim_{y \to +\infty} \left(-\frac{\ln y}{y}\right) = -\underbrace{\lim_{y \to +\infty} \frac{\ln y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 0$$

Temos ainda que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{e^{4x} - 1} = \frac{e^0 - 1}{e^0 - 1} = \frac{0}{0} \text{ (indeterminação)}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{e^{4x} - 1} = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{e^x - 1}{e^{4x} - 1} \times \frac{x}{x}\right) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{e^x - 1}{x} \times \frac{x}{e^{4x} - 1}\right) =$$

$$= \underbrace{\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{e^{4x} - 1} = 1 \times \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{4} \times \frac{4 \times x}{e^{4x} - 1}\right) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{4} \times \lim_{x \to 0^-} \frac{4x}{e^{4x} - 1} =$$

$$= \frac{1}{4} \times \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{\frac{e^{4x} - 1}{4x}}\right) = \frac{1}{4} \times \frac{\lim\limits_{x \to 0^-} 1}{\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^{4x} - 1}{4x}} = \frac{1}{4 \times \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^{4x} - 1}{4x}} =$$

(fazendo $y = 4x$, temos que se $x \to 0^-$, então também $y \to 0^-$)

$$= \frac{1}{4 \times \underbrace{\lim\limits_{y \to 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = \frac{1}{4 \times 1} = \frac{1}{4}$$

E assim, como todos os limites calculados existem e têm um valor real (finito), podemos concluir que a função f não tem qualquer assíntota vertical.

4.2. Começamos por determinar a expressão da derivada, para $x > 0$:

$$g'(x) = \left(f(x) - x + \ln^2 x\right)' = \left(f(x)\right)' - (x)' + \left(\ln^2 x\right)' = (x)' \ln x + x(\ln x)' - 1 + \left(\ln(x) \times \ln x\right)' =$$

$$= 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 + (\ln x)' \times \ln x + \ln x \times (\ln x)' = \ln x + 1 - 1 + 2\left(\ln x \times \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \ln x + \frac{2\ln x}{x} = \ln x \left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

Calculando os zeros da derivada, no intervalo $]0,e]$, temos:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x \left(1 + \frac{2}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \vee 1 + \frac{2}{x} = 0 \Leftrightarrow e^0 = x \vee 1 = -\frac{2}{x} \Leftrightarrow x = 1 \vee \underbrace{x = -2}_{-2 \notin]0,e]}$$

Como g' só tem um zero no intervalo $]0,e]$ $(x = 1)$, a variação do sinal da derivada e a relação com a monotonia de g é:

x	0		1		e
$g'(x)$	n.d	$-$	0	$+$	$+$
$g(x)$	n.d	↘	min	↗	Max

Assim, podemos concluir que a função g:

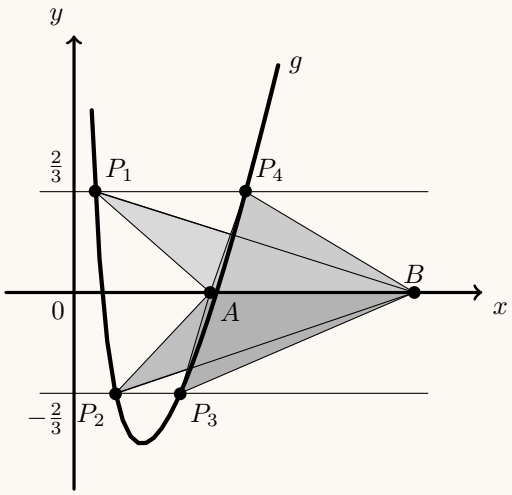
- é decrescente no intervalo $]0,1]$;
- é crescente no intervalo $[1,e]$;
- tem um mínimo (cujo minimizante é 1) e um máximo (cujo maximizante é e).

4.3. Designado por a a altura do triângulo e o segmento $[AB]$ como a base do triângulo ($\overline{AB} = 5 - 2 = 3$), temos que:

$$A_{[ABP]} = 1 \Leftrightarrow \frac{3 \times a}{2} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$$

Ou seja os pontos P que geram triângulos de área 1 têm ordenada $\frac{2}{3}$ ou $-\frac{2}{3}$, pelo que as abcissas desses pontos, são as soluções da equação $|g(x)| = \frac{2}{3}$

Representando o gráfico da função g, no domínio definido (reproduzido na figura ao lado, numa janela compatível com o domínio da função $(x > 0)$), e as retas $y = \frac{2}{3}$ e $y = -\frac{2}{3}$, recorremos à função da calculadora gráfica para determinar as coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, para encontrar os valores, aproximados às centésimas, das abcissas dos quatro pontos, ou seja das soluções da equação.



Os valores aproximados das abcissas dos quatro pontos são:
$x_{P_1} \approx 0{,}31$, $x_{P_2} \approx 0{,}61$, $x_{P_3} \approx 1{,}56$ e $x_{P_4} \approx 2{,}52$

5.
- Como -1 é um zero de f, temos que $g'(-1) = f(-1) \times e^{-1} = 0 \times e^{-1} = 0$, sabemos que o declive da reta tangente ao gráfico no ponto de abcissa -1 é uma reta de declive zero, ou seja, uma reta horizontal, o que não é compatível com o gráfico da opção (I), pelo que este gráfico não representa a função g.
- Como $e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, a função derivada ($g'$) e a função f têm o mesmo sinal. Ou seja, a derivada é positiva apenas no intervalo $]2, +\infty[$, logo a função g é crescente apenas neste intervalo, ao contrário do que acontece com o gráfico da opção (II), pelo que este gráfico também não é o que representa a função g.
- Como $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x) - 2] = 0$, a reta de equação $y = 2$ é uma assíntota do gráfico de g. Da observação do gráfico da opção (III), verifica-se que assíntota deste gráfico é a reta $y = -2$ e não a reta $y = 2$, pelo que também não é este o gráfico da função g.

Desta forma, o gráfico da opção (IV) é o único que pode representar a função g, uma vez que é compatível com as condições enunciadas.

6. Como sabemos que a reta tangente no ponto de abcissa a é paralela à reta $y = \frac{x}{2} + 1$, sabemos que o declive, e logo também o valor derivada é $m = g'(a) = \frac{1}{2}$.
Logo o valor de a é a solução da equação $g'(x) = \frac{1}{2}, \ : \ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$

Assim, começamos por determinar a expressão de g':

$$g'(x) = (\operatorname{sen}(2x) - \cos x)' = (\operatorname{sen}(2x))' - (\cos x)' = (2x)' \cos(2x) - (-\operatorname{sen} x) = 2\cos(2x) + \operatorname{sen} x$$

Como $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ e $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$,vem:

$$g'(x) = 2\cos(2x) + \operatorname{sen} x = 2\left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right) + \operatorname{sen} x = 2\left(1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right) + \operatorname{sen} x =$$

$$= 2\left(1 - 2\operatorname{sen}^2 x\right) + \operatorname{sen} x = 2 - 4\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = -4\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x + 2$$

Logo, resolvendo a equação $g'(a) = \frac{1}{2}$ temos:

$$-4\operatorname{sen}^2 a + \operatorname{sen} a + 2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -8\operatorname{sen}^2 a + 2\operatorname{sen} a + 4 = 1 \Leftrightarrow -8\operatorname{sen}^2 a + 2\operatorname{sen} a + 3 = 0$$

Considerando $y = \operatorname{sen} a$, e resolvendo a equação de grau 2, temos que:

$$-8\operatorname{sen}^2 a + 2\operatorname{sen} a + 3 = 0 \Leftrightarrow -8y^2 + 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-8)(3)}}{2(-8)} \Leftrightarrow y = \frac{3}{4} \vee y = -\frac{1}{2}$$

Escrevendo em função de a, vem: $\operatorname{sen} a = \frac{3}{4} \ \vee \ \operatorname{sen} a = -\frac{1}{2}$

Como $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, $-1 < \operatorname{sen} x < 0$, logo a equação $\operatorname{sen} a = \frac{3}{4}$ é impossível.

$$\operatorname{sen} a = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} a = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow a = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ a = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ a = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ a = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Concretizando valores de k podemos verificamos que $a = -\frac{\pi}{6}$ é a única solução da equação que pertence ao domínio da função - $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, pelo que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $a = -\frac{\pi}{6}$ tem declive $\frac{1}{2}$

7. Como $f(x) = f(x+a) \Leftrightarrow f(x) - f(x+a) = 0$, mostrar que $f(x) = f(x+a)$ tem, pelo menos, uma solução em $]-a, 0[$ é equivalente a mostrar que uma função g, de domínio $]-a, 0[$, definida por $g(x) = f(x) - f(x+a)$ tem pelo menos um zero, visto que

$$f(x) = f(x+a) \Leftrightarrow f(x) - f(x+a) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$$

Como a função f é contínua em $[-a,a]$ (e também em $[-a,0]$), também é em $[-a,0]$, e $f(x+a)$ é contínua em $[-a,0]$, pelo que podemos garantir que a função g é contínua em $[-a,0]$, por resultar da diferença de duas funções contínuas neste intervalo.

Como $g(0) < 0 < g(-a)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]-a, 0[$ tal que $g(c) = 0$, ou seja, que a equação $g(x) = 0$ tem, pelo menos, uma solução em $]-a, 0[$, o que é equivalente a provar que a condição $f(x) = f(x+a)$ tem, pelo menos, uma solução em $]-a, 0[$

C.A.

$g(-a) = f(-a) - f(-a+a) \underset{f(-a)=f(a)}{=} f(a) - f(0)$

Como $f(a) > f(0)$, então $g(-a) > 0$

$g(0) = f(0) - f(0+a) = f(0) - f(a)$

Como $f(a) > f(0)$, então $g(0) < 0$

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/2.ª Fase 15 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2013

VERSÃO 1

Página em branco

Na folha de respostas, indique de forma legível a versão da prova (Versão 1 ou Versão 2). A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos de todas as respostas aos itens de escolha múltipla.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 5, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \ \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \ \text{e} \ n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\ e^u$

$(a^u)' = u'\ a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Na Figura 1, está representado um tabuleiro quadrado dividido em dezasseis quadrados iguais, cujas linhas são A, B, C e D e cujas colunas são 1, 2, 3 e 4. O João tem doze discos, nove brancos e três pretos, só distinguíveis pela cor, que pretende colocar no tabuleiro, não mais do que um em cada quadrado.

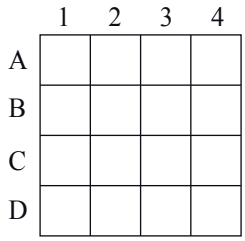


Figura 1

De quantas maneiras diferentes pode o João colocar os doze discos nos dezasseis quadrados do tabuleiro?

(A) $^{16}C_{12}$ **(B)** $^{16}C_9 \times {}^{7}C_3$ **(C)** $^{16}A_{12}$ **(D)** $^{16}A_9 \times {}^{7}A_3$

2. Considere a linha do triângulo de Pascal em que o produto do segundo elemento pelo penúltimo elemento é 484.

Qual é a probabilidade de escolher, ao acaso, um elemento dessa linha que seja superior a 1000?

(A) $\frac{15}{23}$ **(B)** $\frac{6}{11}$ **(C)** $\frac{17}{23}$ **(D)** $\frac{8}{11}$

3. Sejam a e b dois números reais tais que $1 < a < b$ e $\log_a b = 3$

Qual é, para esses valores de a e de b, o valor de $\log_a(a^5 \times \sqrt[3]{b}) + a^{\log_a b}$?

(A) $6 + b$ **(B)** $8 + b$ **(C)** $6 + a^b$ **(D)** $8 + a^b$

4. Seja f uma função de domínio $[-e, 1]$

Sabe-se que:

- f é contínua no seu domínio;
- $f(-e) = 1$
- $f(1) = e$

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) A equação $f(x) - 1 = 0$ tem pelo menos uma solução em $]-e, 1[$

(B) A equação $f(x) = e$ tem pelo menos uma solução em $]-e, 1[$

(C) A equação $f(x) = 0$ tem pelo menos uma solução em $]-e, 1[$

(D) A equação $f(x) = \frac{e}{2}$ tem pelo menos uma solução em $]-e, 1[$

5. Sejam f' e f'', de domínio $\mathbb{R}$, a primeira derivada e a segunda derivada de uma função f, respetivamente.

Sabe-se que:

- a é um número real;
- P é o ponto do gráfico de f de abcissa a
- $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$
- $f''(a) = -2$

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) a é um zero da função f

(B) $f(a)$ é um máximo relativo da função f

(C) $f(a)$ é um mínimo relativo da função f

(D) P é ponto de inflexão do gráfico da função f

6. Na Figura 2, está representada, num referencial ortogonal xOy, parte do gráfico de uma função polinomial g, de grau 3

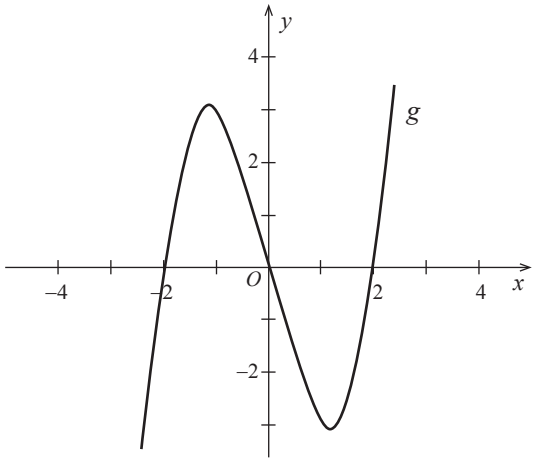
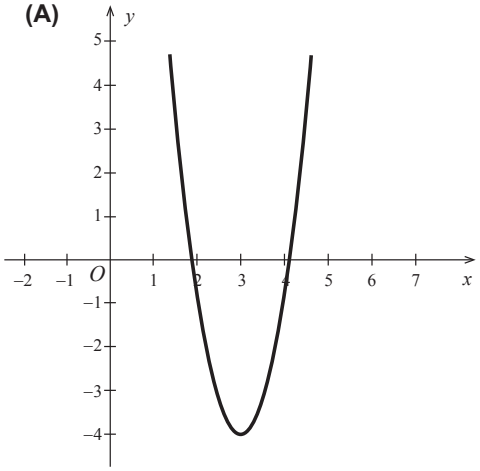


Figura 2

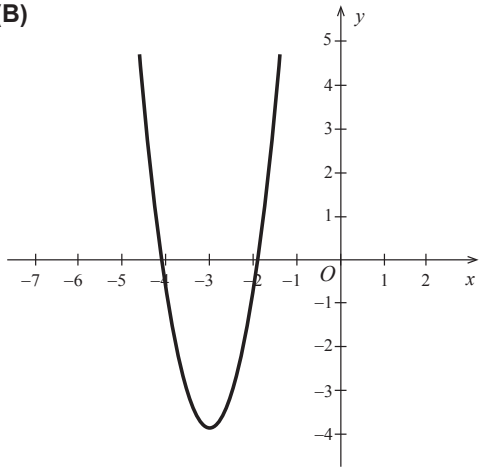
Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, que verifica a condição $f(x) = g(x-3)$

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f', primeira derivada da função f?

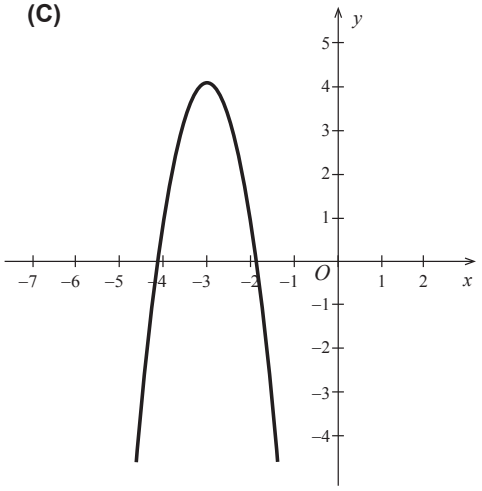
(A)



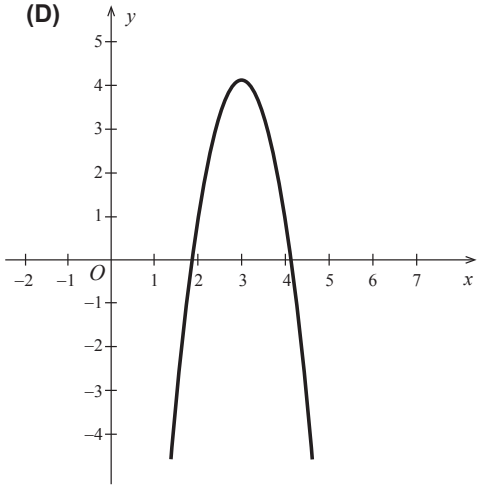
(B)



(C)



(D)



7. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, $z = 2 + bi$, com $b < 0$

Seja $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Qual dos números complexos seguintes pode ser o conjugado de z ?

(A) $\frac{3}{2}cis(\alpha)$ **(B)** $3cis(-\alpha)$

(C) $3cis(\alpha)$ **(D)** $\frac{3}{2}cis(-\alpha)$

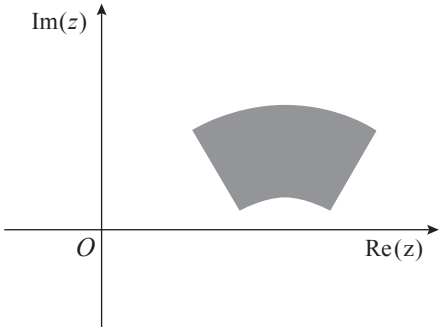
8. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição

$$\frac{3}{2} \leq |z - 3 + i| \leq 3 \ \wedge \ \frac{\pi}{3} \leq \arg(z - 3 + i) \leq \frac{2\pi}{3}$$

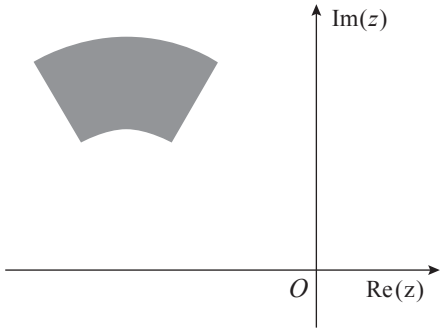
Considere como $\arg(z)$ a determinação que pertence ao intervalo $[-\pi, \pi[$

Qual das opções seguintes pode representar, no plano complexo, o conjunto de pontos definido pela condição dada?

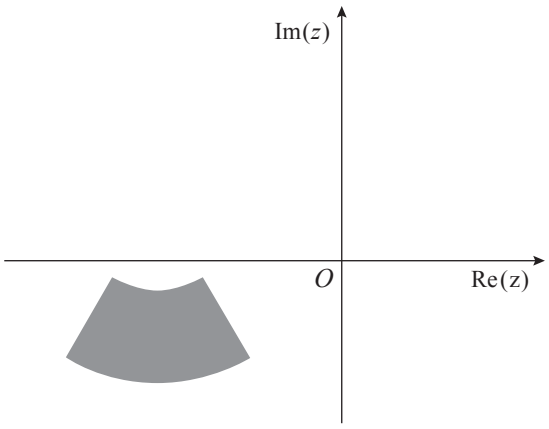
(A)



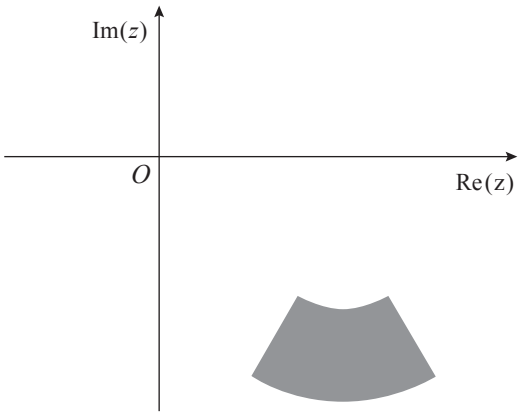
(B)



(C)



(D)



GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

1.1. Considere $z_1 = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{2} + i^{22}$ e $z_2 = \frac{-2}{i\,z_1}$

Determine, sem utilizar a calculadora, o menor número natural n tal que $(z_2)^n$ é um número real negativo.

1.2. Seja $\alpha \in [-\pi, \pi[$

Mostre que $\frac{\cos(\pi-\alpha) + i\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha} = cis(\pi - 2\alpha)$

2. Na Figura 3, está representado um dado cúbico, não equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 3, em que faces opostas têm o mesmo número.

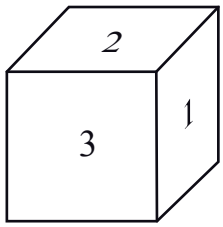


Figura 3

Lança-se o dado uma única vez e observa-se o número da face voltada para cima.

Sejam A e B os acontecimentos seguintes.

A: «sair número ímpar»

B: «sair número menor do que 3»

Sabe-se que:

- $P(\overline{A} \cup \overline{B}) - P(A \cap B) = \frac{5}{9}$
- $P(B \mid A) = \frac{2}{7}$

Determine a probabilidade de sair o número 3

3. Numa conferência de imprensa, estiveram presentes 20 jornalistas.

3.1. Considere a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um dos 20 jornalistas presentes nessa conferência de imprensa.

Seja X a variável aleatória «número de jornalistas do sexo feminino escolhidos».

A tabela de distribuição de probabilidades da variável X é a seguinte.

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

Considere agora a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, dois dos 20 jornalistas presentes nessa conferência de imprensa.

Seja Y a variável aleatória «número de jornalistas do sexo feminino escolhidos».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável Y

Apresente as probabilidades na forma de fração.

3.2. Considere o problema seguinte.

«Admita que a conferência de imprensa se realiza numa sala, cujas cadeiras se encontram dispostas em cinco filas, cada uma com oito cadeiras. Todos os jornalistas se sentam, não mais do que um em cada cadeira, nas três primeiras filas.

De quantas maneiras diferentes se podem sentar os 20 jornalistas, sabendo que as duas primeiras filas devem ficar totalmente ocupadas?»

Apresentam-se, em seguida, duas respostas corretas.

Resposta I) $^{20}C_{16} \times 16! \times {}^{8}A_4$ Resposta II) $^{20}A_8 \times {}^{12}A_8 \times {}^{8}A_4$

Numa composição, apresente os raciocínios que conduzem a cada uma dessas respostas.

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x\,e^{3+x} + 2x & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{1-\sqrt{x}+\operatorname{sen}(x-1)}{1-x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4.1. Averigue se a função f é contínua em $x = 1$

4.2. Mostre que o gráfico da função f admite uma assíntota oblíqua quando x tende para $-\infty$

5. Seja g uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, cuja derivada, g', de domínio $\mathbb{R}^+$, é dada por

$$g'(x) = \ln\left(e^x + 6e^{-x} + 4x\right)$$

Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

6. Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função f, de domínio $[-1, 2]$, definida por $f(x) = -x - 3^{1+\ln(x^2+1)}$, o ponto A de coordenadas $(2, 0)$ e um ponto P que se desloca ao longo do gráfico da função f

Existe uma posição do ponto P para a qual a área do triângulo $[AOP]$ é mínima.

Determine a área desse triângulo, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar o valor da área do triângulo $[AOP]$ com arredondamento às centésimas.

7. Na Figura 4, estão representados, num referencial o.n. xOy, o triângulo $[OAB]$ e a reta r

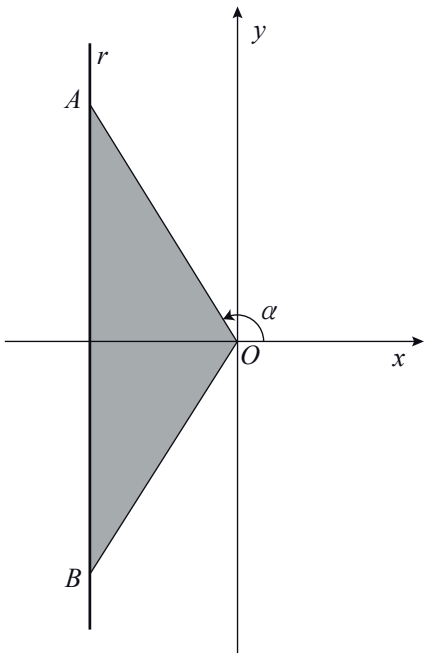


Figura 4

Sabe-se que:

- a reta r é definida por $x = -3$
- o ponto A pertence à reta r e tem ordenada positiva;
- o ponto B é o simétrico do ponto A em relação ao eixo Ox
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}A$
- $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$
- a função P, de domínio $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, é definida por $P(x) = -6\,tg\,x - \frac{6}{\cos x}$

7.1. Mostre que o perímetro do triângulo $[OAB]$ é dado, em função de α, por $P(\alpha)$

7.2. Determine o declive da reta tangente ao gráfico da função P no ponto de abcissa $\frac{5\pi}{6}$, sem utilizar a calculadora.

FIM

Página em branco

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** ..... (8 × 5 pontos) ..... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1.

1.1. ..... 15 pontos

1.2. ..... 15 pontos

2. ..... 15 pontos

3.

3.1. ..... 15 pontos

3.2. ..... 15 pontos

4.

4.1. ..... 15 pontos

4.2. ..... 15 pontos

5. ..... 15 pontos

6. ..... 15 pontos

7.

7.1. ..... 15 pontos

7.2. ..... 10 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/2.ª Fase

Critérios de Classificação 12 Páginas

2013

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** ..... (8 × 5 pontos) ..... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1.
- **1.1.** ..... 15 pontos
- **1.2.** ..... 15 pontos

2. ..... 15 pontos

3.
- **3.1.** ..... 15 pontos
- **3.2.** ..... 15 pontos

4.
- **4.1.** ..... 15 pontos
- **4.2.** ..... 15 pontos

5. ..... 15 pontos

6. ..... 15 pontos

7.
- **7.1.** ..... 15 pontos
- **7.2.** ..... 10 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

A classificação da prova deve respeitar integralmente os critérios gerais e os critérios específicos a seguir apresentados.

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos de classificação apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro, previsto na grelha de classificação.

A ausência de indicação inequívoca da versão (Versão 1 ou Versão 2) implica a classificação com zero pontos de todas as respostas aos itens de escolha múltipla.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos. No entanto, em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se o examinando responder a um mesmo item mais do que uma vez, não eliminando inequivocamente a(s) resposta(s) que não deseja que seja(m) classificada(s), deve ser considerada apenas a resposta que surgir em primeiro lugar.

Até ao ano letivo 2013/2014, na classificação das provas, continuarão a ser consideradas corretas as grafias que seguirem o que se encontra previsto quer no Acordo de 1945, quer no Acordo de 1990 (atualmente em vigor), mesmo quando se utilizem as duas grafias numa mesma prova.

Itens de seleção

ESCOLHA MÚLTIPLA

A cotação total do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a única opção correta.

São classificadas com zero pontos as respostas em que seja assinalada:

– uma opção incorreta;

– mais do que uma opção.

Não há lugar a classificações intermédias.

Itens de construção

Os critérios de classificação das respostas aos itens de construção apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada etapa e a cada nível de desempenho corresponde uma dada pontuação.

No item de composição, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea do desempenho no domínio específico da disciplina e no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa. A avaliação do desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa faz-se de acordo com os níveis a seguir apresentados.

Níveis	Descritores
3	Texto bem estruturado e linguisticamente correto*, ou com falhas esporádicas que não afetem a inteligibilidade do discurso.
2	Texto bem estruturado, mas com incorreções linguísticas que conduzam a alguma perda de inteligibilidade do discurso. OU Texto linguisticamente correto, mas com deficiências de estruturação que conduzam a alguma perda de inteligibilidade do discurso.
1	Texto com deficiências de estruturação e com incorreções linguísticas, embora globalmente inteligível.

* Por «texto linguisticamente correto» entende-se um texto correto nos planos da sintaxe, da pontuação e da ortografia.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é zero pontos. Neste caso, não é classificado o desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

Na resposta aos itens de construção, caso o aluno apresente elementos em excesso face ao solicitado e tais elementos piorem a consistência da resposta e/ou afetem a caracterização do desempenho, a resposta deve ser classificada com zero pontos.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar em situações não descritas anteriormente.

Situação	Classificação
1. Classificação da resposta a um item cujo critério se apresenta organizado por etapas.	A pontuação indicada para cada etapa é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A classificação da resposta resulta da soma das pontuações atribuídas às diferentes etapas, à qual se subtrai, eventualmente, um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 14 e/ou 20.
2. Pontuação de uma etapa dividida em passos.	A pontuação indicada para cada passo é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A pontuação da etapa resulta da soma das pontuações dos diferentes passos.
3. Classificação da resposta a um item ou pontuação de uma etapa cujo critério se apresenta organizado por níveis de desempenho.	A resposta é enquadrada numa das descrições apresentadas. À classificação/pontuação correspondente subtrai-se, eventualmente, um ou dois pontos, se ocorrer um erro ocasional num cálculo, e/ou se se utilizar simbologia ou expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.

Situação	Classificação
4. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite e classificado qualquer processo de resolução cientificamente correto. O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante distribuição da cotação do item pelas etapas* percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.
5. Utilização de processos de resolução que não respeitam as instruções dadas [exemplo: «sem recorrer à calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Apresentação apenas do resultado final, se a resolução do item exige cálculos e/ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
7. Ausência de apresentação dos cálculos e/ou das justificações necessárias à resolução de uma etapa*.	A etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
8. Ausência de apresentação explícita de uma dada etapa que não envolva cálculos e/ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, a mesma é pontuada com a pontuação total para ela prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
9. Transposição incorreta de dados do enunciado, que não altera o que se pretende avaliar com o item.	Se o grau de dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se o grau de dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – na(s) etapa(s) em que o grau de dificuldade diminuir, a pontuação máxima a atribuir a esta(s) etapa(s) deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista; – na(s) etapa(s) em que o grau de dificuldade não diminuir, esta(s) deve(m) ser pontuada(s) de acordo com os critérios específicos de classificação.
10. Transposição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se o grau de dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido: – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.

* Em situações em que o critério é aplicável tanto a **etapas** como a **passos**, utiliza-se apenas o termo «etapas» por razões de simplificação da apresentação.

Situação	Classificação
11. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido: – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
12. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido: – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
13. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas o passo final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
14. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
15. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
17. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.
18. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, e/ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
19. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final [por exemplo, «15» em vez de «15 metros»].	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a cotação total para ela prevista.
20. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. ..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

As respostas corretas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	B	C	A	D	B	A	C	A
Versão 2	A	D	B	B	C	A	D	C

GRUPO II

1.1. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Determinar z_1 na forma algébrica ..... 2 pontos
- Escrever $i^{22} = -1$ ..... 1 ponto
- Obter z_1 na forma algébrica ..... 1 ponto

Determinar $i\,z_1$ na forma trigonométrica ..... 4 pontos
- Indicar o módulo de z_1 ..... 1 ponto
- Indicar um argumento de z_1 ..... 1 ponto
- Escrever i na forma trigonométrica ..... 1 ponto
- Obter $i\,z_1$ na forma trigonométrica ..... 1 ponto

Calcular z_2 na forma trigonométrica ..... 3 pontos
- Escrever $-2 = 2cis\pi$ ..... 1 ponto
- Efetuar a divisão na forma trigonométrica ..... 2 pontos

Referir que $(z_2)^n$ é um número real negativo sse $\arg\left((z_2)^n\right) = \pi + 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$ (**ver nota**) ..... 3 pontos

Obter $n = -6 + 12k$ com $k \in \mathbb{Z}$ ..... 1 ponto

Obter o valor de n ..... 2 pontos

2.º Processo

Determinar z_1 na forma algébrica ..... 2 pontos
- Escrever $i^{22} = -1$ ..... 1 ponto
- Obter z_1 na forma algébrica ..... 1 ponto

Determinar $i\,z_1$ na forma algébrica ..... 2 pontos

Calcular z_2 na forma algébrica ..... 3 pontos

- Indicar a multiplicação de ambos os termos da fração pelo conjugado do denominador ..... 1 ponto
- Efetuar a multiplicação do numerador ..... 1 ponto
- Efetuar a multiplicação do denominador ..... 1 ponto

Escrever z_2 na forma trigonométrica ..... 2 pontos

- Indicar um argumento de z_2 ..... 1 ponto
- Indicar o módulo de z_2 ..... 1 ponto

Referir que $(z_2)^n$ é um número real negativo sse $\arg\left((z_2)^n\right) = \pi + 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$ (**ver nota**) ..... 3 pontos

Obter $n = -6 + 12k$ com $k \in \mathbb{Z}$ ..... 1 ponto

Obter o valor de n ..... 2 pontos

Nota – Se o examinando escrever uma condição considerando que $(z_2)^n$ é um número real OU escrever uma condição considerando que $(z_2)^n$ é um número real positivo, a pontuação a atribuir nesta etapa é 2 pontos.

1.2. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ ..... 1 ponto

Escrever $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$ ..... 1 ponto

Indicar a multiplicação de ambos os termos da fração pelo conjugado do denominador ..... 2 pontos

Efetuar a multiplicação do numerador ..... 2 pontos

Efetuar a multiplicação do denominador ..... 2 pontos

Escrever $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$ ..... 1 ponto

Escrever $\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \cos(2\alpha)$ ..... 1 ponto

Escrever $2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \operatorname{sen}(2\alpha)$ ..... 1 ponto

Obter $\left(-\cos(2\alpha) + i\operatorname{sen}(2\alpha)\right)$ ..... 1 ponto

Escrever $cis(\pi - 2\alpha) = -\cos(2\alpha) + i\operatorname{sen}(2\alpha)$ ..... 2 pontos

Concluir o pretendido ..... 1 ponto

2.º Processo

Escrever $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ ..... 1 ponto

Escrever $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$ ..... 1 ponto

Escrever $\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha = cis\,\alpha$ ..... 1 ponto

Escrever $-\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha = cis(\pi - 2\alpha) \times cis\,\alpha$ ..... 4 pontos

Escrever $cis(\pi - 2\alpha) \times cis\,\alpha = cis(\pi - \alpha)$ ..... 4 pontos

Escrever $cis(\pi - \alpha) = \cos(\pi - \alpha) + i\operatorname{sen}(\pi - \alpha)$ ..... 2 pontos

Escrever $\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$ ..... 1 ponto

Concluir o pretendido ..... 1 ponto

2. ..... **15 pontos**

Seja C o acontecimento «sair o número 3».

Podem ser admitidas outras designações para o acontecimento.

Escrever $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B})$ ..... 1 ponto

Escrever $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$ ..... 1 ponto

Obter $P(\overline{A} \cup \overline{B}) - P(A \cap B) = 1 - 2P(A \cap B)$ ..... 2 pontos

Calcular $P(A \cap B)$ ..... 2 pontos

Escrever $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ ..... 1 ponto

Calcular $P(A)$ ..... 3 pontos

Referir que $P(A) = P(C) + P(A \cap B)$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Obter $P(C)$ ..... 3 pontos

3.1. ..... **15 pontos**

Determinar o número de jornalistas do sexo feminino OU determinar o número de jornalistas do sexo masculino ..... 3 pontos

Indicar os valores que a variável Y pode tomar ..... 2 pontos

Calcular a probabilidade de cada um dos valores da variável Y ....(3 + 3 + 3)..... 9 pontos

Apresentar a tabela de distribuição de probabilidades (**ver nota**) ..... 1 ponto

Nota – A pontuação relativa a esta etapa só é atribuída se, na etapa anterior, não tiverem sido atribuídos zero pontos.

3.2. ..... **15 pontos**

Na composição, são contemplados os pontos seguintes:

- explicar ${}^{20}C_{16} \times 16!$
- explicar a razão pela qual o produto de ${}^{20}C_{16} \times 16!$ por ${}^{8}A_{4}$ é uma resposta correta (I);
- explicar ${}^{20}A_{8}$
- explicar ${}^{12}A_{8}$
- explicar a razão pela qual o produto de ${}^{20}A_{8} \times {}^{12}A_{8}$ por ${}^{8}A_{4}$ é uma resposta correta (II).

Na tabela seguinte, indica-se como deve ser classificada a resposta a este item, de acordo com os níveis de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa e com os níveis de desempenho no domínio específico da disciplina.

Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina		Descritores do nível de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa	Níveis*		
			1	**2**	**3**
Níveis	**5**	Na composição, são contemplados corretamente os cinco pontos.	13	14	15
	4	Na composição, são contemplados corretamente apenas quatro dos cinco pontos.	10	11	12
	3	Na composição, são contemplados corretamente apenas três dos cinco pontos.	7	8	9
	2	Na composição, são contemplados corretamente apenas dois dos cinco pontos.	4	5	6
	1	Na composição, é contemplado corretamente apenas um dos cinco pontos.	1	2	3

***** Descritores apresentados nos Critérios Gerais de Classificação.

4.1. ..... **15 pontos**

Referir que f é contínua em $x=1$ sse $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$ ..... 1 ponto

Calcular $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ OU calcular $f(1)$ ..... 2 pontos

Calcular $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ ..... 11 pontos

Escrever $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} \frac{1-\sqrt{x}+\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}$ ..... 1 ponto

Levantar a indeterminação ..... 10 pontos

Escrever

$\lim_{x\to 1^+} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\lim_{x\to 1^+} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})}$ ..... 1 ponto

Escrever

$\lim_{x\to 1^+} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1+\sqrt{x}}$ ..... 2 pontos

Obter o valor de $\lim_{x\to 1^+} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$ ..... 1 ponto

Escrever

$\lim_{x\to 1^+} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}=\lim_{x\to 1^+} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{-(x-1)}$ ..... 1 ponto

Escrever

$\lim_{x-1\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{-(x-1)}=\lim_{y\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} y}{-y}$ (**ver nota**) ..... 2 pontos

Referir o limite notável $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$ ..... 1 ponto

Obter o valor de $\lim_{x\to 1^+} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}$ ..... 1 ponto

Obter o valor de $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ ..... 1 ponto

Concluir que f não é contínua em $x=1$ porque $\lim_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$

OU porque $\lim_{x\to 1^+} f(x)\neq f(1)$ ..... 1 ponto

Nota – Se o examinando escrever $x\to 1^+$ em vez de $x-1\to 0^+$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

4.2. ..... **15 pontos**

Determinar $\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ ..... 3 pontos

Escrever $\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to -\infty} \frac{x\,e^{3+x}+2x}{x}$ ..... 1 ponto

Obter o valor de $m=\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ ..... 2 pontos

Determinar $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - m\,x)$ ..... 10 pontos

Escrever $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - m\,x) = \lim_{x \to -\infty} (x\,e^{3+x})$ ..... 1 ponto

Levantar a indeterminação ..... 7 pontos

Escrever $\lim_{-x \to +\infty} (x\,e^{3+x}) = \lim_{y \to +\infty} (-y\,e^{3-y})$
(**ver nota**) ..... 3 pontos

Escrever $\lim_{y \to +\infty} (-y\,e^{3-y}) = \lim_{y \to +\infty} \dfrac{-e^3}{\dfrac{e^y}{y}}$ ..... 3 pontos

Referir o limite notável $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty$ ..... 1 ponto

Obter o valor de $b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx)$ ..... 2 pontos

Concluir o pretendido ..... 2 pontos

Nota – Se o examinando escrever $x \to -\infty$ em vez de $-x \to +\infty$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

5. ..... **15 pontos**

Determinar $g''(x)$ ..... 4 pontos

Escrever $\left(\ln(e^x + 6e^{-x} + 4x)\right)' = \dfrac{(e^x + 6e^{-x} + 4x)'}{e^x + 6e^{-x} + 4x}$
(ou equivalente) ..... 1 ponto

Obter $g''(x)$ ..... 3 pontos

Resolver a equação $g''(x) = 0$ ..... 5 pontos

Obter $(e^x)^2 + 4e^x - 6 = 0$ ..... 2 pontos

Reconhecer que $e^x = -2 - \sqrt{10}$ é impossível em $\mathbb{R}^+$ ..... 1 ponto

Concluir que $e^x = -2 + \sqrt{10}$ ..... 1 ponto

Obter $x = \ln\left(-2 + \sqrt{10}\right)$ ..... 1 ponto

Estudar a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico ..... 5 pontos

Referir que $e^x + 6e^{-x} + 4x > 0$ se $x \in \mathbb{R}^+$ ..... 1 ponto

Concluir que g'' é negativa em $\left]0, \ln(-2 + \sqrt{10})\right[$ ..... 1 ponto

Concluir que g'' é positiva em $\left]\ln(-2 + \sqrt{10}), +\infty\right[$ ..... 1 ponto

Concluir que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo em $\left]0, \ln(-2 + \sqrt{10})\right[$ ..... 1 ponto

Concluir que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima em $\left]\ln(-2 + \sqrt{10}), +\infty\right[$ ..... 1 ponto

Concluir que o gráfico de g tem um ponto de inflexão ..... 1 ponto

6. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizado(s) na calculadora (**ver notas 1** e **2**) ..... 4 pontos

Referir que a ordenada do ponto P, quando a área do triângulo $[AOP]$ é mínima, é igual ao máximo de f em $[-1, 2]$ ..... 5 pontos

Obter a área do triângulo $[AOP]$ ..... 6 pontos

- Referir $\overline{OA}$ ..... 2 pontos
- Indicar a altura do triângulo $[AOP]$, relativamente à base $[OA]$..... 2 pontos
- Calcular a área do triângulo $[AOP]$ ..... 2 pontos

2.º Processo

Reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizado(s) na calculadora (**ver notas 1** e **2**) ..... 4 pontos

Referir $\overline{OA}$ ..... 2 pontos

Obter em função de x, abcissa do ponto P, a área do triângulo $[AOP]$ ..... 5 pontos

Obter o valor mínimo da área do triângulo $[AOP]$ ..... 4 pontos

Notas:

1. Se o examinando não apresentar o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

2. Se o examinando apresentar um gráfico que não respeite o domínio da função, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

7.1. ..... **15 pontos**

Referir que o perímetro do triângulo $[OAB]$ é igual a $\overline{AB} + \overline{OB} + \overline{OA}$ (ou equivalente) ..... 1 ponto

Referir que $\overline{OA} = \overline{OB}$ ..... 1 ponto

Referir que a amplitude do ângulo AOA_1 é $\pi - \alpha$, sendo A_1 a projeção ortogonal de A sobre o eixo Ox ..... 2 pontos

Escrever $\cos(\pi - \alpha) = \dfrac{3}{\overline{OA}}$ ..... 2 pontos

Obter $\overline{OA} = \dfrac{-3}{\cos \alpha}$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Escrever $tg(\pi - \alpha) = \dfrac{\overline{A\,A_1}}{3}$ ..... 2 pontos

Obter $\overline{A\,A_1} = -3\,tg\,\alpha$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Referir que $\overline{AB} = 2\,\overline{A\,A_1}$ ..... 1 ponto

Concluir o pretendido ..... 2 pontos

7.2. ..... **10 pontos**

Identificar o declive da reta tangente ao gráfico da função P no ponto de abcissa $\frac{5\pi}{6}$ com $P'\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ ..... 2 pontos

Determinar $P'(x)$ ..... 6 pontos

Determinar $(tg\ x)'$ ..... 1 ponto

Determinar $\left(\frac{6}{\cos x}\right)'$ ..... 3 pontos

Obter $P'(x)$ ..... 2 pontos

Calcular $P'\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ ..... 2 pontos

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO 2013

- 2.ª FASE -

DISCIPLINA: MATEMÁTICA A - PROVA 635

Grupo II

Item 1.1. (15 pontos)

Situação1: O examinando determina z_1 na forma algébrica, determina $i\,z_1$ na forma trigonométrica, calcula z_2 na forma trigonométrica, escreve $(z_2)^n = 2^n\,cis\left(-\frac{n\pi}{6}\right)$ e escreve $n = 6$

Classificação proposta: (1.º Processo) 2+4+3+1+0+2=**12 pontos**

Situação2: O examinando determina z_1 na forma algébrica, determina $i\,z_1$ na forma trigonométrica, calcula z_2 na forma trigonométrica, escreve $(z_2)^n = 2^n\,cis\left(-\frac{n\pi}{6}\right)$, escreve $-\frac{n\pi}{6} = -\pi$ e obtém $n = 6$

Classificação proposta: (1.º Processo) 2+4+3+2+0+2=**13 pontos**

Item 1.2. (15 pontos)

Situação: O examinando escreve $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha$, escreve $\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}(\pi-\alpha)$, escreve $\cos(\pi-\alpha)+i\operatorname{sen}(\pi-\alpha)=cis(\pi-\alpha)$, escreve $\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha=cis\alpha$ e efetua a divisão na forma trigonométrica.

Classificação proposta: 15 (CG4)

Adaptação do critério específico

Escrever $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha$	1 ponto
Escrever $\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}(\pi-\alpha)$	4 pontos
Escrever $\cos(\pi-\alpha)+i\operatorname{sen}(\pi-\alpha)=cis(\pi-\alpha)$	2 pontos
Escrever $\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha=cis\alpha$	1 ponto
Efetuar a divisão na forma trigonométrica	7 pontos

Item 3.1. (15 pontos)

Situação: O examinando determina o número de jornalistas do sexo feminino OU determina o número de jornalistas do sexo masculino, indica os valores que a variável *Y* pode tomar e apresenta apenas a tabela de distribuição de probabilidades corretamente preenchida.

Classificação proposta: **15 pontos**

Item 3.2. (15 pontos)

Situação: O examinando explica a escrita de $^{20}C_{16} \times 16!$ referindo que dos 20 jornalistas se escolhem 16 para ocupar as duas primeiras filas, o que pode ser feito de $^{20}C_{16}$ maneiras diferentes, e que, escolhidos esses 16 jornalistas, eles se podem sentar de $16!$ maneiras diferentes.

O examinando explica o produto de $^{20}C_{16} \times 16!$ por $^{8}A_{4}$ referindo que, como 16 jornalistas já estão sentados, os restantes 4 jornalistas vão sentar-se em 4 das 8 cadeiras da terceira fila, interessando a ordem, o que pode ser feito de $^{8}A_{4}$ maneiras diferentes.

O examinando explica a escrita de $^{20}A_{8}$ referindo que dos 20 jornalistas vão ser escolhidos 8 para se sentarem na primeira fila, interessando a ordem, o que pode ser feito de $^{20}A_{8}$ maneiras diferentes.

O examinando explica a escrita de $^{12}A_{8}$ referindo que, como 8 jornalistas já estão sentados, dos restantes 12 jornalistas 8 vão sentar-se na segunda fila, interessando a ordem, o que pode ser feito de $^{12}A_{8}$ maneiras diferentes.

O examinando explica o produto de $^{20}A_{8} \times ^{12}A_{8}$ por $^{8}A_{4}$ referindo que, como 16 jornalistas já estão sentados, os restantes 4 jornalistas vão sentar-se em 4 das 8 cadeiras da terceira fila, interessando a ordem, o que pode ser feito de $^{8}A_{4}$ maneiras diferentes.

Classificação proposta: **15 pontos**

Item 4.1. (15 pontos)

Situação: O examinando determina apenas $\lim_{x\to 1^+} f(x)$, utilizando processos cientificamente corretos mas não devidamente justificados, e escreve $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\frac{1}{2}$

Classificação proposta: 0+0+(1+5(CG13))+0 = **6 pontos**

Item 5. (15 pontos)

Situação: O examinando determina $g''(x)$, obtém $\left(e^x\right)^2 + 4e^x - 6 = 0$, reconhece que $e^x = -5{,}16$ é impossível em IR^+, conclui que $e^x = 1{,}16$, obtém $x = \ln(1{,}16)$, estuda a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e conclui que g tem um ponto de inflexão.

Classificação proposta: 4+(2+0(CG5)+0+0)+0+0 = **6 pontos**

Item 6. (15 pontos)

Situação: O examinando reproduz o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) e obtém a área do triângulo [*AOP*].

Classificação proposta: **15 pontos**

Item 7.1. (15 pontos)

Situação 1: O examinando refere que o perímetro do triângulo [OAB] é igual a $\overline{AB} + \overline{OB} + \overline{OA}$, refere que $\overline{OA} = \overline{OB}$, escreve $\cos\alpha = -\frac{3}{\overline{OA}}$, obtém $\overline{OA} = -\frac{3}{\cos\alpha}$, escreve $tg\,\alpha = -\frac{\overline{AA_1}}{3}$, obtém $\overline{AA_1} = -3tg\alpha$, refere que $\overline{AB} = 2\,\overline{AA_1}$ e conclui o pretendido.

Classificação proposta: **15 pontos**

Situação 2: O examinando refere que o perímetro do triângulo [OAB] é igual a $\overline{AB} + \overline{OB} + \overline{OA}$, refere que $\overline{OA} = \overline{OB}$, escreve $\cos\alpha = \frac{3}{\overline{OA}}$, obtém $\overline{OA} = \frac{3}{\cos\alpha}$, escreve $tg\,\alpha = \frac{\overline{AA_1}}{3}$, obtém $\overline{AA_1} = 3tg\alpha$ e refere que $\overline{AB} = 2\,\overline{AA_1}$

Classificação proposta: 1+1+0+0+1+0+1+1+0 = **5 pontos**

Exame nacional de Matemática A (2013, 2.ª fase)

Proposta de resolução

GRUPO I

1. A escolha pode ser feita selecionando, 9 dos 16 quadrados para colocar os discos brancos (não considerando a ordem relevante porque os discos são iguais). Ou seja, ${}^{16}C_9$ são as diferentes formas de dispor os discos brancos no tabuleiro.

   Depois, selecionamos 3 quadrados, de entre os 7 que permanecem sem qualquer disco. Ou seja ${}^{7}C_3$ são as diferentes formas de dispor os discos pretos no tabuleiro, depois de termos colocado os 9 discos brancos.

   Assim, o número de formas diferentes de colocar os 12 discos no tabuleiro, de acordo com as condições definidas é

   $$ {}^{16}C_9 \times {}^{7}C_3 $$

   Resposta: **Opção B**

2. O segundo e o penúltimo números de qualquer linha do triângulo de Pascal são iguais.
   Assim, se o produto do segundo elemento pelo penúltimo elemento de um linha é 484, podemos calcular o valor de ambos:

   $$ a \times a = 484 \Leftrightarrow a^2 = 484 \Leftrightarrow a = \sqrt{484} \Leftrightarrow a = 22 $$

   Assim, temos que a linha em causa tem 23 elementos da forma ${}^{22}C_n$.
   Logo só existem 6 elementos desta linha que são inferiores a 1000:
   ${}^{22}C_0 = {}^{22}C_{22} (= 1)$; ${}^{22}C_1 = {}^{22}C_{21} (= 22)$ e ainda ${}^{22}C_2 = {}^{22}C_{20} (= 231)$
   Porque
   ${}^{22}C_3 = {}^{22}C_{19} = 1540$ e todos os restantes são superiores a estes.

   Logo, sabemos que existem $23 - 6 = 17$ elementos superiores a 1000 num total de 23, ou seja, o valor da probabilidade é $\frac{17}{23}$

   Resposta: **Opção C**

3. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que

   $$ \log_a \left(a^5 \times \sqrt[3]{b}\right) + a^{\log_a b} = \log_a \left(a^5\right) + \log_a \sqrt[3]{b} + b = 5 + \log_a \left(b^{\frac{1}{3}}\right) + b = $$

   $$ = 5 + \frac{1}{3} \log_a b + b = 5 + \frac{1}{3} \times 3 + b = 5 + 1 + b = 6 + b $$

   Resposta: **Opção A**

4. Como, a função f é contínua em $[-e, 1]$, e como $1 < \frac{e}{2} < e$, ou seja, $f(-e) < \frac{e}{2} < f(1)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]-e, 1[$ tal que $f(c) = \frac{e}{2}$, ou seja, que a equação $f(x) = \frac{e}{2}$ tem, pelo menos, uma solução em $]-e, 1[$

   Resposta: **Opção D**

5. Sabemos que a é um zero da primeira derivada (porque $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 \Leftrightarrow f'(a) = 0$) e que tem uma mudança de sinal associada, (porque $f''(x) < 0$, ou seja, f' é decrescente):

x		a	
$(f'(x))'$		$-$	
$f'(x)$		↘	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	Máx	↘

   Logo podemos concluir que a é um maximizante, e por isso $f(a)$ é um máximo relativo da função f.

   Resposta: **Opção B**

   Não existem dados suficientes para rejeitar ou validar a afirmação da opção (A).
   A afirmação (C) é falsa, porque se a fosse um minimizante, então $f''(a) > 0$.
   A afirmação (D) é falsa, porque se P fosse um ponto de inflexão, então $f''(a) = 0$

6. Podemos descrever a monotonia da função g pela análise do gráfico, e relacionar com a variação do sinal da derivada:

x	$-\infty$		a		b	$+\infty$
$g(x)$		↗	Máx	↘	min	↗
$g'(x)$	$+$		0	$-$	0	$+$

   Pela observação do gráfico de g podemos ainda afirmar que $-2 < a < 0$ e $0 < b < 2$.
   Como $f(x) = g(x - 3)$, o gráfico de f resulta de uma translação horizontal do gráfico de g, de 3 unidades para a direita.
   Assim, temos que os extremos da função f têm abcissas $a + 3$ e $b + 3$, e a variação do sinal é dado por:

x	$-\infty$		$a+3$		$b+3$	$+\infty$
$f(x)$		↗	Máx	↘	min	↗
$f'(x)$	$+$		0	$-$	0	$+$

   Como $-2 < a < 0$, temos que $1 < a + 3 < 3$; e como $0 < b < 2$, sabemos que $3 < b + 3 < 5$, pelo que o gráfico da opção (A) é o único compatível com as condições.

   Resposta: **Opção A**

7. Se $z = 2 + bi$, então $\overline{z} = 2 - bi$

   Assim temos $\text{Re}(\overline{z}) > 0$ e como $b < 0$, $\text{Im}(\overline{z}) > 0$, pelo que sabemos que ¡ representação geométrica de $\overline{z}$ pertence ao primeiro quadrante, logo $\text{Arg}(\overline{z})$ não pode ser $-\alpha$

   Por outro lado $|\overline{z}| = \sqrt{2^2 + b^2}$, como $b^2 > 0$, temos que $|\overline{z}| > 2$, logo $|\overline{z}|$ não pode ser $\frac{3}{2}$

   Resposta: **Opção C**

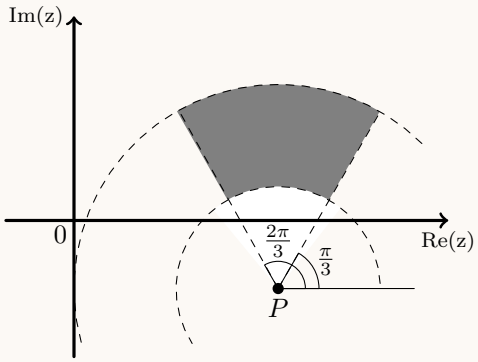
8. Podemos reescrever a condição dada na forma:

   $$\frac{3}{2} \leq |z - 3 + i| \leq 3 \ \wedge \ \frac{\pi}{3} \leq \arg(z - 3 + i) \leq \frac{2\pi}{3} \ \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow \ \frac{3}{2} \leq |\mathbf{z\text{-}(3\text{-}i)}| \leq 3 \ \wedge \ \frac{\pi}{3} \leq \arg(\mathbf{z\text{-}(3\text{-}i)}) \leq \frac{2\pi}{3}$$

   Assim, sendo o ponto P a representação geométrica do número complexo $3 - i$, a condição define o conjunto de pontos do plano complexo que:

   - estão a uma distância do ponto P compreendida entre $\frac{3}{2}$ e 3
   - definem com a semirreta paralela ao eixo real com origem no ponto P e que se prolonga no sentido positivo do eixo, um ângulo compreendido entre $\frac{\pi}{3}$ *rad* e $\frac{2\pi}{3}$ *rad*



   Resposta: **Opção A**

GRUPO II

1.

1.1. Como $i^{22} = i^{4\times5+2} = i^2 = -1$, temos que:

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} + i^{22} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} - 1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} - \frac{2}{2} = \frac{1-2+\sqrt{3}i}{2} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$$

Escrevendo z_1 na f.t. temos $z_1 = \rho\,\text{cis}\,\theta$, onde:

- $\rho = |z_1| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$
- $\text{tg}\,\theta = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$; como $\text{sen}\,\theta > 0$ e $\cos\theta < 0$, θ é um ângulo do 2º quadrante, logo $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$

Assim $z_1 = \text{cis}\,\dfrac{2\pi}{3}$

E como $-2 = 2\,\text{cis}\,\pi$ e $i = \text{cis}\,\dfrac{\pi}{2}$, temos que:

$$z_2 = \frac{-2}{iz_1} = \frac{2\,\text{cis}\,\pi}{\text{cis}\,\frac{\pi}{2} \times \text{cis}\,\frac{2\pi}{3}} = \frac{2\,\text{cis}\,\pi}{\text{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{2\,\text{cis}\,\pi}{\text{cis}\left(\frac{3\pi}{6} + \frac{4\pi}{6}\right)} = \frac{2\,\text{cis}\,\pi}{\text{cis}\,\frac{7\pi}{6}} = 2\,\text{cis}\left(\pi - \frac{7\pi}{6}\right) =$$

$2\,\text{cis}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

Assim temos que $(z_2)^n = \left(2\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^n = 2^n\,\text{cis}\left(n \times \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

E para que $(z_2)^n$ seja um número real negativo, $\arg(z_2)^n = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; ou seja:

$$n \times \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{\pi + 2k\pi}{-\frac{\pi}{6}},\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{6\pi + 12k\pi}{-\pi},\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = -6 - 12k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Como , $n = -6 - 12k \Leftrightarrow \dfrac{n+6}{-12} = k \Leftrightarrow \dfrac{-n-6}{12} = k$

logo, para que $k \in \mathbb{Z}$, o menor valor natural que n pode tomar é 6, ficando $\dfrac{-6-6}{12} = k \Leftrightarrow k = -1$

1.2. Fazendo a simplificação temos:

$\dfrac{\cos(\pi-\alpha) + i\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha}$	$= \dfrac{\cos(\pi-\alpha) + i\,\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha}$	Porque $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen}\,\alpha$
	$= \dfrac{\cos(\pi-\alpha) + i\,\text{sen}\,(\pi-\alpha)}{\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha}$	Porque $\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,(\pi-\alpha)$
	$= \dfrac{\text{cis}\,(\pi-\alpha)}{\text{cis}\,\alpha}$	
	$= \text{cis}\,(\pi - \alpha - \alpha)$	Fazendo a divisão na f. t.
	$= \text{cis}\,(\pi - 2\alpha)$	Como queriamos mostrar

2. Pelas leis de De Morgan, e pelo teorema do acontecimento contrário, temos que:

$$P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cap B}\right)=1-P(A\cap B)$$

Assim, vem que:

$$P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)-P(A\cap B)=\frac{5}{9}\Leftrightarrow 1-P(A\cap B)-P(A\cap B)=\frac{5}{9}\Leftrightarrow 1-2P(A\cap B)=\frac{5}{9}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{5}{9}=2P(A\cap B)\Leftrightarrow\frac{4}{9}=2P(A\cap B)\Leftrightarrow\frac{2}{9}=P(A\cap B)$$

Como $P(B|A)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}\Leftrightarrow P(A)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(B|A)}$; $P(B\cap A)=\dfrac{2}{9}$ e $P(B|A)=\dfrac{2}{7}$, temos que

$$P(A)=\frac{P(B\cap A)}{P(B|A)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{7}}=\frac{7}{9}$$

Logo, temos que $P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)=1-\dfrac{7}{9}=\dfrac{2}{9}$

E que $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=1-P(A\cap B)=1-\dfrac{2}{9}=\dfrac{7}{9}$

Se repararmos que $\overline{A}\cap\overline{B}=\emptyset$, ou seja que $\overline{A}$ e $\overline{B}$ são acontecimentos incompatíveis (porque não existem números pares iguais ou maiores que 3), temos que:

$$P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\right)+P\left(\overline{B}\right)\Leftrightarrow P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)-P\left(\overline{A}\right)=P\left(\overline{B}\right)$$

E assim a probabilidade de sair o número 3, ou seja ocorrer o acontecimento $\overline{B}$, é,

$$P\left(\overline{B}\right)=\frac{7}{9}-\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$$

3.

3.1. Como $P(X=1)=\dfrac{3}{5}$, sabemos que $\dfrac{3}{5}$ dos jornalistas são do sexo feminino, ou seja, $\dfrac{3}{5}\times 20=12$ jornalistas so sexo feminino num total de 20, e por isso, 8 jornalistas do sexo masculino.

Escolhendo, ao acaso, 2 jornalistas, de entre os 20, podemos selecionar grupos, com 0, 1 ou 2 jornalistas do sexo feminino, e as probabilidades são:

- $P(Y=0)=\dfrac{{}^{12}C_0\times{}^{8}C_2}{{}^{20}C_2}=\dfrac{1\times 28}{190}=\dfrac{14}{95}$
- $P(Y=1)=\dfrac{{}^{12}C_1\times{}^{8}C_1}{{}^{20}C_2}=\dfrac{12\times 8}{190}=\dfrac{96}{190}=\dfrac{48}{95}$
- $P(Y=2)=\dfrac{{}^{12}C_2\times{}^{8}C_0}{{}^{20}C_2}=\dfrac{66\times 1}{190}=\dfrac{33}{95}$

Logo a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória Y é:

y_i	0	1	2
$P(Y=y_i)$	$\frac{14}{95}$	$\frac{48}{95}$	$\frac{33}{95}$

3.2. A Resposta (I) $({}^{20}C_{16} \times 16! \times {}^{8}A_4)$ pode ser interpretada como:
Selecionando, de entre os 20 jornalistas 16 para ocupar as duas filas da frente, temos ${}^{20}C_{16}$ grupos diferentes de 16 jornalistas.
Como em cada um destes grupos, existem 16! maneiras diferentes de os sentar, correspondentes a todas as trocas de lugar entre eles que podem ser feitas, multiplicamos os dois números.
E, por cada uma das situações diferentes antes consideradas, existem ainda ${}^{8}A_4$ hipóteses a considerar, decorrentes de selecionar 4 cadeiras, ou posições, de entre as 8 existentes na terceira fila (considerando a ordem relevante) para fazer a atribuição de cada uma delas a um dos 4 jornalistas que se senta nesta fila. Como consideramos a ordem relevante, ficam já consideradas as trocas possíveis entre eles.

A Resposta (II) $({}^{20}A_8 \times {}^{12}A_8 \times {}^{8}A_4)$ pode ser interpretada como:
Existem ${}^{20}A_8$ formas de ocupar a primeira fila, selecionam-se 8 de entre os 20 jornalistas (considera-se a ordem relevante para considerar as trocas possíveis entre cada grupo de 8 selecionados).
Por cada uma das hipóteses anteriores, existem ${}^{12}A_8$ formas de ocupar a segunda fila, correspondentes a selecionar 8 de entre os 12 jornalistas que não ocuparam a primeira fila, podendo estes 8 fazer todas as trocas entre si.
Finalmente, por cada uma das ${}^{20}A_8 \times {}^{12}A_8$ formas de ocupar as duas primeira filas, existem ainda ${}^{8}A_4$ hipóteses a considerar, decorrentes de selecionar 4 cadeiras, ou posições, de entre as 8 existentes na terceira fila (considerando a ordem relevante) para fazer a atribuição de cada uma delas a um dos 4 jornalistas que se senta nesta fila. Como consideramos a ordem relevante, ficam já consideradas as trocas possíveis entre eles.

4.

4.1. Para averiguar se a função f é contínua em $x = 1$, temos que verificar se $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

- $f(1) = 1 \times e^{3+1} + 2 \times 1 = e^4 + 2$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(xe^{3+x} + 2x\right) = 1 \times e^{3+1} + 2 \times 1 = e^4 + 2$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1-\sqrt{x}+\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}\right) = \dfrac{1-\sqrt{1^+}+\operatorname{sen}(1^+-1)}{1-1^+} = \dfrac{0^- + \operatorname{sen}(0^+)}{0^-} = \dfrac{0}{0}$ (ind.)

$$= \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} + \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}\right) = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) + \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})}\right) + \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{-(x-1)}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1^2-(\sqrt{x})^2}{(1-x)(1+\sqrt{x})}\right) - \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}\right) =$$

(fazendo $y = x - 1$, temos que se $x \to 1^+$, então $y \to 0^+$)

$$= \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})}\right) - \underbrace{\lim_{y\to 0^+} \left(\frac{\operatorname{sen} y}{y}\right)}_{\text{Lim. Notável}} = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right) - 1 =$$
$$= \frac{1}{1+\sqrt{1^+}} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

Como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, não existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; logo a função f não é contínua em $x = 1$

4.2. Para mostrar que o gráfico da função f admite uma assíntota oblíqua de equação $y = mx+b$, quando x tende para $-\infty$, temos:

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{xe^{3+x}+2x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{xe^{3+x}}{x}+\frac{2x}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{3+x}+2\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}e^{3+x} + \lim_{x\to-\infty}2 = e^{3+(-\infty)}+2 = e^{-\infty}+2 = 0^+ + 2 = 2$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(xe^{3+x}+2x-2x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(xe^{3+x}\right) = -\infty\times e^{3+(-\infty)} =$$

$$= -\infty\times e^{-\infty}+2 = -\infty\times 0^+ (\text{ indeterminação})$$

(fazendo $y=-x$, temos $x=-y$ e se $x\to-\infty$, então $y\to+\infty$)

$$b = \lim_{x\to-\infty}\left(xe^{3+x}\right) = \lim_{y\to+\infty}\left(-ye^{3-y}\right) = -\lim_{y\to+\infty}\left(ye^{3-y}\right) = -\lim_{y\to+\infty}\left(y\times\frac{e^3}{e^y}\right) = -\lim_{y\to+\infty}\left(e^3\times\frac{y}{e^y}\right) =$$

$$= -\lim_{y\to+\infty}e^3 \times \lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^y} = -e^3\times\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^y}{y}} = -e^3\times\frac{\lim\limits_{y\to+\infty}1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = -e^3\times\frac{1}{+\infty} = -e^3\times 0 = 0$$

Assim temos que a reta de equação $y = 2x$ é uma assíntota do gráfico de f quando x tende para $-\infty$

5. Começando por determinar g'' temos:

$$g''(x) = (g'(x))' = \frac{(e^x + 6e^{-x} + 4x)'}{e^x + 6e^{-x} + 4x} = \frac{(e^x)' + (6e^{-x})' + (4x)'}{e^x + 6e^{-x} + 4x} = \frac{e^x + 6(-x)'e^{-x} + 4}{e^x + 6e^{-x} + 4x} = \frac{e^x - 6e^{-x} + 4}{e^x + 6e^{-x} + 4x}$$

Para determinar o sentido das concavidades, vamos estudar o sinal de g'' :

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 6e^{-x} + 4}{e^x + 6e^{-x} + 4x} = 0 \Leftrightarrow e^x - 6e^{-x} + 4 = 0 \wedge e^x + 6e^{-x} + 4x \neq 0 \Leftrightarrow$$
$$\text{(como } e^x + 6e^{-x} + 4x > 0 \text{ em } \mathbb{R}^+\text{)}$$

$$\Leftrightarrow e^x - 6e^{-x} + 4 = 0 \Leftrightarrow e^x - 6\frac{1}{e^x} + 4 = 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{6}{e^x} + 4 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 6 + 4e^x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\text{(fazendo a substituição de variável } y = e^x\text{)}$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 6 + 4y = 0 \Leftrightarrow y^2 + 4y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{-4 \pm \sqrt{4 \times 10}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{-4 \pm 2\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow y = -2 \pm \sqrt{10} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{2} \Leftrightarrow y = -2 + \sqrt{10} \vee y = -2 + \sqrt{10} \quad (-2 - \sqrt{10} \notin \mathbb{R}^+) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = -2 + \sqrt{10} \Leftrightarrow e^x = -2 + \sqrt{10} \Leftrightarrow x = \ln(-2 + \sqrt{10})$$

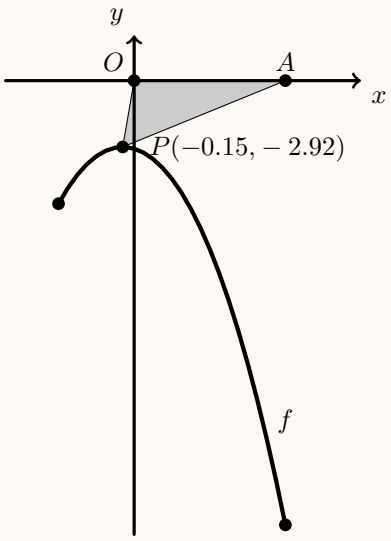
Assim, estudando a variação de sinal de g'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de g, vem:

x	0		$\ln(-2+\sqrt{10})$	$+\infty$
$g''(x)$	n.d.	$-$	0	$+$
$g(x)$	n.d.	∩	Pt. I.	∪

Logo, podemos concluir que o gráfico de g:

- tem um único ponto de inflexão (de abcissa $x = \ln(-2 + \sqrt{10})$)
- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]0, \ln(-2 + \sqrt{10})[$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]\ln(-2 + \sqrt{10}), +\infty[$

6. Representado o gráfico de f, no domínio definido (reproduzido na figura ao lado, numa janela compatível com o domínio da função $(-1 \leq x \leq 2)$), podemos observar que o triângulo $[OAP]$ terá área mínima quando a ordenada do ponto P corresponder ao máximo da função.



Usando a função da calculadora gráfica para determinar o máximo de uma função num intervalo, determinámos valores aproximados às centésimas para as coordenadas de $P(-0.15, -2.92)$.

Designado a ordenada do ponto P por y_P, temos que o valor da área do triângulo $[OAP]$ (arredondado às centésimas) é:

$$A_{[AOP]} = \frac{\overline{OA} \times |y_P|}{2} = \frac{2 \times |-2.92|}{2} = 2.92$$

7.

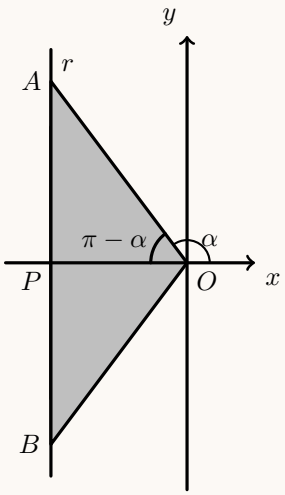
7.1. Começamos por definir o ponto $P(-3,0)$ e o ângulo AOP, cuja amplitude é $\pi - \alpha$.

Assim, como sabemos que que $\overline{OP} = 3$, podemos usar a definição de cosseno podemos calcular $\overline{OA}$:

$$\cos(\pi-\alpha) = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos(\pi-\alpha) = \frac{3}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{3}{\cos(\pi-\alpha)}$$

Como $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$, temos que:

$$\overline{OA} = \frac{3}{\cos(\pi-\alpha)} \Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{3}{-\cos\alpha} \Leftrightarrow \overline{OA} = -\frac{3}{\cos\alpha}$$



Depois, calculamos $\overline{AP}$ recorrendo à definição de tangente:

$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha) = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\pi-\alpha) = \frac{\overline{AP}}{3} \Leftrightarrow \overline{AP} = 3\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$$

Como $\operatorname{tg}(\pi-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, temos que:

$$\overline{AP} = 3\operatorname{tg}(\pi-\alpha) \Leftrightarrow \overline{AP} = -3\operatorname{tg}\alpha$$

Como $\overline{AB} = 2\times\overline{AP}$ e $\overline{OB} = \overline{OA}$, calculado a expressão do perímetro vem:

$$P_{[OAB]} = \overline{AB} + \overline{OA} + \overline{OB} = 2\times\overline{AP} + 2\times\overline{OA} = 2\times(-3\operatorname{tg}\alpha) + 2\times\left(-\frac{3}{\cos\alpha}\right) = -6\operatorname{tg}\alpha - \frac{6}{\cos\alpha}$$

Logo, para cada $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, o perímetro do triângulo é $P(x) = -6\operatorname{tg}x - \frac{6}{\cos x}$

7.2. Como o declive da reta tangente num ponto é dado pela valor da derivada nesse ponto, vamos calcular a derivada da função P:

$$P'(x) = \left(-6\operatorname{tg}x - \frac{6}{\cos x}\right)' = (-6\operatorname{tg}x)' - \left(\frac{6}{\cos x}\right)' = -6(\operatorname{tg}x)' - \frac{(6)'(\cos x) - 6(\cos x)')}{(\cos x)^2} =$$
$$= -6\left(\frac{1}{(\cos x)^2}\right) - \frac{0 - 6(-\operatorname{sen}x))}{(\cos x)^2} = \frac{-6}{\cos^2 x} - \frac{6\operatorname{sen}x}{\cos^2 x} = \frac{-6-6\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}$$

Assim, o declive da reta tangente ao gráfico da função P no ponto de abcissa $\frac{5\pi}{6}$, é

$$m = P'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{-6-6\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{\cos^2\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{-6-6\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2} = \frac{-6-6\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{-6-3}{\frac{3}{4}} = \frac{-9}{\frac{3}{4}} = -12$$

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/Época Especial

15 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2013

Página em branco

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 5, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \ \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \ \text{e} \ n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\ e^u$

$(a^u)' = u'\ a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega \text{ e } B \subset \Omega)$

Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}3$
- $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}55$
- A e B são acontecimentos incompatíveis.

Qual é o valor de $P(\overline{A} \cap \overline{B})$?

(A) $0{,}85$

(B) $0{,}25$

(C) $0{,}15$

(D) 0

2. As classificações obtidas pelos alunos de uma escola num teste de Português seguem, aproximadamente, uma distribuição normal, de valor médio $11{,}5$ valores. Vai ser escolhido, ao acaso, um desses testes. Considere os acontecimentos seguintes.

I: «a classificação do teste é superior a 12 valores»

J: «a classificação do teste é superior a $16{,}5$ valores»

K: «a classificação do teste é inferior a 9 valores»

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $P(J) < P(K) < P(I)$

(B) $P(K) < P(I) < P(J)$

(C) $P(I) < P(K) < P(J)$

(D) $P(K) < P(J) < P(I)$

3. Numa turma com 15 raparigas e 7 rapazes, vai ser formada uma comissão com 5 elementos. Pretende-se que essa comissão seja mista e que tenha mais raparigas do que rapazes.

Quantas comissões diferentes se podem formar?

(A) ${}^{15}A_3 + {}^{15}A_4$

(B) ${}^{15}C_3 \times {}^{7}C_2 + {}^{15}C_4 \times 7$

(C) ${}^{15}C_3 \times {}^{7}C_2 \times {}^{15}C_4 \times 7$

(D) ${}^{22}C_3 \times {}^{19}C_2$

4. Seja f uma função cuja derivada, f', de domínio $\mathbb{R}$, é dada por $f'(x) = (4+x)^2$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$

(B) A função f tem um máximo relativo em $x = -4$

(C) O gráfico da função f não tem pontos de inflexão.

(D) O gráfico da função f tem um ponto de inflexão de coordenadas $\left(-4, f(-4)\right)$

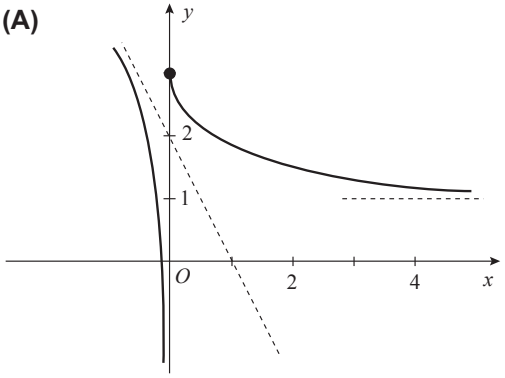
5. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$

Sabe-se que:

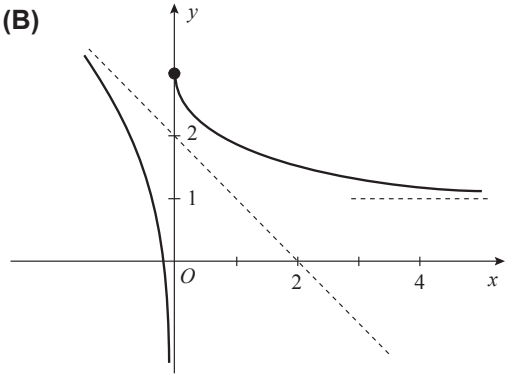
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) + 2x] = 2$

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f?

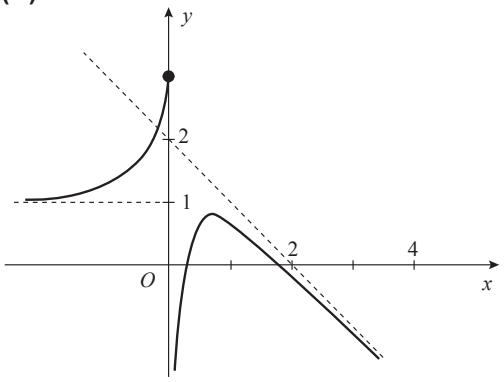
(A)



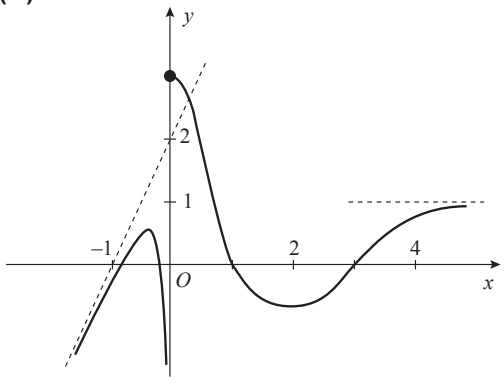
(B)



(C)



(D)



Nota – Em cada uma das opções estão representadas parte do gráfico de uma função e, a tracejado, assíntotas desse gráfico.

6. Seja a um número real positivo.

Considere o conjunto $S = \left\{x \in \mathbb{R}:\ \ln(e^{-x} - a) \leq 0\right\}$

Qual dos conjuntos seguintes é o conjunto S?

(A) $]-\ln(1+a),\ -\ln a[$

(B) $[-\ln(1+a),\ -\ln a[$

(C) $]-\infty,\ -\ln(1+a)]$

(D) $[-\ln(1+a),\ +\infty[$

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w = (1+i)^{2013}$

A qual dos conjuntos seguintes pertence w?

(A) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > |z-1|\}$

(B) $\{z \in \mathbb{C}:\ |z| \leq \sqrt{2}\}$

(C) $\left\{z \in \mathbb{C} : z = \overline{z}\right\}$

(D) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\}$

8. Na Figura 1, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas dos números complexos: z, z_1, z_2, z_3 e z_4

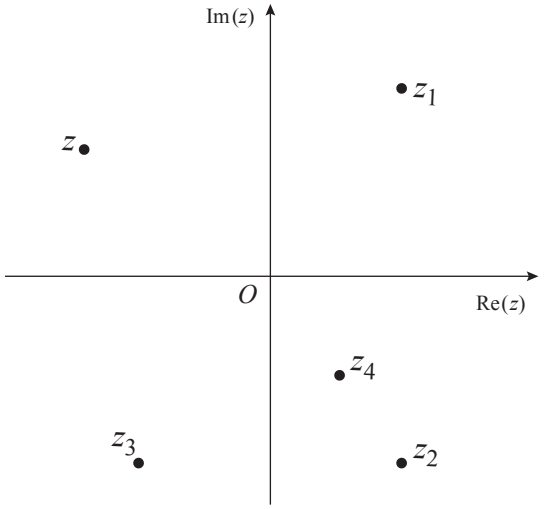


Figura 1

Sabe-se que w é um número complexo tal que $z = i \times \overline{w}$

Qual é o número complexo que pode ser igual a w?

(A) z_4

(B) z_3

(C) z_2

(D) z_1

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{1+2\,i\,cis\left(\frac{5\pi}{6}\right)} \quad \text{e} \quad z_2 = \sqrt{2}\,cis\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

1.1. Seja $z = cis\theta$, com θ pertencente a $[0, 2\pi[$

Determine θ de modo que $\frac{z}{z_1}$ seja um número real negativo, sem utilizar a calculadora.

1.2. As imagens geométricas de z_2 e do seu conjugado, $\overline{z_2}$, são vértices consecutivos de um polígono regular. Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice n de um certo número complexo w

Determine w na forma algébrica, sem utilizar a calculadora.

Comece por calcular n

2. Uma empresa produz apenas dois tipos de lâmpadas: lâmpadas fluorescentes e lâmpadas LED (Díodos Emissores de Luz).

As lâmpadas de cada tipo podem ter a forma tubular ou ser compactas.

Sabe-se que:

- 55% das lâmpadas produzidas nessa empresa são fluorescentes;
- das lâmpadas fluorescentes produzidas nessa empresa, 50% têm a forma tubular;
- das lâmpadas LED produzidas nessa empresa, 90% são compactas.

Determine a probabilidade de, ao escolher, ao acaso, uma lâmpada produzida nessa empresa, ela ser fluorescente, sabendo que tem a forma tubular.

Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

3. Num saco estão doze bolas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 12.

3.1. O João retira três bolas do saco, ao acaso, de uma só vez.

Seja X a variável aleatória *«número de bolas retiradas com um número múltiplo de 5»*.

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X

Apresente as probabilidades na forma de fração.

3.2. Considere agora o saco com a sua constituição inicial.

O João retira, ao acaso, uma bola do saco, regista o número da bola retirada e repõe essa bola no saco. Em seguida, retira, ao acaso, uma segunda bola do saco, regista o número da bola retirada e repõe essa bola no saco, e assim sucessivamente, até registar uma série de 8 números.

Considere a afirmação seguinte:

«A probabilidade de o João registar exatamente 5 números que sejam múltiplos de 3 é dada por $\left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times {}^8C_5$, aplicando o modelo binomial.»

Elabore uma composição na qual:

- apresente um raciocínio que justifique a veracidade da afirmação;
- refira as condições de aplicabilidade do modelo binomial.

4. Considere a função f, de domínio $]0, \pi[$, definida por $f(x) = \ln x + \cos x - 1$

Sabe-se que:

- A é um ponto do gráfico de f
- a reta tangente ao gráfico de f, no ponto A, tem inclinação $\frac{\pi}{4}$ radianos.

Determine a abcissa do ponto A, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abcissa do ponto A com arredondamento às centésimas.

5. Considere, para um certo número real k positivo, a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x}{1-e^{2x}} & \text{se } x<0\\ \ln k & \text{se } x=0\\ \dfrac{x}{2}-\ln\left(\dfrac{6x}{x+1}\right) & \text{se } x>0\end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

5.1. Determine k de modo que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$

5.2. Mostre que $\ln\left(\dfrac{\sqrt{e}}{3}\right)$ é um extremo relativo da função f no intervalo $]0,+\infty[$

6. Considere duas funções g e h, de domínio $\mathbb{R}^+$

Sabe-se que:

- a reta de equação $y=2x-1$ é assíntota do gráfico da função g
- a função h é definida por $h(x)=\dfrac{1-\left[g(x)\right]^2}{x^2}$

Mostre que o gráfico da função h tem uma assíntota horizontal.

7. Na Figura 2, estão representados a circunferência de centro no ponto C e de raio 1, a semirreta $\dot{CB}$, a reta AD e o triângulo $[ACE]$

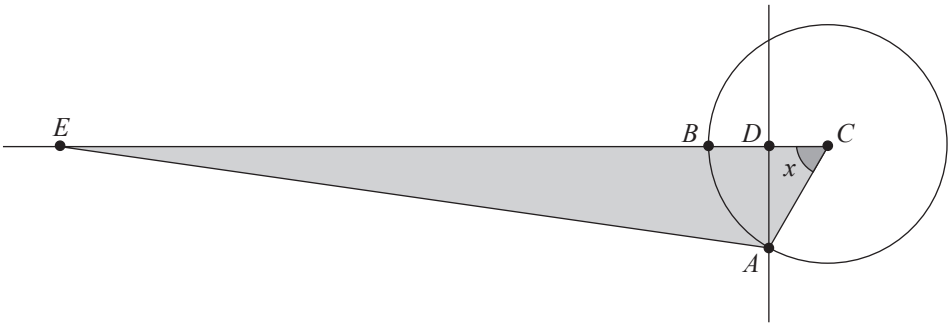


Figura 2

Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem à circunferência;
- os pontos D e E pertencem à semirreta $\dot{CB}$
- a reta AD é perpendicular à semirreta $\dot{CB}$
- o ponto A desloca-se sobre a circunferência, e os pontos D e E acompanham esse movimento de modo que $\overline{DE} = 6$
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo ACB
- $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

7.1. Mostre que a área do triângulo $[ACE]$ é dada, em função de x, por $f(x) = 3 \operatorname{sen} x + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x)$

7.2. Mostre, sem resolver a equação, que $f(x) = 2$ tem, pelo menos, uma solução em $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** ..... (8 × 5 pontos) ..... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1.
- **1.1.** ..... 15 pontos
- **1.2.** ..... 15 pontos

2. ..... 15 pontos

3.
- **3.1.** ..... 15 pontos
- **3.2.** ..... 15 pontos

4. ..... 15 pontos

5.
- **5.1.** ..... 15 pontos
- **5.2.** ..... 15 pontos

6. ..... 15 pontos

7.
- **7.1.** ..... 15 pontos
- **7.2.** ..... 10 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/Época Especial

Critérios de Classificação 11 Páginas

2013

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** ..... (8 × 5 pontos) ..... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1.
- **1.1.** ..... 15 pontos
- **1.2.** ..... 15 pontos

2. ..... 15 pontos

3.
- **3.1.** ..... 15 pontos
- **3.2.** ..... 15 pontos

4. ..... 15 pontos

5.
- **5.1.** ..... 15 pontos
- **5.2.** ..... 15 pontos

6. ..... 15 pontos

7.
- **7.1.** ..... 15 pontos
- **7.2.** ..... 10 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

A classificação da prova deve respeitar integralmente os critérios gerais e os critérios específicos a seguir apresentados.

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos de classificação apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro, previsto na grelha de classificação.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos. No entanto, em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se o examinando responder a um mesmo item mais do que uma vez, não eliminando inequivocamente a(s) resposta(s) que não deseja que seja(m) classificada(s), deve ser considerada apenas a resposta que surgir em primeiro lugar.

Até ao ano letivo 2013/2014, na classificação das provas, continuarão a ser consideradas corretas as grafias que seguirem o que se encontra previsto quer no Acordo de 1945, quer no Acordo de 1990 (atualmente em vigor), mesmo quando se utilizem as duas grafias numa mesma prova.

Itens de seleção

ESCOLHA MÚLTIPLA

A cotação total do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a única opção correta.

São classificadas com zero pontos as respostas em que seja assinalada:

– uma opção incorreta;

– mais do que uma opção.

Não há lugar a classificações intermédias.

Itens de construção

Os critérios de classificação das respostas aos itens de construção apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada etapa e a cada nível de desempenho corresponde uma dada pontuação.

No item de composição, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea do desempenho no domínio específico da disciplina e no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa. A avaliação do desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa faz-se de acordo com os níveis a seguir apresentados.

Níveis	Descritores
3	Texto bem estruturado e linguisticamente correto*, ou com falhas esporádicas que não afetem a inteligibilidade do discurso.
2	Texto bem estruturado, mas com incorreções linguísticas que conduzam a alguma perda de inteligibilidade do discurso. OU Texto linguisticamente correto, mas com deficiências de estruturação que conduzam a alguma perda de inteligibilidade do discurso.
1	Texto com deficiências de estruturação e com incorreções linguísticas, embora globalmente inteligível.

* Por «texto linguisticamente correto» entende-se um texto correto nos planos da sintaxe, da pontuação e da ortografia.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é zero pontos. Neste caso, não é classificado o desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

Na resposta aos itens de construção, caso o aluno apresente elementos em excesso face ao solicitado e tais elementos piorem a consistência da resposta e/ou afetem a caracterização do desempenho, a resposta deve ser classificada com zero pontos.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar em situações não descritas anteriormente.

Situação	Classificação
1. Classificação da resposta a um item cujo critério se apresenta organizado por etapas.	A pontuação indicada para cada etapa é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A classificação da resposta resulta da soma das pontuações atribuídas às diferentes etapas, à qual se subtrai, eventualmente, um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 14 e/ou 20.
2. Pontuação de uma etapa dividida em passos.	A pontuação indicada para cada passo é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A pontuação da etapa resulta da soma das pontuações dos diferentes passos.
3. Classificação da resposta a um item ou pontuação de uma etapa cujo critério se apresenta organizado por níveis de desempenho.	A resposta é enquadrada numa das descrições apresentadas. À classificação/pontuação correspondente subtrai-se, eventualmente, um ou dois pontos, se ocorrer um erro ocasional num cálculo, e/ou se se utilizar simbologia ou expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.

Situação	Classificação
4. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite e classificado qualquer processo de resolução cientificamente correto. O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante distribuição da cotação do item pelas etapas* percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.
5. Utilização de processos de resolução que não respeitam as instruções dadas [exemplo: «sem recorrer à calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Apresentação apenas do resultado final, se a resolução do item exige cálculos e/ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
7. Ausência de apresentação dos cálculos e/ou das justificações necessárias à resolução de uma etapa*.	A etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
8. Ausência de apresentação explícita de uma dada etapa que não envolva cálculos e/ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, a mesma é pontuada com a pontuação total para ela prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
9. Transposição incorreta de dados do enunciado, que não altera o que se pretende avaliar com o item.	Se o grau de dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se o grau de dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – na(s) etapa(s) em que o grau de dificuldade diminuir, a pontuação máxima a atribuir a esta(s) etapa(s) deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista; – na(s) etapa(s) em que o grau de dificuldade não diminuir, esta(s) deve(m) ser pontuada(s) de acordo com os critérios específicos de classificação.
10. Transposição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se o grau de dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido: – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.

* Em situações em que o critério é aplicável tanto a **etapas** como a **passos**, utiliza-se apenas o termo «etapas» por razões de simplificação da apresentação.

Situação	Classificação
11. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido: – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
12. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido: – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
13. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas o passo final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
14. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
15. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
17. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.
18. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, e/ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
19. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final [por exemplo, «15» em vez de «15 metros»].	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a cotação total para ela prevista.
20. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. ..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

As respostas corretas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
	C	A	B	D	A	B	D	C

GRUPO II

1.1. ..... **15 pontos**

Escrever $1+\sqrt{3}\,i$ na forma trigonométrica ..... 1 ponto

Escrever $2\,i\,cis\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ na forma algébrica ..... 2 pontos

Escrever $1+2\,i\,cis\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ na forma trigonométrica ..... 1 ponto

Obter z_1 na forma trigonométrica ..... 2 pontos

Escrever $\frac{z}{z_1}$ na forma trigonométrica ..... 2 pontos

Escrever $\arg\left(\frac{z}{z_1}\right)=\pi+2k\pi$ com $k\in\mathbb{Z}$ (**ver nota**) ..... 4 pontos

Obter o valor de θ ..... 3 pontos

Nota – Se o examinando considerar que $\frac{z}{z_1}$ é um número real em vez de um número real negativo, a pontuação a atribuir, nesta etapa, é 2 pontos.

1.2. ..... **15 pontos**

Determinar n ..... 10 pontos

Escrever $\overline{z_2}=\sqrt{2}\,cis\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Referir que $\left|\arg(z_2)-\arg(\overline{z_2})\right|=\frac{2\pi}{n}$ (ou equivalente) ..... 4 pontos

Calcular $\arg(z_2)-\arg(\overline{z_2})$ ..... 2 pontos

Concluir que $n=12$ ..... 2 pontos

Calcular w na forma algébrica ..... 5 pontos

Escrever $w = (z_2)^{12}$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

Obter w na forma trigonométrica ..... 1 ponto

Escrever w na forma algébrica ..... 1 ponto

2. ..... **15 pontos**

Seja A o acontecimento «a lâmpada é fluorescente», e seja B o acontecimento «a lâmpada é tubular».

Podem ser admitidas outras designações para os acontecimentos.

Calcular $P(A \cap B)$ ..... 4 pontos

Escrever $P(A) = 0{,}55$ ..... 1 ponto

Escrever $P(B \mid A) = 0{,}5$ ..... 2 pontos

Obter $P(A \cap B)$ ..... 1 ponto

Calcular $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ ..... 4 pontos

Escrever $P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 0{,}9$ ..... 2 pontos

Obter $P(\overline{A})$ ..... 1 ponto

Obter $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ ..... 1 ponto

Calcular $P(\overline{A} \cap B)$ ..... 2 pontos

Calcular $P(B)$ ..... 2 pontos

Identificar o pedido com $P(A \mid B)$ ..... 1 ponto

Escrever $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (ou equivalente) ..... 1 ponto

Obter $P(A \mid B)$ ..... 1 ponto

3.1. ..... **15 pontos**

Indicar os valores que a variável X pode tomar ..... 4 pontos

Calcular a probabilidade de cada um dos valores da variável X .... (3 + 3 + 3)..... 9 pontos

Apresentar a tabela de distribuição de probabilidades (**ver nota**) ..... 2 pontos

Nota – A pontuação relativa a esta etapa só é atribuída se na etapa anterior não tiverem sido atribuídos zero pontos.

3.2. ..... **15 pontos**

Na composição, são contemplados os pontos seguintes:

A) Apresentar um raciocínio que justifique a veracidade da afirmação:

1. referir que a probabilidade de sucesso em cada prova é $\frac{1}{3}$
2. referir que a probabilidade de não haver sucesso em cada prova é $\frac{2}{3}$
3. referir que a experiência se repetiu 8 vezes e que se pretende determinar a probabilidade de haver exatamente 5 provas com sucesso.

B) Referir as condições de aplicabilidade do modelo binominal:

1. as provas são independentes umas das outras;
2. em cada prova realiza-se, ou não, o acontecimento sucesso;
3. a probabilidade do acontecimento sucesso é a mesma em todas as provas.

Na tabela seguinte, indica-se como deve ser classificada a resposta a este item, de acordo com os níveis de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa e com os níveis de desempenho no domínio específico da disciplina.

Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina / Descritores do nível de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa			Níveis*		
			1	**2**	**3**
Níveis	**5**	Na composição, são contemplados corretamente os pontos A e B.	13	14	15
	4	Na composição, são contemplados corretamente apenas o ponto A e parte do ponto B, OU é contemplado corretamente apenas o ponto B e parte do ponto A.**	10	11	12
	3	Na composição, é contemplado corretamente apenas o ponto A, OU é contemplado corretamente apenas o ponto B.	7	8	9
	2	Na composição, é contemplado apenas parte do ponto A e parte do ponto B.**	4	5	6
	1	Na composição, é contemplado apenas parte do ponto A, OU é contemplado apenas parte do ponto B.**	1	2	3

***** Descritores apresentados nos Critérios Gerais de Classificação.

****** Considera-se como parte de A ou como parte de B qualquer resposta que não contemple os três pontos previstos.

4. ..... **15 pontos**

Equacionar o problema (**ver notas 1** e **2**) ..... 7 pontos

Reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados na calculadora (**ver notas 3** e **4**) ..... 5 pontos

Indicar a abcissa do ponto pedido ..... 3 pontos

Notas:

1. Se o examinando apenas referir que a reta tangente ao gráfico de f, no ponto A, tem declive igual a 1, a pontuação máxima a atribuir nesta etapa é 2 pontos.

2. Se o examinando escrever a equação $f(x)=1$ (ou equivalente), em vez de $f'(x)=1$, a pontuação máxima a atribuir nesta etapa é 3 pontos.

3. Se o examinando não apresentar o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

4. Se o examinando apresentar um gráfico que não respeite o domínio da função, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

5.1. ..... **15 pontos**

Calcular $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ ..... 11 pontos

Escrever $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{3x}{1-e^{2x}}$ ..... 1 ponto

Levantar a indeterminação ..... 7 pontos

Escrever $\lim_{x\to 0^-} \frac{3x}{1-e^{2x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{3x}{-(e^{2x}-1)}$

(ou equivalente) ..... 2 pontos

Escrever $\lim_{x\to 0^-} \frac{3x}{-(e^{2x}-1)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\frac{-(e^{2x}-1)}{3x}}$

(ou equivalente) ..... 2 pontos

Escrever $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\frac{-(e^{2x}-1)}{3x}} = \lim_{2x\to 0^-} \frac{1}{-\frac{2}{3}\times\frac{(e^{2x}-1)}{2x}}$

(ou equivalente) (**ver nota**) ..... 2 pontos

Referir o limite notável $\lim_{y\to 0^-} \frac{e^y-1}{y} = 1$

(ou equivalente) ..... 1 ponto

Obter o valor de $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ ..... 3 pontos

Escrever $\ln k = f(0)$ ..... 1 ponto

Obter o valor de k ..... 3 pontos

Nota – Se o examinando referir que $x\to 0^-$ é equivalente a $2x\to 0^-$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

5.2. ..... **15 pontos**

Determinar $f'(x)$ se $x > 0$ ..... 8 pontos

Escrever $\left(\frac{x}{2} - \ln\left(\frac{6x}{x+1}\right)\right)' = \left(\frac{x}{2}\right)' - \left(\ln\left(\frac{6x}{x+1}\right)\right)'$ ..... 1 ponto

Determinar $\left(\frac{x}{2}\right)'$ ..... 1 ponto

Determinar $\left(\ln\left(\frac{6x}{x+1}\right)\right)'$ ..... 4 pontos

Escrever $\frac{\left(\frac{6x}{x+1}\right)'}{\frac{6x}{x+1}}$ ..... 1 ponto

Escrever $\frac{\frac{(6x)' \times (x+1) - 6x \times (x+1)'}{(x+1)^2}}{\frac{6x}{x+1}}$ ..... 1 ponto

Determinar $(6x)'$ ..... 1 ponto

Determinar $(x+1)'$ ..... 1 ponto

Obter $f'(x)$ se $x > 0$ ..... 2 pontos

Estudar o sinal da função f' no intervalo $]0, +\infty[$ ..... 3 pontos

Concluir que f' é negativa em $]0, 1[$ ..... 1 ponto

Concluir que f' é positiva em $]1, +\infty[$ ..... 1 ponto

Concluir que $f(1)$ é um extremo relativo de f no intervalo $]0, +\infty[$ 1 ponto

Mostrar que $f(1) = \ln\left(\frac{\sqrt{e}}{3}\right)$ ..... 4 pontos

Calcular $f(1)$ ..... 3 pontos

Escrever $f(1) = \frac{1}{2} - \ln 3$ ..... 1 ponto

Substituir $\frac{1}{2}$ por $\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)$ ..... 2 pontos

Concluir o pretendido ..... 1 ponto

6. ..... **15 pontos**

Concluir que $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 2$ (ou equivalente) ..... 4 pontos

Determinar $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ ..... 9 pontos

Escrever $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\left(g(x)\right)^2}{x^2}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\left(g(x)\right)^2}{x^2} \right)$ ..... 2 pontos

Obter o valor de $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}$ ..... 2 pontos

Obter o valor de $\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(g(x)\right)^2}{x^2}$ ..... 4 pontos

Concluir o pretendido ..... 2 pontos

7.1. ..... **15 pontos**

Referir que a área do triângulo $[ACE]$ é igual a $\frac{\overline{CE} \times \overline{AD}}{2}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Escrever $\overline{CE} = 6 + \overline{CD}$ ..... 3 pontos

Escrever $\overline{CD} = \cos x$ ..... 2 pontos

Escrever $\overline{AD} = \operatorname{sen} x$ ..... 2 pontos

Escrever $2 \operatorname{sen} x \ \cos x = \operatorname{sen}(2x)$ ..... 4 pontos

Concluir o pretendido ..... 2 pontos

7.2. ..... **10 pontos**

Referir que a função f é contínua em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ (**ver notas 1** e **2**) ..... 2 pontos

Calcular $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ..... 2 pontos

Calcular $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ..... 2 pontos

Escrever $f\left(\frac{\pi}{6}\right) < 2 < f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Referir que o pretendido resulta do teorema de Bolzano ..... 2 pontos

Notas:

1. Se o examinando referir que a função é contínua no domínio, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

2. Se o examinando referir que a função é contínua em $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$, a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos.

Exame nacional de Matemática A **(2013, Época especial)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Temos que A e B são acontecimentos incompatíveis, logo $P(A \cap B) = 0$

   Como $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B) - P(A \cap B)$, e $P(A \cap B) = 0$, vem que:
   $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B)$, pelo que $P(B) = 0{,}55$

   Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, $P(A \cap B) = 0$ e $P(A) = 0{,}3$, temos que:
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}55 = 0{,}85$

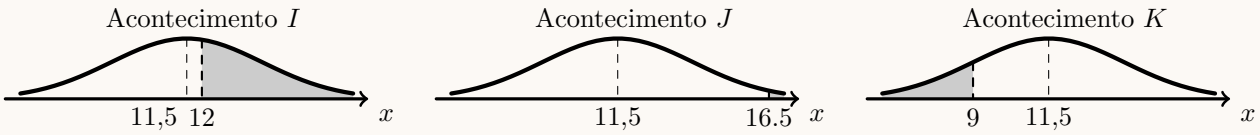
   Assim, pelo teorema do acontecimento contrário, $P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$

   Finalmente, pelas leis de De Morgan, temos que:

   $$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 0{,}15$$

   Resposta: **Opção C**

2. Esboçando a representação da representação geométrica das probabilidades dos três acontecimentos, vem:

   Assim podemos afirmar que o acontecimento I é o mais provável e o acontecimento J, o menos provável, pelo que:

   $$P(J) < P(K) < P(I)$$

   Resposta: **Opção A**

3. Para que a comissão seja mista, deve ter pelo menos um rapaz, e como deve ter mais raparigas que rapazes, então o número de comissões diferentes que se podem formar pode ser calculado como a **soma** de comissões diferentes relativas a composições de dois tipos:

   - 3 raparigas e 2 rapazes
     Como a ordem não é relevante podemos escolher 3 raparigas do conjunto das 15, de ${}^{15}C_3$ formas diferentes e podemos escolher os 2 rapazes de ${}^{7}C_2$ formas diferentes, logo existem ${}^{15}C_3 \times {}^{7}C_2$ comissões deste tipo
   - 4 raparigas e 1 rapaz
     As comissões deste tipo são ${}^{15}C_4 \times 7$ que correspondem a escolher 4 das 15 raparigas e 1 dos 7 rapazes, sem considerar a ordem relevante.

   Assim, o número de comissões diferentes que se podem formar, de acordo com as condições impostas, é:

   $$ {}^{15}C_3 \times {}^{7}C_2 + {}^{15}C_4 \times 7 $$

   Resposta: **Opção B**

4. Determinando a expressão da segunda derivada vem:

   $$ f''(x) = \big(f'(x)\big)' = \big((4+x)^2\big)' = (4^2 + 2 \times 4x + x^2)' = (16)' + (8x)' + (x^2)' = 0 + 8 + 2x = 2x + 8 $$

   Calculando o zero da segunda derivada temos:

   $$ f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x + 8 = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x = -8 \;\Leftrightarrow\; x = -4 $$

   Estudando o sinal da segunda derivada para relacionar com o sentido das concavidades, vem:

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$g''(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	∩	Pt. I.	∪

   Logo, podemos concluir que gráfico da função f tem um ponto de inflexão de coordenadas $(-4, f(-4))$

   Resposta: **Opção D**

   A afirmação da opção (A) é falsa porque existem objetos cuja imagem pela segunda derivada é negativa ($x \in]-\infty, -4[$).
   A afirmação da opção (B) é falsa, porque apesar da primeira derivada ter um zero ($x = -4$), este não está associado a uma mudança de sinal.
   A afirmação da opção (C) é falsa porque o gráfico de f tem um ponto de inflexão.

5. Como $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) + 2x] = 2$, temos que $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (-2x)] = 2$, o que significa que a reta de equação $y = -2x + 2$ é assíntota do gráfico de f, quando $x \to -\infty$
   O único gráfico que admite a reta $y = -2x + 2$ como assíntota é o da opção (A).

   Resposta: **Opção A**

6. Simplificando a condição $\ln(e^{-x} - a) \leq 0$, como a função logarítmica tem imagens não positivas para $x \in]0,1]$, temos:

   $$ \ln(e^{-x} - a) \leq 0 \;\Leftrightarrow\; 0 < e^{-x} - a \leq 1 \;\Leftrightarrow\; e^{-x} - a > 0 \;\wedge\; e^{-x} - a \leq 1 \;\Leftrightarrow\; e^{-x} > a \;\wedge\; e^{-x} \leq 1 + a \;\Leftrightarrow $$
   $$ \Leftrightarrow\; -x > \ln(a) \;\wedge\; -x \leq \ln(1+a) \;\Leftrightarrow\; x < -\ln(a) \;\wedge\; x \geq -\ln(1+a) $$

   Assim, $S = [-\ln(1+a), -\ln(a)[$

   Resposta: **Opção B**

7. Escrevendo $(1+i)$ na f.t. temos $(1+i) = \rho \operatorname{cis} \theta$, onde:

   - $\rho = |(1+i)| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
   - $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{1}{1} = 1$; como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

   Logo $(1+i) = \sqrt{2} \operatorname{cis} \dfrac{\pi}{4}$

   Pela fórmula de Moivre para a potência temos que:

   Como $w = (1+i)^{2013} = \left(\sqrt{2} \operatorname{cis} \dfrac{\pi}{4}\right)^{2013} = \sqrt{2}^{2013} \operatorname{cis} \left(2013 \times \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}^{2013} \operatorname{cis} \dfrac{2013\pi}{4}$

   Assim:
   $\arg(w) = \dfrac{2013\pi}{4} = \dfrac{(4\times 503+1)\pi}{4} = \dfrac{4\times 503\pi + \pi}{4} = \dfrac{4\times 503\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = 503\pi + \dfrac{\pi}{4}$
   Descontando as voltas completas temos $\arg(w) = \pi + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{4\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{4}$

   Ou seja, a representação geométrica de w é um ponto do 3º quadrante que pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, pelo que $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$

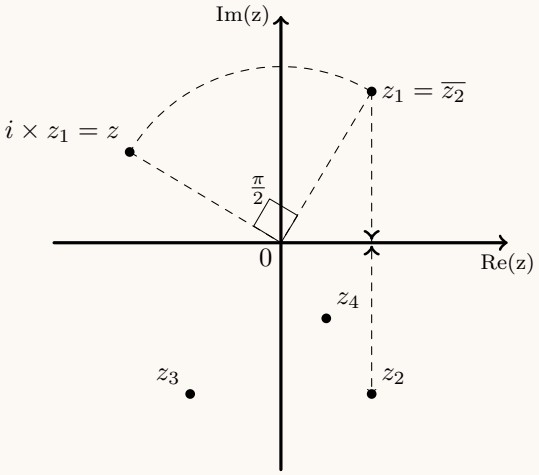
   Resposta: **Opção D**

8. As operações "*multiplicar por i*" e "*transformar no conjugado*" correspondem geometricamente a "fazer uma rotação de centro em O e amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos" e "encontrar o ponto simétrico relativamente ao eixo real", respetivamente.

   Assim, se considerarmos as operações inversas, pela ordem inversa, a partir da imagem geométrica de z, (como indicado na figura), obtemos como resposta a imagem geométrica de z_2.

   Ou, dizendo de outra forma, se $w = z_2$, temos que $\overline{w} = \overline{z_2} = z_1$ e $i \times \overline{w} = i \times z_1 = z$, pelo que $w = z_2$.

   Resposta: **Opção C**



GRUPO II

1.

1.1. Como $\cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ vem que:

$$1+2i\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1+2i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\times\frac{1}{2}\right) = 1-\sqrt{3}i+i^2 = 1-\sqrt{3}i-1 = -\sqrt{3}i = \sqrt{3}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

Escrevendo $1+\sqrt{3}i$ na f.t. temos $1+\sqrt{3}i = \rho\operatorname{cis}\theta$, onde:

- $\rho = |1+\sqrt{3}i| = \sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$; como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \frac{\pi}{3}$

Assim $1+\sqrt{3}i = 2\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$

$$\text{Logo } z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{1+2i\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{2\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}}{\sqrt{3}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{6}+\frac{3\pi}{6}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{6}$$

$$\text{Se } z = \operatorname{cis}\theta, \text{ então } \frac{z}{z_1} = \frac{\operatorname{cis}\theta}{\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\operatorname{cis}\left(\theta-\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2\sqrt{3}}\operatorname{cis}\left(\theta-\frac{5\pi}{6}\right)$$

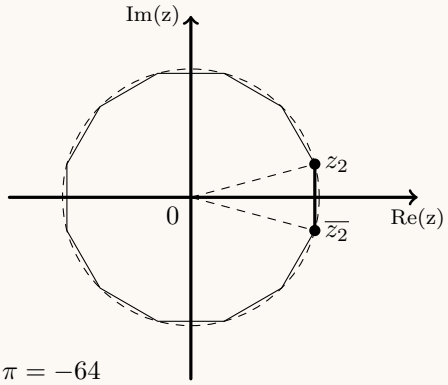
E como $\frac{z}{z_1}$ é número real negativo, então $\arg\left(\frac{z}{z_1}\right) = \pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, logo temos que:

$$\theta-\frac{5\pi}{6} = \pi+2k\pi \Leftrightarrow \theta = \pi+\frac{5\pi}{6}+2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{6\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}+2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{11\pi}{6}+2k\pi$$

Como $\theta\in[0,2\pi[$, então $k=0$ e $\theta = \frac{11\pi}{6}$

1.2. Sabemos que $|\overline{z_2}| = |z_2|$ e que $\arg(\overline{z_2}) = -\arg(z_2)$, logo $\overline{z_2} = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

Assim, temos que o polígono regular pode ser decomposto em n triângulos isósceles, congruentes com o triângulo OAA', em que o ponto A é a imagem geométrica de z_2 e A' é a imagem geométrica de $\overline{z_2}$. Como a amplitude do ângulo AOA' é $2\times\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$, sabemos que:



$$\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{2\pi\times 6}{\pi} = n \Leftrightarrow 12 = n$$

Assim temos que z_2 (e também $\overline{z_2}$) são raízes de índice 12 de w, ou seja $w = (z_2)^{12}$, logo usando a fórmula de Moivre e escrevendo o resultado da potência na f.a., temos:

$$w = (z_2)^{12} = \left(\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^{12} = (\sqrt{2})^{12}\operatorname{cis}\left(12\times\frac{\pi}{12}\right) = 64\operatorname{cis}\pi = -64$$

2. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, uma lâmpada produzida nessa empresa, e os acontecimentos:
F:≪A lâmpada escolhida é fluorescente≫
T:≪A lâmpada escolhida tem a forma tubular≫
Temos que $P(F) = 0{,}55$, $P(T|F) = 0{,}5$ e $P\left(\overline{T}|\overline{F}\right) = 0{,}9$

   Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

   - $P\left(\overline{F}\right) = 1 - P(F) = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$
   - $P(T \cap F) = P(F) \times P(T|F) = 0{,}55 \times 0{,}5 = 0{,}275$
   - $P\left(\overline{T} \cap F\right) = P(F) - P(T \cap F) = 0{,}55 - 0{,}275 = 0{,}275$
   - $P\left(\overline{T} \cap \overline{F}\right) = P\left(\overline{F}\right) \times P\left(\overline{T}|\overline{F}\right) = 0{,}45 \times 0{,}9 = 0{,}405$
   - $P\left(\overline{T}\right) = P\left(\overline{T} \cap \overline{F}\right) + P\left(\overline{T} \cap F\right) = 0{,}275 + 0{,}405 = 0{,}68$
   - $P(T) = 1 - P\left(\overline{T}\right) = 1 - 0{,}68 = 0{,}32$

	F	$\overline{F}$	
T	0,275		0,32
$\overline{T}$	0,275	0,405	0,68
	0,55	0,45	1

   Assim, calculando a probabilidade de, ao escolher, ao acaso, uma lâmpada produzida nessa empresa, ela ser fluorescente, sabendo que tem a forma tubular, e escrevendo o resultado com arredondamento às centésimas, temos

$$P(F|T) = \frac{P(F \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}275}{0{,}32} \approx 0{,}86$$

3.

   3.1.

   3.2. Existem 12 bolas numeradas de 1 a 12 e só duas delas têm um número múltiplo de 5 (a bola com o número 5 e a bola com o número 10).
   Assim, ao retirarmos 3 bolas, podemos ter 0 bolas numeradas com múltiplos de 5, apenas 1 bola numerada com um número múltiplo de 5 ou 2 bolas numeradas com números múltiplos de 5.
   Assim, calculando as respetivas probabilidades temos:

   - $P(X = 0) = \frac{{}^{2}C_0 \times {}^{10}C_3}{{}^{12}C_3} = \frac{1 \times 120}{220} = \frac{120}{220} = \frac{12}{22} = \frac{6}{11}$
   - $P(X = 1) = \frac{{}^{2}C_1 \times {}^{10}C_2}{{}^{12}C_3} = \frac{2 \times 45}{220} = \frac{90}{220} = \frac{9}{22}$
   - $P(X = 2) = \frac{{}^{2}C_2 \times {}^{10}C_1}{{}^{12}C_3} = \frac{1 \times 10}{220} = \frac{1}{22}$

   Logo a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{11}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{22}$

3.3. Como as sucessivas extrações das bolas são feitas repondo a bola extraída anteriormente, cada repetição da experiência é feita de forma independente das restantes.
Definindo o acontecimento «*registar número múltiplo de 3*» como sucesso, este acontecimento tem probabilidade não nula em cada repetição da experiência e como as repetições são independentes, a probabilidade é constante em cada uma delas.

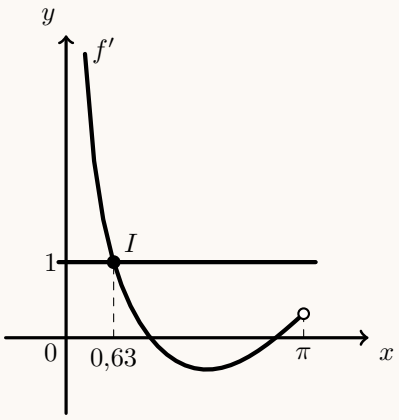
Assim, para a aplicação do modelo binomial $\left(P(X=k) = {}^{n}C_k\, p^k\, q^{n-k}\right)$, como o João fará extrações sucessivas até ter registado 8 elementos, temos que a experiência será repetida 8 vezes ($n = 8$).
Como definimos o acontecimento «*registar número múltiplo de 3*» como sucesso, temos que a probabilidade é $p = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ (das 12 bolas, 4 são múltiplos de 3: $M_3 = \{3,6,9,12\}$).
Logo a probabilidade do insucesso é $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.
Como se pretende calcular a probabilidade de que nas 8 experiências, sejam registados exatamente 5 vezes números múltiplos de 3, temos que $k = 5$.

Assim, temos que:

$$P(X=5) = {}^{8}C_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^{8-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times {}^{8}C_5$$

4. Como o declive da reta tangente ao gráfico da função, em cada ponto, é dado pela função derivada, vamos determinar a expressão analítica da função derivada:
$f'(x) = (\ln x + \cos x - 1)' = (\ln x)' + (\cos x)' - (1)' = \frac{1}{x} + (-\operatorname{sen} x) - 0 = \frac{1}{x} - \operatorname{sen} x$

Como o declive de uma reta é dado pela tangente da sua inclinação, temos que: $m = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$



Logo a abcissa do ponto A é a solução da equação:

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \operatorname{sen} x = 1$$

Assim, visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função f' e a reta $y = 1$, numa janela coerente com o domínio da função f ($0 < x < \pi$), (reproduzido na figura ao lado) e determinando a interseção das duas, obtemos os valores aproximados (às centésimas) das coordenadas do ponto: $I(0{,}63; 1{,}00)$.

Ou seja o valor aproximado às centésimas da abcissa do ponto A, é 0,63

5.

5.1. Sabemos que $f(0) = \ln k$

Calculando $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ temos:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{3x}{1-e^{2x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{2\times 3x}{2}}{-(e^{2x}-1)} = \lim_{x\to 0^-} \left(-\frac{3}{2}\times \frac{2x}{e^{2x}-1}\right) =$$

$$= -\frac{3}{2}\times \lim_{x\to 0^-} \frac{2x}{e^{2x}-1} = -\frac{3}{2}\times \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\frac{e^{2x}-1}{2x}} = -\frac{3}{2}\times \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{2x}} =$$

(se $y = 2x$, como $x \to 0^-$ então $y \to 0^-$)

$$= -\frac{3}{2}\times \frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to 0^-} \frac{e^{y}-1}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = -\frac{3}{2}\times \frac{1}{1} = -\frac{3}{2}$$

Assim, para que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$, temos que:

$$-\frac{3}{2} = \ln k \quad \Leftrightarrow \quad k = e^{-\frac{3}{2}}$$

5.2. Começamos por determinar a expressão da derivada da função, para $x \in]0,+\infty[$

$$\left(\frac{x}{2}-\ln\left(\frac{6x}{x+1}\right)\right)' = \left(\frac{x}{2}\right)' - \left(\ln\left(\frac{6x}{x+1}\right)\right)' = \frac{1}{2}\times(x)' - \frac{\left(\frac{6x}{x+1}\right)'}{\frac{6x}{x+1}} =$$

$$= \frac{1}{2}\times 1 - \frac{\frac{(6x)'(x+1)-(6x)(x+1)'}{(x+1)^2}}{\frac{6x}{x+1}} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{6(x+1)-(6x)(1+0)}{(x+1)^2}}{\frac{6x}{x+1}} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\frac{6(x+1)-6x}{x+1}}{6x} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{6x+6-6x}{x+1}}{6x} = \frac{1}{2} - \frac{6}{6x(x+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x(x+1)}$$

Determinando os zeros da derivada em $]0,+\infty[$, vem:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{x(x+1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{x(x+1)} \underbrace{\Leftrightarrow}_{x(x+1)\neq 0} x(x+1) = 2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-2)}}{2\times 1} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$$

Como $-2 \notin]0,+\infty[$, 1 é o único zero da derivada em $]0,+\infty[$
Estudando, neste intervalo, a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	min	↗

Assim, podemos concluir $f(1)$ é um extremo relativo da função f em $]0,+\infty[$.
Calculando $f(1)$ temos:

$$f(1) = \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{6(1)}{1+1}\right) = \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{6}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln 3 = \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) - \ln 3 = \ln\left(\sqrt{e}\right) - \ln 3 = \ln\left(\frac{\sqrt{e}}{3}\right)$$

6. Como $y = 2x-1$ é assíntota do gráfico de g, e o domínio da função g é $\mathbb{R}^+$, temos que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = 2$
Como o domínio da função h é $\mathbb{R}^+$, vamos calcular o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$:

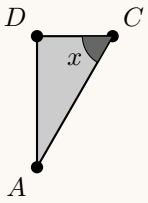
$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-[g(x)]^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{[g(x)]^2}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} - \lim_{x\to+\infty}\frac{[g(x)]^2}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{+\infty} - \lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{g(x)}{x}\right)^2\right] = 0 - \left(\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}\right)^2 = -2^2 = -4$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -4$, o gráfico de h tem uma assíntota horizontal.

7.

7.1. Vamos considerar $\overline{DA}$ a medida da altura do triângulo e $\overline{EC}$ a medida da base.
Sabemos que $\overline{CA} = 1$, porque é a medida do raio da circunferência.



Como $[CA]$ é a hipotenusa do triângulo e $[DA]$ o cateto oposto ao ângulo x, usando o seno do ângulo temos que:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{DA}}{\overline{CA}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\overline{DA}}{1} \Leftrightarrow \overline{DA} = \operatorname{sen} x$$

Por outro lado, como $[DC]$ é o cateto adjacente, usando a definição de cosseno, temos:

$$\cos x = \frac{\overline{DC}}{\overline{CA}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{DC}}{1} \Leftrightarrow \overline{DC} = \cos x$$

Como $\overline{ED} = 6$ temos que:

$$\overline{EC} = \overline{ED} + \overline{DC} \Leftrightarrow \overline{EC} = 6 + \cos x$$

Logo, calculando a área do triângulo, obtemos:

$$A_{[AEC]} = \frac{\overline{EC} \times \overline{DA}}{2} = \frac{(6 + \cos x)(\operatorname{sen} x)}{2} = \frac{6\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cos x}{2} = 3\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2}$$

Como $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cos x$, podemos escrever:

$$A_{[AEC]} = 3\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2} = 3\operatorname{sen} x + \frac{\frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{2}}{2} = 3\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} = 3\operatorname{sen} x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)$$

7.2. Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}$, é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Como $1{,}72 < 2 < 2{,}37$, ou seja, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) < 2 < f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$ tal que $f(c) = 2$, ou seja, que a equação $f(x) = 2$ tem, pelo menos, uma solução em $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$.

C.A.

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) =$$
$$= 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) =$$
$$\approx 1{,}72$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$
$$\approx 2{,}37$$

2014

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/1.ª Fase 16 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2014

VERSÃO 1

Página em branco

Indique de forma legível a versão da prova.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, e, a seguir, passados a tinta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Deve riscar aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \ \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \ \text{e} \ n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\ e^u$

$(a^u)' = u'\ a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}4$
- $P(A \cap B) = 0{,}2$
- $P\left(B \mid \overline{A}\right) = 0{,}8$

Qual é o valor de $P(B)$?

(A) $0{,}28$

(B) $0{,}52$

(C) $0{,}68$

(D) $0{,}80$

2. Considere todos os números naturais de dez algarismos que se podem escrever com os algarismos de 1 a 9

Quantos desses números têm exatamente seis algarismos 2?

(A) ${}^{10}C_6 \times 8^4$

(B) ${}^{10}C_6 \times {}^{8}A_4$

(C) ${}^{10}A_6 \times {}^{8}A_4$

(D) ${}^{10}A_6 \times 8^4$

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - 3$

Considere a sucessão de números reais (x_n) tal que $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

Qual é o valor de $\lim \frac{2}{f(x_n)}$?

(A) $-\infty$

(B) $-e$

(C) 0

(D) $+\infty$

4. Considere, para um certo número real k, a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = k\, e^x + x$

O teorema de Bolzano garante que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $]0, 1[$

A qual dos intervalos seguintes pode pertencer k?

(A) $\left]-e, -\frac{1}{e}\right[$

(B) $\left]-\frac{1}{e}, 0\right[$

(C) $\left]0, \frac{1}{e}\right[$

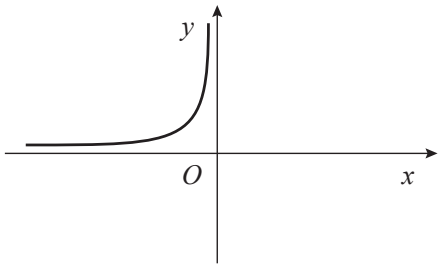
(D) $\left]\frac{1}{e}, 1\right[$

5. Considere, para um certo número real a positivo, a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

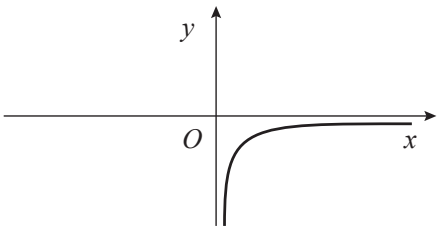
$f(x) = a + \ln\left(\frac{a}{x}\right)$

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f', primeira derivada da função f?

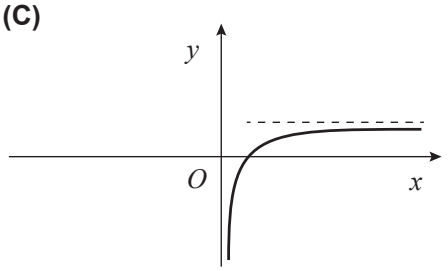
(A)



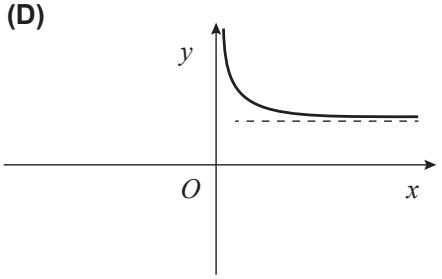
(B)



(C)



(D)



6. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α, definido por $4x - z + 1 = 0$

Seja r uma reta perpendicular ao plano α

Qual das condições seguintes pode definir a reta r?

(A) $\frac{x}{4} = y \wedge z = -1$

(B) $x = 4 \wedge z = -1$

(C) $x - 3 = \frac{z}{4} \wedge y = 0$

(D) $\frac{x-3}{4} = -z \wedge y = 1$

7. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, uma circunferência de centro O e raio 1

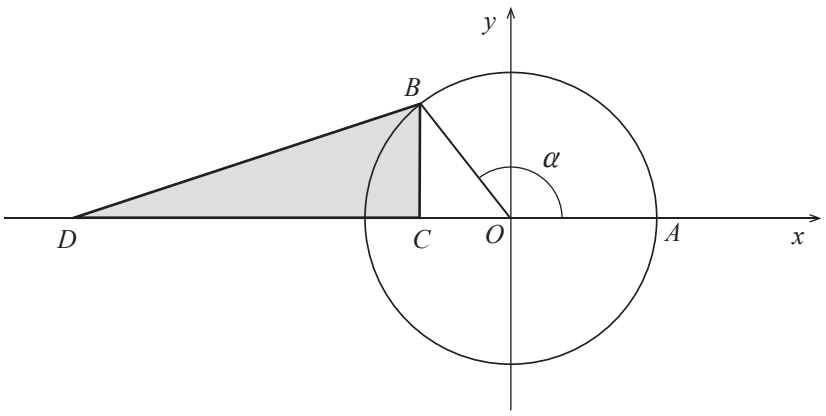


Figura 1

Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem à circunferência;
- o ponto A tem coordenadas $(1, 0)$
- os pontos B e C têm a mesma abcissa;
- o ponto C tem ordenada zero;
- o ponto D tem coordenadas $(-3, 0)$
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB, com $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

Qual das expressões seguintes representa, em função de α, a área do triângulo $[BCD]$?

(A) $\frac{1}{2}(-3 - \operatorname{sen}\alpha)\cos\alpha$

(B) $\frac{1}{2}(-3 + \operatorname{sen}\alpha)\cos\alpha$

(C) $\frac{1}{2}(3 + \cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha$

(D) $\frac{1}{2}(3 - \cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha$

8. Na Figura 2, está representado, no plano complexo, um polígono regular $[ABCDEF]$

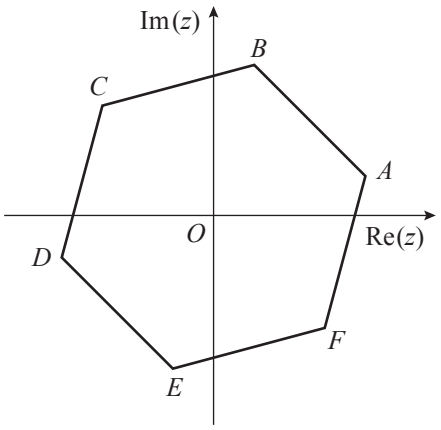


Figura 2

Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das n raízes de índice n de um número complexo z

O vértice C tem coordenadas $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o vértice E?

(A) $2\sqrt{2}\ \text{cis}\left(\frac{13}{12}\pi\right)$

(B) $4\ \text{cis}\left(\frac{13}{12}\pi\right)$

(C) $2\sqrt{2}\ \text{cis}\left(\frac{17}{12}\pi\right)$

(D) $4\ \text{cis}\left(\frac{17}{12}\pi\right)$

GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

1.1. Considere $z_1 = \dfrac{(-1+\sqrt{3}\,i)^3}{1-i}$ e $z_2 = \operatorname{cis}\alpha$, com $\alpha \in [0, \pi[$

Determine os valores de α, de modo que $z_1 \times (z_2)^2$ seja um número imaginário puro, sem utilizar a calculadora.

1.2. Seja z um número complexo tal que $|1+z|^2 + |1-z|^2 \leq 10$

Mostre que $|z| \leq 2$

2. Uma caixa tem nove bolas distinguíveis apenas pela cor: seis pretas, duas brancas e uma amarela.

2.1. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar dessa caixa, simultaneamente e ao acaso, três bolas.

Determine a probabilidade de as bolas retiradas não terem todas a mesma cor.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2.2. Considere a caixa com a sua composição inicial.

Considere agora a experiência aleatória que consiste em retirar dessa caixa uma bola de cada vez, ao acaso e sem reposição, até ser retirada uma bola preta.

Seja X a variável aleatória «número de bolas retiradas dessa caixa».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X

Apresente as probabilidades na forma de fração.

3. Na Figura 3, está representada uma planificação de um dado tetraédrico equilibrado, com as faces numeradas com os números $-1,\ 1,\ 2$ e 3

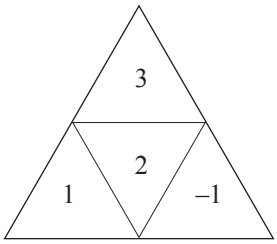


Figura 3

Considere a experiência aleatória que consiste em lançar esse dado duas vezes consecutivas e registar, após cada lançamento, o número inscrito na face voltada para baixo.

Sejam A e B os acontecimentos seguintes.

A: «o número registado no primeiro lançamento é negativo»

B: «o produto dos números registados nos dois lançamentos é positivo»

Elabore uma composição, na qual indique o valor de $P(A \mid B)$, sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada.

Na sua resposta, explique o significado de $P(A \mid B)$ no contexto da situação descrita, explique o número de casos possíveis, explique o número de casos favoráveis e apresente o valor de $P(A \mid B)$

4. Na Figura 4, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[OABCDEFG]$, de aresta 3

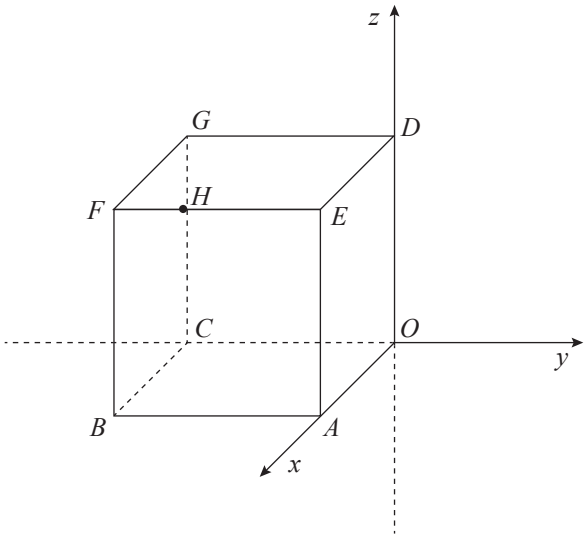


Figura 4

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox
- o ponto C pertence ao semieixo negativo Oy
- o ponto D pertence ao semieixo positivo Oz
- o ponto H tem coordenadas $(3, -2, 3)$

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo AHC

Determine o valor exato de $\text{sen}^2\alpha$, sem utilizar a calculadora.

5. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x-4}-3x+11}{4-x} & \text{se } x<4\\ \ln(2e^{x}-e^{4}) & \text{se } x\geq 4\end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

5.1. Averigue se a função f é contínua em $x=4$

5.2. O gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua quando x tende para $+\infty$, de equação $y=x+b$, com $b\in\mathbb{R}$

Determine b

6. Seja f uma função cuja derivada f', de domínio $\mathbb{R}$, é dada por $f'(x)=x-\operatorname{sen}(2x)$

6.1. Determine o valor de $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2x-\pi}$

6.2. Estude o gráfico da função f, quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão em $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right[$, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Na sua resposta, deve indicar o(s) intervalo(s) onde o gráfico da função f tem concavidade voltada para cima, o(s) intervalo(s) onde o gráfico da função f tem concavidade voltada para baixo e, caso existam, as abcissas dos pontos de inflexão do gráfico da função f

7. Considere a função f, de domínio $]-e^2, +\infty[$, definida por $f(x) = -\ln(x + e^2)$

Na Figura 5, estão representados, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f e o triângulo $[ABC]$

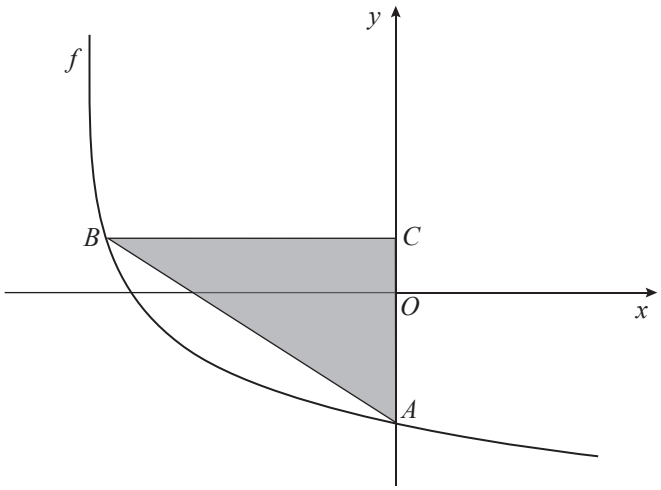


Figura 5

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(0, -2)$
- o ponto B pertence ao gráfico da função f e tem abcissa negativa;
- o ponto C pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à do ponto B
- a área do triângulo $[ABC]$ é igual a 8

Determine a abcissa do ponto B, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

– escrever uma expressão da área do triângulo $[ABC]$ em função da abcissa do ponto B

– equacionar o problema;

– reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados, devidamente identificados;

– indicar a abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** ..... (8 × 5 pontos) ..... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1.

1.1. ..... 15 pontos

1.2. ..... 15 pontos

2.

2.1. ..... 15 pontos

2.2. ..... 15 pontos

3. ..... 15 pontos

4. ..... 15 pontos

5.

5.1. ..... 15 pontos

5.2. ..... 15 pontos

6.

6.1. ..... 10 pontos

6.2. ..... 15 pontos

7. ..... 15 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/1.ª Fase

Critérios de Classificação 12 Páginas

2014

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de escolha múltipla.

As respostas ilegíveis são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Itens de seleção

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Itens de construção

Nos itens de resposta restrita e de resposta extensa, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

É classificada com zero pontos qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto deve ter em conta a organização dos conteúdos e a utilização da linguagem científica adequada.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação devem ser classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentam, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora deve ter em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados, devidamente identificados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação e as desvalorizações a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam a realização de cálculos.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelo programa da disciplina (ver nota 1). O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora gráfica», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta deve ser pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado, que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas devem ser pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não deve ser desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que **não** são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. ..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

As respostas corretas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	C	A	C	B	B	D	C	D
Versão 2	B	D	B	C	B	C	A	C

GRUPO II

1.1. ..... **15 pontos**

Indicar um argumento de $-1+\sqrt{3}\,i$ ..... 1 ponto

Indicar um argumento de $(-1+\sqrt{3}\,i)^3$ ..... 2 pontos

Indicar um argumento de $1-i$ ..... 1 ponto

Indicar um argumento de z_1 ..... 2 pontos

Indicar um argumento de $(z_2)^2$ ..... 1 ponto

Indicar um argumento de $z_1 \times (z_2)^2$ ..... 2 pontos

Referir que $z_1 \times (z_2)^2$ é imaginário puro

sse $\arg\left(z_1 \times (z_2)^2\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ ..... 4 pontos

Obter os valores de α ..... 2 pontos

1.2. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Considerar $z = a + bi$

Substituir z por $a+bi$ na expressão $|1+z|^2 + |1-z|^2 \leq 10$ ..... 1 ponto

Referir que $|z|^2 = a^2 + b^2$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Obter $(1+a)^2 + b^2 + (1-a)^2 + b^2 \leq 10$ ..... 3 pontos

Desenvolver $(1+a)^2$ ..... 2 pontos

Desenvolver $(1-a)^2$ ..... 2 pontos

Obter $2 + 2(a^2 + b^2) \leq 10$ ..... 2 pontos

Concluir que $|z| \leq 2$ ..... 3 pontos

2.º Processo

Considerar $z\,\bar{z} = |z|^2$

Escrever $|1+z|^2 = (1+z)(\overline{1+z})$ ..... 2 pontos

Escrever $|1-z|^2 = (1-z)(\overline{1-z})$ ..... 2 pontos

Escrever $\overline{1+z} = \bar{1} + \bar{z}$ ..... 1 ponto

Escrever $\overline{1-z} = \bar{1} - \bar{z}$ ..... 1 ponto

Escrever $(1+z)(1+\bar{z}) = 1 + z + \bar{z} + |z|^2$ ..... 3 pontos

Escrever $(1-z)(1-\bar{z}) = 1 - z - \bar{z} + |z|^2$ ..... 3 pontos

Escrever $|z|^2 \leq 4$ ..... 2 pontos

Concluir o pretendido ..... 1 ponto

2.1. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo (recorrendo ao acontecimento contrário)

Calcular a probabilidade de as três bolas retiradas terem todas a mesma cor ... 10 pontos

- Indicar o número de casos possíveis ..... 3 pontos
- Indicar o número de casos favoráveis (**ver nota 1**) ..... 5 pontos
- Obter a probabilidade (**ver nota 2**) ..... 2 pontos

Obter a probabilidade pedida (**ver nota 3**) ..... 5 pontos

2.º Processo

Indicar o número de casos possíveis ..... 3 pontos

Indicar o número de casos favoráveis (**ver nota 1**) ..... 10 pontos

Obter a probabilidade pedida (**ver nota 2**) ..... 2 pontos

Notas:

1. Se, na resposta, o número de casos favoráveis for superior ao número de casos possíveis ou se o número de casos favoráveis não for coerente com o modelo evidenciado pelo número de casos possíveis, a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos.

2. Se, na resposta, alguma das duas etapas anteriores tiver sido pontuada com zero pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos.

3. Se, na resposta, apenas for referida a relação existente entre as probabilidades de dois acontecimentos contrários, a pontuação máxima a atribuir nesta etapa é 2 pontos.

2.2. ..... **15 pontos**

Indicar os valores que a variável X pode tomar ..... 2 pontos

Determinar a probabilidade de cada um dos valores da variável X (**ver nota 1**)
..... (3 + 3 + 3 + 3) ..... 12 pontos

Apresentar a tabela de distribuição de probabilidades da variável X (**ver nota 2**) 1 ponto

Notas:

1. Se, na resposta, a probabilidade de um dos valores da variável X for obtida como a probabilidade de essa variável não tomar nenhum dos outros valores da variável X, a pontuação a atribuir não deve ser desvalorizada.

2. A pontuação relativa a esta etapa só é atribuída se, à etapa anterior, não tiverem sido atribuídos zero pontos.

3. ..... **15 pontos**

Tópicos de resposta:

- explicar o significado de $P(A \mid B)$ no contexto da situação descrita (probabilidade de o número registado no primeiro lançamento ser negativo, sabendo que o produto dos números registados nos dois lançamentos é positivo);
- explicar o número de casos possíveis (se o produto dos números registados nos dois lançamentos é positivo, então os dois números têm o mesmo sinal, e existem 10 casos possíveis);
- explicar o número de casos favoráveis (nesses 10 casos possíveis, existe apenas um caso em que o número registado no primeiro lançamento é negativo, pelo que existe um caso favorável);
- indicar o valor de $P(A \mid B)$

Níveis	Descritores do nível de desempenho	Pontuação
7	Na resposta, são apresentados o valor de $P(A \mid B)$ e as três explicações, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	15
6	Na resposta, são apresentados o valor de $P(A \mid B)$ e as três explicações, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica. OU Na resposta, apenas são apresentadas as três explicações, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	13
5	Na resposta, são apresentados o valor de $P(A \mid B)$ e apenas duas das três explicações, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada. OU Na resposta, apenas são apresentadas as três explicações, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	11
4	Na resposta, são apresentados o valor de $P(A \mid B)$ e apenas duas das três explicações, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica. OU Na resposta, apenas são apresentadas duas das três explicações, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	9
3	Na resposta, são apresentados o valor de $P(A \mid B)$ e apenas uma das três explicações, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada. OU Na resposta, apenas são apresentadas duas das três explicações, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	7
2	Na resposta, são apresentados o valor de $P(A \mid B)$ e apenas uma das três explicações, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica. OU Na resposta, apenas é apresentada uma das três explicações, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	5
1	Na resposta, apenas é apresentado o valor de $P(A \mid B)$ OU Na resposta, apenas é apresentada uma das três explicações, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	3

4. ..... **15 pontos**

Indicar as coordenadas do ponto A ..... 1 ponto

Indicar as coordenadas do ponto C ..... 1 ponto

Identificar α como a amplitude do ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{HA}$ e $\overrightarrow{HC}$ .... 3 pontos

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{HA}$ ..... 1 ponto

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{HC}$ ..... 1 ponto

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{HA}$ ..... 1 ponto

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{HC}$ ..... 1 ponto

Escrever $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} = \|\overrightarrow{HA}\| \times \|\overrightarrow{HC}\| \times \cos(\overrightarrow{HA} \,\hat{,}\, \overrightarrow{HC})$ (ou equivalente) ..... 1 ponto

Calcular $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC}$ ..... 1 ponto

Calcular $\cos\alpha$ ..... 2 pontos

Escrever $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (ou equivalente) ..... 1 ponto

Obter o valor de $\operatorname{sen}^2\alpha$ ..... 1 ponto

5.1. ..... **15 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$ OU determinar $f(4)$ ..... 2 pontos

Determinar $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$ ..... 10 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{e^{x-4} - 3x + 11}{4 - x}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{e^{x-4} - 3x + 11}{4 - x} = \lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{e^{x-4} - 3x + 11}{-(x-4)}$

(ou equivalente) ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{e^{x-4} - 3x + 11}{-(x-4)} = \lim\limits_{y \to 0^-} \dfrac{e^{y} - 3y - 1}{-y}$

(ou equivalente) (**ver nota**) ..... 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{y \to 0^-} \dfrac{e^{y} - 3y - 1}{-y} = \lim\limits_{y \to 0^-} \left(\dfrac{e^{y} - 1}{-y} + 3 \right)$

(ou equivalente) ..... 2 pontos

Obter o valor de $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$ ..... 3 pontos

Concluir que a função f não é contínua em $x = 4$ ..... 3 pontos

Nota – Se, na resposta, for referido que $x \to 4^-$ é equivalente a $x - 4 \to 0^-$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

5.2. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(2e^x-e^4)-x\right)$ ..... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(2e^x-e^4)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(2e^x-e^4)-\ln e^x\right)$ ..... 4 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(2e^x-e^4)-\ln e^x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{2e^x-e^4}{e^x}\right)$ ..... 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{2e^x-e^4}{e^x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(2-\dfrac{e^4}{e^x}\right)$ ..... 3 pontos

Obter o valor de b ..... 3 pontos

2.º Processo

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(2e^x-e^4)-x\right)$ ..... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(2e^x-e^4)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^x\left(2-\dfrac{e^4}{e^x}\right)\right)-x\right)$

(ou equivalente) ..... 4 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^x\left(2-\dfrac{e^4}{e^x}\right)\right)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln e^x+\ln\left(2-\dfrac{e^4}{e^x}\right)-x\right)$ .... 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln e^x+\ln\left(2-\dfrac{e^4}{e^x}\right)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(2-\dfrac{e^4}{e^x}\right)$ ..... 3 pontos

Obter o valor de b ..... 3 pontos

6.1. ..... **10 pontos**

Escrever $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2x-\pi}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

Referir que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ..... 3 pontos

Calcular $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ..... 2 pontos

Obter o valor de $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2x-\pi}$ ..... 2 pontos

6.2. ..... **15 pontos**

Determinar $f''(x)$ ..... 4 pontos

Calcular $(x)'$ ..... 1 ponto

Calcular $(\text{sen}(2x))'$ ..... 2 pontos

Obter $f''(x)$ ..... 1 ponto

Determinar os zeros de f'' em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[$ (**ver nota 1**) ..... 3 pontos

Estudar a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[$ ..... 6 pontos

Concluir que f'' é negativa em $\left]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right[$ ..... 1 ponto

Concluir que f'' é positiva em $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right[$ e em $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$ ..... 1 ponto

Referir que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $\left]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right[$ (**ver nota 2**) ..... 2 pontos

Referir que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right[$ e em $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$ (**ver nota 3**) ..... 2 pontos

Indicar as abcissas dos pontos de inflexão do gráfico da função f em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[$ ..... (1 + 1) ..... 2 pontos

Notas:

1. Se, na resposta, não forem determinados os zeros de f'' em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[$ mas se for apresentada a conclusão de que f'' é negativa em $\left]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right[$ e de que f'' é positiva em $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right[$ e em $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

2. Se, na resposta, for referido que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$, em vez de em $\left]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

3. Se, na resposta, for referido que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right]$ e em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$, em vez de em $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right[$ e em $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

7. ..... **15 pontos**

Escrever uma expressão da área do triângulo $[ABC]$ em função da abcissa do ponto B ..... 6 pontos

Escrever $\overline{AC}$ em função da abcissa do ponto B ..... 3 pontos

Escrever $\overline{BC}$ em função da abcissa do ponto B ..... 2 pontos

Obter uma expressão da área do triângulo $[ABC]$ ..... 1 ponto

Equacionar o problema ..... 2 pontos

Reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados na calculadora (**ver notas 1** e **2**) ..... 4 pontos

Indicar a abcissa do ponto B ..... 3 pontos

Notas:

1. Se, na resposta, não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

2. Se, na resposta, for apresentado um gráfico que não respeite o domínio da função, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** ..... (8 × 5 pontos) ..... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1.

1.1. ..... 15 pontos

1.2. ..... 15 pontos

2.

2.1. ..... 15 pontos

2.2. ..... 15 pontos

3. ..... 15 pontos

4. ..... 15 pontos

5.

5.1. ..... 15 pontos

5.2. ..... 15 pontos

6.

6.1. ..... 10 pontos

6.2. ..... 15 pontos

7. ..... 15 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

DOCUMENTO DE OPERACIONALIZAÇÃO DA CLASSIFICAÇÃO – DOC

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO 2014

– 1.ª FASE –

DISCIPLINA: MATEMÁTICA A_PROVA 635

Grupo II

Item 1.1. (15 pontos)

Situação 1: Na resposta, são determinados z_1 e $(z_2)^2$ na forma algébrica, é referido que $\text{Re}\left(z_1 \times (z_2)^2\right) = 0$ e são obtidos os valores de α em $[0, \pi[$

Classificação proposta: 15 pontos

Adaptação do critério específico

Calcular z_1 na forma algébrica ..... 5 pontos

Calcular $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^3$ na forma algébrica ..... 2 pontos

Indicar a multiplicação de ambos os termos da fração pelo conjugado do denominador ..... 1 ponto

Efetuar a multiplicação do numerador ..... 1 ponto

Efetuar a multiplicação do denominador ..... 1 ponto

Escrever $(z_2)^2 = \text{cis}(2\alpha)$ ..... 1 ponto

Escrever $(z_2)^2$ na forma algébrica ..... 1 ponto

Obter $\text{Re}\left(z_1 \times (z_2)^2\right)$ ..... 2 pontos

Escrever que $z_1 \times (z_2)^2$ é um imaginário puro se $\text{Re}\left(z_1 \times (z_2)^2\right) = 0$ ..... 2 pontos

Resolver a equação $\cos(2\alpha) = \text{sen}(2\alpha)$ em $[0, \pi[$ ..... 4 pontos

Escrever $2\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$ com $k \in Z$ e $\alpha \in [0, \pi[$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Obter os valores de α em $[0, \pi[$ ..... 2 pontos

Item 1.2. (15 pontos)

Situação 1: Na resposta, é referido que $|1+z|^2 = 1+2z+z^2$ ou que $|1-z|^2 = 1-2z+z^2$

Classificação proposta: 0 pontos

Item 2.1. (15 pontos)

Situação 1: (2.º Processo) Na resposta, é apresentado o número de casos possíveis, ${}^{9}C_{3}$, é apresentado o número de casos favoráveis, $6\times 2\times 1+{}^{6}C_{2}\times 1+{}^{6}C_{2}\times 2+6\times {}^{2}C_{2}+{}^{2}C_{2}\times 1$, e é obtido o valor da probabilidade pedida.

Classificação proposta: 15 pontos (3+10 (2+2+2+2+2)+2)

Situação 2: (2.º Processo) Na resposta, é apresentado o número de casos possíveis, ${}^{9}C_{3}$,é apresentado o número de casos favoráveis, $6\times {}^{3}C_{2}+{}^{6}C_{2}\times 3+{}^{2}C_{2}\times 1$, e é obtido o valor da probabilidade pedida.

Classificação proposta: 15 pontos (3+10 (4+4+2)+2)

Situação 3: (2.º Processo) Na resposta, é apresentado o número de casos possíveis, ${}^{9}C_{3}$,é apresentado o número de casos favoráveis, ${}^{6}C_{2}\times 3+{}^{2}C_{2}\times 7+6\times 2\times 1$, e é obtido o valor da probabilidade pedida.

Classificação proposta: 15 pontos (3+10 (4+3+3)+2)

Item 2.2. (15 pontos)

Situação 1: Na resposta, a variável X é considerada como «número de bolas retiradas dessa caixa antes de ser retirada uma bola preta», são indicados os valores dessa variável, é apresentada a probabilidade de cada um dos valores dessa variável, assim como a tabela de distribuição de probabilidades dessa variável.

Classificação proposta: 13 pontos (0+12+1)

Item 3. (15 pontos)

Situação 1: Na resposta, apenas é apresentada uma tabela de dupla entrada e é referido que $P(A\mid B)=\frac{1}{10}$

Classificação proposta: 3 pontos (nível 1)

Situação 2: Na resposta, apenas é apresentada uma tabela de dupla entrada, é explicado o significado de $P(A\mid B)$ no contexto da situação descrita, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada, e é referido que $P(A\mid B)=\frac{1}{10}$

Classificação proposta: 7 pontos (nível 3)

Situação 3: Na resposta, é considerada $P(B\mid A)$ em vez de $P(A\mid B)$

Classificação proposta: 0 pontos

Item 6.2. (15 pontos)

Situação 1: Na resposta, é determinada $f''(x)$, são determinados os zeros de f'' em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[$, e apenas é apresentada uma tabela para estudar a função *f* quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[$

Classificação proposta: 13 pontos (4+3+4 (1+1+1(CG10)+1(CG10))+2)

Situação 2: Na resposta, é determinada $f''(x)$, é obtido $\frac{\pi}{6}$ como sendo o zero de f'' em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[$, é apresentada uma tabela para estudar a função *f* quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico, são indicados, em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[$, os intervalos onde o gráfico da função *f* tem a concavidade voltada para cima e onde o gráfico da função *f* tem a concavidade voltada para baixo de acordo com a variação de sinal de f'' considerada, e é referido que $\frac{\pi}{6}$ é a abcissa do ponto de inflexão.

Classificação proposta: 9 pontos (4+1+3(CG9)+1)

Item 7. (15 pontos)

Situação 1: Na resposta, apenas é referido que $\frac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2} = 8$

Classificação proposta: 2 pontos (0+2+0+0)

Situação 2: Na resposta, é referido que $\overline{AC} = 2 + f(x)$, que $\overline{BC} = x$ com $B(x, f(x))$, que $\frac{x \times (2 + f(x))}{2} = 8$, e são reproduzidos os gráficos das funções visualizados na calculadora.

Classificação proposta: 7 pontos (3(3+0+0)+2+2(CG9)+0)

Exame final nacional de Matemática A **(2014, 1.ª fase)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Sabemos que $P(B|\overline{A}) = \dfrac{P\left(B \cap \overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)} \Leftrightarrow P\left(B \cap \overline{A}\right) = P(B|\overline{A}) \times P\left(\overline{A}\right)$

   Como $P(A) = 0{,}4$, temos que $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$
   Como $P(B|\overline{A}) = 0{,}8$ e $P\left(\overline{A}\right) = 0{,}6$, temos que $P\left(B \cap \overline{A}\right) = 0{,}8 \times 0{,}6 = 0{,}48$

   Como $P\left(B \cap \overline{A}\right) = P(B \setminus A) = P(B - A)$, temos que

   $$P\left(B \cap \overline{A}\right) = P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(B) = P\left(B \cap \overline{A}\right) + P(A \cap B)$$

   Como $P\left(B \cap \overline{A}\right) = 0{,}48$ e $P(A \cap B) = 0{,}2$, vem que

   $$P(B) = 0{,}48 + 0{,}2 = 0{,}68$$

   Resposta: **Opção C**

2. Se o número tem 10 posições (algarismos), das quais 6 serão ocupadas por algarismo 2, o número de conjuntos diferentes de 6 posições para os algarismos 2 é ${}^{10}C_6$ (por não interessar a ordem, uma vez que as posições serão ocupadas por elementos iguais).

   Por cada um destes conjuntos, podemos colocar nas restantes 4 posições (algarismos) 8 elementos (os algarismos de 3 a 9 e mais o algarismo 1), eventualmente repetidos.
   Assim, considerando a ordem como relevante (por poderem ser algarismos diferentes), temos ${}^{8}A'_4 = 8^4$ grupos diferentes.

   Logo o total de números diferentes que existem, nas condições definidas, é ${}^{10}C_6 \times 8^4$

   Resposta: **Opção A**

3. Como $\lim x_n = \lim \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0^+$, então

   $$\lim f\left(x_n\right) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = e^{\frac{1}{0^+}} - 3 = e^{+\infty} - 3 = +\infty - 3 = +\infty$$

   E assim

   $$\lim \frac{2}{f\left(x_n\right)} = \frac{\lim 2}{\lim f\left(x_n\right)} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

   Resposta: **Opção C**

4. Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}$, é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em $[0,1]$.

   Como o teorema de Bolzano garante que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo]0,1[, então, pelo hipótese do teorema de Bolzano, sabemos que zero está compreendido entre $f(0)$ e $f(1)$, e pelo corolário do teorema de Bolzano temos que $f(0) \times f(1) < 0$

   Assim, temos que $f(0) = ke^0 + 0 = k \times 1 = k$ e $f(1) = ke^1 + 1 = ke + 1$

   Calculando os zeros de $f(0) \times f(1)$, temos

   $$f(0) \times f(1) = 0 \Leftrightarrow k \times (ke+1) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee ke + 1 = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = -\frac{1}{e}$$

   E, estudando o sinal de $f(0) \times f(1)$ vem que:

k	$-\infty$	$-\frac{1}{e}$		0	$+\infty$
k	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$ke+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(0) \times f(1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

   Pelo que verificamos que $f(0) \times f(1) < 0$ se $k \in \left]-\frac{1}{e}, 0\right[$

   Resposta: **Opção B**

5. Começando por determinar a expressão da derivada, temos:

   $$f'(x) = \left(a + \ln\left(\frac{a}{x}\right)\right)' = \left(a + \ln a - \ln x\right)' = (a)' + (\ln a)' - (\ln x)' = 0 + 0 - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x}$$

   Assim, em $\mathbb{R}^+$, a derivada é estritamente negativa, pelo que o gráfico da opção (B) é o único compatível com esta conclusão.

   Resposta: **Opção B**

6. Se uma reta é perpendicular a um plano, o vetor diretor da reta, é colinear com o vetor normal do plano.

   Da equação do plano *alpha* podemos observar que o vertor normal do plano é $\vec{u} = (4,0,-1)$

   A reta definida pela condição da opção (A), tem um vetor diretor $\vec{v}_A = (4,1,0)$, que não é colinear com o vetor normal do plano, visto que não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \lambda.\vec{v}_A$

   A reta definida pela condição da opção (B), tem um vetor diretor $\vec{v}_B = (0,1,0)$, que não é colinear com o vetor normal do plano, visto que não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \lambda.\vec{v}_B$

   A reta definida pela condição da opção (C), tem um vetor diretor $\vec{v}_C = (1,0,4)$, que não é colinear com o vetor normal do plano, visto que não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \lambda.\vec{v}_C$

   A reta definida pela condição da opção (D), tem um vetor diretor $\vec{v}_D = (4,0,-1)$, que é colinear com o vetor normal do plano, visto que $\vec{u} = \vec{v}_C$

   Resposta: **Opção D**

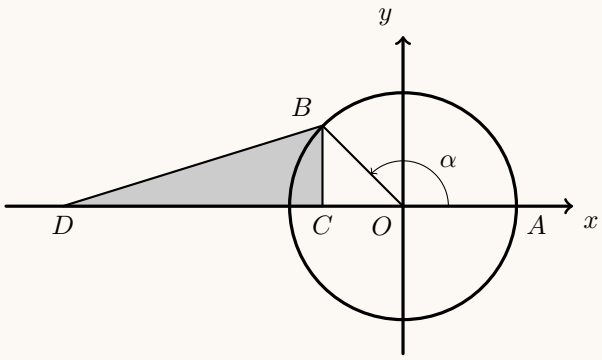
7. Como

- $\overline{BC} = \operatorname{sen}\alpha$
- $\overline{OC} = \cos\alpha$

Temos que $\overline{DC} = \overline{OD} - \overline{OC} = 3 - |\cos\alpha|$

Como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, logo $\cos\alpha < 0$, pelo que $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$

Assim, $\overline{DC} = 3 - |\cos\alpha| = 3 - (-\cos\alpha) = 3 + \cos\alpha$



Desta forma, temos que:

$$A_{[BCD]} = \frac{\overline{DC} \times \overline{BC}}{2} = \frac{\operatorname{sen}\alpha(3 + \cos\alpha)}{2} = \frac{1}{2}(3 + \cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2014, 1ª Fase

8. Como os vértices do hexágono são as imagens geométricas das 6 raízes de índice 6 de um número complexo z, então estão sobre uma circunferência centrado na origem.

Desta forma, sendo $w_5 = \rho\,\mathrm{cis}\,\theta$ o número complexo cuja imagem geométrica é o vértice E, temos que:

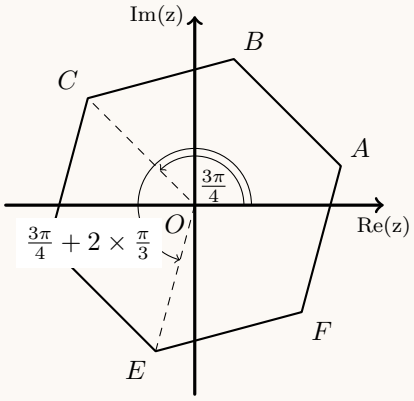
$$\rho = |-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i| = \sqrt{\left(-2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2^2 \times 2 + 2^2 \times 2} = \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4$$

Como o vértice C pertence ao segundo quadrante é a imagem geométrica de um número complexo w_3, tal que $\operatorname{Re}(w_3) = -\operatorname{Im}(w_3)$, temos que $\arg(w_3) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

Assim, como os argumentos dos números complexos que são raízes indíce 6 de um mesmo número complexo diferem de $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, temos que:

$$\theta = \arg(w_5) = \arg(w_3) + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{9\pi}{12} + \frac{8\pi}{12} = \frac{17\pi}{12}$$

Logo $w_5 = 4\,\mathrm{cis}\left(\frac{17}{12}\pi\right)$



Resposta: **Opção D**

GRUPO II

1.

1.1. Escrevendo $-1+\sqrt{3}i$ na f.t. temos $-1+\sqrt{3}i = \rho \operatorname{cis}\theta$, onde:

- $\rho = |-1+\sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$; como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta < 0$, θ é um ângulo do 2º quadrante, logo $\theta = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$

Assim $-1+\sqrt{3}i = 2\operatorname{cis}\dfrac{2\pi}{3}$

Pelo que $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^3 = \left(2\operatorname{cis}\dfrac{2\pi}{3}\right)^3 = 2^3 \operatorname{cis}\left(3\times\dfrac{2\pi}{3}\right) = 8\operatorname{cis}(2\pi) = 8\operatorname{cis}0$

Escrevendo $1-i$ na f.t. temos $1-i = \varphi\operatorname{cis}\beta$, onde:

- $\varphi = |1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{-1}{1} = -1$; como $\operatorname{sen}\beta < 0$ e $\cos\beta > 0$, β é um ângulo do 4º quadrante, logo $\beta = -\dfrac{\pi}{4} =$

Assim $1-i = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

Desta forma, calculando as potências, o quociente e o produto na f.t, vem:

$$z_1\times(z_2)^2 = \frac{8\operatorname{cis}0}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\times(\operatorname{cis}\alpha)^2 = \frac{8}{\sqrt{2}}\operatorname{cis}\left(0-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\times\operatorname{cis}(2\alpha) = \frac{8\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\times\operatorname{cis}(2\alpha) =$$

$$= 4\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\times\operatorname{cis}(2\alpha) = 4\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)$$

Logo, para que $z_1\times(z_2)^2$ seja um imaginário puro, temos que $\arg\left(z_1\times(z_2)^2\right) = \dfrac{\pi}{2}+k\pi\,, k\in\mathbb{Z}$.
Pelo que:

$$\frac{\pi}{4}+2\alpha = \frac{\pi}{2}+k\pi\,, k\in\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; 2\alpha = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+k\pi\,, k\in\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; 2\alpha = \frac{\pi}{4}+k\pi\,, k\in\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; \alpha = \frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\,, k\in\mathbb{Z}$$

Como $\alpha\in[0,\pi[$, concretizando os valores de k, temos que $\alpha = \dfrac{\pi}{8}$ $(k=0)$ e
$\alpha = \dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{8}+\dfrac{4\pi}{8} = \dfrac{5\pi}{8}$ $(k=1)$ são os únicos valores de $\alpha\in[0,\pi[$, para os quais $z_1\times(z_2)^2$ é um imaginário puro.

1.2. Seja $z = a+bi$
Assim, vem que:

$$|1+z|^2+|1-z|^2\le 10 \;\Leftrightarrow\; |1+(a+bi)|^2+|1-(a+bi)|^2\le 10 \;\Leftrightarrow\; |1+a+bi|^2+|1-a-bi|^2\le 10 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \left(\sqrt{(1+a)^2+b^2}\right)^2+\left(\sqrt{(1-a)^2+(-b)^2}\right)^2\le 10 \;\Leftrightarrow\; (1+a)^2+b^2+(1-a)^2+(-b)^2\le 10 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 1+2a+a^2+b^2+1-2a+a^2+b^2\le 10 \;\Leftrightarrow\; 2+2a^2+2b^2\le 10 \;\Leftrightarrow\; 1+a^2+b^2\le 5 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; a^2+b^2\le 4 \underset{a^2+b^2\ge 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{a^2+b^2}\le\sqrt{4} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{a^2+b^2}\le 2 \;\Leftrightarrow\; |z|\le 2$$

2.

2.1. Definindo o acontecimento M, como:
M: «As bolas retiradas terem todas a mesma cor»
Pretende-se calcular: $P(\overline{M}) = 1 - P(M)$

Como a caixa tem 9 bolas, e são retiradas 3, simultâneamente, temos que o número de casos possíveis é o número de conjuntos de 3 bolas: ${}^{9}C_{3}$ (a ordem é irrelevante por serem retiradas simultaneamente).

Como na caixa, não existem nem 3 bolas brancas, nem 3 bolas amarelas, para que sejam todas da mesma cor têm que ser todas pretas, e por isso, o número de casos favoráveis, para o acontecimento M, é o número de conjuntos de 3 bolas pretas que podemos fazer com as 6 que estão na caixa: ${}^{6}C_{3}$ (a ordem é irrelevante por serem retiradas simultaneamente).

Assim, temos que, a probabilidade de as bolas retiradas não terem todas a mesma cor é:

$$P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 1 - \frac{{}^{6}C_{3}}{{}^{9}C_{3}} = 1 - \frac{20}{84} = \frac{16}{21}$$

2.2. Como X é o número de bolas retiradas da caixa, até ser retirada uma bola preta, a variável X pode tomar os seguintes valores, com as respetivas probabilidades:

- $X = 1$, se a primeira bola retirada for preta
  $P(X = 1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$
- $X = 2$, se a primeira não for preta e a segunda sim, sabendo que a primeira que foi retirada não era preta $P(X = 2) = \frac{3}{9} \times \frac{6}{8} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$
- $X = 3$, se a primeira não for preta, a segunda também não, sabendo que a primeira também não foi e a terceira ser preta, sabendo que as duas anteriores não o eram
  $P(X = 3) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{6}{7} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{3 \times 2}{7} = \frac{2}{4 \times 7} = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}$
- $X = 4$ se saírem sucessivamente as três bolas que não são pretas, pelo que a quarta bola será necessariamente uma bola preta
  $P(X = 4) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{84}$

Logo a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{84}$

3. De acordo com o enunciado $P(A|B)$ é a probabilidade de, lançar o dado o dado duas vezes, e obter um número negativo no primeiro lançamento, sabendo que o produto dos dois números obtidos é positivo.
Como sabemos que o produto dos números obtidos é positivo, pode ter resultado da multiplicação de dois números positivos ou de dois números negativos.

De acordo com a Regra de Laplace, a probabilidade é calculada pelo quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis, sendo os casos possíveis equiprováveis.
Assim, temos que o número de casos possíveis resulta de considerar o produto de dois números negativos (1×1) ou dois números positivos (3×3), ou seja, um total de $1 + 9 = 10$ casos possíveis.
Destes, apenas um (1) caso é favorável, nomeadamente o que corresponde à hipótese do produto positivo ter resultado da multiplicação de dois valores negativos, o que garante que o número saído no primeiro

lançamento é negativo.
Assim temos que:

$$P(A|B) = \frac{1}{10}$$

4. Como o ponto A, pertence ao eixo Ox e o cubo tem aresta 3, temos que $A(3,0,0)$ e podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{HA}$, e a sua norma:

$$\overrightarrow{HA} = A - H = (3,0,0) - (3,-2,3) = (0,-(-2),-3) = (0,2,-3)$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{0^2+2^2+(-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

Da mesma forma, como o ponto C, pertence ao eixo Oy e o cubo tem aresta 3, temos que $C(0,-3,0)$ e podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{HC}$, e a sua norma:

$$\overrightarrow{HC} = C - H = (0,-3,0) - (3,-2,3) = (-3,-3+2,-3) = (-3,-1,-3)$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(-3)^2+(-1)^2+(-3)^2} = \sqrt{9+1+9} = \sqrt{19}$$

Podemos ainda calcular o produto escalar $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}$:

$$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HC} = (0,2,-3).(-3,-1,-3) = 0\times(-3)+2\times(-1)+(-3)\times(-3) = 0-2+9 = 7$$

E assim, temos que α é o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{HA}$ e $\overrightarrow{HC}$, pelo que, recorrendo à fórmula do produto escalar, vem que:

$$\cos(\alpha) = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{HA}\,\overrightarrow{HC}}\right) = \frac{\overrightarrow{HA}\,.\,\overrightarrow{HC}}{\left\|\overrightarrow{HA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{HC}\right\|} = \frac{7}{\sqrt{13}\times\sqrt{19}} = \frac{7}{\sqrt{247}}$$

Pela fórmula fundamental da Trigonometria, temos que

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$$

Logo temos que o valor exato de $\operatorname{sen}^2\alpha$ é

$$\operatorname{sen}^2\alpha = 1-\left(\frac{7}{\sqrt{247}}\right)^2 = 1-\frac{7^2}{247} = \frac{247}{247}-\frac{49}{247} = \frac{198}{247}$$

5.

5.1. Para averiguar se a função f é contínua em $x=4$, temos que verificar se $f(4) = \lim\limits_{x\to4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to4^+} f(x)$

- $f(4) = \ln(2e^4-e^4) = \ln(e^4) = 4\ln e = 4\times1 = 4$
- $\lim\limits_{x\to4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to4^+}\left(\ln(2e^x-e^4)\right) = \ln(2e^4-e^4) = 4$
- $\lim\limits_{x\to4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to4^-}\left(\dfrac{e^{x-4}-3x+11}{4-x}\right) = \dfrac{e^{4-4}-3(4)+11}{4-4} = \dfrac{e^1-12+11}{4-4} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to4^-} f(x) = \lim_{x\to4^-}\left(\frac{e^{x-4}-3x+11}{4-x}\right) = \lim_{x\to4^-}\left(\frac{e^{x-4}-3x+11}{-(-4+x)}\right) = \lim_{x\to4^-}\left(\frac{e^{x-4}-3x+11}{-(x-4)}\right) =$$

(fazendo $y = x-4$, temos $x = y+4$ e se $x\to4^-$, então $y\to0^-$)

$$= \lim_{y\to0^-}\left(\frac{e^y-3(y+4)+11}{-y}\right) = \lim_{y\to0^-}\left(\frac{e^y-3y-12+11}{-y}\right) = \lim_{y\to0^-}\left(\frac{e^y-3y-1}{-y}\right) =$$

$$= \lim_{y\to0^-}\left(\frac{e^y-1}{-y}+\frac{-3y}{-y}\right) = \lim_{y\to0^-}\left(\frac{e^y-1}{-y}\right)+\lim_{y\to0^-}\left(\frac{-3y}{-y}\right) = -\underbrace{\lim_{y\to0^-}\left(\frac{e^y-1}{y}\right)}_{\text{Lim. Notável}}+\lim_{y\to0^-}3 = -1+3 = 2$$

Como $\lim\limits_{x\to4^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to4^+} f(x)$, não existe $\lim\limits_{x\to4} f(x)$, pelo que a função f não é contínua em $x=4$

5.2. Como o gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua quando x tende para $+\infty$, de equação $y = x+b$, ou seja uma reta de declive 1, temos que

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

E assim, calculando o valor de b, vem que

$$b = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - 1\times x\big) = \lim_{x\to+\infty} \big(\ln(2e^x - e^4) - x\big) = +\infty - \infty \text{ (Indeterminação)}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \big(\ln(2e^x - e^4) - x\big) \underset{x=\ln e^x}{=} \lim_{x\to+\infty} \big(\ln(2e^x - e^4) - \ln e^x\big) = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln \frac{2e^x - e^4}{e^x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\ln\left(\frac{2e^x}{e^x} - \frac{e^4}{e^x}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln\left(2 - \frac{e^4}{e^x}\right)\right) = \ln\left(\lim_{x\to+\infty} \left(2 - \frac{e^4}{e^x}\right)\right) =$$

$$= \ln\left(2 - \frac{e^4}{e^{+\infty}}\right) = \ln(2-0) = \ln 2$$

6.

6.1. Como $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\left(2\times\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}(\pi) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

temos que:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2x - \pi} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2} \times \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

6.2. Começando por determinar f'' temos:

$$f''(x) = \big(f'(x)\big) = \big(x - \operatorname{sen}(2x)\big)' = (x)' - \big(\operatorname{sen}(2x)\big)' = 1 - (2x)'\cos(2x) = 1 - 2\cos(2x)$$

Para determinar o sentido das concavidades, vamos estudar o sinal de f'':

$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - 2\cos(2x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 = 2\cos(2x) \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2} = \cos(2x) \;\Leftrightarrow\; \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \;\vee\; 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ,k\in\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{6} + k\pi \;\vee\; x = -\frac{\pi}{6} + k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$$

Logo, as únicas soluções da equação $f''(x) = 0$ que pertencem ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[$, são $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = -\frac{\pi}{6}$ (obtidas com $k = 0$).

Assim, estudando a variação de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f, vem:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$
$f''(x)$	n.d.	+	0	−	0	+	n.d.
$f(x)$	n.d.	∪	Pt. I.	∩	Pt. I.	∪	n.d.

Logo, podemos concluir que o gráfico de f:

- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right]$ e no intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$
- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$
- tem dois pontos de inflexão de abcissas, cujas abcissas são $x = -\frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{\pi}{6}$

7. Seja k a abcissa do ponto B ($k \in \mathbb{R}^-$).
Como o ponto B pertence ao gráfico da função f, tem coordenadas $\big(k,f(k)\big)$, e como o ponto C pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à do ponto B, tem coordenadas $\big(0,f(k)\big)$

Podemos ainda considerar a mediada da base do triângulo como $b = |k|$, e a altura como a diferença das ordenadas dos pontos C e A, ou seja, $a = f(k) - (-2) = f(k) + 2$

Assim, a área do triângulo $[ABC]$ é

$$A_{[ABC]} = \frac{b \times a}{2} = \frac{|k| \times (f(k)+2)}{2} \underset{k<0}{=} \frac{-k \times (f(k)+2)}{2} = \frac{-k \times (-\ln(k+e^2)+2)}{2}$$

E como a área do triângulo $[ABC]$ é igual a 8, temos que

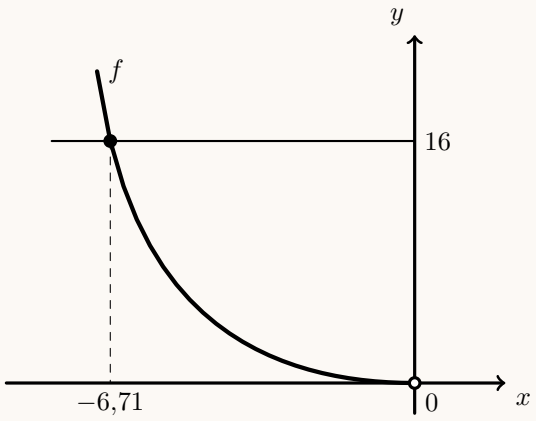
$$\frac{-k \times (-\ln(k+e^2)+2)}{2} = 8 \Leftrightarrow -k \times (-\ln(k+e^2)+2) = 16$$

Pelo que a abcissa do ponto B é a solução negativa da equação anterior.

Assim a abcissa do ponto B é a interseção da reta de equação $y = 16$ com o gráfico da função f, sendo

$$f(x) = -x \times (-\ln(x+e^2)+2), x \in \mathbb{R}^-$$

Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função f, numa janela coerente com o domínio da função, e a reta de equação $y = 16$ (reproduzidos na figura ao lado), e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, obtemos um valor aproximado (às centésimas) da abcissa do ponto B, $x_B \approx -6{,}71$



GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/2.ª Fase 15 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2014

VERSÃO 1

Página em branco

Indique de forma legível a versão da prova.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, e, a seguir, passados a tinta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Deve riscar aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \ \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \ \text{e} \ n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\ e^u$

$(a^u)' = u'\ a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- A e B são acontecimentos independentes;
- $P(A) = 0{,}4$
- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}48$

Qual é o valor de $P(B)$?

(A) $0{,}08$ **(B)** $0{,}12$ **(C)** $0{,}2$ **(D)** $0{,}6$

2. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um octaedro $[ABCDEF]$, cujos vértices pertencem aos eixos coordenados.

Escolhem-se, ao acaso, três vértices desse octaedro.

Qual é a probabilidade de esses três vértices definirem um plano paralelo ao plano de equação $z = 5$?

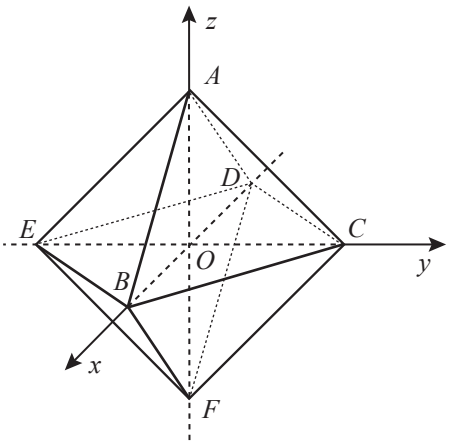


Figura 1

(A) $\frac{1}{{}^6C_3}$

(B) $\frac{4}{{}^6C_3}$

(C) $\frac{8}{{}^6C_3}$

(D) $\frac{12}{{}^6C_3}$

3. Um dos termos do desenvolvimento de $\left(\frac{2}{x}+x\right)^{10}$, com $x \neq 0$, não depende da variável x

Qual é esse termo?

(A) $10\,240$

(B) 8064

(C) 1024

(D) 252

4. Seja g uma função, de domínio $]-\infty, e[$, definida por $g(x)=\ln(e-x)$

Considere a sucessão estritamente crescente de termo geral $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Qual é o valor de $\lim g(x_n)$?

(A) $+\infty$

(B) e

(C) 1

(D) $-\infty$

5. Considere, para um certo número real k, a função f, contínua em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} & \text{se } \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ k-3 & \text{se } x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

Qual é o valor de k?

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 4

6. Na Figura 2, está representada, num referencial ortogonal xOy, parte do gráfico da função g'', segunda derivada de uma função g

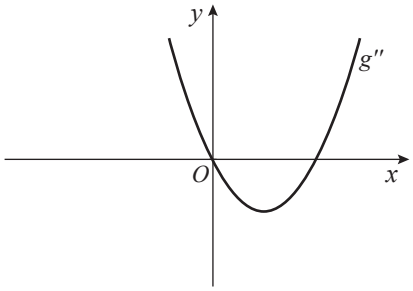
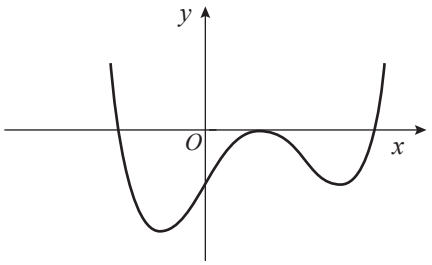


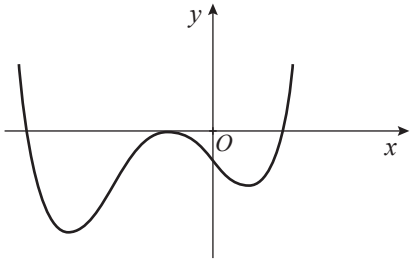
Figura 2

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função g?

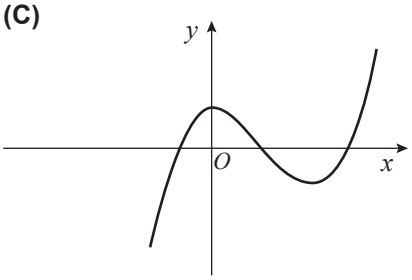
(A)



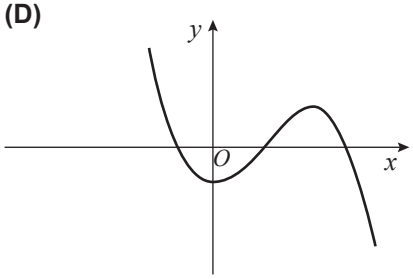
(B)



(C)



(D)



7. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o ponto A, de coordenadas $(1, 0, 3)$, e o plano α, definido por $3x + 2y - 4 = 0$

Seja β um plano perpendicular ao plano α e que passa pelo ponto A

Qual das condições seguintes pode definir o plano β ?

(A) $3x + 2y - 3 = 0$

(B) $2x - 3y - z + 1 = 0$

(C) $2x - 3y + z = 0$

(D) $3x + 2y = 0$

8. Na Figura 3, estão representadas, no plano complexo, duas semirretas $\dot{O}A$ e $\dot{O}B$ e uma circunferência de centro C e raio $\overline{BC}$

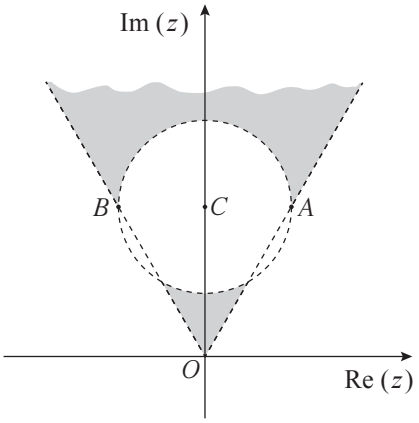


Figura 3

Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- o ponto A é a imagem geométrica do complexo $\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2i$
- o ponto B é a imagem geométrica do complexo $-\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2i$
- o ponto C é a imagem geométrica do complexo $2i$

Considere como $\arg(z)$ a determinação que pertence ao intervalo $[-\pi, \pi[$

Qual das condições seguintes define a região sombreada, excluindo a fronteira?

(A) $|z - 2i| < \frac{2\sqrt{3}}{3} \wedge \frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{3\pi}{4}$

(B) $|z - 2i| < \frac{2\sqrt{3}}{3} \wedge \frac{\pi}{3} < \arg(z) < \frac{2\pi}{3}$

(C) $|z - 2i| > \frac{2\sqrt{3}}{3} \wedge \frac{\pi}{3} < \arg(z) < \frac{2\pi}{3}$

(D) $|z - 2i| > \frac{2\sqrt{3}}{3} \wedge \frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{3\pi}{4}$

Página em branco

GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

1.1. Considere $z = 2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ e $w = \frac{(z-i)^4}{1+zi}$

No plano complexo, seja O a origem do referencial.

Seja A a imagem geométrica do número complexo $\overline{z}$ e seja B a imagem geométrica do número complexo w

Determine a área do triângulo $[AOB]$, sem utilizar a calculadora.

1.2. Seja $\alpha \in]0, \pi[$

Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 - 2\cos\alpha\, z + 1 = 0$

Apresente as soluções, em função de α, na forma trigonométrica.

2. Uma caixa tem seis bolas distinguíveis apenas pela cor: duas azuis e quatro pretas.

2.1. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, uma a uma, sucessivamente e sem reposição, todas as bolas da caixa. À medida que são retiradas da caixa, as bolas são colocadas lado a lado, da esquerda para a direita.

Determine a probabilidade de as duas bolas azuis ficarem uma ao lado da outra.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2.2. Considere a caixa com a sua composição inicial.

Considere agora a experiência aleatória que consiste em retirar dessa caixa, simultaneamente e ao acaso, três bolas.

Seja X a variável aleatória «número de bolas azuis que existem no conjunto das três bolas retiradas».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X

Apresente as probabilidades na forma de fração.

3. Na Figura 4, está representado um pentágono regular $[ABCDE]$

Sabe-se que $\overline{AB} = 1$

Mostre que $\dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{\| \overrightarrow{AD} \|} = 1 - 2\,\text{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$

Nota: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ designa o produto escalar do vetor $\overrightarrow{AB}$ pelo vetor $\overrightarrow{AD}$

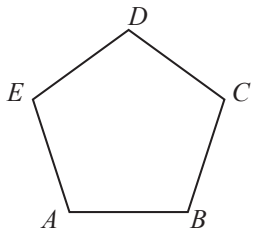


Figura 4

4. Considere as funções f e g, de domínio $]-\infty, 0[$, definidas por

$f(x) = x - 1 + \dfrac{\ln(-x)}{x}$ e $g(x) = -x + f(x)$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico e, caso existam, indique as suas equações.

4.2. Mostre que a condição $f(x) = -e$ tem, pelo menos, uma solução em $]-e, -1[$

4.3. Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

Na sua resposta, deve indicar o(s) intervalo(s) de monotonia e, caso existam, os valores de x para os quais a função g tem extremos relativos.

5. Na Figura 5, estão representados uma circunferência de centro O e raio 2 e os pontos P, Q, R e S

Sabe-se que:

- os pontos P, Q, R e S pertencem à circunferência;
- $[PR]$ é um diâmetro da circunferência;
- $\overline{PQ} = \overline{PS}$
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo QPR
- $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$
- $A(\alpha)$ é a área do quadrilátero $[PQRS]$, em função de α

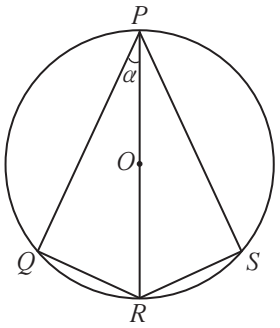


Figura 5

Para um certo número real θ, com $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, tem-se que $\text{tg}\,\theta = 2\sqrt{2}$

Determine o valor exato de $A(\theta)$, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Comece por mostrar que $A(\alpha) = 16\,\text{sen}\,\alpha\,\cos\alpha$

6. Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função f, de domínio $[0,10]$, definida por $f(x) = -e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8$, e dois pontos A e B

Sabe-se que:

- o ponto A é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo das ordenadas;
- o ponto B pertence ao gráfico da função f e tem abcissa positiva;
- a reta AB tem declive -2

Determine a abcissa do ponto B, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

– equacionar o problema;

– reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificados;

– indicar o valor da abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

7. Na Figura 6, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f, de grau 3

Sabe-se que:

- -2 e 3 são os únicos zeros da função f
- a função f tem um extremo relativo em $x = -2$
- h', primeira derivada de uma função h, tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $h'(x) = \dfrac{f(x)}{e^{2x}}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 3$

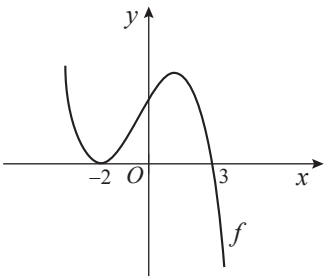


Figura 6

Considere as afirmações seguintes.

I) A função h tem dois extremos relativos.

II) $h''(-2) = 0$

III) $y + 3 = 0$ é uma equação da assíntota do gráfico da função h quando x tende para $+\infty$

Elabore uma composição, na qual indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa.

Na sua resposta, apresente três razões diferentes, uma para cada afirmação.

FIM

Página em branco

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** .....(8 × 5 pontos)..... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1.

1.1. ..... 15 pontos

1.2. ..... 15 pontos

2.

2.1. ..... 10 pontos

2.2. ..... 15 pontos

3. ..... 15 pontos

4.

4.1. ..... 20 pontos

4.2. ..... 10 pontos

4.3. ..... 15 pontos

5. ..... 15 pontos

6. ..... 15 pontos

7. ..... 15 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/2.ª Fase

Critérios de Classificação 12 Páginas

2014

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de escolha múltipla.

As respostas ilegíveis são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Itens de seleção

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Itens de construção

Nos itens de resposta restrita e de resposta extensa, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

É classificada com zero pontos qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto deve ter em conta a organização dos conteúdos e a utilização da linguagem científica adequada.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação devem ser classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentam, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora deve ter em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados, devidamente identificados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação e as desvalorizações a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam a realização de cálculos.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelo programa da disciplina (ver nota 1). O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora gráfica», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta deve ser pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado, que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas devem ser pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não deve ser desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que **não** são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. ..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

As respostas corretas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	C	B	B	D	C	A	B	C
Versão 2	B	C	C	A	B	A	D	D

GRUPO II

1.1. ..... **15 pontos**

Escrever z na forma algébrica ..... 2 pontos

Determinar w na forma algébrica ..... 6 pontos

- Obter $(z-i)^4$ ..... 2 pontos
- Calcular $1+z\,i$ ..... 2 pontos
- Obter w ..... 2 pontos

Escrever $\overline{z}$ na forma algébrica ou escrever $\overline{z}$ na forma trigonométrica ..... 1 ponto

Determinar a área do triângulo $[AOB]$ ..... 6 pontos

- Identificar a base do triângulo $[AOB]$ com $[BO]$ (ou equivalente) 1 ponto
- Referir que a altura do triângulo $[AOB]$ referente a $[BO]$ tem comprimento igual à abcissa do ponto A ..... 3 pontos
- Calcular a área do triângulo $[AOB]$ ..... 2 pontos

1.2. ..... **15 pontos**

Escrever $z=\dfrac{2\cos\alpha\pm\sqrt{(-2\cos\alpha)^2-4}}{2}$ ..... 3 pontos

Obter $z=\dfrac{2\cos\alpha\pm\sqrt{4\cos^2\alpha-4}}{2}$ ..... 1 ponto

Obter $z=\dfrac{2\cos\alpha\pm\sqrt{-4(1-\cos^2\alpha)}}{2}$ ..... 2 pontos

Obter $z=\dfrac{2\cos\alpha\pm\sqrt{-4\,\mathrm{sen}^2\alpha}}{2}$ ..... 2 pontos

Obter $z=\dfrac{2\cos\alpha\pm 2i\,\mathrm{sen}\,\alpha}{2}$ ..... 2 pontos

Referir que $z=\cos\alpha+i\,\mathrm{sen}\,\alpha \vee z=\cos\alpha-i\,\mathrm{sen}\,\alpha$ ..... 1 ponto

Escrever $\cos\alpha+i\,\mathrm{sen}\,\alpha=\mathrm{cis}\,\alpha$ ..... 1 ponto

Escrever $\cos\alpha-i\,\mathrm{sen}\,\alpha=\mathrm{cis}(-\alpha)$ ..... 3 pontos

2.1. ..... **10 pontos**

Indicar o número de casos possíveis ..... 3 pontos

Indicar o número de casos favoráveis (**ver nota 1**) ..... 5 pontos

Obter a probabilidade pedida (**ver nota 2**) ..... 2 pontos

Notas:

1. Se, na resposta, o número de casos favoráveis for superior ao número de casos possíveis ou se o número de casos favoráveis não for coerente com o modelo evidenciado pelo número de casos possíveis, a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos.

2. Se, na resposta, alguma das duas etapas anteriores tiver sido pontuada com zero pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos.

2.2. ..... **15 pontos**

Indicar os valores que a variável X pode tomar ..... 2 pontos

Determinar a probabilidade de cada um dos valores da variável X (**ver nota 1**)
..... (4 + 4 + 4)..... 12 pontos

Apresentar a tabela de distribuição de probabilidades da variável X (**ver nota 2**)
..... 1 ponto

Notas:

1. Se, na resposta, a probabilidade de um dos valores da variável X for obtida como a probabilidade de essa variável não tomar nenhum dos outros valores da variável X, a pontuação a atribuir não deve ser desvalorizada.

2. A pontuação relativa a esta etapa só é atribuída se, à etapa anterior, não tiverem sido atribuídos zero pontos.

3. ..... **15 pontos**

Seja O o centro da circunferência na qual o pentágono pode ser inscrito.

Escrever $\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AD} = \| \overrightarrow{AB} \| \times \| \overrightarrow{AD} \| \times \cos (\overrightarrow{AB} \,\hat{}\, \overrightarrow{AD})$ ..... 1 ponto

Escrever $\dfrac{\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AD}}{\| \overrightarrow{AD} \|} = \| \overrightarrow{AB} \| \times \cos (\overrightarrow{AB} \,\hat{}\, \overrightarrow{AD})$ ..... 1 ponto

Escrever $\dfrac{\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AD}}{\| \overrightarrow{AD} \|} = \cos (\overrightarrow{AB} \,\hat{}\, \overrightarrow{AD})$ ..... 1 ponto

Determinar a amplitude do ângulo BAD ..... 5 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Calcular a amplitude do ângulo COD OU a do ângulo BOC ..... 2 pontos

Calcular a amplitude do ângulo BOD ..... 1 ponto

Obter $B\hat{A}D = \dfrac{2\pi}{5}$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

2.º Processo

Calcular a amplitude do ângulo BAE ..... 2 pontos

Calcular a amplitude do ângulo DAE ..... 2 pontos

Obter $B\hat{A}D = \dfrac{2\pi}{5}$ (ou equivalente) ..... 1 ponto

Escrever $\dfrac{\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AD}}{\| \overrightarrow{AD} \|} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{5} \right)$ ..... 1 ponto

Escrever $\dfrac{\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AD}}{\| \overrightarrow{AD} \|} = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{5} \right) - \text{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{5} \right)$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

Escrever $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{5} \right) = 1 - \text{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{5} \right)$ (ou equivalente) ..... 1 ponto

Concluir o pretendido ..... 2 pontos

4.1. ..... **20 pontos**

Estudar a existência de assíntotas verticais do gráfico da função f ..... 6 pontos

Determinar $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ ..... 4 pontos

Escrever

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(x - 1 + \dfrac{\ln(-x)}{x} \right)$ ..... 1 ponto

Obter o valor de $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\ln(-x)}{x}$ ..... 2 pontos

Obter o valor de $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ ..... 1 ponto

Indicar uma equação da assíntota vertical do gráfico da função f .. 1 ponto

Concluir que, por f ser contínua em $]-\infty, 0[$, o gráfico da função f não admite outras assíntotas verticais ..... 1 ponto

Estudar a existência de assíntota não vertical do gráfico da função f ..... 14 pontos

Determinar $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ ..... 7 pontos

Escrever $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{\ln(-x)}{x^2}\right)$

(ou equivalente) ..... 1 ponto

Determinar o valor de $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{x^2}$ ..... 4 pontos

Escrever

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{x^2}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{\ln(y)}{y^2}\right)$

(**ver nota**) ..... 2 pontos

Escrever

$\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{\ln(y)}{y^2}\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{\ln(y)}{y}\times\frac{1}{y}\right)$ 1 ponto

Obter o valor de $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{x^2}$ ..... 1 ponto

Obter o valor de $m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ ..... 2 pontos

Determinar $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)$ ..... 6 pontos

Escrever $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=$

$=\lim_{x\to-\infty}\left(-1+\frac{\ln(-x)}{x}\right)$ (ou equivalente) ..... 1 ponto

Determinar $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{x}$ ..... 3 pontos

Escrever $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{x}=\lim_{y\to+\infty}\frac{-\ln(y)}{y}$

(**ver nota**)..... 2 pontos

Obter o valor de $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{x}$ ..... 1 ponto

Obter o valor de $b=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)$ ..... 2 pontos

Indicar uma equação da assíntota não vertical do gráfico da função f quando $x\to-\infty$ ..... 1 ponto

Nota – Se, na resposta, for referido que $x\to-\infty$ é equivalente a $-x\to+\infty$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

4.2. ..... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Referir que a função f é contínua em $[-e,-1]$ (**ver notas 1** e **2**) ..... 2 pontos

Calcular $f(-e)$ ..... 2 pontos

Calcular $f(-1)$ ..... 1 ponto

Escrever $f(-e)<-e<f(-1)$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Referir que o pretendido resulta da aplicação do teorema de Bolzano ..... 3 pontos

2.º Processo

Referir que $f(x)=-e$ é equivalente a $f(x)+e=0$ ..... 1 ponto

Referir que, em $[-e,-1]$, a função h, definida por $h(x)=f(x)+e$, é contínua (**ver notas 1** e **2**) ..... 2 pontos

Calcular $h(-e)$ ..... 2 pontos

Calcular $h(-1)$ ..... 1 ponto

Escrever $h(-e)\times h(-1)<0$ (ou equivalente) ..... 1 ponto

Concluir que a função h tem, pelo menos, um zero em $]-e,-1[$ (**ver nota 3**) . 2 pontos

Concluir o pretendido (**ver nota 4**) ..... 1 ponto

Notas:

1. Se, na resposta, for referido que a função é contínua, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

2. Se, na resposta, for referido que a função é contínua em $]-e,-1[$, a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos.

3. Se, na resposta, não for referido que a conclusão resulta da aplicação do teorema de Bolzano, a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos.

4. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a etapa anterior não tiver sido pontuada com zero pontos.

4.3. ..... **15 pontos**

Determinar $g'(x)$ ..... 5 pontos

Calcular $(-1)'$ ..... 1 ponto

Calcular $\left(\frac{\ln(-x)}{x}\right)'$ ..... 3 pontos

Obter $g'(x)$ ..... 1 ponto

Determinar os zeros de g' (**ver nota 1**) ..... 3 pontos

Estudar a função g quanto à monotonia ..... 6 pontos

Concluir que g' é negativa em $]-\infty, -e[$ ..... 1 ponto

Concluir que g' é positiva em $]-e, 0[$ ..... 1 ponto

Referir que g é decrescente em $]-\infty, -e]$ (**ver nota 2**) ..... 2 pontos

Referir que g é crescente em $[-e, 0[$ (**ver nota 3**) ..... 2 pontos

Indicar o valor de x para o qual a função g tem extremo relativo ..... 1 ponto

Notas:

1. Se, na resposta, não forem determinados os zeros de g' mas se for apresentada a conclusão de que g' é negativa em $]-\infty, -e[$ e de que g' é positiva em $]-e, 0[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

2. Se, na resposta, for referido que g é decrescente em $]-\infty, -e[$, em vez de em $]-\infty, -e]$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

3. Se, na resposta, for referido que g é crescente em $]-e, 0[$, em vez de em $[-e, 0[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

5. ..... **15 pontos**

Referir que a área do quadrilátero $[PQRS]$ é igual a $\overline{PQ} \times \overline{QR}$ (ou equivalente) .. 3 pontos

Escrever $\overline{PQ} = 4\cos\alpha$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Escrever $\overline{QR} = 4\operatorname{sen}\alpha$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Concluir que $A(\alpha) = 16\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ ..... 2 pontos

Calcular o valor de $\cos\theta$ ..... 2 pontos

Calcular o valor de $\operatorname{sen}\theta$ ..... 2 pontos

Obter o valor de $A(\theta)$ ..... 2 pontos

6. ..... **15 pontos**

Determinar $f(0)$ ..... 2 pontos

Determinar o declive da reta AB em função da abcissa do ponto B ..... 4 pontos

Equacionar o problema $\left(\frac{f(x)-7}{x} = -2, \text{ com } x > 0\right)$ (ou equivalente)
(**ver nota 1**) ..... 2 pontos

Reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados na calculadora (**ver notas 2** e **3**) ..... 4 pontos

Indicar o valor da abcissa do ponto B ..... 3 pontos

Notas:

1. Se, na resposta, não for referido que $x > 0$, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

2. Se, na resposta, não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

3. Se, na resposta, for apresentado um gráfico que não respeite o domínio da função, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

7. ..... **15 pontos**

Tópicos de resposta:

- justificar que a afirmação I é falsa;
- justificar que a afirmação II é verdadeira;
- justificar que a afirmação III é falsa.

Níveis	Descritores do nível de desempenho	Pontuação
6	Na resposta, são apresentados os três tópicos, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	15
5	Na resposta, são apresentados os três tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	13
4	Na resposta, apenas são apresentados dois dos três tópicos, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	10
3	Na resposta, apenas são apresentados dois dos três tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	8
2	Na resposta, apenas é apresentado um dos três tópicos, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	5
1	Na resposta, apenas é apresentado um dos três tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	3

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** ..... (8 × 5 pontos) ..... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1.

1.1. ..... 15 pontos

1.2. ..... 15 pontos

2.

2.1. ..... 10 pontos

2.2. ..... 15 pontos

3. ..... 15 pontos

4.

4.1. ..... 20 pontos

4.2. ..... 10 pontos

4.3. ..... 15 pontos

5. ..... 15 pontos

6. ..... 15 pontos

7. ..... 15 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

DOCUMENTO DE OPERACIONALIZAÇÃO DA CLASSIFICAÇÃO – DOC

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO 2014

– 2.ª FASE –

DISCIPLINA: MATEMÁTICA A_PROVA 635

Grupo II

Item 1.2. (15 pontos)
Situação 1: Na resposta, é substituído z por $a+bi$, com a e b reais, é resolvida a equação e são apresentadas as soluções, em função de α, na forma trigonométrica.

Classificação proposta: 15 pontos

Adaptação do critério específico

Escrever $(a+bi)^2-2\cos\alpha(a+bi)+1=0$ ..... 1 ponto

Escrever $(a+bi)^2=a^2+2abi-b^2$ ..... 1 ponto

Escrever $2\cos\alpha(a+bi)=2a\cos\alpha+2b\cos\alpha\, i$ ..... 1 ponto

Escrever
$(a+bi)^2-2\cos\alpha(a+bi)+1=(a^2-b^2-2a\cos\alpha+1)+(2ab-2b\cos\alpha)i$ ..... 1 ponto

Escrever $a^2-b^2-2a\cos\alpha+1=0 \ \wedge \ 2ab-2b\cos\alpha=0$ ..... 1 ponto

Concluir que $2ab-2b\cos\alpha=0\Leftrightarrow b=0\vee a=\cos\alpha$ ..... 2 pontos

Referir que $a^2-b^2-2a\cos\alpha+1=0\wedge b=0$ é uma condição impossível ..... 1 ponto

Referir que $\left(a^2-b^2-2a\cos\alpha+1=0\wedge a=\cos\alpha\right)\Leftrightarrow\left(a=\cos\alpha \ \wedge \ b=\pm\operatorname{sen}\alpha\right)$ 2 pontos

Referir que $a+bi=\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha\vee a+bi=\cos\alpha-i\operatorname{sen}\alpha$ ..... 1 ponto

Escrever $\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{cis}\alpha$ ..... 1 ponto

Escrever $\cos\alpha-i\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{cis}(-\alpha)$ ..... 3 pontos

Item 2.1. (10 pontos)
Situação 1: Na resposta, é apresentado o número de casos possíveis, $6!$, é apresentado o número de casos favoráveis, $2!\times4!\times5$, e é obtido o valor da probabilidade pedida.

Classificação proposta: 10 pontos

Situação 2: Na resposta, é apresentado o número de casos possíveis, $6!$, é apresentado o número de casos favoráveis, 5, e é obtido o valor da probabilidade pedida.

Classificação proposta: 6 pontos (3+ 1(CG9)+2)

Situação 3: Na resposta, é apresentado o número de casos possíveis, 15 , é apresentado o número de casos favoráveis, 5, e é obtido o valor da probabilidade $\frac{5}{15}$

Classificação proposta: 9 pontos (3+5+1(CG12))

Situação 4: Na resposta, apenas é apresentado o valor da probabilidade, $\frac{1}{3}$ OU $1-\frac{4}{6}$

Classificação proposta: 0 pontos

Item 4.1. (20 pontos)
Situação 1: Na resposta, apenas é feito o estudo da existência de assíntota horizontal do gráfico da função f

Classificação proposta: 3 pontos (0+ 3(0+3(0+3+0)+0))

Situação 2: Na resposta, é feito o estudo da existência de assíntotas verticais do gráfico da função f e é feito o estudo da existência de assíntota não vertical do gráfico da função f , tendo sido determinado corretamente o valor de $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x-1)\right)$ e tendo sido concluído que a reta de equação $y=x-1$ é assíntota não vertical do gráfico da função f quando x tende para $-\infty$

Classificação proposta: 20 pontos

Item 4.2. (10 pontos)
Situação 1: (1.º Processo) Na resposta, são calculados $f(-e)$ e $f(-1)$, é escrito que $f(-e)<-e<f(-1)$ e é referido que o pretendido resulta da aplicação do teorema de Bolzano.

Classificação proposta: 6 pontos (0+2+1+2+1(CG9))

Item 6. (15 pontos)
Situação 1: Na resposta, são apresentados o valor de $f(0)$ e a equação reduzida da reta *AB* , é equacionado o problema $\left(f(x)=-2x+7\right)$, são reproduzidos os gráficos das funções visualizados na calculadora e é indicado o valor da abcissa do ponto *B*.

Classificação proposta: 15 pontos

Situação 2: Na resposta, são reproduzidos os gráficos das funções visualizados na calculadora, o gráfico da reta definida por $y=-2x+7$ e o gráfico da função f , em $[0,10]$, são representados os pontos *A* e *B* e é indicado o valor da abcissa do ponto *B*.

Classificação proposta: 15 pontos

Exame final nacional de Matemática A **(2014, 2.ª fase)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Usando as leis de DeMorgan, e a probabilidade do acontecimento contrário, temos que:
$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B)$ então

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0{,}48 \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 0{,}48 \Leftrightarrow 1 - 0{,}48 = P(A \cup B) \Leftrightarrow 0{,}52 = P(A \cup B)$$

Como A e B são acontecimentos independentes, temos que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, logo

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Leftrightarrow P(A) \times P(B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

Substituíndo os valores das probabilidade, vem

$$0{,}4 \times P(B) = 0{,}4 + P(B) - 0{,}52 \Leftrightarrow 0{,}4 \times 0{,}52 - 0{,}4 = P(B) - 0{,}4 \times P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}12 = P(B) \times \left(1 - 0{,}4\right) \Leftrightarrow 0{,}12 = P(B) \times 0{,}6 \Leftrightarrow \frac{0{,}12}{0{,}6} = P(B) \Leftrightarrow 0{,}2 = P(B)$$

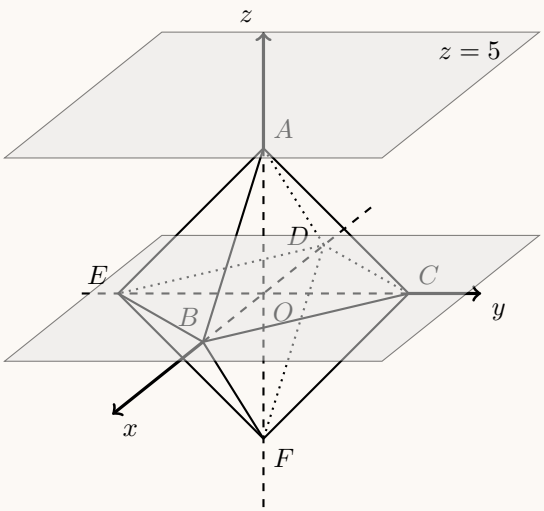
Resposta: **Opção C**

2. Um plano paralelo ao plano de equação $z = 5$, definido com 3 vértice do octaedro só pode ser o plano de equação $z = 0$, ou seja definido por 3 dos 4 pontos B, C, D ou E.

Assim, como para a definição do plano, é irrelevante a ordem dos pontos, existem ${}^6C_3$ planos distintos que podem ser definidos com 3 pontos quaisquer do octaedro; e ${}^4C_3 = 4$ planos definidos com 3 dos 4 vértices B, C, D ou E.

Assim, a probabilidade de escolher, ao acaso, três vértices do octaedro e esses três vértices definirem um plano paralelo ao plano de equação $z = 5$ é

$$\frac{{}^4C_3}{{}^6C_3} = \frac{4}{{}^6C_3}$$



Resposta: **Opção B**

3. Pela fórmula do binómio de Newton, sabemos que todos os termos do desenvolvimento de $\left(\frac{2}{x}+x\right)^{10}$ são da forma

$$^{10}C_k\left(\frac{2}{x}\right)^{10-k}(x)^k = {}^{10}C_k\frac{2^{10-k}(x)^k}{x^{10-k}}\,,\quad k\in\{0,1,...,10\}$$

Ou seja, o termo que não depende da variável x é o termo em que $\frac{2^{10-k}(x)^k}{x^{10-k}} = 2^{10-k}\times\frac{(x)^k}{x^{10-k}} = 2^{10-k}\times 1$, ou seja, em que, $k = 10-k$
Assim, temos que, $k = 10-k \Leftrightarrow 2k = 10 \Leftrightarrow k = 5$

Logo, no termo em causa $k = 5$, ou seja, é o termo

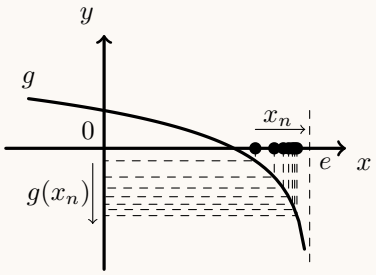
$$^{10}C_5\left(\frac{2}{5}\right)^{10-5}(x)^5 = {}^{10}C_5\left(\frac{2}{5}\right)^5(x)^5 = {}^{10}C_5\frac{2^5\times x^5}{x^5} = {}^{10}C_5\times 2^5 = 8\,064$$

Resposta: **Opção B**

4. Como $\lim x_n = \lim\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = e^-$, então

$$\lim g(x_n) = \lim_{x\to e^-} g(x) = \ln(e-e^-) = \ln(0^+) = -\infty$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (x_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $g(x_n)$, que tendem para $-\infty$, quando o valor de n aumenta.



Resposta: **Opção D**

5. Como a função é contínua no intervalo fechado, temos que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)$

Temos que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = k-3$
E calculando $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)$, vem

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = \quad \left(\begin{array}{c}\text{Se } y = x-\frac{\pi}{2}\text{, então } x = y+\frac{\pi}{2}\\ \\ x\to\frac{\pi}{2}^-\Rightarrow y\to 0^-\end{array}\right)$$

$$= \lim_{y\to 0^-}\frac{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{y} = \quad \left(\cos\left(y+\tfrac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} y\right)$$

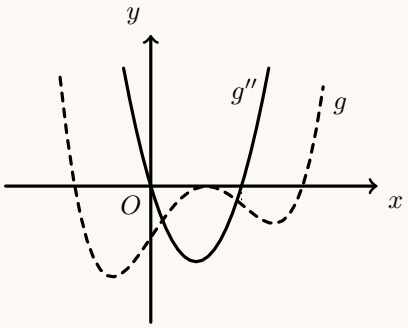
$$= \lim_{y\to 0^-}\frac{-\operatorname{sen} y}{y} = -\underbrace{\lim_{y\to 0^-}\frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = -1$$

Assim, temos que

$$k-3 = -1 \Leftrightarrow k = -1+3 \Leftrightarrow k = 2$$

Resposta: **Opção C**

6. Por observação do gráfico de g'',podemos estudar o sinal da segunda derivada e relacionar com o sentido das concavidades do gráfico de g (designa-se por a, o zero de g'' maior que zero).



x		0		a	
$g''(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	∪	Pt. I.	∩	Pt. I.	∪

O único gráfico compatível com o sentido das concavidades do gráfico identificadas é o gráfico da opção (A).

Resposta: **Opção A**

7. Os planos definidos pelas equações das opções (C) e (D) não contêm o ponto A, porque substituindo as coordenadas do ponto nas equações, obtemos proposições falsas:
(C) $2(1)-3(0)+(3)=0 \Leftrightarrow 2-0+3=0 \Leftrightarrow 5=0$ e (D) $3(1)+2(0)=0 \Leftrightarrow 3+0=0 \Leftrightarrow 3=0$

O plano definido pela equação da opção (A) não é perpendicular ao plano α, porque os respetivos vetores normais $\overrightarrow{v_\alpha}=(3,2,0)$ e $\overrightarrow{v_A}=(3,2,0)$ são colineares, ou seja, os planos são paralelos e não perpendiculares.

O plano definido pela equação da opção (B) é perpendicular ao plano α, porque os respetivos vetores normais $\overrightarrow{v_\alpha}=(3,2,0)$ e $\overrightarrow{v_B}=(2,-3,-1)$ têm um produto escalar nulo, ou seja são perpendiculares, assim, como os planos:

$$\overrightarrow{v_\alpha}.\overrightarrow{v_B}=(3,2,0).(2,-3,-1)=3\times 2+2(-3)+0(-1)=6-6+0=0$$

e este plano contém o ponto A, porque com a substituição das coordenadas deste ponto, obtemos uma proposição verdadeira:

$$2(1)-3(0)-3+1=0 \Leftrightarrow 2-0-3+1=0 \Leftrightarrow 0=0$$

Resposta: **Opção B**

8. Os pontos da zona sombreada pertencem ao exterior da circunferência de centro na imagem geométrica do número complexo $2i$ e raio $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, ou seja, a distância à imagem geométrica de $2i$ é superior a $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, ou seja, os números complexos z verificam a condição $|z-2i|>\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Como os pontos da região sombreada representam números complexos cujo argumento está compreendido entre $\arg\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}+2i\right)$ e $\arg\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}+2i\right)$ vamos determinar estes argumentos.

Seja $\theta_1=\arg\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}+2i\right)$, assim temos que $\text{tg}\,(\theta_1)=\frac{2}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$

Como θ_1 é um ângulo do 1º quadrante, temos que $\theta_1=\frac{\pi}{3}$

Analogamente temos que $\theta_2=\arg\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}+2i\right)=\frac{2\pi}{3}$

E assim, os números complexos z verificam a condição condição anterior, e cumulativamente, a condição $\frac{\pi}{3}<\arg(z)<\frac{2\pi}{3}$

Resposta: **Opção C**

GRUPO II

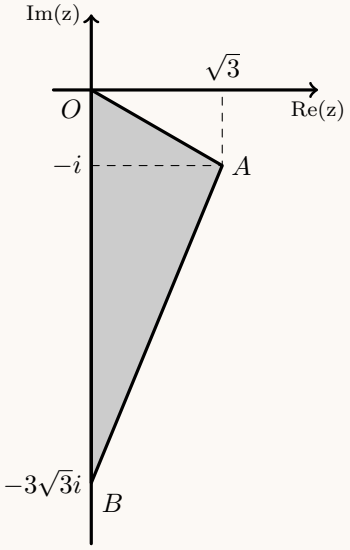
1.

1.1. Escrevendo z na f.a. temos:

$$z = 2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i \times \frac{2}{2} = \sqrt{3} + i$$

Assim temos que

$$\overline{z} = \overline{\sqrt{3} + i} = \sqrt{3} - i$$



E, simplificando a expressão que define w, substituíndo z, vem:

$$w = \frac{(z-i)^4}{1+zi} = \frac{(\sqrt{3}+i-i)^4}{1+(\sqrt{3}+i)i} = \frac{(\sqrt{3})^4}{1+\sqrt{3}i+i^2} = \frac{3^2}{1+\sqrt{3}i-1} =$$

$$= \frac{9}{\sqrt{3}i} = \frac{9\times\sqrt{3}\times i}{(\sqrt{3})^2 i^2} = \frac{9\sqrt{3}i}{3\times(-1)} = -3\sqrt{3}i$$

Assim, podemos fazer a representação do triângulo $[AOB]$, como na figura ao lado.

Por observação da figura, temos que a área do triângulo $[AOB]$ é

$$A_{[AOB]} = \frac{\text{Re}\,(z)\times|\text{Im}\,(w)|}{2} = \frac{\sqrt{3}\times 3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\times 3}{2} = \frac{9}{2}$$

1.2. Considerando a equação na forma $az^2+bz+c=0$, com $a=1$, $b=-2\cos\alpha$ e $c=1$, temos uma equação do segundo grau na variável z.
Assim,

$$z^2-2\cos\alpha z+1=0 \Leftrightarrow z = \frac{-(-2\cos\alpha)\pm\sqrt{(-2\cos\alpha)^2-4(1)(1)}}{2\times 1} \Leftrightarrow z = \frac{2\cos\alpha\pm\sqrt{4\cos^2\alpha-4}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2\cos\alpha\pm\sqrt{4(\cos^2\alpha-1)}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2\cos\alpha\pm\sqrt{-4(1-\cos^2\alpha)}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2\cos\alpha\pm\sqrt{-4(\text{sen}^2\alpha)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2\cos\alpha\pm\left(\sqrt{-4}\times\sqrt{\text{sen}^2\alpha}\right)}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2\cos\alpha\pm\left(\sqrt{-1}\times\sqrt{4}\,\text{sen}\alpha\right)}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2\cos\alpha\pm 2i\,\text{sen}\alpha}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \cos\alpha\pm i\,\text{sen}\alpha \Leftrightarrow z = \cos\alpha + i\,\text{sen}\alpha \vee z = \cos\alpha - i\,\text{sen}\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \cos\alpha + i\,\text{sen}\alpha \vee z = \cos(-\alpha) + i\,\text{sen}(-\alpha) \Leftrightarrow z = \text{cis}\,\alpha \vee z = \text{cis}\,(-\alpha)$$

Resposta: A equação tem duas soluções, que são, na f.t. em função de α: $\text{cis}\,\alpha$ e $\text{cis}\,(-\alpha)$

2.

2.1. Como existem 6 posições de colocação, temos ${}^6C_2$ colocações possíveis para as 2 bolas azuis (como as bolas da mesma cor são indistinguíveis, não se considera relevante a ordem).
Como se pretende que as 2 bolas azuis fiquem em ao lado uma da outra, apenas 5, das colocações anteriores são favoráveis, no sentido que verificam esta restrição (as posições 1-2,2-3,3-4,4-5 e 5-6).
Assim, a probabilidade de as duas bolas azuis ficarem uma ao lado da outra, é

$$\frac{5}{{}^6C_2} = \frac{1}{3}$$

2.2. Como X é o número de bolas azuais retiradas da caixa, a variável X pode tomar os seguintes valores, com as respetivas probabilidades:

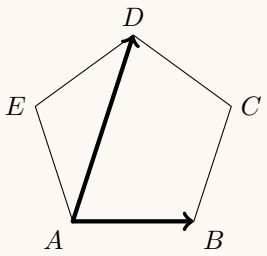
- $X = 0$, se todas as bolas forem pretas (como se retiram 3 bolas e existem 4 pretas, podem ser todas pretas)
  $P(X = 0) = \dfrac{{}^4C_3}{{}^6C_3} = \dfrac{1}{5}$
- $X = 1$, se retirarmos 1 bola azul (de entre as 2 que existem) e 2 bolas pretas (de entre as 4 que existem)
  $P(X = 1) = \dfrac{{}^2C_1 \times {}^4C_2}{{}^6C_3} = \dfrac{3}{5}$
- $X = 2$, se retirarmos as 2 bolas azuis e 1 das 4 pretas que existem
  $P(X = 2) = \dfrac{{}^2C_2 \times {}^4C_1}{{}^6C_3} = \dfrac{1}{5}$

Logo a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

3. Como a soma dos ângulos externos de um polígono é 2π, o ângulo externo em A tem de amplitude $\dfrac{2\pi}{5}$ e assim, podemos calcular a amplitude do ângulo BAE:

$$B\hat{A}E = \pi - \frac{2\pi}{5} = \frac{5\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} = \frac{3\pi}{5}$$



Como $E\hat{A}D = E\hat{D}A$ (porque se opõem a lados iguais), $E\hat{A}D + E\hat{D}A + A\hat{E}D = \pi$ (porque são os ângulos internos de um triângulo) e $A\hat{E}D = B\hat{A}E$, temos que

$$E\hat{A}D + E\hat{A}D + \frac{3\pi}{5} = \pi \Leftrightarrow 2E\hat{A}D = \pi - \frac{3\pi}{5} \Leftrightarrow 2E\hat{A}D = \frac{2\pi}{5} \Leftrightarrow E\hat{A}D = \frac{2\pi}{2\times 5} \Leftrightarrow E\hat{A}D = \frac{\pi}{5}$$

Como $B\hat{A}E = B\hat{A}D + E\hat{A}D \Leftrightarrow B\hat{A}D = B\hat{A}E - E\hat{A}D$ vem que

$$B\hat{A}D = \frac{3\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{5}$$

Assim, vem que,

$$\frac{\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AD}}{\left\|\overrightarrow{AD}\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AD}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,\overrightarrow{AD}\right)}{\left\|\overrightarrow{AD}\right\|} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \cos\left(B\hat{A}D\right) \underset{\overline{AB}=1}{=} \cos\left(B\hat{A}D\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

Como $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$ e $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$ vem que

$$\frac{\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AD}}{\left\|\overrightarrow{AD}\right\|} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

4.

4.1. Como a função f resulta de operações entre funções contínuas, é contínua no seu domínio, e como o seu domínio é $]-\infty,0[$, então a única reta que pode ser assíntota vertical do gráfico de f é a reta de equação $x=0$
Para averiguar se a reta de equação $x=0$ é assíntota do gráfico de f, vamos calcular $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(x-1+\frac{\ln(-x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-} x - \lim_{x\to 0^-} 1 + \lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(-x)}{x} =$$

$$= 0-1+\frac{\ln(-0^-)}{0^-} = -1+\frac{\ln(0^+)}{0^-} = -1+\frac{-\infty}{0^-} = -1+\infty = +\infty$$

Assim, como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$, concluímos que a reta de equação $x=0$ é assíntota vertical do gráfico de f (e que não existe qualquer outra assíntota vertical).

Relativamente à existência de assíntotas não verticais, como o domínio de f é $]-\infty,0[$, só poderão existir quando $x\to-\infty$. Assim, vamos averiguar a existência de uma assíntota de equação $y=mx+b$:

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-1+\frac{\ln(-x)}{x}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x}-\frac{1}{x}+\frac{\ln(-x)}{x^2}\right) =$$

$$= 1+0+\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{x^2} = 1+\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{x^2} = 1-0+\frac{+\infty}{+\infty} \text{ (Indeterminação)}$$

(fazendo $y=-x$, temos $x=-y$ e se $x\to-\infty$, então $y\to+\infty$)

$$m = 1+\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{x^2} = 1+\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(-(-y))}{(-y)^2} = 1+\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(y)}{y^2} = 1+\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y}\times\frac{\ln(y)}{y}\right) =$$

$$= 1+\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\times\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(y)}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 1+\frac{1}{+\infty}\times 0 = 1+0\times 0 = 1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-mx\big) = \lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-1\times x\big) = \lim_{x\to-\infty}\left(x-1+\frac{\ln(-x)}{x}-x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-1+\frac{\ln(-x)}{x}\right) =$$

(fazendo $y=-x$, temos $x=-y$ e se $x\to-\infty$, então $y\to+\infty$)

$$b = -1+\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{x} = -1+\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(-(-y))}{-y} = -1-\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(y)}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = -1-0 = -1$$

Assim temos que a reta de equação $y=x-1$ é uma assíntota do gráfico de f (e não existem outras assíntotas não verticais).

4.2.

Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $]-\infty,0[$, é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em $[-e,-1]$.

Como $-4{,}09 < -e < -2$, ou seja, $f(-e) < -e < f(-1)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c\in]-e,-1[$ tal que $f(c)=-e$, ou seja, que a equação $f(x)=-e$ tem, pelo menos, uma solução em $]-e,-1[$

C.A.

$$f(-e) = -e-1+\frac{\ln(-(-e))}{-e} = -e-1-\frac{\ln(e)}{e} \approx -4{,}09$$

$$f(-1) = -1-1+\frac{\ln(-(-1))}{-1} = -2-\ln(1) = -2-0 = -2$$

$$-e \approx -2{,}72$$

4.3. Começamos por determinar a expressão da derivada da função g, para $x<0$:

$$g'(x)=\Big(-x+f(x)\Big)'=\left(-x+x-1+\frac{\ln(-x)}{x}\right)'=\left(-1+\frac{\ln(-x)}{x}\right)'=-(1)'+\left(\frac{\ln(-x)}{x}\right)'=$$

$$=-0+\frac{(\ln(-x))'x-\ln(-x)(x)'}{x^2}=\frac{\frac{(-x)'}{-x}\times x-\ln(-x)(1)}{x^2}=\frac{\frac{-1}{-x}\times x-\ln(-x)}{x^2}=\frac{1-\ln(-x)}{x^2}$$

Calculando os zeros da derivada da função g, para $x<0$:

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln(-x)}{x^2}=0 \Leftrightarrow 1-\ln(-x)=0 \wedge \underbrace{x^2\neq 0}_{\text{P.V, pq } x<0} \Leftrightarrow 1=\ln(-x) \Leftrightarrow -x=e^1 \Leftrightarrow x=-e$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	$-\infty$		$-e$		0
$1-\ln(-x)$		$-$	0	$+$	n.d.
x^2		$+$	$+$	$+$	n.d.
$g'(x)$		$-$	0	$+$	n.d.
$g(x)$		↘	min	↗	n.d.

Assim, podemos concluir que a função g:

- é decrescente no intervalo $]-\infty,-e]$;
- é crescente no intervalo $[-e,0[$;
- tem um mínimo para $x=-e$

5. Como o lado $[PR]$ do triângulo $[PQR]$ é um diâmetro da circunferência e o vértice Q pertence à mesma circunferência, podemos garantir que o triângulo $[PQR]$ é retângulo, sendo $[PR]$ a hipotenusa.
Como a circunferência tem raio 2, vem que $\overline{PR} = 2 \times 2 = 4$, e assim, recorrendo à definição de seno e cosseno temos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{QR}}{4} \Leftrightarrow \overline{QR} = 4\operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{PQ}}{4} \Leftrightarrow \overline{PQ} = 4\cos\alpha$$

Como os lados $[QR]$ e $[PQ]$ são perpendiculares, temos que:

$$A_{[PQR]} = \frac{\overline{QR} \times \overline{PQ}}{2} = \frac{4\operatorname{sen}\alpha \times 4\cos\alpha}{2} = 8\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

Como o triângulo $[PSR]$ é congruente com o triângulo $[PQR]$ (ambos têm 1 ângulo reto e dois lados iguais), vem que:

$$A(\alpha) = A_{[PQRS]} = A_{[PQR]} + A_{[PSR]} = 2 \times A_{[PQR]} = 2 \times 8\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 16\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

Como $\operatorname{tg}\theta = 2\sqrt{2}$ e $\operatorname{tg}^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$, temos que:

$$\left(2\sqrt{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow 4 \times 2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow 9 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow \cos\theta = \pm\frac{1}{3} \underset{\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[}{\Leftrightarrow} \cos\theta = \frac{1}{3}$$

E, pela fórmula fundamental da trigonometria, vem:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \frac{1}{9} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} \underset{\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[}{\Leftrightarrow} \operatorname{sen}\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Finalmente, recorrendo à fórmula de $A(\alpha)$, deduzida antes, temos que:

$$A(\theta) = 16 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{32\sqrt{2}}{9}$$

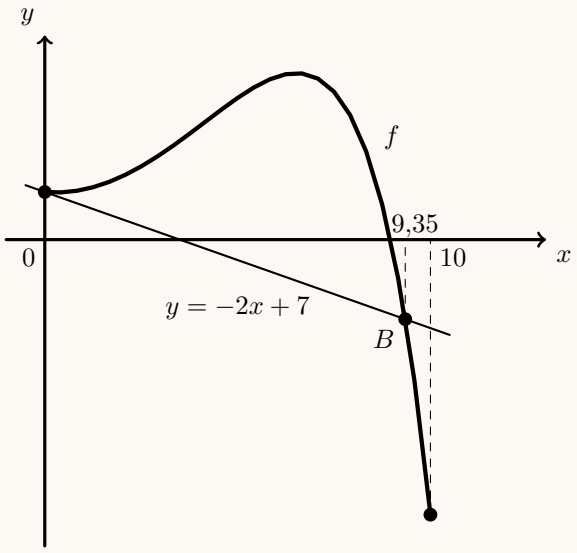
6. Como o ponto A pertence ao eixo das ordenadas, tem abcissa $x = 0$; como também pertence ao gráfico de f, tem ordenada $f(0)$. Assim, calculando a ordenada do ponto A, temos:

$$f(0) = -e^{\frac{0}{2}} + 0^2 + 8 = -e^0 + 0 + 8 = -1 + 8 = 7$$

A reta AB tem declive -2 e passa no ponto A, logo é a reta de equação $y = -2x + 7$, e assim, o ponto B é a interseção da reta AB com o gráfico da função f, pelo que a abcissa do ponto B é a solução da equação

$$f(x) = -2x + 7 \Leftrightarrow -e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8 = -2x + 7$$

Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função f, numa janela coerente com o domínio da função, e a reta AB (reproduzidos na figura ao lado), e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, obtemos um valor aproximado (às centésimas) da abcissa do ponto B, $x_B \approx 9{,}35$



7. Relativamente à afirmação **(I)**, podemos estudar a variação do sinal da função h', derivada de h (recorrendo à observação do gráfico de f), e relacionar com a monotonia de h:

x	$-\infty$		-2		3	$+\infty$
f		$+$	0	$+$	0	$-$
e^{2x}		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$h'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$		↗	0	↗	Máx.	↘

Assim, podemos concluir que a função h é crescente no intervalo $]-\infty,3]$ e decrescente no intervalo $[3,+\infty[$, pelo que tem um único extremo (para $x=3$), ou seja a afirmação **(I)** é **falsa**.

Relativamente à afirmação **(II)**, temos que

$$h''(x)=\left(\frac{f(x)}{e^{2x}}\right)'=\frac{f'(x)e^{2x}-f(x)\left(e^{2x}\right)'}{\left(e^{2x}\right)^2}=\frac{f'(x)e^{2x}-f(x)(2x)'e^{2x}}{\left(e^{2x}\right)\left(e^{2x}\right)}=\frac{e^{2x}\left(f'(x)-f(x)\times 2\right)}{\left(e^{2x}\right)\left(e^{2x}\right)}=\frac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}}$$

Como -2 é um zero de f, temos que $f(-2)=0$, e como f tem um extremo relativo em $x=-2$, então $f'(-2)=0$, e assim, vem que:

$$h''(-2)=\frac{f'(-2)-2f(-2)}{e^{2\times(-2)}}=\frac{0-2\times 0}{e^{-4}}=\frac{0}{e^{-4}}=0$$

Logo, podemos concluir que a afirmação **(II)** é **verdadeira**.

Relativamente à afirmação **(III)**, como $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=3$, podemos concluir que quando x tende para $+\infty$, a reta de equação $y=3$ é uma assíntota do gráfico de h.
Assim, quando x tende para $+\infty$, a reta de equação $y+3=0 \Leftrightarrow y=-3$ não pode ser assíntota do gráfico de h, pelo que podemos afirmar que a afirmação **(III)** é **falsa**.

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/Época Especial

15 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2014

Página em branco

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, e, a seguir, passados a tinta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Deve riscar aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

$\alpha r \ (\alpha - \textit{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;}\ \ r - \textit{raio})$

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: $\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Sector circular:

$\dfrac{\alpha r^2}{2} \ (\alpha - \textit{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;}\ \ r - \textit{raio})$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g \ (r - \textit{raio da base};\ \ g - \textit{geratriz})$

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2 \ \ (r - \textit{raio})$

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3 \ \ (r - \textit{raio})$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \ \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \ \text{ e } \ n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\ e^u$

$(a^u)' = u'\ a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Considere todos os números ímpares com cinco algarismos.

Quantos desses números têm quatro algarismos pares e são superiores a $20\,000$?

(A) 5^4

(B) 5^5

(C) 3×5^4

(D) 4×5^4

2. Considere a linha do triângulo de Pascal em que a soma dos dois primeiros elementos com os dois últimos elementos é igual a 20

Escolhendo, ao acaso, um elemento dessa linha, qual é a probabilidade de ele ser par?

(A) $\frac{1}{5}$

(B) $\frac{2}{5}$

(C) $\frac{3}{5}$

(D) $\frac{4}{5}$

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = \frac{x-1}{e^x - 1}$

Considere a sucessão de números reais (x_n) tal que $x_n = -\frac{1}{n}$

Qual é o valor de $\lim f(x_n)$?

(A) $-\infty$

(B) 0

(C) 1

(D) $+\infty$

4. Na Figura 1, estão representadas, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro O e a reta r

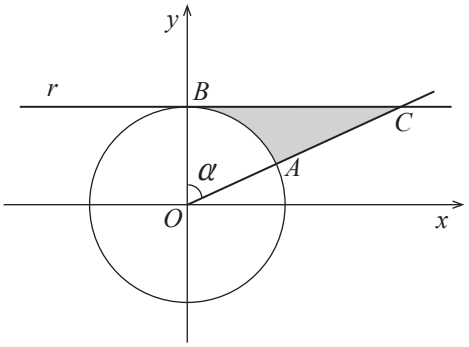


Figura 1

Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem à circunferência;
- o ponto B tem coordenadas $(0, 1)$
- a reta r é tangente à circunferência no ponto B
- o ponto C é o ponto de intersecção da reta r com a semirreta $\dot{O}A$
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Qual das expressões seguintes representa, em função de α, a área da região a sombreado?

(A) $\frac{\operatorname{sen}\alpha - \alpha}{2}$

(B) $\frac{\operatorname{tg}\alpha - \alpha}{2}$

(C) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$

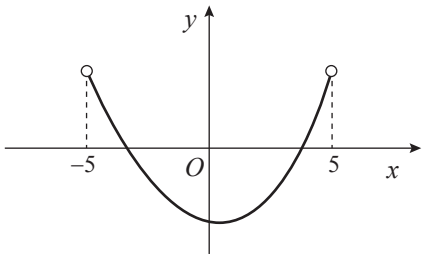
(D) $\frac{\alpha}{2}$

5. Seja f uma função de domínio $]-5, 5[$

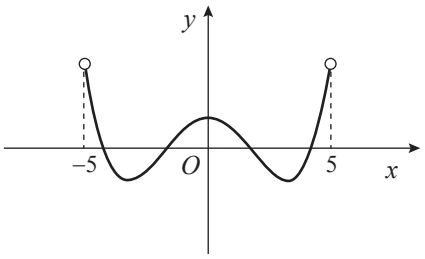
Sabe-se que o gráfico da função f tem exatamente dois pontos de inflexão.

Em qual das opções seguintes pode estar representado o gráfico da função f'', segunda derivada da função f ?

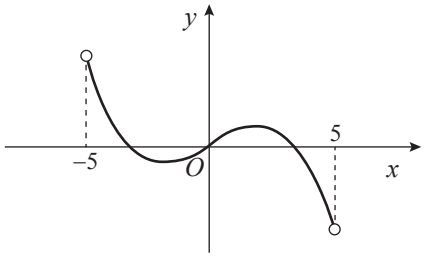
(A)



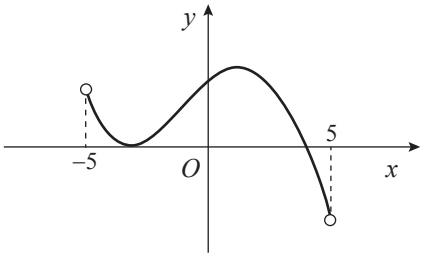
(B)



(C)



(D)



6. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$

A reta de equação $y = 2x - 5$ é assíntota do gráfico da função f

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x-1}{f(x)}$?

(A) 0

(B) 2

(C) 3

(D) $+\infty$

7. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o ponto A, de coordenadas $(2, 0, 3)$, e o plano α, definido por $x - y - 2z = 3$

Seja r a reta perpendicular ao plano α que passa pelo ponto A

Qual das condições seguintes pode definir a reta r?

(A) $x + 2 = z + 1 \ \wedge \ y = 0$

(B) $-x + 5 = y + 3 = \frac{z + 3}{2}$

(C) $\frac{x - 1}{2} = \frac{z + 2}{3} \ \wedge \ y = -1$

(D) $x - 2 = -y = z - 3$

8. Na Figura 2, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de cinco números complexos: w, z_1, z_2, z_3 e z_4

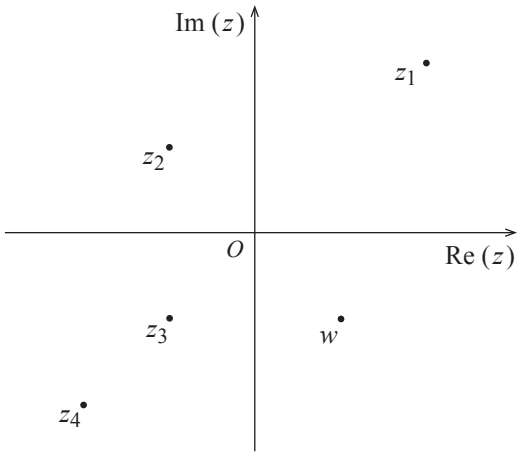


Figura 2

Qual é o número complexo que pode ser igual a $-2iw$?

(A) z_1

(B) z_2

(C) z_3

(D) z_4

GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Resolva os dois itens seguintes sem utilizar a calculadora.

1.1. Considere $z_1 = \frac{1-i}{2i} - i^{-1}$ e $z_2 = \text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Averigue se a imagem geométrica do complexo $(z_1)^4 \times \overline{z_2}$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

1.2. Considere o número complexo $w = \text{sen}(2\alpha) + 2i\cos^2\alpha$, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Escreva w na forma trigonométrica.

2. De uma turma de 12.º ano, sabe-se que:

- 60% dos alunos são rapazes;
- 80% dos alunos estão inscritos no desporto escolar;
- 20% dos rapazes não estão inscritos no desporto escolar.

2.1. Determine a probabilidade de um aluno dessa turma, escolhido ao acaso, ser rapariga, sabendo que está inscrito no desporto escolar.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2.2. Considere agora que essa turma de 12.º ano tem 25 alunos.

Pretende-se escolher, ao acaso, três alunos dessa turma para a representarem num evento do desporto escolar.

Determine a probabilidade de serem escolhidos, pelo menos, dois alunos que estão inscritos no desporto escolar.

Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

3. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- A e $\overline{A}$ são acontecimentos equiprováveis;
- A e B são acontecimentos independentes.

Mostre que $2P(A \cup B) = 1 + P(B)$

4. Na Figura 3, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide $[ABCOD]$

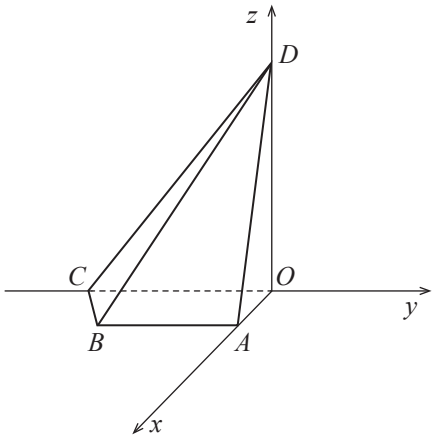


Figura 3

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox
- os pontos A e B têm igual abcissa;
- o ponto B pertence ao plano xOy e tem ordenada -3
- o ponto C pertence ao semieixo negativo Oy
- o ponto D pertence ao semieixo positivo Oz
- a reta AD é definida por $\frac{x-3}{3} = -\frac{z}{5} \wedge y = 0$
- $\| \overrightarrow{CD} \|^2 = 41$

Determine as coordenadas de um vetor normal ao plano que contém a face $[BCD]$, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

5. Considere, para um certo número real k, a função f, de domínio $]-\infty, e[$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} x\,e^{x-2} & \text{se } x \leq 2 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(2-x)}{x^2+x-6}+k & \text{se } 2<x<e \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

5.1. Determine k, de modo que a função f seja contínua em $x=2$

5.2. Estude a função f quanto à existência de assíntota horizontal do seu gráfico e, caso exista, indique uma equação dessa assíntota.

6. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x)=\dfrac{1+\ln x}{x^2}$

6.1. Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Na sua resposta, deve indicar o(s) intervalo(s) de monotonia e, caso existam, os valores de x para os quais a função g tem extremos relativos.

6.2. Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função g, os pontos A e B, e a reta r de equação $y=mx$, com $m<0$

Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem ao gráfico da função g
- a abcissa do ponto A é o zero da função g
- o ponto B é o ponto de intersecção da reta r com o gráfico da função g
- a área do triângulo $[OAB]$ é igual a 1

Determine a abcissa do ponto B, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

– equacionar o problema;

– reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados, devidamente identificados;

– indicar a abcissa do ponto A e a abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

7. Considere uma função f, de domínio $\mathbb{R}$

Sabe-se que:

- a reta de equação $x = 0$ é assíntota do gráfico da função f
- $f(-3) \times f(5) < 0$
- $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ existe e é positivo, para qualquer número real x não nulo;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - 2x \right) = 0$

Considere as afirmações seguintes.

I) O teorema de Bolzano permite garantir, no intervalo $[-3, 5]$, a existência de, pelo menos, um zero da função f

II) O gráfico da função f admite uma assíntota horizontal quando x tende para $-\infty$

III) A função f é crescente em $]0, +\infty[$

Elabore uma composição, na qual indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa.

Na sua resposta, apresente três razões diferentes, uma para cada afirmação.

FIM

Página em branco

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** ..... (8 × 5 pontos) ..... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1.

1.1. ..... 15 pontos

1.2. ..... 15 pontos

2.

2.1. ..... 15 pontos

2.2. ..... 15 pontos

3. ..... 10 pontos

4. ..... 15 pontos

5.

5.1. ..... 15 pontos

5.2. ..... 15 pontos

6.

6.1. ..... 15 pontos

6.2. ..... 15 pontos

7. ..... 15 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/Época Especial

Critérios de Classificação 12 Páginas

2014

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Itens de seleção

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Itens de construção

Nos itens de resposta restrita e de resposta extensa, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

É classificada com zero pontos qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto deve ter em conta a organização dos conteúdos e a utilização da linguagem científica adequada.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação devem ser classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentam, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora deve ter em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados, devidamente identificados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação e as desvalorizações a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam a realização de cálculos.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelo programa da disciplina (ver nota 1). O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora gráfica», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta deve ser pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado, que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas devem ser pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não deve ser desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que **não** são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. ..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

As respostas corretas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
	D	C	D	B	A	C	B	D

GRUPO II

1.1. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $i^{-1} = \frac{1}{i}$ ..... 1 ponto

Obter $\frac{-1-i}{2i}$ (ou equivalente) ..... 1 ponto

Escrever z_1 na forma trigonométrica ..... 4 pontos

- Escrever $-1-i$ na forma trigonométrica ..... 2 pontos
- Escrever $2i$ na forma trigonométrica ..... 1 ponto
- Obter z_1 na forma trigonométrica ..... 1 ponto

Escrever $(z_1)^4$ na forma trigonométrica ..... 2 pontos

Escrever $\overline{z_2}$ na forma trigonométrica ..... 1 ponto

Escrever $(z_1)^4 \times \overline{z_2}$ na forma trigonométrica ..... 2 pontos

Referir que $(z_1)^4 \times \overline{z_2}$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, porque $\arg\left((z_1)^4 \times \overline{z_2}\right) = \frac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ (ou equivalente) ..... 4 pontos

2.º Processo

Escrever $i^{-1} = \frac{1}{i}$ ..... 1 ponto

Obter $\frac{-1-i}{2i}$ (ou equivalente) ..... 1 ponto

Escrever z_1 na forma algébrica ..... 3 pontos

- Indicar a multiplicação de ambos os termos da fração pelo conjugado do denominador (ou equivalente) ..... 1 ponto
- Efetuar a multiplicação no numerador ..... 1 ponto
- Efetuar a multiplicação no denominador ..... 1 ponto

Escrever $(z_1)^4$ na forma algébrica ..... 2 pontos

Escrever $\overline{z_2}$ na forma algébrica ..... 1 ponto

Escrever $(z_1)^4 \times \overline{z_2}$ na forma algébrica ..... 3 pontos

Referir que $(z_1)^4 \times \overline{z_2}$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, porque $\text{Re}\left((z_1)^4 \times \overline{z_2}\right) = \text{Im}\left((z_1)^4 \times \overline{z_2}\right)$ (ou equivalente) ..... 4 pontos

1.2. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $\text{sen}(2\alpha) = 2\text{sen}\alpha\cos\alpha$ ..... 2 pontos

Obter $w = 2\cos\alpha(\text{sen}\,\alpha + i\cos\alpha)$ ..... 3 pontos

Escrever $\text{sen}\,\alpha + i\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ..... (2 + 2) ..... 4 pontos

Escrever $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{cis}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ..... 2 pontos

Referir que $2\cos\alpha > 0$, porque $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ..... 2 pontos

Obter w na forma trigonométrica ..... 2 pontos

2.º Processo

Calcular $|w|$ ..... 7 pontos

- Escrever $|w| = \sqrt{(\text{sen}(2\alpha))^2 + (2\cos^2\alpha)^2}$ ..... 1 ponto
- Obter $|w| = \sqrt{4\cos^2\alpha(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)}$ (ou equivalente) ..... 2 pontos
- Escrever $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ..... 1 ponto
- Referir que $2\cos\alpha > 0$, porque $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ..... 2 pontos
- Escrever $|w| = 2\cos\alpha$ ..... 1 ponto

Indicar um argumento de w ..... 6 pontos

Seja θ um argumento de w

- Escrever $\text{tg}\,\theta = \frac{2\cos^2\alpha}{\text{sen}(2\alpha)}$ ..... 2 pontos
- Obter $\text{tg}\,\theta = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$ ..... 2 pontos
- Escrever $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ..... 2 pontos

Obter w na forma trigonométrica ..... 2 pontos

2.1. ..... **15 pontos**

Seja A o acontecimento «ser rapariga» e seja B o acontecimento «ser aluno inscrito no desporto escolar».

Podem ser admitidas outras designações para os acontecimentos.

Identificar o pedido com $P(A \mid B)$ ..... 2 pontos

Escrever $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (ou equivalente) ..... 1 ponto

Escrever $P(B) = 0{,}8$ ..... 1 ponto

Escrever $P(\overline{A}) = 0{,}6$ ..... 1 ponto

Calcular $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ ..... 4 pontos

Escrever $P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 0{,}2$ (ou equivalente) ..... 2 pontos
Obter $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ ..... 2 pontos

Calcular $P(\overline{A} \cap B)$ ..... 2 pontos

Calcular $P(A \cap B)$ ..... 2 pontos

Obter $P(A \mid B)$ ..... 2 pontos

2.2. ..... **15 pontos**

Calcular o número de alunos inscritos no desporto escolar ..... 2 pontos

Indicar o número de casos possíveis ..... 3 pontos

Indicar o número de casos favoráveis (**ver nota 1**) ..... (4 + 4) ..... 8 pontos

Obter a probabilidade pedida (**ver nota 2**) ..... 2 pontos

Notas:

1. Se, na resposta, o número de casos favoráveis for superior ao número de casos possíveis ou se o número de casos favoráveis não for coerente com o modelo evidenciado pelo número de casos possíveis, a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos.

2. Se, na resposta, alguma das duas etapas anteriores tiver sido pontuada com zero pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos.

3. ..... **10 pontos**

Referir que $P(A) = \dfrac{1}{2}$ OU $P(\overline{A}) = \dfrac{1}{2}$ ..... 2 pontos

Escrever $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (ou equivalente) ..... 1 ponto

Referir que, se A e B são independentes, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ ..... 2 pontos

Escrever $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$ ..... 1 ponto

Escrever $P(A \cup B) = \dfrac{1}{2} + P(B) - \dfrac{P(B)}{2}$ ..... 2 pontos

Escrever $P(A \cup B) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{P(B)}{2}$ ..... 1 ponto

Concluir o pretendido ..... 1 ponto

4. ..... **15 pontos**

Determinar as coordenadas do ponto A ..... 2 pontos

Indicar as coordenadas do ponto B ..... 1 ponto

Determinar as coordenadas do ponto C ..... 3 pontos

Determinar as coordenadas do ponto D ..... 2 pontos

Determinar as coordenadas de um vetor, $\vec{n}$, normal ao plano que contém a face $[BCD]$ ..... 7 pontos

- Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{BC}$ ..... 1 ponto
- Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{CD}$ ..... 1 ponto
- Referir que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ e que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ (ou equivalente) ..... 2 pontos
- Obter as coordenadas de $\vec{n}$ ..... 3 pontos

5.1. ..... **15 pontos**

Referir que a função f é contínua em $x = 2$
sse $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$ ..... 2 pontos

Determinar $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ OU $f(2)$ ..... 2 pontos

Determinar $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ ..... 10 pontos

- Escrever $\lim\limits_{x \to 2^+} \left(\dfrac{\operatorname{sen}(2-x)}{x^2+x-6} + k \right) = k + \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\operatorname{sen}(2-x)}{x^2+x-6}$
  (ou equivalente) ..... 2 pontos
- Escrever $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\operatorname{sen}(2-x)}{x^2+x-6} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\operatorname{sen}(2-x)}{(x-2)(x+3)}$
  (ou equivalente) ..... 2 pontos
- Escrever $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\operatorname{sen}(2-x)}{(x-2)(x+3)} = \lim\limits_{y \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}(-y)}{y\,(y+5)}$
  (ou equivalente) (**ver nota**) ..... 2 pontos
- Escrever $\lim\limits_{y \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}(-y)}{y\,(y+5)} = \lim\limits_{y \to 0^+} \dfrac{-\operatorname{sen} y}{y} \times \lim\limits_{y \to 0^+} \dfrac{1}{y+5}$
  (ou equivalente) ..... 2 pontos
- Obter o valor de $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ ..... 2 pontos

Obter o valor de k ..... 1 ponto

Nota – Se, na resposta, for referido que $x \to 2^+$ é equivalente a $x - 2 \to 0^+$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

5.2. ..... **15 pontos**

Determinar $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ..... 14 pontos

Escrever $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (xe^{x-2})$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim_{x\to-\infty} (xe^{x-2}) = e^{-2} \lim_{x\to-\infty} (xe^{x})$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Escrever $\lim_{x\to-\infty} (xe^{x}) = \lim_{y\to+\infty} (-y\, e^{-y})$ (**ver nota**) ..... 3 pontos

Escrever $\lim_{y\to+\infty} (-y\, e^{-y}) = \lim_{y\to+\infty} \frac{-y}{e^{y}}$ ..... 2 pontos

Escrever $\lim_{y\to+\infty} \frac{-y}{e^{y}} = -\lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^{y}}{y}}$ ..... 3 pontos

Obter o valor de $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ..... 2 pontos

Indicar uma equação da assíntota horizontal do gráfico da função f quando $x \to -\infty$ ..... 1 ponto

Nota – Se, na resposta, for referido que $x \to -\infty$ é equivalente a $-x \to +\infty$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

6.1. ..... **15 pontos**

Determinar $g'(x)$ ..... 4 pontos

Escrever $\left(\frac{1+\ln x}{x^2}\right)' = \frac{(1+\ln x)' x^2 - (1+\ln x)(x^2)'}{x^4}$ ..... 1 ponto

Calcular $(x^2)'$ ..... 1 ponto

Calcular $(1+\ln x)'$ ..... 1 ponto

Obter $g'(x)$ ..... 1 ponto

Determinar o zero de g' (**ver nota 1**) ..... 3 pontos

Estudar a função g quanto à monotonia ..... 6 pontos

Concluir que g' é positiva em $\left]0,\ e^{-\frac{1}{2}}\right[$ ..... 1 ponto

Concluir que g' é negativa em $\left]e^{-\frac{1}{2}},\ +\infty\right[$ ..... 1 ponto

Referir que g é crescente em $\left]0,\ e^{-\frac{1}{2}}\right[$ (**ver nota 2**) ..... 2 pontos

Referir que g é decrescente em $\left]e^{-\frac{1}{2}},\ +\infty\right[$ (**ver nota 3**) ..... 2 pontos

Indicar o valor de x para o qual a função g tem extremo relativo ..... 2 pontos

Notas:

1. Se, na resposta, não for determinado o zero de g' mas se for apresentada a conclusão de que g' é negativa em $\left]e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$, e de que g' é positiva em $\left]0, e^{-\frac{1}{2}}\right[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

2. Se, na resposta, for referido que g é crescente em $\left]0, e^{-\frac{1}{2}}\right]$, em vez de em $\left]0, e^{-\frac{1}{2}}\right[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

3. Se, na resposta, for referido que g é decrescente em $\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$, em vez de em $\left]e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

6.2. ..... **15 pontos**

Indicar a abscissa do ponto A ..... 2 pontos

Escrever uma expressão da área do triângulo $[OAB]$ em função da abcissa do ponto B ..... 5 pontos

- Indicar $\overline{OA}$ ..... 1 ponto
- Escrever a altura do triângulo $[OAB]$, referente a $[OA]$, em função da abcissa do ponto B ..... 3 pontos
- Obter uma expressão da área do triângulo $[OAB]$ ..... 1 ponto

Equacionar o problema ..... 2 pontos

Reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados na calculadora (**ver notas 1** e **2**) ..... 4 pontos

Indicar a abscissa do ponto B ..... 2 pontos

Notas:

1. Se, na resposta, não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

2. Se, na resposta, for apresentado um gráfico que não respeite o domínio da função, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

7. ..... **15 pontos**

Tópicos de resposta:

- justificar que a afirmação I é falsa;
- justificar que a afirmação II é falsa;
- justificar que a afirmação III é verdadeira.

Níveis	Descritores do nível de desempenho	Pontuação
6	Na resposta, são apresentados os três tópicos, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	15
5	Na resposta, são apresentados os três tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	13
4	Na resposta, apenas são apresentados dois dos três tópicos, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	10
3	Na resposta, apenas são apresentados dois dos três tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	8
2	Na resposta, apenas é apresentado um dos três tópicos, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	5
1	Na resposta, apenas é apresentado um dos três tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	3

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.**..... (8 × 5 pontos) ..... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1.

1.1. ..... 15 pontos

1.2. ..... 15 pontos

2.

2.1. ..... 15 pontos

2.2. ..... 15 pontos

3. ..... 10 pontos

4. ..... 15 pontos

5.

5.1. ..... 15 pontos

5.2. ..... 15 pontos

6.

6.1. ..... 15 pontos

6.2. ..... 15 pontos

7. ..... 15 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

Exame final nacional de Matemática A **(2014, Época especial)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Para que os números de cinco algarismos sejam ímpares e tenham 4 algarismo pares, todos os números devem ser pares à exceção do último. Assim, existem 4 hipóteses para selecionar o primeiro algarismo, das dezenas de milhar (nomeadamente 2, 4, 6, e 8, ficando garantido que o número é superior a 20 000), 5 hipóteses para a escolha do segundo algarismo (os anteriores e o zero), tal como para os terceiro e quarto algarismos; e também 5 hipóteses para o quinto algarismo, o das unidades (nomeadamente 1, 3, 5, 7 e 9, ficando garantido que o número é ímpar).
   Assim a quantidade de números ímpares com cinco algarismos que têm quatro algarismos pares e são superiores a 20 000 é:

   $$4 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 4 \times 5^4$$

   Resposta: **Opção D**

2. A linha do triângulo de Pascal em que a soma dos dois primeiros elementos com os dois últimos elementos é igual a 20, como o primeiro e o último números são 1, a soma do segundo com o penúltimo é 18, sendo estes iguais entre si, e por isso iguais a $\frac{18}{2} = 9$.
   Na linha do triângulo de Pascal em que o segundo elemento é 9, os elementos são da forma ${}^9C_k$, pelo que, recorrendo à calculadora, podemos verificar a composição da linha:

   $$1 \ 9 \ 36 \ 84 \ 126 \ 126 \ 84 \ 36 \ 9 \ 1$$

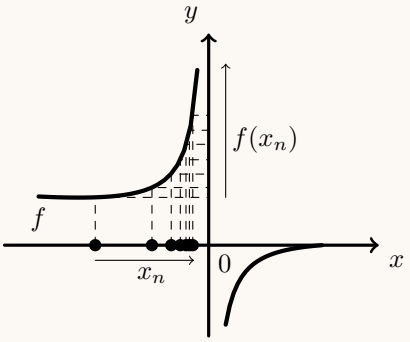
   Assim, escolhendo, ao acaso, um elemento desta linha, a probabilidade de ele ser par é $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

   Resposta: **Opção C**

3. Como $\lim x_n = \lim\left(-\frac{1}{n}\right) = 0^-$, então:

   $$\lim f(x_n) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{0-1}{e^{0^-}-1} = \frac{-1}{1^- - 1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

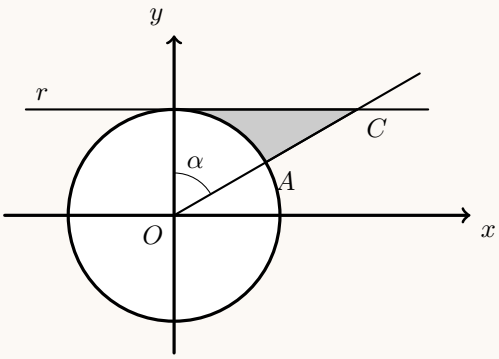
   Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (x_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $f(x_n)$, que tendem para $+\infty$, quando o valor de n aumenta.



   Resposta: **Opção D**

4. O triângulo $[OBC]$ é retângulo em B, $\overline{OB}=1$, e $[BC]$ é o cateto oposto ao ângulo α, temos que:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha=\frac{\overline{BC}}{1} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha=\overline{BC}$$



Logo, vem que:

$$A_{[OBC]}=\frac{\overline{OB}\times\overline{BC}}{2}=\frac{1\times\operatorname{tg}\alpha}{2}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$$

A área do setor circular de centro O, raio 1 e amplitude α (delimitado pelo arco AB) é:

$$A=\frac{\alpha\times 1^2}{2}=\frac{\alpha}{2}$$

Como a área da zona sombreada (A_S) pode ser calculada como a diferença entre as áreas do triângulo $[OBC]$ e o setor circular de centro O e delimitado pelo arco AB, temos que:

$$A_S=A_{[OBC]}-A=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\alpha}{2}$$

Resposta: **Opção B**

5. Para que o gráfico de uma função tenha exatamente dois pontos de inflexão, a segunda derivada deve ter exatamente dois zeros, associados a uma mudança de sinal.
Nas opções (B) e (C) existem 4 e 3 zeros associados a uma mudança de sinal, respetivamente, ou seja, se cada um destes for o gráfico da segunda derivada, o gráfico da função associada terá, respetivamente quatro e três pontos de inflexão.
Na opção (D) existem 2 zeros, mas só um deles está associado a uma mudança de sinal, ou seja, se este for o gráfico da segunda derivada, o gráfico da função associada terá um único ponto de inflexão.
Na opção (A) existem 2 zeros, ambos associados a uma mudança de sinal, pelo que podemos concluir que este é o gráfico da segunda derivada, em que o gráfico da função associada terá exatamente dois pontos de inflexão.

Resposta: **Opção A**

6. Como a reta de equação $y=2x-5$ é assíntota do gráfico de f e $D_f=\mathbb{R}^+$, sabemos que:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2$$

Assim, vem que:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6x-1}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{6x-1}{x}}{\frac{f(x)}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x-1}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{6x}{x}-\frac{1}{x}\right)}{2}=\frac{6-0}{2}=3$$

Resposta: **Opção C**

7. Como a reta r é perpendicular ao plano α, o vetor diretor da reta e o vetor normal do plano são colineares. Assim, qualquer vetor diretor da reta r tem que ser colinear com o vetor $\vec{u} = (1, -1, -2)$
Analisando as condições que definem cada uma das retas, nomeadamente os vetores diretores, temos:

   - A reta definida pela condição da opção (A), que pode ser escrita como $\frac{x-2}{1} = \frac{z+1}{1} \wedge y = 0$, com o objetivo de evidenciar as coordenadas do vetor diretor, que é $\overrightarrow{u_A} = (1,0,1)$ e que não é colinear com o vetor normal do plano α
   - A reta definida pela condição da opção (B), que pode ser escrita como $\frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z+3}{2}$, com o objetivo de evidenciar as coordenadas do vetor diretor, que é $\overrightarrow{u_B} = (-1,1,2)$ e que é colinear com o vetor normal do plano α, porque $\overrightarrow{u_B} = -\vec{u}$
   - A reta definida pela condição da opção (C), que evidencia as coordenadas do vetor diretor, que é $\overrightarrow{u_C} = (2,3,0)$ e não é colinear com o vetor normal do plano α
   - A reta definida pela condição da opção (D), que pode ser escrita como $\frac{x-2}{1} = \frac{y+0}{-1} = \frac{z-3}{1}$, com o objetivo de evidenciar as coordenadas do vetor diretor, que é $\overrightarrow{u_D} = (1, -1,1)$ e que não é colinear com o vetor normal do plano α

   Assim, a reta definida pela condição (B) é a única perpendicular ao plano α e contém o ponto $A(2,0,3)$, e se substituirmos as coordenadas do ponto na condição obtemos uma proposição verdadeira:

$$-2 + 5 = 0 + 3 = \frac{3+3}{2} \Leftrightarrow 3 = 3 = 3$$

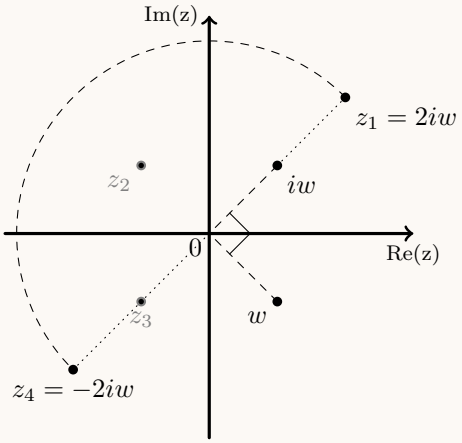
   Resposta: **Opção B**

8. A operação "*multiplicar por i*"corresponde a "fazer uma rotação de centro em O e amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos", pelo que a imagem geométrica de iw está no primeiro quadrante a igual distância da origem do que a imagem geométrica de w

   A operação "*multiplicar por* 2"corresponde a "fazer duplicar a distância à origem, mantendo o argumento do número complexo", pelo que $2iw = z_1$

   Finalmente, a imagem geométrica de um número complexo, e do seu simétrico correspondem a rotações de centro em O e amplitude π radianos, pelo que $-2iw = z_4$

   Resposta: **Opção D**



GRUPO II

1.

1.1. Simplificando a expressão de z_1 vem:

$$z_1 = \frac{1-i}{2i} - i^{-1} = \frac{1-i}{2i} - \frac{1}{i} = \frac{1-i}{2i} - \frac{2}{2i} = \frac{1-i-2}{2i} = \frac{-1-i}{2i} = \frac{(-1-i)i}{(2i)i} =$$

$$= \frac{-i-i^2}{2i^2} = \frac{-i-(-1)}{2(-1)} = \frac{-i+1}{-2} = \frac{i-1}{2} = \frac{-1+i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Escrevendo z_1 na f.t., temos que $z_1 = \rho \operatorname{cis} \theta$, onde:

- $\rho = \left|-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1$; como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta < 0$, θ é um ângulo do 2º quadrante, logo $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

Logo $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$

E assim, pela fórmula de Moivre para a potenciação

$$(z_1)^4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}\right)^4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 \operatorname{cis}\left(4 \times \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{(\sqrt{2})^4}{2^4} \operatorname{cis}(3\pi) = \frac{4}{16} \operatorname{cis}(3\pi) = \frac{1}{4} \operatorname{cis}\pi$$

Como $\overline{z_2} = \overline{\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \operatorname{cis}\left(-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$, fazendo o produto na f.t., vem:

$$(z_1)^4 \times \overline{z_2} = \left(\frac{1}{4}\operatorname{cis}\pi\right) \times \left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{4} \times 1\right) \operatorname{cis}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

Como $\arg\left((z_1)^4 \times \overline{z_2}\right)$ é da forma $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a imagem geométrica de $(z_1)^4 \times \overline{z_2}$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

1.2. Como $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ e $\cos\alpha = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ vem que

$$w = \operatorname{sen}(2\alpha) + 2i\cos^2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + 2i\cos^2\alpha = 2\cos\alpha\left(\operatorname{sen}\alpha + i\cos\alpha\right) =$$

$$= 2\cos\alpha\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = 2\cos\alpha\left(\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)$$

Como $\cos\alpha > 0$, porque $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, a f.t. do número complexo w é $w = 2\cos\alpha\left(\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)$, em que $|w| = 2\cos\alpha$

2.

2.1. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno nesta turma, e os acontecimentos:
R:«O aluno ser rapariga»
D:«O aluno está inscrito no desporto escolar»
Temos que $P\left(\overline{R}\right) = 0{,}6$; $P(D) = 0{,}8$ e $P\left(\overline{D}|\overline{R}\right) = 0{,}2$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P(R) = 1 - P\left(\overline{R}\right) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$
- $P\left(\overline{D}\right) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$
- $P\left(\overline{D} \cap \overline{R}\right) = P\left(\overline{R}\right) \times P\left(\overline{D}|\overline{R}\right) = 0{,}6 \times 0{,}2 = 0{,}12$
- $P\left(R \cap \overline{D}\right) = P\left(\overline{D}\right) - P\left(\overline{D} \cap \overline{R}\right) = 0{,}2 - 0{,}12 = 0{,}08$
- $P\left(R \cap D\right) = P(R) - P\left(R \cap \overline{D}\right) = 0{,}4 - 0{,}08 = 0{,}32$

	R	$\overline{R}$	
D	0,32		0,8
$\overline{D}$	0,08	0,12	0,2
	0,4	0,6	1

Assim, calculando a probabilidade de um aluno dessa turma, escolhido ao acaso, ser rapariga, sabendo que está inscrito no desporto escolar e, escrevendo o resultado na forma de fração irredutível, temos:

$$P\left(R|D\right) = \frac{P(R \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}32}{0{,}8} = \frac{2}{5}$$

2.2. Recorrendo à Regra de LaPlace para determinar a probabilidade, o número de casos possíveis é o número de grupos que podemos formar com 3 alunos escolhidos de entre os 25, como a ordem é irrelevante, corresponde a ${}^{25}C_3$

Como a turma tem 25 alunos, e 80% estão inscritos no desporto escolar, o número de inscritos é de $25 \times 0{,}8 = 20$
Para determinar o número de casos favoráveis, ou seja, o número de grupos em que, pelo menos, 2 alunos (dos 3) estão inscritos no desporto escolar, calculamos a soma do número de grupos relativos a duas situações distintas

- todos (os 3) estão inscritos no desporto escolar, o que corresponde a selecionar 3 de entre os 20 inscritos (sem considerar relevante a ordenação), ou seja ${}^{20}C_3$
- exatamente 2 (dos 3) estão inscritos no desporto escolar e o outro aluno não, que corresponde a selecionar 2 alunos do conjunto dos 20 inscritos e 1 dos 5 não inscritos, ou seja ${}^{20}C_2 \times 5$

Assim, calculando a probabilidade de serem escolhidos, pelo menos, dois alunos que estão inscritos no desporto escolar, e arredondando o resultado às centésimas, temos

$$\frac{{}^{20}C_3 + {}^{20}C_2 \times 5}{{}^{25}C_3} \approx 0{,}91$$

3. Como A e $\overline{A}$ são acontecimentos equiprováveis, temos que $P(A) = P\left(\overline{A}\right)$
Como $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right)$ vem que

$$P(A) = 1 - P(A) \Leftrightarrow P(A) + P(A) = 1 \Leftrightarrow 2P(A) = 1 \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{2}$$

Como A e B são acontecimentos independentes, temos que:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Assim, vem que:

$$\begin{aligned} 2P(A \cup B) &= 2\Big(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\Big) && \text{Teorema: } P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) \\ &= 2P(A) + 2P(B) - 2P(A \cap B) \\ &= 2P(A) + 2P(B) - 2 \times P(A) \times P(B) && \text{Hipótese: } P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \\ &= 2 \times \frac{1}{2} + 2P(B) - 2 \times \frac{1}{2} \times P(B) && \text{Hipótese: } P(A) = \frac{1}{2} \\ &= 1 + 2P(B) - 1 \times P(B) \\ &= 1 + P(B) \end{aligned}$$

Logo, se $P(A) = P\left(\overline{A}\right)$ e $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, então $2P(A \cup B) = 1 + P(B)$ *q.e.d.*

4. Recorrendo às equações da reta AD podemos determinar as coordenadas dos pontos A e D, substituindo, para cada um dos pontos, as coordenadas nulas:
Assim, calculando as coordenadas do ponto D, como $x=0$, vem:

$$\frac{0-3}{3}=-\frac{z}{5} \Leftrightarrow -1=-\frac{z}{5} \Leftrightarrow 5=z$$

Ou seja, temos que $D(0,0,5)$
Procedendo da mesma forma com o ponto A, como $z=0$, vem:

$$\frac{x-3}{3}=-\frac{0}{5} \Leftrightarrow \frac{x-3}{3}=0 \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3$$

Ou seja, temos que $A(3,0,0)$
Assim, podemos como o ponto B e o ponto A têm a mesma abcissa, vem que $B(3,-3,0)$
Para calcular a ordenada do ponto C vamos usar o Teorema de Pitágoras:

$$\left\|\overrightarrow{CD}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{OC}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{OD}\right\|^2 \Leftrightarrow 41=\left\|\overrightarrow{OC}\right\|^2+5^2 \Leftrightarrow 41-25=\left\|\overrightarrow{OC}\right\|^2 \Leftrightarrow 16=\left\|\overrightarrow{OC}\right\|^2 \underset{\left\|\overrightarrow{OC}\right\|>0}{\Leftrightarrow} 4=\left\|\overrightarrow{OC}\right\|$$

Logo temos que $C(0,-4,0)$

Como conhecemos as coordenadas dos pontos B, C e D, vamos determinar as coordenadas de dois vetores, não colineares, do plano BCD:

$$\overrightarrow{CD}=D-C=(0,0,5)-(0,-4,0)=(0,4,5)$$

$$\overrightarrow{CB}=B-C=(3,-3,0)-(0,-4,0)=(3,1,0)$$

Podemos agora determinar as coordenadas de um vetor perpendicular aos dois vetores do plano ($\vec{u}=(a,b,c)$), que é um vetor normal do plano BCD:

$$\begin{cases}(a,b,c).(0,4,5)=0\\(a,b,c).(3,1,0)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4b+5c=0\\3a+b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=-\frac{4b}{5}\\a=-\frac{b}{3}\end{cases}$$

Assim temos que qualquer vetor normal ao plano que contém a face $[BCD]$ é da forma

$$\vec{u}=\left(-\frac{b}{3},b,-\frac{4b}{5}\right), b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Ou seja, concretizando um valor para b, por exemplo, $b=1$, vem $\vec{u}=\left(-\frac{1}{3},1,-\frac{4}{5}\right)$

5.

5.1. Para que a função seja contínua em $x=2$, temos que garantir que $f(2)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Temos que

- $f(2)=2e^{2-2}=2e^0=2\times 1=2$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(xe^{x-2}\right)=2e^{2^--2}=2e^{0^-}=2\times 1=2$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{\operatorname{sen}(2-x)}{x^2+x-6}+k\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{\operatorname{sen}(2-x)}{x^2+x-6}\right)+\lim\limits_{x\to 2^+} k=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{\operatorname{sen}(2-x)}{x^2+x-6}\right)+\lim\limits_{x\to 2^+} k=$

$=\dfrac{\operatorname{sen}(2-2^-)}{(2^-)^2+2^--6}+k=\dfrac{0}{0}+k$ (indeterminação) (fazendo $y=x-2$, temos $x=y+2$ e $-y=2-x$; e se $x\to 2^+$, então $y\to 0^+$)

$=\lim\limits_{y\to 0^+}\left(\dfrac{\operatorname{sen}(-y)}{(y+2)^2+y+2-6}\right)+k=\lim\limits_{y\to 0^+}\left(\dfrac{\operatorname{sen}(-y)}{y^2+4y+4+y-4}\right)+k=\lim\limits_{y\to 0^+}\left(\dfrac{\operatorname{sen}(-y)}{y^2+5y}\right)+k=$

$=\lim\limits_{y\to 0^+}\left(\dfrac{-\operatorname{sen} y}{y(y+5)}\right)+k=\lim\limits_{y\to 0^+}\left(\dfrac{\operatorname{sen} y}{y}\times\dfrac{-1}{y+5}\right)+k=\underbrace{\lim\limits_{y\to 0+}\dfrac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}\times\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{-1}{y+5}+k=$

$=1\times\dfrac{-1}{0^++5}+k=-\dfrac{1}{5}+k$

Como se pretende que a função seja contínua em $x=2$, e verificámos que $f(2)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, podemos determinar o valor de k garantindo que $f(2)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

$$f(2)=\lim_{x\to 2^+} f(x)\ \Leftrightarrow\ 2=-\frac{1}{5}+k\ \Leftrightarrow\ 2+\frac{1}{5}=k\ \Leftrightarrow\ \frac{10}{5}+\frac{1}{5}=k\ \Leftrightarrow\ \frac{11}{5}=k$$

5.2. Como $D_f=]-\infty,e[$, se existir uma assíntota horizontal, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ é constante.

Assim, calculando o limite temos:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^{x-2})=-\infty\times xe^{-\infty-2}=-\infty\times 0$ (indeterminação)

(Seja $y=-x$, temos que se $x\to-\infty$, então $y\to+\infty$)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}(-ye^{-y-2})=\lim\limits_{y\to+\infty}(-y\times e^{-y}\times e^{-2})=\lim\limits_{y\to+\infty}\left(-y\times\dfrac{1}{e^y}\times e^{-2}\right)=$

$=\lim\limits_{y\to+\infty}\left(-\dfrac{y}{e^y}\right)\times\lim\limits_{y\to+\infty} e^{-2}=-\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{y}{e^y}\times e^{-2}=-e^{-2}\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{y}{e^y}=-e^{-2}\lim\limits_{y\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\frac{e^y}{y}}\right)=$

$=-e^{-2}\times\dfrac{1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}}=-e^{-2}\times\dfrac{1}{+\infty}=-e^{-2}\times 0=0$

Logo, como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ e $D_f=]-\infty,e[$, podemos concluir que a única assíntota horizontal do gráfico de f é a reta de equação $y=0$

6.

6.1. Começamos por determinar a expressão da derivada da função g:

$$g'(x)=\left(\frac{1+\ln x}{x^2}\right)'=\frac{(1+\ln x)'(x^2)-(1+\ln x)(x^2)'}{(x^2)^2}=\frac{\left(0+\frac{x'}{x}\right)(x^2)-(1+\ln x)\times 2x}{x^4}=$$

$$=\frac{\frac{1}{x}\times x^2-2x(1+\ln x)}{x^4}=\frac{\frac{x^2}{x}-2x-2x\ln x)}{x^4}\underset{x\neq 0}{=}\frac{x-2x-2x\ln x}{x^4}=$$

$$=\frac{-x-2x\ln x}{x^4}=\frac{x(-1-2\ln x)}{x(x^3)}\underset{x\neq 0}{=}\frac{-1-2\ln x}{x^3}$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função ($\mathbb{R}^+$), vem:

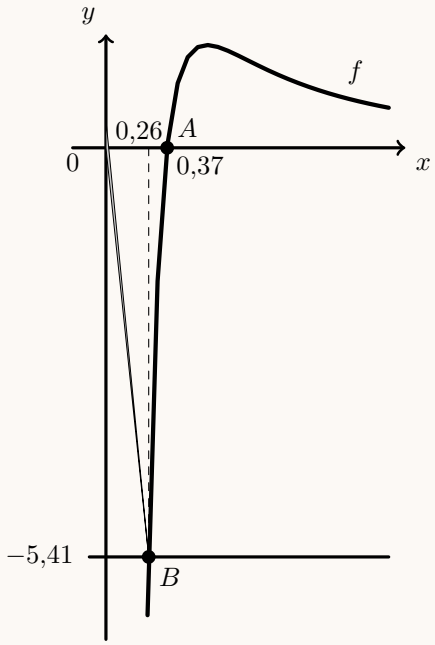
$$\frac{-1-2\ln x}{x^3}=0\Leftrightarrow -1-2\ln x=0\wedge \underbrace{x^3\neq 0}_{\text{PV},x>0}\Leftrightarrow -2\ln x=1\Leftrightarrow \ln x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$g'(x)$	n.d.	$+$	0	$-$
$g(x)$	n.d.	↗	Máx	↘

Assim, como g é crescente no intervalo $\left]0,e^{-\frac{1}{2}}\right]$ e decrescente no intervalo $\left[e^{-\frac{1}{2}},+\infty\right[$ podemos concluir que o único valor de x, para o qual a função g tem um extremo relativo, é $x=e^{-\frac{1}{2}}$ que é um maximizante da função.

6.2. Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função g, numa janela coerente com o domínio da função, (reproduzido na figura ao lado) e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados dos zeros de uma função, obtemos um valor aproximado (às centésimas) da abcissa do ponto A, $x_A\approx 0{,}37$, que é também o comprimento do segmento $[OA]$ que podemos tomar como a base do triângulo $[OAB]$



Como sabemos que o ponto B está sobre uma reta que passa na origem e tem declive negativo, é um ponto do 4º quadrante, com abcissa menor que a abcissa do ponto A, e cuja distância ao eixo das abcissas, ou seja, a abcissa do ponto B é um valor de x tal que $|g(x)|$ é a medida da altura relativa à base $[OA]$, do triângulo $[OAB]$

Desta forma, como a área do triângulo é 1, procuramos um valor de x tal que

$$\frac{|g(x)|\times x_A}{2}=1\Rightarrow |g(x)|\approx\frac{2}{0{,}37}\Leftrightarrow |g(x)|\approx 5{,}41$$

Assim, como o ponto B tem ordenada negativa, traçamos também a reta $y=-5{,}41$, também reproduzida na figura anterior, e recorremos à função da calculadora para determinar valores aproximados (às centésimas) das coordenadas do ponto de interseção dos gráficos de duas funções para determinar a abcissa do ponto B, ou seja $x_B\approx 0{,}26$
Assim, para que a área do triângulo $[OAB]$ seja 1, as abcissas dos pontos A e B, com arredondamento às centésimas, são, respetivamente $x_A\approx 0{,}37$ e $x_B\approx 0{,}26$

7. A afirmação (I) é falsa. Como a reta de equação $x = 0$ é uma assíntota vertical do gráfico de f, a função não é contínua para $x = 0$, logo não é contínua no intervalo $[-3,5]$, pelo que não estão verificadas as condições de aplicação do Teorema de Bolzano.

   A afirmação (II) é falsa. Como $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-2x\big)=0$ podemos afirmar que a reta de equação $y = 2x + 0$ é uma assíntota do gráfico da função f, quando $x \to -\infty$. Assim, quando $x \to -\infty$ o gráfico de f tem uma assíntota que não é horizontal.

   A afirmação (III) é verdadeira. O $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ é a derivada de f. Como a derivada existe e é positiva em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, podemos afirmar que f é crescente em $]-\infty,0]$ e também em $[0,+\infty[$, o que permite confirmar a veracidade desta afirmação.

2015

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/1.ª Fase 15 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2015

VERSÃO 1

Página em branco

Indique de forma legível a versão da prova.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis e, a seguir, passados a tinta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Deve riscar aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – *raio*)

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume do cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \ \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\ e^u$

$(a^u)' = u'\ a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Página em branco

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Dois rapazes e quatro raparigas vão sentar-se num banco corrido com seis lugares.

De quantas maneiras o podem fazer, de modo que fique um rapaz em cada extremidade do banco?

(A) 12 **(B)** 24 **(C)** 48 **(D)** 60

2. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}4$
- $P(\overline{B}) = 0{,}7$
- $P\left(A \cup B\right) = 0{,}5$

Qual é o valor de $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)$?

(A) $0{,}6$ **(B)** $0{,}7$ **(C)** $0{,}8$ **(D)** $0{,}9$

3. Qual das seguintes expressões é, para qualquer número real k, igual a $\log_3\left(\frac{3^k}{9}\right)$?

(A) $\frac{k}{2}$ **(B)** $k-2$ **(C)** $\frac{k}{9}$ **(D)** $k-9$

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$

Considere a sucessão de termo geral $u_n = n^2$

Qual é o valor de $\lim f\left(u_n\right)$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** e **(D)** $+\infty$

5. Na Figura 1, está representado o círculo trigonométrico.

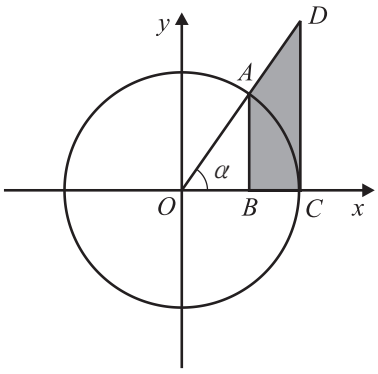


Figura 1

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao primeiro quadrante e à circunferência;
- o ponto B pertence ao eixo Ox
- o ponto C tem coordenadas $(1, 0)$
- o ponto D pertence à semirreta $\dot{O}A$
- os segmentos de reta $[AB]$ e $[DC]$ são paralelos ao eixo Oy

Seja α a amplitude do ângulo COD $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

Qual das expressões seguintes dá a área do quadrilátero $[ABCD]$, representado a sombreado, em função de α ?

(A) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$

(B) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$

(C) $\operatorname{tg}\alpha - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$

(D) $\operatorname{tg}\alpha - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$

6. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição

$$|z + 4 - 4i| = 3 \ \wedge \ \frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$$

No plano complexo, esta condição define uma linha.

Qual é o comprimento dessa linha?

(A) π

(B) 2π

(C) 3π

(D) 4π

7. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n. xOy, um triângulo equilátero $[ABC]$

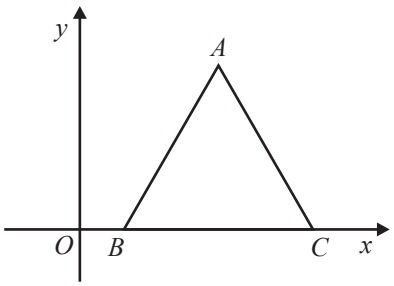


Figura 2

Sabe-se que:

- o ponto A tem ordenada positiva;
- os pontos B e C pertencem ao eixo Ox
- o ponto B tem abcissa 1 e o ponto C tem abcissa maior do que 1

Qual é a equação reduzida da reta AB ?

(A) $y = \sqrt{2}\,x - \sqrt{2}$

(B) $y = \sqrt{2}\,x + \sqrt{2}$

(C) $y = \sqrt{3}\,x + \sqrt{3}$

(D) $y = \sqrt{3}\,x - \sqrt{3}$

8. Seja a um número real.

Considere a sucessão (u_n) definida por

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = -3\,u_n + 2, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Qual é o terceiro termo desta sucessão?

(A) $6a + 4$

(B) $9a - 4$

(C) $6a - 4$

(D) $9a + 4$

Página em branco

GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \dfrac{-2 + 2i^{19}}{\sqrt{2}\,\text{cis}\,\theta}$

Determine os valores de θ pertencentes ao intervalo $]0, 2\pi[$, para os quais z é um número imaginário puro.

Na resolução deste item, não utilize a calculadora.

2. De uma empresa com sede em Coimbra, sabe-se que:

- 60% dos funcionários residem fora de Coimbra;
- os restantes funcionários residem em Coimbra.

2.1. Relativamente aos funcionários dessa empresa, sabe-se ainda que:

- o número de homens é igual ao número de mulheres;
- 30% dos homens residem fora de Coimbra.

Escolhe-se, ao acaso, um funcionário dessa empresa.

Qual é a probabilidade de o funcionário escolhido ser mulher, sabendo que reside em Coimbra?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2.2. Considere agora que a empresa tem oitenta funcionários.

Escolhem-se, ao acaso, três funcionários dessa empresa.

A probabilidade de, entre esses funcionários, haver no máximo dois a residir em Coimbra é igual a

$$\frac{{}^{80}C_3 - {}^{32}C_3}{{}^{80}C_3}$$

Elabore uma composição na qual explique a expressão apresentada.

Na sua resposta:

- enuncie a regra de Laplace;
- explique o número de casos possíveis;
- explique o número de casos favoráveis.

3. Na Figura 3, está representado um recipiente cheio de um líquido viscoso.

Tal como a figura ilustra, dentro do recipiente, presa à sua base, encontra-se uma esfera. Essa esfera está ligada a um ponto P por uma mola esticada.

Num certo instante, a esfera é desprendida da base do recipiente e inicia um movimento vertical. Admita que, t segundos após esse instante, a distância, em centímetros, do centro da esfera ao ponto P é dada por

$$d(t) = 10 + (5 - t)e^{-0,05t} \quad (t \geq 0)$$

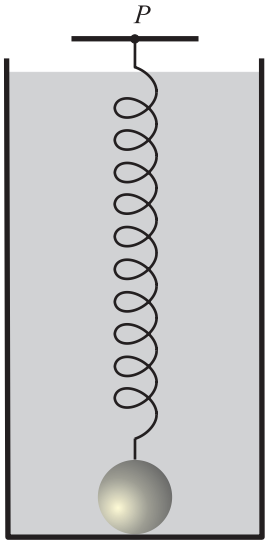


Figura 3

3.1. Sabe-se que a distância do ponto P à base do recipiente é $16\,\text{cm}$

Determine o volume da esfera.

Apresente o resultado em cm^3, arredondado às centésimas.

3.2. Determine o instante em que a distância do centro da esfera ao ponto P é mínima, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - \sqrt{e}}{2x - 1} & \text{se } x < \dfrac{1}{2} \\ (x + 1)\ln x & \text{se } x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Resolva os itens **4.1.** e **4.2.** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4.1. Averigue da existência de assíntotas verticais do gráfico da função f

4.2. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, no intervalo $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

4.3. Mostre que a equação $f(x)=3$ é possível em $]1,e[$ e, utilizando a calculadora gráfica, determine a única solução desta equação, neste intervalo, arredondada às centésimas.

Na sua resposta:

- recorra ao teorema de Bolzano para provar que a equação $f(x)=3$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1,e[$
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- apresente a solução pedida.

5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $A(0,0,2)$ e $B(4,0,0)$

5.1. Considere o plano α de equação $x-2y+z+3=0$

Escreva uma equação do plano que passa no ponto A e é paralelo ao plano α

5.2. Determine uma equação cartesiana que defina a superfície esférica da qual o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro.

5.3. Seja P o ponto pertencente ao plano xOy tal que:

- a sua abcissa é igual à abcissa do ponto B
- a sua ordenada é positiva;
- $B\hat{A}P=\frac{\pi}{3}$

Determine a ordenada do ponto P

6. Sejam f e g as funções, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por

$$f(x)=1-\cos(3x) \quad \text{e} \quad g(x)=\operatorname{sen}(3x)$$

Seja a um número real pertencente ao intervalo $\left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[$

Considere as retas r e s tais que:

- a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a
- a reta s é tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa $a+\frac{\pi}{6}$

Sabe-se que as retas r e s são perpendiculares.

Mostre que $\operatorname{sen}(3a)=-\frac{1}{3}$

FIM

Página em branco

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** ..... (8 × 5 pontos) ..... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1. ..... 15 pontos

2.

2.1. ..... 15 pontos

2.2. ..... 15 pontos

3.

3.1. ..... 10 pontos

3.2. ..... 15 pontos

4.

4.1. ..... 15 pontos

4.2. ..... 15 pontos

4.3. ..... 15 pontos

5.

5.1. ..... 5 pontos

5.2. ..... 10 pontos

5.3. ..... 15 pontos

6. ..... 15 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/1.ª Fase

Critérios de Classificação 18 Páginas

2015

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de escolha múltipla.

As respostas ilegíveis são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Itens de seleção

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

Itens de construção

Nos itens de resposta restrita e de resposta extensa, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

É classificada com zero pontos qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização da linguagem científica adequada.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados, devidamente identificados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam a realização de cálculos.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelo programa da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora gráfica», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado, que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. ..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	C	C	B	A	B	C	D	B
Versão 2	B	B	A	D	C	B	C	C

GRUPO II

1. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Identificar i^{19} com $-i$ ..... 2 pontos

Escrever a expressão $-2+2i^{19}$ na forma algébrica $(-2-2i)$ ..... 1 ponto

Apresentar um argumento de $-2-2i$ ..... 2 pontos

Escrever um argumento de z, em função de θ ..... 2 pontos

Escrever uma condição em θ para que z seja um imaginário puro (**ver nota**)..... 3 pontos

Resolver a condição em ordem a θ ..... 3 pontos

Obter os valores de θ pertencentes ao intervalo $]0,\, 2\pi[$ $\left(\frac{3\pi}{4} \text{ e } \frac{7\pi}{4}\right)$ ..... 2 pontos

Nota – Se for apresentada apenas a condição $\frac{5\pi}{4}-\theta=\frac{\pi}{2}$ ou apenas a condição $\frac{5\pi}{4}-\theta=\frac{\pi}{2} \vee \frac{5\pi}{4}-\theta=\frac{3\pi}{2}$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

Nesta situação, a pontuação máxima a atribuir na etapa seguinte é de 1 ponto.

2.º Processo

Identificar i^{19} com $-i$ ..... 2 pontos

Escrever a expressão $-2+2i^{19}$ na forma algébrica $(-2-2i)$ ..... 1 ponto

Escrever $z=\frac{-2-2i}{\sqrt{2}\cos\theta+i\sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta}$ ..... 1 ponto

Escrever $z=\frac{(-2-2i)(\sqrt{2}\cos\theta-i\sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta)}{(\sqrt{2}\cos\theta+i\sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta)(\sqrt{2}\cos\theta-i\sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta)}$ ..... 1 ponto

Escrever $z=\frac{(-2\sqrt{2}\cos\theta-2\sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta)+(2\sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta-2\sqrt{2}\cos\theta)i}{2}$ ..... 2 pontos

Escrever uma condição em θ para que z seja um imaginário puro ..... 3 pontos

Resolver a condição em ordem a θ ..... 3 pontos

Obter os valores de θ pertencentes ao intervalo $]0, 2\pi[$ $\left(\frac{3\pi}{4}\text{ e }\frac{7\pi}{4}\right)$ ..... 2 pontos

2.1. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, quatro processos.

1.º Processo (através de uma tabela de dupla entrada)

Construir uma tabela de dupla entrada cujas entradas sejam o género (homem, mulher) e o local de residência (Coimbra, fora de Coimbra) ..... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa à informação «60% dos funcionários residem fora de Coimbra» ..... 2 pontos

Preencher as células da tabela relativas à informação «o número de homens é igual ao número de mulheres» ..... 2 pontos

Utilizar a informação «30% dos homens residem fora de Coimbra» para determinar a probabilidade de o funcionário ser homem e residir fora de Coimbra, e colocar o valor obtido na célula respetiva (**ver nota**) ..... 4 pontos

Preencher as restantes células que permitem resolver o problema ..... 3 pontos

Identificar o pedido com $P(M|C)$, sendo M o acontecimento «o funcionário escolhido é mulher» e C o acontecimento «o funcionário escolhido reside em Coimbra» ..... 1 ponto

Escrever $P(M|C)=\frac{P(M\cap C)}{P(C)}$ ..... 1 ponto

Obter $P(M|C)$ $\left(\frac{1}{8}\right)$ ..... 1 ponto

Nota – Se o valor apresentado nesta célula for 0,3, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

2.º Processo (através de um diagrama em árvore)

Nota prévia – Se a resposta apresentar um diagrama em árvore de cuja raiz saem dois ramos relativos ao local de residência (Coimbra, fora de Coimbra), saindo de cada um destes dois novos ramos relativos ao género (homem, mulher), a classificação da resposta deve ser enquadrada no quarto processo.

Construir um diagrama em árvore de cuja raiz saem dois ramos relativos ao género (homem, mulher), saindo de cada um destes dois novos ramos relativos ao local de residência (Coimbra, fora de Coimbra) ..... 2 pontos

Colocar as probabilidades relativas à informação «o número de homens é igual ao número de mulheres» nos respetivos ramos ..... 2 pontos

Colocar a probabilidade relativa à informação «30% dos homens residem fora de Coimbra» no respetivo ramo ..... 2 pontos

Colocar a probabilidade de o funcionário ser homem e residir fora de Coimbra (**ver nota**) ..... 2 pontos

Colocar a probabilidade de o funcionário ser mulher e residir fora de Coimbra ..... 3 pontos

Colocar a probabilidade de o funcionário ser mulher e residir em Coimbra ..... 1 ponto

OU — 4 pontos

Colocar a probabilidade de o funcionário ser homem e residir em Coimbra ..... 1 ponto

Colocar a probabilidade de o funcionário ser mulher e residir em Coimbra ..... 3 pontos

Identificar o pedido com $P(M|C)$, sendo M o acontecimento «o funcionário escolhido é mulher» e C o acontecimento «o funcionário escolhido reside em Coimbra» ..... 1 ponto

Escrever $P(M|C)=\frac{P(M\cap C)}{P(C)}$ ..... 1 ponto

Obter $P(M|C)$ $\left(\frac{1}{8}\right)$ ..... 1 ponto

Nota – A pontuação relativa a esta etapa só é atribuída se à etapa anterior não tiverem sido atribuídos 0 pontos.

3.º Processo (aplicando as propriedades das probabilidades)

Seja M o acontecimento «o funcionário escolhido é mulher» e seja C o acontecimento «o funcionário escolhido reside em Coimbra».

Identificar o pedido com $P(M|C)$ ..... 1 ponto

Reconhecer que $P(\overline{C})=0{,}6$ ..... 1 ponto

Obter $P(C)$ ..... 1 ponto

Reconhecer que $P(M)=0{,}5$ ..... 1 ponto

Reconhecer $P(\overline{M})=0{,}5$ ..... 1 ponto

Reconhecer que $P(\overline{C}|\overline{M})=0{,}3$ ..... 2 pontos

Determinar $P(\overline{C}\cap\overline{M})$ ..... 2 pontos

Determinar $P(C\cup M)$ ..... 2 pontos

Escrever $P(C\cup M)=P(C)+P(M)-P(C\cap M)$ ..... 1 ponto

Determinar $P(C\cap M)$ ..... 1 ponto

Escrever $P(M|C)=\frac{P(M\cap C)}{P(C)}$ ..... 1 ponto

Obter $P(M|C)$ $\left(\frac{1}{8}\right)$ ..... 1 ponto

4.º Processo (aplicando as propriedades das probabilidades)

Seja M o acontecimento «o funcionário escolhido é mulher», seja H o acontecimento «o funcionário escolhido é homem» e seja C o acontecimento «o funcionário escolhido reside em Coimbra».

Identificar o pedido com $P(M|C)$ ..... 1 ponto

Reconhecer que $P(\overline{C}) = 0{,}6$ ou $P(C) = 0{,}4$ ..... 2 pontos

Reconhecer que $P(M) = 0{,}5$ ou $P(H) = 0{,}5$ ..... 2 pontos

Reconhecer que $P(\overline{C}|H) = 0{,}3$ ..... 2 pontos

Determinar $P(\overline{C} \cap H)$ ..... 2 pontos

Escrever $P(H) = P(C \cap H) + P(\overline{C} \cap H)$ ..... 1 ponto

Determinar $P(C \cap H)$ ..... 1 ponto

Escrever $P(C) = P(C \cap H) + P(C \cap M)$ ..... 1 ponto

Determinar $P(C \cap M)$ ..... 1 ponto

OU 4 pontos

Escrever $P(\overline{C}) = P(\overline{C} \cap M) + P(\overline{C} \cap H)$ ..... 1 ponto

Determinar $P(\overline{C} \cap M)$ ..... 1 ponto

Escrever $P(M) = P(C \cap M) + P(\overline{C} \cap M)$ ..... 1 ponto

Determinar $P(C \cap M)$ ..... 1 ponto

Escrever $P(M|C) = \dfrac{P(M \cap C)}{P(C)}$ ..... 1 ponto

Obter $P(M|C)$ $\left(\dfrac{1}{8}\right)$ ..... 1 ponto

2.2. ..... **15 pontos**

Tópicos de resposta:

A) Enunciado da regra de Laplace: quando os casos possíveis são equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis (**ver nota 1**).

B) Explicação do número de casos possíveis: $^{80}C_3$ é o número de maneiras de escolher três funcionários, de entre os 80 funcionários da empresa (**ver nota 2**).

C) Explicação do número de casos favoráveis: «haver, no máximo, dois funcionários a residir em Coimbra» é o contrário de «haver três funcionários a residir em Coimbra». Assim, o número de casos favoráveis é igual à diferença entre o número de maneiras de escolher 3 dos 80 funcionários da empresa $(^{80}C_3)$ e o número de maneiras de escolher 3 dos 32 $(40\%$ de $80)$ funcionários da empresa que residem em Coimbra (**ver nota 3**).

Níveis	Descritores do nível de desempenho	Pontuação
5	Na resposta, são contemplados os três tópicos, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	15
4	Na resposta, são contemplados os três tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica. OU Na resposta, são contemplados apenas os tópicos A e C OU apenas os tópicos B e C, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	12
3	Na resposta, são contemplados apenas os tópicos A e C OU apenas os tópicos B e C, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica. OU Na resposta, são contemplados apenas os tópicos A e B OU apenas o tópico C, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	9
2	Na resposta, são contemplados apenas os tópicos A e B OU apenas o tópico C, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica. OU Na resposta, é contemplado apenas o tópico A OU apenas o tópico B, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	6
1	Na resposta, é contemplado apenas o tópico A OU apenas o tópico B, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	3

Notas:

1. Se não for referida a condição de equiprobabilidade dos casos possíveis, este tópico, a ser contemplado, é considerado «com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica».

2. Se a explicação do número de casos possíveis for, por exemplo, «$^{80}C_3$ é escolher 3 dos 80 funcionários», e não «$^{80}C_3$ é o número de maneiras de escolher 3 dos 80 funcionários», considera-se que este tópico não foi contemplado.

3. Se não for referido que 32 é 40% de 80, este tópico, a ser contemplado, é considerado «com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica».

3.1. ..... **10 pontos**

Determinar $d(0)$ ..... 4 pontos

Determinar o raio da esfera, identificando-o com $16 - d(0)$ (**ver nota 1**) ..... 3 pontos

Obter o volume da esfera com o arredondamento pedido $\left(4{,}19\ \text{cm}^3\right)$ (**ver nota 2**) 3 pontos

Notas:

1. Se o raio for identificado com $\frac{16 - d(0)}{2}$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

2. A pontuação relativa a esta etapa só é atribuída se, à etapa relativa à determinação do raio da esfera, não tiverem sido atribuídos 0 pontos.

3.2. ..... **15 pontos**

Determinar $d'(t)$ (**ver nota 1**) ..... 3 pontos

Aplicar a regra de derivação do produto de duas funções ..... 1 ponto

Escrever $d'(t) = -e^{-0{,}05t} - 0{,}05(5-t)e^{-0{,}05t}$ ..... 2 pontos

Escrever a equação $d'(t) = 0$ ..... 1 ponto

Resolver a equação $d'(t) = 0$ ..... 5 pontos

Escrever $d'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-0{,}05t}\left(-1 - 0{,}05(5-t)\right) = 0$ ..... 2 pontos

Escrever $e^{-0{,}05t}\left(-1 - 0{,}05(5-t)\right) = 0 \Leftrightarrow -1 - 0{,}05(5-t) = 0$ 2 pontos

Concluir que $d'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 25$ ..... 1 ponto

Justificar que a distância do centro da esfera ao ponto P é mínima para $t = 25$ ..... 5 pontos

Apresentar um quadro de sinal de d' e de monotonia de d (**ver nota 2**) ..... 4 pontos

Indicar o valor de t para o qual a função é mínima ..... 1 ponto

OU

Referir que, como a função d tem derivada finita em $\mathbb{R}^+$ e como 25 é o único zero da função d', o mínimo da função d só pode ser atingido para $t = 0$ ou para $t = 25$ ..... 2 pontos

Referir que $d(25) < d(0)$ ..... 3 pontos

Apresentar a resposta (25 segundos) ..... 1 ponto

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a expressão da derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é de 1 ponto.

2. Se, na primeira linha do quadro, a resposta apresentar $-\infty$, em vez de 0, a pontuação máxima a atribuir nesta etapa é de 3 pontos.

4.1. ..... **15 pontos**

Justificar que apenas a reta de equação $x=\frac{1}{2}$ pode ser assíntota vertical do gráfico de f ..... 2 pontos

Determinar $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x)$ ..... 10 pontos

Este limite pode ser determinado por, pelo menos, quatro processos.

1.º Processo

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^x-\sqrt{e}}{2x-1}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^x-\sqrt{e}}{2x-1}=\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^x-e^{\frac{1}{2}}}{2x-1}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^x-e^{\frac{1}{2}}}{2x-1}=\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^x-e^{\frac{1}{2}}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^x-e^{\frac{1}{2}}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^{\frac{1}{2}}\left(e^{x-\frac{1}{2}}-1\right)}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$ ..... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^{\frac{1}{2}}\left(e^{x-\frac{1}{2}}-1\right)}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^{x-\frac{1}{2}}-1}{x-\frac{1}{2}}$ ..... 1 ponto

Escrever $\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^{x-\frac{1}{2}}-1}{x-\frac{1}{2}} \underset{y=x-\frac{1}{2}}{=} \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}\lim\limits_{y\to 0^-} \frac{e^y-1}{y}$

(**ver nota 1**) ..... 2 pontos

Reconhecer o limite notável $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}=1$ ..... 1 ponto

Obter o valor de $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x)$ $\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}\right)$ ..... 1 ponto

2.º Processo

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-\sqrt{e}}{2x-1}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-\sqrt{e}}{2x-1} = \lim\limits_{y=x-\frac{1}{2}\ y\to 0^-} \dfrac{e^{y+\frac{1}{2}}-\sqrt{e}}{2y}$ ..... 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{e^{y+\frac{1}{2}}-\sqrt{e}}{2y} = \lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{e^{y+\frac{1}{2}}-e^{\frac{1}{2}}}{2y}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{e^{y+\frac{1}{2}}-e^{\frac{1}{2}}}{2y} = \lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{e^{\frac{1}{2}}(e^y-1)}{2y}$ ..... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{e^{\frac{1}{2}}(e^y-1)}{2y} = \dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{e^y-1}{y}$ ..... 1 ponto

Reconhecer o limite notável $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$ ..... 1 ponto

Obter o valor de $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x)$ $\left(\dfrac{1}{2}\,e^{\frac{1}{2}}\right)$ ..... 1 ponto

3.º Processo

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-\sqrt{e}}{2x-1}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-\sqrt{e}}{2x-1} = \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-e^{\frac{1}{2}}}{2x-1}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-e^{\frac{1}{2}}}{2x-1} = \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-e^{\frac{1}{2}}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-e^{\frac{1}{2}}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-e^{\frac{1}{2}}}{x-\frac{1}{2}}$ ..... 1 ponto

Referir que $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{e^x-e^{\frac{1}{2}}}{x-\frac{1}{2}} = h'\left(\dfrac{1}{2}\right)$, sendo h a função definida por $h(x)=e^x$ ..... 3 pontos

Referir que $h'\left(\dfrac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}}$ ..... 2 pontos

Concluir que $\dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-e^{\frac{1}{2}}}{x-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}$ ..... 1 ponto

4.º Processo

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-\sqrt{e}}{2x-1}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-\sqrt{e}}{2x-1} = \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-e^{\frac{1}{2}}}{2x-1}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-e^{\frac{1}{2}}}{2x-1} = \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-e^{\frac{1}{2}}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-e^{\frac{1}{2}}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} = \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x\left(1-e^{\frac{1}{2}-x}\right)}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$ ..... 1 ponto

Escrever

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x\left(1-e^{\frac{1}{2}-x}\right)}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} = \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x}{2} \times \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{1-e^{\frac{1}{2}-x}}{x-\frac{1}{2}}$ ..... 2 pontos

Escrever

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x}{2} \times \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{1-e^{\frac{1}{2}-x}}{x-\frac{1}{2}} \underset{y=\frac{1}{2}-x}{=} \dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{1-e^y}{-y}$

(**ver nota 2**) ..... 1 ponto

Escrever $\dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{1-e^y}{-y} = \dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{e^y-1}{y}$ ..... 1 ponto

Reconhecer o limite notável $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$ ..... 1 ponto

Obter o valor de $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) \left(\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}\right)$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = \dfrac{3}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$

OU ..... 2 pontos

Referir que a função f é contínua à direita em $\dfrac{1}{2}$

Concluir que o gráfico da função f não tem qualquer assíntota vertical ..... 1 ponto

Notas:

1. Se for referido que $x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-$ é equivalente a $x-\frac{1}{2}\to 0^-$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

2. Se for referido que $x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-$ é equivalente a $\frac{1}{2}-x\to 0^+$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

4.2. ..... **15 pontos**

Determinar $f'(x)$ em $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ ..... 3 pontos

Aplicar a regra de derivação do produto ..... 1 ponto

Obter $f'(x)$ ..... 2 pontos

Determinar $f''(x)$ em $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ (**ver nota 1**)..... 3 pontos

Determinar o zero de f'' em $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ ..... 2 pontos

Escrever $f''(x) = 0$ ..... 1 ponto

Obter o zero de f'' em $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ ..... 1 ponto

Estudar a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, no intervalo $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ ..... 7 pontos

Apresentar um quadro de sinal de f'' e de sentido da concavidade do gráfico de f (ou equivalente) (**ver nota 2**) ..... 3 pontos

Referir que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ (**ver nota 3**) ..... 1 ponto

Referir que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $]1, +\infty[$ (**ver nota 4**) ..... 1 ponto

Indicar as coordenadas do ponto de inflexão do gráfico da função f em $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ $((1, 0))$ ..... 2 pontos

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a segunda derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é de 1 ponto.

2. Se, na primeira linha do quadro, a resposta apresentar $-\infty$, em vez de $\frac{1}{2}$, a pontuação máxima a atribuir nesta etapa é de 2 pontos.

3. Se for referido que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$, em vez de $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

4. Se for referido que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $[1, +\infty[$, em vez de $]1, +\infty[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

5. Se for utilizada a expressão $\frac{e^x - \sqrt{e}}{2x - 1}$, a pontuação máxima a atribuir à resposta é de 2 pontos (1 ponto pela intenção de calcular $f''(x)$ e 1 ponto pela intenção de resolver a equação $f''(x) = 0$).

4.3. ..... **15 pontos**

Justificar que a equação $f(x) = 3$ tem, pelo menos, uma solução em $]1, e[$ 6 pontos

Referir que a função f é contínua em $[1, e]$ (**ver nota 1**) ..... 1 ponto

Calcular $f(1)$ ..... 1 ponto

Calcular $f(e)$ ..... 1 ponto

Referir que $f(1) < 3 < f(e)$ ..... 2 pontos

Concluir que a equação $f(x) = 3$ tem, pelo menos, uma solução em $]1, e[$ ..... 1 ponto

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora, que permite(m) resolver o problema (**ver notas 2**, **3** e **4**) ..... 4 pontos

Apresentar a solução pedida $(2, 41)$ ..... 5 pontos

Notas:

1. Se for referido que a função é contínua em $]1, e[$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. A mesma pontuação deve ser atribuída se apenas for referido que a função é contínua.

2. Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

3. Se a resposta apresentar, para $x > \frac{1}{2}$, o gráfico da função definida por $y = \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x - 1}$, independentemente de estarem, ou não, desenhados outros gráficos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

4. Se for apresentado apenas o gráfico da função, para $x > \frac{1}{2}$, e não for apresentada a solução pedida, a pontuação a atribuir nesta etapa é 2 pontos.

5.1. ..... **5 pontos**

Escrever a equação $x - 2y + z + d = 0$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Determinar o valor de d ..... 2 pontos

Escrever uma equação do plano pedido $(x - 2y + z - 2 = 0$ ou equivalente$)$ (**ver notas 1** e **2**) ..... 1 ponto

Notas:

1. Se for apresentada apenas a equação $x - 2y + z - 2 = 0$ (ou equivalente), a pontuação a atribuir à resposta é 5 pontos.

2. Se for apresentada apenas uma equação do tipo $x - 2y + z + d = 0$ (ou equivalente), com o valor de d incorreto, a pontuação a atribuir à resposta é 2 pontos.

5.2. ..... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Determinar $\overline{AB}$ ..... 2 pontos

Obter o raio da superfície esférica ..... 1 ponto

Determinar as coordenadas do ponto médio do segmento de reta $[AB]$ ..... 2 pontos

Escrever a condição $(x - 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 5$ (ou equivalente) (**ver notas 1** e **2**) ..... 5 pontos

Notas:

1. A escrita de $\sqrt{5}$, em vez de 5, implica uma desvalorização de 2 pontos nesta etapa.

2. A escrita de $\leq$, em vez de $=$, implica uma desvalorização de 2 pontos nesta etapa.
A escrita de $<$ ou de $>$ ou de $\geq$ implica uma desvalorização de 3 pontos nesta etapa.

2.º Processo

Seja $P(x, y, z)$ um ponto genérico da superfície esférica.

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AP}$ ..... 2 pontos

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{BP}$ ..... 2 pontos

Escrever $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP} = 0$ ..... 3 pontos

Escrever a condição $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2z = 0$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

5.3. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Seja y a ordenada do ponto P

Escrever $P(4, y, 0)$ ..... 2 pontos

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ ..... 1 ponto

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AP}$ ..... 1 ponto

Calcular $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}$ ..... 2 pontos

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{AB}$ ..... 1 ponto

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{AP}$, em função de y ..... 2 pontos

Escrever a equação $20 = \sqrt{20} \times \sqrt{20 + y^2} \times \frac{1}{2}$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

Obter o valor de y $(\sqrt{60})$ ..... 3 pontos

2.º Processo

Justificar que o triângulo $[ABP]$ é retângulo em B ..... 5 pontos

Determinar $\overline{AB}$ $(\sqrt{20})$ ..... 2 pontos

Escrever $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{\overline{BP}}{\sqrt{20}}$ ..... 5 pontos

Escrever $\sqrt{3} = \frac{\overline{BP}}{\sqrt{20}}$ ..... 1 ponto

Obter a ordenada de P $(\sqrt{60})$ ..... 2 pontos

6. ..... **15 pontos**

Determinar $f'(x)$ ..... 2 pontos

Obter $f'(a)$ ..... 1 ponto

Determinar $g'(x)$ ..... 2 pontos

Determinar $g'\left(a+\frac{\pi}{6}\right)$ ..... 4 pontos

Escrever $g'\left(a+\frac{\pi}{6}\right)=3\cos\left(3\left(a+\frac{\pi}{6}\right)\right)$ ..... 1 ponto

Escrever $3\cos\left(3\left(a+\frac{\pi}{6}\right)\right)=3\cos\left(3a+\frac{\pi}{2}\right)$ ..... 1 ponto

Concluir que $3\cos\left(3a+\frac{\pi}{2}\right)=-3\,\text{sen}\,(3a)$ ..... 2 pontos

Escrever $f'(a)=-\dfrac{1}{g'\left(a+\frac{\pi}{6}\right)}$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Concluir que $\text{sen}^2(3a)=\frac{1}{9}$ ..... 1 ponto

Concluir que $\text{sen}\,(3a)=-\frac{1}{3}$ (**ver nota**) ..... 3 pontos

Nota – Se, na resposta, não for referido que $3a\in\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** ..... (8 × 5 pontos) ..... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1. ..... 15 pontos

2.

2.1. ..... 15 pontos

2.2. ..... 15 pontos

3.

3.1. ..... 10 pontos

3.2. ..... 15 pontos

4.

4.1. ..... 15 pontos

4.2. ..... 15 pontos

4.3. ..... 15 pontos

5.

5.1. ..... 5 pontos

5.2. ..... 10 pontos

5.3. ..... 15 pontos

6. ..... 15 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

Exame final nacional de Matemática A **(2015, 1.ª fase)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Escolhendo os lugares das extremidades para os dois rapazes, existem 2 hipóteses correspondentes a uma troca entre os rapazes.
   Existem ainda ${}^4A_4 = P_4 = 4!$ hipóteses para sentar as 4 raparigas nos 4 bancos, ou seja, 4 elementos organizados em 4 posições em que a ordem é relevante.
   Assim, o número de maneiras de sentar os 6 amigos é

   $$2 \times 4! = 48$$

   Resposta: **Opção C**

2. Como $P(B) = 1 - P\left(\overline{B}\right) = P(B) - P(A \cap B)$ vem que $P(B) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

   Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$, temos que:

   $$P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}5 = 0{,}2$$

   Finalmente, pelas leis de De Morgan, temos que:

   $$P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$

   Resposta: **Opção C**

3. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que

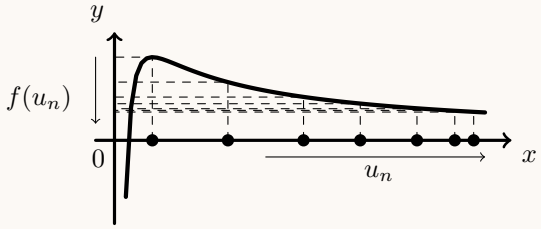
   $$\log_3\left(\frac{3^k}{9}\right) = \log_3(3^k) - \log_3 9 = k \times \log_3 3 - 2 = k - 2$$

   Resposta: **Opção B**

4. Como $\lim u_n = \lim\left(n^2\right) = (+\infty)^2 = +\infty$, então

$$\lim f\left(u_n\right) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{1}{+\infty}+0 = 0+0 = 0$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (u_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $f(u_n)$, que tendem para zero, quando o valor de n aumenta.



Resposta: **Opção A**

5. Como na figura está representado o círculo trigonométrico, temos que:

$$\overline{OC} = 1\,\alpha\,,\ \overline{AB} = \operatorname{sen}\alpha\,,\ \overline{OB} = \cos\alpha \text{ e } \operatorname{tg}\alpha = \overline{CD}$$

Temos que a área do quadrilátero $[ABCD]$ pode ser obtida pela diferença das áreas dos triângulos $[OCD]$ e $[OAB]$,

$$A_{[ABCD]} = A_{[OAB]} - A_{[OCD]} = \frac{\overline{OC}\times\overline{CD}}{2} - \frac{\overline{OB}\times\overline{AB}}{2}$$

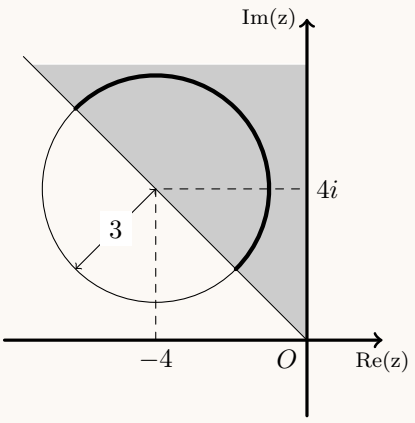
Assim, vem que

$$A_{[ABCD]} = \frac{1\times\operatorname{tg}\alpha}{2} - \frac{\cos\alpha\times\operatorname{sen}\alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} - \frac{\overbrace{2\times\operatorname{sen}\alpha\times\cos\alpha}^{\operatorname{sen}(2\alpha)}}{2\times 2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$$

Resposta: **Opção B**

6. A linha é defina pela conjunção de duas condições, cujas representações gráficas no plano complexo são:

- a circunferência de centro no afixo do número complexo $z = -4+4i$ e raio 3 ($|z+4-4i| = 3 \Leftrightarrow |z-(4+4i)| = 3$)
- a região do 3º quadrante limitada pelo semieixo imaginário positivo e a bissetriz dos quadrantes pares $\left(\frac{\pi}{2} \le \arg(z) \le \frac{3\pi}{2}\right)$



Assim, a linha definida pela conjunção é uma semicircunferência de raio 3, cujo comprimento C é o semiperímetro da circunferência de raio 3:

$$C = \frac{P_\circ}{2} = \frac{2\pi r}{2} = \pi r = 3\pi$$

Resposta: **Opção C**

7. Como o triângulo $[ABC]$ é equilátero, temos que $C\hat{B}A = \frac{180}{3} = 60°$, ou seja a inclinação da reta AB é $60°$, pelo que o declive correspondente, m_{AB}, é

$$m_{AB} = \text{tg}(60°) = \sqrt{3}$$

Assim, temos que a equação reduzida da reta AB é da forma

$$y = \sqrt{3}x + b$$

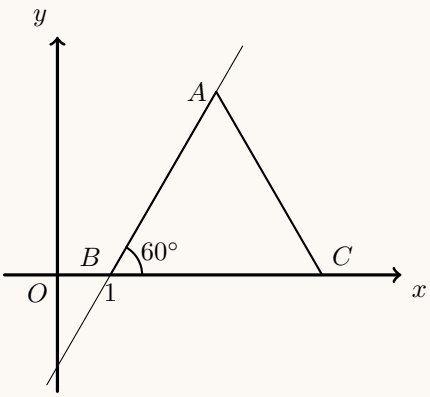
Como o ponto $A(1,0)$ pertence à reta, podemos calcular o valor de b, substituindo as coordenadas do ponto A na condição anterior:

$$0 = \sqrt{3} \times 1 + b \Leftrightarrow -\sqrt{3} = b$$

Pelo que a equação reduzida da reta AB é

$$y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$$

Resposta: **Opção D**



8. Recorrendo à definição da sucessão (u_n) temos que

- $u_1 = a$
- $u_2 = -3u_1 + 2 = -3a + 2$
- $u_3 = -3u_2 + 2 = -3(-3a + 2) + 2 = 9a - 6 + 2 = 9a - 4$

Resposta: **Opção B**

GRUPO II

1. Temos que $i^{19} = i^{4\times4+3} = i^3 = -i$

   Pelo que, escrevendo o numerador da fração que define z na forma trigonométrica vem que

   $$-2 + 2i^{19} = -2 + 2(-i) = -2 - 2i = \rho\, cis\, \alpha$$

   Em que

   - $\rho = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
   - $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{-2}{-2} = 1$; como $\operatorname{sen}\alpha < 0$ e $\cos\alpha < 0$, α é um ângulo do 3º quadrante, logo $\alpha = \pi + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{4}$

   Logo o numerador da fração que define z é $2\sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{5\pi}{4}$, pelo que

   $$z = \frac{-2+2i^{19}}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\theta} = \frac{2\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4}}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\theta} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4} - \theta\right) = 2\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4} - \theta\right)$$

   Como z é um imaginário puro se $\operatorname{Arg}(z) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, vem que

   $$\frac{5\pi}{4} - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\theta = -\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\theta = -\frac{5\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow -\theta = -\frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} - k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

   Como $\theta \in]0,2\pi[$, podemos atribuir a k os valores do conjunto $\{-1,0\}$ e calcular os valores de θ, para os quais z é um imaginário puro:

   - Se $k = -1$, então $\theta = \dfrac{3\pi}{4} - (-1)\times\pi = \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{4\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{4}$
   - Se $k = 0$, então $\theta = \dfrac{3\pi}{4} - 0\times\pi = \dfrac{3\pi}{4}$

2.

   2.1. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um funcionário da empresa, e os acontecimentos:
   M:«O funcionário ser mulher»
   C:«O funcionário residir em Coimbra»
   Temos que $P\left(\overline{C}\right) = 0{,}6$; $P(M) = P\left(\overline{M}\right)$ e $P\left(\overline{C}|\overline{M}\right) = 0{,}3$

   Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

   - $P(C) = 1 - P\left(\overline{C}\right) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$
   - $P(M) = 1 - P\left(\overline{M}\right) \underset{P(M)=P\left(\overline{M}\right)}{\Leftrightarrow} P(M) = 1 - P(M) \Leftrightarrow$
     $\Leftrightarrow P(M) + P(M) = 1 \Leftrightarrow 2P(M) = 1 \Leftrightarrow P(M) = 0{,}5$
   - $P\left(\overline{C}\cap\overline{M}\right) = P\left(\overline{M}\right)\times P\left(\overline{C}|\overline{M}\right) = 0{,}5\times0{,}3 = 0{,}15$
   - $P\left(M\cap\overline{C}\right) = P\left(\overline{C}\right) - P\left(\overline{C}\cap\overline{M}\right) = 0{,}6 - 0{,}15 = 0{,}45$
   - $P\left(M\cap C\right) = P(M) - P\left(\overline{D}\right) = 0{,}5 - 0{,}45 = 0{,}05$

	M	$\overline{M}$	
C	0,05		0,4
$\overline{C}$	0,45	0,15	0,6
	0,5	0,5	1

   Assim, calculando a probabilidade de o funcionário escolhido ser mulher, sabendo que reside em Coimbra, e escrevendo o resultado na forma de fração irredutível, temos

   $$P\left(M|C\right) = \frac{P(M\cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}05}{0{,}4} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

2.2. Determinando a probabilidade com recurso à Regra de LaPlace, calculamos o quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis, sendo os casos possíveis equiprováveis.

O número de casos possíveis é o número de grupos que podemos formar com 3 funcionários escolhidos de entre os 80, como a ordem é irrelevante, corresponde a ${}^{80}C_3$

Como a empresa tem 80 funcionários, e 60% residem fora de Coimbra, então 40% residem em Coimbra, ou seja, $80 \times 0{,}4 = 32$ funcionários residem em Coimbra.
Assim, se ao número total de grupos de 3 funcionários (${}^{80}C_3$) subtrairmos o número de grupos formados por 3 funcionários que residem em Coimbra, escolhendo grupos de 3, de entre os 32 residentes em Coimbra, (${}^{32}C_3$), obtemos o número de grupos de 3 funcionários em que pelo menos um vive fora de Coimbra, ou seja, o número de grupos de 3 funcionários em que, no máximo 2 residem em Coimbra.

Assim, recorrendo à Regra de Laplace, a probabilidade de escolher, ao caso, 3 funcionários da empresa, e entre esses funcionários, haver no máximo dois a residir em Coimbra é igual a $\frac{{}^{80}C_3 - {}^{32}C_3}{{}^{80}C_3}$

3.

3.1. A distância do centro da esfera ao ponto P, no momento em que se inicia o movimento, em centímetros, é

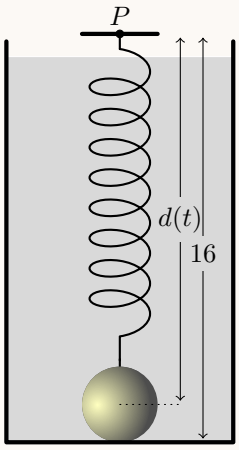
$$d(0) = 10 + (5-0)e^{-0{,}05\times 0} = 10 + (5)e^0 = 10 + 5 \times 1 = 15$$

Como, , no momento em que se inicia o movimento, o ponto da esfera mais afastado do ponto P está a 16 cm (do ponto P), o raio da esfera, em centímetros, é

$$r = 16 - d(0) = 16 - 15 = 1$$

Pelo que, calculando o volume da esfera em cm^3, e arredondado o resultado às centésimas, temos

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times 1^3 = \frac{4\pi}{3} \approx 4{,}19$$



3.2. Para determinar o instante em que a distância é mínima, começamos por determinar a expressão da derivada da função d:

$$d'(t) = \left(10 + (5-t)e^{-0,05t}\right)' = (10)' + (5-t)' \times e^{-0,05t} + (5-t) \times (e^{-0,05t})' =$$

$$= 0 + (-1)e^{-0,05t} + (5-t) \times (-0,05t)'e^{-0,05t} = -e^{-0,05t} + (5-t) \times (-0,05e^{-0,05t}) =$$

$$= -e^{-0,05t} - 0,25e^{-0,05t} + 0,05te^{-0,05t} = e^{-0,05t}(-1 - 0,25 + 0,05t) = e^{-0,05t}(-1,25 + 0,05t)$$

Calculando os zeros da função derivada, com $t \geq 0$ vem:

$$d'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-0,05t}(-1,25 + 0,05t) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-0,05t} = 0}_{\text{Eq.Imp.}} \vee -1,25 + 0,05t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,05t = 1,25 \Leftrightarrow t = \frac{1,25}{0,05} \Leftrightarrow t = 25$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

t	0		25	$+\infty$
$d'(t)$	$-$	$-$	0	$+$
$d(t)$	15	↘	min	↗

Assim, como a função d é decrescente no intervalo $]0,25]$ e crescente no intervalo $[25, +\infty[$ podemos concluir que a distância do centro da esfera ao ponto P é mínima, quando $t = 25$, ou seja 25 segundos após se iniciar o movimento.

4.

4.1. Como f é uma função contínua em $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ (porque ambos os ramos resultam de operações entre funções nos respetivos domínios em que estão definidos), então $x = \frac{1}{2}$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f

Para averiguar se a reta de equação $x = \frac{1}{2}$ é assíntota do gráfico de f, vamos calcular $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x)$:

- $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} \left((x+1)\ln x\right) = \left(\frac{1}{2} + 1\right) \ln \frac{1}{2} = \frac{3}{2}(\ln 1 - \ln 2) = -\frac{3\ln 2}{2}$
- $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1} = \frac{e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2}}}{2\left(\frac{1}{2}\right) - 1} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0}$ (indeterminação)

  (fazendo $y = x - \frac{1}{2}$, temos $x = y + \frac{1}{2}$; e se $x \to \frac{1}{2}^-$, então $y \to 0^-$)

  $$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)} = \lim_{y \to 0^-} \frac{e^{y+\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2}}}{2(y)} = \lim_{y \to 0^-} \frac{e^y \times e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2}}}{2y} =$$

  $$= \lim_{y \to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{2}}(e^y - 1)}{2y} = \lim_{y \to 0^-} \left(\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \times \frac{e^y - 1}{y}\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \underbrace{\lim_{y \to 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{e}}{2}$$

Assim, como $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x)$, são ambos números reais, concluímos que a reta de equação $x = \frac{1}{2}$ não é assíntota vertical do gráfico de f (e que não existe qualquer outra assíntota vertical).

4.2. Para determinar f'' em $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$, começamos por determinar f' em $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$:

$$f'(x)=\big((x+1)\ln x\big)'=(x+1)'\ln x+(x+1)(\ln x)'=(1+0)(\ln x)+(x+1)\left(\frac{1}{x}\right)=\ln x+\frac{x+1}{x}$$

Assim, vem que

$$f''(x)=(f'(x))'=\left(\ln x+\frac{x+1}{x}\right)'=\left(\ln x+\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right)'=\left(\ln x+1+\frac{1}{x}\right)'=(\ln x)'+(1)'+\left(\frac{1}{x}\right)'=$$

$$=\frac{1}{x}+0+\frac{(1)'(x)-1\times(x)'}{x^2}=\frac{1}{x}+\frac{0-1\times 1}{x^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$$

Para determinar o sentido das concavidades em $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$, vamos estudar o sinal de f'' em $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$:

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{x-1}{x^2}=0\Leftrightarrow x-1=0\wedge\underbrace{x^2\neq 0}_{\text{P.V, pq.}x>\frac{1}{2}}\Leftrightarrow x=1$$

Assim, estudando a variação de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f, vem:

x	$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$
x^2		$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	n.d.	$-$	0	$+$
$f(x)$	n.d.	$\cap$	Pt. I.	$\cup$

Calculando a ordenada do ponto de inflexão, temos:

$$f(1)=(1+1)\ln 1=2\times 0=0$$

Logo, podemos concluir que o gráfico de f:

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left]\frac{1}{2},1\right[$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]1,+\infty[$
- tem um único ponto de inflexão de coordenadas (1,0)

4.3. Como, no intervalo $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas é uma função contínua neste intervalo, e, por isso, também é contínua em $[1, e]$, porque $[1, e] \subset \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

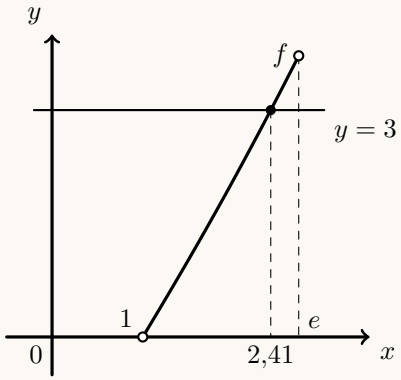
Como $1 < 3 < e + 1$, ou seja, $f(1) < 3 < f(e)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]1, e[$ tal que $f(c) = 3$, ou seja, que a equação $f(x) = 3$ tem, pelo menos, uma solução em $]1, e[$, ou seja, a equação $f(x) = 3$ é possível em $]1, e[$

C.A.

$f(1) = (1 + 1) \ln 1 = 2 \times 0 = 0$

$f(e) = (e + 1) \ln e = (e + 1) \times 1 = e + 1 \approx 3{,}72$

Desta forma, visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função f, numa janela compatível com o intervalo $]1, e[$, e a reta $y = 3$ (reproduzidos na figura ao lado), podemos observar que a equação $f(x) = 3$ tem uma única solução no intervalo dado.



Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, obtemos um valor aproximado da abcissa do ponto de interseção dos dois gráficos, ou seja, a solução da equação $f(x) = 3$, cujo valor numérico, aproximado às centésimas, é 2,41

5.

5.1. Pela observação da equação do plano α, temos que um vetor normal é $\vec{u} = (1, -2, 1)$
Assim, um plano paralelo ao plano α, pode ser definido à custa de um qualquer vetor colinear com $\vec{u}$, e em particular, à custa do mesmo vetor, pelo que uma equação de um plano paralelo a α é

$$x - 2y + z + d = 0, \ (d \in \mathbb{R})$$

Como se pretende que o plano contenha o ponto $A(0,0,2)$, substituindo as coordenadas do ponto A na expressão anterior, vem

$$0 - 2(0) + 2 + d = 0 \Leftrightarrow 2 = d \Leftrightarrow d = -2$$

pelo que uma equação do plano que passa no ponto A e é paralelo ao plano α, é

$$x - 2y + z - 2 = 0$$

5.2. O raio r, da superfície esférica da qual o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro, é igual a metade da distância entre os pontos A e B. Calculado a distância e depois o raio, temos

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-0)^2 + (0-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{16 + 0 + 4} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{2^2 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

$$r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

O centro da superfície esférica é ponto médio do diâmetro, ou seja

$$M_{[AB]} = \left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (2,0,1)$$

pelo que, uma equação cartesiana da superfície esférica da qual o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro, é

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5$$

5.3. Como o ponto B tem de coordenadas $B(4,0,0)$, então de acordo com as indicações do enunciado, as coordenadas do ponto P, são $(4,b,0), b \in \mathbb{R}^+$ (abcissa 4 porque tem abcissa igual ao ponto B, e cota zero porque pertence ao eixo xOy).
Pelo que,

- $\overrightarrow{AB} = B - A = (4,0,0) - (0,0,2) = (4,0,-2)$ e

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 0 + 4} = \sqrt{20}$$

- $\overrightarrow{AP} = P - A = (4,b,0) - (0,0,2) = (4,b,-2), b \in \mathbb{R}^+$ e

$$\left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \sqrt{4^2 + b^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + b^2 + 4} = \sqrt{20 + b^2}, b \in \mathbb{R}^+$$

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP} = (4,0,-2).(4,b,-2) = 4 \times 4 + 0 \times b + (-2) \times (-2) = 16 + 0 + 4 = 20$

Temos ainda que o ângulo BAP é o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AP}$ e que

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}\hat{}\overrightarrow{AP}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Assim, recorrendo à definição de produto escalar, vem que:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP} = \cos\left(\overrightarrow{AB}\hat{}\overrightarrow{AP}\right) \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AP}\right\| \Leftrightarrow 20 = \frac{1}{2} \times \sqrt{20} \times \sqrt{20 + b^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{40}{\sqrt{20}} = \sqrt{20 + b^2} \Rightarrow \left(\frac{40}{\sqrt{20}}\right)^2 = \left(\sqrt{20 + b^2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{1600}{20} = 20 + b^2 \Leftrightarrow$$

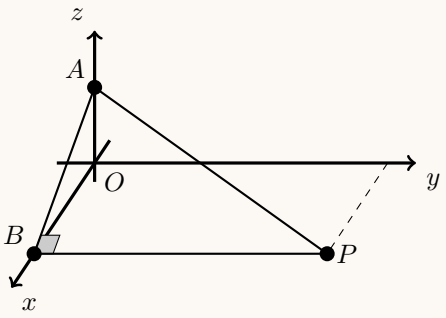
$$\Leftrightarrow 80 = 20 + b^2 \Leftrightarrow 80 - 20 = b^2 \Leftrightarrow \pm\sqrt{60} = b$$

Logo, como a ordenada do ponto P é positiva, temos que

$$b = \sqrt{60}$$

*** Outra resolução: ***

Como a o ponto P pertence ao plano xOy e tem a mesma abcissa, a reta BP é paralela ao eixo Oy, e perpendicular ao plano xOz, pelo que é ortogonal (ou perpendicular a todas as retas contidas no plano, em particular é perpendicular à reta AB



Assim, o ângulo ABP é reto, e o triângulo $[ABP]$ é retângulo em B

Como $B\hat{A}P = \frac{\pi}{3}$, recorrendo à definição de tangente de um ângulo, temos que

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}}$$

Como, $\overline{AB} = 2\sqrt{5}$ (ver cálculos no item anterior), e $\text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$, temos que

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{\overline{BP}}{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow 2\sqrt{5} \times \sqrt{3} = \overline{BP} \Leftrightarrow 2\sqrt{15} = \overline{BP}$$

Logo, como o ponto P tem ordenada positiva (e a mesma abcissa que o ponto B e pertence ao plano xOy), temos que as coordenadas do ponto P são $(4,y_P,0)$ e

$$y_P = 2\sqrt{15}$$

6. Temos que

- como a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a, o declive da reta r é o valor da função derivada no ponto de abcissa a ($m_r = f'(a)$)
  Assim, temos

$$f'(x) = \big(1 - \cos(3x)\big)' = (1)' - \big(\cos(3x)\big)' = 0 - \big(-(3x)'\operatorname{sen}(3x)\big) = 3\operatorname{sen}(3x)$$

  pelo que $m_r = f'(a) = 3\operatorname{sen}(3a)$

- como a reta s é tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa $a + \dfrac{\pi}{6}$, o declive da reta s é o valor da função derivada no ponto de abcissa $a + \dfrac{\pi}{6}$ ($m_s = g'\left(a + \dfrac{\pi}{6}\right)$) Assim, temos

$$g'(x) = \big(\operatorname{sen}(3x)\big)' = \big((3x)'\cos(3x)\big) = 3\cos(3x)$$

  pelo que

$$m_s = g'\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = 3\cos\left(3\left(a + \frac{\pi}{6}\right)\right) = 3\cos\left(3a + \frac{3\pi}{6}\right) = 3\underbrace{\cos\left(3a + \frac{\pi}{2}\right)}_{-\operatorname{sen}(3a)} = -3\operatorname{sen}(3a)$$

- como as retas r e s são perpendiculares, o declive de uma delas é o simétrico do inverso do declive da outra ($m_r = -\dfrac{1}{m_s}$)

$$m_r = -\frac{1}{m_s} \Leftrightarrow 3\operatorname{sen}(3a) = -\frac{1}{-3\operatorname{sen}(3a)} \Leftrightarrow -3\operatorname{sen}(3a) \times 3\operatorname{sen}(3a) = -1 \Leftrightarrow -9\operatorname{sen}^2(3a) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9\operatorname{sen}^2(3a) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2(3a) = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \operatorname{sen}(3a) = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}(3a) = \pm\frac{1}{3}$$

- como a é número real pertencente ao intervalo $\left]\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, ou seja $\dfrac{\pi}{3} < a < \dfrac{\pi}{2}$ então

$$3 \times \frac{\pi}{3} < 3a < 3 \times \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \pi < 3a < \frac{3\pi}{2}$$

  ou seja, $3a$ é a amplitude de um ângulo do 3º quadrante, pelo que $\operatorname{sen}(3a) < 0$, logo

$$\operatorname{sen}(3a) = -\frac{1}{3},\ q.e.d$$

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/2.ª Fase 14 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2015

VERSÃO 1

Página em branco

Indique de forma legível a versão da prova.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis e, a seguir, passados a tinta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Deve riscar aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – *raio*)

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume do cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \ \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \ \text{e} \ n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\ e^u$

$(a^u)' = u'\ a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Página em branco

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. A tabela de distribuição de probabilidades de uma certa variável aleatória X é

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	a	$2a$	0,4

(a designa um número real)

Qual é o valor médio desta variável aleatória?

(A) $2{,}1$ **(B)** $2{,}2$ **(C)** $2{,}3$ **(D)** $2{,}4$

2. Um saco contém nove bolas indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 9. As bolas numeradas de 1 a 5 são pretas e as restantes são brancas.

Retira-se, ao acaso, uma bola do saco e observa-se a sua cor e o seu número.

Considere os seguintes acontecimentos, associados a esta experiência aleatória:

A: *«a bola retirada é preta»*

B: *«o número da bola retirada é um número par»*

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$?

(A) $\frac{2}{5}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{3}{5}$ **(D)** $\frac{3}{4}$

3. Para certos valores de a e de b $(a>1$ e $b>1)$, tem-se $\log_b a=\frac{1}{3}$

Qual é, para esses valores de a e de b, o valor de $\log_a(a^2b)$?

(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{5}{3}$ **(C)** 2 **(D)** 5

4. Para um certo número real k, é contínua em $\mathbb{R}$ a função f definida por

$$f(x)=\begin{cases}2+e^{x+k} & \text{se } x\leq 0\\ \dfrac{2x+\ln(x+1)}{x} & \text{se } x>0\end{cases}$$

Qual é o valor de k?

(A) 0

(B) 1

(C) $\ln 2$

(D) $\ln 3$

5. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=3\,\text{sen}^2(x)$

Qual das expressões seguintes define a função f'', segunda derivada de f?

(A) $6\,\text{sen}(2x)\cos(x)$

(B) $6\,\text{sen}(x)\cos(2x)$

(C) $6\cos(2x)$

(D) $6\,\text{sen}(2x)$

6. Na Figura 1, está representado, no plano complexo, um triângulo equilátero $[OAB]$

Sabe-se que:

- o ponto O é a origem do referencial;
- o ponto A pertence ao eixo real e tem abcissa igual a 1
- o ponto B pertence ao quarto quadrante e é a imagem geométrica de um complexo z

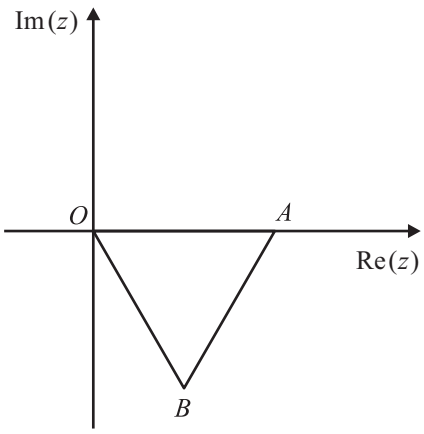


Figura 1

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $z=\sqrt{3}\ \text{cis}\,\dfrac{11\pi}{6}$

(B) $z=\text{cis}\,\dfrac{11\pi}{6}$

(C) $z=\sqrt{3}\,\text{cis}\,\dfrac{5\pi}{3}$

(D) $z=\text{cis}\,\dfrac{5\pi}{3}$

7. Considere, num referencial o.n. xOy, a circunferência definida pela equação

$$x^2 + (y-1)^2 = 2$$

Esta circunferência intersecta o eixo Ox em dois pontos. Destes pontos, seja A o que tem abcissa positiva.

Seja r a reta tangente à circunferência no ponto A

Qual é a equação reduzida da reta r?

(A) $y = x + 1$

(B) $y = x - 1$

(C) $y = 2x + 2$

(D) $y = 2x - 2$

8. Qual das expressões seguintes é termo geral de uma sucessão monótona e limitada?

(A) $(-1)^n$

(B) $(-1)^n . n$

(C) $-\frac{1}{n}$

(D) $1 + n^2$

Página em branco

GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z_1 = \dfrac{-1+i}{\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{12}}$

Determine os números complexos z que são solução da equação $z^4 = \overline{z}_1$, sem utilizar a calculadora.

Apresente esses números na forma trigonométrica.

2. Um cubo encontra-se em movimento oscilatório provocado pela força elástica exercida por uma mola.

A Figura 2 esquematiza esta situação. Nesta figura, os pontos O e A são pontos fixos. O ponto P representa o centro do cubo e desloca-se sobre a semirreta $\dot{O}A$

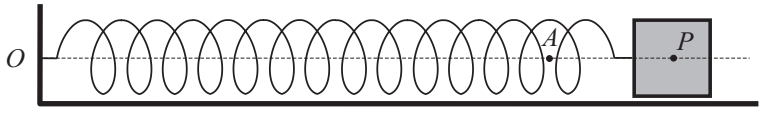


Figura 2

Admita que não existe qualquer resistência ao movimento.

Sabe-se que a distância, em metros, do ponto P ao ponto O é dada por

$$d(t) = 1 + \frac{1}{2}\text{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

A variável t designa o tempo, medido em segundos, que decorre desde o instante em que foi iniciada a contagem do tempo $(t \in [0, +\infty[)$.

Resolva os itens **2.1.** e **2.2.** sem recorrer à calculadora.

2.1. No instante em que se iniciou a contagem do tempo, o ponto P coincidia com o ponto A

Durante os primeiros três segundos do movimento, o ponto P passou pelo ponto A mais do que uma vez.

Determine os instantes, diferentes do inicial, em que tal aconteceu.

Apresente os valores exatos das soluções, em segundos.

2.2. Justifique, recorrendo ao teorema de Bolzano, que houve, pelo menos, um instante, entre os três segundos e os quatro segundos após o início da contagem do tempo, em que a distância do ponto P ao ponto O foi igual a $1{,}1$ metros.

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\begin{cases}1+xe^x & \text{se } x\leq 3\\ \ln(x-3)-\ln(x) & \text{se } x>3\end{cases}$

Resolva os itens **3.1.**, **3.2.** e **3.3.**, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

3.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais do seu gráfico.

3.2. Resolva, em $]-\infty, 3]$, a condição $f(x)-2x>1$

Apresente o conjunto solução, usando a notação de intervalos de números reais.

3.3. Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 4

4. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função tal que:

- f tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio;
- $f'(0)>0$
- $f''(x)<0$, para qualquer $x\in]-\infty, 0[$

Nenhum dos gráficos a seguir apresentados é o gráfico da função f

Gráfico **A**

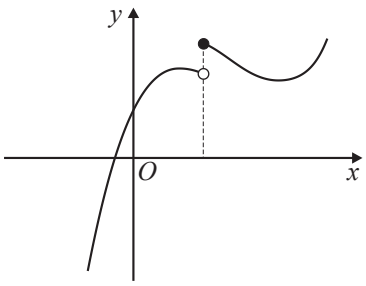


Gráfico **B**

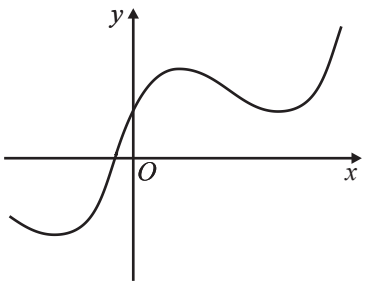
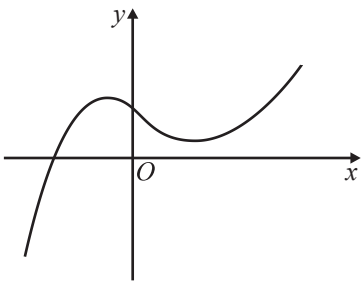


Gráfico **C**



Elabore uma composição na qual apresente, para cada um dos gráficos, uma razão pela qual esse gráfico não pode ser o gráfico da função f

5. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $\left(A\subset\Omega \text{ e } B\subset\Omega\right)$, com $P(A)\neq 0$

Prove que $P(A\cup\overline{B})-1+P(B)=P(A)\times P(B|A)$

6. Na Figura 3, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o poliedro $[NOPQRSTUV]$ que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular. Sabe-se que:

- o vértice P pertence ao eixo Ox
- o vértice N pertence ao eixo Oy
- o vértice T pertence ao eixo Oz
- o vértice R tem coordenadas $(2, 2, 2)$
- o plano PQV é definido pela equação $6x + z - 12 = 0$

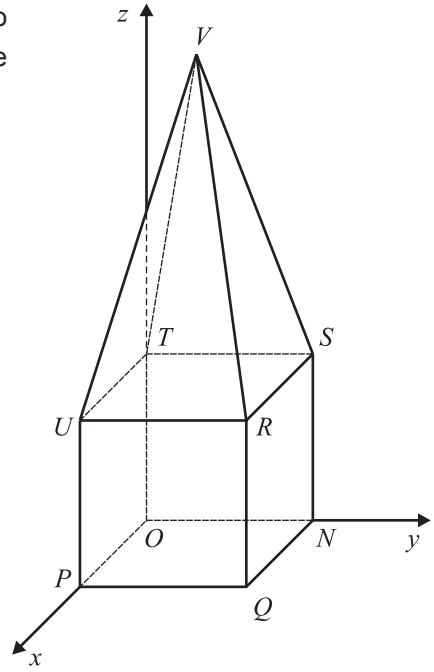


Figura 3

6.1. Determine as coordenadas do ponto V

6.2. Escreva uma equação cartesiana do plano que passa no ponto P e é perpendicular à reta OR

6.3. Seja A um ponto pertencente ao plano QRS

Sabe-se que:

- o ponto A tem cota igual ao cubo da abcissa;
- os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{TQ}$ são perpendiculares.

Determine a abcissa do ponto A, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver a equação, devidamente identificado(s) (sugere-se a utilização da janela de visualização em que $x \in [-4, 4]$ e $y \in [-2, 7]$);
- apresente a abcissa do ponto A arredondada às centésimas.

6.4. Dispõe-se de sete cores diferentes, das quais uma é branca e outra é azul, para colorir as nove faces do poliedro $[NOPQRSTUV]$. Cada face vai ser colorida com uma única cor.

Considere a experiência aleatória que consiste em colorir, ao acaso, as nove faces do poliedro, podendo cada face ser colorida por qualquer uma das sete cores.

Determine a probabilidade de, no final da experiência, o poliedro ficar com exatamente duas faces brancas, ambas triangulares, exatamente duas faces azuis, ambas quadradas, e as restantes faces coloridas com cores todas diferentes.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas de milésima.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** ..... (8 × 5 pontos) ..... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1. ..... 15 pontos

2.

2.1. ..... 10 pontos

2.2. ..... 15 pontos

3.

3.1. ..... 15 pontos

3.2. ..... 15 pontos

3.3. ..... 15 pontos

4. ..... 15 pontos

5. ..... 15 pontos

6.

6.1. ..... 5 pontos

6.2. ..... 10 pontos

6.3. ..... 15 pontos

6.4. ..... 15 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/2.ª Fase

Critérios de Classificação 11 Páginas

2015

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de escolha múltipla.

As respostas ilegíveis são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Itens de seleção

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

Itens de construção

Nos itens de resposta restrita e de resposta extensa, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

É classificada com zero pontos qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização da linguagem científica adequada.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados, devidamente identificados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam a realização de cálculos.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelo programa da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora gráfica», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado, que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. ..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	B	B	D	A	C	D	B	C
Versão 2	C	C	A	B	D	C	D	B

GRUPO II

1. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $-1+i$ na forma trigonométrica ..... 3 pontos

Indicar o módulo ..... 1 ponto

Indicar um argumento ..... 2 pontos

Escrever z_1 na forma trigonométrica ..... 3 pontos

Obter o módulo ..... 1 ponto

Obter um argumento ..... 2 pontos

Obter $\overline{z}_1$ na forma trigonométrica ..... 2 pontos

Escrever $z = \text{cis}\,\frac{\theta + 2k\pi}{4}$ (com $k \in \{0, 1, 2, 3\}$), sendo θ um argumento de $\overline{z}_1$ ..... 3 pontos

Obter as soluções da equação $\left(\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right), \text{cis}\,\frac{\pi}{3}, \text{cis}\,\frac{5\pi}{6}, \text{cis}\,\frac{4\pi}{3}\right)$ .. (1+1+1+1) ... 4 pontos

2.º Processo

Determinar $\sqrt{2}\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right)$ na forma algébrica ..... 2 pontos

Multiplicar ambos os termos da fração pelo conjugado do denominador ..... 1 ponto

Determinar z_1 na forma algébrica ..... 2 pontos

Escrever $\overline{z}_1$ na forma algébrica ..... 1 ponto

Escrever $\overline{z}_1$ na forma trigonométrica ..... 2 pontos

Escrever $z = \text{cis}\,\frac{\theta + 2k\pi}{4}$ (com $k \in \{0, 1, 2, 3\}$), sendo θ um argumento de $\overline{z}_1$ ..... 3 pontos

Obter as soluções da equação $\left(\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right), \text{cis}\,\frac{\pi}{3}, \text{cis}\,\frac{5\pi}{6}, \text{cis}\,\frac{4\pi}{3}\right)$ .. (1+1+1+1) ... 4 pontos

2.1. ..... **10 pontos**

Determinar $d(0)$ ..... 1 ponto

Equacionar o problema $\left(d(t)=d(0)\right)$ ..... 2 pontos

Obter a expressão geral das soluções da equação $d(t)=d(0)$ ..... 3 pontos

Determinar as soluções da equação $d(t)=d(0)$ pertencentes ao intervalo $]0,3]$ ..... 3 pontos

Responder ao problema $\left(\frac{2}{3}s,\ 2s \text{ e } \frac{8}{3}s\right)$ ..... 1 ponto

2.2. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Referir que a função d é contínua em $[3,4]$ (**ver notas 1** e **2**) ..... 2 pontos

Calcular $d(3)$ (**ver nota 3**) ..... 4 pontos

Calcular $d(4)$ (**ver nota 4**) ..... 4 pontos

Escrever $d(3)<1{,}1<d(4)$ (ou equivalente) ..... 4 pontos

Concluir o pretendido ..... 1 ponto

2.º Processo

Referir que $d(t)=1{,}1$ é equivalente a $d(t)-1{,}1=0$ ..... 1 ponto

Referir que a função f, definida por $f(t)=d(t)-1{,}1$, é contínua em $[3,4]$ (**ver notas 1** e **2**) ..... 2 pontos

Calcular $f(3)$ (**ver nota 3**) ..... 4 pontos

Calcular $f(4)$ (**ver nota 4**) ..... 4 pontos

Referir que $f(3)$ e $f(4)$ têm sinais contrários (ou equivalente) ..... 2 pontos

Concluir que a função f tem, pelo menos, um zero em $]3,4[$ ..... 1 ponto

Concluir o pretendido ..... 1 ponto

Notas:

1. Se apenas for referido que a função é contínua, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

2. Se for referido que a função é contínua em $]3,4[$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

3. Se não for apresentada a substituição de $\text{sen}\left(3\pi+\frac{\pi}{6}\right)$ por $-\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ou por $-\frac{1}{2}$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

4. Se não for apresentada a substituição de $\text{sen}\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right)$ por $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ou por $\frac{1}{2}$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

3.1. ..... **15 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ..... 8 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (1+xe^x)$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to-\infty} (1+xe^x) = 1 + \lim\limits_{x\to-\infty} (xe^x)$ ..... 1 ponto

Escrever $1 + \lim\limits_{x\to-\infty} (xe^x) \underset{y=-x}{=} 1 + \lim\limits_{y\to+\infty} (-ye^{-y})$ (**ver nota**)... 2 pontos

Escrever $1 + \lim\limits_{y\to+\infty} (-ye^{-y}) = 1 + \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{-y}{e^y}$ ..... 1 ponto

Escrever $1 + \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{-y}{e^y} = 1 - \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{e^y}{y}}$ ..... 1 ponto

Reconhecer o limite notável $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ ..... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (1) ..... 1 ponto

Concluir que a reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico da função f, quando $x \to -\infty$ ..... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ..... 5 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln(x-3) - \ln(x)\right)$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln(x-3) - \ln(x)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln \dfrac{x-3}{x}\right)$ ..... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln \dfrac{x-3}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln\left(1 - \dfrac{3}{x}\right)\right)$ ..... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (0) ..... 1 ponto

Concluir que a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico da função f, quando $x \to +\infty$ ..... 1 ponto

Nota – Se for referido que $x \to -\infty$ é equivalente a $-x \to +\infty$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

3.2. ..... **15 pontos**

Escrever $f(x) - 2x > 1 \Leftrightarrow 1 + xe^x - 2x > 1$ ..... 1 ponto

Escrever $1 + xe^x - 2x > 1 \Leftrightarrow xe^x - 2x > 0$ ..... 1 ponto

Escrever $xe^x - 2x > 0 \Leftrightarrow x(e^x - 2) > 0$ (**ver nota 1**) ..... 3 pontos

Apresentar um quadro de sinais (ou equivalente) (**ver notas 2** e **3**) ..... 6 pontos

Apresentar o conjunto solução $\left(\left]-\infty, 0\right[\cup \left]\ln 2, 3\right]\right)$ (**ver notas 4** e **5**) ..... 4 pontos

Notas:

1. Se a resposta apresentar $xe^x > 2x \Leftrightarrow e^x > 2$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. A apresentação de um quadro de sinais com $x \in]-\infty, +\infty[$ não implica qualquer desvalorização nesta etapa.
3. Se a resposta apresentar apenas a resolução da inequação $e^x > 2$, a pontuação máxima a atribuir nesta etapa é de 2 pontos.
4. Se não for considerada a condição $x \in]-\infty, 3]$, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 2 pontos.
5. Se o conjunto solução apresentado resultar da resolução da inequação $e^x > 2$, em vez de resultar da resolução da inequação $x(e^x - 2) > 0$, a pontuação máxima a atribuir nesta etapa é de 2 pontos.

3.3. ..... **15 pontos**

Nota prévia – Se for utilizada a expressão $1 + x\,e^x$, a classificação máxima a atribuir à resposta é de 5 pontos.

Identificar o declive da reta pedida com $f'(4)$ (**ver nota 1**) ..... 2 pontos

Determinar $f'(4)$ ..... 7 pontos

- Obter uma expressão de $f'(x)$ ..... 4 pontos
- Obter $f'(4)$ ..... 3 pontos

Calcular $f(4)$ ..... 2 pontos

Escrever a equação reduzida da reta pedida $\left(y = \frac{3}{4}x - 3 - \ln 4\right)$ (**ver nota 2**) 4 pontos

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a expressão da derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é de 1 ponto.
2. Se o declive da reta não for obtido a partir da sua identificação com $f'(4)$, a pontuação máxima a atribuir nesta etapa é de 2 pontos.

4. ..... **15 pontos**

Tópicos de resposta:

- Apresentação de uma razão que permita rejeitar o gráfico **A** (como a função f tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio, ela é contínua em todo o seu domínio, o que não acontece com a função representada neste gráfico) .
- Apresentação de uma razão que permita rejeitar o gráfico **B** (como, em $]-\infty, 0[$, $f''(x) < 0$, o gráfico da função f tem concavidade voltada para baixo naquele intervalo, o que não acontece com a função representada neste gráfico) .
- Apresentação de uma razão que permita rejeitar o gráfico **C** (como $f'(0) > 0$, o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0 é positivo, o que não acontece com a função representada neste gráfico) .

Níveis	Descritores do nível de desempenho	Pontuação
6	Na resposta, são contemplados os três tópicos, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	15
5	Na resposta, são contemplados os três tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	13
4	Na resposta, são contemplados apenas dois dos três tópicos, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	10
3	Na resposta, são contemplados apenas dois dos três tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	8
2	Na resposta, é contemplado apenas um tópico, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	5
1	Na resposta, é contemplado apenas um tópico, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	3

Nota – Se, num tópico, apenas for estabelecida a correspondência correta entre o gráfico e a afirmação que permite rejeitá-lo, esse tópico é considerado «com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica».

5. ..... **15 pontos**

Aplicar a propriedade da probabilidade da união de dois acontecimentos ..... 3 pontos

Aplicar a propriedade da probabilidade do acontecimento contrário ..... 2 pontos

Aplicar a propriedade da probabilidade da intersecção de um acontecimento com o contrário de outro acontecimento ..... 3 pontos

Utilizar a fórmula da probabilidade condicionada ..... 2 pontos

Concluir que a igualdade é verdadeira ..... 5 pontos

6.1. ..... **5 pontos**

Reconhecer que o ponto V tem abcissa 1 ..... 1 ponto

Escrever a equação $6+z-12=0$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Obter o valor de z ..... 1 ponto

Indicar as coordenadas do ponto V $\left((1,1,6)\right)$ ..... 1 ponto

Nota – Se a resposta se limitar à apresentação das coordenadas do ponto V, a classificação a atribuir é 1 ponto, desde que a abcissa esteja correta.

6.2. ..... **10 pontos**

Escrever as coordenadas do ponto P ..... 1 ponto

Escrever $\overrightarrow{OR}=(2,2,2)$ ..... 2 pontos

Escrever a equação $2x+2y+2z+d=0$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

Determinar o valor de d ..... 2 pontos

Apresentar uma equação cartesiana do plano pedido $(x+y+z-2=0$ ou equivalente$)$ ..... 2 pontos

6.3. ..... **15 pontos**

Reconhecer que o ponto A tem coordenadas da forma $(x, 2, x^3)$ ..... 2 pontos

Identificar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OA}$ com as do ponto A ..... 1 ponto

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{TQ}$ ..... 2 pontos

Escrever $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{TQ}$, em função de x ..... 1 ponto

Equacionar o problema ..... 2 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora, que permite(m) resolver a equação (**ver nota**) ..... 3 pontos

Apresentar a abcissa do ponto A $(1, 52)$ ..... 4 pontos

Nota – Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

6.4. ..... **15 pontos**

Reconhecer que o número de casos possíveis é 7^9 (**ver nota 1**) ..... 6 pontos

Reconhecer que o número de casos favoráveis é ${}^4C_2 \times {}^5C_2 \times 5!$ (**ver nota 2**) 8 pontos

Obter a probabilidade pedida $(0{,}0002)$ (**ver nota 3**) ..... 1 ponto

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a 7^9, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

2. A expressão que dá o número de casos favoráveis é o produto das expressões ${}^4C_2$, ${}^5C_2$ e $5!$ Por cada expressão incorreta ou não apresentada devem ser descontados 4 pontos. A mesma desvalorização deve ser feita caso seja considerada, uma ou mais vezes, uma operação diferente da multiplicação. Se, por aplicação deste critério, o valor obtido for negativo, esta etapa deve ser pontuada com 0 pontos.

3. Se a etapa relativa ao número de casos possíveis e a etapa relativa ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, a pontuação a atribuir a esta etapa é 0 pontos. A pontuação de 0 pontos também deve ser atribuída caso o valor obtido não pertença ao intervalo $[0, 1]$

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** ..... (8 × 5 pontos) ..... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1. ..... 15 pontos

2.

2.1. ..... 10 pontos

2.2. ..... 15 pontos

3.

3.1. ..... 15 pontos

3.2. ..... 15 pontos

3.3. ..... 15 pontos

4. ..... 15 pontos

5. ..... 15 pontos

6.

6.1. ..... 5 pontos

6.2. ..... 10 pontos

6.3. ..... 15 pontos

6.4. ..... 15 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

Exame final nacional de Matemática A **(2015, 2.ª fase)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. O valor médio da variável aleatória X é: $\mu = 1 \times a + 2 \times 2a + 3 \times 0{,}4$

   Como, numa distribuição de probabilidades de uma variável aleatória, a soma das probabilidades é 1, vem que

   $$a + 2a + 0{,}4 = 1 \Leftrightarrow 3a = 1 - 0{,}4 \Leftrightarrow 3a = 0{,}6 \Leftrightarrow a = \frac{0{,}6}{3} \Leftrightarrow a = 0{,}2$$

   Assim, substituindo o valor de a no cálculo do valor médio da variável X, vem:

   $$\mu = 1 \times 0{,}2 + 2 \times 2(0{,}2) + 3 \times 0{,}4 = 0{,}2 + 2(0{,}4) + 1{,}2 = 0{,}2 + 0{,}8 + 1{,}2 = 2{,}2$$

   Resposta: **Opção B**

2. No contexto da situação descrita $P(A|B)$ é a probabilidade de que, retirando ao acaso uma bola do saco, ela seja preta sabendo que tem um número par.

   Como existem apenas 4 bolas numeradas com números pares (nomeadamente as bolas com os números 2, 4, 6 e 8), temos que o número de casos possíveis é 4.

   Destas, apenas as bolas com os números 2 e 4 são pretas (porque "As bolas numeradas de 1 a 5 são pretas"), pelo que existem 2 casos favoráveis, e assim, recorrendo à Regra de Laplace para o cálculo da probabilidade, vem:

   $$P(A|B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

   Resposta: **Opção B**

3. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que

   $$\log_a\left(a^2 b\right) = \log_a(a^2) + \log_a b = 2\log_a a + \frac{\log_b b}{\log_b a} = 2 \times 1 + \frac{1}{\frac{1}{3}} = 2 + 3 = 5$$

   Resposta: **Opção D**

4. Como a função é contínua em $\mathbb{R}$, também é contínua em $x=0$, pelo que

$$f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

Temos que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=2+e^{0+k}=2+e^k$

E calculando $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, vem

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x+\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2x}{x}+\frac{\ln(x+1)}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(2+\frac{\ln(x+1)}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0^+} 2+\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{x}}_{\text{Lim. Notável}}=2+1=3$$

Assim, como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$, vem que

$$2+e^k=3 \Leftrightarrow e^k=3-2 \Leftrightarrow e^k=1 \Leftrightarrow k=\ln 1 \Leftrightarrow k=0$$

Resposta: **Opção A**

5. Determinando a expressão da primeira derivada, f', vem:

$$f'(x)=\big(f(x)\big)'=\big(3\operatorname{sen}^2(x)\big)'=\big(3\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(x)\big)'=3\big(\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(x)\big)'=$$

$$=3\Big(\big(\operatorname{sen}(x)\big)'\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(x)\big(\operatorname{sen}(x)\big)'\Big)=3\times 2\big(\operatorname{sen}(x)\big)'\operatorname{sen}(x)=3\times 2\big(\cos(x)\operatorname{sen}(x)\big)=$$

$$=3\times\underbrace{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}_{\operatorname{sen}(2x)}=3\operatorname{sen}(2x)$$

Determinando a expressão da segunda derivada, f'', temos que:

$$f''(x)=\big(f'(x)\big)'=\big(3\operatorname{sen}(2x)\big)'=3\big((2x)'\cos(2x)\big)=3\big(2\cos(2x)\big)=6\cos(2x)$$

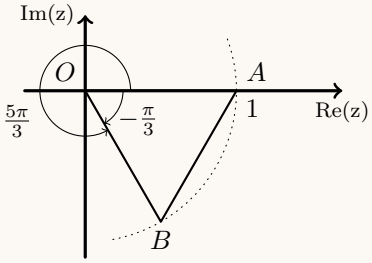
Resposta: **Opção C**

6. Como o triângulo $[OAB]$ é equilátero, temos que

$$|z|=\overline{OB}=\overline{OA}=1$$

Por outro lado, como a amplitude de cada um dos ângulos internos do triângulo equilátero é $\frac{\pi}{3}$, e o ponto B está no 4º quadrante, temos que $\arg(z)=-\frac{\pi}{3}$, ou então

$$\arg(z)=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{6\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$$



E assim, vem que

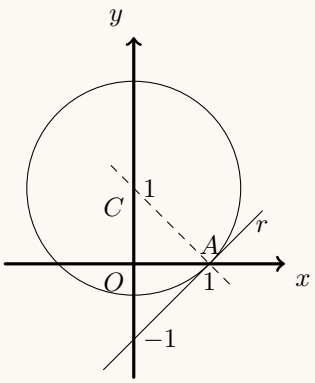
$$z=1\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

Resposta: **Opção D**

7. Determinando as abcissas dos pontos de interseção da circunferência com o eixo Ox, como estes pontos têm ordenada nula ($y = 0$), vem

$$x^2 + (0-1)^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2 - 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

Como o ponto A tem abcissa positiva é o ponto de coordenadas (1,0)
Como o centro da circunferência é o ponto C de coordenadas (0,1), a reta CA que contém o raio $[CA]$ da circunferência tem declive



$$m_{CA} = \frac{1-0}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

Como a reta r é tangente à circunferência no ponto A, é perpendicular à reta CA, e por isso, o seu declive é o simétrico do inverso de m_{CA}, temos que,

$$m_r = -\frac{1}{m_{CA}} = -\frac{1}{-1} = 1$$

Assim, temos que a equação reduzida da reta r é da forma $y = 1 \times x + b \Leftrightarrow y = x + b$

Como o ponto A pertence à reta r, substituindo as suas coordenadas na expressão anterior, vem $0 = 1 + b \Leftrightarrow -1 = b$

Pelo que, a equação reduzida da reta r é

$$y = x - 1$$

Resposta: **Opção B**

8. Analisando cada uma das expressões temos:

- Se $u_n = (-1)^n$, então $u_1 = (-1)^1 = -1$; $u_2 = (-1)^2 = 1$ e $u_3 = (-1)^3 = -1$
  Como $u_2 > u_1$ mas $u_3 < u_2$ a sucessão não é monótona.
- Se $u_n = (-1)^n.n$, então $u_1 = (-1)^1 \times 1 = -1$; $u_2 = (-1)^2 \times 2 = 2$ e $u_3 = (-1)^3 \times 3 = -3$
  Da mesma forma, temos que, como $u_2 > u_1$ mas $u_3 < u_2$ a sucessão não é monótona.
- Se $u_n = -\frac{1}{n}$, como $u_{n+1} = -\frac{1}{n+1}$, vem que

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n+1} - \left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = -\frac{n}{n(n+1)} + \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{-n+n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

  Ou seja, $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ (porque como $n > 0$, então $n(n+1) > 0$ e também $\frac{1}{n(n+1)}$), ou seja u_n é uma sucessão **monótona** crescente.

  Temos ainda que, como u_n é monótona crescente, $u_n > u_1, \forall n > 1$ e que $u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$ (porque como $\frac{1}{n} > 0, n \in \mathbb{N}$ então $-\frac{1}{n} < 0, n \in \mathbb{N}$), pelo que $-1 \leq u_n < 0$, ou seja u_n **é limitada**.
- Se $u_n = 1 + n^2$, então u_n é um infinitamente grande positivo, ou seja, $\forall \delta \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{N} : u_k > \delta$, ou seja a sucessão não é limitada.

Resposta: **Opção C**

GRUPO II

1. Escrevendo $-1+i$ na f.t. temos $-1+i=\rho\,\mathrm{cis}\,\theta$, onde:

   - $\rho=|-1+i|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$
   - $\mathrm{tg}\,\theta=\dfrac{1}{-1}=-1$; como $\mathrm{sen}\,\theta>0$ e $\cos\theta<0$, θ é um ângulo do 2º quadrante, logo $\theta=-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{4\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$

   E assim $-1+i=\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,\dfrac{3\pi}{4}$

   Simplificando a expressão de z_1 temos:

   $$z_1=\frac{-1+i}{\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{12}}=\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,\frac{3\pi}{4}}{\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{12}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{12}\right)=1\,\mathrm{cis}\left(\frac{9\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)=\mathrm{cis}\left(\frac{8\pi}{12}\right)=\mathrm{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

   Como se $w=\rho\,\mathrm{cis}\,\theta$ então $\overline{w}=\rho\,\mathrm{cis}\,(-\theta)$, então

   $$\overline{z_1}=\mathrm{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

   E assim, usando a fórmula de Moivre, temos que:

   $$z^4=\overline{z_1}\Leftrightarrow z^4=\mathrm{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\Leftrightarrow z=\sqrt[4]{\mathrm{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}\Leftrightarrow z=\sqrt[4]{1}\,\mathrm{cis}\left(\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}\right),k\in\{0{,}1{,}2{,}3\}$$

   Ou seja, temos 4 soluções da equação:

   - $k=0\rightarrow w_1=\sqrt[4]{1}\,\mathrm{cis}\left(\dfrac{-\frac{2\pi}{3}+0}{4}\right)=\mathrm{cis}\left(-\dfrac{2\pi}{12}\right)=\mathrm{cis}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$
   - $k=1\rightarrow w_2=\sqrt[4]{1}\,\mathrm{cis}\left(\dfrac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4}\right)=\mathrm{cis}\left(-\dfrac{2\pi}{12}+\dfrac{2\pi}{4}\right)=\mathrm{cis}\left(-\dfrac{2\pi}{12}+\dfrac{6\pi}{12}\right)=\mathrm{cis}\,\dfrac{4\pi}{12}=\mathrm{cis}\,\dfrac{\pi}{3}$
   - $k=2\rightarrow w_3=\sqrt[4]{1}\,\mathrm{cis}\left(\dfrac{-\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4}\right)=\mathrm{cis}\left(-\dfrac{2\pi}{12}+\dfrac{4\pi}{4}\right)=\mathrm{cis}\left(-\dfrac{2\pi}{12}+\dfrac{12\pi}{12}\right)=\mathrm{cis}\,\dfrac{10\pi}{12}=\mathrm{cis}\,\dfrac{5\pi}{6}$
   - $k=3\rightarrow w_4=\sqrt[4]{1}\,\mathrm{cis}\left(\dfrac{-\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4}\right)=\mathrm{cis}\left(-\dfrac{2\pi}{12}+\dfrac{6\pi}{4}\right)=\mathrm{cis}\left(-\dfrac{2\pi}{12}+\dfrac{18\pi}{12}\right)=\mathrm{cis}\,\dfrac{16\pi}{12}=\mathrm{cis}\,\dfrac{4\pi}{3}$

2.

2.1. Como no instante em que se iniciou a contagem do tempo, o ponto P coincidia com o ponto A, a distância inicial ($t = 0$), em metros, do ponto A ao ponto O é dada por $d(0)$

Assim, os instantes em que o ponto P passou pelo ponto A, nos primeiros três segundos do movimento, são as soluções da equação $d(t) = d(0)$, com $t \in]0,3]$

$$d(t) = d(0) \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\pi \times 0 + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \pi t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \pi t + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi t = 2k\pi \vee \pi t = \pi - 2 \times \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 2k \vee \pi t = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 2k \vee \pi t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 2k \vee t = \frac{2}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

Como $t \in]0,3]$, atribuindo valores inteiros a k para identificar as soluções no intervalo definido, temos

- $k = 0 \rightarrow t = 0 \vee t = \frac{2}{3}$ ($0 \notin]0,3]$)
- $k = 1 \rightarrow t = 2 \vee t = \frac{2}{3} + 2 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = \frac{8}{3}$
- $k = 2 \rightarrow t = 4 \vee t = \frac{2}{3} + 4 \Leftrightarrow t = 4 \vee t = \frac{14}{3}$ ($4 \notin]0,3] \wedge \frac{14}{3} \notin]0,3]$)

Assim temos, durante os primeiros três segundos do movimento, o ponto P passou pelo ponto A por três vezes, nos instantes $t_1 = \frac{2}{3}$ s, $t_2 = 2$ s e $t_3 = \frac{8}{3}$ s.

2.2.

Como a função d resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $[0, +\infty[$, é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em $[3, 4]$.

Como $0{,}75 < 1{,}1 < 1{,}25$, ou seja, $d(3) < 1{,}1 < d(4)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $t_0 \in]3, 4[$ tal que $d(t_0) = 1{,}1$, ou seja, que houve, pelo menos, um instante, entre os três segundos e os quatro segundos após o início da contagem do tempo, em que a distância do ponto P ao ponto O foi igual a 1,1 metros.

C.A.

$$d(3) = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) =$$
$$= 1 + \frac{1}{2} \times \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 1 + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) =$$
$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$d(4) = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) =$$
$$= 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

3.

3.1. Averiguando a existência de uma assíntota horizontal quando $x \to -\infty$, vem

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(1+xe^x) = \lim_{x\to-+\infty} 1 + \lim_{x\to-\infty}(xe^x) = 1 + (-\infty \times e^{-\infty}) = 1 + \underbrace{(-\infty \times 0^+)}_{\text{Indeterminação}}$$

(fazendo $y = -x$, temos $x = -y$; e se $x \to -\infty$, então $y \to +\infty$)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 + \lim_{x\to-\infty}(xe^x) = 1 + \lim_{y\to+\infty}(-ye^{-y}) = 1 + \lim_{y\to+\infty}\left(-y \times \frac{1}{e^y}\right) = 1 - \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{e^y}\right) =$$

$$= 1 - \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{e^y}{y}}\right) = 1 - \frac{1}{\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = 1 - \frac{1}{+\infty} = 1 - 0 = 1$$

Logo, como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, podemos concluir que a reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico de f

Averiguando agora a existência de uma assíntota horizontal quando $x \to +\infty$, vem

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(\ln(x-3) - \ln x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{x-3}{x}\right) = \ln\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3}{x}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(x-3)}{\lim\limits_{x\to+\infty} x}\right) = \ln\left(\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty} x}\right) = \ln\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}\right) = \ln(1) = 0$$

Logo, como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, podemos concluir que a reta de equação $y = 0$ também é assíntota horizontal do gráfico de f

3.2. Para $x \in]-\infty,3]$, $f(x) = 1 + xe^x$, logo, vem que

$$f(x) - 2x > 1 \Leftrightarrow 1 + xe^x - 2x > 1 \Leftrightarrow xe^x - 2x > 0 \Leftrightarrow x(e^x - 2) > 0$$

Determinando as soluções da equação $x(e^x - 2) = 0$, temos:

$$x(e^x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee e^x = 2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \ln 2$$

Estudando a variação do sinal de $x(e^x - 2)$, em $]-\infty,3]$, vem:

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		3
x	$-$		0	$+$	$+$	$+$	$+$
$e^x - 2$	$-$		$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x(e^x - 2)$	$+$		0	$-$	0	$+$	$+$

Assim, como $f(x) - 2x > 1 \Leftrightarrow x(e^x - 2) > 0$, temos que o conjunto solução de $f(x) - 2x > 1$ é

$$C.S. =]-\infty,0[\cup]\ln 2,3]$$

3.3. Para calcular o declive da reta tangente, no ponto de abcissa 4 começamos por determinar a expressão da derivada da função, para $x > 3$:

$$f'(x) = \big(\ln(x-3) - \ln x\big)' = \big(\ln(x-3)\big)' - \big(\ln x\big)' = \frac{(x-3)'}{x-3} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x}$$

Assim, temos que o declive da reta tangente no ponto de abcissa 4 é:

$$m = f'(4) = \frac{1}{4-3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Logo a equação da reta tangente é da forma $y = \frac{3}{4}x + b$

Como $f(4) = \ln(4-3) - \ln 4 = \ln 1 - \ln 4 = 0 - \ln 4 = -\ln 4$, sabemos que o ponto $P(4, -\ln 4)$ pertence ao gráfico da função e também à reta tangente.
Assim, substituindo as coordenadas do ponto de tangência na equação da reta, podemos calcular o valor de b:

$$-\ln 4 = \frac{3}{4} \times 4 + b \Leftrightarrow -\ln 4 = 3 + b \Leftrightarrow -\ln 4 - 3 = b$$

Pelo que a equação da reta tangente é:

$$y = \frac{3}{4}x - \ln 4 - 3$$

4. O gráfico **A**, não é o gráfico da função f, porque tem um ponto em que a função não é contínua, logo, nesse ponto, a função não tem derivada e sabemos que f tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio.

O gráfico **B**, não é o gráfico da função f, porque tem a concavidade voltada para cima para alguns valores de $x \in]-\infty,0[$, ou seja, a segunda derivada é positiva para alguns valores de $x \in]-\infty,0[$, e sabemos que $f''(x) < 0$, para qualquer $x \in]-\infty,0[$

O gráfico **C**, não é o gráfico da função f, porque a reta tangente no ponto de abcissa zero tem declive negativo (a função é decrescente numa vizinhança de zero), ou seja a primeira derivada é negativa em $x = 0$, e sabemos que $f'(0) > 0$

5. Temos que:

$$\begin{aligned}
P\left(A\cup\overline{B}\right)-1+P(B) &= P(A)+P\left(\overline{B}\right)-P\left(A\cap\overline{B}\right)-1+P(B) && (1)\\
&= P(A)-P\left(A\cap\overline{B}\right)-1+P(B)+P\left(\overline{B}\right)\\
&= P(A)-P\left(A\cap\overline{B}\right)-1+1 && (2)\\
&= P(A)-P\left(A\cap\overline{B}\right)\\
&= P(A)-\Big(P(A)-P(A\cap B)\Big) && (3)\\
&= P(A)-P(A)+P(A\cap B)\\
&= P(A\cap B)\\
&= P(A\cap B)\times\frac{P(A)}{P(A)} && (4)\\
&= P(A)\times\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\\
&= P(A)\times P(B|A) && (5)
\end{aligned}$$

(1) Teorema: $P\left(X\cup Y\right)=P(X)+P(Y)-P(X\cap Y)$
(2) Teorema: $P(X)+P\left(\overline{X}\right)=1$
(3) Teorema: $P\left(X\cap\overline{Y}\right)=P(X)-P(X\cap Y)$
(4) Hipótese: $P(A)\neq 0$
(5) Definição: $P(X|Y)=\dfrac{P(X\cap Y)}{P(Y)}$

Logo, $P\left(A\cup\overline{B}\right)-1+P(B)=P(A)\times P(B|A)$ *q.e.d.*

6.

6.1. Como a pirâmide que integra o sólido é regular, a projeção ortogonal do vértice V no plano da base coincide com o centro geométrico da base, V pertence ao plano de equação $x=1$ e $y=1$, ou seja tem de coordendas $(1,1,k), k\in\mathbb{R}$

Como o ponto V também pertence ao plano de equação $6x+z-12=0$, podemos calcular a cota do ponto fazendo a substituição $x=1$, na equação deste plano:

$$6(1)+z-12=0 \Leftrightarrow 6+z=12 \Leftrightarrow z=12-6 \Leftrightarrow z=6$$

Assim, temos temos que as coordenadas do ponto V são $(1,1,6)$

6.2. Como se pretende escrever uma equação de um plano perpendicular à reta OR, o vetor $\overrightarrow{OR}$ é um vetor normal do plano. Como O é a origem do referencial, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OR}$, coincidem com as do ponto R, ou seja

$$\overrightarrow{OR}=(2,2,2)$$

Assim, temos que a equação do plano pretendido pode ser da forma $2x+2y+2z+d=0$
Como o ponto P pertence ao eixo Ox e o cubo tem aresta 2, temos que as suas coordenadas são $P(2,0,0)$.
Para determinar o valor de d, na equação do anterior, substituímos as coordenadas do ponto P, porque as estas verificam a equação do plano, porque o ponto pertence ao plano:

$$2(2)+2(0)+2(0)+d=0 \Leftrightarrow 4+0+0+d=0 \Leftrightarrow d=-4$$

Pelo que, uma equação cartesiana do plano que passa no ponto P e é perpendicular à reta OR é

$$2x+2y+2z-4=0$$

Ou, simplificando, $x+y+z-2=0$

6.3. Como o plano QRS é o plano de equação $y = 2$, as coordenadas dos pontos deste plano, em particular o ponto A, tem de coordenadas $A(a,2,c), a \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$

Como a cota do ponto A é o cubo da abcissa ($c = a^3$), temos que as coordenadas do ponto são $A(a,2,a^3), a \in \mathbb{R}$.
Como O é a origem do referencial, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OA}$, coincidem com as do ponto A, ou seja

$$\overrightarrow{OA} = (a,2,a^3), a \in \mathbb{R}$$

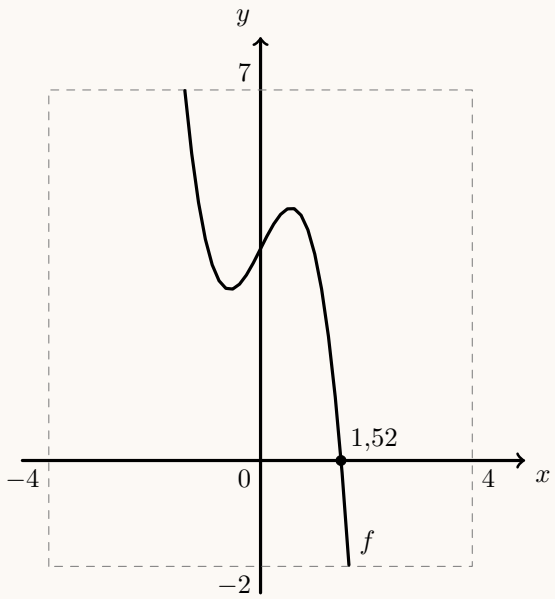
Calculando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{TQ}$, recorrendo às coordenadas dos pontos $T(0,0,2)$ e $Q(2,2,0)$, temos que

$$\overrightarrow{TQ} = Q - T = (2,2,0) - (0,0,2) = (2,2,-2)$$

Como os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{TQ}$ são perpendiculares, o seu produto escalar é nulo:

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{TQ} = 0 \Leftrightarrow (a,2,a^3).(2,2,-2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2a + 2 \times 2 - 2a^3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2a^3 + 2a + 4 = 0, a \in \mathbb{R}$$

Desta forma, visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função $f(x) = -2x^3 + 2x + 4$, na janela de visualização sugerida, (reproduzido na figura ao lado), podemos observar o zero da função.



Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados dos zeros de uma função, obtemos um valor aproximado da solução da equação, ou seja, a abcissa do ponto A, cujo valor numérico, aproximado às centésimas, é

$$a \approx 1{,}52$$

6.4. Determinando a probabilidade com recurso à Regra de LaPlace, calculamos o quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis, sendo os casos possíveis equiprováveis.

Para calcular o número de casos possíveis, verificamos que existem 7 cores (elementos) para distribuir por 9 faces (posições), pelo que a ocorrência de repetições é necessária e a ordem é relevante porque as faces não são todas iguais. Ou seja, o número de casos possíveis corresponde a ${}^7A'_9 = 7^9$

O número de casos favoráveis pode ser calculado considerando o número de escolhas diferentes de 2 das 4 faces triangulares (para serem coloridas de branco) - ${}^4C_2$; depois o número de escolhas diferentes de 2 das 5 faces quadradas (para serem coloridas de azul) - ${}^5C_2$; e finalmente a distribuição das restantes 5 cores pelas restantes 5 faces (para serem coloridas uma de cada cor) -${}^5A_5 = P_5 = 5!$
Logo o número de casos favoráveis é ${}^4C_2 \times {}^5C_2 \times 5!$ Assim, calculando a probabilidade com recurso à Regra de Laplace, e apresentando o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas de milésima, temos

$$p = \frac{{}^4C_2 \times {}^5C_2 \times 5!}{7^9} \approx 0{,}000\,2$$

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/Época Especial

15 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2015

Página em branco

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis e, a seguir, passados a tinta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Deve riscar aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – *raio*)

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume do cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \ \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\ e^u$

$(a^u)' = u'\ a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Página em branco

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- $P(A \cup B) = 0{,}7$
- $P(B) = 0{,}4$
- $P(A \cap B) = 0{,}2$

Qual é o valor de $P(B \mid A)$?

(A) $0{,}25$ **(B)** $0{,}3$ **(C)** $0{,}35$ **(D)** $0{,}4$

2. Nove jovens, três rapazes e seis raparigas, vão dispor-se, lado a lado, para uma fotografia.

De quantas maneiras o podem fazer, de modo que os rapazes fiquem juntos?

(A) $40\,140$ **(B)** $30\,240$ **(C)** $20\,340$ **(D)** $10\,440$

3. Seja a um número real.

Seja a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = e^{a \ln x}$

Considere, num referencial o.n. xOy, o ponto $P(2{,}8)$

Sabe-se que o ponto P pertence ao gráfico de f

Qual é o valor de a ?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

4. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f

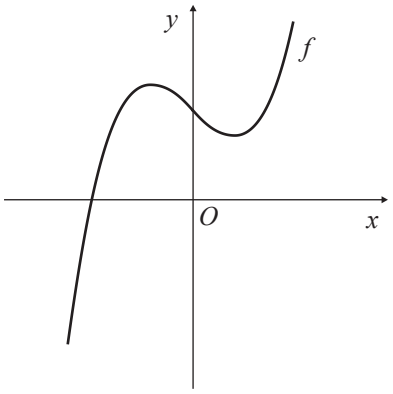
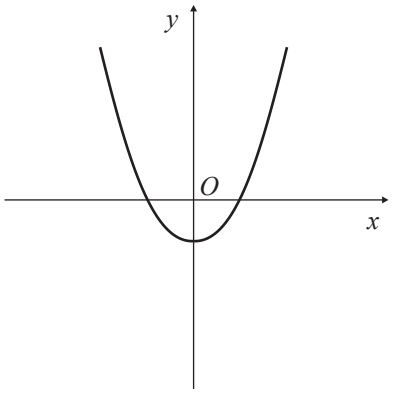


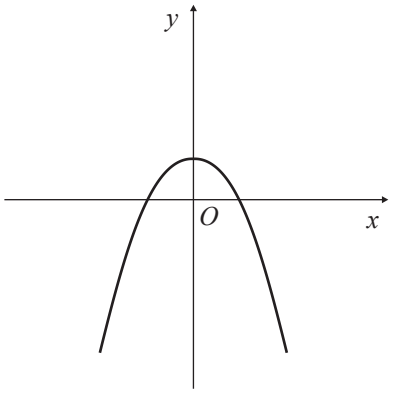
Figura 1

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f'', segunda derivada da função f ?

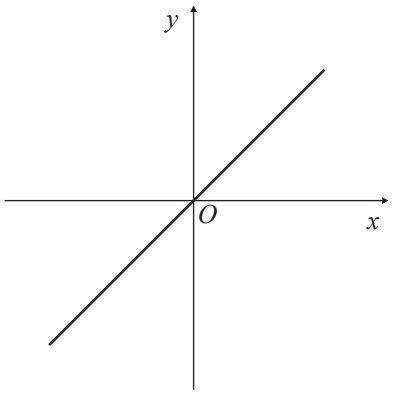
(A)



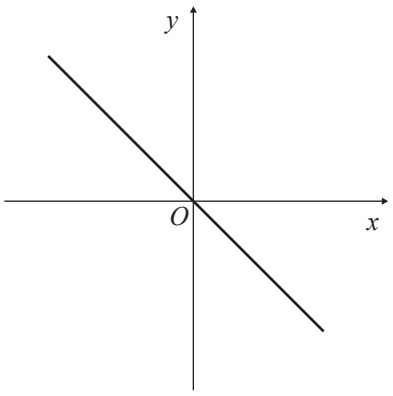
(B)



(C)



(D)



5. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$

Sabe-se que $f'(2)=6$ (f' designa a derivada de f)

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x^2-2x}$?

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6

6. Na Figura 2, está representado, no plano complexo, um quadrado cujo centro coincide com a origem e em que cada lado é paralelo a um eixo.

Os vértices deste quadrado são as imagens geométricas dos complexos z_1, z_2, z_3 e z_4

Qual das afirmações seguintes é **falsa**?

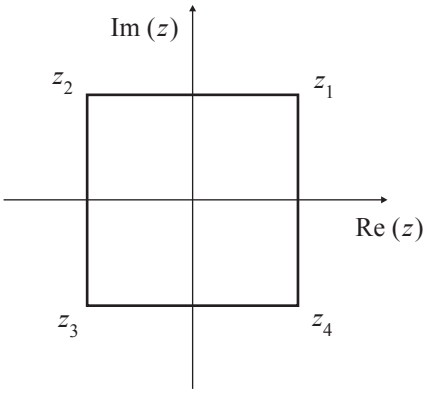


Figura 2

(A) $|z_3-z_1|=|z_4-z_2|$

(B) $z_1+z_4=2\,\mathrm{Re}(z_1)$

(C) $\dfrac{z_4}{i}=z_1$

(D) $-\overline{z_1}=z_2$

7. Os segmentos de reta $[AB]$ e $[BC]$ são lados consecutivos de um hexágono regular de perímetro 12

Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC}$?

(A) -3

(B) -2

(C) 2

(D) 3

8. De uma progressão geométrica (a_n), sabe-se que o terceiro termo é igual a $\dfrac{1}{4}$ e que o sexto termo é igual a 2

Qual é o valor do vigésimo termo?

(A) 8192 **(B)** $16\,384$

(C) $32\,768$ **(D)** $65\,536$

Página em branco

GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z_1 = (1+i)^6$ e $z_2 = \dfrac{8i}{\text{cis}\left(-\frac{6\pi}{5}\right)}$

Sabe-se que as imagens geométricas dos complexos z_1 e z_2 são vértices consecutivos de um polígono regular de n lados, com centro na origem do referencial.

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de n

2. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano β definido pela condição $2x - y + z - 4 = 0$

2.1. Considere o ponto $P(-2, 1, 3a)$, sendo a um certo número real.

Sabe-se que a reta OP é perpendicular ao plano β, sendo O a origem do referencial.

Determine o valor de a

2.2. Considere o ponto $A(1, 2, 3)$

Seja B o ponto de intersecção do plano β com o eixo Ox

Seja C o simétrico do ponto B relativamente ao plano yOz

Determine a amplitude do ângulo BAC

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

2.3. Determine uma equação da superfície esférica de centro na origem do referencial, que é tangente ao plano β

Na resolução deste item, tenha em conta que o raio relativo ao ponto de tangência é perpendicular ao plano β

3. Um saco contém nove bolas numeradas de 1 a 9, indistinguíveis ao tato.

3.1. Retiram-se, sucessivamente e ao acaso, três bolas do saco. As bolas são retiradas com reposição, isto é, repõe-se a primeira bola antes de se retirar a segunda e repõe-se a segunda bola antes de se retirar a terceira.

Qual é a probabilidade de o produto dos números das três bolas retiradas ser igual a 2?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

3.2. Considere agora a seguinte experiência aleatória: retiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas bolas do saco, adicionam-se os respetivos números e colocam-se novamente as bolas no saco.

Considere que esta experiência é repetida dez vezes.

Seja X o número de vezes em que a soma obtida é igual a 7

A variável aleatória X tem distribuição binomial, pelo que

$$P(X=n)={}^{10}C_n\left(\frac{1}{12}\right)^n\left(\frac{11}{12}\right)^{10-n}\ \left(n\in\{0,1,...,10\}\right)$$

Elabore uma composição em que explique:

- como se obtém o valor $\frac{1}{12}$ (probabilidade de sucesso);
- o significado de $\frac{11}{12}$, no contexto da situação descrita;
- o significado da expressão ${}^{10}C_n$, tendo em conta a sequência das dez repetições da experiência.

4. Admita que, ao longo dos séculos XIX, XX e XXI, o número de habitantes, N, em milhões, de uma certa região do globo é dado aproximadamente por

$$N=\frac{200}{1+50e^{-0,25t}}\quad(t\geq 0)$$

em que t é o tempo medido em décadas e em que o instante $t=0$ corresponde ao **final** do ano 1800.

4.1. Determine a taxa média de variação da função N no intervalo $[10,20]$

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Interprete o resultado, no contexto da situação descrita.

4.2. Mostre que $t=\ln\left(\frac{50N}{200-N}\right)^4$

5. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}_0^+$, definida por $f(x) = x^2\, e^{1-x}$

Resolva os itens **5.1.** e **5.2.** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

5.1. Estude a função f quanto à existência de assíntota horizontal.

5.2. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

5.3. Considere, num referencial o.n. xOy, três pontos, A, B e C, tais que:

- os pontos A e B pertencem ao gráfico da função f
- a abcissa do ponto B é maior do que a abcissa do ponto A
- os pontos A e B têm a mesma ordenada, a qual é igual a $1{,}2$
- o ponto C pertence ao eixo Ox e tem abcissa igual à do ponto B

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a área do quadrilátero $[OABC]$, sendo O a origem do referencial.

Na sua resposta:

– reproduza, num referencial, o gráfico da função f no intervalo $[0, 5]$

– apresente o desenho do quadrilátero $[OABC]$

– indique as abcissas dos pontos A e B arredondadas às milésimas;

– apresente a área do quadrilátero arredondada às centésimas.

6. Seja a um número real.

Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a \operatorname{sen} x$

Seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\frac{2\pi}{3}$

Sabe-se que a inclinação da reta r é igual a $\frac{\pi}{6}$ radianos.

Determine o valor de a

FIM

Página em branco

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** ..... (8 × 5 pontos) ..... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1. ..... 15 pontos

2.

2.1. ..... 5 pontos
2.2. ..... 10 pontos
2.3. ..... 15 pontos

3.

3.1. ..... 15 pontos
3.2. ..... 15 pontos

4.

4.1. ..... 10 pontos
4.2. ..... 15 pontos

5.

5.1. ..... 15 pontos
5.2. ..... 15 pontos
5.3. ..... 15 pontos

6. ..... 15 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/Época Especial

Critérios de Classificação 11 Páginas

2015

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de escolha múltipla.

As respostas ilegíveis são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Itens de seleção

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

Itens de construção

Nos itens de resposta restrita e de resposta extensa, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

É classificada com zero pontos qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização da linguagem científica adequada.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados, devidamente identificados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam a realização de cálculos.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelo programa da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora gráfica», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado, que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. ..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

As respostas corretas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
	D	B	C	C	A	C	B	C

GRUPO II

1. ..... **15 pontos**

Escrever z_1 na forma trigonométrica ..... 5 pontos

Escrever $1+i=\sqrt{2}\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ..... 2 pontos

Escrever $z_1=\left(\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^6$ ..... 1 ponto

Escrever $z_1=8\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ ..... 2 pontos

Escrever z_2 na forma trigonométrica ..... 5 pontos

Escrever $8i=8\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ..... 1 ponto

Escrever $z_2=8\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{6\pi}{5}\right)$ ..... 3 pontos

Escrever $z_2=8\ \text{cis}\left(\frac{17\pi}{10}\right)$ ..... 1 ponto

Reconhecer que $\frac{17\pi}{10}-\frac{3\pi}{2}=\frac{2\pi}{n}$ (ou equivalente) ..... 4 pontos

Obter o valor de $n\ (10)$ ..... 1 ponto

2.1. ..... **5 pontos**

Escrever as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$, em função de a ..... 1 ponto

Reconhecer que o vetor $\overrightarrow{OP}$ é colinear com o vetor de coordenadas $(2,-1,1)$ 2 pontos

Obter o valor de $a\ \left(-\frac{1}{3}\right)$ ..... 2 pontos

2.2. ..... **10 pontos**

Obter as coordenadas do ponto B ..... 1 ponto

Indicar as coordenadas do ponto C ..... 1 ponto

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ ..... 1 ponto

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$ ..... 1 ponto

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{AB}$ ..... 1 ponto

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{AC}$ ..... 1 ponto

Obter a amplitude do ângulo BAC (55°) (**ver nota**) ..... 4 pontos

Nota – Se forem considerados dois vetores cujo ângulo tenha amplitude diferente da amplitude do ângulo BAC, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

2.3. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo (recorrendo a uma condição cartesiana da reta que contém o raio relativo ao ponto de tangência)

Seja r a reta que contém o raio relativo ao ponto de tangência e seja T o ponto de tangência.

Reconhecer que o vetor de coordenadas $(2,-1,1)$ é um vetor diretor da reta r.. 1 ponto

Escrever uma condição cartesiana da reta r $\left(\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}\right)$..... 3 pontos

Determinar as coordenadas do ponto T ..... 4 pontos

- Escrever a condição $\frac{x}{2}=z \wedge y=-z \wedge 2x-y+z-4=0$ (ou equivalente) ..... 2 pontos
- Obter as coordenadas do ponto T ..... 2 pontos

Obter $\overline{OT}$ ..... 2 pontos

Escrever a condição $x^2+y^2+z^2=\frac{8}{3}$ (**ver notas 1** e **2**) ..... 5 pontos

2.º Processo (recorrendo a uma equação vetorial da reta que contém o raio relativo ao ponto de tangência)

Seja r a reta que contém o raio relativo ao ponto de tangência e seja T o ponto de tangência

Reconhecer que o vetor de coordenadas $(2,-1,1)$ é um vetor diretor da reta r.. 1 ponto

Escrever uma equação vetorial da reta r ..... 2 pontos

Determinar as coordenadas do ponto T ..... 5 pontos

- Reconhecer que qualquer ponto da reta r tem coordenadas da forma $(2k,-k,k)$, sendo k um número real ..... 2 pontos
- Resolver a equação $2(2k)-(-k)+k-4=0$ (ou equivalente) 2 pontos
- Obter as coordenadas do ponto T ..... 1 ponto

Determinar $\overline{OT}$ ..... 2 pontos

Escrever a condição $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{8}{3}$ (**ver notas 1** e **2**) ..... 5 pontos

Notas:

1. A escrita de $\sqrt{\frac{8}{3}}$, em vez de $\frac{8}{3}$, implica uma desvalorização de 2 pontos nesta etapa.

2. A escrita de $\leq$, em vez de $=$, implica uma desvalorização de 2 pontos nesta etapa.
A escrita de $<$ ou de $>$ ou de $\geq$ implica uma desvalorização de 3 pontos nesta etapa.

3.1. ..... **15 pontos**

Reconhecer que o número de casos possíveis é 9^3 (**ver nota 1**)..... 7 pontos

Reconhecer que o número de casos favoráveis é 3 (**ver nota 2**) ..... 6 pontos

Obter a probabilidade pedida (**ver nota 3**) $\left(\frac{1}{243}\right)$ ..... 2 pontos

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a 9^3, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

2. Se a expressão apresentada não for equivalente a 3, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

3. Se a etapa relativa ao número de casos possíveis e a etapa relativa ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. A mesma pontuação de 0 pontos deve ser atribuída caso o valor obtido não pertença ao intervalo $[0,1]$

3.2. ..... **15 pontos**

A composição deve contemplar os tópicos seguintes:

A) referir que $\frac{1}{12} = \frac{3}{{}^9C_2}$, sendo ${}^9C_2$ o número de casos possíveis (número de maneiras de escolher duas de nove bolas) e 3 o número de casos favoráveis $(1 \text{ e } 6,\ 2 \text{ e } 5,\ 3 \text{ e } 4)$;

B) referir que, no contexto da situação descrita, $\frac{11}{12}$ é a probabilidade de, ao serem retiradas, ao acaso, duas bolas do saco, a soma dos seus números ser diferente de 7

C) referir que ${}^{10}C_n$ é o número de maneiras de escolher as posições dos n sucessos, na sequência das dez provas.

Níveis	Descritores do nível de desempenho	Pontuação
6	Na resposta, são contemplados os três tópicos, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	15
5	Na resposta, são contemplados os três tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	13
4	Na resposta, são contemplados apenas dois tópicos, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	10
3	Na resposta, são contemplados apenas dois tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	8
2	Na resposta, é contemplado apenas um tópico, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	5
1	Na resposta, é contemplado apenas um tópico, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	3

4.1. ..... **10 pontos**

Escrever $tmv_{[10,20]} = \dfrac{N(20) - N(10)}{20 - 10}$ ..... 2 pontos

Obter o valor de $\dfrac{N(20) - N(10)}{20 - 10}$ com a aproximação pedida (11) ..... 3 pontos

Interpretar o valor obtido, no contexto da situação descrita ..... 5 pontos

- Ao longo do século XX o número de habitantes da referida região do globo aumentou, em média, 11 milhões por década.

OU

- Entre os instantes correspondentes a 10 e a 20 décadas, após o final do ano 1800, o número de habitantes da referida região do globo aumentou, em média, 11 milhões por década.

4.2. ..... **15 pontos**

Escrever $N = \dfrac{200}{1 + 50e^{-0,25t}} \Leftrightarrow N(1 + 50e^{-0,25t}) = 200$ ..... 1 ponto

Escrever $N(1 + 50e^{-0,25t}) = 200 \Leftrightarrow N + 50Ne^{-0,25t} = 200$ ..... 1 ponto

Escrever $N + 50N\,e^{-0,25t} = 200 \Leftrightarrow e^{-0,25t} = \dfrac{200 - N}{50N}$ ..... 2 pontos

Escrever $e^{-0,25t} = \dfrac{200 - N}{50N} \Leftrightarrow -0,25t = \ln\left(\dfrac{200 - N}{50N}\right)$ ..... 3 pontos

Escrever $-0,25t = \ln\left(\dfrac{200 - N}{50N}\right) \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{0,25}\ln\left(\dfrac{200 - N}{50N}\right)$ ..... 1 ponto

Escrever $t = -\dfrac{1}{0,25}\ln\left(\dfrac{200 - N}{50N}\right) \Leftrightarrow t = -4\ln\left(\dfrac{200 - N}{50N}\right)$ ..... 2 pontos

Escrever $t = -4\ln\left(\dfrac{200 - N}{50N}\right) \Leftrightarrow t = \ln\left(\dfrac{200 - N}{50N}\right)^{-4}$ ..... 3 pontos

Escrever $t = \ln\left(\dfrac{200 - N}{50N}\right)^{-4} \Leftrightarrow t = \ln\left(\dfrac{50N}{200 - N}\right)^{4}$ ..... 2 pontos

5.1. ..... **15 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ..... 13 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 e^{1-x})$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 e^{1-x}) = e \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 e^{-x})$ ..... 3 pontos

Escrever $e \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 e^{-x}) = e \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$ ..... 3 pontos

Escrever $e \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = e \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{e^x}{x^2}}$ ..... 3 pontos

Referir que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ ..... 1 ponto

Escrever $e \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{e^x}{x^2}} = 0$ ..... 2 pontos

Concluir que a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico da função f ..... 2 pontos

5.2. ..... **15 pontos**

Determinar $f'(x)$ (**ver nota**) ..... 4 pontos

Aplicar a regra de derivação do produto de duas funções ..... 2 pontos

Escrever $f'(x) = 2xe^{1-x} - x^2 e^{1-x}$ ..... 2 pontos

Escrever a equação $f'(x) = 0$ ..... 1 ponto

Resolver a equação $f'(x) = 0$ ..... 5 pontos

Escrever $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(-x^2 + 2x) = 0$ ..... 2 pontos

Escrever $e^{1-x}(-x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x = 0$ ..... 2 pontos

Concluir que $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$ ..... 1 ponto

Estudar a função f quanto à monotonia ..... 5 pontos

Apresentar um quadro de sinal de f' e de monotonia de f (ou equivalente) ..... 3 pontos

Concluir que a função tem um mínimo para $x = 0$ ..... 1 ponto

Concluir que a função tem um máximo para $x = 2$ ..... 1 ponto

Nota – Se for evidente a intenção de determinar a expressão da derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é de 1 ponto.

5.3. ..... **15 pontos**

Reproduzir o gráfico da função f no intervalo $[0,5]$ (**ver notas 1** e **2**) ..... 3 pontos

Desenhar o quadrilátero $[OABC]$ ..... 4 pontos

Determinar a abcissa do ponto A ..... 2 pontos

Determinar a abcissa dos pontos B e C ..... 2 pontos

Escrever uma expressão que dê a área do quadrilátero $[OABC]$ ..... 2 pontos

Obter a área pedida $(2{,}92)$ ..... 2 pontos

Notas:

1. Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

2. Se for apresentado um gráfico que não respeite o domínio da função, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

6. ..... **15 pontos**

Identificar o declive da reta r com $f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ ..... 2 pontos

Determinar $f'(x)$ ..... 3 pontos

Determinar $f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, em função de a ..... 3 pontos

Escrever $f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ (ou equivalente) ..... 4 pontos

Obter o valor de $a\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ ..... 3 pontos

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** ..... (8 × 5 pontos) ..... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1. ..... 15 pontos

2.

2.1. ..... 5 pontos
2.2. ..... 10 pontos
2.3. ..... 15 pontos

3.

3.1. ..... 15 pontos
3.2. ..... 15 pontos

4.

4.1. ..... 10 pontos
4.2. ..... 15 pontos

5.

5.1. ..... 15 pontos
5.2. ..... 15 pontos
5.3. ..... 15 pontos

6. ..... 15 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

Exame final nacional de Matemática A **(2015, Época especial)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, substituindo os valores conhecidos, podemos calcular $P(A)$:

$$0{,}7 = P(A) + 0{,}4 - 0{,}2 \Leftrightarrow 0{,}7 - 0{,}4 + 0{,}2 = P(A) \Leftrightarrow 0{,}5 = P(A)$$

Como $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, vem que

$$P(B|A) = \frac{0{,}2}{0{,}5} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

Resposta: **Opção D**

2. Calculando o número de grupos ordenados de três rapazes, temos ${}^3A_3 = P_3 = 3!$ hipóteses para dispor os três rapazes juntos.
E por cada grupo de rapazes, existem ${}^7A_7 = P_7 = 7!$ ordenações possíveis dos nove jovens, correspondendo à disposição das 6 raparigas e do grupo de rapazes, considerando a ordenação relevante.
Assim, o número de maneiras de dispor os nove jovens, com os três rapazes juntos é

$$3! \times 7! = 30\,240$$

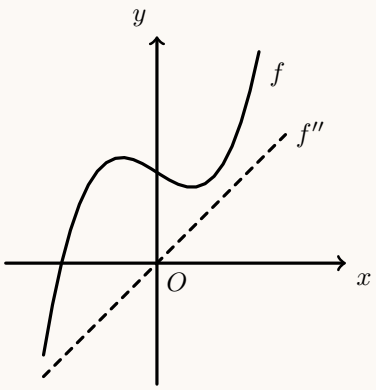
Resposta: **Opção B**

3. Como o ponto P pertence ao gráfico de f, substituindo as suas coordenadas na expressão algébrica da função, temos que

$$8 = e^{a \ln 2} \Leftrightarrow 8 = \left(e^{\ln 2}\right)^a \Leftrightarrow 8 = 2^a \Leftrightarrow a = \log_2 8 \Leftrightarrow a = 3$$

Resposta: **Opção C**

4. Por observação do gráfico de f, podemos observar o sentido das concavidades e relacionar com o sinal da segunda derivada, f'' (admitindo que o ponto de inflexão tem abcissa zero).



x		0	
$f(x)$	∩	Pt. I.	∪
$f''(x)$	$-$	0	$+$

O único gráfico compatível com o sentido das concavidades do gráfico identificadas é o gráfico da opção (C).

Resposta: **Opção C**

5. Temos que, pela definição de derivada num ponto $f'(2) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = 6$

Assim, vem que

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x^2-2x} = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x(x-2)} = \lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x} \times \frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x} \times \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

Resposta: **Opção A**

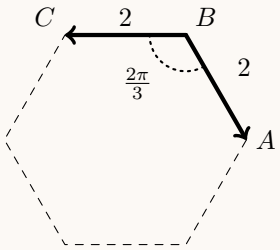
6. Analisando cada uma das afirmações temos

- **(A)** $|z_3 - z_1| = |z_4 - z_2|$ é uma afirmação **verdadeira** porque $|z_3 - z_1|$ é a distância entre os vértices correspondentes ao complexos z_3 e z_1, (ou seja a medida da diagonal do quadrado), tal como $|z_4 - z_2|$ representa a medida da outra diagonal do quadrado.
  Como as medidas das diagonais do quadrado são iguais, a afirmação é verdadeira.
- $z_1 + z_4 = 2\,\mathrm{Re}\,(z_1)$ é uma afirmação **verdadeira** porque como o centro do quadrado está centrado na origem e os lados são paralelos aos eixos, os vértices do quadrado estão sobre as bissetrizes dos quadrantes, ou seja, $z_1 = a + ai$ e $z_4 = a - ai$, com $a \in \mathbb{R}^+$
  Assim, vem que $z_1 + z_4 = a + ai + a - ai = 2a = 2\,\mathrm{Re}\,(z_1)$
- **(C)** $\dfrac{z_4}{i} = z_1$ é uma afirmação **falsa** porque $\dfrac{z_4}{i} = z_1 \Leftrightarrow z_4 = z_1 \times i$ e $z_1 = a + ai$ e $z_4 = a - ai$, com $a \in \mathbb{R}^+$
  Como $z_1 \times i = (a + ai) \times i = ai + ai^2 = ai + a(-1) = ai - a = -a + ai = z_2$
  Ou seja, multiplicar por i corresponde geometricamente a fazer uma rotação de $\dfrac{\pi}{2}$ radianos, no sentido positivo. Assim, fazendo a uma rotação deste tipo da imagem geométrica de z_1, obtemos a imagem geométrica de z_2 e não a imagem geométrica de z_4
- **(D)** $-\overline{z_1} = z_2$ é uma afirmação **verdadeira** porque $z_1 = a + ai$ e $z_2 = -a + ai$, com $a \in \mathbb{R}^+$
  Logo $-\overline{z_1} = -\left(\overline{a + ai}\right) = -(a - ai) = -a + ai = z_2$

Resposta: **Opção C**

7. Como os segmentos de reta $[AB]$ e $[BC]$ são lados consecutivos de um hexágono regular de perímetro 12, temos que:

$$\left\|\overrightarrow{BA}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \frac{12}{6} = 2$$



Como os hexágonos regulares podem ser decompostos em seis triângulos equiláteros, cada ângulo interno do hexágono regular tem o dobro da amplitude dos ângulos internos de um triângulo equilátero, ou seja:

$$\overrightarrow{BA}\widehat{\ }\overrightarrow{BC} = 2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

Assim, vem que

$$\overrightarrow{BA} \,.\, \overrightarrow{BC} = \cos\left(\overrightarrow{BA}\widehat{\ }\overrightarrow{BC}\right) \times \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \times 2 \times 2 = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \times 4 = -\frac{1}{2} \times 4 = -\frac{4}{2} = -2$$

Resposta: **Opção B**

8. Como (a_n) é progressão geométrica (a_n), designado por r a razão, temos que o termo de ordem n é

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

Assim, temos que

- $a_3 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a_1 \times r^{3-1} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a_1 \times r^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{4 \times r^2}$
- $a_6 = 2 \Leftrightarrow a_1 \times r^{6-1} = 2 \Leftrightarrow a_1 \times r^5 = 2 \Leftrightarrow a_1 = \frac{2}{r^5}$

Desta forma, podemos calcular o valor da razão:

$$\frac{1}{4 \times r^2} = \frac{2}{r^5} \Leftrightarrow \frac{r^5}{r^2} = 2 \times 4 \Leftrightarrow r^3 = 8 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow r = 2$$

E o valor do primeiro termo:

$$a_6 = 2 \Leftrightarrow a_1 = \frac{2}{r^5} \underset{r=2}{\Leftrightarrow} a_1 = \frac{2}{2^5} \Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{2^4}$$

Assim, calculado o valor do vigésimo termo, vem

$$a_{20} = a_1 \times r^{20-1} = \frac{1}{2^4} \times 2^{19} = \frac{2^{19}}{2^4} = 2^{19-4} = 2^{15} = 32\,768$$

Resposta: **Opção C**

GRUPO II

1. Escrevendo $1+i$ na f.t. temos $1+i=\rho\,\text{cis}\,\theta$, onde:

   - $\rho=|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$
   - $\text{tg}\,\theta=\dfrac{1}{1}=1$; como $\text{sen}\,\theta>0$ e $\cos\theta>0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta=\dfrac{\pi}{4}$

   E assim $1+i=\sqrt{2}\,\text{cis}\,\dfrac{\pi}{4}$, pelo que, recorrendo à fórmula de Moivre, temos

   $$z_1=(1+i)^6=\left(\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4}\right)^6=\left(\sqrt{2}\right)^6\,\text{cis}\,\left(\frac{\pi}{4}\times 6\right)=\left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^3\,\text{cis}\,\frac{6\pi}{4}=2^3\,\text{cis}\,\frac{3\pi}{2}=8\,\text{cis}\,\frac{3\pi}{2}$$

   Como $8i=8\,\text{cis}\,\dfrac{\pi}{2}$, calculando o quociente de complexos na f.t., temos:

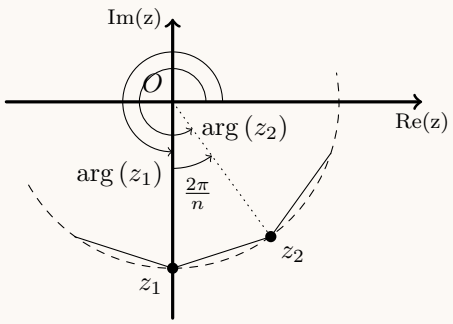
   $$z_2=\frac{8i}{\text{cis}\left(-\frac{6\pi}{5}\right)}=\frac{8\,\text{cis}\,\frac{\pi}{2}}{\text{cis}\left(-\frac{6\pi}{5}\right)}=\frac{8}{1}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{6\pi}{5}\right)\right)=8\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{6\pi}{5}\right)=$$

   $$=8\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{10}+\frac{12\pi}{10}\right)=8\,\text{cis}\,\frac{17\pi}{10}$$

   Como um polígono regular de n lados, pode ser dividido em n triângulos isósceles, em que a soma dos ângulos adjacentes, junto da origem é 2π, então cada um destes ângulo tem amplitude $\dfrac{2\pi}{n}$

   Como as imagens geométricas de z_1 e z_2 são vértices de um destes triângulos então os respetivos argumentos diferem de $\dfrac{2\pi}{n}$, ou seja

   $$\arg(z_2)-\arg(z_1)=\frac{2\pi}{n}$$

   Assim, temos que

   $$\arg(z_2)-\arg(z_1)=\frac{2\pi}{n}\Leftrightarrow\frac{17\pi}{10}-\frac{3\pi}{2}=\frac{2\pi}{n}\Leftrightarrow\frac{17\pi}{10}-\frac{15\pi}{10}=\frac{2\pi}{n}\Leftrightarrow\frac{2\pi}{10}=\frac{2\pi}{n}\Leftrightarrow n=\frac{2\pi\times 10}{2\pi}\Leftrightarrow n=10$$

2.

   2.1. Como a reta OP é perpendicular ao plano β, qualquer vetor com a direção da reta (e em particular o $\overrightarrow{OP}$) e o vetor normal do plano $\vec{u}$ são colineares.

   Temos que $\vec{u}=(2,-1,1)$ e $\overrightarrow{OP}=P-O=(-2,1,3a)-(0,0,0)=(-2,1,3a)$

   Como os vetores são colineares, temos que $\overrightarrow{OP}=\lambda\vec{u},\lambda\in\mathbb{R}$

   $$(-2,1,3a)=\lambda(2,-1,1)\Leftrightarrow -2=2\lambda\wedge 1=-1\lambda\wedge 3a=\lambda\Leftrightarrow -1\lambda\wedge -1=\lambda\wedge a=\frac{\lambda}{3}$$

   Logo, temos que:

   $$a=\frac{-1}{3}\Leftrightarrow a=-\frac{1}{3}$$

2.2. Como o ponto B pertence ao eixo Ox, tem ordenada e cota nulas, pelo que, podemos determinar a sua abcissa, recorrendo à equação do plano β:

$$2x - y + z - 4 = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0 \Rightarrow 2x - 0 + 0 - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

E assim temos as coordenadas do ponto B, $B(2,0,0)$ e podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$, e a sua norma:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,0,0) - (1,2,3) = (1, -2, -3)$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

Como o ponto C é o simétrico do ponto B relativamente ao plano yOz, tem as mesmas ordenada e cota, e abcissa simétrica, ou seja, as coordenadas do ponto C são $C(-2,0,0)$ e podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$, e a sua norma:

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-2,0,0) - (1,2,3) = (-3, -2, -3)$$

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9 + 4 + 9} = \sqrt{22}$$

Recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}\widehat{\ }\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{(1, -2, -3).(-3, -2, -3)}{\sqrt{14} \times \sqrt{22}} = \frac{-3 + 4 + 9}{\sqrt{14 \times 22}} = \frac{10}{\sqrt{308}}$$

Logo, a amplitude do ângulo BAC, em graus, arredondado às unidades, é

$$B\hat{A}C = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{308}}\right) \approx 55^\circ$$

2.3. A reta OP é perpendicular ao plano β e contém o centro da superfície esférica, pelo que a interseção da reta OP com o plano β é o ponto de tangência.
Usando os elementos do item anterior para determinar equações cartesianas da reta OP, considerando o ponto da reta $O = (0,0,0)$ e o vetor diretor $\overrightarrow{OP} = \left(-2{,}1{,}3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = (-2{,}1, -1)$, temos as equações:

$$\frac{x-0}{-2} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{-1} \Leftrightarrow -\frac{x}{2} = y = -z$$

Determinado as coordenadas do ponto de interseção da reta OP com o plano β, vem:

$$\begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0 \\ -\frac{x}{2} = y \\ y = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(-2y) - y + (-y) - 4 = 0 \\ x = -2y \\ -y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4y - y - y - 4 = 0 \\ x = -2y \\ -y = z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6y = 4 \\ x = -2y \\ -y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{-6} \\ x = -2y \\ -y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{3} \\ x = -2\left(-\frac{2}{3}\right) \\ -\left(-\frac{2}{3}\right) = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{3} \\ x = \frac{4}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Assim, o ponto de tangência da superfície esférica com o plano β é o ponto $Q\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e a medida do raio é

$$\overline{OQ} = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - 0\right)^2 + \left(-\frac{2}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{24}{9}}$$

E assim, a equação da superfície esférica é

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = \left(\sqrt{\frac{24}{9}}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{24}{9}$$

3.

3.1. Determinando a probabilidade com recurso à Regra de LaPlace, calculamos o quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis, sendo os casos possíveis equiprováveis.

Para calcular o número de casos possíveis, calculamos o número de arranjos completos (porque pode haver repetição) de 9 elementos (bolas) para 3 posições (extrações), ou seja, ${}^{9}A'_{3} = 9^3 = 729$ casos possíveis.

O número de casos favoráveis pode ser calculado observando que a única combinação de números que gera um produto igual a dois é a extração de uma única bola com o número 2 e as restantes duas extrações da bola com o número 1.
Como no cálculo do número de casos possíveis consideramos a ordem relevante, neste caso também deve ser considerado, pelo que temos que escolher a posição da extração da bola com o número 2: ${}^{3}C_{2} = 3$ casos favoráveis.
(Poderíamos escrever ${}^{3}C_{2} \times 1 \times 1 \times 1$ para enfatizar que depois de escolher a posição de ocorrência da extração da bola com o número 2, existe apenas 1 bola que gera um caso favorável, em cada extração).

Assim, calculando a probabilidade com recurso à Regra de Laplace, e apresentando o resultado na forma o resultado na forma de fração irredutível, temos

$$p = \frac{{}^{3}C_{2}}{9^3} = \frac{1}{243}$$

3.2. Como a variável X segue distribuição binomial, na repetição independente de 10 provas da mesma experiência, temos que, a probabilidade do sucesso é a probabilidade de ocorrência do acontecimento definido, ou seja, a probabilidade de que a soma das duas bolas retiradas seja 7, em cada uma das repetições da experiência aleatória.
Como existem 9 bolas no saco, existem ${}^{9}C_{2}$ pares de bolas, que se podem retirar simultaneamente, ou seja, o número de casos possíveis em cada realização da experiência. O número de casos favoráveis é 3 (correspondentes às somas 1+6, 2+5 e 3+4), pelo que a probabilidade é

$$p = \frac{3}{{}^{9}C_{2}} = \frac{1}{12}$$

A ocorrência de n sucessos, implica a ocorrência de $10-n$ insucessos, pelo que $\frac{11}{12}$, é a probabilidade do insucesso, ou seja, a probabilidade de que não ocorra a soma 7, em cada uma das realizações da experiência aleatória.

A expressão ${}^{10}C_{n}$ permite considerar que os n sucessos esperados ocorram em qualquer conjunto de n experiências, no universo das 10 realizações, ou seja, o número de posições diferentes na sequência de 10 realizações, em que podem ocorrer os n sucessos.

4.

4.1. Calculando as imagens dos objetos 20 e 10, temos

$$N(20) = \frac{200}{1+50e^{-0,25\times 20}} = \frac{200}{1+50e^{-5}} \approx 149,60$$

$$N(10) = \frac{200}{1+50e^{-0,25\times 10}} = \frac{200}{1+50e^{-2,5}} \approx 39,18$$

E assim, calculando a taxa média de variação da função N no intervalo $[10,20]$ e apresentando o resultado arredondado às unidades, temos

$$TVM_{[10,20]} = \frac{N(20)-N(10)}{20-10} \approx \frac{149,60-39,18}{10} \approx \frac{110,42}{10} \approx 11,042 \approx 11$$

No contexto da situação descrita, o valor da taxa média de variação significa que entre os anos de 1900 e 2000 o número de habitantes, da região do globo em causa, cresceu em média aproximadamente 11 milhões em cada década.

4.2. Resolvendo em ordem a t, temos:

$$N = \frac{200}{1+50e^{-0,25t}} \Leftrightarrow 1+50e^{-0,25t} = \frac{200}{N} \Leftrightarrow 50e^{-0,25t} = \frac{200}{N} - 1 \Leftrightarrow 50e^{-0,25t} = \frac{200}{N} - \frac{N}{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 50e^{-0,25t} = \frac{200-N}{N} \Leftrightarrow e^{-0,25t} = \frac{200-N}{50N} \Leftrightarrow -0,25t = \ln\left(\frac{200-N}{50N}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{200-N}{50N}\right)}{-0,25} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{0,25}\ln\left(\frac{200-N}{50N}\right) \Leftrightarrow t = -\frac{1}{\frac{25}{100}}\ln\left(\frac{200-N}{50N}\right) \Leftrightarrow t = -\frac{100}{25}\ln\left(\frac{200-N}{50N}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = -4\ln\left(\frac{200-N}{50N}\right) \Leftrightarrow t = \ln\left(\frac{200-N}{50N}\right)^{-4} \Leftrightarrow t = \ln\left(\frac{50N}{200-N}\right)^{4}$$

5.

5.1. Como o domínio da função é $\mathbb{R}_0^+$, a eventual existência de uma assíntota horizontal será quando $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^2e^{1-x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^2\times\frac{e^1}{e^x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(e\times\frac{x^2}{e^x}\right) = \lim_{x\to+\infty} e \times \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} =$$

$$= e\times\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} = e\times\frac{\lim_{x\to+\infty}1}{\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}}_{\text{Lim. Notável}}} = e\times\frac{1}{+\infty} = e\times 0 = 0$$

Logo, como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, podemos concluir que a reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal do gráfico de f

5.2. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f:

$$f'(x) = \left(x^2 e^{1-x}\right)' = \left(x^2\right)' \times e^{1-x} + x^2 \times \left(e^{1-x}\right)' = 2xe^{1-x} + x^2 \times (1-x)' \times e^{1-x} =$$

$$= 2xe^{1-x} + x^2 \times (-1) \times e^{1-x} = 2xe^{1-x} - x^2 e^{1-x}$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função ($\mathbb{R}_0^+$), vem:

$$2xe^{1-x} - x^2 e^{1-x} = 0 \Leftrightarrow xe^{1-x}(2-x) = 0 \Leftrightarrow xe^{1-x} = 0 \vee 2 - x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee \underbrace{e^{1-x} = 0}_{\text{Impossível}} \vee 2 = x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

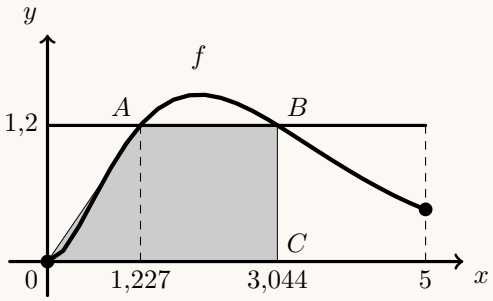
Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		2	$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	min	↗	Máx	↘

Assim, podemos concluir que a função f:

- é crescente no intervalo [0,2];
- é decrescente no intervalo $[2, +\infty[$;
- tem um mínimo para $x = 0$
- tem um máximo para $x = 2$

5.3. Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função f, e a reta horizontal de equação $y = 1{,}2$, numa janela compatível com o intervalo definido ($x \in [0,5]$), (reproduzido na figura ao lado), e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, obtemos valores aproximados (às milésimas) para as coordenadas dos pontos A e B: $A(1{,}227; 1{,}2)$ e $B(3{,}044; 1{,}2)$
Assim, podemos também assumir o valor aproximado de 3,044 para a abcissa do ponto C e representar o quadrilátero $[OABC]$, constatando que é um trapézio.



Desta forma temos as medidas aproximadas da base maior ($\overline{OC} = x_C - x_O \approx 3{,}044 - 0 \approx 3{,}044$), da base menor ($\overline{AB} = x_B - x_A \approx 3{,}044 - 1{,}227 \approx 1{,}817$) e da altura ($\overline{BC} = y_B - y_C \approx 1{,}2 - 0 \approx 1{,}2$), pelo que a área do trapézio $[OABC]$, arredondada às centésimas, é

$$A_{[OABC]} = \frac{\overline{OC} + \overline{AB}}{2} \times \overline{BC} \approx \frac{3{,}044 + 1{,}817}{2} \times 1{,}2 \approx 2{,}92$$

6. Como a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $\frac{2\pi}{3}$, o declive da reta r é o valor da função derivada no ponto de abcissa $\frac{2\pi}{3}$: $\left(m_r = f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

   Assim, temos

$$f'(x) = \left(a \operatorname{sen} x\right)' = (a)'(\operatorname{sen} x) + a\left(\operatorname{sen} x\right)' = 0 + a\cos x = a\cos x$$

   pelo que

$$m_r = f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = a\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = a\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = a\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{a}{2}$$

   Como o declive de uma reta é a tangente da inclinação, temos também que

$$m_r = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

   E assim, igualando as duas expressões para o declive da reta r, podemos calcular o valor de a:

$$-\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow a = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

2016

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/1.ª Fase 14 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2016

VERSÃO 1

Nos termos da lei em vigor, as provas de avaliação externa são obras protegidas pelo Código do Direito de Autor e dos Direitos Conexos. A sua divulgação não suprime os direitos previstos na lei. Assim, é proibida a utilização destas provas, além do determinado na lei ou do permitido pelo IAVE, I.P., sendo expressamente vedada a sua exploração comercial.

Página em branco

Indique de forma legível a versão da prova.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \ \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\ e^u$

$(a^u)' = u'\ a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Página em branco

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- $P(A) = \frac{2}{5}$
- $P(B) = \frac{3}{10}$
- $P\left(A \mid B\right) = \frac{1}{6}$

Qual é o valor de $P\left(A \cup B\right)$?

(A) $\frac{4}{5}$ **(B)** $\frac{7}{10}$ **(C)** $\frac{13}{20}$ **(D)** $\frac{19}{30}$

2. Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio 10

Sabe-se que $P(7 < X < 10) = 0{,}3$

Qual é o valor de $P(X > 13)$?

(A) $0{,}1$ **(B)** $0{,}2$ **(C)** $0{,}3$ **(D)** $0{,}4$

3. Seja a um número real diferente de 0

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to a} \frac{a e^{x-a} - a}{x^2 - a^2}$?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** 1 **(D)** 2

4. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^-$

Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x) + e^x - x}{x} = 1$
- o gráfico de f tem uma assíntota oblíqua.

Qual é o declive dessa assíntota?

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** 2

5. Na Figura 1, estão representados o círculo trigonométrico e um trapézio retângulo $[OPQR]$

Sabe-se que:

- o ponto P tem coordenadas $(0,1)$
- o ponto R pertence ao quarto quadrante e à circunferência.

Seja α a amplitude de um ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{OR}$

Qual das expressões seguintes dá a área do trapézio $[OPQR]$, em função de α ?

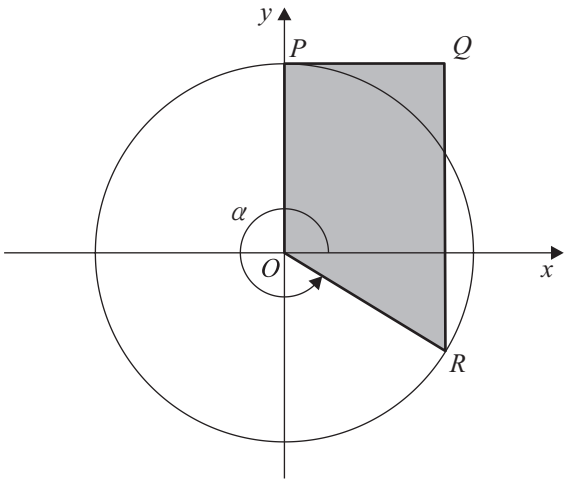


Figura 1

(A) $\dfrac{\cos\alpha}{2} + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ **(B)** $\dfrac{\cos\alpha}{2} - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

(C) $\cos\alpha + \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}$ **(D)** $\cos\alpha - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}$

6. Seja θ um número real pertencente ao intervalo $\left]\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right[$

Considere o número complexo $z = -3\operatorname{cis}\theta$

A que quadrante pertence a imagem geométrica do complexo z ?

(A) Primeiro **(B)** Segundo **(C)** Terceiro **(D)** Quarto

7. Na Figura 2, está representado um triângulo isósceles $[ABC]$

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{2}$
- $B\hat{A}C = 75^{\circ}$

Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$?

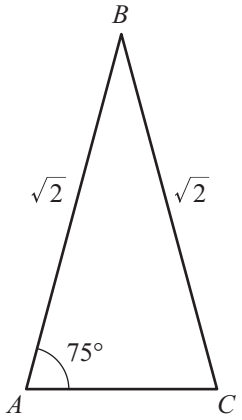


Figura 2

(A) $\sqrt{2}$

(B) $2\sqrt{2}$

(C) $\sqrt{3}$

(D) $2\sqrt{3}$

8. Considere as sucessões (u_n) e (v_n) de termos gerais

$u_n = \frac{kn+3}{2n}$ (k é um número real) e $v_n = \ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$

Sabe-se que $\lim(u_n) = \lim(v_n)$

Qual é o valor de k ?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** e **(D)** $2e$

Página em branco

GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = \frac{8\,\mathrm{cis}\,\theta}{-1+\sqrt{3}\,i} \quad \text{e} \quad z_2 = \mathrm{cis}(2\theta)$$

Determine o valor de θ pertencente ao intervalo $]0,\pi[$, de modo que $\overline{z_1} \times z_2$ seja um número real.

2. Considere nove bolas, quatro numeradas com o número 1, quatro com o número 2 e uma com o número 4.

2.1. Colocam-se as nove bolas, que são indistinguíveis ao tato, num saco vazio. Em seguida, retiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas bolas desse saco.

Seja X a variável aleatória: «produto dos números das duas bolas retiradas».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X

Apresente as probabilidades na forma de fração irredutível.

2.2. Considere agora que se colocam as nove bolas lado a lado, de modo a formar um número com nove algarismos.

Quantos números ímpares diferentes se podem obter?

3. Na Figura 3, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$

Sabe-se que:

- a base $[ABCD]$ da pirâmide é paralela ao plano xOy
- o ponto A tem coordenadas $(-1,1,1)$
- o ponto C tem coordenadas $(-3,3,1)$
- o plano BCV é definido pela equação $3y+z-10=0$

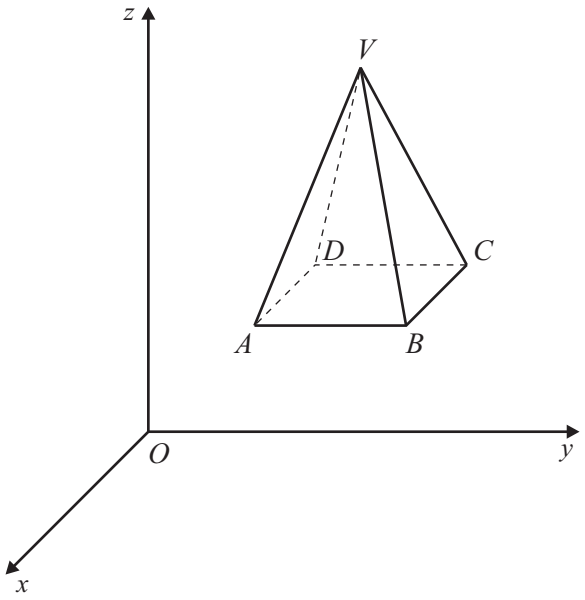


Figura 3

3.1. Escreva uma condição que defina a superfície esférica de centro no ponto A e que é tangente ao plano xOy

3.2. Determine as coordenadas do ponto V

3.3. Seja α o plano perpendicular à reta AC e que passa no ponto $P(1,-2,-1)$

A intersecção dos planos α e BCV é uma reta.

Escreva uma equação vetorial dessa reta.

4. Num dia de vento, são observadas oscilações no tabuleiro de uma ponte suspensa, construída sobre um vale.

Mediu-se a oscilação do tabuleiro da ponte durante um minuto.

Admita que, durante esse minuto, a distância de um ponto P do tabuleiro a um ponto fixo do vale é dada, em metros, por

$$h(t)=20+\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t)+t\,\text{sen}(2\pi t) \qquad (t \text{ é medido em minutos e pertence a } [0,1])$$

4.1. Sejam M e m, respetivamente, o máximo e o mínimo absolutos da função h no intervalo $[0,1]$

A amplitude A da oscilação do tabuleiro da ponte, neste intervalo, é dada por $A=M-m$

Determine o valor de A, recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora apenas para efetuar eventuais cálculos numéricos.

Apresente o resultado em metros.

4.2. Em $[0,1]$, o conjunto solução da inequação $h(t) < 19{,}5$ é um intervalo da forma $]a,b[$

Determine o valor de $b-a$ arredondado às centésimas, recorrendo à calculadora gráfica, e interprete o resultado obtido no contexto da situação descrita.

Na sua resposta:

- reproduza o gráfico da função h visualizado na calculadora (sugere-se que, na janela de visualização, considere $y \in [19,21]$);
- apresente o valor de a e o valor de b arredondados às milésimas;
- apresente o valor de $b-a$ arredondado às centésimas;
- interprete o valor obtido no contexto da situação descrita.

5. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, cuja **derivada**, f', de domínio $\mathbb{R}$, é dada por

$$f'(x) = e^x\left(x^2+x+1\right)$$

Resolva os itens **5.1.** e **5.2.** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

5.1. Sejam p e q dois números reais tais que

$$p = \lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} \qquad \text{e} \qquad q = -\frac{1}{p}$$

Determine o valor de q e interprete geometricamente esse valor.

5.2. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

6. Considere a função f, de domínio $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, definida por $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

Resolva os itens **6.1.** e **6.2.** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

6.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

6.2. Seja a um número real maior do que 1

Mostre que a reta secante ao gráfico de f nos pontos de abcissas a e $-a$ passa na origem do referencial.

FIM

COTAÇÕES

<table>
<tr><td rowspan="2">Grupo</td><td colspan="12">Item</td></tr>
<tr><td colspan="12">Cotação (em pontos)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">I</td><td colspan="12">1. a 8.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="12">8 × 5 pontos</td><td>40</td></tr>
<tr><td rowspan="2">II</td><td>1.</td><td>2.1.</td><td>2.2.</td><td>3.1.</td><td>3.2.</td><td>3.3.</td><td>4.1.</td><td>4.2.</td><td>5.1.</td><td>5.2.</td><td>6.1.</td><td>6.2.</td><td></td></tr>
<tr><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>5</td><td>10</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>10</td><td>160</td></tr>
<tr><td colspan="13">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>

ESTA FOLHA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 635

1.ª Fase

VERSÃO 1

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/1.ª Fase

Critérios de Classificação 11 Páginas

2016

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de escolha múltipla.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Itens de seleção

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

Itens de construção

Nos itens de resposta restrita e de resposta extensa, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada de vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados, devidamente identificados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelo programa da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora gráfica», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. ..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

Chave:

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	C	B	B	D	D	A	C	B
Versão 2	D	C	D	B	C	D	A	A

GRUPO II

1. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $-1+\sqrt{3}\,i$ na forma trigonométrica ..... 1 ponto

Escrever um argumento de z_1, em função de θ ..... 3 pontos

Escrever um argumento de $\overline{z_1}$, em função de θ ..... 3 pontos

Escrever um argumento de $\overline{z_1} \times z_2$, em função de θ ..... 3 pontos

Escrever uma condição em θ para que $\overline{z_1} \times z_2$ seja um número real (**ver nota**) 3 pontos

Obter o valor de θ pertencente ao intervalo $]0,\pi[$ $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ..... 2 pontos

Nota – Se for apresentada apenas a condição $\theta+\frac{2\pi}{3}=0$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 1 ponto. Se for apresentada a condição $\theta+\frac{2\pi}{3}=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 2 pontos.

Em ambas as situações, a pontuação a atribuir na etapa seguinte é 0 pontos.

2.º Processo

Escrever $8\,\mathrm{cis}\,\theta$ na forma algébrica $\left(8\cos\theta+i\,8\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$ ..... 1 ponto

Escrever z_1 na forma algébrica

$\left(2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\theta-2\cos\theta+i\left(-2\sqrt{3}\,\cos\theta-2\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\right)$ ..... 2 pontos

Escrever $\overline{z_1}$ na forma algébrica

$\left(2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\theta-2\cos\theta+i\left(2\sqrt{3}\,\cos\theta+2\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\right)$ ..... 1 ponto

Escrever $\overline{z_1} \times z_2$ na forma algébrica $\left(-4\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)+i\,4\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\right)$ ..... 6 pontos

Escrever a condição $\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=0$ ..... 1 ponto

Escrever a condição $\frac{\pi}{3}-\theta=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ (**ver nota**) ..... 2 pontos

Obter o valor de θ pertencente ao intervalo $]0,\pi[$ $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ..... 2 pontos

Nota – Se for apresentada apenas a condição $\frac{\pi}{3}-\theta=0$ ou apenas a condição $\frac{\pi}{3}-\theta=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

2.1. ..... **15 pontos**

Apresentar os valores da variável ..... 2 pontos

Determinar o valor de $P(X=1)$ $\left(\frac{1}{6}\right)$ ..... 3 pontos

Determinar o valor de $P(X=2)$ $\left(\frac{4}{9}\right)$ ..... 3 pontos

Determinar o valor de $P(X=4)$ $\left(\frac{5}{18}\right)$ ..... 3 pontos

Determinar o valor de $P(X=8)$ $\left(\frac{1}{9}\right)$ ..... 3 pontos

Apresentar a tabela pedida ..... 1 ponto

Nota – No cálculo de cada uma das probabilidades, se o número de casos possíveis estiver correto $\left({}^9C_2 \text{ ou } {}^9A_2\right)$ e o número de casos favoráveis estiver incorreto, a pontuação a atribuir à etapa respetiva é 1 ponto, desde que a fração designe um número pertencente ao intervalo $[0,1]$

Se uma ou mais de uma das probabilidades não forem apresentadas na forma de fração irredutível, é subtraído 1 ponto à soma das pontuações atribuídas.

2.2. ..... **15 pontos**

Apresentar a expressão

$\left({}^8C_3\times 5 \text{ ou } 8\times{}^7C_4 \text{ ou } {}^8C_4\times 4 \text{ ou } {}^8C_3\times{}^5C_4 \text{ ou } 8\times{}^7C_3\right.$

ou ${}^8C_4\times{}^4C_3$ ou outra expressão equivalente que utilize a simbologia da combinatória$\left.\right)$ (**ver nota 1**) ..... 14 pontos

Obter o valor pedido (280) (**ver nota 2**) ..... 1 ponto

Notas:

1. Por cada fator conceptualmente incorreto ou não apresentado são descontados 7 pontos. Também são descontados 7 pontos caso seja considerada uma operação diferente da multiplicação. Se, por aplicação deste critério, o valor obtido for negativo, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

2. Se a expressão apresentada tiver sido pontuada com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

3.1. ..... **5 pontos**

Concluir que o raio da superfície esférica é 1 ..... 2 pontos

Escrever a condição pedida

$\left(\left(x+1\right)^2+\left(y-1\right)^2+\left(z-1\right)^2=1 \text{ ou equivalente}\right)$ (**ver notas 1**, **2** e **3**) ..... 3 pontos

Notas:

1. Se for apresentada apenas a condição $\left(x+1\right)^2+\left(y-1\right)^2+\left(z-1\right)^2=1$ (ou equivalente), a classificação a atribuir à resposta é 5 pontos.

2. A escrita do símbolo $\leq$, em vez de $=$, implica uma desvalorização de 1 ponto nesta etapa.

3. A escrita de um dos símbolos $<$, $>$ ou $\geq$, em vez de $=$, implica uma desvalorização de 2 pontos nesta etapa.

3.2. ..... **10 pontos**

Determinar a abcissa e a ordenada do ponto V (**ver nota**) ..... 4 pontos

Escrever a equação $6+z-10=0$ (ou equivalente) ..... 4 pontos

Obter o valor de z ..... 1 ponto

Apresentar as coordenadas do ponto $V\left((-2,2,4)\right)$ ..... 1 ponto

Nota – Na apresentação da abcissa e da ordenada do ponto V não se exige qualquer justificação ou cálculo.

3.3. ..... **15 pontos**

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$ ..... 1 ponto

Escrever a equação $-2x+2y+d=0$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Determinar o valor de d ..... 1 ponto

Escrever uma equação do plano α ..... 2 pontos

Escrever o sistema $\begin{cases}-2x+2y+6=0\\3y+z-10=0\end{cases}$ ..... 3 pontos

Escrever uma equação vetorial da reta pedida ..... 6 pontos

Escrever $\begin{cases}y=x-3\\y=\dfrac{-z+10}{3}\end{cases}$ ..... 2 pontos

Escrever $x-3=y=\dfrac{z-10}{-3}$ ..... 2 pontos

Obter uma equação vetorial

$\left(\left(x,y,z\right)=\left(3,0,10\right)+k\left(1,1,-3\right),\ k\in\mathbb{R}\right.$ ou outra equação vetorial equivalente$\left.\right)$ ..... 2 pontos

OU

Escrever $\begin{cases} x = y + 3 \\ z = -3y + 10 \end{cases}$ ..... 2 pontos

Escrever as coordenadas de um ponto genérico da reta $\left(\left(y+3,\ y,\ -3y+10\right)\right)$ ..... 2 pontos

Obter uma equação vetorial $\left(\left(x, y, z\right) = \left(3, 0, 10\right) + k\left(1, 1, -3\right),\ k \in \mathbb{R}\right.$ ou outra equação vetorial equivalente$\left.\right)$ ..... 2 pontos

OU

Obter as coordenadas de dois pontos da reta ..... 2 pontos

Obter as coordenadas de um vetor diretor da reta ..... 2 pontos

Obter uma equação vetorial $\left(\left(x, y, z\right) = \left(3, 0, 10\right) + k\left(1, 1, -3\right),\ k \in \mathbb{R}\right.$ ou outra equação vetorial equivalente$\left.\right)$ ..... 2 pontos

OU

Escrever as coordenadas de um vetor $\vec{u}$ perpendicular ao plano BCV ..... 1 ponto

Determinar as coordenadas de um vetor perpendicular aos vetores $\vec{u}$ e $\overrightarrow{AC}$ ..... 2 pontos

Determinar as coordenadas de um ponto da reta ..... 1 ponto

Obter uma equação vetorial $\left(\left(x, y, z\right) = \left(3, 0, 10\right) + k\left(1, 1, -3\right),\ k \in \mathbb{R}\right.$ ou outra equação vetorial equivalente$\left.\right)$ ..... 2 pontos

4.1. ..... **15 pontos**

Determinar $h'(t)$ (**ver nota**) ..... 3 pontos

Determinar os zeros de h' em $[0,1]$ ..... 5 pontos

Escrever $h'(t) = 0$ ..... 1 ponto

Obter os zeros de h' em $[0,1]$ ..... 4 pontos

Apresentar um quadro de sinal de h' e de monotonia de h (ou equivalente) ..... 2 pontos

Determinar $h(0)$, $h\left(\frac{1}{4}\right)$, $h\left(\frac{3}{4}\right)$ e $h(1)$ ..... (1 + 1 + 1 + 1) ..... 4 pontos

Obter o valor de $A\ (1)$ ..... 1 ponto

Nota – Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

4.2. ..... **15 pontos**

Reproduzir o gráfico da função h no intervalo $[0,1]$ (**ver nota**) ..... 3 pontos

Apresentar o valor de a ..... 3 pontos

Apresentar o valor de b ..... 3 pontos

Obter o valor de $b-a$ $(0{,}27)$ ..... 1 ponto

Interpretar o valor obtido no contexto da situação descrita (No decorrer da medição, a distância do ponto P ao ponto fixo do vale foi inferior a $19{,}5$ metros durante $0{,}27$ minutos) ..... 5 pontos

Nota – Se for apresentado um gráfico que não respeite a condição $t \in [0,1]$, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 2 pontos.

5.1. ..... **15 pontos**

Identificar p com $f'(-1)$ ..... 4 pontos

Determinar o valor de p ..... 5 pontos

Obter o valor de q $(-e)$ ..... 1 ponto

Interpretar geometricamente o valor de q (o valor de q é o declive de qualquer reta perpendicular à reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1) (**ver notas 1** e **2**) ..... 5 pontos

Notas:

1. Se a interpretação geométrica do valor de q for incorreta, mas for evidente que foi corretamente interpretado, do ponto de vista geométrico, o valor de p, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 3 pontos.

2. Se for referido que q é o declive da reta perpendicular à reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa -1, ou de qualquer outro caso particular de reta perpendicular à referida tangente, esta etapa é considerada como cumprida.

5.2. ..... **15 pontos**

Determinar $f''(x)$ (**ver nota 1**) ..... 4 pontos

- Aplicar a regra de derivação do produto ..... 1 ponto
- Obter $f''(x)$ ..... 3 pontos

Determinar os zeros de f'' ..... 5 pontos

- Escrever $f''(x)=0$ ..... 1 ponto
- Obter os zeros de f'' ..... 4 pontos

Estudar a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão ..... 6 pontos

- Apresentar um quadro de sinal de f'' e de sentido da concavidade do gráfico de f (ou equivalente) ..... 2 pontos
- Referir que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $]-\infty,-2[$ e em $]-1,+\infty[$ (**ver nota 2**) ..... 1 ponto

Referir que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]-2,-1[$ (**ver nota 3**) ..... 1 ponto

Indicar as abissas dos pontos de inflexão do gráfico da função f $\left(-2 \text{ e } -1\right)$ ..... 2 pontos

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a segunda derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.
2. Se for referido que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $]-\infty,-2]$ e em $[-1,+\infty[$, em vez de em $]-\infty,-2[$ e em $]-1,+\infty[$, esta etapa é considerada como cumprida.
3. Se for referido que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $[-2,-1]$, em vez de em $]-2,-1[$, esta etapa é considerada como cumprida.

6.1. ..... **15 pontos**

Justificar que apenas a reta de equação $x=-1$ e a reta de equação $x=1$ podem ser assíntotas verticais do gráfico da função f ..... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ ..... 6 pontos

Concluir que $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x-1}{x+1}=+\infty$ ..... 3 pontos

Obter $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ $(+\infty)$ ..... 3 pontos

Concluir que a reta de equação $x=-1$ é assíntota vertical do gráfico da função f ..... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ ..... 6 pontos

Concluir que, quando x tende para 1, por valores superiores a 1, $\dfrac{x-1}{x+1}$ tende para 0, por valores positivos..... 3 pontos

Obter $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ $(-\infty)$ ..... 3 pontos

Concluir que a reta de equação $x=1$ é assíntota vertical do gráfico da função f ..... 1 ponto

6.2. ..... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Seja A o ponto da reta de abcissa a, e seja B o ponto da reta de abcissa $-a$

Escrever as coordenadas de A e as coordenadas de B, em função de a ..... 1 ponto

Obter o declive, m, da reta AB, em função de a ..... 2 pontos

Escrever a condição $y = m\,x + b,$ com m em função de a ..... 1 ponto

Obter o valor de b (0) ..... 5 pontos

Concluir o pretendido ..... 1 ponto

2.º Processo

Seja A o ponto da reta de abcissa a, seja B o ponto da reta de abcissa $-a$, e seja M o ponto médio do segmento de reta $[AB]$

Escrever as coordenadas de A e as coordenadas de B, em função de a ..... 1 ponto

Mostrar que o ponto M é a origem do referencial ..... 8 pontos

Obter o valor da abcissa (0) ..... 1 ponto

Escrever a ordenada, em função de a

$$\left(\frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)+\ln\left(\frac{-a-1}{-a+1}\right)}{2}\right)$$ ..... 2 pontos

Obter o valor da ordenada (0) ..... 5 pontos

Concluir o pretendido ..... 1 ponto

3.º Processo

Provar que a função f é ímpar ..... 4 pontos

Referir que os pontos do gráfico de f de abcissas a e $-a$ são simétricos relativamente à origem do referencial ..... 5 pontos

Concluir o pretendido ..... 1 ponto

COTAÇÕES

Grupo	**Item**												
	Cotação (em pontos)												
I	**1.** a **8.**												
	8 × 5 pontos												**40**
II	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.1.**	**6.2.**	
	15	15	15	5	10	15	15	15	15	15	15	10	**160**
TOTAL													**200**

Exame final nacional de Matemática A **(2016, 1.ª fase)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$ vem que:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$$

Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, temos que:

$$P(A \cup B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{10} - \frac{1}{20} = \frac{8}{20} + \frac{6}{20} - \frac{1}{20} = \frac{13}{20}$$

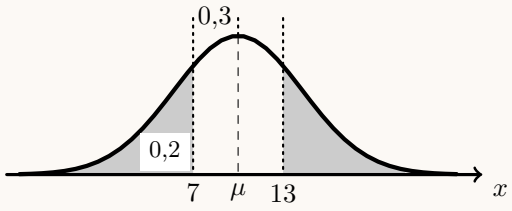
Resposta: **Opção C**

2. Atendendo às características da distribuição normal, temos que:

- $P(X < 10) = 0{,}5$
- $P(X < 7) = P(X < 10) - P(7 < X < 10) =$
  $= 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2$

Logo como a distribuição normal é simétrica em relação ao valor médio e como 7 e 13 são valores equidistantes da média ($10 - 7 = 3$ e $13 - 10 = 3$), temos que:

$$P(X > 13) = P(X < 7) = 0{,}2$$



Resposta: **Opção B**

3. Calculando o valor do limite, temos que:

$$\lim_{x \to a} \frac{ae^{x-a} - a}{x^2 - a^2} = \frac{ae^{a-a} - a}{a^2 - a^2} = \frac{a \times e^0 - a}{a - a} = \frac{a \times 1 - a}{a - a} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{ae^{x-a} - a}{x^2 - a^2} = \lim_{x \to a} \frac{a\left(e^{x-a} - 1\right)}{(x - a)(x + a)} = \lim_{x \to a} \left(\frac{a}{x + a} \times \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} \right) = \lim_{x \to a} \frac{a}{x + a} \times \lim_{x \to a} \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} =$$

(fazendo $y = x - a$, temos que se $x \to a$, então $y \to 0$)

$$= \frac{a}{a + a} \times \underbrace{\lim_{y \to 0} \left(\frac{e^y - 1}{y} \right)}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{a}{2a} \times 1 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

Resposta: **Opção B**

4. Simplificando a expressão dada, temos que:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+e^x-x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{e^x}{x}-\frac{x}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}-\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}+\frac{0^+}{-\infty}-\lim_{x\to-\infty}1=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}+0-1=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}-1$$

Pelo que:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+e^x-x}{x}=1\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}-1=1\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1+1\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=2$$

Como o domínio da função é $\mathbb{R}^-$, então o declive da assíntota do gráfico de f, é: $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$

Resposta: **Opção D**

5. Identificando as medidas relevantes para o cálculo da área do trapézio, temos que:

- a base menor é a ordenada o ponto P, ou seja, $\overline{OP}=1$
- como R é um ponto do quarto quadrante, então temos que $\cos\alpha>0$, pelo que a altura do trapézio $[OPQR]$ é: $\overline{PQ}=\cos\alpha$
- como R é um ponto do quarto quadrante, então temos que $\operatorname{sen}\alpha<0$, pelo que a base maior do trapézio $[OPQR]$ é: $\overline{QR}=1+(-\operatorname{sen}\alpha)=1-\operatorname{sen}\alpha$

Desta forma, a área do trapézio é:

$$A_{[OPQR]}=\frac{\overline{OP}+\overline{QR}}{2}\times\overline{PQ}=\frac{1+1-\operatorname{sen}\alpha}{2}\times\cos\alpha=\frac{2-\operatorname{sen}\alpha}{2}\times\cos\alpha=$$

$$=\frac{2\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}=\cos\alpha-\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}$$

Resposta: **Opção D**

6. Escrevendo o número complexo -3 na forma trigonométrica, vem $-3=3\operatorname{cis}(-\pi)$
Desta forma, temos que:

$$z=-3\operatorname{cis}\theta=3\operatorname{cis}(-\pi)\times\operatorname{cis}\theta=(3\times1)\operatorname{cis}(-\pi+\theta)=3\operatorname{cis}(\theta-\pi)$$

Logo, como $\theta\in\left]\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right[$, então $\pi<\theta<\dfrac{3\pi}{2}$, pelo que:

$$\pi-\pi<\theta-\pi<\frac{3\pi}{2}-\pi\Leftrightarrow0<\theta-\pi<\frac{\pi}{2}$$

Ou seja, $\arg(z)\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, logo a imagem geométrica do número complexo z é um ponto do primeiro quadrante.

Resposta: **Opção A**

7. Como a soma dos ângulo internos de um triângulo é 180°, e o triângulo é isósceles ($B\hat{A}C = A\hat{C}B$), podemos determinar a amplitude do ângulo CBA, ou seja, a amplitude do ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$:

$$C\hat{B}A = 180 - 2 \times 75 = 180 - 150 = 30°$$

Desta forma valor do produto escalar $\overrightarrow{BA} \,.\, \overrightarrow{BC}$ é:

$$\overrightarrow{BA} \,.\, \overrightarrow{BC} = \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{BA}\,\hat{}\,\overrightarrow{BC}\right) = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \cos 30° = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Resposta: **Opção C**

8. Calculando os limites das duas sucessões vem que:

- $\lim(u_n) = \lim\left(\frac{kn+3}{2n}\right) = \lim\left(\frac{kn}{2n} + \frac{3}{2n}\right) = \lim\left(\frac{k}{2} + \frac{3}{2n}\right)$

  Como a sucessão $\left(\frac{3}{2n}\right)$ é um infinitésimo, então, $\lim\left(\frac{k}{2} + \frac{3}{2n}\right) = \frac{k}{2}$
- $\lim(v_n) = \lim\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \ln\left(\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \ln\left(\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \ln e = 1$

Assim, vem que:

$$\lim(u_n) = \lim(v_n) \Leftrightarrow \frac{k}{2} = 1 \Leftrightarrow k = 2$$

Resposta: **Opção B**

GRUPO II

1. Escrevendo $-1+\sqrt{3}i$ na f.t. temos $-1+\sqrt{3}i=\rho\,\text{cis}\,\alpha$, onde:

   - $\rho=|-1+\sqrt{3}i|=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$
   - $\text{tg}\,\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$; como $\text{sen}\,\alpha>0$ e $\cos\alpha<0$, α é um ângulo do 2º quadrante, logo $\alpha=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$

   Assim temos que $-1+\sqrt{3}i=2\,\text{cis}\,\dfrac{2\pi}{3}$, pelo que podemos simplificar a expressão do número complexo z_1:

   $$z_1=\frac{8\,\text{cis}\,\theta}{2\,\text{cis}\,\frac{2\pi}{3}}=\frac{8}{2}\,\text{cis}\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)=4\,\text{cis}\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)$$

   Como $\text{Arg}\,(\overline{w})=-\,\text{Arg}\,(w)$ e $|\overline{w}|=|w|$, vem que: $\overline{z_1}=4\,\text{cis}\left(-\left(\theta-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)=4\,\text{cis}\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)$

   Logo:

   $$\overline{z_1}\times z_2=4\,\text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)\times\,\text{cis}\,(2\theta)=(4\times1)\,\text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}-\theta+2\theta\right)=4\,\text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)$$

   Para que $\overline{z_1}\times z_2$ seja um número real, então $\text{Arg}\,(\overline{z_1}\times z_2)=k\pi,\,k\in\mathbb{Z}$
   Atribuindo valores a k, vem que:

   - Se $k=0$, então $\text{Arg}\,(\overline{z_1}\times z_2)=0\;\Leftrightarrow\;\dfrac{2\pi}{3}+\theta=0\;\Leftrightarrow\;\theta=-\dfrac{2\pi}{3},\left(\theta\notin]0,\pi[\right)$
   - Se $k=1$, então $\text{Arg}\,(\overline{z_1}\times z_2)=\pi\;\Leftrightarrow\;\dfrac{2\pi}{3}+\theta=\pi\;\Leftrightarrow\;\theta=\pi-\dfrac{2\pi}{3}\;\Leftrightarrow\;\theta=\dfrac{\pi}{3},\left(\theta\in]0,\pi[\right)$
   - Se $k=2$, então $\text{Arg}\,(\overline{z_1}\times z_2)=2\pi\;\Leftrightarrow\;\dfrac{2\pi}{3}+\theta=2\pi\;\Leftrightarrow\;\theta=2\pi-\dfrac{2\pi}{3}\;\Leftrightarrow\;\theta=\dfrac{4\pi}{3},\left(\theta\notin]0,\pi[\right)$

   Assim, o valor de $\theta\in]0,\pi[$ para o qual $\overline{z_1}\times z_2$ é um número real é $\theta=\dfrac{\pi}{3}$

2.

2.1. Identificando os valores que a variável X pode assumir, e calculando as respetivas probabilidades, temos:

- 1 - correspondente à extração de duas bolas com o número 1 (1×1);
  $P(X=1) = \dfrac{{}^4C_2}{{}^9C_2} = \dfrac{1}{6}$
- 2 - correspondente à extração de uma bola com o número 1 e outra com o número 2 (1×2);
  $P(X=2) = \dfrac{{}^4C_1 \times {}^4C_1}{{}^9C_2} = \dfrac{4}{9}$
- 4 - correspondente à extração de uma bola com o número 1 e outra com o número 4 (1×4), ou, correspondente à extração de duas bolas com o número 2 (2×2);
  $P(X=4) = \dfrac{{}^4C_2}{{}^9C_2} + \dfrac{{}^4C_1 \times {}^1C_1}{{}^9C_2} = \dfrac{5}{18}$
- 8 - correspondente à extração de uma bola com o número 2 e outra com o número 4 (2×4);
  $P(X=8) = \dfrac{{}^4C_1 \times {}^1C_1}{{}^9C_2} = \dfrac{1}{9}$

(como só existe uma bola com o número 4, não é possível considerar a extração de duas bolas com o número 4)
Logo, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	1	2	4	8
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$

2.2. Para que o número seja ímpar o algarismo das unidades deve ser 1 (porque é o único número das bolas que é ímpar). Assim, dos 9 algarismos do números, apenas 8 podem ser ocupados pelas bolas com os números 2 e 4.

Selecionando 4 das 8 posições (disponíveis) do número para serem ocupadas por bolas com o número 2, temos ${}^8C_4$ hipóteses, e selecionando 1 das 4 posições disponíveis (excluindo a posição das unidades e as posições ocupadas pelas bolas com os números 4), temos ${}^4C_1 = 4$ hipóteses diferentes.
As restantes posições serão ocupadas pelas bolas com os números 1, pelo que a quantidade de números ímpares que é possível obter, é:

$$ {}^8C_4 \times 4 = 280$$

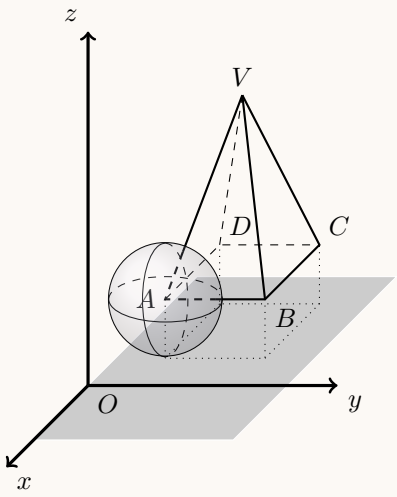
3.

3.1. Como o ponto A tem cota 1, está à distância 1 do plano xOy, pelo que o raio da superfície esférica de centro no ponto A e que é tangente ao plano xOy tem raio 1.

Assim, a equação da superfície esférica é:

$$(x-(-1))^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$$



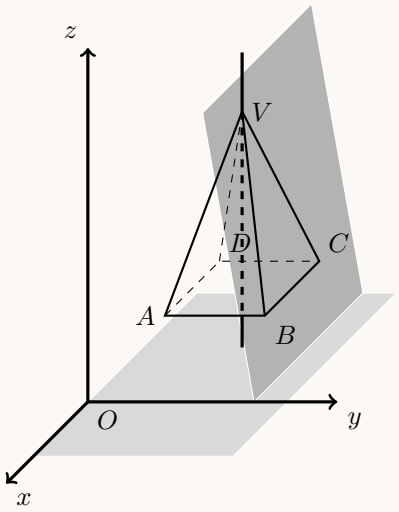
3.2. As coordenadas do ponto V podem ser determinadas pela interseção do plano BCV e da reta perpendicular à base da pirâmide que contém a projeção vertical do ponto V no plano xOy
Esta reta pode ser definida como a interseção dos planos mediadores dos segmentos $[AB]$ e $[BC]$:

$$x = -2 \wedge y = 2$$

E assim, fazendo a substituição na equação do plano BCV, calculamos a cota do ponto V:

$$3(2) + z = 10 \Leftrightarrow z = 10 - 6 \Leftrightarrow z = 4$$

Ou seja, as coordenadas do ponto V são $(-2,2,4)$



3.3. Determinando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$, temos:

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-3,3,1) - (-1,1,1) = (-3 - (-1),3 - 1,1 - 1) = (-2,2,0)$$

Como o plano α é perpendicular à reta AC, o vetor $\overrightarrow{AC}$ é um vetor normal do plano α, pelo que a equação do plano α é da forma: $\alpha : -2x + 2y + 0 \times z + d = 0$

Substituindo as coordenadas do ponto P (que pertence ao plano α), calculamos o valor do parâmetro d, e determinamos a equação do plano α:

$$-2(1) + 2(-2) + 0 \times (-1) + d = 0 \Leftrightarrow -2 - 4 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow -6 + d = 0 \Leftrightarrow d = 6$$

$$\alpha : -2x + 2y + 6 = 0 \Leftrightarrow -x + y + 3 = 0$$

Assim, a interseção do plano α e do plano BCV, é a reta definida por:

$$\begin{cases} -x + y + 3 = 0 \\ \\ 3y + z - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ \\ 3y = 10 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ \\ y = \dfrac{10 - z}{3} \end{cases}$$

Escrevendo umas equações cartesianas da reta vem:

$$x - 3 = y = \frac{10 - z}{3} \Leftrightarrow \frac{x - 3}{1} = \frac{y - 0}{1} = \frac{-(z - 10)}{3} \Leftrightarrow \frac{x - 3}{1} = \frac{y - 0}{1} = \frac{z - 10}{-3}$$

Pelo que, podemos identificar um ponto da reta, $R(3,0,10)$, e um vetor diretor $\vec{u} = (1,1,-3)$. E assim, uma equação vetorial desta reta, é:

$$(x,y,z) = (3,0,10) + \lambda(1,1,-3), \lambda \in \mathbb{R}$$

4.

4.1. Começamos por determinar a expressão da derivada da função h, para calcular os extremos da função:

$$h'(t) = \left(20 + \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t) + t\,\text{sen}\,(2\pi t)\right)' = (20)' + \left(\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t)\right)' + \left(t\,\text{sen}\,(2\pi t)\right)' =$$

$$= 0 + \frac{1}{2\pi}\left(\cos(2\pi t)\right)' + (t)'\,\text{sen}\,(2\pi t) + t\left(\text{sen}\,(2\pi t)\right)' =$$

$$= \frac{1}{2\pi}(-(2\pi t)')\,\text{sen}\,(2\pi t) + 1 \times \text{sen}\,(2\pi t) + t(2\pi t)'\cos(2\pi t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}(-2\pi)\,\text{sen}\,(2\pi t) + \text{sen}\,(2\pi t) + t(2\pi)\cos(2\pi t) =$$

$$= -\,\text{sen}\,(2\pi t) + \text{sen}\,(2\pi t) + t(2\pi)\cos(2\pi t) =$$

$$= 2\pi t\cos(2\pi t)$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função ($[0,1]$), vem:

$$2\pi t\cos(2\pi t) = 0 \Leftrightarrow 2\pi t = 0 \vee \cos(2\pi t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee \cos(2\pi t) = \cos\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee 2\pi t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{\pi}{2\times 2\pi} + \frac{k\pi}{2\pi}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Atribuindo valores a k, calculamos os valores de t compatíveis com o domínio da função:

- Se $k = 0$, então $t = \frac{1}{4}$
- Se $k = 1$, então $t = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$

Pelo que o conjunto dos zeros da função é $\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}$, e assim estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

t	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		1
$h'(t)$	0	+	0	−	0	+	+
$h(t)$	min	↗	Máx	↘	min	↗	Máx

Assim, calculando o valor dos mínimos relativos e máximos relativos, temos que:

- $h(0) = 20 + \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi \times 0) + 0 \times \text{sen}\,(2\pi \times 0) = 20 + \frac{1}{2\pi}\cos(0) + 0 = 20 + \frac{1}{2\pi}$
- $h\left(\frac{1}{4}\right) = 20 + \frac{1}{2\pi}\cos\left(2\pi \times \left(\frac{1}{4}\right)\right) + \frac{1}{4} \times \text{sen}\left(2\pi \times \left(\frac{1}{4}\right)\right) =$
  $= 20 + \frac{1}{2\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4}\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 20 + \frac{1}{2\pi} \times 0 + \frac{1}{4} \times 1 = 20 + \frac{1}{4}$
- $h\left(\frac{3}{4}\right) = 20 + \frac{1}{2\pi}\cos\left(2\pi \times \left(\frac{3}{4}\right)\right) + \frac{3}{4} \times \text{sen}\left(2\pi \times \left(\frac{3}{4}\right)\right) =$
  $= 20 + \frac{1}{2\pi}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{3}{4}\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 20 + \frac{1}{2\pi} \times 0 + \frac{3}{4} \times (-1) = 20 - \frac{3}{4}$
- $h(1) = 20 + \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi \times 1) + 1 \times \text{sen}\,(2\pi \times 1) = 20 + \frac{1}{2\pi} \times 1 + 0 = 20 + \frac{1}{2\pi}$

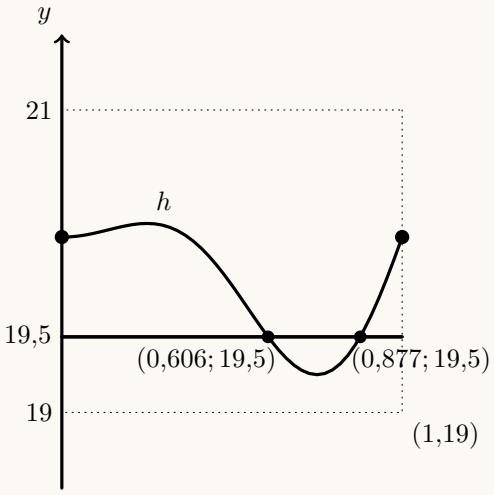
Como $h\left(\frac{3}{4}\right) < h(0)$, temos que o mínimo absoluto é $m = h\left(\frac{3}{4}\right) = 20 - \frac{3}{4} = \frac{77}{4}$

Como $h\left(\frac{1}{4}\right) > h(1)$, temos que o máximo absoluto é $M = h\left(\frac{1}{4}\right) = 20 + \frac{1}{4} = \frac{81}{4}$

E assim, o valor da amplitude de oscilação é:

$$A = M - n = \frac{81}{4} - \frac{77}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

4.2. Representando na calculadora o gráfico da função h e a reta de equação $y = 19{,}5$ na janela compatível com o domínio de h e com $y \in [19{,}21]$, obtemos o gráfico se reproduz na figura ao lado.



Recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados de um ponto de interseção de dois gráficos, determinamos os valores das abcissas (com aproximação às milésimas) dos pontos do gráfico de h que têm ordenada 19,5, ou seja, os valores de a e de b:

$$a \approx 0{,}606 \text{ e } b \approx 0{,}877$$

E assim, o valor de $b - a$ arredondado às centésimas, é:

$$b - a \approx 0{,}877 - 0{,}606 \approx 0{,}27$$

No contexto da situação descrita, o valor de $b-a$ é a duração do intervalo de tempo em que a distância do ponto P do tabuleiro a um ponto fixo foi inferior a 19,5 metros; ou seja, que, durante o minuto em que durou a medição, o ponto P esteve a menos de 19,5 metros de distância do ponto fixo durante 0,27 minutos, aproximadamente.

5.

5.1. Temos que:

$$p = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = f'(-1)$$

Recorrendo à expressão algébrica função derivada de f, vem que:

$$p = f'(-1) = e^{-1}\left((-1)^2 + (-1) + 1\right) = e^{-1}(1 - 1 + 1) = e^{-1} \times 1 = \frac{1}{e}$$

Logo, vem que:

$$q = -\frac{1}{p} = -\frac{1}{\frac{1}{e}} = -e$$

Como p é o valor da função derivada de f no ponto de abcissa -1, então p é o declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa -1
E assim, o simétrico do inverso de p, ou seja, o valor de q, é o declive de uma reta perpendicular à reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1

5.2. Para estudar o sentido das concavidades do gráfico e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(e^x\left(x^2+x+1\right)\right)' = \left(e^x\right)'\left(x^2+x+1\right) + e^x\left(x^2+x+1\right)' =$$

$$= e^x\left(x^2+x+1\right) + e^x(2x+1) = e^x\left(x^2+x+1+2x+1\right) = e^x\left(x^2+3x+2\right)$$

Como os pontos de inflexão são zeros da segunda derivada, vamos determiná-los:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x\left(x^2+3x+2\right) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{Eq. Imp.}} \vee x^2+3x+2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2-4(1)(2)}}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$$

Assim, estudando o sinal da segunda derivada para relacionar com o sentido das concavidades, vem:

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
e^x	$+$		$+$		$+$		$+$
x^2+3x+2	$+$		0	$-$	0	$+$	
$f''(x)$	$+$		0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	⌣		Pt. I.	⌢	Pt. I.	⌣	

Logo, podemos concluir que o gráfico de f:

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]-2,1[$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]-\infty,-2[$ e no intervalo $]-1,+\infty[$
- tem dois pontos de inflexão cujas abcissas são, respetivamente, -2 e -1

6.

6.1. Como f é uma função contínua em $]-\infty,-1[$ e em $]1,+\infty[$ (porque resulta de operações entre funções contínuas neste domínio), então as retas definidas pelas equações $x=-1$ e $x=1$ são as únicas retas verticais que podem ser assíntotas do gráfico de f.
Para averiguar se estas retas são assíntotas do gráfico de f, de acordo com o domínio da função, vamos calcular:

- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-}\left(\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) = \ln\left(\frac{-1^- -1}{-1^-+1}\right) = \ln\left(\frac{-2}{0^-}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) = \ln\left(\frac{1^+ -1}{1^++1}\right) = \ln\left(\frac{0^+}{2}\right) = \ln(0^+) = -\infty$

Como ambos os limites são infinitos, as duas retas são assíntotas do gráfico de f e não existem outras assíntotas verticais.

6.2. Determinando o declive da reta que contém os pontos de abcissas $-a$ e a, vem que:

$$m = \frac{f(a) - f(-a)}{a - (-a)} = \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) - \ln\left(\frac{-a-1}{-a+1}\right)}{a+a} = \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) - \ln\left(\frac{-(a+1)}{-(a-1)}\right)}{2a} =$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) - \ln\left(\frac{a+1}{a-1}\right)}{2a} = \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) - \ln\left(\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{-1}\right)}{2a} = \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) - (-1)\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}{2a} =$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) + \ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}{2a} = \frac{2\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}{2a} = \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}{a} = \frac{f(a)}{a}$$

Logo a equação da reta é da forma $y = \frac{f(a)}{a} \times x + b$

Como o ponto de coordenadas $(a,f(a))$ pertence à reta, podemos substituir estas coordenadas e o valor do declive, na expressão geral de uma reta, para determinar o valor da ordenada na origem:

$$f(a) = \frac{f(a)}{a} \times a + b \Leftrightarrow f(a) = f(a) + b \Leftrightarrow f(a) - f(a) = b \Leftrightarrow 0 = b$$

Como a ordenada na origem é zero, podemos concluir que a reta passa na origem do referencial.

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/2.ª Fase 14 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2016

VERSÃO 1

Nos termos da lei em vigor, as provas de avaliação externa são obras protegidas pelo Código do Direito de Autor e dos Direitos Conexos. A sua divulgação não suprime os direitos previstos na lei. Assim, é proibida a utilização destas provas, além do determinado na lei ou do permitido pelo IAVE, I.P., sendo expressamente vedada a sua exploração comercial.

Página em branco

Indique de forma legível a versão da prova.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \ \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\ e^u$

$(a^u)' = u'\ a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Página em branco

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}2$
- $P(B) = 0{,}3$
- $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0{,}6$

Qual é o valor de $P\left(A|B\right)$?

(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{5}{6}$

2. O Carlos joga basquetebol na equipa da sua escola.

Admita que, em cada lance livre, a probabilidade de o Carlos encestar é $0{,}4$

Num treino, o Carlos vai executar uma série de cinco lances livres.

Qual é a probabilidade de o Carlos encestar exatamente quatro vezes?

(A) $0{,}01536$ **(B)** $0{,}05184$ **(C)** $0{,}0768$ **(D)** $0{,}2592$

3. Para certos valores de a e de b $(a > 1$ e $b > 1)$, tem-se $\log_a(ab^3) = 5$

Qual é, para esses valores de a e de b, o valor de $\log_b a$?

(A) $\frac{5}{3}$ **(B)** $\frac{3}{4}$ **(C)** $\frac{3}{5}$ **(D)** $\frac{1}{3}$

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \ln x$

Considere a sucessão de termo geral $u_n = \frac{n}{e^n}$

Qual é o valor de $\lim f(u_n)$?

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** e **(D)** $+\infty$

5. Na Figura 1, está representada uma circunferência de centro no ponto O e raio 1

Sabe-se que:

- os diâmetros $[AC]$ e $[BD]$ são perpendiculares;
- o ponto P pertence ao arco AB
- $[PQ]$ é um diâmetro da circunferência;
- o ponto R pertence a $[OD]$ e é tal que $[QR]$ é paralelo a $[AC]$

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo AOP $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

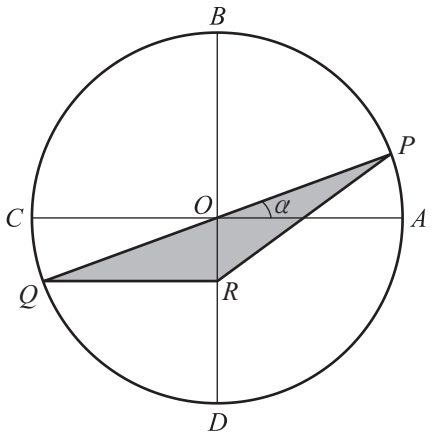


Figura 1

Qual das seguintes expressões dá a área do triângulo $[PQR]$, representado a sombreado, em função de α ?

(A) $\frac{\cos(2\alpha)}{4}$ **(B)** $\frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$ **(C)** $\frac{\cos(2\alpha)}{2}$ **(D)** $\frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$

6. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z = 3 + 4i$

Sabe-se que z é uma das raízes de índice 6 de um certo número complexo w

Considere, no plano complexo, o polígono cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice 6 desse número complexo w

Qual é o perímetro do polígono?

(A) 42 **(B)** 36 **(C)** 30 **(D)** 24

7. Considere, num referencial o.n. xOy, o quadrado definido pela condição

$$0 \leq x \leq 4 \ \wedge \ 1 \leq y \leq 5$$

Qual das condições seguintes define a circunferência inscrita neste quadrado?

(A) $(x-4)^2+(y-5)^2=16$

(B) $(x-4)^2+(y-5)^2=4$

(C) $(x-2)^2+(y-3)^2=4$

(D) $(x-2)^2+(y-3)^2=16$

8. De uma progressão geométrica (u_n), monótona crescente, sabe-se que $u_4=32$ e que $u_8=8192$

Qual é o quinto termo da sucessão (u_n) ?

(A) 64 **(B)** 128 **(C)** 256 **(D)** 512

Página em branco

GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere nove fichas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 9

1.1. Considere duas caixas, U e V

Colocam-se as fichas numeradas de 1 a 5 na caixa U e as fichas numeradas de 6 a 9 na caixa V

Realiza-se a seguinte experiência.

Retira-se, ao acaso, uma ficha da caixa U e retira-se, também ao acaso, uma ficha da caixa V

Sejam A e B os acontecimentos:

A : «*A soma dos números das fichas retiradas é igual a* 10»

B : «*O produto dos números das fichas retiradas é ímpar*»

Determine o valor de $P(B|A)$, sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada.

Na sua resposta:

- explique o significado de $P(B|A)$ no contexto da situação descrita;
- indique os casos possíveis, apresentando cada um deles na forma (u,v), em que u designa o número da ficha retirada da caixa U e v designa o número da ficha retirada da caixa V
- indique os casos favoráveis;
- apresente o valor pedido na forma de fração irredutível.

1.2. Na Figura 2, está representado um tabuleiro com 16 casas, dispostas em quatro filas horizontais $(A, B, C$ e $D)$ e em quatro filas verticais $(1, 2, 3$ e $4)$

Pretende-se dispor as nove fichas (numeradas de 1 a 9) no tabuleiro, de modo que cada ficha ocupe uma única casa e que cada casa não seja ocupada por mais do que uma ficha.

De quantas maneiras diferentes é possível dispor as nove fichas, de tal forma que as que têm número par ocupem uma única fila horizontal?

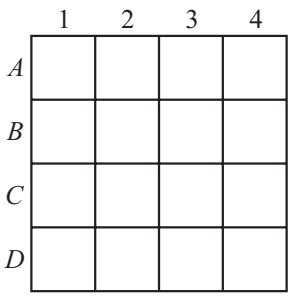


Figura 2

2. Seja ρ um número real positivo, e seja θ um número real pertencente ao intervalo $]0, \pi[$

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \dfrac{-1+i}{\left(\rho \operatorname{cis}\theta\right)^2}$ e $w = -\sqrt{2}\,i$

Sabe-se que $z = w$

Determine o valor de ρ e o valor de θ

3. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α definido pela equação $3x + 2y + 4z - 12 = 0$

3.1. Seja C o ponto de coordenadas $\left(2, 1, 4\right)$

Escreva uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano α que passa no ponto C

3.2. Seja D o ponto de coordenadas $\left(4, 2, 2\right)$

Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta OD com o plano α

3.3. Sejam A e B os pontos pertencentes ao plano α, tais que A pertence ao semieixo positivo Ox e B pertence ao semieixo positivo Oy

Seja P um ponto com cota diferente de zero e que pertence ao eixo Oz

Justifique, recorrendo ao produto escalar de vetores, que o ângulo APB é agudo.

4. Seja f a função, de domínio $\left]-\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2 + \operatorname{sen} x}{\cos x} & \text{se } -\dfrac{\pi}{2} < x \leq 0 \\ x - \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens **4.1.** e **4.2.** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4.1. Estude a função f quanto à existência de assíntota oblíqua do seu gráfico.

4.2. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, no intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$

4.3. Seja r a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$

Além do ponto de tangência, a reta r intersecta o gráfico de f em mais dois pontos, A e B, cujas abcissas pertencem ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ (considere que o ponto A é o de menor abcissa).

Determine analiticamente a equação reduzida da reta r e, utilizando a calculadora gráfica, obtenha as abcissas dos pontos A e B

Apresente essas abcissas arredondadas às centésimas.

Na sua resposta, reproduza, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver o problema.

5. O José e o António são estudantes de Economia. O José pediu emprestados 600 euros ao António para comprar um computador, tendo-se comprometido a pagar o empréstimo em prestações mensais sujeitas a um certo juro.

Para encontrarem as condições de pagamento do empréstimo, os dois colegas adaptaram uma fórmula que tinham estudado e estabeleceram um contrato.

Nesse contrato, a prestação mensal p, em euros, que o José tem de pagar ao António é dada por

$$p = \frac{600x}{1 - e^{-nx}} \quad (x > 0)$$

em que n é o número de meses em que o empréstimo será pago e x é a taxa de juro mensal.

Resolva os itens **5.1.** e **5.2.** recorrendo a métodos analíticos.

Na resolução do item **5.1.**, pode utilizar a calculadora para efetuar eventuais cálculos numéricos.

5.1. O José e o António acordaram que a taxa de juro mensal seria $0{,}3\%$ $(x = 0{,}003)$

Em quantos meses será pago o empréstimo, sabendo-se que o José irá pagar uma prestação mensal de 24 euros?

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, cinco casas decimais.

5.2. Determine $\lim\limits_{x \to 0} \frac{600x}{1 - e^{-nx}}$, em função de n, e interprete o resultado no contexto da situação descrita.

6. Seja g uma função contínua, de domínio $\mathbb{R}$, tal que:

- para todo o número real x, $(g \circ g)(x) = x$
- para um certo número real a, tem-se $g(a) > a + 1$

Mostre que a equação $g(x) = x + 1$ é possível no intervalo $\left]a, g(a)\right[$

FIM

COTAÇÕES

Grupo	Item												
	Cotação (em pontos)												
I	**1.** a **8.**												
	8 × 5 pontos												**40**
II	**1.1.**	**1.2.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	
	15	15	15	5	15	10	15	15	15	15	15	10	**160**
TOTAL													**200**

ESTA FOLHA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 635

2.ª Fase

VERSÃO 1

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/2.ª Fase

Critérios de Classificação 14 Páginas

2016

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de escolha múltipla.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Itens de seleção

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

Itens de construção

Nos itens de resposta restrita e de resposta extensa, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada de vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados, devidamente identificados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelo programa da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora gráfica», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. ..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

Chave:

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	A	C	B	A	D	C	C	B
Versão 2	B	B	A	C	C	B	D	C

GRUPO II

1.1. ..... **15 pontos**

Explicar o significado de $P(B|A)$ no contexto da situação descrita $(P(B|A)$ é a probabilidade de o produto dos números das fichas retiradas ser ímpar, sabendo que a sua soma é igual a $10)$ ..... 5 pontos

Indicar os casos possíveis, na forma pedida $((1,9),(2,8),(3,7)$ e $(4,6))$ (**ver nota 1**) ..... 4 pontos

Indicar os casos favoráveis $((1,9)$ e $(3,7))$ (**ver nota 2**) ..... 4 pontos

Apresentar o valor pedido $\left(\frac{1}{2}\right)$ (**ver nota 3**) ..... 2 pontos

Notas:

1. Se os casos possíveis não forem apresentados na forma pedida, a pontuação máxima a atribuir nesta etapa é 2 pontos.
2. Se os casos favoráveis não forem apresentados na forma pedida, a pontuação a atribuir nesta etapa não é desvalorizada.
3. Se as etapas relativas ao número de casos possíveis e ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. Caso o valor obtido não pertença ao intervalo $[0,1]$, a pontuação a atribuir nesta etapa também é 0 pontos.

1.2. ..... **15 pontos**

Apresentar a expressão $4 \times 4! \times {}^{12}A_5$ (ou outra expressão equivalente, que utilize a simbologia da combinatória) (**ver nota 1**) ..... 14 pontos

Obter o valor pedido $(9123\,840)$ (**ver nota 2**) ..... 1 ponto

Notas:

1. A expressão $4 \times 4! \times {}^{12}A_5$ é o produto das expressões 4, $4!$ e ${}^{12}A_5$. Por cada expressão conceptualmente incorreta ou não apresentada, são descontados 7 pontos. Também são descontados 7 pontos caso seja considerada, uma ou mais vezes, uma operação diferente da multiplicação. Se, por aplicação deste critério, o valor obtido for negativo, esta etapa é pontuada com 0 pontos.
2. A pontuação relativa a esta etapa só é atribuída se à etapa anterior não tiverem sido atribuídos 0 pontos.

2. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, cinco processos.

1.º Processo

Escrever $-1+i$ na forma trigonométrica ..... 1 ponto

Escrever $\left(\rho \operatorname{cis}\theta\right)^2 = \rho^2 \operatorname{cis}(2\theta)$ ..... 2 pontos

Indicar o módulo de z, em função de ρ ..... 1 ponto

Escrever um argumento de z, em função de θ ..... 2 pontos

Escrever $-\sqrt{2}\,i$ na forma trigonométrica ..... 1 ponto

Concluir que $\frac{\sqrt{2}}{\rho^2} = \sqrt{2} \wedge \frac{3\pi}{4} - 2\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Obter o valor de $\rho\ (1)$ ..... 1 ponto

Resolver a condição $\frac{3\pi}{4} - 2\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (ou uma condição equivalente), em ordem a θ ..... 2 pontos

Obter o valor de θ pertencente ao intervalo $]0, \pi[$ $\left(\frac{5\pi}{8}\right)$ ..... 3 pontos

2.º Processo

Escrever $\left(\rho \operatorname{cis}\theta\right)^2$ na forma algébrica ..... 3 pontos

Escrever z na forma algébrica ..... 4 pontos

Escrever a condição

$\frac{\operatorname{sen}(2\theta) - \cos(2\theta)}{\rho^2} = 0 \wedge \frac{\cos(2\theta) + \operatorname{sen}(2\theta)}{\rho^2} = -\sqrt{2}$ ..... 1 ponto

Escrever a condição

$2\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi \wedge \frac{\cos(2\theta) + \operatorname{sen}(2\theta)}{\rho^2} = -\sqrt{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $\theta \in \left]0, \pi\right[$ .. 2 pontos

Escrever a condição

$\left(\theta = \frac{\pi}{8} \vee \theta = \frac{5\pi}{8}\right) \wedge \frac{\cos(2\theta) + \operatorname{sen}(2\theta)}{\rho^2} = -\sqrt{2}$ ..... 2 pontos

Obter o valor de θ e o valor de ρ $\left(\theta = \frac{5\pi}{8} \text{ e } \rho = 1\right)$ ..... 3 pontos

3.º Processo

Escrever $-1+i$ na forma trigonométrica ..... 1 ponto

Escrever $\left(\rho\operatorname{cis}\theta\right)^2=\rho^2\operatorname{cis}(2\theta)$ ..... 2 pontos

Indicar o módulo de z, em função de ρ ..... 1 ponto

Escrever um argumento de z, em função de θ ..... 2 pontos

Escrever z na forma algébrica ..... 1 ponto

Escrever a condição

$\frac{\sqrt{2}}{\rho^2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}-2\theta\right)=0 \ \wedge \ \frac{\sqrt{2}}{\rho^2}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}-2\theta\right)=-\sqrt{2}$ ..... 1 ponto

Escrever a condição

$\frac{3\pi}{4}-2\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi \ \wedge \ \frac{\sqrt{2}}{\rho^2}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}-2\theta\right)=-\sqrt{2}$,

com $k\in\mathbb{Z}$ e $\theta\in\left]0,\pi\right[$ ..... 2 pontos

Escrever a condição

$\left(\theta=\frac{\pi}{8}\vee\theta=\frac{5\pi}{8}\right) \ \wedge \ \frac{\sqrt{2}}{\rho^2}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}-2\theta\right)=-\sqrt{2}$ ..... 2 pontos

Obter o valor de θ e o valor de ρ $\left(\theta=\frac{5\pi}{8} \text{ e } \rho=1\right)$ ..... 3 pontos

4.º Processo

Escrever $z=w\Leftrightarrow\frac{-1+i}{-\sqrt{2}\,i}=(\rho\operatorname{cis}\theta)^2$ ..... 1 ponto

Escrever $\left(\rho\operatorname{cis}\theta\right)^2=\rho^2\operatorname{cis}(2\theta)$ ..... 2 pontos

Escrever $\frac{-1+i}{-\sqrt{2}\,i}=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i}{2}$ ..... 3 pontos

Escrever $z=w\Leftrightarrow-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}=\rho^2\cos(2\theta)+i\rho^2\operatorname{sen}(2\theta)$ ..... 1 ponto

Escrever $z=w\Leftrightarrow\rho^2\cos(2\theta)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \ \wedge \ \rho^2\operatorname{sen}(2\theta)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ..... 1 ponto

Concluir que $z=w\Leftrightarrow\cos(2\theta)=\operatorname{sen}(2\theta) \ \wedge \ \rho^2\operatorname{sen}(2\theta)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ..... 1 ponto

Escrever a condição $2\theta=\frac{\pi}{4}+k\pi \ \wedge \ \rho^2\operatorname{sen}(2\theta)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

com $k\in\mathbb{Z}$ e $\theta\in\left]0,\pi\right[$ ..... 1 ponto

Escrever a condição

$\left(\theta=\frac{\pi}{8}\vee\theta=\frac{5\pi}{8}\right) \ \wedge \ \rho^2\operatorname{sen}(2\theta)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ..... 2 pontos

Obter o valor de θ e o valor de ρ $\left(\theta=\frac{5\pi}{8} \text{ e } \rho=1\right)$ ..... 3 pontos

5.º Processo

Escrever $z = w \Leftrightarrow \frac{-1+i}{-\sqrt{2}\,i} = (\rho\,\mathrm{cis}\theta)^2$ ..... 1 ponto

Escrever $-1+i$ na forma trigonométrica ..... 1 ponto

Escrever $-\sqrt{2}\,i$ na forma trigonométrica ..... 1 ponto

Escrever $\frac{-1+i}{-\sqrt{2}\,i}$ na forma trigonométrica ..... 1 ponto

Escrever $\left(\rho\mathrm{cis}\theta\right)^2 = \rho^2\mathrm{cis}\left(2\theta\right)$ ..... 2 pontos

Escrever $\mathrm{cis}\frac{5\pi}{4} = \rho^2\mathrm{cis}(2\theta)$ ..... 1 ponto

Concluir que $z = w \Leftrightarrow \rho^2 = 1 \wedge 2\theta = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter o valor de $\rho \quad (1)$ ..... 1 ponto

Resolver a condição $2\theta = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (ou uma condição equivalente), em ordem a θ ..... 2 pontos

Obter o valor de θ pertencente ao intervalo $]0,\pi[$ $\left(\frac{5\pi}{8}\right)$ ..... 3 pontos

3.1. ..... **5 pontos**

Escrever as coordenadas de um vetor diretor da reta pedida ..... 2 pontos

Escrever uma equação vetorial da reta pedida

$\left((x,y,z) = (2,1,4) + k(3,2,4),\ k \in \mathbb{R}\right.$ ou outra equação vetorial equivalente$\left.\right)$ 3 pontos

Nota – Se for apresentada apenas a equação $(x, y, z) = (2, 1, 4) + k(3, 2, 4),\ k \in \mathbb{R}$ (ou outra equação vetorial equivalente), a pontuação a atribuir à resposta é 5 pontos.

3.2. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo (recorrendo a uma condição cartesiana da reta OD)

Escrever $\overrightarrow{OD} = (4, 2, 2)$ ..... 1 ponto

Escrever uma condição cartesiana da reta OD $\left(\text{por exemplo, } \frac{x}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}\right)$ .... 5 pontos

Escrever o sistema $\begin{cases} 3x + 2y + 4z - 12 = 0 \\ \frac{x}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2} \end{cases}$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

Resolver o sistema ..... 5 pontos

Indicar as coordenadas do ponto de intersecção $\left((2,1,1)\right)$ ..... 1 ponto

2.º Processo (recorrendo a uma equação vetorial da reta OD)

Escrever $\overrightarrow{OD} = (4, 2, 2)$ ..... 1 ponto

Escrever uma equação vetorial da reta OD

$\left((x,y,z) = k(4,2,2),\ k \in \mathbb{R}\right.$ ou outra equação vetorial equivalente$\left.\right)$ ..... 3 pontos

Escrever as coordenadas de um ponto genérico da reta OD, em função de k ..... 2 pontos

Obter uma equação na variável k, substituindo x, y e z na equação do plano α pelas coordenadas de um ponto genérico da reta OD ..... 4 pontos

Obter o valor de k ..... 2 pontos

Obter as coordenadas do ponto de intersecção $\left((2,1,1)\right)$ ..... 3 pontos

3.3. ..... **10 pontos**

Seja z a cota do ponto P

Escrever $P(0, 0, z)$ (**ver nota**) ..... 2 pontos

Determinar as coordenadas do ponto A ..... 1 ponto

Determinar as coordenadas do ponto B ..... 1 ponto

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{PA}$, em função de z (**ver nota**) ..... 1 ponto

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{PB}$, em função de z (**ver nota**) ..... 1 ponto

Calcular $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ (z^2) (**ver nota**) ..... 1 ponto

Concluir o pretendido (referir que a conclusão resulta do facto de o produto escalar ser positivo) (**ver nota**) ..... 3 pontos

Nota – Se for apresentada uma concretização para a cota do ponto P, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

4.1. ..... **15 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ..... 8 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - \ln x}{x}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - \ln x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$ ..... 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = 1 - \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ ..... 2 pontos

Reconhecer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ ..... 1 ponto

Obter o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ (1) ..... 1 ponto

Determinar $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x)$ ..... 4 pontos

Escrever $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} (x - \ln x - x)$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim_{x \to +\infty} (x - \ln x - x) = \lim_{x \to +\infty} (-\ln x)$ ..... 1 ponto

Obter o valor de $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x)$ $(-\infty)$ ..... 2 pontos

Concluir que o gráfico da função f não tem assíntota oblíqua ..... 3 pontos

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$, a classificação a atribuir à resposta é desvalorizada em 2 pontos. Se, por aplicação deste critério, o valor obtido for negativo, a resposta é classificada com 0 pontos.

2. Se for evidente a intenção de determinar $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x}$, a classificação a atribuir à resposta é desvalorizada em 2 pontos.

4.2. ..... **15 pontos**

Determinar $f'(x)$ em $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ (**ver nota 1**) ..... 4 pontos

Determinar o zero de f' em $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ ..... 5 pontos

Escrever $f'(x) = 0$ ..... 1 ponto

Obter o zero de f' em $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ ..... 4 pontos

Estudar a função f quanto à monotonia, no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ ..... 6 pontos

Apresentar um quadro de sinal de f' e de monotonia de f (ou equivalente) (**ver notas 2** e **3**) ..... 5 pontos

Concluir que a função tem um mínimo para $x = -\frac{\pi}{6}$ ..... 1 ponto

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a expressão da derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

2. Se, na primeira linha do quadro, a resposta apresentar $-\infty$, em vez de $-\frac{\pi}{2}$, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

3. Se, na primeira linha do quadro, a resposta apresentar $+\infty$, em vez de 0, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 2 pontos.

4. Se for utilizada a expressão $x - \ln x$, a pontuação máxima a atribuir à resposta é 2 pontos $\left(1 \text{ ponto pela intenção de calcular } f'(x) \text{ e } 1 \text{ ponto pela intenção de resolver a equação } f'(x) = 0\right)$.

4.3. ..... **15 pontos**

Determinar $f'(x)$ em $]0,+\infty[$ ..... 2 pontos

Obter $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ ..... 1 ponto

Obter $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ..... 1 ponto

Escrever a equação reduzida da reta r ..... 2 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver o problema (**ver nota**) ..... 5 pontos

Apresentar a abcissa do ponto $A\ (-1,19)$ ..... 2 pontos

Apresentar a abcissa do ponto $B\ (-0,17)$ ..... 2 pontos

Nota – Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

5.1. ..... **15 pontos**

Equacionar o problema ..... 3 pontos

Resolver a equação $24=\frac{600\times 0,003}{1-e^{-0,003n}}$ ..... 10 pontos

Escrever $24=\frac{600\times 0,003}{1-e^{-0,003n}} \Leftrightarrow 24(1-e^{-0,003n})=1,8$ ..... 2 pontos

Escrever $24(1-e^{-0,003n})=1,8 \Leftrightarrow 1-e^{-0,003n}=\frac{1,8}{24}$ ..... 2 pontos

Escrever $1-e^{-0,003n}=\frac{1,8}{24} \Leftrightarrow e^{-0,003n}=\frac{37}{40}$ ..... 2 pontos

Escrever $e^{-0,003n}=\frac{37}{40} \Leftrightarrow -0,003n=\ln\left(\frac{37}{40}\right)$ ..... 3 pontos

Escrever $-0,003n=\ln\left(\frac{37}{40}\right) \Leftrightarrow n=\frac{\ln\left(\frac{37}{40}\right)}{-0,003}$ ..... 1 ponto

Responder ao problema $(26$ meses$)$ (**ver nota**) ..... 2 pontos

Nota – Se a resposta for $n\approx 26$, esta etapa é considerada como cumprida.

5.2. ..... **15 pontos**

Determinar $\lim_{x\to 0} \frac{600x}{1-e^{-nx}}$ ..... 10 pontos

Este limite pode ser determinado por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Escrever $\lim_{x\to 0} \frac{600x}{1-e^{-nx}} \underset{y=-nx}{=} \lim_{y\to 0} \frac{600\left(-\frac{y}{n}\right)}{1-e^{y}}$ ..... 2 pontos

Escrever $\lim_{y\to 0} \frac{600\left(-\frac{y}{n}\right)}{1-e^{y}} = \lim_{y\to 0} \frac{-600y}{n(1-e^{y})}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim_{y\to 0} \frac{-600y}{n(1-e^{y})} = \frac{600}{n} \lim_{y\to 0} \frac{-y}{1-e^{y}}$ ..... 1 ponto

Escrever $\frac{600}{n} \lim_{y\to 0} \frac{-y}{1-e^{y}} = \frac{600}{n} \lim_{y\to 0} \frac{y}{e^{y}-1}$ ..... 2 pontos

Escrever $\frac{600}{n} \lim_{y\to 0} \frac{y}{e^{y}-1} = \frac{600}{n} \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{e^{y}-1}{y}}$ ..... 2 pontos

Reconhecer o limite notável $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1$ ..... 1 ponto

Obter o valor de $\lim_{x\to 0} \frac{600x}{1-e^{-nx}}$ $\left(\frac{600}{n}\right)$ ..... 1 ponto

2.º Processo

Escrever $\lim_{x\to 0} \frac{600x}{1-e^{-nx}} = \lim_{x\to 0} \frac{600x}{1-\frac{1}{e^{nx}}}$ ..... 2 pontos

Escrever $\lim_{x\to 0} \frac{600x}{1-\frac{1}{e^{nx}}} = \lim_{x\to 0} \frac{600x}{\frac{e^{nx}-1}{e^{nx}}}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim_{x\to 0} \frac{600x}{\frac{e^{nx}-1}{e^{nx}}} \underset{y=nx}{=} \lim_{y\to 0} \frac{600\left(\frac{y}{n}\right)}{\frac{e^{y}-1}{e^{y}}}$ ..... 2 pontos

Escrever $\lim_{y\to 0} \frac{600\left(\frac{y}{n}\right)}{\frac{e^{y}-1}{e^{y}}} = \frac{600}{n} \lim_{y\to 0} \frac{e^{y}}{\frac{e^{y}-1}{y}}$ ..... 2 pontos

Reconhecer o limite notável $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1$ ..... 1 ponto

Obter o valor de $\lim_{x\to 0}\frac{600x}{1-e^{-nx}}\quad\left(\frac{600}{n}\right)$ ..... 2 pontos

3.º Processo

Escrever $\lim_{x\to 0}\frac{600x}{1-e^{-nx}}=\lim_{x\to 0}\frac{600}{\frac{1-e^{-nx}}{x}}$ ..... 2 pontos

Escrever $\lim_{x\to 0}\frac{600}{\frac{1-e^{-nx}}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{600}{n\frac{1-e^{-nx}}{nx}}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim_{x\to 0}\frac{600}{n\frac{1-e^{-nx}}{nx}}=\lim_{x\to 0}\frac{600}{n\frac{e^{-nx}-1}{-nx}}$ ..... 2 pontos

Escrever $\lim_{x\to 0}\frac{600}{n\frac{e^{-nx}-1}{-nx}}\underset{y=-nx}{=}\lim_{y\to 0}\frac{600}{n\frac{e^{y}-1}{y}}$ ..... 2 pontos

Reconhecer o limite notável $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$ ..... 1 ponto

Obter o valor de $\lim_{x\to 0}\frac{600x}{1-e^{-nx}}\quad\left(\frac{600}{n}\right)$ ..... 2 pontos

Interpretar o resultado no contexto da situação descrita (Quando a taxa de juro tende para zero, a prestação mensal tende para o quociente entre o valor do empréstimo e o número de prestações mensais) ..... 5 pontos

6. ..... **10 pontos**

Referir que, em $\left[a, g(a)\right]$, a função h, definida por $h(x)=g(x)-x-1$, é contínua (**ver notas 1** e **2**) ..... 1 ponto

Determinar $h(a)$ ..... 1 ponto

Determinar $h\left(g(a)\right)$ ..... 2 pontos

Referir que $h(a)>0$ ..... 1 ponto

Justificar que $h\left(g(a)\right)<0$ (**ver nota 3**) ..... 3 pontos

Evocar o teorema de Bolzano para concluir que a função h tem pelo menos um zero em $\left]a, g(a)\right[$ ..... 1 ponto

Concluir o pretendido ..... 1 ponto

Notas:

1. Se apenas for referido que a função h é contínua, esta etapa é considerada como cumprida.

2. Se for referido que a função h é contínua em $\left]a, g(a)\right[$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

3. Se apenas for referido que $h\left(g(a)\right)<0$, sem qualquer justificação, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

COTAÇÕES

Grupo	Item												
	Cotação (em pontos)												
I	**1.** a **8.**												
	8 × 5 pontos												**40**
II	**1.1.**	**1.2.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	
	15	15	15	5	15	10	15	15	15	15	15	10	**160**
TOTAL													**200**

Exame final nacional de Matemática A **(2016, 2.ª fase)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P\left(A \cup B\right)$, temos que:

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0{,}6 \Leftrightarrow 1 - P\left(A \cup B\right) = 0{,}6 \Leftrightarrow P\left(A \cup B\right) = 1 - 0{,}6 \Leftrightarrow P\left(A \cup B\right) = 0{,}4$$

Como $P\left(A \cup B\right) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P\left(A \cap B\right) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$, temos que:

$$P\left(A \cap B\right) = 0{,}2 + 0{,}3 - 0{,}4 = 0{,}1$$

E assim, vem que:

$$P\left(A|B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}1}{0{,}3} = \frac{1}{3}$$

Resposta: **Opção A**

2. Como a experiência se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades segue o modelo binomial $\left(P(X = k) =^{n} C_k \, p^k \, q^{n-k}\right)$.

Temos que:

- $n = 5$ (o Carlos vai executar uma série de cinco lances livres).
- $p = 0{,}4$ (em cada lance livre, a probabilidade de o Carlos encestar é 0,4)
- $q = 0{,}6$ (a probabilidade do insucesso pode ser calculada como $q = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

Assim, calculando a probabilidade de o Carlos encestar exatamente quatro vezes, temos:

$$P(X = 4) =^{5} C_4 \times 0{,}4^4 \times 0{,}6^{5-4} = 0{,}0768$$

Resposta: **Opção C**

3. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que:

$$\log_a\left(ab^3\right) = \log_a a + \log_a\left(b^3\right) = 1 + 3\log_a b$$

E assim, vem que:

$$\log_a\left(ab^3\right) = 5 \Leftrightarrow 1 + 3\log_a b = 5 \Leftrightarrow \log_a b = \frac{5-1}{3} \Leftrightarrow \log_a b = \frac{4}{3}$$

Logo, vem que:

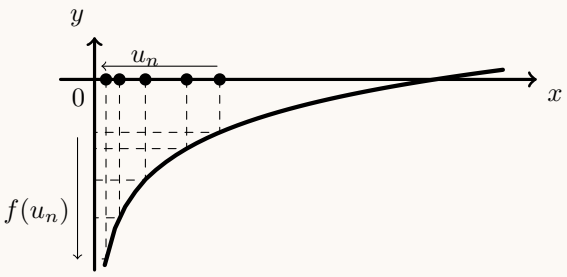
$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

Resposta: **Opção B**

4. Como $\lim u_n = \lim \dfrac{n}{e^n} = \lim \dfrac{1}{\frac{e^n}{n}} = \dfrac{\lim 1}{\underbrace{\lim \frac{e^n}{n}}_{\text{Lim. Notável}}} = \dfrac{1}{+\infty} = 0^+$, então:

$$\lim f(u_n) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (\ln x) = \ln(0^+) = -\infty$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (u_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $f(u_n)$, que tendem para $-\infty$, quando o valor de n aumenta.

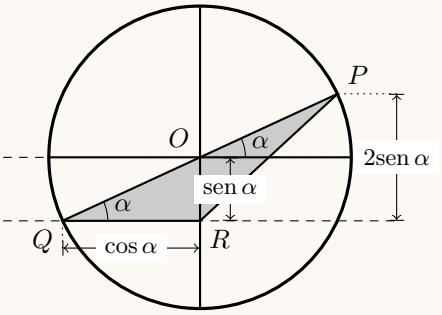


Resposta: **Opção A**

5. Observando que os ângulos AOP e RQO têm a mesma amplitude (porque são ângulos de lados paralelos), relativamente ao triângulo $[PQR]$, vem que:

- $\overline{QR} = \cos\alpha$
- $\overline{OR} = \operatorname{sen}\alpha$
- a altura do triângulo, relativa ao lado $[QR]$ é

$$h = 2 \times \overline{OR} = 2\operatorname{sen}\alpha$$



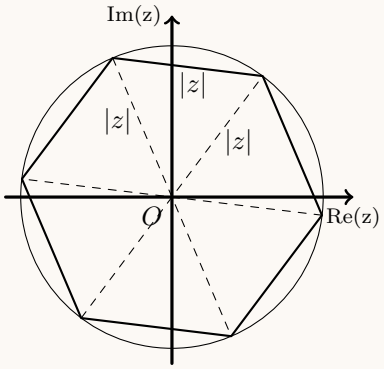
Desta forma, a área do triângulo é:

$$A_{[PQR]} = \frac{\overline{QR} \times h}{2} = \frac{\cos\alpha \times 2\operatorname{sen}\alpha}{2} = \frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$$

Resposta: **Opção D**

6. O polígono cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice 6 de um qualquer número complexo, é um hexágono regular.

Como qualquer hexágono regular pode ser decomposto em 6 triângulos equiláteros, temos que, o comprimento do lado do hexágono é igual ao raio da circunferência em que o hexágono está inscrito.



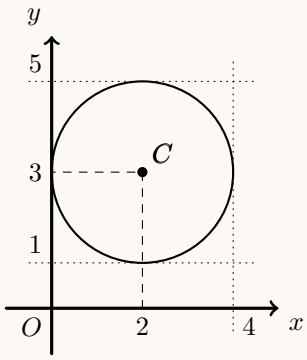
Assim, podemos determinar o raio da circunferência como a distância à origem do ponto que é a representação geométrica do número complexo z, ou seja $|z|$

Desta forma vem que o perímetro do hexágono regular é:

$$P_H = 6 \times |z| = 6 \times \sqrt{3^2 + 4^2} = 6 \times \sqrt{25} = 6 \times 5 = 30$$

Resposta: **Opção C**

7. Representando o quadrado definido pela condição dada, podemos verificar que o centro da circunferência é o ponto médio de uma das diagonais, ou seja o ponto :



$$C\,(2{,}3)$$

Da mesma forma, o raio da circunferência é metade do comprimento do lado:

$$r = \frac{4}{2} = 2$$

E assim, temos que a equação da circunferência inscrita no quadrado é:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$$

Resposta: **Opção C**

8. Como (u_n) é progressão geométrica (u_n), designado por r a razão, temos que o termo de ordem n é

$$u_n = u_1 \times r^{n-1}$$

Assim, temos que

- $u_4 = 32 \Leftrightarrow u_1 \times r^{4-1} = 32 \Leftrightarrow u_1 \times r^3 = 32 \Leftrightarrow u_1 = \frac{32}{r^3}$
- $u_8 = 8192 \Leftrightarrow u_1 \times r^{8-1} = 8192 \Leftrightarrow u_1 \times r^7 = 8192 \Leftrightarrow u_1 = \frac{8192}{r^7}$

Desta forma, e como a progressão é monótona crescente, temos que a razão é positiva $(r > 0)$, pelo que podemos calcular o valor da razão:

$$\frac{32}{r^3} = \frac{8192}{r^7} \Leftrightarrow \frac{r^7}{r^3} = \frac{8192}{32} \Leftrightarrow r^4 = 256 \Leftrightarrow r = \sqrt[4]{256} \underset{r>0}{\Rightarrow} r = 4$$

Logo, obtemos o quinto termo, multiplicando o quarto termo pela razão:

$$u_5 = u_4 \times r = 32 \times 4 = 128$$

Resposta: **Opção B**

GRUPO II

1.

1.1. No contexto da situação descrita $P(B|A)$ é a probabilidade de que, retirando uma ficha da caixa U e uma ficha da caixa V, o produto dos números das fichas retiradas seja ímpar, sabendo que a soma dos números das fichas retiradas é igual a 10.

Como se retira uma bola de cada caixa, o número de casos possíveis é 4 e correspondem a pares de bolas (em que cada uma é retirada de uma caixa) cuja soma é 10, ou seja:

$$(1{,}9);\ (2{,}8);\ (3{,}7) \text{ e } (4{,}6)$$

De entre estes pares os que correspondem a produtos ímpares são (1,9), porque $\times 9 = 9$ e (3,7), porque $3 \times 7 = 21$; (os restantes pares de números, por serem constituídos por números pares resultam num produto par).
Assim, existem 2 casos favoráveis, e, recorrendo à Regra de Laplace para o cálculo da probabilidade, e escrevendo o resultado na forma de fração irredutível, vem:

$$P(B|A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

1.2. Considerando uma única fica horizontal, existem 4 posições que devem ser ocupadas por 4 elementos (fichas com número par) diferentes e por isso cuja ordem de colocação é relevante, ou seja, são ${}^4A_4 = P_4 = 4!$ as formas de colocar os números pares numa única fila horizontal.
Como existem 4 filas horizontais, o número de formas que existem para dispor as fichas com números pares no tabuleiro, ocupando uma única fila horizontal é $4 \times 4!$

Após a colocação das fichas com um número par, restam $16-4=12$ posições disponíveis no tabuleiro que podem ser ocupadas por uma fichas com um número ímpar (que são diferentes e por isso é relevante a ordem de colocação), ou seja, existem ${}^{12}A_5$ formas de dispor as fichas com os números ímpares.

Assim o número de maneiras diferentes é possível dispor as nove fichas, de tal forma que as que têm número par ocupem uma única fila horizontal é:

$$4 \times 4! \times {}^{12}A_5 = 9\,123\,840$$

2. Escrevendo $-1+i$ na f.t. temos $-1+i = \gamma \operatorname{cis} \alpha$, onde:

- $\gamma = |-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{-1}{1} = -1$; como $\operatorname{sen}\alpha > 0$ e $\cos\alpha < 0$, α é um ângulo do 2º quadrante, logo $\alpha = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{4\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$

Assim temos que $-1+i = \sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{3\pi}{4}$, pelo que podemos simplificar a expressão do número complexo z:

$$z = \frac{\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}}{(\rho\operatorname{cis}\theta)^2} = \frac{\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}}{\rho^2\operatorname{cis}(2\theta)} = \frac{\sqrt{2}}{\rho^2}\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}-2\theta\right)$$

Escrevendo w na f.t. temos $w = -\sqrt{2}i = \sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{3\pi}{2}$

Como $z = w$, então temos que:

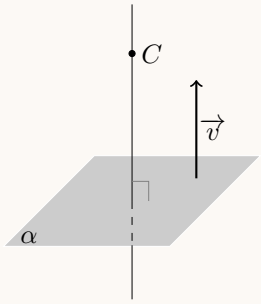
- $|z| = |w| \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{\rho^2} = \sqrt{2} \underset{\rho^2\neq 0}{\Leftrightarrow} \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \rho^2 \Leftrightarrow 1 = \rho^2 \underset{\rho>0}{\Rightarrow} \rho = 1$
- $\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} w + 2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \dfrac{3\pi}{4} - 2\theta = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\theta = \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{3\pi}{2} - 2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow 2\theta = -\dfrac{3\pi}{4} - 2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = -\dfrac{3\pi}{8} - k\pi, k\in\mathbb{Z}$

  Como $\theta \in]0,\pi[$, determinamos o valor de θ, atribuindo valores a k:
  - Se $k=0$, então $\theta = -\dfrac{3\pi}{8}\left(\theta \notin]0,\pi[\right)$
  - Se $k=-1$, então $\theta = -\dfrac{3\pi}{8} - (-\pi) = -\dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{8\pi}{8} = \dfrac{5\pi}{8}\left(\theta \in]0,\pi[\right)$
  - Se $k=-2$, então $\theta = -\dfrac{3\pi}{8} - (-2\pi) = -\dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{16\pi}{8} = \dfrac{13\pi}{8}\left(\theta \notin]0,\pi[\right)$

Assim, se $z = w$, $\rho > 0$ e $\theta \in]0,\pi[$, temos que $\rho = 1$ e $\theta = \dfrac{5\pi}{8}$

3.

3.1. Como um vetor normal de um plano define uma direção perpendicular ao plano, um destes vetores é também um vetor diretor de qualquer reta perpendicular ao plano.



Assim, como $\vec{v} = (3,2,4)$ é um vetor normal do plano α, também é um vetor diretor da reta perpendicular ao plano α e que contém o ponto $C(2,1,4)$

Assim, uma equação vetorial da reta, é:

$$(x,y,z) = (2,1,4) + \lambda(3,2,4), \lambda \in \mathbb{R}$$

3.2. Como a reta OD contém a origem e o ponto D, um vetor diretor da reta OD, é:

$$\overrightarrow{OD} = D - O = (4,2,2) - (0,0,0) = (4,2,2)$$

E assim, como a reta contém o ponto $O(0,0,0)$, umas equações cartesianas desta reta, são:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$$

Desta forma, as coordenadas do ponto de intersecção da reta OD com o plano α, verificam simultaneamente a equação do plano e as equações da reta, ou seja, podem ser calculadas resolvendo o sistema seguinte:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z - 12 = 0 \\ \frac{x}{4} = \frac{y}{2} \\ \frac{y}{2} = \frac{z}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y + 4z - 12 = 0 \\ x = 2y \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(2y) + 2y + 4(y) - 12 = 0 \\ x = 2y \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6y + 2y + 4y = 12 \\ x = 2y \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12y = 12 \\ x = 2y \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Logo o plano α e a reta OD intersectam-se no ponto de coordenadas $(2,1,1)$

3.3. Como o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox, tem ordenada e cota nulas, ou seja as suas coordenadas são: $A(x_A,0,0), x_A \in \mathbb{R}^+$
Analogamente, como o ponto B pertence ao semieixo positivo Oy, que tem abcissa e cota nulas e as coordenadas são $B(0,y_B,0), y_B \in \mathbb{R}^+$
Da mesma forma, como o ponto P pertence ao eixo Oz, e tem abcissa e ordenadas nulas e ainda cota não nula, as coordenadas são $P(0,0,z_P), z_P \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Como um ângulo é agudo se o produto escalar dos vetores que formam esse ângulo for positivo, então o ângulo APB é agudo se

$$\overrightarrow{PA} \,.\, \overrightarrow{PB} > 0$$

Determinando as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$, temos:

- $\overrightarrow{PA} = A - P = (x_A,0,0) - (0,0,z_P) = (x_A,0,-z_P)$
- $\overrightarrow{PB} = B - P = (0,y_B,0) - (0,0,z_P) = (0,y_B,-z_P)$

Logo, o produto escalar dos dois vetores, expressos nas suas coordenadas, é:

$$\overrightarrow{PA} \,.\, \overrightarrow{PB} = (x_A,0,-z_P) \,.\, (0,y_B,-z_P) = x_A \times 0 + 0 \times y_b + (-z_P) \times (-z_P) = 0 + 0 + {z_P}^2 = {z_P}^2$$

Como z_P é um número real, então ${z_P}^2 > 0$

Como ${z_P}^2 = \overrightarrow{PA} \,.\, \overrightarrow{PB}$, então $\overrightarrow{PA} \,.\, \overrightarrow{PB} > 0$, logo o ângulo APB é agudo.

4.

4.1. Como o domínio da função é $\left]-\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$, só poderá existir uma assíntota oblíqua quando $x \to +\infty$.
Assim, vamos averiguar a existência de uma assíntota de equação $y = mx + b$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - \ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1 - \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 1 - 0 = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - 1 \times x\big) = \lim_{x\to+\infty} (x - \ln x - x) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \big(-\ln x\big) = -\lim_{x\to+\infty} \big(\ln x\big) = -(+\infty) = -\infty$$

Assim, como $\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - mx\big)$ não é um valor finito, não existe qualquer assíntota oblíqua do gráfico de f.

4.2. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f, para $x \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[$:

$$f'(x) = \left(\frac{2+\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{(2+\operatorname{sen} x)'\cos x - (2+\operatorname{sen} x)(\cos x)'}{(\cos x)^2} =$$

$$= \frac{(0+\cos x)\cos x - (2+\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 2\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{1+2\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

Calculando os zeros da derivada, para $x \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[$, vem:

$$\frac{1+2\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow 1+2\operatorname{sen} x = 0 \wedge \underbrace{\cos^2 x \neq 0}_{(1)} \Leftrightarrow 2\operatorname{sen} x = -1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Para $k=0$, vem $x = -\frac{\pi}{6} \vee x = \pi + \frac{\pi}{6}$, e como $x \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ podemos verificar que a única solução da equação é $x = -\frac{\pi}{6}$

(1) Como $\cos x > 0, \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[$, então $\cos^2 x \neq 0, \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		0
$1+2\operatorname{sen} x$		$-$	0	$+$	
$\cos^2 x$		$+$	$+$	$+$	
$f'(x)$	n.d.	$.-$	0	$+$	n.d.
$f(x)$	n.d.	↘	min	↗	n.d.

Assim, podemos concluir que a função f:

- é decrescente no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right]$;
- é crescente no intervalo $\left[-\frac{\pi}{6},0\right[$;
- tem um mínimo relativo para $x = -\frac{\pi}{6}$

4.3. Para calcular o declive da reta tangente, no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$ começamos por determinar a expressão da derivada da função, para $x > 0$:

$$f'(x) = \left(x - \ln x\right)' = (x)' - \left(\ln x\right)' = 1 - \frac{(x)'}{x} = 1 - \frac{1}{x}$$

Assim, temos que o declive da reta tangente no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$ é:

$$m = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 - 2 = -1$$

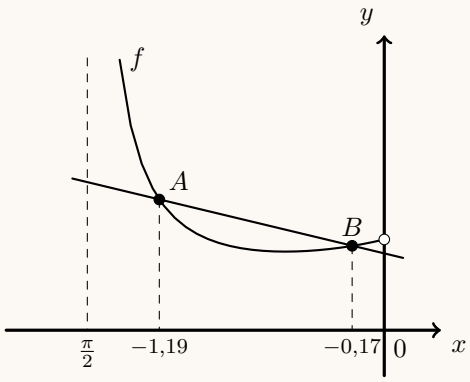
Logo a equação da reta tangente é da forma $y = -x + b$
Como $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - (\ln 1 - \ln 2) = \frac{1}{2} - (0 - \ln 2) = \frac{1}{2} + \ln 2$, sabemos que o ponto $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \ln 2\right)$ pertence ao gráfico da função e também à reta tangente.
Assim, substituindo as coordenadas do ponto de tangência na equação da reta, podemos calcular o valor de b:

$$\frac{1}{2} + \ln 2 = -\frac{1}{2} + b \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ln 2 = b \Leftrightarrow 1 + \ln 2 = b$$

Pelo que a equação da reta tangente é: $y = -x + 1 + \ln 2$

Como as abcissas dos pontos A e B pertencem ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, representando na calculadora gráfica o gráfico da função f e a reta tangente ao gráfico em $x = \frac{1}{2}$, numa janela coerente com o intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, (reproduzido na figura ao lado) e determinando a interseção das duas, obtemos os valores aproximados (às centésimas) das coordenadas dos pontos A e B:

$$x_A \approx -1{,}19 \text{ e } x_B \approx -0{,}17$$



5.

5.1. Temos que $x = 0{,}003$ e como o empréstimo será pago em prestações mensais de 24 euros então $p = 24$

Substituindo estes valores na expressão conhecida, e resolvendo a equação, vem:

$$24 = \frac{600(0{,}003)}{1 - e^{-n \times 0{,}003}} \underset{(1)}{\Leftrightarrow} 24 - 24e^{-0{,}003n} = 1{,}8 \Leftrightarrow -24e^{-0{,}003n} = 1{,}8 - 24 \Leftrightarrow e^{-0{,}003n} = \frac{-22{,}2}{-24} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-0{,}003n} = 0{,}925 \Leftrightarrow -0{,}003n = \ln 0{,}925 \Leftrightarrow n = \frac{\ln 0{,}925}{-0{,}003}$$

(1) Como $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$, então $1 - e^{-0{,}003n} \neq 0$

Como $\frac{\ln 0{,}925}{-0{,}003} \approx 26$, concluímos que o José irá demorar 26 meses a pagar o empréstimo.

5.2. Calculando o valor do limite, em função de n, vem que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{600x}{1-e^{-nx}}=\frac{600(0)}{1-e^{-n(0)}}=\frac{0}{1-e^{0}}=\frac{0}{1-1}=\frac{0}{0}\ \text{(Indeterminação)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{600x}{1-e^{-nx}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-n}{-n}\times\frac{600x}{1-e^{-nx}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{600}{-n}\times\frac{-nx}{1-e^{-nx}}\right)=$$

(fazendo $y=-nx$, temos que se $x\to 0$, então $y\to 0$)

$$=\lim_{y\to 0}\left(\frac{600}{-n}\times\frac{y}{1-e^{y}}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{600}{-n}\times\frac{y}{-(e^{y}-1)}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{600}{n}\times\frac{y}{e^{y}-1}\right)=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{600}{n}\times=\frac{600}{n}\times\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{e^{y}-1}{y}}=\frac{600}{n}\times\frac{\lim\limits_{y\to 0}1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}}_{\text{Lim. Notável}}}=\frac{600}{n}\times\frac{1}{1}=\frac{600}{n}$$

Desta forma, se $x\to 0$, o que corresponde a uma taxa de juro arbitrariamente próxima de zero, então a prestação mensal será arbitrariamente próxima de $\frac{600}{n}$ o que corresponde a pagar o montante do empréstimo (600 euros) em n parcelas iguais, durante n meses.

6. Começamos por notar que: $g(x)=x+1 \Leftrightarrow g(x)-x-1=0$

Assim, considerando $f(x)=g(x)-x-1$, temos que:
- provar que a equação $g(x)=x+1$ é possível no intervalo $]a,g(a)[$, é equivalente a,
- provar que a equação $f(x)=0$ é possível no intervalo $]a,g(a)[$

Como, a função g é contínua em $\mathbb{R}$, então a função f também é contínua $\mathbb{R}$, porque resulta de operações sucessivas de funções contínuas, e, em particular é contínua no intervalo $[a,g(a)]$.

Cálculos auxiliares:

- $f(a)=g(a)-a-1=g(a)-(a+1)$
  Como $g(a)>a+1$, então:

$$g(a)>a+1 \Leftrightarrow g(a)-(a+1)>a+1-(a+1) \Leftrightarrow g(a)-(a+1)>0 \Leftrightarrow f(a)>0 \Leftrightarrow 0<f(a)$$

- Como $(g\circ g)(x)=x, \forall x\in \mathrm{R}$, então, $(g\circ g)(a)=a$, e assim:

$$f\big(g(a)\big)=g\big(g(a)\big)-g(a)-1=(g\circ g)(a)-g(a)-1=a-g(a)-1=-g(a)+a-1$$

Como $g(a)>a+1$, então:

$$g(a)>a+1 \Leftrightarrow -g(a)<-(a+1) \Leftrightarrow -g(a)+(a+1)<0 \Leftrightarrow -g(a)+a+1-2<-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -g(a)+a-1<-2 \Leftrightarrow f\big(g(a)\big)<-2 \Rightarrow f\big(g(a)\big)<0$$

Como $-1<0<f(a)$, ou seja, $f\big(g(a)\big)<0<f(a)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c\in]a,g(a)[$ tal que $f(c)=0$, ou seja, que a equação $f(x)=0$ tem, pelo menos, uma solução em $]a,g(a)[$, ou, de forma equivalente, que a equação $g(x)=x+1$ é possível no intervalo $]a,g(a)[$

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/Época Especial

14 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2016

Nos termos da lei em vigor, as provas de avaliação externa são obras protegidas pelo Código do Direito de Autor e dos Direitos Conexos. A sua divulgação não suprime os direitos previstos na lei. Assim, é proibida a utilização destas provas, além do determinado na lei ou do permitido pelo IAVE, I.P., sendo expressamente vedada a sua exploração comercial.

Página em branco

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \ \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\ e^u$

$(a^u)' = u'\ a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Página em branco

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Considere, num referencial o.n. xOy, os pontos $A(-1, 3)$ e $B(2, 4)$

Qual das seguintes equações define uma reta paralela à reta AB ?

(A) $y = -\frac{1}{3}x$ **(B)** $y = \frac{1}{3}x$ **(C)** $y = 3x$ **(D)** $y = -3x$

2. Uma pessoa lança um dado cúbico, com as faces numeradas de 1 a 6, e regista o número da face que ficou voltada para cima.

Uma outra pessoa lança um dado com a forma de um tetraedro regular, com as faces numeradas de 1 a 4, e regista o número da face que ficou voltada para baixo.

Admita que ambos os dados são equilibrados.

Qual é a probabilidade de, pelo menos, uma dessas pessoas registar o número 4?

(A) $\frac{3}{8}$ **(B)** $\frac{5}{8}$ **(C)** $\frac{5}{12}$ **(D)** $\frac{7}{12}$

3. Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio 2 e desvio padrão $0{,}5$

Qual é o valor, arredondado às centésimas, de $P(X > 2{,}5)$?

(A) $0{,}68$ **(B)** $0{,}34$ **(C)** $0{,}32$ **(D)** $0{,}16$

4. Sejam a e b dois números reais superiores a 1, tais que $a = b^3$

Qual dos valores seguintes é igual a $\log_a b + \log_b a$?

(A) $\frac{4}{3}$ **(B)** 1 **(C)** $\frac{10}{3}$ **(D)** 3

5. Seja f a função, de domínio $[-3, 3]$, cujo gráfico está representado na Figura 1.

Tal como a figura sugere, todos os objetos inteiros têm imagens inteiras.

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \ln x$

Quais são as soluções da equação $(f \circ g)(x) = 0$?

(o símbolo $\circ$ designa a composição de funções)

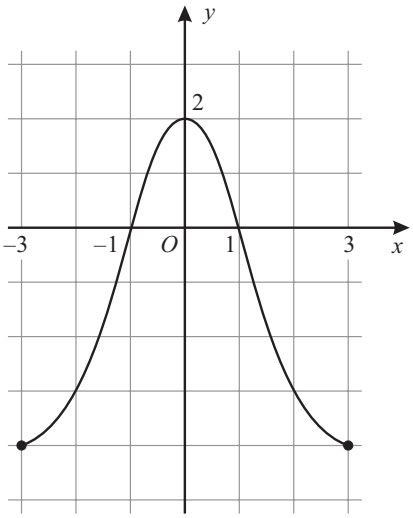


Figura 1

(A) $\frac{1}{e}$; e^2 **(B)** e ; e^2

(C) 1 ; e **(D)** $\frac{1}{e}$; e

6. Para um certo número real k, é contínua em $\mathbb{R}$ a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(3x+3)}{4x+4} & \text{se} \quad x \neq -1 \\ k+2 & \text{se} \quad x = -1 \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

(A) $-\frac{5}{3}$ **(B)** $-\frac{5}{4}$ **(C)** $\frac{5}{4}$ **(D)** $\frac{5}{3}$

7. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição

$$0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} \ \wedge \ 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 5$$

Esta condição define uma região no plano complexo.

Qual dos seguintes números complexos tem a sua imagem geométrica nesta região?

(A) $3 + 4i$ **(B)** $6 + 2i$ **(C)** $2\operatorname{cis}\frac{13\pi}{6}$ **(D)** $\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}$

8. Considere as sucessões convergentes (a_n) e (b_n), de termos gerais

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} \quad \text{e} \quad b_n = \ln\left(1 - 2e^{-n}\right)$$

Sejam a e b os números reais tais que $a = \lim(a_n)$ e $b = \lim(b_n)$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $a = 3e$ e $b = 0$ **(B)** $a = e^3$ e $b = 0$

(C) $a = 3e$ e $b = 1$ **(D)** $a = e^3$ e $b = 1$

Página em branco

GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z = \frac{2i}{1-i} + 2i^{23}$

Determine, sem recorrer à calculadora, os números complexos w tais que $w^3 = \overline{z}$

Apresente os valores pedidos na forma trigonométrica.

2. Um saco contém n bolas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a n, sendo n um número par maior do que 3

2.1. Retiram-se, em simultâneo e ao acaso, três bolas do saco.

Escreva uma expressão, em função de n, que dê a probabilidade de, dessas três bolas, duas terem número par e uma ter número ímpar.

Não simplifique a expressão que escrever.

2.2. Admita agora que $n = 8$

Ao acaso, extraem-se sucessivamente duas bolas do saco (primeiro uma e depois outra) e observa-se o número de cada uma delas.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: «A primeira bola extraída tem número par.»

B: «A segunda bola extraída tem número par.»

Determine o valor de $P(A \cap B)$ no caso em que a extração é feita com reposição e no caso em que a extração é feita sem reposição.

Justifique a sua resposta, tendo em conta que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$

Na sua resposta:

- interprete o significado de $P(A \cap B)$, no contexto da situação descrita;
- indique o valor de $P(B|A)$, no caso de a extração ser feita com reposição;
- indique o valor de $P(B|A)$, no caso de a extração ser feita sem reposição;
- apresente o valor de $P(A \cap B)$, em cada uma das situações (designe esse valor por a no caso de a extração ser feita com reposição e por b no caso de a extração ser feita sem reposição).

3. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma quadrangular regular $[OABCDEFG]$

Sabe-se que:

- os pontos C, A e E pertencem aos eixos coordenados Ox, Oy e Oz, respetivamente;
- o ponto A tem coordenadas $(0, 2, 0)$
- o plano OFB é definido pela equação $3x + 3y - z = 0$

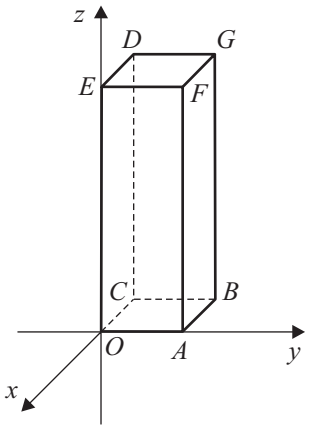


Figura 2

3.1. Determine uma equação do plano paralelo ao plano OFB que passa no ponto D

3.2. Defina a reta OB por uma condição cartesiana.

3.3. Seja P o ponto de cota igual a 1 que pertence à aresta $[BG]$

Seja R o simétrico do ponto P relativamente à origem.

Determine a amplitude do ângulo RAP

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

4. Seja f a função, de domínio $\left]-\frac{3\pi}{2}, +\infty\right[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + \cos x & \text{se } -\frac{3\pi}{2} < x < 0 \\ \ln(e^x + x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Resolva os itens **4.1.** e **4.2.** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4.1. Determine $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - x\right]$

Interprete o valor obtido em termos de assíntotas do gráfico de f

4.2. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão do seu gráfico, no intervalo $\left]-\frac{3\pi}{2}, 0\right[$

Na sua resposta, indique:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

4.3. Na Figura 3, estão representados:

- parte do gráfico da função f
- um ponto A, pertencente ao gráfico de f, de abcissa a
- a reta t, tangente ao gráfico da função f no ponto A

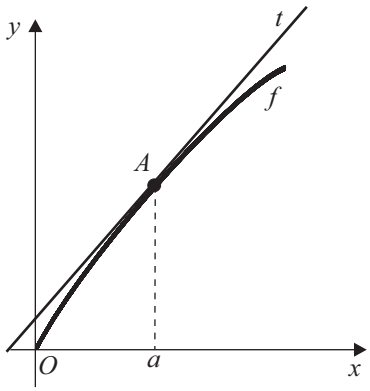


Figura 3

Sabe-se que:

- $a \in]0,1[$
- a reta t tem declive igual a $1,1$

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto A

Na sua resposta:

– equacione o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, que lhe permite(m) resolver a equação;

– apresente a abcissa do ponto A arredondada às centésimas.

5. O movimento de uma nave espacial é um movimento de propulsão provocado pela libertação de gases resultantes da queima e explosão de combustível.

Um certo tipo de nave tem por função o transporte de carga destinada ao abastecimento de uma estação espacial.

Designemos por x a massa, em milhares de toneladas, da carga transportada por uma nave desse tipo e por V a velocidade, em quilómetro por segundo, que essa mesma nave atinge no instante em que termina a queima do combustível.

Considere que V é dada, em função de x, por $V(x) = 3\ln\left(\frac{x+300}{x+60}\right) \quad (x \geq 0)$

Nos itens **5.1.** e **5.2.**, a calculadora só pode ser utilizada em cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

5.1. Admita que uma nave do tipo referido transporta uma carga de 25 mil toneladas.

Determine quanto tempo demora essa nave a percorrer 200 quilómetros a partir do instante em que termina a queima do combustível, sabendo que a velocidade da nave se mantém constante a partir desse instante.

Apresente o resultado em segundos, arredondado às unidades.

5.2. Determine qual deve ser a massa da carga transportada por uma dessas naves, de modo que atinja, após a queima da totalidade do combustível, uma velocidade de 3 quilómetros por segundo.

Apresente o resultado em milhares de toneladas, arredondado às unidades.

6. Seja k um número real positivo.

Considere a função g, de domínio $]-k, +\infty[$, definida por $g(x) = \ln(x + k)$

Mostre que: se $g(0) \times g(k) < 0$, então $k \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$

Na resolução deste item, não utilize a calculadora.

FIM

COTAÇÕES

Grupo	Item												
	Cotação (em pontos)												
I	**1.** a **8.**												
	8 × 5 pontos												**40**
II	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	
	15	15	15	10	5	15	15	15	15	15	15	10	**160**
TOTAL													**200**

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/Época Especial

Critérios de Classificação 12 Páginas

2016

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Itens de seleção

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

Itens de construção

Nos itens de resposta restrita e de resposta extensa, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada de vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados, devidamente identificados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelo programa da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora gráfica», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado, que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. ..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

As respostas corretas são as seguintes:

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
	B	A	D	C	D	B	C	B

GRUPO II

1. ..... **15 pontos**

Escrever z na forma algébrica ..... 5 pontos

Identificar i^{23} com $-i$ ..... 1 ponto

Obter $\frac{2i}{1-i} - 2i = \frac{-2}{1-i}$ ..... 1 ponto

Escrever $\frac{-2}{1-i}$ na forma algébrica ..... 3 pontos

Indicar a multiplicação de ambos os termos da fração $\frac{-2}{1-i}$ pelo conjugado do denominador .. 1 ponto

Obter o quociente na forma algébrica ..... 2 pontos

OU

Identificar i^{23} com $-i$ ..... 1 ponto

Escrever $\frac{2i}{1-i}$ na forma algébrica ..... 3 pontos

Indicar a multiplicação de ambos os termos da fração $\frac{2i}{1-i}$ pelo conjugado do denominador .. 1 ponto

Obter o quociente na forma algébrica ..... 2 pontos

Obter $z = -1 - i$ ..... 1 ponto

Escrever $\overline{z} = -1 + i$ ..... 1 ponto

Escrever $\overline{z}$ na forma trigonométrica ..... 3 pontos

Determinar as raízes cúbicas de $\overline{z}$ ..... 6 pontos

Escrever o módulo comum às três raízes ..... 2 pontos

Escrever a expressão geral dos argumentos ..... 1 ponto

Obter as três raízes cúbicas

$\left(\sqrt[6]{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right),\ \sqrt[6]{2}\,\text{cis}\left(\frac{11\pi}{12}\right)\ \text{e}\ \sqrt[6]{2}\,\text{cis}\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right)$ ..... 3 pontos

2.1. ..... **15 pontos**

Escrever uma expressão, em função de n, que dê o número de casos possíveis (**ver nota 1**) ..... 4 pontos

Escrever uma expressão, em função de n, que dê o número de casos favoráveis (**ver nota 2**) ..... 9 pontos

Escrever uma expressão, em função de n, que dê a probabilidade pedida

$\left(\frac{{}^{\frac{n}{2}}C_2 \times \frac{n}{2}}{{}^{n}C_3}\ \text{ou equivalente}\right)$ (**ver nota 3**) ..... 2 pontos

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for ${}^{n}C_3$ (ou equivalente) ou ${}^{n}A_3$ (ou equivalente), a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos.

2. Se a expressão apresentada não estiver de acordo com o número de casos possíveis considerado, a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos.

3. Se as duas etapas anteriores tiverem sido pontuadas com zero pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos.

2.2. ..... **15 pontos**

Interpretar o significado de $P(A \cap B)$ no contexto da situação descrita (probabilidade de as duas bolas extraídas terem ambas número par) ..... 5 pontos

Indicar o valor de $P(B|A)$, no caso de a extração ser feita com reposição $\left(\frac{4}{8}\right)$ ..... 3 pontos

Indicar o valor de $P(B|A)$, no caso de a extração ser feita sem reposição $\left(\frac{3}{7}\right)$ ..... 3 pontos

Indicar o valor de $P(A \cap B)$, em cada um dos casos

$\left(a = \frac{1}{4}\ \text{e}\ b = \frac{3}{14}\right)$ ..... (2 + 2) ..... 4 pontos

3.1. ..... **10 pontos**

Obter a cota do ponto F ..... 4 pontos

Escrever as coordenadas do ponto D ..... 1 ponto

Identificar o vetor de coordenadas $(3, 3, -1)$ como sendo um vetor normal ao plano pedido ..... 1 ponto

Escrever a equação $3x + 3y - z + d = 0$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Determinar o valor de d ..... 1 ponto

Escrever uma equação do plano pedido $(3x + 3y - z + 12 = 0$ ou equivalente$)$ 1 ponto

3.2. ..... **5 pontos**

Escrever as coordenadas do ponto B ..... 2 pontos

Escrever $\overrightarrow{OB} = (-2, 2, 0)$ ..... 1 ponto

Escrever uma condição cartesiana da reta OB $(y = -x \wedge z = 0$ ou equivalente$)$ ..... 2 pontos

Nota – Se apenas for apresentada a condição $y = -x \wedge z = 0$ (ou uma condição cartesiana equivalente), é atribuída a cotação total do item.

3.3. ..... **15 pontos**

Escrever as coordenadas do ponto P ..... 2 pontos

Escrever as coordenadas do ponto R ..... 3 pontos

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AR}$ ..... 1 ponto

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{AR}$ ..... 1 ponto

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AP}$ ..... 1 ponto

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{AP}$ ..... 1 ponto

Escrever $-5 = \sqrt{105} \cos R\hat{A}P$ ..... 2 pontos

Obter o valor de $\cos R\hat{A}P$ ..... 2 pontos

Obter a amplitude do ângulo RAP $(119°)$ (**ver nota**) ..... 2 pontos

Nota – Se forem considerados dois vetores cujo ângulo tenha amplitude diferente da amplitude do ângulo RAP, a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos.

4.1. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Determinar $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]$ ..... 10 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x+x\right)-x\right]$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x+x\right)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x+x\right)-\ln e^x\right]$ 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x+x\right)-\ln e^x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{e^x+x}{e^x}\right)$ ..... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{e^x+x}{e^x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)$ ..... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}}\right)$ ..... 1 ponto

Obter o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]$ (0) ..... 1 ponto

Interpretar o valor obtido (o gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua de equação $y=x$) ..... 5 pontos

2.º Processo

Determinar $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]$ ..... 10 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x+x\right)-x\right]$ ..... 1 ponto

Escrever

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x+x\right)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)\right)-x\right]$ ..... 3 pontos

Escrever

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)\right)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln e^x+\ln\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)-x\right]$ 2 pontos

Escrever

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln e^x+\ln\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+\ln\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)-x\right]$ .. 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+\ln\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)\right]$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}}\right)\right]$ ..... 1 ponto

Obter o valor de $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - x \right]$ (0) ..... 1 ponto

Interpretar o valor obtido (o gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua de equação $y = x$) ..... 5 pontos

4.2. ..... **15 pontos**

Determinar $f'(x)$ em $\left]-\frac{3\pi}{2}, 0\right[$ ..... 3 pontos

Obter $\left(\frac{1}{4}x^2\right)'$ ..... 1 ponto

Obter $(\cos x)'$ ..... 1 ponto

Obter $f'(x)$ ..... 1 ponto

Determinar $f''(x)$ em $\left]-\frac{3\pi}{2}, 0\right[$ ..... 3 pontos

Obter $\left(\frac{1}{2}x\right)'$ ..... 1 ponto

Obter $(\operatorname{sen} x)'$ ..... 1 ponto

Obter $f''(x)$ ..... 1 ponto

Determinar o zero de f'' em $\left]-\frac{3\pi}{2}, 0\right[$ ..... 2 pontos

Escrever $f''(x) = 0$ ..... 1 ponto

Obter o zero de f'' em $\left]-\frac{3\pi}{2}, 0\right[$ ..... 1 ponto

Estudar a função f quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão do seu gráfico em $\left]-\frac{3\pi}{2}, 0\right[$ ..... 7 pontos

Apresentar um quadro de sinal de f'' e de sentido da concavidade do gráfico de f (ou equivalente) ..... 3 pontos

Referir que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $\left]-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right[$ (**ver nota 1**) ..... 1 ponto

Referir que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $\left]-\frac{\pi}{3}, 0\right[$ (**ver nota 2**) ..... 1 ponto

Indicar a abcissa do ponto de inflexão do gráfico da função f em $\left]-\frac{3\pi}{2}, 0\right[$ $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ ..... 2 pontos

Notas:

1. Se, na resposta, for referido que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $\left]-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right]$, em vez de $\left]-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

2. Se, na resposta, for referido que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right[$, em vez de $\left]-\frac{\pi}{3}, 0\right[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

4.3. ..... **15 pontos**

Determinar $f'(x)$ em $[0, +\infty[$ ..... 3 pontos

Obter $f'(a)$ ..... 1 ponto

Equacionar o problema $\left(f'(a) = 1{,}1 \text{ ou equivalente}\right)$ ..... 4 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota**) ..... 3 pontos

Apresentar a abcissa do ponto A $(0, 72)$ ..... 4 pontos

Nota – Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

5.1. ..... **15 pontos**

Determinar $V(25)$ $(4{,}02)$ ..... 3 pontos

Escrever a proporção que permite resolver o problema ..... 8 pontos

Obter o valor de t (50) ..... 4 pontos

5.2. ..... **15 pontos**

Equacionar o problema $\left(V(x) = 3 \text{ ou } 3\ln\left(\frac{x+300}{x+60}\right) = 3\right)$ ..... 4 pontos

Resolver a equação ..... 9 pontos

Escrever $3\ln\left(\frac{x+300}{x+60}\right) = 3 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+300}{x+60}\right) = 1$ ..... 1 ponto

Escrever $\ln\left(\frac{x+300}{x+60}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{x+300}{x+60} = e$ ..... 2 pontos

Escrever $\frac{x+300}{x+60} = e \Leftrightarrow x + 300 = e(x+60)$ ..... 1 ponto

Escrever $x + 300 = e(x+60) \Leftrightarrow x + 300 = ex + 60e$ ..... 1 ponto

Escrever $x + 300 = ex + 60e \Leftrightarrow x - ex = 60e - 300$ ..... 1 ponto

Escrever $x - ex = 60e - 300 \Leftrightarrow x(1-e) = 60e - 300$ ..... 2 pontos

Escrever $x(1-e)=60e-300 \Leftrightarrow x=\dfrac{60e-300}{1-e}$ ..... 1 ponto

Responder ao problema (80 milhares de toneladas) ..... 2 pontos

6. ..... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Escrever $g(0)=\ln(k)$ ..... 1 ponto

Escrever $g(k)=\ln(2k)$ ..... 1 ponto

Resolver a inequação $\ln(k)\times\ln(2k)<0$ ..... 8 pontos

Escrever $\ln(k)=0 \Leftrightarrow k=1$ ..... 1 ponto

Escrever $\ln(2k)=0 \Leftrightarrow k=\dfrac{1}{2}$ ..... 1 ponto

Apresentar um quadro de sinais (**ver nota**) ..... 5 pontos

Concluir que $k\in\left]\dfrac{1}{2},1\right[$ ..... 1 ponto

Nota – A escrita de $-\infty$, em vez de 0, na primeira linha do quadro implica uma desvalorização de 2 pontos nesta etapa.

2.º Processo

Escrever $g(0)=\ln(k)$ ..... 1 ponto

Escrever $g(k)=\ln(2k)$ ..... 1 ponto

Resolver a inequação $\ln(k)\times\ln(2k)<0$ ..... 8 pontos

Escrever $\ln(k)\times\ln(2k)<0 \Leftrightarrow \ln(k)\left(\ln 2+\ln(k)\right)<0$ ..... 2 pontos

Escrever
$\ln(k)\left(\ln 2+\ln(k)\right)<0 \Leftrightarrow \ln 2\times\ln(k)+\ln^2(k)<0$ ..... 1 ponto

Escrever
$\ln 2\times\ln(k)+\ln^2(k)<0 \underset{y=\ln(k)}{\Leftrightarrow} \ln(2)\,y+y^2<0$ ..... 1 ponto

Escrever $y^2+\ln(2)y<0 \Leftrightarrow -\ln 2<y<0$ ..... 1 ponto

Escrever $-\ln 2<y<0 \underset{y=\ln(k)}{\Leftrightarrow} -\ln 2<\ln(k)<0$ ..... 1 ponto

Escrever $-\ln 2<\ln(k)<0 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)<\ln(k)<\ln 1$ ..... 1 ponto

Concluir que $k\in\left]\dfrac{1}{2},1\right[$ ..... 1 ponto

3.º Processo

Escrever $g(0)=\ln(k)$ ..... 1 ponto

Escrever $g(k)=\ln(2k)$ ..... 1 ponto

Resolver a inequação $\ln(k)\times\ln(2k)<0$ ..... 8 pontos

Escrever $\ln(k)\times\ln(2k)<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(\ln(k)<0 \ \wedge \ \ln(2k)>0)\vee(\ln(k)>0 \ \wedge \ \ln(2k)<0)$ ..... 1 ponto

Escrever $(\ln(k)<0 \ \wedge \ \ln(2k)>0)\vee(\ln(k)>0 \ \wedge \ \ln(2k)<0)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(k)<0 \ \wedge \ \ln(2k)>0$ ..... 2 pontos

Escrever $\ln(k)<0 \ \wedge \ \ln(2k)>0 \Leftrightarrow k\in\left]0,1\right[\ \wedge \ 2k>1$ ..... 3 pontos

Escrever $k\in\left]0,1\right[\ \wedge \ 2k>1 \Leftrightarrow k\in\left]0,1\right[\ \wedge \ k>\frac{1}{2}$ ..... 1 ponto

Concluir que $k\in\left]\frac{1}{2},1\right[$ ..... 1 ponto

COTAÇÕES

Grupo	**Item**												
	Cotação (em pontos)												
I	**1.** a **8.**												
	8 × 5 pontos												**40**
II	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	
	15	15	15	10	5	15	15	15	15	15	15	10	**160**
TOTAL													**200**

Exame final nacional de Matemática A **(2016, Época especial)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. O declive da reta AB é dado por:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-3}{2-(-1)} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

Como retas paralelas têm o mesmo declive, de entre as opções apresentadas a única reta paralela à reta AB é a que tem declive $\frac{1}{3}$

Resposta: **Opção B**

2. Organizando todos os resultados possíveis para os dois números possíveis de observar, recorrendo a uma tabela, temos:

Dado tetraédrico \ Dado cúbico	1	2	3	4	5	6
1	1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6
2	2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6
3	3 1	3 2	3 3	3 4	3 5	3 6
4	4 1	4 2	4 3	4 4	4 5	4 6

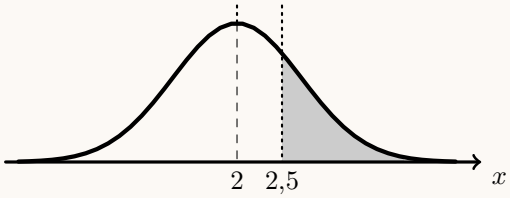
Assim, podemos verificar que existem $4 \times 6 = 24$ alternativas para os lançamentos das duas pessoas, dos quais apenas 9 tem pelo menos uma face 4, pelo que recorrendo à Regra de Laplace, a probabilidade de, pelo menos, uma pessoa registar o número 4:

$$p = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

Resposta: **Opção A**

3. Atendendo a que a variável aleatória X segue uma distribuição normal, com $\mu = 2$ e $\sigma = 0{,}5$, temos que:

   - $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(1{,}5 < X < 2{,}5) \approx 0{,}6827$
   - $P(X > \mu + \sigma) = P(X > 2{,}5) =$
     $= \dfrac{1 - P(1{,}5 < X < 2{,}5)}{2} \approx \dfrac{1 - 0{,}6827}{2} \approx 0{,}16$



   Resposta: **Opção D**

4. Usando a definição de logaritmo, temos que:

$$a = b^3 \Leftrightarrow \log_b a = 3$$

   Pelas propriedades operatórias dos logaritmos, vem que:

$$\log_a b + \log_b a = \frac{\log_b b}{\log_b a} + 3 = \frac{1}{3} + 3 = \frac{1}{3} + \frac{9}{3} = \frac{10}{3}$$

   Resposta: **Opção C**

5. Pela definição de função composta temos que:

$$(f \circ g)(x) = 0 \Leftrightarrow f\big(g(x)\big) = 0 \Leftrightarrow f(\ln x) = 0$$

   Como, pela observação do gráfico, podemos verificar que:

$$f(-1) = 0 \wedge f(1) = 0$$

   Desta forma, vem que:

$$(f \circ g)(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \wedge \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \wedge x = e^1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \wedge x = e$$

   Resposta: **Opção D**

6. Como a função f é contínua em $\mathbb{R}$, em particular é contínua em $x=-1$, pelo que:

$$f(-1)=\lim_{x\to -1} f(x)$$

Assim, temos que:

- $f(-1)=k+2$
- $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\operatorname{sen}(3x+3)}{4x+4}=\dfrac{\operatorname{sen}(3(-1)+3)}{4(-1)+4}=\dfrac{\operatorname{sen}(0)}{0}=\dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

  (fazendo $y=x+1$, se $x\to -1$, então $y\to 0$, e $3y\to 0$)

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\operatorname{sen}\big(3(x+1)\big)}{4(x+1)}=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3y)}{4y}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{4}\times\frac{\operatorname{sen}(3y)}{y}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{3}{4}\times\frac{\operatorname{sen}(3y)}{3y}\right)=$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{3}{4}\times\underbrace{\lim_{3y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3y)}{3y}}_{\text{Lim. Notável}}=\frac{3}{4}\times 1=\frac{3}{4}$$

Como a função é contínua em $x=-1$, podemos determinar o valor de k:

$$f(-1)=\lim_{x\to -1} f(x)\ \Leftrightarrow\ k+2=\frac{3}{4}\ \Leftrightarrow\ k=\frac{3}{4}-2\ \Leftrightarrow\ k=\frac{3}{4}-\frac{8}{4}\ \Leftrightarrow\ k=-\frac{5}{4}$$

Resposta: **Opção B**

7. Analisando cada um dos números complexos das hipóteses apresentadas, podemos verificar que:

- $3+4i$ não pertence à região definida pela condição porque

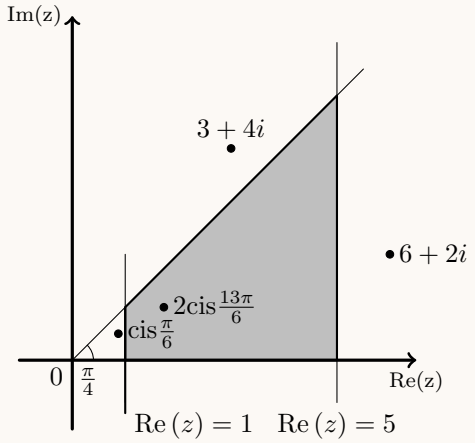
$$\arg(3+4i)>\frac{\pi}{4}$$

- $6+2i$ não pertence à região definida pela condição porque

$$\operatorname{Re}(6+2i)>5$$

- Como $\operatorname{Re}\left(\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, então $\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{6}$ não pertence à região definida pela condição porque

$$\operatorname{Re}\left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}\right)<1$$



Assim, podemos concluir que o número complexo $2\operatorname{cis}\dfrac{13\pi}{6}$, pertence à região definida pela condição, porque:

- $\operatorname{Re}\left(2\operatorname{cis}\dfrac{13\pi}{6}\right)=2\cos\dfrac{13\pi}{6}=2\cos\dfrac{\pi}{6}=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$, logo $1<\operatorname{Re}\left(2\operatorname{cis}\dfrac{13\pi}{6}\right)<5$
- $\arg\left(2\operatorname{cis}\dfrac{13\pi}{6}\right)=\arg\left(2\operatorname{cis}\left(\dfrac{13\pi}{6}-2\pi\right)\right)=\arg\left(2\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{6}$, logo $0<\arg\left(2\operatorname{cis}\dfrac{13\pi}{6}\right)<\dfrac{\pi}{4}$

Resposta: **Opção C**

8. Determinando o valor de a e de b, temos:

   - $a = \lim\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}\right) = \lim\left(\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{3}\right) = \left(\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{3} = e^3$
   - $b = \lim\left(\ln\left(1-2e^{-n}\right)\right) = \ln\left(1-2e^{-\infty}\right) = \ln(1-2\times 0) = \ln 1 = 0$

   Resposta: **Opção B**

GRUPO II

1. Simplificando a expressão de z na f.a., como $i^{23} = i^{4\times 5+3} = (i^4)^5 \times i^3 = 1^5 \times i^3 = i^3 = -i$, temos:

$$z = \frac{2i}{1-i} + 2i^{23} = \frac{2i}{1-i} - 2i = \frac{2i}{1-i} - \frac{2i(1-i)}{(1-i)} = \frac{2i}{1-i} - \frac{2i-2i^2}{1-i} = \frac{2i-2i+2i^2}{1-i} = \frac{-2}{1-i}$$

   Considerando $1-i = \rho\text{cis}\,\theta$, com o objetivo de escrever z na f.t., vem que:

   - $\rho = |1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
   - $\text{tg}\,\theta = \frac{-1}{1} = -1$; como $\text{sen}\,\theta < 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 4º quadrante, logo $\theta = -\frac{\pi}{4}$

   Como $-2 = 2\,\text{cis}\,\pi$, temos que:

$$z = \frac{2i}{1-i} + 2i^{23} = \frac{-2}{1-i} = \frac{2\,\text{cis}\,\pi}{\sqrt{2}\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2}{\sqrt{2}}\,\text{cis}\left(\pi-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{2\sqrt{2}}{2}\,\text{cis}\left(\frac{4\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{4}$$

   Pelo que o conjugado de z, é:

$$\overline{z} = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$$

   E assim, usando a fórmula de Moivre, temos que:

$$w^3 = \overline{z} \Leftrightarrow w^3 = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(-\frac{5\pi}{4}\right) \Leftrightarrow w = \sqrt[3]{\sqrt{2}\,\text{cis}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)} \Leftrightarrow w = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\,\text{cis}\left(\frac{-\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{3}\right), k \in \{0,1,2\}$$

   Ou seja, temos 3 números complexos w tais que $w^3 = \overline{z}$:

   - $k=0 \rightarrow w_1 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\,\text{cis}\left(\frac{-\frac{5\pi}{4}+0}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\,\text{cis}\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$
   - $k=1 \rightarrow w_2 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\,\text{cis}\left(\frac{-\frac{5\pi}{4}+2\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\,\text{cis}\left(-\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\,\text{cis}\left(-\frac{5\pi}{12}+\frac{8\pi}{12}\right) = \sqrt[6]{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4}$
   - $k=2 \rightarrow w_3 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\,\text{cis}\left(\frac{-\frac{5\pi}{4}+4\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\,\text{cis}\left(-\frac{5\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\,\text{cis}\left(-\frac{5\pi}{12}+\frac{16\pi}{12}\right) = \sqrt[6]{2}\,\text{cis}\,\frac{11\pi}{12}$

2.

2.1. Como existem n bolas no saco e são retiradas 3 simultaneamente, o número de conjuntos diferentes de 3 bolas que podemos obter, ou seja, o número de casos possíveis, é ${}^{n}C_{3}$
Como n é um número par, existem no saco $\frac{n}{2}$ bolas com números ímpares e $\frac{n}{2}$ bolas com números pares. Como se pretende que duas das bolas tenham um número par, de entre as $\frac{n}{2}$ pretendemos selecionar 2, e como uma das bolas deve ter um número ímpar de entre as $\frac{n}{2}$ pretendemos selecionar 1, pelo que o número de casos favoráveis é ${}^{\frac{n}{2}}C_{2} \times {}^{\frac{n}{2}}C_{1} = {}^{\frac{n}{2}}C_{2} \times \frac{n}{2}$

Assim, a probabilidade de duas das 3 bolas terem número par e uma ter número ímpar é: $\frac{{}^{\frac{n}{2}}C_{2} \times \frac{n}{2}}{{}^{n}C_{3}}$

2.2. No contexto da situação descrita, $P(A \cap B)$é a probabilidade de que a primeira bola extraída tenha um número par e que a segunda bola extraída também tenha um número par, ou seja, a probabilidade de que as duas bolas tenham um número par.

No caso de a extração ser feita com reposição, para calcular a probabilidade de que a segunda bola tenha um número par, sabendo que a primeira também tem um número par, devemos considerar 8 casos possíveis (as 8 bolas do saco, porque a primeira bola foi reposta), e 4 casos favoráveis (as 4 bolas com um número par, porque como a primeira bola foi reposta, existem 4 números pares), ou seja:

$$P(B|A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

No caso de a extração ser feita sem reposição, para calcular a probabilidade de que a segunda bola tenha um número par, sabendo que a primeira também tem um número par, devemos considerar 7 casos possíveis (porque das 8 bolas do saco, foi extraída uma que não foi reposta), e 3 casos favoráveis (porque das 4 bolas com um número par existentes inicialmente, uma foi retirada e não foi reposta), ou seja:

$$P(B|A) = \frac{3}{7}$$

Assim, como a probabilidade de que a primeira bola extraída tenha um número par é $P(A) = \frac{1}{2}$, temos que os valores de $P(A \cap B)$ são:

- Com reposição: $a = P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- Sem reposição: $b = P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$

3.

3.1. Como o plano OFB é definido pela equação $3x + 3y - z = 0$, então o vetor $\vec{v} = (3,3,-1)$ é um vetor normal do plano OFB, e também de todos os planos paralelos a este plano.
Como a reta AF é paralela ao eixo Oz, então as abcissas e ordenadas dos pontos A e F são iguais, pelo que as coordenadas do ponto F são da forma $F(0,2,z_F)$, e como o ponto F pertence ao plano OFB, podemos determinar a sua cota, recorrendo à equação do plano:

$$3(0) + 3(2) - z_F = 0 \Leftrightarrow 0 + 6 = z_F \Leftrightarrow 6 = z_F$$

Como o ponto D tem a mesma cota do ponto F e a base do prisma é um quadrado paralelo ao plano xOy, pela observação da figura, temos que $x_D = -y_F$ e as coordenadas do ponto D são $D(-2,0,6)$
Finalmente, como o plano paralelo ao plano OFB que contém o ponto D tem uma equação da forma $3x + 3y - z + d = 0$, substituindo as coordenadas do ponto D, podemos determinar o valor de d:

$$3(-2) + 3(0) - 6 + d = 0 \Leftrightarrow -6 + 0 - 6 + d = 0 \Leftrightarrow d = 12$$

E assim a equação do plano é:

$$3x + 3y - z + 12 = 0$$

3.2. Como o ponto B tem a mesma cota do ponto A e a base do prisma é um quadrado contido no plano xOy, pela observação da figura, temos que $x_B = -y_A$ e as coordenadas do ponto B são $D(-2,2,0)$
Desta forma, um vetor diretor da reta OB é

$$\overrightarrow{OB} = B - O = (-2,2,0) - (0,0,0) = (-2,2,0)$$

E uma equação vetorial da reta OB é:

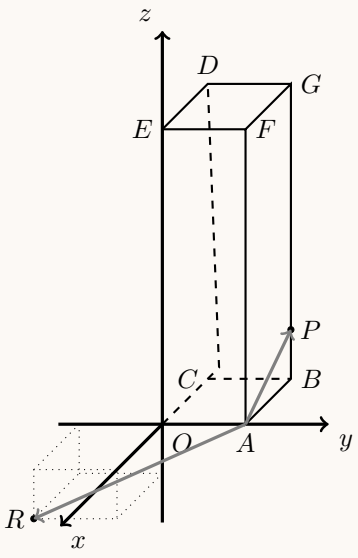
$$(x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(-2,2,0),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Pelo que podemos obter uma condição cartesiana da reta OB, a partir da equação vetorial:

$$\begin{cases} x = 0 - 2\lambda \\ y = 0 + 2\lambda \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{x}{2} = \lambda \\ \frac{y}{2} = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{x}{2} = \frac{y}{2} \wedge z = 0$$

3.3. Como o ponto P pertence à aresta $[BG]$, pela observação da figura, verificamos que tem abcissa e ordenada iguais aos pontos B e G, pelo que as suas coordenadas são:

$$P(-2,2,1)$$



Como o ponto R é simétrico do ponto P relativamente à origem, tem as três coordenadas simétricas, ou seja, tem as suas coordenadas são:

$$R(2,-2,-1)$$

Podemos determinar a amplitude do ângulo RAP através do produto escalar dos vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AR}$, pelo que, determinando as coordenadas destes vetores e as respetivas normas, temos:

- $\overrightarrow{AP} = P - A = (-2,2,1) - (0,2,0) = (-2,0,1)$
  $\left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$
- $\overrightarrow{AR} = R - A = (2,-2,-1) - (0,2,0) = (2,-4,-1)$
  $\left\|\overrightarrow{AR}\right\| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21}$

Recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AP}\,\overrightarrow{AR}}\right) = \frac{\overrightarrow{AP} \,.\, \overrightarrow{AR}}{\left\|\overrightarrow{AP}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AR}\right\|} = \frac{(-2,0,1).(2,-4,-1)}{\sqrt{5} \times \sqrt{21}} = \frac{-4+0-1}{\sqrt{5 \times 21}} = \frac{-5}{\sqrt{105}} = -\frac{5}{\sqrt{105}}$$

Logo, a amplitude do ângulo RAP, em graus, arredondado às unidades, é

$$R\hat{A}P = \cos^{-1}\left(-\frac{5}{\sqrt{105}}\right) \approx 119^\circ$$

4.

4.1. Calculando o valor do limite, temos:

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(f(x)-x\Big)=\lim_{x\to+\infty}\Big(\ln(e^x+x)-x\Big)=\ln(e^{+\infty}+\infty)-\infty=+\infty-\infty \quad \text{(Indeterminação)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(f(x)-x\Big)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^x\times\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(e^x)+\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)=\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right)=$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to+\infty}1+\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\right)=\ln\left(1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}}\right)=\ln\left(1+\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}1}{\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}}\right)=$$

$$=\ln\left(1+\frac{1}{+\infty}\right)=\ln(1+0)=0$$

Assim, como $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(f(x)-x\Big)=0$, podemos concluir que a reta de equação $y=x$ é uma assíntota do gráfico da função f, quando $x\to+\infty$

4.2. Para estudar o sentido das concavidades do gráfico e a existência de pontos de inflexão no intervalo $\left]-\frac{3\pi}{2},0\right[$, vamos determinar a expressão da segunda derivada, pelo que começamos por determinar f' em $\left]-\frac{3\pi}{2},0\right[$:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{4}x^2+\cos x\right)'=\left(\frac{1}{4}x^2\right)'+(\cos x)'=\frac{1}{4}(x^2)'+(-\operatorname{sen} x)=\frac{1}{4}\times 2x-\operatorname{sen} x=\frac{1}{2}x-\operatorname{sen} x$$

Assim, determinando f'' em $\left]-\frac{3\pi}{2},0\right[$, temos que:

$$f''(x)=(f'(x))'=\left(\frac{1}{2}x-\operatorname{sen} x\right)'=\left(\frac{1}{2}x\right)'-(\operatorname{sen} x)'=\frac{1}{2}-\cos x$$

Como os pontos de inflexão são zeros da segunda derivada, vamos determiná-los:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}-\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Para $k=0$, vem $x=\frac{\pi}{3} \vee x=-\frac{\pi}{3}$, e como $x\in\left]-\frac{3\pi}{2},0\right[$, podemos verificar que a única solução da equação é $x=-\frac{\pi}{3}$

Assim, estudando o sinal da segunda derivada para relacionar com o sentido das concavidades, vem:

x	$-\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{3}$		0
$f''(x)$	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.
$f(x)$	n.d.	∪	Pt. I.	∩	n.d.

Logo, podemos concluir que o gráfico de f:

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left]-\frac{\pi}{3},0\right[$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right[$
- tem um ponto de inflexão cuja abcissa é $-\frac{\pi}{3}$

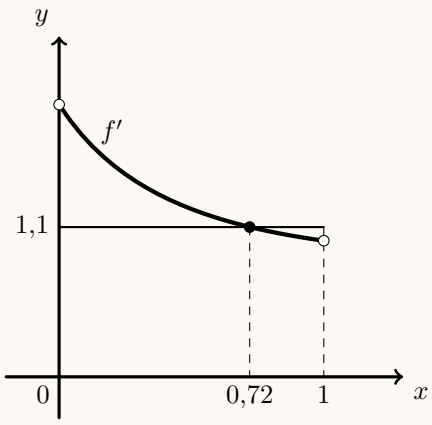
4.3. Como o declive da reta tangente ao gráfico de uma função num ponto é igual ao valor numérico da derivada no ponto, ou seja, $f'(a)=1{,}1$, determinamos a expressão da derivada relativa ao intervalo $]0{,}1[$:

$$f'(x)=(\ln(e^x+x))'=\frac{(e^x+x)'}{e^x+x}=\frac{(e^x)'+(x)'}{e^x+x}=\frac{e^x+1}{e^x+x}$$

Assim, como o declive da reta tangente é 1,1, o valor de a é a solução da equação

$$f'(a)=1{,}1 \Leftrightarrow \frac{e^x+1}{e^x+x}=1{,}1$$

Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função f', e a reta horizontal definida por $y=1{,}1$ numa janela coerente com a restrição $x\in]0{,}1[$, e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, obtemos um valor aproximado (às centésimas) da abcissa do ponto A, $a=x_A\approx 0{,}72$



5.

5.1. De acordo com os dados do enunciado temos que $x = 25$, pelo que a velocidade constante da nave, em quilómetros por segundo, quando termina a queima do combustível é dada por:

$$V(25) = 3\ln\left(\frac{25+300}{25+60}\right) = 3\ln\left(\frac{325}{85}\right) \approx 4{,}02 \text{ km/s}$$

Assim, como a relação entre o tempo (t), a distância (d) e a velocidade (V), em segundos, arredondada às unidades, é:

$$V = \frac{d}{t} \Leftrightarrow t = \frac{d}{V}$$

Temos que para viajar 200 quilómetros ($d = 200$) a esta velocidade ($V = 4{,}02$), o tempo necessário é:

$$t = \frac{200}{4{,}02} \approx 50 \text{ s}$$

5.2. Pretende-se determinar o valor de x associado ao valor de $V = 3$, ou seja, a solução da equação $V(x) = 3$
Resolvendo a equação, e arredondando o resultado às unidades, vem que:

$$V(x) = 3 \Leftrightarrow 3\ln\left(\frac{x+300}{x+60}\right) = 3 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+300}{x+60}\right) = \frac{3}{3} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+300}{x+60}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+300}{x+60} = e^1 \underset{x\neq -60}{\Leftrightarrow} x + 300 = e(x+60) \Leftrightarrow x + 300 = ex + 60e \Leftrightarrow x - ex = 60e - 300 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(1-e) = 60e - 300 \Leftrightarrow x = \frac{60e-300}{1-e} \Rightarrow x \approx 80 \text{ milhares de toneladas}$$

6. Simplificando a expressão da inequação, temos que:

$$g(0) \times g(k) < 0 \Leftrightarrow \ln(0+k) \times \ln(k+k) < 0 \Leftrightarrow \ln k \times \ln(2k) < 0$$

Atendendo a que:

- $\ln k = 0 \Leftrightarrow k = e^0 \Leftrightarrow k = 1$
- $\ln(2k) = 0 \Leftrightarrow 2k = e^0 \Leftrightarrow 2k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$

Como k é um número real positivo ($k \in]0, +\infty[$) estudamos o sinal do produto, em $]0, +\infty[$, através de um quadro de variação de sinal, para resolver a inequação:

k	0		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$\ln k$	n.d.	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\ln(2k)$	n.d.	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$g(0) \times g(k)$	n.d.	$+$	0	$-$	0	$+$

Pelo que se concluí que se $g(0) \times g(k) < 0$, então $k \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$

2017

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A
Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2017
12.º Ano de Escolaridade
Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 11 Páginas

VERSÃO 1

Indique de forma legível a versão da prova.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Nos termos da lei em vigor, as provas de avaliação externa são obras protegidas pelo Código do Direito de Autor e dos Direitos Conexos. A sua divulgação não suprime os direitos previstos na lei. Assim, é proibida a utilização destas provas, além do determinado na lei ou do permitido pelo IAVE, I.P., sendo expressamente vedada a sua exploração comercial.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \ \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\ e^u$

$(a^u)' = u'\ a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Página em branco

GRUPO I

1. Considere todos os números naturais de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9

Destes números, quantos são múltiplos de 5 ?

(A) 729 **(B)** 1458 **(C)** 3645 **(D)** 6561

2. Uma turma é constituída por rapazes e por raparigas, num total de 20 alunos.

Sabe-se que:

- $\frac{1}{4}$ dos rapazes tem olhos verdes;
- escolhido, ao acaso, um aluno da turma, a probabilidade de ele ser rapaz e de ter olhos verdes é $\frac{1}{10}$

Quantos rapazes tem a turma?

(A) 4 **(B)** 8 **(C)** 12 **(D)** 16

3. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f

Sabe-se que o único ponto de inflexão do gráfico de f tem abcissa 0

Seja f'' a segunda derivada da função f

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $f''(1)+f''(2)<0$

(B) $f''(-2)+f''(-1)>0$

(C) $f''(-1)\times f''(-2)<0$

(D) $f''(1)\times f''(2)>0$

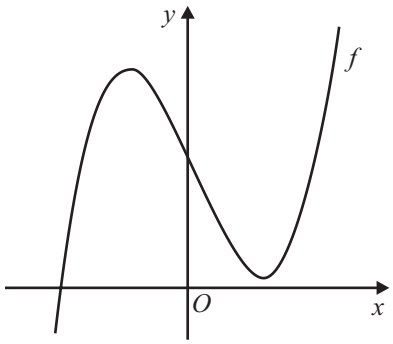


Figura 1

4. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}^+$

Sabe-se que a reta de equação $y = -x$ é assíntota oblíqua do gráfico de f e do gráfico de g

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x) \times g(x)}{x}$?

(A) $+\infty$ **(B)** 1 **(C)** -1 **(D)** $-\infty$

5. Seja f a função, de domínio A e contradomínio $]-1, +\infty[$, definida por $f(x) = \operatorname{tg} x$

Qual dos conjuntos seguintes pode ser o conjunto A ?

(A) $\left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right[$ **(B)** $\left]\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$ **(C)** $\left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right[$ **(D)** $\left]\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$

6. Considere, num referencial o.n. xOy, uma reta r de inclinação α

Sabe-se que $\cos \alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Qual pode ser a equação reduzida da reta r ?

(A) $y = -5x$ **(B)** $y = 4x$ **(C)** $y = -2x$ **(D)** $y = 3x$

7. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição

$$\frac{5\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{7\pi}{4} \ \wedge \ \operatorname{Im}(z) \geq -1$$

No plano complexo, esta condição define uma região.

Qual é a área dessa região?

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **(B)** $\dfrac{1}{2}$ **(C)** $\sqrt{2}$ **(D)** 1

8. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = \begin{cases} n & \text{se } n \leq 20 \\ (-1)^n & \text{se } n > 20 \end{cases}$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A sucessão (u_n) é monótona crescente.

(B) A sucessão (u_n) é monótona decrescente.

(C) A sucessão (u_n) é limitada.

(D) A sucessão (u_n) é um infinitamente grande.

GRUPO II

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam

$$z_1 = \frac{1-3i^{19}}{1+i} \quad \text{e} \quad z_2 = -3k\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right), \text{ com } k \in \mathbb{R}^+$$

Sabe-se que, no plano complexo, a distância entre a imagem geométrica de z_1 e a imagem geométrica de z_2 é igual a $\sqrt{5}$

Qual é o valor de k?

Resolva este item sem recorrer à calculadora.

2. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma quadrangular regular $[OPQRSTUV]$

Sabe-se que:

- a face $[OPQR]$ está contida no plano xOy
- o vértice Q pertence ao eixo Oy e o vértice T pertence ao eixo Oz
- o plano STU tem equação $z = 3$

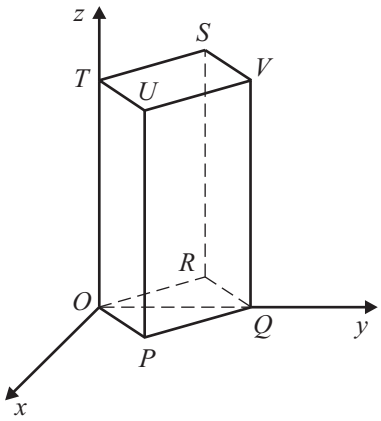


Figura 2

2.1. Seja T' o simétrico do ponto T, relativamente à origem do referencial.

Escreva uma equação da superfície esférica de diâmetro $[TT']$

2.2. Determine o valor do produto escalar $\overrightarrow{UP}.\overrightarrow{RS}$

2.3. Uma equação do plano PQV é $x + y = 2$

Determine uma condição cartesiana que defina a reta TQ

2.4. Escolhem-se, ao acaso, três vértices do prisma.

Determine a probabilidade de o plano definido por esses três vértices ser perpendicular ao plano xOy

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

3. Um saco contém n bolas indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a n (com n par e superior a 6).

Retira-se, ao acaso, uma bola do saco.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: «o número da bola retirada é menor ou igual a 6»

B: «o número da bola retirada é par»

Escreva o significado de $P\left(\overline{A} \cup B\right)$ no contexto da situação descrita e determine uma expressão, em função de n, que dê esta probabilidade.

Apresente a expressão na forma de uma fração.

4. Na Figura 3, está representada uma secção de uma ponte pedonal que liga as duas margens de um rio.

A ponte, representada pelo arco PQ, está suportada por duas paredes, representadas pelos segmentos de reta $[OP]$ e $[RQ]$. A distância entre as duas paredes é 7 metros.

O segmento de reta $[OR]$ representa a superfície da água do rio.

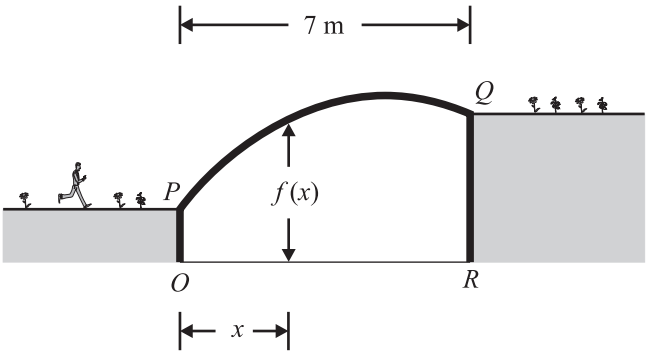


Figura 3

Considere a reta OR como um eixo orientado da esquerda para a direita, com origem no ponto O e em que uma unidade corresponde a 1 metro.

Para cada ponto situado entre O e R, de abcissa x, a distância na vertical, medida em metros, desse ponto ao arco PQ é dada por

$$f(x) = 9 - 2{,}5(e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}), \text{ com } x \in [0, 7]$$

Resolva os itens **4.1.** e **4.2.** recorrendo a métodos analíticos; utilize a calculadora apenas para efetuar eventuais cálculos numéricos.

4.1. Seja S o ponto pertencente ao segmento de reta $[OR]$ cuja abcissa x verifica a equação

$$\sqrt{\left(f(0)\right)^2 + x^2} = 2$$

Resolva esta equação, apresentando a solução arredondada às décimas, e interprete essa solução no contexto da situação descrita.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

4.2. O clube náutico de uma povoação situada numa das margens do rio possui um barco à vela. Admita que, sempre que esse barco navega no rio, a distância do ponto mais alto do mastro à superfície da água é 6 metros.

Será que esse barco, navegando no rio, pode passar por baixo da ponte?

Justifique a sua resposta.

5. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{1-e^{x-1}} & \text{se } x<1\\ 2 & \text{se } x=1\\ 3+\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x} & \text{se } x>1\end{cases}$$

Resolva os itens **5.1.** e **5.2.** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

5.1. Estude a função g quanto à continuidade no ponto 1

5.2. Resolva, no intervalo $]4,5[$, a equação $g(x)=3$

5.3. Na Figura 4, estão representados, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função g e um triângulo $[OAP]$

Sabe-se que:

- o ponto A é o ponto de abcissa negativa que é a intersecção do gráfico da função g com o eixo das abcissas;
- o ponto P é um ponto do gráfico da função g, de abcissa e ordenada negativas;
- a área do triângulo $[OAP]$ é igual a 5

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto P

Apresente o valor obtido arredondado às décimas.

Na sua resposta:

– determine analiticamente a abcissa do ponto A

– equacione o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação.

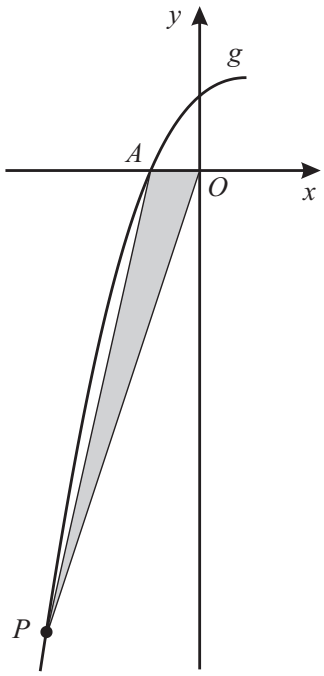


Figura 4

6. Seja $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função tal que $f'(x) < 0$, para qualquer número real positivo x

Considere, num referencial o.n. xOy,

- um ponto P, de abcissa a, pertencente ao gráfico de f
- a reta r, tangente ao gráfico de f no ponto P
- o ponto Q, ponto de intersecção da reta r com o eixo Ox

Sabe-se que $\overline{OP} = \overline{PQ}$

Determine o valor de $f'(a) + \dfrac{f(a)}{a}$

FIM

COTAÇÕES

Grupo	Item												
	Cotação (em pontos)												
I	**1.** a **8.**												
	8 × 5 pontos												**40**
II	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**2.4.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	**6.**	
	15	5	10	15	15	15	15	15	15	15	15	10	**160**
TOTAL													**200**

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 635

1.ª Fase

VERSÃO 1

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2017

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Critérios de Classificação

12 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de escolha múltipla.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Itens de seleção

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

Itens de construção

Nos itens de resposta restrita, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada de vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelo programa da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora gráfica», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. ..... (8 × 5 pontos)..... **40 pontos**

Chave:

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	A	B	D	A	B	C	D	C
Versão 2	D	D	B	C	C	A	B	A

GRUPO II

1. ..... **15 pontos**

Escrever z_1 na forma algébrica ..... 5 pontos

Escrever $1-3i^{19}=1+3i$ ..... 1 ponto

Escrever $\frac{1+3i}{1+i}=\frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$ ..... 1 ponto

Obter z_1 na forma algébrica ..... 3 pontos

Escrever z_2 na forma algébrica ..... 2 pontos

Escrever $\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-i$ ..... 1 ponto

Obter $z_2=3ki$ ..... 1 ponto

OU

Escrever $-3k\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)=3k\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{2}\right)$ ..... 1 ponto

Obter $z_2=3ki$ ..... 1 ponto

Obter a condição $4+(1-3k)^2=5$ (ou equivalente) ..... 5 pontos

Obter o valor de k $\left(\frac{2}{3}\right)$ ..... 3 pontos

2.1. ..... **5 pontos**

Reconhecer que o ponto T tem cota igual a 3 ..... 1 ponto

Concluir que o centro da superfície esférica é a origem do referencial ..... 1 ponto

Concluir que o raio da superfície esférica é 3 ..... 1 ponto

Escrever a equação pedida $\left(x^2+y^2+z^2=9\right.$ ou equivalente$\left.\right)$ (**ver nota**) ... 2 pontos

Nota – Se for apresentada apenas a condição $x^2+y^2+z^2=9$ (ou equivalente), a classificação a atribuir à resposta é 5 pontos.

2.2. ..... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $\|\overrightarrow{UP}\| = \|\overrightarrow{RS}\| = 3$ ..... 3 pontos

Escrever $\cos(\overrightarrow{UP}\,\hat{}\,\overrightarrow{RS}) = -1$ ..... 5 pontos

Obter o valor de $\overrightarrow{UP}.\overrightarrow{RS}\ \ (-9)$ ..... 2 pontos

2.º Processo

Escrever $\overrightarrow{UP} = (0, 0, -3)$ ..... 4 pontos

Escrever $\overrightarrow{RS} = (0, 0, 3)$ ..... 4 pontos

Obter o valor de $\overrightarrow{UP}.\overrightarrow{RS}\ \ (-9)$ ..... 2 pontos

Nota – Se a resposta se limitar à escrita de $\overrightarrow{UP}.\overrightarrow{RS} = -3 \times 3 = -9$, a classificação a atribuir é 10 pontos.

2.3. ..... **15 pontos**

Escrever as coordenadas do ponto T ..... 2 pontos

Obter as coordenadas do ponto Q ..... 4 pontos

Determinar as coordenadas de um vetor diretor da reta TQ ..... 2 pontos

Obter uma condição cartesiana da reta TQ ..... 7 pontos

Escrever $x = 0$ ..... 3 pontos

Escrever $\frac{y}{2} = \frac{z-3}{-3}$ ..... 3 pontos

Escrever uma condição cartesiana da reta TQ

$\left(x = 0 \ \wedge\ \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-3}\right.$ ou equivalente$\left.\right)$ (**ver nota**) ..... 1 ponto

Nota – Se uma das duas etapas imediatamente anteriores a esta tiver sido pontuada com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

2.4. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Apresentar o número de casos possíveis: ${}^{8}C_{3}$ (**ver nota 1**) ..... 6 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis: $6 \times {}^{4}C_{3}$ (**ver nota 2**) ..... 8 pontos

Obter a probabilidade pedida $\left(\frac{3}{7}\right)$ (**ver nota 4**) ..... 1 ponto

2.º Processo

Apresentar o número de casos possíveis: ${}^{8}A_{3}$ (**ver nota 1**) ..... 6 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis: $6 \times {}^{4}A_{3}$ (**ver nota 3**) ..... 8 pontos

Obter a probabilidade pedida $\left(\frac{3}{7}\right)$ (**ver nota 4**) ..... 1 ponto

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a ${}^{8}C_{3}$ (1.º processo de resolução) ou a ${}^{8}A_{3}$ (2.º processo de resolução), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

2. Se a expressão apresentada for ${}^{4}C_{3}$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 1 ponto. Caso a expressão apresentada seja do tipo $k\,{}^{4}C_{3}$, com $k \in \{2, 3, 4, 5\}$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 3 pontos. Caso a expressão apresentada seja incorreta e diferente das expressões referidas, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

3. Se a expressão apresentada for ${}^{4}A_{3}$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 1 ponto. Caso a expressão apresentada seja do tipo $k\,{}^{4}A_{3}$, com $k \in \{2, 3, 4, 5\}$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 3 pontos. Caso a expressão apresentada seja incorreta e diferente das expressões referidas, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

4. Se as etapas relativas ao número de casos possíveis e ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. Caso o valor obtido não pertença ao intervalo $[0, 1]$, a pontuação a atribuir nesta etapa também é 0 pontos.

3. ..... **15 pontos**

Escrever o significado de $P\left(\overline{A} \cup B\right)$ no contexto da situação descrita (É a probabilidade de o número da bola retirada ser maior do que 6 ou ser par.) ..... 5 pontos

Apresentar a expressão pedida $\left(\frac{n-3}{n}\right)$ ..... 10 pontos

A expressão pedida pode ser obtida por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Referir que $P\left(\overline{A} \cup B\right) = 1 - P\left(A \cap \overline{B}\right)$ ..... 4 pontos

Determinar $P\left(A \cap \overline{B}\right)$, em função de n $\left(\frac{3}{n}\right)$ ..... 5 pontos

Obter $P\left(\overline{A} \cup B\right) = \frac{n-3}{n}$ ..... 1 ponto

2.º Processo

Determinar $P(\overline{A})$, em função de n $\left(\frac{n-6}{n}\right)$ ..... 2 pontos

Determinar $P(B)$ $\left(\frac{1}{2}\right)$ ..... 2 pontos

Determinar $P(\overline{A} \cap B)$, em função de n $\left(\frac{n-6}{2n}\right)$ ..... 3 pontos

Escrever $P(\overline{A} \cup B) = \frac{n-6}{n} + \frac{1}{2} - \frac{n-6}{2n}$ ..... 2 pontos

Obter $P(\overline{A} \cup B) = \frac{n-3}{n}$ ..... 1 ponto

3.º Processo

Apresentar o número de casos possíveis, em função de n (**ver nota 1**) ..... 2 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis, em função de n (**ver nota 2**) ..... 7 pontos

Escrever a expressão pedida (**ver nota 3**) ..... 1 ponto

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for n, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

2. Se for apresentada apenas a expressão $n-3$, sem qualquer justificação, a pontuação a atribuir nesta etapa é 5 pontos.

3. Se as etapas relativas ao número de casos possíveis e ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

4.1. ..... **15 pontos**

Escrever $\sqrt{\left(f(0)\right)^2+x^2}=2 \Leftrightarrow \left(f(0)\right)^2+x^2=4$ ..... 3 pontos

Determinar $f(0)$ ..... 2 pontos

Obter a solução da equação, arredondada às décimas $(1{,}5)$ ..... 5 pontos

Interpretar a solução no contexto da situação descrita (Na secção representada, $1{,}5$ é a abcissa do ponto da superfície da água do rio que dista dois metros do ponto P)..... 5 pontos

4.2. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Determinar $f'(x)$ (**ver nota**) ..... 4 pontos

Determinar o zero de f' ..... 4 pontos

Escrever $f'(x)=0$ ..... 1 ponto

Obter o zero de f' ..... 3 pontos

Justificar que a função f atinge um máximo para $x=5$ ..... 3 pontos

Apresentar um quadro de sinal de f' e de monotonia de f (ou equivalente) ..... 2 pontos

Concluir que a função tem um máximo para $x=5$ ..... 1 ponto

Determinar $f(5)$ (4) ..... 2 pontos

Responder à questão
(Não, o barco não pode passar por baixo da ponte.) ..... 2 pontos

Nota – Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

2.º Processo

Escrever $f(x) \geq 6$ ..... 1 ponto

Resolver a inequação $f(x) \geq 6$ ..... 13 pontos

Designar $e^{1-0,2x}$ por y (por exemplo) ..... 2 pontos

Obter $y + \frac{1}{y} \leq 1,2$ ..... 3 pontos

Obter $y^2 - 1,2y + 1 \leq 0$ ..... 2 pontos

Resolver a equação $y^2 - 1,2y + 1 = 0$ ..... 2 pontos

Justificar que a inequação é impossível ..... 4 pontos

Responder à questão
(Não, o barco não pode passar por baixo da ponte.) ..... 1 ponto

3.º Processo

Escrever $f(x) = 6$ ..... 1 ponto

Resolver a equação $f(x) = 6$ ..... 9 pontos

Designar $e^{1-0,2x}$ por y (por exemplo) ..... 2 pontos

Obter a equação $y + \frac{1}{y} = 1,2$ ..... 3 pontos

Obter a equação $y^2 - 1,2y + 1 = 0$ ..... 2 pontos

Concluir que a equação é impossível ..... 2 pontos

Referir que $6 > f(0)$ ..... 4 pontos

Responder à questão
(Não, o barco não pode passar por baixo da ponte.) ..... 1 ponto

5.1. ..... **15 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$ ..... 8 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{(1+x)(1-x)}{1-e^{x-1}}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{(1+x)(1-x)}{1-e^{x-1}} = \lim\limits_{x \to 1^-} (1+x) \times \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1-x}{1-e^{x-1}}$ .. 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to 1^-} (1+x) \times \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1-x}{1-e^{x-1}} = 2 \times \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1-x}{1-e^{x-1}}$ ... 1 ponto

Escrever $2 \times \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1-x}{1-e^{x-1}} = 2 \times \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x-1}{e^{x-1}-1}$ ..... 1 ponto

Escrever $2 \times \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x-1}{e^{x-1}-1} \underset{y = x-1}{=} 2 \times \lim\limits_{y \to 0^-} \frac{y}{e^y - 1}$ ..... 1 ponto

Escrever $2\times \lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{y}{e^y-1}=2\times \lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{1}{\frac{e^y-1}{y}}$ ..... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=2$ ..... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$ ..... 5 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(3+\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}\right)$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(3+\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}\right)=3-\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}$ ..... 1 ponto

Escrever $3-\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}\underset{y=x-1}{=}3-\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{\operatorname{sen} y}{y}$ ..... 2 pontos

Obter $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=2$ ..... 1 ponto

Referir que $g(1)=2$ ..... 1 ponto

Concluir que a função g é contínua no ponto 1 ..... 1 ponto

5.2. ..... **15 pontos**

Escrever $g(x)=3\Leftrightarrow 3+\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}=3$ ..... 1 ponto

Escrever $3+\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}=3\Leftrightarrow \operatorname{sen}(x-1)=0$ ..... 4 pontos

Escrever $\operatorname{sen}(x-1)=0\Leftrightarrow x-1=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ ..... 4 pontos

Escrever $x-1=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=1+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ ..... 2 pontos

Obter a solução da equação pertencente ao intervalo $]4,5[$ $(1+\pi)$ ..... 4 pontos

5.3. ..... **15 pontos**

Determinar a abcissa do ponto A ..... 4 pontos

Equacionar o problema $\left(\dfrac{1\times\dfrac{x^2-1}{1-e^{x-1}}}{2}=5 \text{ ou equivalente}\right)$ (**ver nota 1**) ..... 5 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota 2**) ..... 3 pontos

Apresentar a abcissa do ponto P $(-3{,}3)$ ..... 3 pontos

Notas:

1. Se a equação apresentada for $\dfrac{1\times\dfrac{1-x^2}{1-e^{x-1}}}{2}=5$ (ou equivalente), a pontuação a atribuir nesta etapa é 3 pontos.

2. Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

6. ..... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, quatro processos.

1.º Processo

Identificar as coordenadas do ponto $P\ \left(a, f(a)\right)$ ..... 1 ponto

Escrever uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a

$\left(y = f'(a)\,x + f(a) - a\ f'(a)\right)$ ..... 2 pontos

Determinar as coordenadas do ponto $Q\ \left(a - \frac{f(a)}{f'(a)}, 0\right)$ ..... 2 pontos

Escrever $\overline{OP} = \sqrt{a^2 + \left(f(a)\right)^2}$ ..... 1 ponto

Escrever $\overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{f(a)}{f'(a)}\right)^2 + \left(f(a)\right)^2}$ ..... 1 ponto

Obter o valor pedido (0) ..... 3 pontos

2.º Processo

Identificar as coordenadas do ponto $P\ \left(a, f(a)\right)$ ..... 1 ponto

Escrever uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a

$\left(y = f'(a)\,x + f(a) - a\ f'(a)\right)$ ..... 2 pontos

Determinar as coordenadas do ponto $Q\ \left(a - \frac{f(a)}{f'(a)}, 0\right)$ ..... 2 pontos

Concluir que $a - \frac{f(a)}{f'(a)} = 2a$ ..... 3 pontos

Obter o valor pedido (0) ..... 2 pontos

3.º Processo

Designemos por α a amplitude do ângulo POQ e por β a inclinação da reta r

Referir que $\text{tg}\beta = f'(a)$ ..... 1 ponto

Referir que $\text{tg}\alpha = \frac{f(a)}{a}$ ..... 3 pontos

Referir que $\beta = \pi - \alpha$ ..... 3 pontos

Concluir que $f'(a) = -\frac{f(a)}{a}$ ..... 2 pontos

Obter o valor pedido (0) ..... 1 ponto

4.º Processo

Identificar as coordenadas do ponto $P\left(a, f(a)\right)$ ..... 1 ponto

Identificar as coordenadas do ponto $Q\left(2a, 0\right)$ ..... 3 pontos

Obter o declive da reta PQ ..... 3 pontos

Concluir que $f'(a) = -\dfrac{f(a)}{a}$ ..... 2 pontos

Obter o valor pedido (0) ..... 1 ponto

COTAÇÕES

Grupo	**Item**												
	Cotação (em pontos)												
I	**1.** a **8.**												
	8 × 5 pontos												**40**
II	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**2.4.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	**6.**	
	15	5	10	15	15	15	15	15	15	15	15	10	**160**
TOTAL													**200**

Exame final nacional de Matemática A **(2017, 1.ª fase)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Os números naturais de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9 e que são múltiplos de 5, são constituídos por 3 algarismos ou posições, em que as três primeiras podem ser ocupada por 9 algarismos (todos exceto o zero), e a última apenas por 1 (o algarismo 5).
   Assim, o número de múltiplos de 5 nas condições do enunciado é

$$9 \times 9 \times 9 \times 1 = 9^3 \times 1 = 9^3 = 729$$

   Resposta: **Opção A**

2. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno da turma, e os acontecimentos:
   V:«O aluno ter olhos verdes»
   R:«O aluno é um rapaz»
   Temos que $P(V|R) = \frac{1}{4}$ e $P(V \cap R) = \frac{1}{10}$

   Assim, temos que:

$$P(R) = \frac{P(V \cap R)}{P(V|R)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

   Ou seja a probabilidade de escolher um aluno da turma e ele ser rapaz, ou seja, a proporção de rapazes relativamente ao total de alunos da turma é $\frac{2}{5}$. Como existem 20 alunos na turma o número de rapazes da turma é:

$$\frac{2}{5} \times 20 = \frac{40}{5} = 8$$

   Resposta: **Opção B**

3. Por observação do gráfico de f, podemos observar o sentido das concavidades e relacionar com o sinal da segunda derivada, f'' (porque o único ponto de inflexão do gráfico de f tem abcissa zero).

x		0	
$f(x)$	⌒	Pt. I.	⌓
$f''(x)$	$-$	0	$+$

Assim, temos que:

- Como $f''(1) > 0$ e $f''(2) > 0$, então $f''(-2) + f''(-1) > 0$
- Como $f''(-2) < 0$ e $f''(-1) < 0$, então $f''(-2) + f''(-1) < 0$
- Como $f''(-2) < 0$ e $f''(-1) < 0$, então $f''(-2) \times f''(-1) > 0$
- Como $f''(1) > 0$ e $f''(2) > 0$, então $f''(1) \times f''(2) > 0$

Resposta: **Opção D**

4. Como o declive da assíntota do gráfico de f é -1, e o domínio de f é $\mathbb{R}^+$, temos que:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

Como $y = -x$ é assíntota do gráfico de g, e o domínio de g é $\mathbb{R}^+$, temos que:

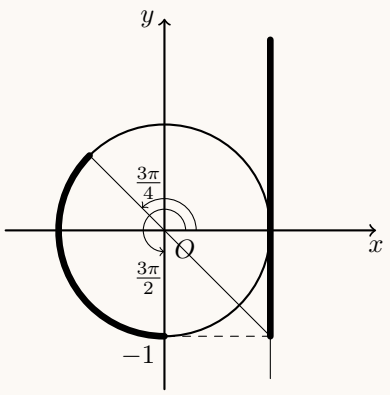
$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$$

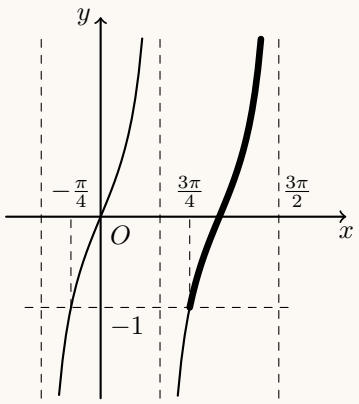
E assim, temos que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) \times g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \times g(x) \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \times \lim_{x \to +\infty} g(x) = -1 \times (-\infty) = +\infty$$

Resposta: **Opção A**

5. Identificando no círculo trigonométrico os valores da tangente do intervalo $[-1, +\infty[$, e as amplitudes dos arcos correspondentes, (como na figura seguinte, à esquerda) temos, de entre os conjuntos apresentados, o único conjunto de valores cuja tangente pertence ao intervalo é $\left]\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$





Na figura anterior, à direita podemos ver uma representação gráfica da função $\text{tg}(x)$ com a restrição ao domínio $\left]\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$ assinalada, para verificar que o respetivo contradomínio é $[-1, +\infty[$

Resposta: **Opção B**

6. Como $\text{tg}^2\,\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, temos que:

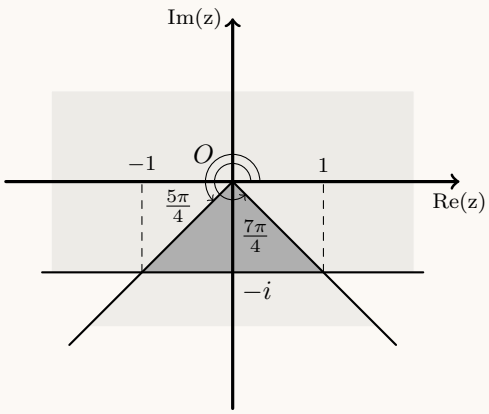
$$\text{tg}^2\,\alpha + 1 = \frac{1}{\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} \Leftrightarrow \text{tg}^2\,\alpha + 1 = \frac{1}{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow \text{tg}^2\,\alpha + 1 = 5 \Leftrightarrow \text{tg}^2\,\alpha = 4 \Leftrightarrow \text{tg}\,\alpha = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow \text{tg}\,\alpha = \pm 2$$

Como $\cos\alpha < 0$, então a reta tem declive negativo.
Assim, como o declive da reta é a tangente da inclinação ($m = \text{tg}\,\alpha$), temos que $\text{tg}\,\alpha = -2$, ou seja a reta tem declive -2, pelo que, de entre as opções apresentadas a reta de equação $y = -2x$ é a única, cuja inclinação α, verifica a condição $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Resposta: **Opção C**

7. A região é defina pela conjunção de duas condições, cujas representações gráficas no plano complexo são:

   - a região dos 3º e 4º quadrantes limitada pelas bissetrizes destes quadrantes $\left(\frac{5\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{7\pi}{4}\right)$
   - o semiplano acima da reta horizontal defina por $\text{Im}(z) \geq -1$



Assim, a região definida pela conjunção é um triângulo, cujos vértices são a origem e os pontos de coordenadas $(-1,-1)$ e $(1,-1)$, ou seja, a medida da base é 2 e da altura é 1, pelo que, a área (A_Δ) é:

$$A_\Delta = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

Resposta: **Opção D**

8. Observando a expressão da sucessão, temos que:

   - Para $n \leq 20$, os termos da sucessão são iguais aos valores da ordem, ou seja, $1 \leq u_n \leq 20$
   - Para $n > 20$, os termos da sucessão são iguais a 1, ou -1, pelo que $-1 \leq u_n \leq 1$

Assim, para qualquer valor de n, temos que $-1 \leq u_n \leq 20$, ou seja, a sucessão (u_n) é limitada.

Resposta: **Opção C**

GRUPO II

1. Simplificando as expressões de z_1 e z_2, temos que:

   - Como $i^{19} = i^{4\times4+3} = i^3 = -i$, vem que:

     $$z_1 = \frac{1-3i^{19}}{1+i} = \frac{1-3(-i)}{1+i} = \frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i+3i-3i^2}{1-i^2} = \frac{1+2i-3(-1)}{1-(-1)} = \frac{4+2i}{2} = 2+i$$

   - Como $\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 + i(-1) = -i$, vem que:

     $$z_2 = -3k\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3k(-i) = 3ik$$

   Assim, como a distância entre as imagens geométricas de z_1 e de z_2 é dada por $|z_1 - z_2|$, ou seja:

   $$|z_1 - z_2| = |2 + i - 3ik| = |2 + i(1-3k)| = \sqrt{2^2 + (1-3k)^2} = \sqrt{4 + 1 - 6k + 9k^2} = \sqrt{9k^2 - 6k + 5}$$

   E como a distância entre as imagens geométricas de z_1 e de z_2 é igual a $\sqrt{5}$, temo que:

   $$|z_1 - z_2| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{9k^2-6k+5} = \sqrt{5} \underset{k>0}{\Rightarrow} \left(\sqrt{9k^2-6k+5}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow 9k^2 - 6k + 5 = 5 \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow 9k^2 - 6k + 5 - 5 = 0 \Leftrightarrow 9k^2 - 6k = 0 \Leftrightarrow k(9k-6) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee 9k - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

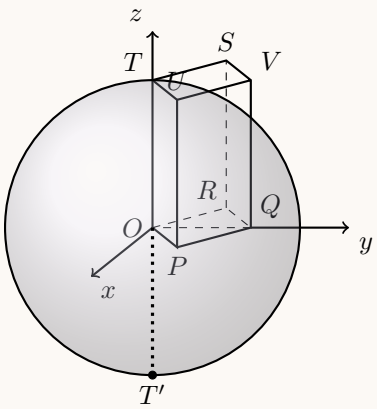
   $$\Leftrightarrow k = 0 \vee k = \frac{6}{9} \Leftrightarrow k = 0 \vee k = \frac{2}{3}$$

   Como $k \in \mathbb{R}^+$, temos que $k = \frac{2}{3}$

2.

   2.1. Como o ponto T pertence ao eixo Oz tem abcissa e ordenada nulas e como pertence ao plano $z = 3$, as suas coordenadas são (0,0,3)
   Assim, o ponto T' simétrico do ponto T relativamente à origem do referencial tem de coordenadas $(0,0,-3)$
   Assim temos que o centro da superfície esférica é o ponto médio do diâmetro $[TT']$, ou seja, a origem do referencial (como se pretende ilustrar na figura ao lado), e o raio é a distância do ponto T ao centro, ou seja 3, pelo que a equação da superfície esférica é:

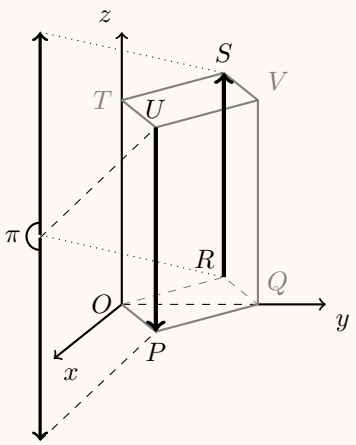
   $$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 3^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 9$$



   2.2. Como as arestas $[UP]$ e $[RS]$ são arestas laterais do prisma, logo são paralelas, e ambas têm comprimento igual a 3
   Assim, como os vetores $\overrightarrow{UP}$ e $\overrightarrow{RS}$ têm a mesma direção e sentidos contrários, pelo que o ângulo por eles formado tem amplitude de π radianos.
   Desta forma, o valor do produto escalar $\overrightarrow{UP} \,.\, \overrightarrow{RS}$ é:

   $$\overrightarrow{UP} \,.\, \overrightarrow{RS} = \left\|\overrightarrow{UP}\right\| \times \left\|\overrightarrow{RS}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{UP}\,\hat{}\,\overrightarrow{RS}\right) =$$

   $$= 3 \times 3 \times \cos\pi = 9 \times (-1) = -9$$



2.3. Como o ponto Q pertence ao eixo Oy tem abcissa e cota nulas, e como pertence ao plano PQV de equação $x+y=2$, substituindo o valor da abcissa podemos calcular o valor da ordenada:

$$0+y_Q=2 \Leftrightarrow y_Q=2$$

Assim, verificando que o ponto T tem coordenadas $(0,0,3)$, calculamos as coordenadas do vetor $\overrightarrow{TQ}$:

$$\overrightarrow{TQ}=Q-T=(0,2,0)-(0,0,3)=(0,2,-3)$$

Assim, considerando $\overrightarrow{TQ}$ é um vetor diretor da reta TQ e que o ponto Q pertence à reta, temos que uma condição cartesiana da reta é:

$$x=0 \wedge \frac{y-2}{2}=\frac{z-0}{-3} \Leftrightarrow x=0 \wedge \frac{y-2}{2}=-\frac{z}{3}$$

2.4. Como o prisma tem 8 vértices, o número de conjuntos de 3 vértices que podem ser escolhidos (número de casos possíveis) é ${}^8C_3$
De entre os ${}^8C_3$ conjuntos de 3 vértices, os que definem planos perpendiculares ao plano xOy deve conter uma aresta perpendicular a este plano.
Como existem 4 arestas nestas condições (ou seja 4 pares de vértices), e por cada uma delas qualquer um dos restantes 6 vértices, define com a aresta um plano perpendicular ao plano xOy, então existem 4×6 casos favoráveis.
Desta forma, a probabilidade é:

$$\frac{4\times 6}{{}^8C_3}=\frac{24}{{}^8C_3}=\frac{3}{7}$$

3. Temos que $P\left(\overline{A}\cup B\right)$, no contexto da situação descrita é a probabilidade de retirar ao acaso uma bola do saco e o número dessa bola ser superior a 6 ou par.
Como consideramos que o saco tem n bolas, existem $n-6$ bolas com um número superior a 6, e ainda 3 bolas com número par, mas inferior a 6 (as bolas com os números 2, 4 e 6).

Desta forma o número de casos possíveis é n, porque existem n bolas no saco e o número de casos favoráveis é $n-6+3=n-3$, e desta forma, recorrendo à Regra de LaPlace, temos que:

$$P\left(\overline{A}\cup B\right)=\frac{n-3}{n}$$

4.

4.1. Temos que $f(0)=9-2{,}5\left(e^{1-0{,}2\times 0}+e^{0{,}2\times 0-1}\right)=9-2{,}5\left(e^1+e^{-1}\right)\approx 1{,}28$

E assim, substituindo o valor aproximado de $f(0)$ na equação $\sqrt{f(0)^2+x^2}=2$, vem:

$$\sqrt{1{,}28^2+x^2}=2 \underset{1{,}28^2+x^2>0}{\Leftrightarrow} \left(\sqrt{1{,}28^2+x^2}\right)^2=2^2 \underset{1{,}28^2+x^2>0}{\Leftrightarrow} 1{,}28^2+x^2=4 \Leftrightarrow x^2=4-1{,}28^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2=2{,}3616 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2{,}3616}$$

Como $x\in[0,7]$, então a solução da equação é $x=\sqrt{2{,}3616}\approx 1{,}5$

Como $\overline{SP}^2=\overline{OP}^2+\overline{OS}^2$, e $\overline{OP}=f(0)$ e $\overline{OS}=x$, então temos que $\sqrt{f(0)^2+x^2}$ é a distância $\overline{SP}$.
Assim a solução da equação $\sqrt{f(0)^2+x^2}=2$ é a abcissa do ponto S, na posição em que dista duas unidades do ponto P, ou seja, o ponto da superfície do rio que está a 2 metros do topo da parede esquerda que suporta a ponte está a 1,5 metros de distância da base da mesma parede.

4.2. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f:

$$f'(x) = \left(9 - 2{,}5\left(e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right)\right)' = (9)' - 2{,}5\left(e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right)' =$$

$$= 0 - 2{,}5\Big(\left(e^{1-0{,}2x}\right)' + \left(e^{0{,}2x-1}\right)'\Big) = -2{,}5\Big((1-0{,}2x)'\left(e^{1-0{,}2x}\right) + (0{,}2x-1)'\left(e^{0{,}2x-1}\right)\Big) =$$

$$= -2{,}5\Big(-0{,}2\left(e^{1-0{,}2x}\right) + 0{,}2\left(e^{0{,}2x-1}\right)\Big) = -2{,}5 \times 0{,}2\left(-e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right) =$$

$$= -0{,}5\left(-e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right)$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função ($[0,7]$), vem:

$$-0{,}5\left(-e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right) = 0 \Leftrightarrow -e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1} = 0 \Leftrightarrow e^{0{,}2x-1} = e^{1-0{,}2x} \Leftrightarrow$$

$$0{,}2x - 1 = 1 - 0{,}2x \Leftrightarrow 0{,}2x + 0{,}2x = 1 + 1 \Leftrightarrow 0{,}4x = 2 \Leftrightarrow 4x = 20 \Leftrightarrow x = 5$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		5		7
$f'(x)$	+	+	0	−	−
$f(x)$	min	↗	Máx	↘	min

Assim, podemos concluir que o valor máximo da função f é atingido quando $x = 5$, ou seja, a distância máxima entre a superfície da água e a ponte é:

$$f(5) = 9 - 2{,}5\left(e^{1-0{,}2\times 5} + e^{0{,}2\times 5-1}\right) = 9 - 2{,}5\left(e^{1-1} + e^{1-1}\right) = 9 - 2{,}5\left(e^0 + e^0\right) = 9 - 2{,}5\times 2 = 9 - 5 = 4$$

Ou seja, o barco do clube náutico não pode passar por baixo da ponte, porque a distância da superfície da água ao topo do mastro é de 6 metros e a maior distância entre a superfície da água e a ponte é de 4 metros.

5.

5.1. Para averiguar se a função g é contínua em $x = 1$, temos que verificar se $g(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$

- $g(1) = 2$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1-x^2}{1-e^{x-1}} = \dfrac{1-(1^-)^2}{1-e^{1-1^-}} = \dfrac{1-1}{1-e^0} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x^2-1)}{-(e^{x-1}-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{e^{x-1}-1} = \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{x-1}{e^{x-1}-1} \times (x+1)\right) =$$

(fazendo $y = x - 1$ temos que se $x \to 1^-$, então $y \to 0^-$)

$$= \lim_{y\to 0^-} \frac{y}{e^y - 1} \times \lim_{x\to 1^-} (x+1) = \lim_{y\to 0^-} \frac{1}{\frac{e^y-1}{y}} \times (1^- + 1) = \frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to 0^-} \left(\frac{e^y-1}{y}\right)}_{\text{Lim. Notável}}} \times 2 = \frac{1}{1} \times 2 = 2$$

- $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(3 + \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}\right) = 3 + \dfrac{\operatorname{sen}(1-1)}{1-1} = 3 - \dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 1^+} \left(3 + \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}\right) = \lim_{x\to 1^+} 3 + \lim_{x\to 1^+} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{-(x-1)} = 3 - \lim_{x\to 1^+} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} =$$

(fazendo $y = x - 1$, temos que se $x \to 1^-$, então $y \to 0^-$)

$$= 3 - \underbrace{\lim_{y\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 3 - 1 = 2$$

Como $g(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$, então a função g é contínua em $x = 1$

5.2. Resolvendo a equação $g(x)=3$, no intervalo $[4,5]$, ou seja, para $x>1$, vem:

$$3+\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}=3 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}=3-3 \underset{x\neq 1}{\Leftrightarrow} \operatorname{sen}(x-1)=0\times(1-x) \Leftrightarrow \operatorname{sen}(x-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}(x-1)=\operatorname{sen}0 \Leftrightarrow x-1=0+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=1+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Assim, como $\pi\notin[4,5]$; $1+\pi\in[4,5]$ e $1+2\pi\notin[4,5]$ a única solução da equação $g(x)=3$, no intervalo $[4,5]$ é $1+\pi$

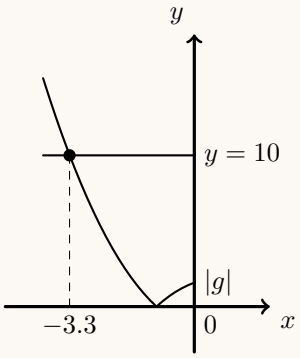
5.3. Como o ponto A é o ponto de abcissa negativa ($x<1$) que é a intersecção do gráfico da função g com o eixo das abcissas, tem ordenada nula, e assim, calculamos a abcissa resolvendo a equação:

$$\frac{1-x^2}{1-e^{x-1}}=0 \underset{x\neq 1}{\Leftrightarrow} 1-x^2=0 \Leftrightarrow 1=x^2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{1} \underset{x<0}{\Rightarrow} x=-1$$

Assim, temos que $\overline{OA}=|-1|=1$ e considerando o lado $[OA]$ como a base do triângulo $[OAP]$, a altura é o valor absoluto da ordenada do ponto P, pelo que a área do triângulo é igual a 5, se:

$$\frac{\overline{OA}\times|g(x)|}{2}=5 \Leftrightarrow 1\times|g(x)|=5\times 2 \Leftrightarrow |g(x)|=10 \Leftrightarrow \left|\frac{1-x^2}{1-e^{x-1}}\right|=10$$

Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função $|g|$, para valores inferiores a zero e a reta $y=10$ (reproduzidos na figura ao lado), e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, obtemos um valor aproximado (às décimas) da abcissa do ponto P, $x_P\approx -3{,}3$



6. Como $\overline{OP}=\overline{PQ}$, então o triângulo $[OPQ]$ é isósceles e $\overline{OQ}=2a$

Como as coordenadas do ponto P são $(a,f(a))$ e as do ponto Q são $(2a,0)$, temos que o declive da reta PQ, é:

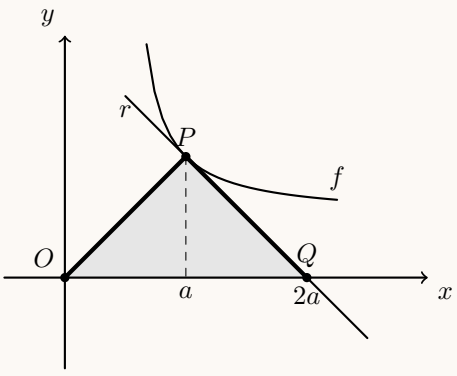
$$m_{PQ}=\frac{0-f(a)}{2a-a}=-\frac{f(a)}{a}$$

Como a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a, então o declive da reta r, ou seja, da reta PQ, é igual a $f'(a)$, pelo que:

$$f'(a)=-\frac{f(a)}{a}$$

Desta forma, temos que:

$$f'(a)+\frac{f(a)}{a}=-\frac{f(a)}{a}+\frac{f(a)}{a}=0$$



REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A
Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2017
12.º Ano de Escolaridade
Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 10 Páginas

VERSÃO 1

Indique de forma legível a versão da prova.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Nos termos da lei em vigor, as provas de avaliação externa são obras protegidas pelo Código do Direito de Autor e dos Direitos Conexos. A sua divulgação não suprime os direitos previstos na lei. Assim, é proibida a utilização destas provas, além do determinado na lei ou do permitido pelo IAVE, I.P., sendo expressamente vedada a sua exploração comercial.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \ \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\ e^u$

$(a^u)' = u'\ a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Página em branco

GRUPO I

1. Considere todos os números naturais de cinco algarismos diferentes que se podem formar com os algarismos $1, 2, 3, 4$ e 5

Destes números, quantos têm os algarismos pares um a seguir ao outro?

(A) 24 **(B)** 48 **(C)** 72 **(D)** 96

2. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte.

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(X > 1 \mid X \leq 3)$?

(A) $\frac{3}{4}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{8}{9}$ **(D)** $\frac{5}{9}$

3. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, com derivada finita em todos os pontos do seu domínio, sabe-se que $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{f(x) - f(2)} = 4$

Qual é o valor de $f'(2)$?

(A) $-\frac{1}{2}$ **(B)** $-\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{1}{4}$

4. Na Figura 1, está representado o gráfico de uma função f, de domínio $[-1, 6]$, e, na Figura 2, está representada parte do gráfico de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$

Tal como as figuras sugerem, em ambas as funções, todos os objetos inteiros têm imagens inteiras.

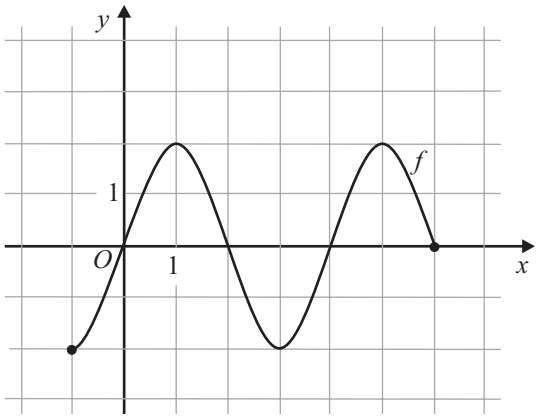


Figura 1

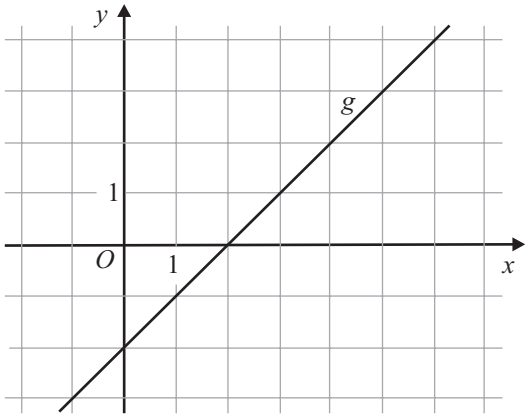


Figura 2

Quais são os zeros da função $g \circ f$?

(o símbolo $\circ$ designa a composição de funções)

(A) 0 e 4 **(B)** 1 e 5 **(C)** -1 e 3 **(D)** 2 e 6

5. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$

A tabela de variação de sinal da função f'', segunda derivada de f, é a seguinte.

x	$-\infty$	-10		0		10	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Seja g a função definida por $g(x) = -f(x-5)$

Em qual dos intervalos seguintes o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo?

(A) $]-15, -5[$ **(B)** $]0, 10[$ **(C)** $]-5, 5[$ **(D)** $]5, 15[$

6. Seja z um número complexo de argumento $\frac{\pi}{5}$

Qual dos seguintes valores é um argumento do número complexo $-5iz$?

(A) $-\frac{3\pi}{10}$ **(B)** $-\frac{4\pi}{5}$ **(C)** $-\frac{7\pi}{5}$ **(D)** $-\frac{13\pi}{10}$

7. Considere, num referencial o.n. xOy, a região definida pela condição

$$(x+1)^2+(y+1)^2 \leq 1 \quad \wedge \quad x+y+2 \geq 0$$

Qual é o perímetro dessa região?

(A) $\pi+1$ **(B)** $\frac{\pi}{2}+1$ **(C)** $\pi+2$ **(D)** $\frac{\pi}{2}+2$

8. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A sucessão (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$

(B) A sucessão (u_n) é uma progressão geométrica de razão 2

(C) A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$

(D) A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão 2

GRUPO II

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam z_1 e z_2 tais que $z_1 = 2 + i$ e $z_1 \times \overline{z}_2 = 4 - 3i$

Considere a condição $|z - z_1| = |z - z_2|$

Mostre que o número complexo $\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4}$ verifica esta condição e interprete geometricamente este facto.

Resolva este item sem recorrer à calculadora.

2. Na Figura 3, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$

Sabe-se que:

- a face $[ABCD]$ está contida no plano xOy
- a aresta $[CD]$ está contida no eixo Oy
- o ponto D tem coordenadas $(0, 4, 0)$
- o plano ACG é definido pela equação $x + y - z - 6 = 0$

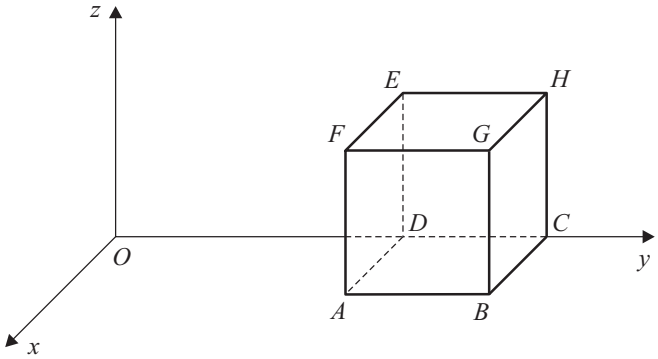


Figura 3

2.1. Verifique que o vértice A tem abcissa igual a 2

2.2. Seja r a reta definida pela condição $x - 1 = 1 - y = z$

Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta r com o plano ACG

2.3. Seja P o vértice de uma pirâmide regular de base $[EFGH]$

Sabe-se que:

- a cota do ponto P é superior a 2
- o volume da pirâmide é 4

Determine a amplitude do ângulo OGP

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

3. Uma escola secundária tem alunos de ambos os sexos.

3.1. Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa escola.

Seja A o acontecimento «o aluno escolhido é rapariga», e seja B o acontecimento «o aluno escolhido frequenta o 10.º ano».

Sabe-se que:

- a probabilidade de o aluno escolhido ser rapaz ou não frequentar o 10.º ano é $0{,}82$
- a probabilidade de o aluno escolhido frequentar o 10.º ano, sabendo que é rapariga, é $\frac{1}{3}$

Determine $P(A)$

3.2. Uma das turmas dessa escola tem trinta alunos, numerados de 1 a 30

Com o objetivo de escolher quatro alunos dessa turma para formar uma comissão, introduzem-se, num saco, trinta cartões, indistinguíveis ao tato, numerados de 1 a 30. Em seguida, retiram-se quatro cartões do saco, simultaneamente e ao acaso.

Qual é a probabilidade de os dois menores números saídos serem o 7 e o 22 ?

Apresente o resultado arredondado às milésimas.

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

Resolva os itens **4.1.**, **4.2.** e **4.3.** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico paralelas aos eixos coordenados.

4.2. Resolva a inequação $f(x)>2\ln x$

Apresente o conjunto solução usando a notação de intervalos de números reais.

4.3. Para um certo número real k, a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x)=\frac{k}{x}+f(x)$, tem um extremo relativo para $x=1$

Determine esse número k

5. Considere o desenvolvimento de $\left(2x\operatorname{sen}\alpha+\frac{\cos\alpha}{x}\right)^2$, em que $\alpha\in\mathbb{R}$ e $x\neq 0$

Determine os valores de α, pertencentes ao intervalo $]\pi,2\pi[$, para os quais o termo independente de x, neste desenvolvimento, é igual a 1

Resolva este item recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

6. Num jardim, uma criança está a andar num baloiço cuja cadeira está suspensa por duas hastes rígidas. Atrás do baloiço, há um muro que limita esse jardim.

A Figura 4 esquematiza a situação. O ponto P representa a posição da cadeira.

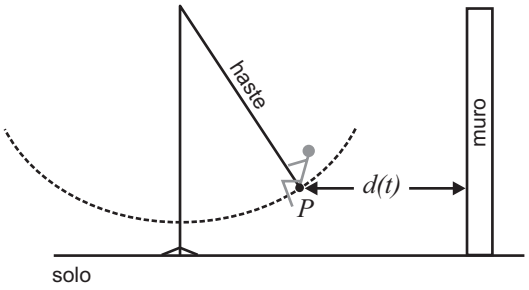


Figura 4

Num determinado instante, em que a criança está a dar balanço, é iniciada a contagem do tempo. Doze segundos após esse instante, a criança deixa de dar balanço e procura parar o baloiço arrastando os pés no chão.

Admita que a distância, em decímetros, do ponto P ao muro, t segundos após o instante inicial, é dada por

$$d(t) = \begin{cases} 30 + t\,\text{sen}(\pi t) & \text{se } 0 \leq t < 12 \\ 30 + 12\,e^{12-t}\,\text{sen}(\pi t) & \text{se } t \geq 12 \end{cases}$$

(o argumento da função seno está expresso em radianos)

6.1. Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o número de soluções da equação $d(t) = 27$ no intervalo $[0, 6]$, e interprete o resultado no contexto da situação descrita.

Na sua resposta, reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver o problema.

6.2. Admita que, no instante em que é iniciada a contagem do tempo, as hastes do baloiço estão na vertical e que a distância do ponto P ao chão, nesse instante, é $4\ \text{dm}$

Treze segundos e meio após o instante inicial, a distância do ponto P ao chão é $4{,}2\ \text{dm}$

Qual é o comprimento da haste?

Apresente o resultado em decímetros, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

Grupo	Item												
	Cotação (em pontos)												
I	**1.** a **8.**												
	8 × 5 pontos												**40**
II	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	
	15	5	10	15	15	15	15	15	15	15	15	10	**160**
TOTAL													**200**

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 635

2.ª Fase

VERSÃO 1

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2017

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Critérios de Classificação

10 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de escolha múltipla.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Itens de seleção

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

Itens de construção

Nos itens de resposta restrita, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada de vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelo programa da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora gráfica», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. ..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

Chave:

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	B	D	C	B	C	A	C	B
Versão 2	D	B	A	C	B	B	A	D

GRUPO II

1. ..... **15 pontos**

Escrever z_2 na forma algébrica ..... 6 pontos

Escrever $\overline{z_2} = \frac{4-3i}{2+i}$ ..... 1 ponto

Escrever $\frac{4-3i}{2+i} = \frac{(4-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$ ..... 1 ponto

Obter $\overline{z_2} = 1-2i$ ..... 3 pontos

Concluir que $z_2 = 1+2i$ ..... 1 ponto

OU

Seja $z_2 = x+yi$

Escrever $(2+i)(\overline{x+yi}) = 4-3i$ ..... 1 ponto

Escrever $(2+i)(x-yi) = 4-3i$ ..... 1 ponto

Obter $2x+y+i(x-2y) = 4-3i$ ..... 1 ponto

Escrever $2x+y=4 \ \wedge \ x-2y=-3$ ..... 1 ponto

Concluir que $z_2 = 1+2i$ ..... 2 pontos

Escrever $\sqrt{2}\ \text{cis}\ \frac{\pi}{4} = 1+i$ ..... 1 ponto

Verificar que $|1+i-(2+i)| = |1+i-(1+2i)|$ ..... 3 pontos

Interpretar geometricamente o pretendido (por exemplo, «A imagem geométrica de $\sqrt{2}\ \text{cis}\ \frac{\pi}{4}$ é equidistante das imagens geométricas de z_1 e de z_2») ..... 5 pontos

2.1. ..... **5 pontos**

Identificar os valores da ordenada e da cota do ponto A ..... 2 pontos

Escrever $x+4-0-6=0$ ..... 2 pontos

Obter $x=2$ ..... 1 ponto

2.2. ..... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo (recorrendo à condição $x-1=1-y=z$)

Escrever o sistema $\begin{cases} x-1=1-y \\ 1-y=z \\ x+y-z-6=0 \end{cases}$ (ou equivalente) ..... 4 pontos

Obter as coordenadas do ponto de intersecção $\left((-3,5,-4)\right)$ ..... 6 pontos

2.º Processo (recorrendo a uma equação vetorial da reta r)

Indicar um vetor diretor da reta r ..... 2 pontos

Indicar as coordenadas de um ponto da reta r ..... 1 ponto

Escrever uma equação vetorial da reta r
$\left(\text{por exemplo, } (x,y,z)=(1,1,0)+k(1,-1,1),\ k\in\mathbb{R}\right)$ ..... 2 pontos

Escrever as coordenadas de um ponto genérico da reta r, em função de k ... 2 pontos

Obter uma equação na variável k, substituindo x, y e z, na equação do plano ACG, pelas coordenadas de um ponto genérico da reta r ..... 1 ponto

Obter o valor de k ..... 1 ponto

Obter as coordenadas do ponto de intersecção da reta r com o plano ACG
$\left((-3,5,-4)\right)$ ..... 1 ponto

3.º Processo

Escrever as coordenadas de um ponto genérico da reta r, em função de uma das variáveis x, y ou z ..... 5 pontos

Obter uma equação nessa variável, substituindo x, y e z, na equação do plano ACG, pelas coordenadas de um ponto genérico da reta r ..... 2 pontos

Obter o valor da variável ..... 2 pontos

Obter as coordenadas do ponto de intersecção da reta r com o plano ACG
$\left((-3,5,-4)\right)$ ..... 1 ponto

2.3. ..... **15 pontos**

Determinar a altura da pirâmide ..... 2 pontos

Escrever as coordenadas do ponto P ..... 2 pontos

Escrever as coordenadas do ponto G ..... 1 ponto

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{GO}$ ..... 1 ponto

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{GP}$ ..... 1 ponto

Calcular $\overrightarrow{GO}.\overrightarrow{GP}$ ..... 2 pontos

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{GO}$ ..... 1 ponto

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{GP}$ ..... 1 ponto

Escrever a equação $2 = \sqrt{44} \times \sqrt{11} \times \cos\left(\widehat{OGP}\right)$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Obter a amplitude do ângulo $OGP\ (85°)$ ..... 2 pontos

3.1. ..... **15 pontos**

Escrever $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0{,}82$ ..... 3 pontos

Escrever $P(B \mid A) = \frac{1}{3}$ ..... 2 pontos

Escrever $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B})$ ..... 3 pontos

Obter $P(A \cap B)$ ..... 3 pontos

Escrever $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ ..... 1 ponto

Obter $P(A)\ (0{,}54)$ ..... 3 pontos

3.2. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Apresentar o número de casos possíveis: ${}^{30}C_4$ (**ver nota 1**) ..... 4 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis: ${}^{8}C_2$ (**ver nota 2**) ..... 9 pontos

Obter a probabilidade pedida (**ver nota 3**) $(0{,}001)$ ..... 2 pontos

2.º Processo

Apresentar o número de casos possíveis: ${}^{30}A_4$ (**ver nota 1**) ..... 2 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis: ${}^{4}A_2 \times {}^{8}A_2$ (ou ${}^{8}C_2 \times 4!$)
(**ver nota 2**) ..... 11 pontos

Obter a probabilidade pedida (**ver nota 3**) $(0{,}001)$ ..... 2 pontos

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a ${}^{30}C_4$ (1.º processo de resolução) ou a ${}^{30}A_4$ (2.º processo de resolução), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se a expressão apresentada não for equivalente a ${}^{8}C_2$ (1.º processo de resolução) ou a ${}^{4}A_2 \times {}^{8}A_2$ (ou ${}^{8}C_2 \times 4!$) (2.º processo de resolução), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
3. Se a etapa relativa ao número de casos possíveis e a etapa relativa ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. A pontuação de 0 pontos também deve ser atribuída caso o valor obtido não pertença ao intervalo $[0, 1]$

4.1. ..... **15 pontos**

Justificar que apenas a reta de equação $x = 0$ pode ser assíntota vertical do gráfico da função f ..... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ ..... 7 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0^+}$ ..... 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ ..... 3 pontos

Concluir que a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico de f ..... 2 pontos

Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ..... 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ..... 2 pontos

Concluir que a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f ..... 2 pontos

Nota – Se for evidente a intenção de determinar $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$, a classificação a atribuir à resposta é desvalorizada em 2 pontos. Se, por aplicação deste critério, o valor obtido for negativo, a resposta é classificada com 0 pontos.

4.2. ..... **15 pontos**

Escrever $f(x) > 2\ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} > 2\ln x$ ..... 1 ponto

Escrever $\frac{\ln x}{x} > 2\ln x \Leftrightarrow \ln x > 2x \ln x$ ..... 2 pontos

Escrever $\ln x > 2x \ln x \Leftrightarrow \ln x - 2x \ln x > 0$ ..... 2 pontos

Escrever $\ln x - 2x \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x(1 - 2x) > 0$ ..... 3 pontos

Apresentar um quadro de sinal (ou equivalente) (**ver nota**) ..... 5 pontos

Apresentar o conjunto solução $\left(\left]\frac{1}{2}, 1\right[\right)$ ..... 2 pontos

Nota – Se, na primeira linha do quadro, a resposta apresentar $-\infty$, em vez de 0, a pontuação máxima a atribuir nesta etapa é 3 pontos.

4.3. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Determinar $g'(x)$, em função de k ..... 5 pontos

Determinar $g'(1)$, em função de k ..... 3 pontos

Escrever $g'(1)=0$ ..... 5 pontos

Obter o valor de k (1) ..... 2 pontos

2.º Processo

Determinar $g'(x)$, em função de k ..... 5 pontos

Escrever $g'(x)=0$ ..... 2 pontos

Obter $x=e^{1-k}$ (ou equivalente) ..... 5 pontos

Obter o valor de k (1) ..... 3 pontos

5. ..... **15 pontos**

Escrever $\left(2x\operatorname{sen}\alpha+\frac{\cos\alpha}{x}\right)^2=4x^2\operatorname{sen}^2\alpha+4\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+\frac{\cos^2\alpha}{x^2}$ ..... 1 ponto

Escrever $4\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=1$ ..... 3 pontos

Escrever $\operatorname{sen}(2\alpha)=\frac{1}{2}$ ..... 4 pontos

Escrever $\operatorname{sen}(2\alpha)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\alpha=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee 2\alpha=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ ..... 3 pontos

Obter os valores de α $\left(\frac{13\pi}{12}\right.$ e $\left.\frac{17\pi}{12}\right)$ ..... 4 pontos

6.1. ..... **15 pontos**

Escrever $30+t\operatorname{sen}(\pi t)=27$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota**) ..... 4 pontos

Indicar o número de soluções da equação $d(t)=27$ (4) ..... 4 pontos

Interpretar o resultado no contexto da situação descrita (Durante os primeiros seis segundos, a cadeira encontra-se por quatro vezes a uma distância de $27\ \text{dm}$ do muro.) ..... 5 pontos

Nota – Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

6.2. ..... **10 pontos**

Determinar $d(0)$ ..... 1 ponto

Determinar $d(13,5)$ ..... 1 ponto

Determinar $d(0) - d(13,5)$ ..... 2 pontos

Equacionar o problema $(x^2 = (x - 0,2)^2 + 2,68^2$ ou equivalente) ..... 3 pontos

Resolver a equação ..... 2 pontos

Apresentar o comprimento da haste $(18\,\text{dm})$ ..... 1 ponto

COTAÇÕES

Grupo	**Item**												
	Cotação (em pontos)												
I	**1.** a **8.**												
	8×5 pontos												**40**
II	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	
	15	5	10	15	15	15	15	15	15	15	15	10	**160**
TOTAL													**200**

Exame final nacional de Matemática A (2017, 2.ª fase)

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Temos que os algarismos pares, ficando juntos podem ocupar 4 grupos de duas posições adjacentes e trocando entre si, podem figurar no número de 2×4 formas distintas.
   Os algarismos ímpares devem ocupar as 3 posições restantes, podendo trocar entre si, o que corresponde a ${}^3A_3 = P_3 = 3!$ disposições diferentes.
   Assim, considerando todas as disposições diferentes dos algarismos, temos que o total de números naturais nas condições do enunciado é: $2 \times 4 \times 3! = 8 \times 6 = 48$

   Resposta: **Opção B**

2. Temos que:

$$P(X > 1 | X \leq 3) = \frac{P(X > 1 \cap X \leq 3)}{P(X \leq 3)} = \frac{P(2 \leq X \leq 3)}{1 - P(X > 3)} = \frac{P(X = 2) + P(X = 3)}{1 - P(X = 4)} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{5}{9}$$

   Resposta: **Opção D**

3. Temos que, pela definição de derivada num ponto, $f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

   Assim, vem que:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{f(x) - f(2)} = 4 \Leftrightarrow \lim_{x \to 2} \frac{1}{\frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 2x}} = 4 \Leftrightarrow \frac{\lim\limits_{x \to 2} 1}{\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 2x}} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x(x - 2)}} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{1}{x} \times \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right)} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x} \times \lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{2} \times f'(2)} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = 4 \times \frac{1}{2} \times f'(2) \Leftrightarrow 1 = \frac{4}{2} \times f'(2) \Leftrightarrow 1 = 2f'(2) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = f'(2)$$

   Resposta: **Opção C**

4. Temos que $(g \circ f)(x) = 0 \Leftrightarrow g\big(f(x)\big) = 0$

   Como o único zero da função g é 2, ou seja, $g(a) = 0 \Leftrightarrow a = 2$, então vem que:

   $$g\big(f(x)\big) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2$$

   E, por observação do gráfico de f podemos verificar que, os objetos cuja imagem é 2, pela função f, são 1 e 5

   Resposta: **Opção B**

5. Relacionando o sinal da segunda derivada de f com o sentido das concavidades do gráfico, temos:

x	$-\infty$	-10		0		10	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	∩	Pt. I.	∪	Pt. I.	∩	Pt. I.	∪

   Como o gráfico de $f(x-5)$ é uma translação horizontal do gráfico de f associada ao vetor de coordenadas (5,0), e o gráfico de $-f(x-5)$ é simétrico relativamente ao eixo das abcissas do gráfico de $f(x-5)$, podemos relacionar o sinal de $f''(x-5)$ com o sinal da segunda derivada de $-f''(x-5)$:

x	$-\infty$	-5		5		15	$+\infty$
$f''(x-5)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$-f''(x-5)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
g	∪	Pt. I.	∩	Pt. I.	∪	Pt. I.	∩

   Logo, podemos concluir que o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]-5{,}5[$ e também no intervalo $]15, +\infty[$

   Resposta: **Opção C**

6. Temos que:

   - os argumentos dos complexos z e $5z$ são iguais

     $$\text{Arg}\,(5z) = \text{Arg}\,(z) = \frac{\pi}{5}$$

   - os argumentos de complexos simétricos, $-5z$ e $5z$, diferem de π

     $$\text{Arg}\,(-5z) = \text{Arg}\,(5z) - \pi = \frac{\pi}{5} - \pi = -\frac{4\pi}{5}$$

   - a multiplicação por i de um complexo corresponde a somar $\dfrac{\pi}{2}$ ao seu argumento

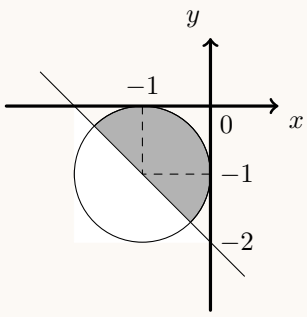
     $$\text{Arg}\,(-5iz) = \text{Arg}\,(-5z) + \frac{\pi}{2} = -\frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{10} + \frac{5\pi}{10} = -\frac{3\pi}{10}$$

   Resposta: **Opção A**

7. Observando que $(x+1)^2+(y+1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow (x-(-1))^2+(y-(-1))^2 \leq 1^2$, temos que esta condição representa o círculo de centro no ponto $(-1,-1)$ e raio 1

   Observando que $x+y+2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -x-2$, temos que esta condição representa o semiplano superior limitado pela reta de declive -1 e ordenada na origem -2

   Representando a sombreado a interseção dos dois conjuntos de pontos, como na figura ao lado, podemos observar que corresponde a um semi-círculo de raio 1



   Assim, o perímetro da região definida pela condição é a soma do semi-perímetro do círculo com o diâmetro do círculo $(2r)$:

$$P = \frac{2\pi r}{2} + 2r = \frac{2\pi \times 1}{2} + 2 \times 1 = \pi + 2$$

   Resposta: **Opção C**

8. Temos que:

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} = \frac{1}{2} \times 2^n = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1} = 1 \times 2^{n-1}$$

   Assim, como $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n-1+1}}{2^{n-1}} = \frac{2^n}{2^n \times 2^{-1}} = \frac{2^n}{2^n} \times \frac{1}{2^{-1}} = 1 \times 2 = 2$, (u_n) é uma progressão geométrica de razão 2

   Resposta: **Opção B**

GRUPO II

1. Como $z_1 \times \overline{z_2} = 4-3i \Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{4-3i}{z_1}$, calculando o valor de $\overline{z_2}$, temos:

$$\overline{z_2} = \frac{4-3i}{2+i} = \frac{(4-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{8-4i-6i+3i^2}{2^2-i^2} = \frac{8-10i-3}{4-(-1)} = \frac{5-10i}{5} = 1-2i$$

   E assim, temos que: $\overline{z_2} = 1-2i \Leftrightarrow z_2 = 1+2i$

   Escrevendo $\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{4}$ na forma algébrica, temos:

$$\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right) = \frac{2}{2} + \frac{2}{2}\,i = 1+i$$

   Assim, o número complexo anterior verifica a condição $|z-z_1| = |z-z_2|$, porque:

   - $|(1+i)-(2+i)| = |1+i-2-i| = |1-2+0i| = |-1| = 1$
   - $|(1+i)-(1+2i)| = |1+i-1-2i| = |1-1-i| = |-i| = 1$

   Como o número complexo $\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{4}$ verifica a condição $|z-z_1| = |z-z_2|$, então a representação geométrica deste número complexo está a igual distância das representações geométricas dos complexos z_1 e z_2

2.

2.1. Sabemos que:

- ponto A pertence ao plano xOy, pelo que tem cota nula ($z_A = 0$)
- a aresta $[DA]$ pertence ao plano xOy e é perpendicular ao eixo Oy, pelo que a ordenada do ponto A é igual à ordenada do ponto D ($y_A = y_D = 4$)

Assim, substituindo os valores da ordenada e da cota do ponto A na equação do plano ACG, podemos calcular o valor da abcissa (x_A):

$$x_A + y_A - z_A - 6 = 0 \Leftrightarrow x_A + 4 + 0 - 6 = 0 \Leftrightarrow x_A - 2 = 0 \Leftrightarrow x_A = 2$$

2.2. As coordenadas do ponto de intersecção da reta r com o plano ACG, verificam simultaneamente a equação do plano e as equações da reta, ou seja, podem ser calculadas resolvendo o sistema seguinte:

$$\begin{cases} x + y - z - 6 = 0 \\ x - 1 = 1 - y \\ x - 1 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z - 6 = 0 \\ y = -x + 2 \\ x - 1 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x + 2 - (x - 1) - 6 = 0 \\ y = -x + 2 \\ x - 1 = z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x + 1 - 6 = 0 \\ y = -x + 2 \\ x - 1 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 1 - 6 = x \\ y = -x + 2 \\ x - 1 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = x \\ y = -(-3) + 2 \\ -3 - 1 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = x \\ y = 5 \\ -4 = z \end{cases}$$

Logo a reta r e o plano ACG intersectam-se no ponto de coordenadas $(-3{,}5, -4)$

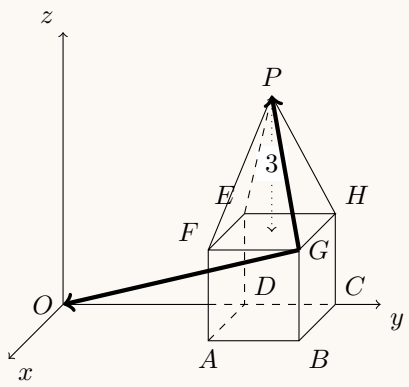
2.3. Como a base do cubo é um quadrado de lado 2 ($\overline{AD}=2$), temos que a área da base é:

$$A_{[EFGH]}=\overline{AD}^2=2^2=4$$

Como o volume da pirâmide é 4, então calculando a altura h da pirâmide, temos:

$$V_{[ABCDEFGHP]}=\frac{1}{3}\times A_{[EFGH]}\times h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4=\frac{1}{3}\times 4\times h \Leftrightarrow \frac{4\times 3}{4}=h \Leftrightarrow h=3$$



Como a cota do ponto P é superior a 2 e a aresta do cubo é 2, então a cota do ponto P é

$$z_P=2+h=2+3=5$$

Como a projeção do ponto P no plano xOy é o centro do quadrado $[ABCD]$, temos que a abcissa é $x_P=1$ e a ordenada é $y_P=5$, pelo que as coordenadas do ponto P são (1,5,5)

Como as coordenadas do ponto G são (2,6,2), podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{GP}$, e a sua norma:

$$\overrightarrow{GP}=P-G=(1,5,5)-(2,6,2)=(-1,-1,3)$$

$$\left\|\overrightarrow{PG}\right\|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{1+1+9}=\sqrt{11}$$

Como O é a origem do referencial, podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{GO}$, e a sua norma:

$$\overrightarrow{GO}=O-G=(0,0,0)-(2,6,2)=(-2,-6,-2)$$

$$\left\|\overrightarrow{GO}\right\|=\sqrt{(-2)^2+(-6)^2+(-2)^2}=\sqrt{4+36+4}=\sqrt{44}$$

Recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos\left(\overrightarrow{GP}\overrightarrow{GO}\right)=\frac{\overrightarrow{GP}\,.\,\overrightarrow{GO}}{\left\|\overrightarrow{GP}\right\|\times\left\|\overrightarrow{GO}\right\|}=\frac{(-1,-1,3).(-2,-6,-2)}{\sqrt{11}\times\sqrt{44}}=\frac{2+6-6}{\sqrt{11\times 44}}=\frac{2}{\sqrt{484}}$$

Logo, a amplitude do ângulo OGP, em graus, arredondado às unidades, é

$$O\hat{G}P=\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{484}}\right)\approx 85^\circ$$

3.

3.1. De acordo com os acontecimentos A e B definidos, e os dados do enunciado, temos que:

- $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=0{,}82$
- $P\left(B|A\right)=\frac{1}{3}$

Assim, usando as Leis de De Morgan, e o teorema do acontecimento contrário, temos que:

$$P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=0{,}82 \Leftrightarrow P\left(\overline{A\cap B}\right)=0{,}82 \Leftrightarrow 1-P\left(A\cap B\right)=0{,}82 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(A\cap B\right)=1-0{,}82 \Leftrightarrow P\left(A\cap B\right)=0{,}18$$

Usando a definição de probabilidade condiciona, podemos calcular $P(A)$:

$$P\left(B|A\right)=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{0{,}18}{P(A)}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow 0{,}18\times 3=P(A) \Leftrightarrow P(A)=0{,}54$$

3.2. Como são extraídos 4 cartões simultaneamente de um conjunto de 30, o número extrações diferentes que podem ser feitas, ou seja o número de casos possíveis, é ${}^{30}C_4$

Para que num extração os menores números saídos sejam o 7 e o 22, então estes dois números devem estar no conjunto dos 4 cartões extraídos e os restantes dois números devem ser escolhidos de entre os $30-22=8$ cartões com números superiores a 22, ou seja, existem ${}^{1}C_1 \times {}^{1}C_1 \times {}^{8}C_2 = {}^{8}C_2$ conjuntos de cartões nestas condições, ou seja o número de casos favoráveis é ${}^{8}C_2$

Assim, recorrendo à Regra de Laplace, calculando a probabilidade de selecionar 4 dos 30 cartões e os menores números saídos serem o 7 e o 22 e arredondando o resultado às milésimas, temos:

$$p = \frac{{}^{8}C_2}{{}^{30}C_4} \approx 0{,}001$$

4.

4.1. Como a função é contínua em $\mathbb{R}^+$, a reta de equação $x=0$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f. Para averiguar esta hipótese vamos calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 0^+}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Assim, como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, podemos concluir a reta de equação $x=0$ é a única assíntota vertical do gráfico de f, ou seja, paralela ao eixo das ordenadas.

Como o domínio da função é $\mathbb{R}^+$, para averiguar a existência de assíntotas paralelas ao eixo das abcissas, vamos calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 0$$

Logo, podemos concluir que a reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal do gráfico de f, quando $x\to+\infty$, e que é a única assíntota do gráfico de f paralela ao eixo das abcissas.

4.2. Resolvendo a inequação, temos que:

$$f(x) > 2\ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} > 2\ln x \underset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x > x \times 2\ln x \Leftrightarrow \ln x - x\times 2\ln x > 0 \Leftrightarrow (\ln x)(1-2x) > 0$$

Como o domínio da função é $\mathbb{R}^+$ estudamos o sinal do produto, em $]0,+\infty[$, através de um quadro de variação de sinal, para resolver a inequação:

x	0		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$\ln x$	n.d.	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$1-2x$	n.d.	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$(\ln x)(1-2x)$	n.d.	$-$	0	$+$	0	$-$

Assim, temos que o conjunto solução da inequação é $\left]\frac{1}{2},1\right[$

4.3. Como os extremos relativos correspondem aos zeros da função derivada, começamos por determinar a expressão da função derivada da função g:

$$g'(x) = \left(\frac{k}{x} + f(x)\right)' = \left(\frac{k}{x}\right)' + \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{k' \times x - x' \times k}{x^2} + \frac{(\ln x)' x - x'(\ln x)}{x^2} =$$

$$= \frac{0 - 1 \times k}{x^2} + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} \underset{x \neq 0}{=} \frac{-k + 1 - \ln x}{x^2}$$

Como a função tem um extremo relativo para $x = 1$, então 1 é zero da função derivada ($g'(1) = 0$), pelo que podemos determinar o valor de k resolvendo a equação seguinte:

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{-k + 1 - \ln 1}{1^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{-k + 1 - 0}{1} = 0 \Leftrightarrow -k + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = k$$

5. Calculando o desenvolvimento do quadrado da soma, temos:

$$\left(2x \operatorname{sen}\alpha + \frac{\cos\alpha}{x}\right)^2 = (2x \operatorname{sen}\alpha)^2 + 2(2x \operatorname{sen}\alpha)\left(\frac{\cos\alpha}{x}\right) + \left(\frac{\cos\alpha}{x}\right)^2 =$$

$$= 4x^2 \operatorname{sen}^2\alpha + \frac{4x \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{x} + \frac{\cos^2\alpha}{x^2} = 4x^2 \operatorname{sen}^2\alpha + 4 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{x^2}$$

Assim, nos três termos do desenvolvimento o termo independente é $4 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$, pelo que, como sabemos que o termo independente é igual a 1, calculando os valores de α pertencentes ao intervalo $]\pi,2\pi[$, vem:

$$4 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = 1 \Leftrightarrow 2 \times 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = 1 \Leftrightarrow 2 \times \operatorname{sen}(2\alpha) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2\alpha) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2\alpha) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2\alpha = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

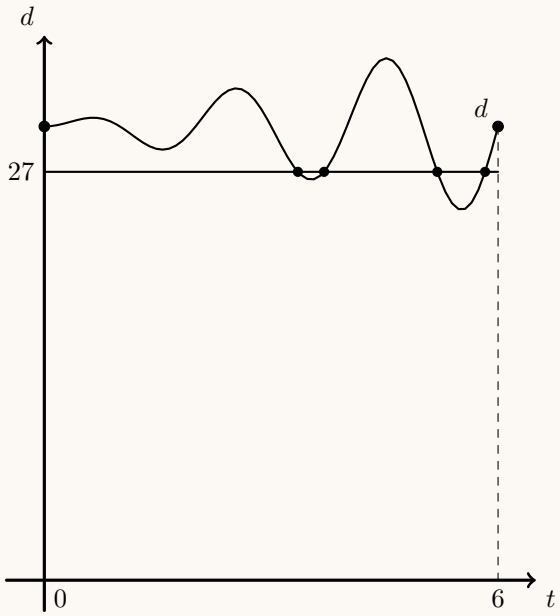
Como se pretende identificar os valores de $\alpha \in]\pi,2\pi[$, atribuindo valores inteiros a k para identificar as soluções no intervalo definido, temos:

- $k = 0 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{12} \vee \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$ $\left(\frac{\pi}{12} \notin]\pi,2\pi[\quad \text{e} \quad \frac{5\pi}{12} \notin]\pi,2\pi[\right)$
- $k = 1 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12} \vee \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{17\pi}{12}$
- $k = 2 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{12} + 2\pi = \frac{25\pi}{12} \vee \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} + 2\pi = \frac{29\pi}{12}$ $\left(\frac{25\pi}{12} \notin]\pi,2\pi[\quad \text{e} \quad \frac{29\pi}{12} \notin]\pi,2\pi[\right)$

Assim, os valores de α nas condições do enunciado são $\frac{13\pi}{12}$ e $\frac{17\pi}{12}$

6.

6.1. Representando na calculadora gráfica o gráfico da função d, para valores de $t \in [0,6]$, ou seja, para $t \leq 12$ e a reta de equação $d = 27$, (reproduzido na figura ao lado) podemos observar que a reta interseta o gráfico da função neste intervalo em 4 pontos, pelo que o número de soluções da equação $d = 27$, no intervalo $[0,6]$ é 4



No contexto da situação descrita, a existência de 4 soluções no intervalo $[0,6]$, significa que a criança esteve a uma distância de 27 decímetros do muro, por quatro vezes, nos primeiros seis segundos.

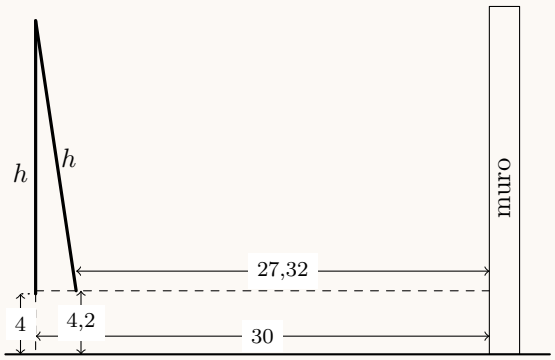
6.2. No instante inicial as hastes estão na vertical e a distância ao chão é de 4 dm, e, no mesmo instante a distância ao muro é dada por:

$$d(0) = 30 + 0 \times \operatorname{sen} \pi \times 0) = 30 + 0 = 30 \text{ dm}$$

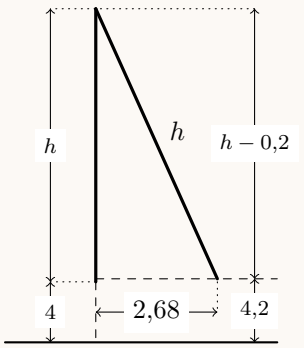
Passados treze segundos e meio a distância ao chão é de 4,2 dm e a distância ao muro é dada por:

$$d(13{,}5) = 30 + 12e^{12-13{,}5} \operatorname{sen}(\pi \times 13{,}5) =$$

$$= 30 + 12e^{-1{,}5} \operatorname{sen}(\pi \times 13{,}5) \approx 27{,}32 \text{ dm}$$



Assim, podemos considerar um triângulo retângulo, cuja hipotenusa tem o comprimento da haste (h), o cateto maior mede $h + 4 - 4{,}2 = h - 0{,}2$ e o cateto menor mede $d(0) - d(13{,}5) \approx 30 - 27{,}32 \approx 2{,}68$



E assim, recorrendo ao teorema de Pitágoras, um valor aproximado do comprimento da haste é dado por:

$$h^2 = (h - 0{,}2)^2 + 2{,}68^2 \Leftrightarrow h^2 = h^2 - 0{,}4h + 0{,}2^2 + 2{,}68^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}4h = 0{,}2^2 + 2{,}68^2 \Leftrightarrow h = \frac{0{,}2^2 + 2{,}68^2}{0{,}4}$$

Como $\dfrac{0{,}2^2 + 2{,}68^2}{0{,}4} \approx 18$, o valor do comprimento da haste, arredondado às unidades, é 18 dm

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2017

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

VERSÃO 1

Indique de forma legível a versão da prova.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Nos termos da lei em vigor, as provas de avaliação externa são obras protegidas pelo Código do Direito de Autor e dos Direitos Conexos. A sua divulgação não suprime os direitos previstos na lei. Assim, é proibida a utilização destas provas, além do determinado na lei ou do permitido pelo IAVE, I.P., sendo expressamente vedada a sua exploração comercial.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \ \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \ \text{e} \ n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\ e^u$

$(a^u)' = u'\ a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

1. Com os algarismos $0,\ 1,\ 2,\ 3$ e $4,$ quantos números naturais maiores do que $20\,000$ e com os cinco algarismos todos diferentes é possível formar?

(A) 24 **(B)** 48 **(C)** 72 **(D)** 96

2. Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio 10

Sabe-se que $P(10 < X < 15) = 0{,}4$

Qual é o valor de $P(X < 5 \vee X > 15)$?

(A) $0{,}1$ **(B)** $0{,}2$ **(C)** $0{,}4$ **(D)** $0{,}6$

3. Seja a um número real superior a 1

Qual é o valor de $4 + \log_a(5^{\ln a})$?

(A) $\ln(10e)$ **(B)** $\ln(5e^4)$ **(C)** $\ln(5e^2)$ **(D)** $\ln(20e)$

4. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f, polinomial do terceiro grau.

Tal como a figura sugere, a função f tem um máximo relativo para $x = -2$ e tem um mínimo relativo para $x = 2$

A origem do referencial é ponto de inflexão do gráfico de f

Sejam f' e f'' a primeira e a segunda derivadas da função f, respetivamente.

Qual é o conjunto solução da condição $f'(x) \times f''(x) \geq 0$?

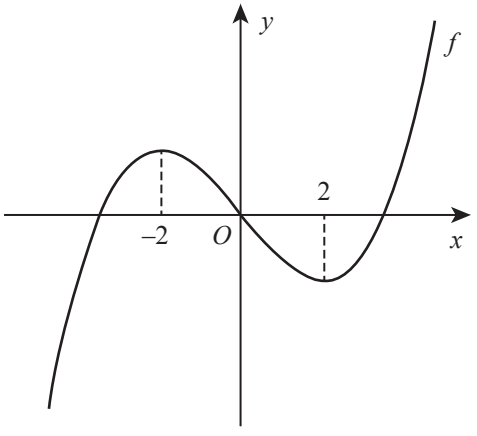


Figura 1

(A) $[-2, 0] \cup [2, +\infty[$ **(B)** $]-\infty, -2] \cup [0,2]$

(C) $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$ **(D)** $]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$

5. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$, tais que a função $f-g$ admite inversa.

Sabe-se que $f(3)=4$ e que $(f-g)^{-1}(2)=3$

Qual é o valor de $g(3)$?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

6. Considere, num referencial o.n. xOy, dois pontos distintos, R e S

Seja A o conjunto dos pontos P desse plano que verificam a condição $\overrightarrow{PR}.\overrightarrow{PS}=0$

($\overrightarrow{PR}.\overrightarrow{PS}$ designa o produto escalar de $\overrightarrow{PR}$ por $\overrightarrow{PS}$).

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) O conjunto A é a mediatriz do segmento de reta $[RS]$

(B) O conjunto A é o segmento de reta $[RS]$

(C) O conjunto A é o triângulo $[ROS]$

(D) O conjunto A é a circunferência de diâmetro $[RS]$

7. Na Figura 2, estão representados, no plano complexo, uma circunferência de centro na origem e dois diâmetros perpendiculares dessa circunferência, $[AC]$ e $[BD]$

Sabe-se que o ponto A é a imagem geométrica de um certo complexo z

Qual é a imagem geométrica do complexo i^3z ?

(A) Ponto A **(B)** Ponto B

(C) Ponto C **(D)** Ponto D

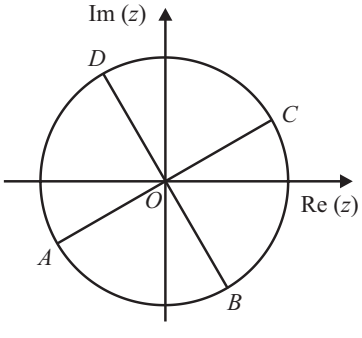


Figura 2

8. Seja (u_n) uma sucessão real em que todos os termos são positivos.

Sabe-se que, para todo o número natural n, $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A sucessão (u_n) é limitada.

(B) A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética.

(C) A sucessão (u_n) é crescente.

(D) A sucessão (u_n) é um infinitamente grande.

GRUPO II

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

- $z_1 = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\theta}$, com $\theta \in \left]\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{4}\right[$
- $w = \overline{z}_1 \times {z_1}^4$

Seja $A = \left\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 0 \ \wedge \ \mathrm{Im}(z) > 0 \ \wedge \ |z| = 1\right\}$

Justifique que o número complexo w pertence ao conjunto A

2. Considere duas caixas, C_1 e C_2. A caixa C_1 tem 12 bolas, das quais cinco são brancas e as restantes são pretas. A caixa C_2 tem sete bolas, umas brancas e outras pretas.

2.1. Considere a experiência que consiste em retirar, simultaneamente e ao acaso, duas bolas da caixa C_1, colocá-las na caixa C_2 e, em seguida, retirar, também ao acaso, uma bola da caixa C_2

Sejam A e B os acontecimentos:

A : «*As bolas retiradas da caixa C_1 têm a mesma cor.*»

B : «*A bola retirada da caixa C_2 é branca.*»

Sabe-se que $P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{2}{3}$

Interprete o significado de $P(B \mid \overline{A})$ e indique, justificando, quantas bolas brancas e quantas bolas pretas existiam inicialmente na caixa C_2

2.2. Considere agora a caixa C_1 com a sua constituição inicial (12 bolas, das quais cinco são brancas e sete são pretas).

Retira-se, ao acaso, uma bola dessa caixa, regista-se a sua cor e coloca-se novamente a bola na caixa. Repete-se esta experiência seis vezes.

Determine a probabilidade de, nessas seis vezes, sair bola branca, pelo menos, duas vezes.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3. Pretende-se eliminar um poluente diluído na água de um tanque de um viveiro. Para tal, é escoada água por um orifício na base do tanque e, em simultâneo, é vertida no tanque água não poluída, de tal modo que a quantidade total de água no tanque se mantém.

Admita que a massa, p, de poluente, medida em gramas, t horas após o início do processo, é, para um certo número real positivo k, dada por

$$p(t) = 120\, e^{-k\,t} \quad (t \geq 0)$$

Resolva os itens **3.1.** e **3.2.** recorrendo exclusivamente a métodos analíticos.
Na resolução do item **3.2.**, pode utilizar a calculadora para efetuar eventuais cálculos numéricos.

3.1. Determine o valor de k, sabendo que, duas horas após o início do processo, a massa de poluente é metade da existente ao fim de uma hora.

Apresente o resultado na forma $\ln a$, com $a > 1$

3.2. Admita agora que $k = 0{,}7$

Determine a taxa média de variação da função p no intervalo $[0, 3]$ e interprete o resultado obtido no contexto da situação descrita.

Apresente o valor da taxa média de variação arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

4. Seja f a função, de domínio $]1-\pi, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-2}{\operatorname{sen}(x-1)} & \text{se} \quad 1-\pi < x < 1 \\ 2 & \text{se} \quad x = 1 \\ e^{-2x+4} + \ln(x-1) & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Resolva os itens **4.1.** e **4.2.** recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4.1. Indique, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira ou é falsa.

«A função f é contínua à esquerda no ponto 1, mas não é contínua à direita nesse ponto.»

4.2. Escreva a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $1 - \frac{\pi}{2}$

4.3. O gráfico da função f tem um único ponto de inflexão, cuja abcissa pertence ao intervalo $]1, 2[$

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa desse ponto.

Na sua resposta:

- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver o problema;
- apresente a abcissa do ponto de inflexão arredondada às centésimas.

5. Na Figura 3, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cilindro de revolução de altura 3

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(1, 2, 0)$ e é o centro da base inferior do cilindro, a qual está contida no plano xOy
- o ponto B tem coordenadas $(1, 3, 0)$ e pertence à circunferência que delimita a base inferior do cilindro;
- o ponto C é o centro da base superior do cilindro.

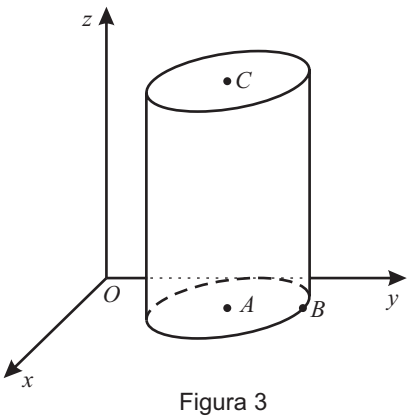


Figura 3

5.1. Determine a área da secção produzida no cilindro pelo plano de equação $x = 1$

5.2. Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta BC com o plano xOz

5.3. Seja α o plano que passa no ponto A e que é perpendicular à reta r definida pela condição $x = y = 1 - z$. Seja P o ponto desse plano de abcissa e ordenada iguais a 2

Determine a amplitude do ângulo POC

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

6. Na Figura 4, está representada, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro na origem e raio 1

Sabe-se que:

- o ponto A está no segundo quadrante e pertence à circunferência;
- o ponto D tem coordenadas $(1, 0)$
- o ponto C pertence ao primeiro quadrante e tem abcissa igual à do ponto D
- o ponto B pertence ao eixo Oy e é tal que o segmento de reta $[AB]$ é paralelo ao eixo Ox
- os ângulos AOC e COD são geometricamente iguais e cada um deles tem amplitude $\alpha \left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

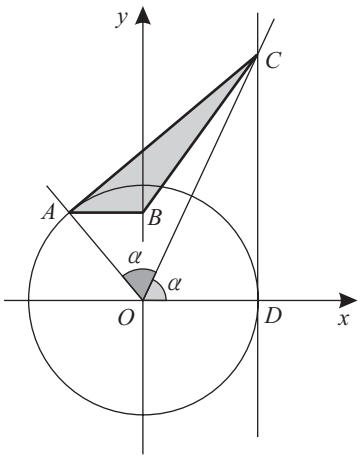


Figura 4

Mostre que a área do triângulo $[ABC]$, representado a sombreado, é dada por $\frac{\text{tg}\alpha \cos^2(2\alpha)}{2}$

FIM

COTAÇÕES

Grupo	Item												
	Cotação (em pontos)												
I	**1.** a **8.**												
	8 × 5 pontos												**40**
II	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	**6.**	
	15	15	15	15	15	15	15	15	5	10	15	10	**160**
TOTAL													**200**

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2017

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Critérios de Classificação

10 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de escolha múltipla.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Itens de seleção

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

Itens de construção

Nos itens de resposta restrita, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada de vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelo programa da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora gráfica», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. ..... (8 × 5 pontos)..... **40 pontos**

Chave:

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	C	B	B	A	B	D	D	A
Versão 2	B	A	D	C	C	A	D	C

GRUPO II

1. ..... **15 pontos**

Escrever $1-i$ na forma trigonométrica ..... 1 ponto

Escrever um argumento de z_1, em função de θ ..... 2 pontos

Escrever um argumento de $\overline{z}_1$, em função de θ ..... 2 pontos

Escrever um argumento de z_1^4, em função de θ ..... 2 pontos

Escrever um argumento de $\overline{z}_1 \times z_1^4$, em função de θ
$\left(\text{por exemplo, } \frac{5\pi}{4} - 3\theta\right)$ ..... 3 pontos

Justificar que w pertence ao conjunto A ..... 5 pontos

Escrever $\frac{\pi}{12} < \theta < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} < -3\theta < -\frac{\pi}{4}$ ..... 2 pontos

Escrever $-\frac{3\pi}{4} < -3\theta < -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{4} - 3\theta < \pi$ ..... 1 ponto

Concluir que $\overline{z}_1 \times z_1^4$ tem a sua imagem geométrica
no segundo quadrante ..... 1 ponto

Referir que $\left|\overline{z}_1 \times z_1^4\right| = 1$ ..... 1 ponto

2.1. ..... **15 pontos**

Apresentar o significado de $P\left(B \middle| \overline{A}\right)$ (É a probabilidade de se retirar uma bola branca da caixa C_2, sabendo que se retiraram duas bolas de cores diferentes da caixa C_1) ..... 5 pontos

Seja x o número de bolas brancas existentes inicialmente na caixa C_2

Referir que retirar duas bolas de cores diferentes da caixa C_1 significa retirar uma bola branca e uma bola preta ..... 1 ponto

Referir que a caixa C_2 passou a ter nove bolas ..... 1 ponto

Referir que a caixa C_2 passou a ter $x+1$ bolas brancas ..... 2 pontos

Escrever $\frac{x+1}{9}=\frac{2}{3}$ ..... 3 pontos

Obter o valor de x ..... 1 ponto

Indicar o número de bolas brancas e o número de bolas pretas existentes inicialmente na caixa C_2 (cinco bolas brancas e duas bolas pretas) ..... 2 pontos

2.2. ..... **15 pontos**

Determinar a probabilidade de, numa extração, sair bola branca ..... 1 ponto

Determinar a probabilidade de, numa extração, sair bola preta ..... 1 ponto

Escrever a expressão que dá a probabilidade de nunca sair bola branca ..... 4 pontos

Escrever a expressão que dá a probabilidade de sair uma única vez bola branca ..... 4 pontos

Escrever a expressão que dá a probabilidade pedida ..... 4 pontos

Obter a probabilidade pedida $(0,79)$ ..... 1 ponto

3.1. ..... **15 pontos**

Equacionar o problema $\left(120e^{-2k}=\frac{1}{2}\times 120e^{-k}\right.$ ou equivalente$\left.\right)$ ..... 5 pontos

Resolver a equação ..... 10 pontos

Escrever $120e^{-2k}=\frac{1}{2}\times 120e^{-k}\Leftrightarrow e^{-2k}=\frac{1}{2}e^{-k}$ ..... 1 ponto

Escrever $e^{-2k}=\frac{1}{2}e^{-k}\Leftrightarrow e^{-k}=\frac{1}{2}$ ..... 5 pontos

Escrever $e^{-k}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k=\ln 2$ ..... 4 pontos

3.2. ..... **15 pontos**

Escrever $tmv_{[0,3]}=\frac{p(3)-p(0)}{3-0}$ ..... 5 pontos

Obter o valor de $\frac{p(3)-p(0)}{3-0}$, com a aproximação pedida (-35) ..... 5 pontos

Interpretar o valor obtido no contexto da situação (Ao longo das três primeiras horas, a massa de poluente diluído na água diminuiu, em média, 35 gramas por hora.) ..... 5 pontos

4.1. ..... **15 pontos**

Estudar a continuidade da função f à esquerda no ponto 1 ..... 8 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x-2}{\operatorname{sen}(x-1)}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x-2}{\operatorname{sen}(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2(x-1)}{\operatorname{sen}(x-1)}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2(x-1)}{\operatorname{sen}(x-1)} \underset{y=x-1}{=} \lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{2y}{\operatorname{sen} y}$ (**ver nota**) ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{2y}{\operatorname{sen} y} = \lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{2}{\dfrac{\operatorname{sen} y}{y}}$ ..... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ (2) ..... 2 pontos

Concluir que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$ ..... 1 ponto

Concluir que f é contínua à esquerda no ponto 1 ..... 1 ponto

Estudar a continuidade da função f à direita no ponto 1 ..... 6 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(e^{-2x+4} + \ln(x-1)\right)$ ..... 1 ponto

Reconhecer que $x-1$ tende para zero, por valores positivos, quando x tende para 1, por valores superiores a 1 ..... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ $(-\infty)$ ..... 3 pontos

Concluir que f não é contínua à direita no ponto 1 ..... 1 ponto

Concluir que a afirmação é verdadeira ..... 1 ponto

Nota – Se for referido que $x\to 1^-$ é equivalente a $x-1\to 0^-$, esta etapa deve ser considerada cumprida.

4.2. ..... **15 pontos**

Identificar o declive da reta pedida com $f'\left(1-\dfrac{\pi}{2}\right)$ ..... 2 pontos

Determinar $f'\left(1-\dfrac{\pi}{2}\right)$ (**ver nota**) ..... 7 pontos

Obter uma expressão de $f'(x)$, em $]1-\pi, 1[$ ..... 4 pontos

Obter $f'\left(1-\dfrac{\pi}{2}\right)$ ..... 3 pontos

Calcular $f\left(1-\dfrac{\pi}{2}\right)$ ..... 2 pontos

Escrever a equação reduzida da reta pedida $(y=-2x+2)$ ..... 4 pontos

Nota – Se a resposta evidenciar a intenção de determinar a expressão da derivada da função, a pontuação mínima a atribuir a esta etapa é 1 ponto.

4.3. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Determinar $f'(x)$ ..... 3 pontos

Determinar $f''(x)$ ..... 4 pontos

Reproduzir o gráfico da função f'' no intervalo $]1,2[$ (**ver notas 1** e **2**) ..... 4 pontos

Determinar o zero da função f'' no intervalo $]1,2[$ $(1{,}23)$ ..... 4 pontos

2.º Processo

Determinar $f'(x)$ ..... 3 pontos

Reproduzir o gráfico da função f' no intervalo $]1,2[$ (**ver notas 2** e **3**) ..... 4 pontos

Determinar o minimizante de f' no intervalo $]1,2[$ $(1{,}23)$ ..... 8 pontos

Notas:

1. Se, na resposta, não for apresentado o cálculo de $f'(x)$ nem o cálculo de $f''(x)$, mas for apresentado o gráfico da função f'', as duas etapas anteriores são consideradas cumpridas.

2. Se, na resposta, não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

3. Se, na resposta, não for apresentado o cálculo de $f'(x)$, mas for apresentado o gráfico da função f', a etapa anterior é considerada cumprida.

5.1. ..... **5 pontos**

Identificar a secção pretendida ..... 1 ponto

Indicar as dimensões do retângulo ..... 2 pontos

Obter a área pedida (6) ..... 2 pontos

Nota – Se apenas for apresentada a igualdade $2 \times 3 = 6$, a classificação a atribuir à resposta é 5 pontos.

5.2. ..... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Determinar as coordenadas de um vetor diretor da reta BC ..... 2 pontos

Escrever a condição $x = 1 \wedge \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-3}{3}$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

Escrever o sistema $\begin{cases} x = 1 \\ \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-3}{3} \\ y = 0 \end{cases}$ ..... 3 pontos

Obter as coordenadas do ponto de intersecção $\left((1,0,9)\right)$ ..... 2 pontos

2.º Processo

Determinar as coordenadas de um vetor diretor da reta BC ..... 2 pontos

Escrever uma equação vetorial da reta BC
$\left((x,y,z)=(1,2,3)+k(0,-1,3),\quad k\in\mathbb{R}\right.$ ou outra equação vetorial equivalente$\left.\right)$ ..... 2 pontos

Escrever as coordenadas de um ponto genérico da reta BC, em função de k ..... 2 pontos

Obter uma equação na variável k ..... 1 ponto

Obter o valor de k ..... 1 ponto

Obter as coordenadas do ponto de intersecção da reta BC com o plano xOz
$\left((1,0,9)\right)$ ..... 2 pontos

5.3. ..... **15 pontos**

Indicar as coordenadas de um vetor diretor da reta r ..... 1 ponto

Obter uma equação do plano α ..... 2 pontos

Obter as coordenadas do ponto P ..... 2 pontos

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$ ..... 1 ponto

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OC}$ ..... 1 ponto

Calcular $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OC}$ ..... 2 pontos

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{OP}$ ..... 1 ponto

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{OC}$ ..... 1 ponto

Escrever a equação $9=3\times\sqrt{14}\times\cos P\widehat{O}C$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Obter a amplitude do ângulo POC (37°) ..... 2 pontos

6. ..... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever uma expressão que dê $\overline{AB}$, em função de α $\left(-\cos(2\alpha)\right)$ ..... 2 pontos

Escrever uma expressão que dê a altura do triângulo relativa à base $[AB]$, em função de α $\left(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{sen}(2\alpha)\right)$ ..... 2 pontos

Escrever a expressão $\frac{-\cos(2\alpha)\,\mathrm{tg}\,\alpha\left(1-\frac{2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right)}{2}$ ..... 2 pontos

Obter a expressão $\frac{\cos(2\alpha)\,\mathrm{tg}\,\alpha\,(2\cos^2\alpha-1)}{2}$ ..... 2 pontos

Obter a expressão $\frac{\cos(2\alpha)\,\mathrm{tg}\,\alpha\cos(2\alpha)}{2}$ ..... 1 ponto

Obter a expressão pretendida ..... 1 ponto

2.º Processo

Escrever uma expressão que dê $\overline{AB}$, em função de α $\left(-\cos(2\alpha)\right)$ ..... 2 pontos

Escrever uma expressão que dê a altura do triângulo relativa à base $[AB]$, em função de α $\left(\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{sen}(2\alpha)\right)$ ..... 2 pontos

Escrever a expressão $\frac{-\cos(2\alpha)\left(\frac{\mathrm{sen}\,\alpha-2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos^2\alpha}{\cos\alpha}\right)}{2}$ ..... 2 pontos

Obter a expressão $\frac{\cos(2\alpha)\left(\frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}(2\cos^2\alpha-1)\right)}{2}$ ..... 2 pontos

Obter a expressão $\frac{\cos(2\alpha)\,\mathrm{tg}\,\alpha\cos(2\alpha)}{2}$ ..... 1 ponto

Obter a expressão pretendida ..... 1 ponto

COTAÇÕES

Grupo	**Item**												
	Cotação (em pontos)												
I	**1.** a **8.**												
	8 × 5 pontos												**40**
II	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	**6.**	
	15	15	15	15	15	15	15	15	5	10	15	10	**160**
TOTAL													**200**

Exame final nacional de Matemática A **(2017, Época especial)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como o número a formar deve ser maior que 20 000, então para o algarismo das dezenas de milhar existem apenas 3 escolhas possíveis (2, 3 e 4).
   Para os restantes 4 posições do número existem 4 algarismos disponíveis (0 e 1 e os dois algarismos que não figuram na posição das dezenas de milhar), e como os algarismos devem ser todos diferentes, para as restantes 4 posições existem $P_4 = {}^4A_4 = 4!$ escolhas diferentes.

   Assim, nas condições do enunciado existem $3 \times 4! = 72$ números.

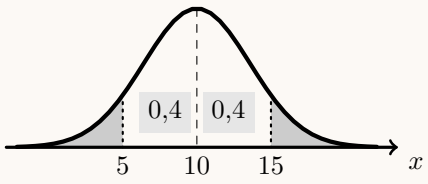
   Resposta: **Opção C**

2. Como a distribuição normal é simétrica em relação ao valor médio (10), temos que:

   $$P(\mu < X < \mu + k) = P(\mu - k < X < \mu)$$

   e assim:

   - $P(5 < X < 10) = P(10 < X < 15) = 0{,}4$
   - $P(5 < X < 15) = P(5 < X < 10) + P(10 < X < 15) = 0{,}4 + 0{,}4 = 0{,}8$
   - $P(X < 5 \vee X > 15) = 1 - P(5 < X < 15) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

   Resposta: **Opção B**

3. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que:

   $$4 + \log_a\left(5^{\ln a}\right) = 4 + \ln a \times (\log_a 5) = 4 + \frac{\log_a a}{\log_a e} \times (\log_a 5) = 4 + \frac{1 \times \log_a 5}{\log_a e} =$$

   $$= 4 + \frac{\log_a 5}{\log_a e} = 4 + \ln 5 = \ln\left(e^4\right) + \ln 5 = \ln(e^4 \times 5) = \ln(5e^4)$$

   Resposta: **Opção B**

4. Pela observação do gráfico e considerando os elementos do enunciado, podemos identificar os intervalos em que a função é decrescente e o intervalo em que é crescente e relacionar com o sinal da primeira derivada função.
Da mesma forma, podemos identificar os intervalos em que a função tem concavidades diferentes e relacionar com o sinal da segunda derivada.
Organizando as informações anteriores e estudando o sinal do produto $f'(x) \times f''(x)$, na mesma tabela, vem:

x	$-\infty$		-2		0		2	$+\infty$
$f(x)$	↗		Máx.	↘		↘	Min.	↗
$f'(x)$	$+$		0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	⌒			⌒	Pt. I.	⌒		
$f''(x)$	$-$		$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x) \times f''(x)$	$-$		0	$+$	0	$-$	0	$+$

E assim, temos que o conjunto solução da condição $f'(x) \times f''(x) \geq 0$, é $[-2,0] \cup [2, +\infty[$

Resposta: **Opção A**

5. Usando a definição de função inversa e depois de função diferença, como $f(3) = 4$, vem que:

$$(f-g)^{-1}(2) = 3 \Leftrightarrow (f-g)(3) = 2 \Leftrightarrow f(3) - g(3) = 2 \Leftrightarrow 4 - g(3) = 2 \Leftrightarrow 4 - 2 = g(3) \Leftrightarrow 2 = g(3)$$

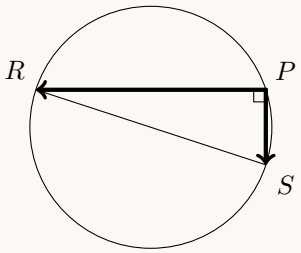
Resposta: **Opção B**

6. Como para qualquer ponto P da circunferência de diâmetro $[RS]$ o ângulo RPQ é reto, então para qualquer ponto P da circunferência, temos que:

$$\overrightarrow{PR} \,.\, \overrightarrow{PS} = 0$$

Temos ainda que:

- para qualquer ponto P no interior da circunferência o ângulo RPQ é obtuso, vem que $\overrightarrow{PR} \,.\, \overrightarrow{PS} > 0$
- para qualquer ponto P no exterior da circunferência o ângulo RPQ é agudo, vem que $\overrightarrow{PR} \,.\, \overrightarrow{PS} < 0$

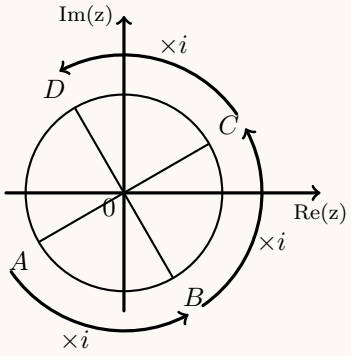


Desta forma, o conjunto A dos pontos P tais que $\overrightarrow{PR} \,.\, \overrightarrow{PS} = 0$, é a circunferência de diâmetro $[RS]$

Resposta: **Opção D**

7. Como a multiplicação de um número complexo por i corresponde a uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ rad da imagem geométrica desse número complexo, temos que:

- B é a imagem geométrica de iz
- C é a imagem geométrica de $i \times i \times z = i^2 z$
- D é a imagem geométrica de $i \times i \times i \times z = i^3 z$



Resposta: **Opção D**

8. Como todos os termos da sucessão são positivos, $u_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e assim, vem que:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0$$

Ou seja, a sucessão (u_n) é monótona decrescente, pelo que é limitada superiormente pelo primeiro termo e como todos os termos são positivos, então é limitada inferiormente por zero, isto é:

$$0 < u_n \leq u_1$$

Isto é, a sucessão (u_n) é limitada.

Resposta: **Opção A**

GRUPO II

1. Escrevendo $1 - i$ na f.t. temos $i - i = \rho \operatorname{cis} \alpha$, onde:

- $\rho = |i - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{-1}{1} = -1$; como $\operatorname{sen} \alpha < 0$ e $\cos \alpha > 0$, α é um ângulo do 4º quadrante, logo $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$

Logo $1 - i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$, e por isso:

$$z_1 = \frac{1-i}{\sqrt{2} \operatorname{cis} \theta} = \frac{\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2} \operatorname{cis} \theta} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4} - \theta\right)$$

Desta forma, temos que:

- Como $|\overline{w}| = |w|$ e $\operatorname{Arg}(\overline{w}) = -\operatorname{Arg}(w)$, então: $\overline{z_1} = \operatorname{cis} \left(-\left(-\dfrac{\pi}{4} - \theta\right)\right) = \operatorname{cis} \left(\dfrac{\pi}{4} + \theta\right)$
- $z_1^4 = 1^4 \operatorname{cis} \left(4 \times \left(-\dfrac{\pi}{4} - \theta\right)\right) = 1 \operatorname{cis} (-\pi - 4\theta) = \operatorname{cis} (-\pi - 4\theta)$

E assim, vem que:

$$w = \overline{z_1} \times z_1^4 = \left(\operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)\right) \times (\operatorname{cis} (-\pi - 4\theta)) = (1 \times 1) \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} + \theta + (-\pi - 4\theta)\right) =$$

$$= 1 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} + \theta - \pi - 4\theta\right) = \operatorname{cis} \left(-\frac{3\pi}{4} - 3\theta\right)$$

Pelo que, como $\theta \in \left]\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{4}\right[$, então:

$$\frac{\pi}{12} < \theta < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{12} > -3\theta > -\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{12} > -\frac{3\pi}{4} - 3\theta > -\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} > \operatorname{Arg}(w) > -\frac{6\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{4\pi}{4} > \operatorname{Arg}(w) > -\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{2} < \operatorname{Arg}(w) < -\pi$$

Ou seja, a imagem geométrica de w é um ponto do segundo quadrante, e assim temos que:

- $\operatorname{Re}(w) < 0$
- $\operatorname{Im}(w) > 0$
- $|w| = 1$

Ou seja, o número complexo w pertence ao conjunto A

2.

2.1. No contexto do problema $P\left(B|\overline{A}\right)$ é a probabilidade de retirar uma bola branca da caixa C_2 após terem sido lá colocadas duas bolas retiradas da caixa C_1 que não têm a mesma cor.
Como é sabido que ocorre o acontecimento $\overline{A}$, ou seja, que as bolas retiradas da caixa C_1 não têm a mesma cor, então duas as bolas retiradas da caixa C_1 são uma preta e uma branca.

Como a caixa C_2 tem sete bolas antes da realização da experiência, e serão colocadas nesta caixa 2 bolas, a caixa C_2 ficará com 9 bolas, ou seja o número de casos possíveis é 9, pelo que o número de casos favoráveis é 6, porque o valor da probabilidade é $\frac{2}{3}$:

$$P\left(B|\overline{A}\right) = \frac{2}{3} = \frac{2\times 3}{3\times 3} = \frac{6}{9}$$

Assim, o número de casos favoráveis é 6, ou seja, existem 6 bolas brancas na caixa C_2, num total de 9, ou seja, existem 3 bolas pretas na caixa C_2.

Como foram lá colocadas 1 bola preta e 1 bola branca, inicialmente,na caixa C_2 existiam:

- $6-1=5$ bolas brancas
- $3-1=2$ bolas pretas

2.2. Como a experiência se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades segue o modelo binomial $\left(P(X=k) = {}^{n}C_k\, p^k\, q^{n-k}\right)$.

Temos que:

- $n=6$ (repete-se esta experiência seis vezes).
- $p=\frac{5}{12}$ (a probabilidade do sucesso, ou seja «*Sair bola branca*» é $\frac{5}{12}$, porque existem 12 bolas na caixa das quais 5 são brancas)
- $q=\frac{7}{12}$, a probabilidade do insucesso pode ser calculada como $q=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$

Assim, calculando a probabilidade de sair bola branca, pelo menos, duas vezes, e arredondando o resultado às centésimas, temos:

$$P(X\geq 2) = 1-P(X<2) = 1-\left(P(X=0)+P(X=1)\right) =$$

$$= 1-\left({}^{6}C_0\left(\frac{5}{12}\right)^0\left(\frac{7}{12}\right)^6 + {}^{6}C_1\left(\frac{5}{12}\right)^1\left(\frac{7}{12}\right)^5\right) = 1-\left(\left(\frac{7}{12}\right)^6 + 6\times\frac{5}{12}\left(\frac{7}{12}\right)^5\right) \approx 0{,}79$$

3.

3.1. Como duas horas após o início do processo ($t=2$), a massa de poluente é metade da existente ao fim de uma hora ($t=1$), então temos que $p(2)=\frac{p(1)}{2}$

Assim, resolvendo a equação anterior e escrevendo o valor de k forma solicitada, vem:

$$p(2)=\frac{p(1)}{2} \Leftrightarrow 120\,e^{-k\times 2} = \frac{120\,e^{-k\times 1}}{2} \Leftrightarrow \frac{2\times 120}{120} = \frac{e^{-k}}{e^{-2k}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 = e^{-k-(-2k)} \Leftrightarrow 2 = e^{-k+2k} \Leftrightarrow 2 = e^{k} \Leftrightarrow k = \ln 2$$

3.2. Calculando as imagens dos objetos 0 e 3, temos:

$$p(0) = 120\,e^{-0,7\times 0} = 120\,e^{0} = 120 \times 1 = 120$$

$$p(3) = 120\,e^{-0,7\times 3} = 120\,e^{-2,1} \approx 14,69$$

E assim, calculando a taxa média de variação da função p no intervalo $[0,3]$ e apresentando o resultado arredondado às unidades, temos

$$TVM_{[0,3]} = \frac{p(3)-p(0)}{3-0} \approx \frac{14,69-120}{3} \approx \frac{-105,31}{3} \approx -35$$

No contexto da situação descrita, o valor da taxa média de variação significa que nas primeiras 3 horas do processo, a massa de poluente no tanque, decresceu, em média, 35 gramas por hora, aproximadamente.

4.

4.1. Para averiguar se a função f é contínua à esquerda no ponto de abcissa 1, temos que verificar se $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ e para averiguar se a função é contínua à direita no mesmo ponto , temos que verificar se $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

- $f(1) = 2$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x-2}{\operatorname{sen}(x-1)} = \dfrac{2(1^-)-2}{\operatorname{sen}(1^- -1)} = \dfrac{2-2}{\operatorname{sen} 0} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x-2}{\operatorname{sen}(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2(x-1)}{\operatorname{sen}(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2}{\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}} = \frac{\lim\limits_{x\to 1^-} 2}{\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}} =$$

(fazendo $y = x-1$, se $x \to 1^-$, então $y \to 0^-$)

$$= \frac{2}{\underbrace{\lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = \frac{2}{1} = 2$$

- $\lim\limits_{\substack{x\to 1^+ \\ -\infty}} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(e^{-2x+4} + \ln(x-1)\right) = e^{-2(1^+)+4} + \ln((1^+)-1) = e^2 + \ln(0^+) = e^2 + (-\infty) =$

A afirmação é verdadeira porque como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$, a função é contínua à esquerda do ponto de abcissa 1, e como $f(1) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ a função não é contínua à direita do mesmo ponto.

4.2. Para calcular o declive da reta tangente, começamos por determinar a expressão da derivada da função, para $x < 1$:

$$f'(x) = \left(\frac{2x-2}{\operatorname{sen}(x-1)}\right)' = \frac{(2x-2)'\operatorname{sen}(x-1) - (2x-2)(\operatorname{sen}(x-1))'}{(\operatorname{sen}(x-1))^2} =$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}(x-1) - (2x-2)(x-1)'\cos(x-1)}{\operatorname{sen}^2(x-1)} = \frac{2\operatorname{sen}(x-1) - (2x-2)\cos(x-1)}{\operatorname{sen}^2(x-1)}$$

Assim, temos que o declive da reta tangente no ponto de abcissa $1 - \frac{\pi}{2}$ é:

$$m = f'\left(1-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\operatorname{sen}(1-\frac{\pi}{2}-1) - (2\left(1-\frac{\pi}{2}\right)-2)\cos\left(1-\frac{\pi}{2}-1\right)}{\operatorname{sen}^2\left(1-\frac{\pi}{2}-1\right)} =$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2}) - (2-\frac{2\pi}{2}-2)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2(-1) - (-\frac{2\pi}{2})\times 0}{(-1)^2} = \frac{-2-0}{1} = -2$$

Logo a equação da reta tangente é da forma $y = -2x + b$

Como $f\left(1-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\left(1-\frac{\pi}{2}\right)-2}{\operatorname{sen}(1-\frac{\pi}{2}-1)} = \frac{2-\pi-2}{\operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2})} = \frac{-\pi}{-1} = \pi$, sabemos que o ponto $P\left(1-\frac{\pi}{2},\pi\right)$ pertence ao gráfico da função e também à reta tangente.
Assim, substituindo as coordenadas do ponto de tangência na equação da reta, podemos calcular o valor de b:

$$\pi = -2\left(1-\frac{\pi}{2}\right) + b \Leftrightarrow \pi = -2 + \pi + b \Leftrightarrow \pi - \pi + 2 = b \Leftrightarrow 2 = b$$

Assim, a equação da reta tangente é:

$$y = -2x + 2$$

4.3. Como a abcissa do ponto de inflexão é o zero da segunda derivada da função, começamos por determinar a expressão da segunda derivada, para $x > 1$:

$$f'(x) = \left(e^{-2x+4} + \ln(x-1)\right)' = \left(e^{-2x+4}\right)' + (\ln(x-1))' =$$

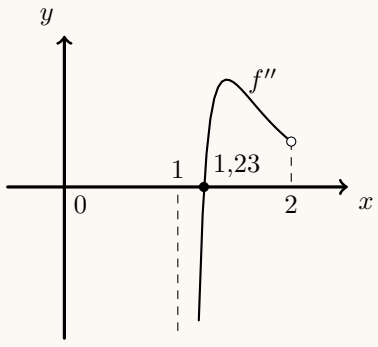
$$= (-2x+4)'e^{-2x+4} + \frac{(x-1)'}{x-1} = -2e^{-2x+4} + \frac{1}{x-1}$$

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(-2e^{-2x+4} + \frac{1}{x-1}\right)' = \left(-2e^{-2x+4}\right)' + \left(\frac{1}{x-1}\right)' =$$

$$= -2\left(e^{-2x+4}\right)' + \frac{(1)'(x-1) - 1\times(x-1)'}{(x-1)^2} = -2\times(-2x+4)'e^{-2x+4} + \frac{0\times(x-1) - 1\times 1}{(x-1)^2} =$$

$$= -2\times(-2)e^{-2x+4} + \frac{-1}{(x-1)^2} = 4e^{-2x+4} - \frac{1}{(x-1)^2}$$

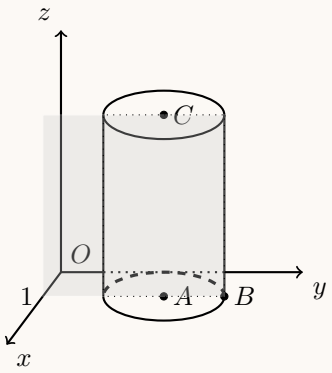
Representando na calculadora gráfica o gráfico da função f'', para valores de $x \in]1{,}2[$, (reproduzido na figura ao lado) e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados dos zeros de uma função determinamos o valor (aproximado às centésimas) do zero da função f'' (x_0), ou seja, a abcissa do ponto de inflexão do gráfico da função f: $x_0 \approx 1{,}23$



5.

5.1. Como os pontos A, B e C têm abcissa 1, todos pertencem ao plano de equação $x = 1$. Assim a secção produzida no cilindro pelo plano de equação $x = 1$, é o retângulo que contem estes pontos, ou seja o retângulo cujos lados são o diâmetro da base (2) e a altura (3) do cilindro, pelo que a sua área é:

$$A = 2 \times 3 = 6$$



5.2. Como a base inferior do cilindro está contida no plano xOy então os centros das duas bases têm abcissas e ordenadas iguais. Como a cota do centro A é zero e a altura é 3, então as coordenadas do ponto C são (1,2,3)
Assim, calculando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{BC}$, temos:

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (1,2,3) - (1,3,0) = (0, -1,3)$$

E assim, uma condição cartesiana que defina a reta com a direção do vetor $\overrightarrow{BC}$ e que contenha o ponto B, ou seja, a reta BC, é:

$$x = 1 \ \wedge \ \frac{y-3}{-1} = \frac{z-0}{3} \ \Leftrightarrow \ x = 1 \ \wedge \ -y + 3 = \frac{z}{3}$$

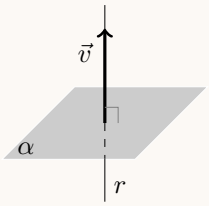
O ponto de intersecção da reta BC com o plano xOz é o ponto da reta BC que tem ordenada nula, como todos os restantes pontos do plano xOz.
Assim, substituindo $y = 0$ na condição que define a reta, podemos calcular o valor da cota do ponto de interseção:

$$x = 1 \ \vee \ -0 + 3 = \frac{z}{3} \ \Leftrightarrow \ x = 1 \ \wedge \ 3 \times 3 = z \ \Leftrightarrow \ x = 1 \ \wedge \ 9 = z$$

Ou seja as coordenadas do ponto de interseção da reta BC com o plano xOz são (1,0,9)

5.3. Pela da condição que define a reta r, podemos identificar o respetivo vetor diretor:

$$x = y = 1 - z \Leftrightarrow \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-1}{-1}$$



Assim, o vetor diretor da reta é o vetor $\vec{v} = (1,1,-1)$, e observando que se o plano é perpendicular à reta r então um vetor normal do plano é o vetor diretor da reta, e assim a equação do plano α é da forma: $x + y - z = d$

E recorrendo às coordenadas do ponto A que pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo estas coordenadas, na equação anterior:

$$1 + 2 - 0 = d \Leftrightarrow 3 = d$$

E assim, uma equação do plano α é $x + y - z = 3$

Como o ponto P pertence ao plano α e tem abcissa e ordenada iguais a 2, podemos calcular a cota:

$$2 + 2 - z_P = 3 \Leftrightarrow 4 - 3 = z_P \Leftrightarrow 1 = z_P$$

E assim, como as coordenadas do ponto P são $(2,2,1)$, podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$, e a sua norma:

$$\overrightarrow{OP} = P - O = (2,2,1) - (0,0,0) = (2,2,1)$$

$$\left\|\overrightarrow{OP}\right\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$$

Como as coordenadas do ponto C são $(1,2,3)$, podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OC}$, e a sua norma:

$$\overrightarrow{OC} = C - O = (1,2,3) - (0,0,0) = (1,2,3)$$

$$\left\|\overrightarrow{OC}\right\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

Recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos\left(\overrightarrow{OP}\,\overrightarrow{OC}\right) = \frac{\overrightarrow{OP} \,.\, \overrightarrow{OC}}{\left\|\overrightarrow{OP}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OC}\right\|} = \frac{(2,2,1).(1,2,3)}{3 \times \sqrt{14}} = \frac{2 + 4 + 3}{3\sqrt{14}} = \frac{9}{3\sqrt{14}} = \frac{3 \times 3}{3\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

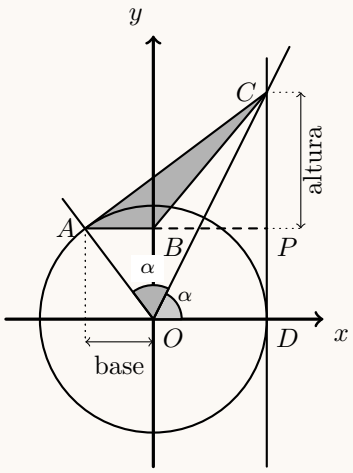
Logo, a amplitude do ângulo OPC, em graus, arredondado às unidades, é:

$$P\hat{O}C = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right) \approx 37^\circ$$

6. Como se trata de um círculo trigonométrico, o ponto A tem coordenadas $\big(\cos(2\alpha), \operatorname{sen}(2\alpha)\big)$, porque o segmento $[OA]$, define com o semieixo positivo Ox um ângulo de $\alpha + \alpha = 2\alpha$

   Considerando o ponto P como o ponto da reta CD com ordenada igual à do ponto A, temos que:

   - a base do triângulo é: $\overline{AB} = -\cos(2\alpha)$
   - a altura do triângulo é: $\overline{PC} = \overline{CD} - \overline{PD} = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{sen}(2\alpha)$

   Assim, calculando a área do triângulo vem:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{PC}}{2} = \frac{-\cos(2\alpha) \times \big(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{sen}(2\alpha)\big)}{2} =$$

$$= \frac{-\cos(2\alpha) \times \left(\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} - 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right)}{2} =$$

$$= \frac{-\cos(2\alpha) \times \left(\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{2\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha}{\cos\alpha}\right)}{2} =$$

$$= \frac{-\cos(2\alpha) \times \left(\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\,(1 - 2\cos^2\alpha)}{\cos\alpha}\right)}{2} = \frac{-\cos(2\alpha) \times \operatorname{tg}\alpha\,(1 - 2\cos^2\alpha)}{2} =$$

$$= \frac{\cos(2\alpha) \times \operatorname{tg}\alpha\big(-(1 - 2\cos^2\alpha)\big)}{2} = \frac{\cos(2\alpha) \times \operatorname{tg}\alpha\,(2\cos^2\alpha - 1)}{2} =$$

$$= \frac{\cos(2\alpha) \times \operatorname{tg}\alpha\,\big(2\cos^2\alpha - (\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)\big)}{2} = \frac{\cos(2\alpha) \times \operatorname{tg}\alpha\,(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)}{2} =$$

$$= \frac{\cos(2\alpha) \times \operatorname{tg}\alpha\big(\cos(2\alpha)\big)}{2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha\cos^2(2\alpha)}{2}$$

2018

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2018

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Caderno 1

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 7 Páginas

Caderno 1: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.
É permitido o uso de calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.

Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens de cada caderno encontram-se no final do respetivo caderno.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Nos termos da lei em vigor, as provas de avaliação externa são obras protegidas pelo Código do Direito de Autor e dos Direitos Conexos. A sua divulgação não suprime os direitos previstos na lei. Assim, é proibida a utilização destas provas, além do determinado na lei ou do permitido pelo IAVE, I.P., sendo expressamente vedada a sua exploração comercial.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr ($\alpha -$ amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r -$ raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ ($\alpha -$ amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r -$ raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ ($r -$ raio da base; $g -$ geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ ($r -$ raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ ($r -$ raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis}\theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis}\theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\ e^u$

$(a^u)' = u'\ a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 1.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 1.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

1.1. Na Figura 1, está representado um dado tetraédrico equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 4

Lança-se dez vezes esse dado e, em cada lançamento, regista-se o número da face que fica voltada para baixo.

Qual é a probabilidade, arredondada às milésimas, de sair exatamente seis vezes a face com o número 3 ?

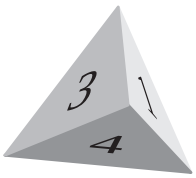


Figura 1

(A) $0{,}146$ **(B)** $0{,}016$ **(C)** $0{,}008$ **(D)** $0{,}007$

PMC2015

1.2. Seja f uma função diferenciável no intervalo $[0,2]$ tal que:

- $f(0)=1$
- $\forall x \in [0,2],\ 0 < f'(x) < 9$

O teorema de Lagrange, aplicado à função f em $[0,2]$, permite concluir que:

(A) $0 < f(2) < 18$

(B) $1 < f(2) < 19$

(C) $2 < f(2) < 20$

(D) $3 < f(2) < 21$

2. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma hexagonal regular.

Sabe-se que:

- $[PQ]$ e $[QR]$ são arestas de uma das bases do prisma;
- $\overline{PQ} = 4$

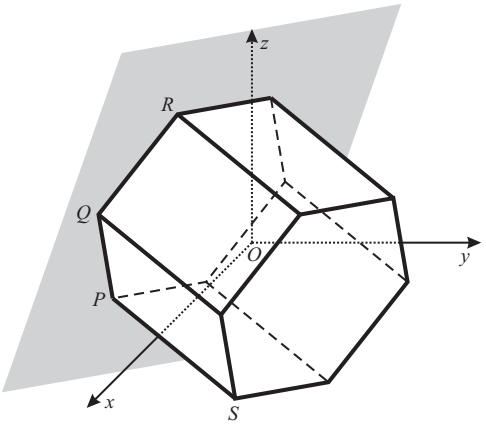


Figura 2

2.1. Determine o produto escalar $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR}$

2.2. Sabe-se ainda que:

- o plano PQR tem equação $2x + 3y - z - 15 = 0$
- uma das arestas laterais do prisma é o segmento de reta $[PS]$, em que S é o ponto de coordenadas $(14,5,0)$

Determine a área lateral do prisma.

Apresente o resultado arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2.3. Escolhem-se, ao acaso, dois vértices de cada uma das bases do prisma.

Determine a probabilidade de esses quatro pontos pertencerem a uma mesma face lateral do prisma.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

3. Uma escola dedica-se ao ensino de Espanhol e de Inglês, entre outras línguas.

3.1. Doze alunos dessa escola, quatro de Espanhol e oito de Inglês, dispõem-se lado a lado em linha reta para tirar uma fotografia.

De quantas maneiras se podem dispor os doze alunos, de modo que os alunos da mesma disciplina fiquem juntos?

(A) 40 320 **(B)** 80 640 **(C)** 967 680 **(D)** 1 935 360

3.2. Relativamente a essa escola, sabe-se que:

- o número de alunos que estudam Espanhol é igual ao número de alunos que estudam Inglês;
- o número de alunos que estudam, pelo menos, uma das duas línguas é o quádruplo do número de alunos que estudam as duas línguas.

Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa escola.

Determine a probabilidade de esse aluno estudar Inglês, sabendo que estuda Espanhol.

Apresente o resultado na forma de percentagem.

4. Um feixe de luz incide perpendicularmente sobre um conjunto de três placas sobrepostas, homogéneas e iguais, feitas de um material transparente. A Figura 3 ilustra a situação.

Admita que a potência, L, da luz transmitida, após atravessar o conjunto de placas, é dada por

$$L = I(1-R)^6 e^{-3\lambda}$$

em que:

- I é a potência da luz incidente;
- R é o coeficiente de reflexão do material $(0 < R < 1)$
- λ é o coeficiente de absorção do material, por centímetro $(\lambda > 0)$

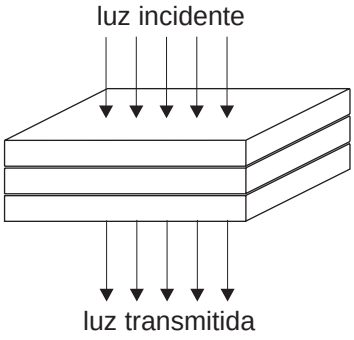


Figura 3

Relativamente ao material de que as placas são feitas, sabe-se que o coeficiente de reflexão, R, e o coeficiente de absorção, λ, têm o mesmo valor numérico.

Sabe-se ainda que a potência da luz transmitida é igual a metade da potência da luz incidente.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor comum dos coeficientes de absorção e de reflexão do material, sabendo-se que esse valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– equacione o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;

– apresente o valor pedido arredondado às milésimas.

5. Para um certo número real x, pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{12}\right[$, o número complexo $z = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^{10}$ verifica a condição $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{3}\operatorname{Re}(z)$

Qual é o valor de x arredondado às centésimas?

(A) $0{,}02$ **(B)** $0{,}03$ **(C)** $0{,}12$ **(D)** $0{,}13$

6. Seja a um número real.

Sabe-se que a, $a+6$ e $a+18$ são três termos consecutivos de uma progressão geométrica.

Relativamente a essa progressão geométrica, sabe-se ainda que a soma dos sete primeiros termos é igual a 381

Determine o primeiro termo dessa progressão.

7. Na Figura 4, está representada, num referencial o.n. xOy, uma circunferência de centro na origem e que passa nos pontos A, B, C, D, E e F

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox e tem abcissa igual a 2
- os pontos B e F têm ambos abcissa igual a 1
- os pontos C, D e E são, respetivamente, os simétricos dos pontos B, A e F relativamente ao eixo Oy

Qual das condições seguintes define o domínio plano representado a sombreado?

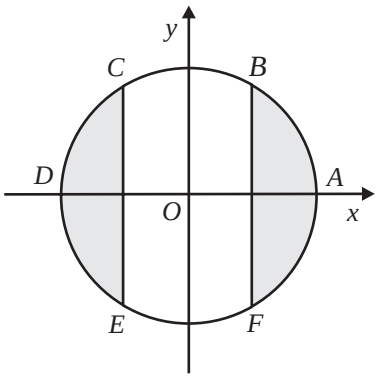


Figura 4

(A) $x^2 + y^2 \leq 2 \wedge |x| \geq 1$

(B) $x^2 + y^2 \leq 4 \wedge |x| \leq 1$

(C) $x^2 + y^2 \leq 4 \wedge |x| \geq 1$

(D) $x^2 + y^2 \leq 2 \wedge |x| \leq 1$

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item											
Cotação (em pontos)											
1.1.	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	
8		12	12	12	8	13	12	8	12	8	**105**

Prova 635

1.ª Fase

CADERNO 1

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2018

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Caderno 2

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 6 Páginas

Caderno 2: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.

Não é permitido o uso de calculadora.

8.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 8.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 8.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

8.1. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a reta r definida pela condição

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} \wedge z = 3$$

Qual das seguintes equações vetoriais define a reta r ?

(A) $(x,y,z) = (3,0,3) + k(2,-1,0)\,, \quad k \in \mathbb{R}$

(B) $(x,y,z) = (3,0,3) + k(2,-1,3)\,, \quad k \in \mathbb{R}$

(C) $(x,y,z) = (-1,2,0) + k(2,-1,3)\,, \quad k \in \mathbb{R}$

(D) $(x,y,z) = (-1,2,0) + k(2,-1,0)\,, \quad k \in \mathbb{R}$

PMC2015

8.2. Qual é o valor de $\operatorname{arcsen}(1) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$?

(A) $\frac{7\pi}{6}$ **(B)** $\frac{\pi}{6}$ **(C)** $\frac{3\pi}{4}$ **(D)** $\frac{\pi}{4}$

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w = 1 + \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}\,i^5}{1+2i}$

Sabe-se que w é uma raiz quarta de um certo complexo z

Determine a raiz quarta de z cujo afixo (imagem geométrica) pertence ao primeiro quadrante.

Apresente o resultado na forma trigonométrica, com argumento pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

10.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 10.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 10.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

10.1. Num saco, encontram-se quatro bolas indistinguíveis ao tato, numeradas de 0 a 3

Retiram-se, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas do saco.

Seja X a variável aleatória «produto dos números saídos».

Para um certo valor de k, tem-se que $P(X=k)=\frac{1}{2}$

Qual é o valor de k ?

(A) 6 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 0

PMC2015

10.2. Seja k um número real.

Considere a sucessão convergente (u_n) definida por $u_n=\left(\frac{n+k}{n}\right)^n$

Sabe-se que o limite de (u_n) é solução da equação $\ln\left(\frac{x}{e}\right)=3$

Qual é o valor de k ?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** 3 **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** 4

11. Sejam a e b números reais superiores a 1 tais que $\ln b=4\ln a$

Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $a^x \geq b^{\frac{1}{x}}$

Apresente a resposta usando a notação de intervalos de números reais.

12. Seja g a função, de domínio $]-\infty, \pi]$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x} - 1}{4x} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{1}{2 - \operatorname{sen}(2x)} & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

12.1. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A função g não tem zeros.

(B) A função g tem um único zero.

(C) A função g tem exatamente dois zeros.

(D) A função g tem exatamente três zeros.

12.2. Averigue se a função g é contínua no ponto 0

Justifique a sua resposta.

12.3. Estude a função g quanto à monotonia no intervalo $]0, \pi]$ e determine, caso existam, os extremos relativos.

13. Considere a função f definida em $]0, \pi[$ por $f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$

Qual das equações seguintes define uma assíntota do gráfico da função f ?

(A) $x = 0$ **(B)** $x = \pi$ **(C)** $x = 1$ **(D)** $x = \dfrac{\pi}{2}$

14. Na Figura 5, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função h, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = \frac{\ln x}{x}$

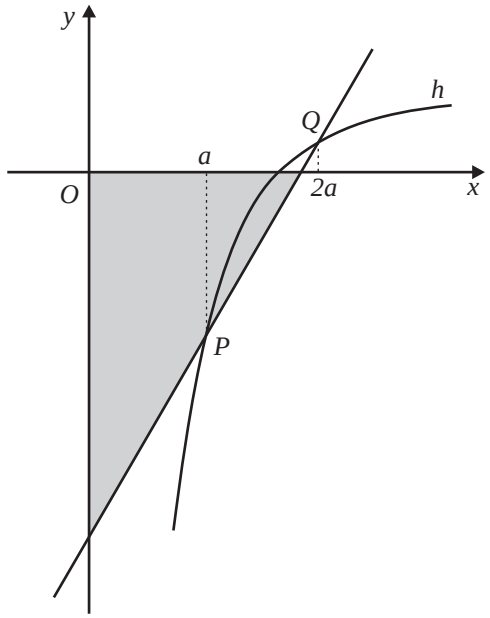


Figura 5

Para cada número real a pertencente ao intervalo $\left[\frac{1}{2},1\right]$, sejam P e Q os pontos do gráfico da função h de abcissas a e $2a$, respetivamente.

Tal como a figura sugere, a reta PQ define, com os eixos coordenados, um triângulo retângulo.

Mostre que existe, pelo menos, um número real a pertencente ao intervalo $\left[\frac{1}{2},1\right]$ para o qual esse triângulo é isósceles.

Sugestão: comece por identificar o valor do declive da reta PQ para o qual o triângulo é isósceles.

FIM

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item										
Cotação (em pontos)										
8.1.	**8.2.**	**9.**	**10.1.**	**10.2.**	**11.**	**12.1.**	**12.2.**	**12.3.**	**13.**	**14.**	
8		12	8		13	8	13	13	8	12	**95**

TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)	**200**

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 635

1.ª Fase

CADERNO 2

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2018

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Critérios de Classificação

11 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de resposta restrita, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à fórmula da probabilidade condicionada», «recorrendo à calculadora gráfica»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

Caderno 1

1.1. ..... **8 pontos**

Opção **(B)**

1.2. ..... **8 pontos**

Opção **(B)**

2.1. ..... **12 pontos**

Escrever $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = \| \overrightarrow{QP} \| \times \| \overrightarrow{QR} \| \times \cos\left(P\hat{Q}R\right)$ ..... 2 pontos

Reconhecer que $P\hat{Q}R = 120^\circ$ ..... 4 pontos

Reconhecer que $\| \overrightarrow{QP} \| = \| \overrightarrow{QR} \| = 4$ ..... 3 pontos

Obter o valor pedido (-8) ..... 3 pontos

2.2. ..... **12 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $(x,y,z) = (14,5,0) + k(2,3,-1),\ k \in \mathbb{R}$ ..... 2 pontos

Escrever as coordenadas de um ponto genérico da reta PS, em função de k ..... 2 pontos

Obter uma equação na variável k, substituindo x, y e z na equação do plano PQR pelas coordenadas de um ponto genérico da reta PS ..... 2 pontos

Obter o valor de k ..... 2 pontos

Determinar $\overline{PS}$ ..... 2 pontos

Obter a área lateral do prisma, com o arredondamento pedido $(179,6)$ ..... 2 pontos

2.º Processo

Escrever $\frac{x-14}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{-1}$ ..... 2 pontos

Escrever $\begin{cases} \frac{x-14}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{-1} \\ 2x + 3y - z - 15 = 0 \end{cases}$ ..... 2 pontos

Obter as coordenadas do ponto P ..... 4 pontos

Determinar $\overline{PS}$ ..... 2 pontos

Obter a área lateral do prisma, com o arredondamento pedido $(179,6)$ ..... 2 pontos

2.3. ..... **12 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Apresentar o número de casos possíveis: ${}^6C_2 \times {}^6C_2$ (**ver nota 1**) ..... 5 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis: 6 (**ver nota 2**) ..... 5 pontos

Obter a probabilidade pedida (**ver nota 3**) $(0{,}03)$ ..... 2 pontos

2.º Processo

Apresentar o número de casos possíveis: ${}^6A_2 \times {}^6A_2$ (**ver nota 1**) ..... 5 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis: $2 \times 6 \times 2$ (**ver nota 2**) ..... 5 pontos

Obter a probabilidade pedida (**ver nota 3**) $(0{,}03)$ ..... 2 pontos

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a ${}^6C_2 \times {}^6C_2$ (1.º processo de resolução) ou a ${}^6A_2 \times {}^6A_2$ (2.º processo de resolução), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

2. Se o número de casos favoráveis não for 6 (1.º processo de resolução) ou 24 (2.º processo de resolução), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

3. Se a etapa relativa ao número de casos possíveis e a etapa relativa ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. A mesma pontuação de 0 pontos deve ser atribuída caso o valor obtido não pertença ao intervalo $[0,1]$

3.1. ..... **8 pontos**

Opção **(D)**

3.2. ..... **13 pontos**

Designemos por E o acontecimento «o aluno escolhido estuda Espanhol» e por I o acontecimento «o aluno escolhido estuda Inglês».

Identificar o pedido com $P(I|E)$ ..... 2 pontos

Escrever $P(E) = P(I)$ ..... 2 pontos

Escrever $P(E \cup I) = 4P(E \cap I)$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

Obter $5P(E \cap I) = 2P(E)$ ..... 2 pontos

Escrever $P(I|E) = \dfrac{P(E \cap I)}{P(E)}$ ..... 1 ponto

Obter $P(I|E) = \dfrac{2}{5}$ ..... 2 pontos

Responder ao problema $(40\,\%)$ ..... 1 ponto

4. ..... **12 pontos**

Equacionar o problema $\left((1-\lambda)^6 e^{-3\lambda} = \frac{1}{2} \text{ ou equivalente}\right)$ ..... 6 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota**) ..... 3 pontos

Apresentar o valor pedido $(0{,}075)$ ..... 3 pontos

Nota – Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

5. ..... **8 pontos**

Opção **(B)**

6. ..... **12 pontos**

Reconhecer que a razão da progressão é dada, em função de a, por $\frac{a+6}{a}$ $\left(\text{ou por } \frac{a+18}{a+6}\right)$ ..... 3 pontos

Escrever $\frac{a+6}{a} = \frac{a+18}{a+6}$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Obter o valor de a ..... 2 pontos

Obter o valor da razão da progressão ..... 2 pontos

Escrever $381 = u_1 \times \frac{1-2^7}{1-2}$ ..... 1 ponto

Determinar o termo pedido (3) ..... 2 pontos

Nota – Se for apresentada apenas a condição $381 = u_1 \times \frac{1-\left(\frac{a+6}{a}\right)^7}{1-\frac{a+6}{a}}$ (ou equivalente),

a classificação máxima a atribuir à resposta é 4 pontos.

7. ..... **8 pontos**

Opção **(C)**

Caderno 2

8.1. ..... **8 pontos**

Opção **(A)**

8.2. ..... **8 pontos**

Opção **(A)**

9. ..... **12 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Identificar i^5 com i ..... 1 ponto

Obter $w = 1 - \sqrt{3}\, i$ ..... 4 pontos

Determinar $w \times i$ na forma algébrica ..... 3 pontos

Determinar o número complexo pedido na forma pedida $\left(2\text{cis}\frac{\pi}{6} \text{ ou } 2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$ .... 4 pontos

2.º Processo

Identificar i^5 com i ..... 1 ponto

Obter $w = 1 - \sqrt{3}\, i$ ..... 4 pontos

Escrever w na forma trigonométrica ..... 3 pontos

Determinar o número complexo pedido na forma pedida $\left(2\text{cis}\frac{\pi}{6} \text{ ou } 2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$ .... 4 pontos

10.1. ..... **8 pontos**

Opção **(D)**

10.2. ..... **8 pontos**

Opção **(D)**

11. ..... **13 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Obter $b = a^4$ ..... 2 pontos

Obter $a^x \geq a^{\frac{4}{x}}$ ..... 2 pontos

Concluir que $a^x \geq a^{\frac{4}{x}} \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{x}$ ..... 2 pontos

Resolver a condição $x \geq \frac{4}{x}$ (**ver nota**) ..... 7 pontos

Escrever $x \geq \frac{4}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x} \geq 0$ ..... 1 ponto

Apresentar um quadro de sinais ..... 4 pontos

Concluir que $x \in [-2, 0[\cup [2, +\infty[$ ..... 2 pontos

2.º Processo

Escrever $a^x \geq b^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \ln(a^x) \geq \ln\left(b^{\frac{1}{x}}\right)$ ..... 2 pontos

Escrever $\ln(a^x) \geq \ln\left(b^{\frac{1}{x}}\right) \Leftrightarrow x \ln a \geq \frac{1}{x} \ln b$ ..... 1 ponto

Escrever $x \ln a \geq \frac{1}{x} \ln b \Leftrightarrow x \ln a \geq \frac{1}{x} \times 4 \ln a$ ..... 2 pontos

Escrever $x \ln a \geq \frac{1}{x} \times 4 \ln a \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{x}$ ..... 1 ponto

Resolver a condição $x \geq \frac{4}{x}$ (**ver nota**) ..... 7 pontos

Escrever $x \geq \frac{4}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x} \geq 0$ ..... 1 ponto

Apresentar um quadro de sinais ..... 4 pontos

Concluir que $x \in [-2,0[\cup [2,+\infty[$ ..... 2 pontos

Nota – Se, erradamente, for considerada a equivalência $x \geq \frac{4}{x} \Leftrightarrow x^2 - 4 \geq 0$, a pontuação máxima a atribuir nesta etapa é 3 pontos.

12.1. ..... **8 pontos**

Opção **(A)**

12.2. ..... **13 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$ ..... 5 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{4x}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{4x} = \frac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{2x}$ ..... 2 pontos

Escrever $\frac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{2x} \underset{y = 2x}{=} \frac{1}{2} \lim\limits_{y \to 0^-} \frac{e^{y}-1}{y}$ ..... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \frac{1}{2}$ ..... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ ..... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{2 - \operatorname{sen}(2x)}$ ..... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \frac{1}{2}$ ..... 1 ponto

Obter $g(0) = \frac{1}{2}$ ..... 2 pontos

Justificar a continuidade da função g no ponto 0 («A função g é contínua no ponto 0, porque existe $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$» **OU** «A função g é contínua no ponto 0, porque $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = g(0)$») ..... 4 pontos

12.3. ..... **13 pontos**

Determinar $g'(x)$ em $]0,\pi]$ (**ver nota**) ..... 3 pontos

Escrever $g'(x)=0$ ..... 1 ponto

Obter os zeros de g' em $]0,\pi]$ ..... 3 pontos

Apresentar um quadro de sinal de g' e de monotonia de g em $]0,\pi]$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

Determinar $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $g\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ e $g(\pi)$ $\left(1, \frac{1}{3} \text{ e } \frac{1}{2}\right)$ ..... (1 + 1 + 1) ..... 3 pontos

Nota – Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

13. ..... **8 pontos**

Opção **(B)**

14. ..... **12 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Determinar o declive da reta PQ, em função de a $\left(\frac{\ln\frac{2}{a}}{2a^2} \text{ ou equivalente}\right)$. 2 pontos

Escrever $\frac{\ln\frac{2}{a}}{2a^2}=1$ ..... 2 pontos

Referir que a função f definida por $f(a)=\frac{\ln\frac{2}{a}}{2a^2}$ é contínua em $\left[\frac{1}{2},1\right]$ ..... 1 ponto

Determinar $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ..... 1 ponto

Justificar que $f\left(\frac{1}{2}\right)>1$ ..... 2 pontos

Determinar $f(1)$ ..... 1 ponto

Justificar que $f(1)<1$ ..... 2 pontos

Invocar o teorema de Bolzano-Cauchy (ou teorema de Bolzano) para concluir o pretendido ..... 1 ponto

2.º Processo

Determinar o declive da reta PQ, em função de a $\left(\frac{\ln\frac{2}{a}}{2a^2} \text{ ou equivalente}\right)$. 2 pontos

Determinar a equação reduzida da reta que passa nos pontos do gráfico de h de abcissas a e $2a$ ..... 1 ponto

Determinar a abcissa do ponto de intersecção da reta com o eixo Ox, em função de a ..... 1 ponto

Referir que a função g definida por $g(a) = b(a) + c(a)$ é contínua em $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, sendo $b(a)$ a ordenada na origem da reta, em função de a, e $c(a)$ a abcissa do ponto de intersecção da reta com o eixo Ox, em função de a ..... 1 ponto

Determinar $g\left(\frac{1}{2}\right)$ ..... 1 ponto

Justificar que $g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ ..... 2 pontos

Determinar $g(1)$ ..... 1 ponto

Justificar que $g(1) > 0$ ..... 2 pontos

Invocar o teorema de Bolzano-Cauchy (ou teorema de Bolzano) para concluir o pretendido ..... 1 ponto

COTAÇÕES

Item											
Cotação (em pontos)											
1.1.	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	
8		12	12	12	8	13	12	8	12	8	**105**
8.1.	**8.2.**	**9.**	**10.1.**	**10.2.**	**11.**	**12.1.**	**12.2.**	**12.3.**	**13.**	**14.**	
8		12	8		13	8	13	13	8	12	**95**
TOTAL											**200**

Exame final nacional de Matemática A **(2018, 1.ª fase)**

Proposta de resolução

Caderno 1

1.

1.1. Como a experiência se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades segue o modelo binomial $\left(P(X=k) = {}^{n}C_k\, p^k\, q^{n-k}\right)$.

Temos que:

- $n = 10$ (repete-se esta experiência dez vezes).
- $p = \frac{1}{4}$ (a probabilidade do sucesso, ou seja «*Sair face com o número 3*» é $\frac{1}{4}$, porque o dado tem quatro faces e apenas uma delas tem o número 3).
- $q = \frac{3}{4}$, a probabilidade do insucesso pode ser calculada como $q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Assim, calculando a probabilidade de sair face como o número 3 exatamente seis vezes, e arredondando o resultado às milésimas, temos:

$$P(X=6) = {}^{10}C_6 \left(\frac{1}{4}\right)^6 \left(\frac{3}{4}\right)^4 \approx 0{,}016$$

Resposta: **Opção B**

1.2. Como a função f é diferenciável no intervalo $[0,2]$ é contínua em no mesmo intervalo.
Assim, como $\forall x \in [0,2], 0 < f'(x) < 9$ e $f(0) = 1$ pelo Teorema de Lagrange, temos que:

$$0 < f'(x) < 9 \Leftrightarrow 0 < \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} < 9 \Leftrightarrow 0 < \frac{f(2) - 1}{2} < 9 \Leftrightarrow 0 \times 2 < \frac{f(2) - 1}{2} \times 2 < 9 \times 2 \Leftrightarrow$$

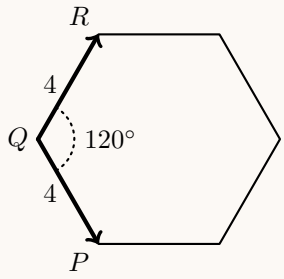
$$\Leftrightarrow 0 < f(2) - 1 < 18 \Leftrightarrow 0 + 1 < f(2) - 1 + 1 < 18 + 1 \Leftrightarrow 1 < f(2) < 19$$

Resposta: **Opção B**

2.

2.1. Como os segmentos de reta $[QP]$ e $[QR]$ são lados consecutivos de um hexágono regular de lado 4, então temos que:

$$\left\|\overrightarrow{QP}\right\| = \left\|\overrightarrow{QR}\right\| = 4$$



Como os hexágonos regulares podem ser decompostos em seis triângulos equiláteros, cada ângulo interno do hexágono regular tem o dobro da amplitude dos ângulos internos de um triângulo equilátero, ou seja,

$$\overrightarrow{BA}\widehat{\overrightarrow{BC}} = 2 \times 60 = 120°$$

Assim, vem que:

$$\overrightarrow{QP}.\overrightarrow{QR} = \cos\left(\overrightarrow{QP}\widehat{\overrightarrow{QR}}\right) \times \left\|\overrightarrow{QP}\right\| \times \left\|\overrightarrow{QR}\right\| = \cos(120°) \times 4 \times 4 = -\cos(60°) \times 16 = -\frac{1}{2} \times 16 = -\frac{16}{2} = -8$$

2.2. Como o plano PQR tem equação $2x + 3y - z - 15 = 0$, um vetor normal do plano é $\vec{u} = (2,3,-1)$
Como o prisma é regular então as arestas laterais são perpendiculares ao plano das bases, ou seja, a reta PS é perpendicular ao plano PQR, e assim, o vetor normal do plano da base é também um vetor diretor da reta PS, pelo que, considerando as coordenadas do ponto $S(14,5,0)$, temos que uma equação vetorial da reta PS é:

$$(x,y,z) = (14,5,0) + \lambda(2,3,-1), \lambda \in \mathbb{R}$$

Assim, as coordenadas de todos os pontos da reta PS, e em particular o ponto P, para $\lambda \in \mathbb{R}$, são da forma:

$$(x,y,z) = P + \lambda\vec{u} = (14,5,0) + \lambda(2,3,-1) = (14 + 2\lambda, 5 + 3\lambda, -\lambda)$$

Como o ponto P pertence ao plano PQR podemos determinar o valor de λ substituindo as coordenadas genéricas do ponto, na equação do plano:

$$2(14 + 2\lambda) + 3(5 + 3\lambda) - (-\lambda) - 15 = 0 \Leftrightarrow 28 + 4\lambda + 15 + 9\lambda + \lambda - 15 = 0 \Leftrightarrow 28 + 14\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14\lambda = -28 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-28}{14} \Leftrightarrow \lambda = -2$$

Desta forma temos que as coordenadas do ponto P são:

$$\big(14 + 2(-2), 5 + 3(-2), -(-2)\big) = (14 - 4, 5 - 6, 2) = (10, -1, 2)$$

Assim, calculado a distância entre os pontos P e S, temos:

$$\overline{PS} = \sqrt{(14-10)^2 + (5-(-1))^2 + (0-2)^2} = \sqrt{4^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 36 + 4} = \sqrt{56}$$

Assim, calculando a área lateral, ou seja, das 6 faces laterais, e arredondando o resultado às décimas, temos:

$$A_{\text{lateral}} = 6 \times \overline{PQ} \times \overline{PS} = 6 \times 4 \times \sqrt{56} = 24\sqrt{56} \approx 179,6$$

2.3. Como em cada uma das bases do prisma existem 6 vértices e são escolhidos 2, o número de escolhas possíveis em cada base é ${}^6C_2$, pelo que o número total de casos possíveis é ${}^6C_2 \times {}^6C_2$
O número de casos possíveis é 6, correspondente às 6 faces laterais do prisma, compostas por quatro vértices cada.

Assim, recorrendo à Regra de Laplace, calculando a probabilidade de selecionar 2 vértices de cada base e os quatro pontos pertencerem à mesma face lateral e arredondando o resultado às centésimas, temos:

$$p = \frac{6}{{}^6C_2 \times {}^6C_2} \approx 0,03$$

3.

3.1. Como existem 4 alunos de Espanhol, que devem ficar juntos na fotografia, existem $P_4 = {}^4A_4 = 4!$ formas de dispor os 4 alunos em 4 posições adjacentes.
Da mesma forma, como existem 8 alunos de Inglês, existem $P_8 = {}^8A_8 = 8!$ formas diferentes de os dispor em 8 posições adjacentes.
Como se pretende que os alunos da mesma disciplina fiquem juntos, independentemente da ordenação das disciplinas, existem 2 formas de colocar os dois grupos (o grupo de Espanhol na direita, ou na esquerda), e assim o número total de maneiras que se podem dispor os 12 alunos nas condições descritas, é:

$$4! \times 8! \times 2 = 1\,935\,360$$

Resposta: **Opção D**

3.2. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno da escola, e os acontecimentos:
I:«O aluno estudar Inglês»
E:«O aluno estudar Espanhol»
Temos que:

- como o número de alunos que estudam Espanhol e Inglês é igual, então $P(I) = P(E)$
- como a probabilidade de um aluno estudar pelo menos uma das duas línguas é dada por $P(I \cup E)$ e como a probabilidade de um aluno estudar as duas línguas é dada por $P(I \cap E)$, logo $P(I \cup E) = 4 \times P(I \cap E)$

Podemos ainda verificar que:

$$P(I \cup E) = P(I) + P(E) - P(I \cap E) \Leftrightarrow 4 \times P(I \cap E) = P(E) + P(E) - P(I \cap E) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \times P(I \cap E) + P(I \cap E) = 2 \times P(E) \Leftrightarrow 5 \times P(I \cap E) = 2 \times P(E) \Leftrightarrow P(I \cap E) = \frac{2}{5} \times P(E)$$

Desta forma, recorrendo à definição de probabilidade condicionada vem que a probabilidade, de um aluno estudar Inglês, sabendo que estuda Espanhol, é:

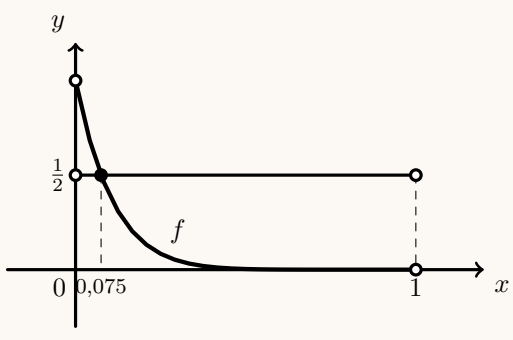
$$P(I|E) = \frac{P(I \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{2}{5} \times P(E)}{P(E)} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

O que corresponde a uma probabilidade de 40%

4. Como os coeficientes de reflexão, R, e o de absorção λ têm o mesmo valor numérico, temos que $R = \lambda$
Como a luz transmitida, L, é igual a metade da potência da luz incidente, I, temos que $L = \frac{I}{2}$
Assim, de acordo com as condições anteriores, temos que:

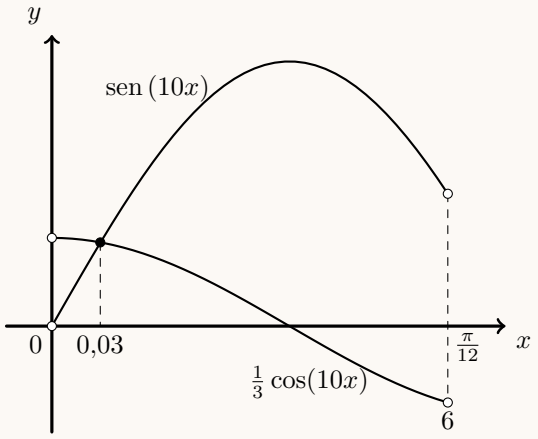
$$L = I(1-R)^6\, e^{-3\lambda} \Leftrightarrow \frac{I}{2} = I(1-\lambda)^6\, e^{-3\lambda} \Leftrightarrow \frac{I}{2I} = (1-\lambda)^6\, e^{-3\lambda} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = (1-\lambda)^6\, e^{-3\lambda}$$

Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função $f(x) = (1-x)^6\, e^{-3x}$, e a reta horizontal de equação $y = \frac{1}{2}$, para $0 < x < 1$ (porque $\lambda > 0$ e $R < 1$), reproduzido na figura ao lado, e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (às milésimas) da abcissa do ponto de interseção, ou seja, o valor comum aos coeficientes de absorção e reflexão do material: 0,075



5. Como $z = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^{10} = \left(e^{ix}\right)^{10} = e^{i \times 10x} = \cos(10x) + i \operatorname{sen}(10x)$, temos que $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{sen}(10x)$ e $\operatorname{Re}(z) = \cos(10x)$, pelo que o valor de $x \in \left]0, \frac{\pi}{12}\right[$ que verifica a condição $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{3}\operatorname{Re}(z)$ é a solução da equação $\operatorname{sen}(10x) = \frac{1}{3}\cos(10x)$ que pertence ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{12}\right[$

   Representando na calculadora gráfica os gráficos da funções $f(x) = \operatorname{sen}(10x)$ e $g(x) = \frac{1}{3}\cos(10x)$, para valores de $x \in \left]0, \frac{\pi}{12}\right[$, obtemos o gráfico se reproduz na figura ao lado.



   Recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados de um ponto de interseção de dois gráficos, determinamos o valor de x (arredondado às centésimas):

$$x \approx 0{,}03$$

   Resposta: **Opção B**

6. Como o quociente de termos consecutivos de uma progressão geométrica é constante e igual à razão (r), temos que:

$$\frac{a+18}{a+6} = r \text{ e também que } \frac{a+6}{a} = r$$

   Assim, igualando os quocientes e resolvendo a equação em ordem a a, vem:

$$\frac{a+18}{a+6} = \frac{a+6}{a} \underset{a \neq 0 \wedge a \neq -6}{\Leftrightarrow} a(a+18) = (a+6)^2 \Leftrightarrow a^2 + 18a = a^2 + 12a + 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 - a^2 + 18a - 12a = 36 \Leftrightarrow 6a = 36 \Leftrightarrow a = \frac{36}{6} \Leftrightarrow a = 6$$

   Assim, como $\frac{a+6}{a} = r$, temos que $r = \frac{6+6}{6} = \frac{12}{6} = 2$

   Desta forma, podemos calcular o primeiro termo da progressão, u_1, recorrendo à fórmula da soma dos 7 primeiros termos:

$$S_7 = u_1 \times \frac{1-r^7}{1-r} \Leftrightarrow 381 = u_1 \times \frac{1-2^7}{1-2} \Leftrightarrow 381 = u_1 \times \frac{1-128}{-1} \Leftrightarrow 381 = u_1 \times \frac{-127}{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 381 = u_1 \times 127 \Leftrightarrow \frac{381}{127} = u_1 \Leftrightarrow 3 = u_1$$

7. Analisando a figura podemos verificar que os pontos do plano que pertencem à zona representada a sombreado, são os pontos:

   - que pertencem ao interior da circunferência (ou à circunferência) de raio 2 e centro no ponto de coordenadas (0,0), ou seja, os pontos que satisfazem a condição:

   $$(x-0)^2+(y-0)^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 4$$

   - cuja abcissa é inferior a -1 ou superior a 1, ou seja, cuja distância ao eixo das ordenadas é superior a 1, pelo que verificam a condição:

   $$x \leq -1 \vee x \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1$$

   Como os pontos verificam cumulativamente as duas condições, a região sombreada é definida por:

   $$x^2+y^2 \leq 4 \wedge |x| \geq 1$$

   Resposta: **Opção C**

Caderno 2

8.

8.1. Pela observação da condição que define a reta r, podemos observar que um vetor diretor da reta é $\vec{u}=(2,-1,0)$
Podemos ainda verificar que um ponto que pertence à reta é o ponto de coordenadas $P(-1,2,3)$, pelo que podemos encontrar outro ponto (Q) que também pertence à reta, recorrendo ao vetor diretor:

$$Q=P+2\vec{u}=(-1,2,3)+2(2,-1,0)=(-1+4,2-2,3+0)=(3,0,3)$$

E assim temos que uma equação vetorial que define a reta r, é:

$$(x,y,z)=Q+k\vec{u},k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow (x,y,z)=(3,0,3)+k(2,-1,0),k\in\mathbb{Z}$$

Resposta: **Opção A**

8.2. Considerando que:

- $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, temos que $\text{arcsen}(1)=\frac{\pi}{2}$
- $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$, temos que $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$

E assim, vem que:

$$\text{arcsen}(1)+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi}{6}+\frac{4\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$$

Resposta: **Opção A**

9. Simplificando a expressão de w, como $i^5 = i^{4\times1+1} = i^1 = i$, temos que:

$$w = 1 + \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}\,i^5}{1+2i} = 1 + \frac{\left(2\sqrt{3} - \sqrt{3}\,i\right)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = 1 + \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}\,i - 4\sqrt{3}\,i + 2\sqrt{3}\,i^2}{1^2 - (2i)^2} =$$

$$= 1 + \frac{2\sqrt{3} - 5\sqrt{3}\,i + 2\sqrt{3}\times(-1)}{1-4i^2} = 1 + \frac{2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3}\,i}{1-4(-1)} = 1 + \frac{-5\sqrt{3}\,i}{1+4} = 1 + \frac{-5\sqrt{3}\,i}{5} = 1 - \sqrt{3}\,i$$

Escrevendo $1 - \sqrt{3}i$ na forma trigonométrica ($w = \rho e^{i\theta}$) temos:

- $\rho = |w| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$; como $\operatorname{sen}\theta < 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 4º quadrante, logo $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$

Assim $w = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$, e como w é uma raiz quarta de z, temos que:

$$z = w^4 = \left(2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\right)^4 = \left(2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\right)^4 = 2^4 e^{4\times i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = 16\,e^{i\left(-\frac{4\pi}{3}\right)}$$

Desta forma, as quatro raízes quartas de z, são: $\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16}\,e^{i\left(\frac{-\frac{4\pi}{3}}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right)}, k \in \{0,1,2,3\}$

E assim, para $k = 1$, obtemos a raiz quarta de z, cuja representação geométrica pertence ao primeiro quadrante:

$$\sqrt[4]{16}\,e^{i\left(\frac{-\frac{4\pi}{3}}{4} + \frac{2\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(-\frac{4\pi}{12} + \frac{2\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(-\frac{2\pi}{12} + \frac{6\pi}{12}\right)} = 2e^{i\left(\frac{4\pi}{12}\right)} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

10.

10.1. Organizando todos os produtos possíveis numa tabela, temos:

1ª bola \ 2ª bola	0	1	2	3
0	–	0	0	0
1	0	–	2	3
2	0	2	–	6
3	0	3	6	–

Assim podemos observar que os valores que a variável X pode assumir são $k = 0$, ou $k = 2$, ou $k = 6$
Pela observação da tabela temos que: $P(X = 0) = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$, pelo que $k = 0$

Resposta: **Opção D**

10.2. Resolvendo a equação, temos que:

$$\ln\left(\frac{x}{e}\right) = 3 \Leftrightarrow \ln x - \ln e = 3 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 3 \Leftrightarrow \ln x = 3 + 1 \Leftrightarrow \ln x = 4 \Leftrightarrow x = e^4$$

Por outro lado, calculando o limite da sucessão, vem:

$$\lim(u_n) = \lim\left(\frac{n+k}{n}\right)^n = \lim\left(\frac{n}{n} + \frac{k}{n}\right)^n = \lim\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$$

Assim, como a solução da equação é igual ao limite da sucessão, temos que:

$$e^k = e^4 \Leftrightarrow k = 4$$

Resposta: **Opção D**

11. Simplificando a igualdade, vem que:

$$\ln b = 4\ln a \Leftrightarrow \ln b = \ln\left(a^4\right) \Leftrightarrow b = a^4$$

E assim, resolvendo a inequação, temos:

$$a^x \geq b^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow a^x \geq \left(a^4\right)^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow a^x \geq a^{\frac{4}{x}} \underset{a>1}{\Leftrightarrow} x \geq \frac{4}{x} \Leftrightarrow x - \frac{4}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x} - \frac{4}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x} \geq 0$$

Determinando as soluções da equação $\frac{x^2-4}{x} = 0$, temos:

$$\frac{x^2-4}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

Estudando a variação do sinal de $\frac{x^2-4}{x}$, para $x \neq 0$, vem:

x	$-\infty$		-2		0		2	$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x^2-4}{x}$		$-$	0	$+$	n.d.	$-$	0	$+$

Assim, como $a^x \geq b^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x} > 0$, para $a > 1$, temos que o conjunto solução de $a^x \geq b^{\frac{1}{x}}$ é:

$$C.S. = [-2,0[\cup [2, +\infty[$$

12.

12.1. Resolvendo a equação $g(x) = 0$ vem:

- considerando $x < 0$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{4x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 0 \wedge 4x \neq 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \ln 1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow \underbrace{x = 0 \wedge x \neq 0}_{\text{Cond. Imp.}}$$

Ou seja, se $x < 0$ então $g(x) = 0$ é uma equação impossível (não tem soluções).

- considerando $0 \leq x \leq \pi$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2 - \operatorname{sen}(2x)} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{1 = 0}_{\text{Cond. Imp.}} \wedge 2 - \operatorname{sen}(2x) \neq 0$$

Logo, se $0 \leq x \leq \pi$ então $g(x) = 0$ também é uma equação impossível (não tem soluções).

Assim podemos concluir que a função g não tem zeros.

Resposta: **Opção A**

12.2. Para averiguar se a função g é contínua em $x=0$, temos que verificar se $g(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$

- $g(0)=\dfrac{1}{2-\operatorname{sen}(2\times 0)}=\dfrac{1}{2-\operatorname{sen}0}=\dfrac{1}{2-0}=\dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{2-\operatorname{sen}(2x)}\right)=\dfrac{1}{2-\operatorname{sen}(2\times 0)}=\dfrac{1}{2-\operatorname{sen}0}=\dfrac{1}{2-0}=\dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{e^{2x}-1}{4x}\right)=\dfrac{e^{2\times 0}-1}{4\times 0}=\dfrac{e^0-1}{0}=\dfrac{1-1}{0}=\dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

  (fazendo $y=2x$, temos que $4x=2y$ e se $x\to 0^-$, então $y\to 0^-$)

$$=\lim_{y\to 0^-}\left(\frac{e^y-1}{2y}\right)=\lim_{y\to 0^-}\left(\frac{1}{2}\times\frac{e^y-1}{y}\right)=\lim_{y\to 0^-}\frac{1}{2}\times\underbrace{\lim_{y\to 0^-}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{Lim. Notável}}=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

Como $g(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$, então a função g é contínua em $x=0$

12.3. Começamos por determinar a expressão da derivada da função g, no intervalo $]0,\pi]$:

$$g'(x) = \left(\frac{1}{2-\operatorname{sen}(2x)}\right)' = \frac{(1)' \times (2-\operatorname{sen}(2x)) - 1 \times (2-\operatorname{sen}(2x))'}{(2-\operatorname{sen}(2x))^2} =$$

$$= \frac{0 \times (2-\operatorname{sen}(2x)) - \left((2)' - (\operatorname{sen}(2x))'\right)}{(2-\operatorname{sen}(2x))^2} = \frac{0-(0-(2x)'\cos(2x))}{(2-\operatorname{sen}(2x))^2} =$$

$$= \frac{-(-2\cos(2x))}{(2-\operatorname{sen}(2x))^2} = \frac{2\cos(2x)}{(2-\operatorname{sen}(2x))^2}$$

Calculando os zeros da derivada, para $x \in]0,\pi]$, vem:

$$\frac{2\cos(2x)}{(2-\operatorname{sen}(2x))^2} = 0 \Leftrightarrow 2\cos(2x) = 0 \wedge \underbrace{(2-\operatorname{sen}(2x))^2 \neq 0}_{\text{Condição universal}} \Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Assim, temos que:

- para $k=-1$, $x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$ $\left(-\frac{\pi}{4} \notin]0,\pi]\right)$
- para $k=0$, $x = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$ $\left(\frac{\pi}{4} \in]0,\pi]\right)$
- para $k=1$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ $\left(\frac{3\pi}{4} \in]0,\pi]\right)$
- para $k=2$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ $\left(\frac{5\pi}{4} \notin]0,\pi]\right)$

Assim, temos que $g'(x)$ tem dois zeros em $]0,\pi]$ e estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$2\cos(2x)$	n.d.	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$(2-\operatorname{sen}(2x))^2$	n.d.	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$g'(x)$	n.d.	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$g(x)$	n.d.	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	min	$\nearrow$	Máx

Assim, podemos concluir que a função g, no intervalo $]0,\pi]$:

- é crescente no intervalo $\left]0,\frac{\pi}{4}\right]$ e no intervalo $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$;
- é decrescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$;
- tem um mínimo relativo para $x = \frac{3\pi}{4}$, cujo valor é:

$$g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2-\operatorname{sen}\left(2\times\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2-\operatorname{sen}\frac{6\pi}{4}} = \frac{1}{2-\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{2-(-1)} = \frac{1}{3}$$

- tem dois máximos relativos, para $x = \frac{\pi}{4}$ e para $x = \pi$, cujos valores são respetivamente:

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2-\operatorname{sen}\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2-\operatorname{sen}\frac{2\pi}{4}} = \frac{1}{2-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$g(\pi) = \frac{1}{2-\operatorname{sen}(2\times\pi)} = \frac{1}{2-\operatorname{sen}(2\pi)} = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$$

13. Sendo $D_f =]0,\pi[$, e a função f é contínua (porque é o quociente de funções contínuas), então como $1 \in D_f$ e $\frac{\pi}{2} \in D_f$, logo $x = 1$ e $x = \frac{\pi}{2}$ não são assíntotas verticais do gráfico de f

Averiguando se $x = 0$ e $x = \pi$ são assíntotas verticais do gráfico de f, temos:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0^+} 1}{\underbrace{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}} = \frac{1}{1} = 1$

  Logo, a reta definida pela equação $x = 0$ não é uma assíntota vertical do gráfico de f

- $\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \pi^-} \left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi^-} = \frac{\pi}{0^+} = +\infty$

  Logo, a reta definida pela equação $x = \pi$ é uma assíntota vertical do gráfico de f

Resposta: **Opção B**

14. Determinando as coordenadas dos pontos P e Q, em função de a são, respetivamente $P\big(a,h(a)\big) = P\left(a,\frac{\ln a}{a}\right)$ e $Q\big(2a,h(2a)\big) = Q\left(2a,\frac{\ln(2a)}{2a}\right)$, temos que o declive da reta PQ é dado por:

$$m_{PQ} = \frac{\frac{\ln(2a)}{2a} - \frac{\ln a}{a}}{2a - a} = \frac{\frac{\ln(2a)}{2a} - \frac{2\ln a}{2a}}{a} = \frac{\frac{\ln(2a) - 2\ln a}{2a}}{a} = \frac{\ln(2a) - \ln\left(a^2\right)}{2a^2} = \frac{\ln\left(\frac{2a}{a^2}\right)}{2a^2} = \frac{\ln\left(\frac{2}{a}\right)}{2a^2}$$

De acordo com a sugestão, o triângulo da figura é isósceles quando a reta PQ é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares, ou seja, se tem declive igual a 1.

Assim, o triângulo é isósceles se: $m_{PQ} = 1 \Leftrightarrow \frac{\ln\left(\frac{2}{a}\right)}{2a^2} = 1$

Desta forma, provar que existe pelo menos um valor de $a \in \left[\frac{1}{2},1\right]$ a que corresponde um triângulo isósceles, é equivalente a mostrar que, dada a função $f(x) = \frac{\ln\left(\frac{2}{x}\right)}{2x^2}$, definida em $\left[\frac{1}{2},1\right]$, existe $a \in \left[\frac{1}{2},1\right]$, tal que $f(a) = 1$

Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\left[\frac{1}{2},1\right]$, é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

Como $\frac{\ln 2}{2} < 1 < 2\ln 4$, ou seja, $f(1) < 1 < f\left(\frac{1}{2}\right)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $a \in \left]\frac{1}{2},1\right[$ tal que $f(a) = 1$.

C.A.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln\left(\frac{2}{\frac{1}{2}}\right)}{2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\ln 4}{2 \times \frac{1}{4}} = \frac{\ln 4}{\frac{1}{2}} = 2\ln 4$$

Como $e < 4^2$, vem:

$e < 4^2 \Leftrightarrow \ln e < \ln(4^2) \Leftrightarrow \ln e < 2\ln(4) \Leftrightarrow 1 < 2\ln(4)$

Ou seja: $1 < f\left(\frac{1}{2}\right)$

$$f(1) = \frac{\ln\left(\frac{2}{1}\right)}{2 \times 1^2} = \frac{\ln 2}{2}$$

Logo, como $2 < e^2$, vem:

$$2 < e^2 \Leftrightarrow \ln 2 < \ln(e^2) \Leftrightarrow \ln 2 < 2\ln e \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} < \frac{2\ln e}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} < \frac{2 \times 1}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} < 1$$

Ou seja: $f(1) < 1$

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2018

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Caderno 1

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 7 Páginas

Caderno 1: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.
É permitido o uso de calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.

Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens de cada caderno encontram-se no final do respetivo caderno.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Nos termos da lei em vigor, as provas de avaliação externa são obras protegidas pelo Código do Direito de Autor e dos Direitos Conexos. A sua divulgação não suprime os direitos previstos na lei. Assim, é proibida a utilização destas provas, além do determinado na lei ou do permitido pelo IAVE, I.P., sendo expressamente vedada a sua exploração comercial.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr ($\alpha -$ amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r -$ raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ ($\alpha -$ amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r -$ raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ ($r -$ raio da base; $g -$ geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ ($r -$ raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ ($r -$ raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis}\theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis}\theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\ e^u$

$(a^u)' = u'\ a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 1.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 1.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

1.1. Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio μ e desvio padrão σ

Qual é o valor, arredondado às milésimas, de $P(X > \mu - 2\sigma)$?

(A) $0{,}926$ **(B)** $0{,}982$ **(C)** $0{,}977$ **(D)** $0{,}943$

PMC2015

1.2. Na Figura 1, está representado um triângulo $[ABC]$

Sabe-se que:

- $\overline{AC} = 5$
- $B\hat{A}C = 57^\circ$
- $A\hat{B}C = 81^\circ$

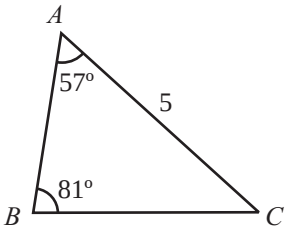


Figura 1

Qual é o valor de $\overline{AB}$, arredondado às centésimas ?

(A) $3{,}31$ **(B)** $3{,}35$ **(C)** $3{,}39$ **(D)** $3{,}43$

2. Num clube desportivo, praticam-se as modalidades de basquetebol e futebol, entre outras.

Sabe-se que, escolhido ao acaso um atleta deste clube, a probabilidade de ele praticar basquetebol é $\frac{1}{5}$ e a probabilidade de ele praticar futebol é $\frac{2}{5}$

Sabe-se ainda que, dos atletas que não praticam futebol, 3 em cada 4 não praticam basquetebol.

Mostre que existe, pelo menos, um atleta do clube que pratica as duas modalidades desportivas.

3. Dispõe-se de catorze caracteres (a saber: os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e as vogais a, e, i, o, u) para formar códigos de quatro caracteres.

3.1. Quantos códigos iniciados por uma vogal seguida de três algarismos diferentes se podem formar?

(A) 420 **(B)** 504 **(C)** 1840 **(D)** 2520

3.2. Escolhe-se, ao acaso, um código de entre todos os códigos de quatro caracteres, repetidos ou não, que é possível formar com os catorze caracteres.

Determine a probabilidade de esse código ser constituído por quatro algarismos diferentes cujo produto seja um número ímpar.

Apresente o resultado arredondado às milésimas.

4. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica de equação

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=10$$

4.1. Seja P o ponto da superfície esférica de abcissa 1, ordenada 3 e cota negativa.

Seja r a reta de equação vetorial $(x,y,z)=(-1,0,3)+k(4,1,-2),\ k\in\mathbb{R}$

Determine uma equação do plano que passa no ponto P e é perpendicular à reta r

Apresente essa equação na forma $ax+by+cz+d=0$

4.2. Seja C o centro da superfície esférica e seja A o simétrico do ponto C relativamente ao plano xOy

Determine a amplitude do ângulo AOC

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

5. O planeta Mercúrio descreve uma órbita elíptica em torno do Sol. Na Figura 2, está representado um esquema de uma parte dessa órbita.

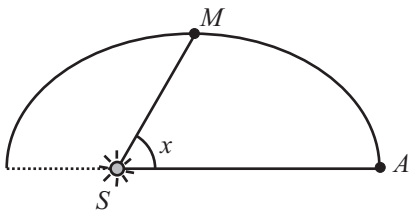


Figura 2

Relativamente a esta figura, tem-se que:

- o ponto S representa o Sol;
- o ponto M representa o planeta Mercúrio;
- o ponto A representa o afélio, que é o ponto da órbita mais afastado do Sol;
- x é a amplitude do ângulo ASM, compreendida entre 0 e 180 graus.

Admita que a distância, d, em milhões de quilómetros, do planeta Mercúrio ao Sol é dada, em função de x, por

$$d = \frac{555}{10 - 2{,}06\cos x}$$

Seja α a amplitude do ângulo ASM, num certo instante (α está compreendido entre 0 e 20 graus). Nesse instante, o planeta Mercúrio encontra-se a uma certa distância do Sol.

Passado algum tempo, a amplitude do ângulo ASM é três vezes maior e a distância do planeta Mercúrio ao Sol diminuiu 3%.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de α, sabendo-se que esse valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– equacione o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;

– apresente o valor de α em graus, arredondado às unidades.

6. A primeira derivada de uma função f, de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, é dada por $f'(x) = 3x - \operatorname{tg} x$

Sabe-se que o gráfico de f tem um único ponto de inflexão.

Qual é a abcissa desse ponto, arredondada às centésimas?

(A) $0{,}84$ **(B)** $0{,}88$ **(C)** $0{,}92$ **(D)** $0{,}96$

7. De uma progressão aritmética (u_n) sabe-se que o terceiro termo é igual a 4 e que a soma dos doze primeiros termos é igual a 174

Averigue se 5371 é termo da sucessão (u_n)

8. Na Figura 3, está representado, no plano complexo, um pentágono regular $[ABCDE]$ inscrito numa circunferência de centro na origem e raio 1

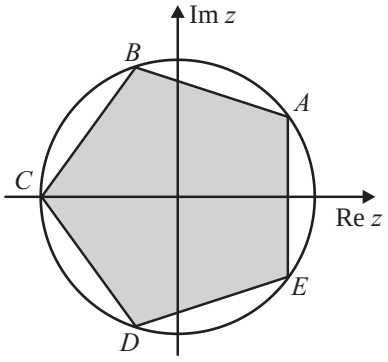


Figura 3

Sabe-se que o ponto C pertence ao semieixo real negativo.

Seja z o número complexo cujo afixo (imagem geométrica) é o ponto A

Qual é o valor de z^5 ?

(A) -1 **(B)** 1 **(C)** i **(D)** $-i$

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item											
Cotação (em pontos)											
1.1.	**1.2.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	
8		12	8	12	12	13	12	8	12	8	**105**

Prova 635

2.ª Fase

CADERNO 1

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2018

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Caderno 2

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 5 Páginas

Caderno 2: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.

Não é permitido o uso de calculadora.

9.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 9.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 9.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

9.1. Num dado problema de Programação Linear, pretende-se determinar o valor máximo que a função objetivo, definida por $L = 3x + 5y$, pode alcançar.

Sabe-se que a região admissível é definida pelo seguinte sistema.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 10 \\ x \leq 5 \end{cases}$$

Qual é esse valor máximo?

(A) 56 **(B)** 50 **(C)** 40 **(D)** 36

PMC2015

9.2. Considere, num referencial o.n. xOy, uma elipse centrada na origem do referencial e de focos F_1 e F_2 pertencentes ao eixo Ox

Sabe-se que:

- $\overline{F_1F_2} = 12$
- sendo P um ponto qualquer da elipse, tem-se $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 20$

Qual é a equação reduzida desta elipse?

(A) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$ **(B)** $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

(C) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ **(D)** $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$

10. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \frac{(2-i)^2 + 1 + i}{1 - 2i} + 3i^{15}$

Escreva o complexo $-\frac{1}{2} \times \overline{z}$ na forma trigonométrica.

11. Considere, num referencial o.n. xOy, a circunferência centrada na origem do referencial e que passa no ponto $A(2,1)$

Seja r a reta tangente à circunferência no ponto A

Qual é a ordenada na origem da reta r ?

(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 7

12.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 12.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 12.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

12.1. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os planos α, β e γ definidos pelas equações $y = -x$, $y = z$ e $2x + 3y - z - 1 = 0$, respetivamente.

A intersecção dos planos α, β e γ é

(A) um ponto. **(B)** uma reta. **(C)** um plano. **(D)** o conjunto vazio.

PMC2015

12.2. Qual é o valor do limite da sucessão de termo geral $\left(\frac{n+5}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$?

(A) $+\infty$ **(B)** 1 **(C)** e^4 **(D)** e^2

13. Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação

$$\log_2(x+1) \leq 3 - \log_2(8-x)$$

Apresente a resposta usando a notação de intervalos de números reais.

14. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 + \dfrac{e^x}{1-x} & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{\ln(x^2)+2}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

14.1. Determine $f'(0)$, recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto.

14.2. Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais do seu gráfico.

14.3. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = x + 1$

Qual é o valor de $(f \circ h^{-1})(2)$?

(o símbolo $\circ$ designa a composição de funções)

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3

15. Seja g a função, de domínio $[0, \pi]$, definida por $g(x) = 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$

Seja r a reta tangente ao gráfico da função g que tem declive máximo.

Determine o declive da reta r

Apresente a sua resposta na forma $\dfrac{a\sqrt{b}}{c}$, com a, b e c números naturais.

FIM

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item											
Cotação (em pontos)											
9.1.	**9.2.**	**10.**	**11.**	**12.1.**	**12.2.**	**13.**	**14.1.**	**14.2.**	**14.3.**	**15.**	
8		12	8	8		13	13	13	8	12	**95**

TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)	**200**

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 635

2.ª Fase

CADERNO 2

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2018

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Critérios de Classificação

12 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de resposta restrita, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à fórmula da probabilidade condicionada», «recorrendo à calculadora gráfica»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

Caderno 1

1.1. ..... **8 pontos**

Opção **(C)**

1.2. ..... **8 pontos**

Opção **(C)**

2. ..... **12 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, quatro processos.

1.º Processo

Seja B o acontecimento «o atleta escolhido pratica basquetebol», e seja F o acontecimento «o atleta escolhido pratica futebol».

Escrever $P(B)=\frac{1}{5}$ ..... 1 ponto

Escrever $P(F)=\frac{2}{5}$ ..... 1 ponto

Escrever $P\left(\overline{B}\,|\,\overline{F}\right)=\frac{3}{4}$ ..... 2 pontos

Escrever $P\left(\overline{B}\,|\,\overline{F}\right)=\frac{P\left(\overline{B}\cap\overline{F}\right)}{P\left(\overline{F}\right)}$ ..... 1 ponto

Determinar $P\left(\overline{B}\cap\overline{F}\right)$ ..... 2 pontos

Determinar $P(B\cup F)$ ..... 2 pontos

Determinar $P(B\cap F)$ ..... 2 pontos

Justificar o pretendido (Como $P(B\cap F)\neq 0$, conclui-se que existe, pelo menos, um atleta do clube que pratica as duas modalidades) (**ver nota**) ..... 1 ponto

2.º Processo

Seja B o acontecimento «o atleta escolhido pratica basquetebol», e seja F o acontecimento «o atleta escolhido pratica futebol».

Escrever $P(B)=\frac{1}{5}$ ..... 1 ponto

Escrever $P(F)=\frac{2}{5}$ ..... 1 ponto

Escrever $P\left(\overline{B}\,|\,\overline{F}\right)=\frac{3}{4}$ ..... 2 pontos

Obter $P\left(B\,|\,\overline{F}\right)=\frac{1}{4}$ ..... 1 ponto

Escrever $P(B|\overline{F}) = \dfrac{P(B \cap \overline{F})}{P(\overline{F})}$ ..... 1 ponto

Determinar $P(B \cap \overline{F})$ ..... 2 pontos

Determinar $P(B \cap F)$ ..... 3 pontos

Justificar o pretendido (Como $P(B \cap F) \neq 0$, conclui-se que existe, pelo menos, um atleta do clube que pratica as duas modalidades) (**ver nota**) ..... 1 ponto

3.º Processo

Construir uma tabela de dupla entrada cujas entradas sejam «pratica basquetebol, não pratica basquetebol» e «pratica futebol, não pratica futebol» ..... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa à informação «$\frac{1}{5}$ dos atletas pratica basquetebol» ..... 2 pontos

Preencher a célula da tabela relativa à informação «$\frac{2}{5}$ dos atletas praticam futebol» ..... 2 pontos

Preencher a célula da tabela relativa à probabilidade de um atleta não praticar futebol ..... 1 ponto

Utilizar a informação «dos atletas que não praticam futebol, 3 em cada 4 não praticam basquetebol» para determinar a probabilidade de o atleta não praticar basquetebol nem futebol, e escrever o valor obtido na célula respetiva ... 3 pontos

Preencher as restantes células que permitem resolver o problema ..... 2 pontos

Justificar o pretendido (Como $P(B \cap F) \neq 0$, conclui-se que existe, pelo menos, um atleta do clube que pratica as duas modalidades) (**ver nota**) ..... 1 ponto

4.º Processo

Construir um diagrama em árvore de cuja raiz saem os ramos «pratica futebol» e «não pratica futebol» e, de cada um destes, saem dois novos ramos, «pratica basquetebol» e «não pratica basquetebol» ..... 1 ponto

Escrever $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{5}$ nos respetivos ramos ..... 2 pontos

Escrever $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{4}$ nos respetivos ramos ..... 3 pontos

Calcular a probabilidade de um atleta não praticar futebol, mas praticar basquetebol

OU

Calcular a probabilidade de um atleta não praticar futebol nem basquetebol ..... 2 pontos

Calcular a probabilidade de um atleta praticar futebol e praticar basquetebol ..... 3 pontos

Justificar o pretendido (Como $P(B \cap F) \neq 0$, conclui-se que existe, pelo menos, um atleta do clube que pratica as duas modalidades) (**ver nota**) ..... 1 ponto

Nota – Se o valor obtido para $P(B \cap F)$ não pertencer ao intervalo $]0,1]$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

3.1. ..... **8 pontos**

Opção **(D)**

3.2. ..... **12 pontos**

Apresentar o número de casos possíveis: ${}^{14}A'_4$ (**ver nota 1**) ..... 5 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis: ${}^{5}A_4$ (**ver nota 1**) ..... 5 pontos

Obter a probabilidade pedida (**ver nota 2**) $(0{,}003)$ ..... 2 pontos

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a esta expressão, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

2. Se a etapa relativa ao número de casos possíveis e a etapa relativa ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. A mesma pontuação de 0 pontos deve ser atribuída caso o valor obtido não pertença ao intervalo $[0,1]$

4.1. ..... **12 pontos**

Determinar a cota do ponto P ..... 4 pontos

Escrever $4x + y - 2z + d = 0$ ..... 4 pontos

Obter o valor de d ..... 3 pontos

Escrever uma equação do plano pedido
$(4x + y - 2z - 15 = 0$ ou equivalente$)$ ..... 1 ponto

4.2. ..... **13 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Escrever as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OA}$ ..... 1 ponto

Escrever as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OC}$ ..... 1 ponto

Calcular $\overrightarrow{OA} \,.\, \overrightarrow{OC}$ ..... 3 pontos

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{OA}$ ..... 1 ponto

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{OC}$ ..... 1 ponto

Escrever a equação $4 = \sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \cos A\hat{O}C$ (ou equivalente) ..... 4 pontos

Obter a amplitude do ângulo $AOC\,(48°)$ ..... 2 pontos

2.º Processo

Seja A' a projeção ortogonal de A sobre o plano xOy

Determinar $\overline{OA'}$ ..... 4 pontos

Escrever $\operatorname{tg}(A\hat{O}A') = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ..... 4 pontos

Obter a amplitude do ângulo AOA' ..... 2 pontos

Obter a amplitude do ângulo $AOC\,(48°)$ ..... 3 pontos

3.º Processo

Escrever as coordenadas do ponto C ..... 1 ponto

Escrever as coordenadas do ponto A ..... 1 ponto

Determinar $\overline{OC}$ ..... 1 ponto

Determinar $\overline{OA}$ ..... 1 ponto

Determinar $\overline{AC}$ ..... 2 pontos

Escrever a equação $2^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 - 2 \times \sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \cos A\hat{O}C$
(ou equivalente) ..... 4 pontos

Obter a amplitude do ângulo AOC ..... 3 pontos

5. ..... **12 pontos**

Equacionar o problema $\left(d(3\alpha) = 0{,}97 \times d(\alpha)\right.$ ou equivalente$\left.\right)$ ..... 5 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota**) ..... 4 pontos

Apresentar o valor de $\alpha\ (10°)$ ..... 3 pontos

Nota – Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

6. ..... **8 pontos**

Opção **(D)**

7. ..... **12 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $S_{12} = \frac{u_1 + u_{12}}{2} \times 12$ ..... 1 ponto

Escrever $174 = \frac{4 - 2r + 4 + 9r}{2} \times 12$, sendo r a razão da progressão ..... 4 pontos

Obter o valor de r ..... 2 pontos

Obter $3n - 5 = 5371$ ..... 2 pontos

Obter o valor de n ..... 2 pontos

Concluir que 5371 é termo da sucessão ..... 1 ponto

2.º Processo

Escrever $4 = u_1 + 2r \ \wedge \ 174 = \frac{u_1 + u_1 + 11r}{2} \times 12$ ..... 4 pontos

Obter o valor de r ..... 2 pontos

Obter o valor de u_1 ..... 1 ponto

Escrever $3n - 5 = 5371$ ..... 2 pontos

Obter o valor de n ..... 2 pontos

Concluir que 5371 é termo da sucessão ..... 1 ponto

8. ..... **8 pontos**

Opção **(A)**

Caderno 2

9.1. ..... **8 pontos**

Opção **(B)**

9.2. ..... **8 pontos**

Opção **(B)**

10. ..... **12 pontos**

Escrever $(2-i)^2 = 4 - 4i - 1$ ..... 2 pontos

Identificar i^{15} com $-i$ ..... 1 ponto

Obter $z = \frac{4-3i}{1-2i} - 3i$ ..... 1 ponto

Obter $z = 2 - 2i$ ..... 3 pontos

Escrever $-\frac{1}{2}\overline{z}$ na forma trigonométrica ..... 5 pontos

Escrever $\overline{z}$ na forma $x + yi$ ..... 1 ponto

Obter $-\frac{1}{2} \times \overline{z}$ na forma $x + yi$ ..... 1 ponto

Escrever $-\frac{1}{2} \times \overline{z}$ na forma trigonométrica

$\left(\text{por exemplo, } \sqrt{2}\,\text{cis}\frac{5\pi}{4} \text{ ou } \sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)$ ..... 3 pontos

OU

Escrever z na forma trigonométrica ..... 2 pontos

Escrever $\overline{z}$ na forma trigonométrica ..... 1 ponto

Escrever $-\frac{1}{2} \times \overline{z}$ na forma trigonométrica

$\left(\text{por exemplo, } \sqrt{2}\,\text{cis}\frac{5\pi}{4} \text{ ou } \sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)$ ..... 2 pontos

11. ..... **8 pontos**

Opção **(B)**

12.1. ..... **8 pontos**

Opção **(D)**

12.2. ..... **8 pontos**

Opção **(D)**

13. ..... **13 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever a condição $x+1>0 \ \wedge \ 8-x>0$ ..... 1 ponto

Concluir que $x \in]-1,8[$ ..... 1 ponto

Escrever $\log_2(x+1)+\log_2(8-x) \leq 3$ ..... 1 ponto

Escrever $\log_2\left((x+1)(8-x)\right) \leq 3$ ..... 2 pontos

Escrever $(x+1)(8-x) \leq 8$ ..... 2 pontos

Obter $-x^2+7x \leq 0$ ..... 1 ponto

Resolver a condição $-x^2+7x \leq 0$ ..... 2 pontos

Apresentar a resposta na forma pedida $\left(]-1,0] \cup [7,8[\right)$ ..... 3 pontos

2.º Processo

Escrever a condição $x+1>0 \ \wedge \ 8-x>0$ ..... 1 ponto

Concluir que $x \in]-1,8[$ ..... 1 ponto

Escrever $\log_2(x+1) \leq \log_2 8-\log_2(8-x)$ ..... 2 pontos

Escrever $\log_2(x+1) \leq \log_2 \frac{8}{8-x}$ ..... 2 pontos

Escrever $x+1 \leq \frac{8}{8-x}$ ..... 1 ponto

Resolver a condição $x+1 \leq \frac{8}{8-x}$ ..... 3 pontos

Apresentar a resposta na forma pedida $\left(]-1,0] \cup [7,8[\right)$ ..... 3 pontos

14.1. ..... **13 pontos**

Escrever $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ ..... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3+\frac{e^x}{1-x}-4}{x}$ ..... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3+\frac{e^x}{1-x}-4}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1+x}{x(1-x)}$ ..... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1+x}{x(1-x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{e^x-1}{x}+1}{1-x}$ ..... 5 pontos

Obter $f'(0)=2$ ..... 2 pontos

14.2. ..... **13 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ..... 5 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3+\dfrac{e^x}{1-x}\right)$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3+\dfrac{e^x}{1-x}\right)=3+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{1-x}$ ..... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{1-x}=0$ ..... 2 pontos

Obter $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=3$ ..... 1 ponto

Concluir que a reta de equação $y=3$ é assíntota horizontal do gráfico da função f, quando $x\to-\infty$ ..... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ..... 6 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2)+2}{x}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2)+2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x+2}{x}$ ..... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x+2}{x}=2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}$ ..... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ ..... 2 pontos

Concluir que a reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal do gráfico da função f, quando $x\to+\infty$ ..... 1 ponto

14.3. ..... **8 pontos**

Opção **(C)**

15. ..... **12 pontos**

Determinar $g'(x)$ ..... 1 ponto

Determinar $g''(x)$ ..... 2 pontos

Determinar os zeros de g'' em $[0,\pi]$ ..... 3 pontos

Apresentar um quadro de sinal de g'' e de monotonia de g' (ou equivalente) 3 pontos

Determinar $g'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ ..... 3 pontos

COTAÇÕES

Item											
Cotação (em pontos)											
1.1.	**1.2.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	
8		12	8	12	12	13	12	8	12	8	**105**
9.1.	**9.2.**	**10.**	**11.**	**12.1.**	**12.2.**	**13.**	**14.1.**	**14.2.**	**14.3.**	**15.**	
8		12	8	8		13	13	13	8	12	**95**
TOTAL											**200**

Exame final nacional de Matemática A **(2018, 2.ª fase)**

Proposta de resolução

Caderno 1

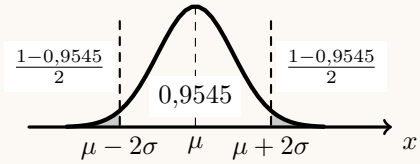
1.

1.1. Como $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$ e $P(X < \mu - 2\sigma) = P(X > \mu + 2\sigma)$, temos que:

$$P(X < \mu - 2\sigma) \approx \frac{1 - 0{,}9545}{2}$$

E assim, vem que:

$$P(X > \mu - 2\sigma) = 1 - P(X < \mu - 2\sigma) \approx 1 - \frac{1 - 0{,}9545}{2} \approx 0{,}977$$



Resposta: **Opção C**

1.2. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, vem que:

$$A\hat{C}B = 180 - A\hat{B}C - B\hat{A}C = 180 - 81 - 57 = 42°$$

E assim, calculando o valor de $\overline{AB}$ recorrendo à Lei dos senos, e arredondando o resultado às centésimas, temos que:

$$\frac{\operatorname{sen} A\hat{B}C}{\overline{AC}} = \frac{\operatorname{sen} A\hat{C}B}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} 81°}{5} = \frac{\operatorname{sen} 42°}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{5 \times \operatorname{sen} 42°}{\operatorname{sen} 81°} \Rightarrow \overline{AB} \approx 3{,}39$$

Resposta: **Opção C**

2. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um atleta do clube, e os acontecimentos:
   B:«O atleta praticar basquetebol»
   F:«O atleta praticar futebol»

   Temos que $P(B)=\frac{1}{5}$; $P(F)=\frac{2}{5}$ e $P\left(\overline{B}|\overline{F}\right)=\frac{3}{4}$

   Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

   - $P\left(\overline{F}\right)=1-P(F)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$
   - $P\left(\overline{B}\cap\overline{F}\right)=P\left(\overline{F}\right)\times P\left(\overline{B}|\overline{F}\right)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{20}$
   - $P\left(\overline{B}\cap F\right)=P\left(\overline{B}\right)-P\left(\overline{B}\cap\overline{F}\right)=\frac{4}{5}-\frac{9}{20}=\frac{16-9}{20}=\frac{7}{20}$
   - $P(B\cap F)=P(F)-P\left(\overline{B}\cap F\right)=\frac{2}{5}-\frac{7}{20}=\frac{1}{20}$

	F	$\overline{F}$	
B	$\frac{1}{20}$		
$\overline{B}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{4}{5}$
	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

   Desta forma, como $P(B\cap F)>0$, temos que, existe pelo menos, um atleta do clube que pratica as duas modalidades desportivas.

3.

3.1. Como existem 5 vogais, existem 5 hipóteses para o primeiro dígito do código.
Para os restantes 3 dígitos do código existem 9 algarismos disponíveis, e como os algarismos devem ser todos diferentes, para as restantes 3 dígitos existem ${}^{9}A_{3}$ escolhas diferentes.

Assim, nas condições do enunciado existem $5\times{}^{9}A_{3}=2520$ números.

Resposta: **Opção D**

3.2. Como existem 14 caracteres diferentes e nos códigos possíveis são constituídos por 4 caracteres, eventualmente repetidos, então o número de códigos diferentes que é possível formar, ou seja o número de casos possíveis, é ${}^{14}A'_{4}=14^{4}$
Para que um código seja constituído por quatro algarismos diferentes cujo produto seja um número ímpar, deve ser constituído só por algarismos ímpares, pelo que existem 5 algarismos (1, 3, 5, 7 e 9), que podem ser colocados em 4 posições, cuja ordem é relevante e sem repetição. Isto é, existem ${}^{5}A_{4}$ casos favoráveis.

Assim, recorrendo à Regra de Laplace, calculando a probabilidade de selecionar um código nas condições do enunciado e arredondando o resultado às milésimas, temos:

$$p=\frac{{}^{5}A_{4}}{{}^{14}A'_{4}}=\frac{5\times4}{14^{4}}\approx0{,}003$$

4.

4.1. Como o ponto P tem abcissa 1 ($x_P = 1$), e ordenada 3 ($y_P = 3$), substituindo estas coordenadas na equação da superfície esférica, calculamos a cota (z_P):

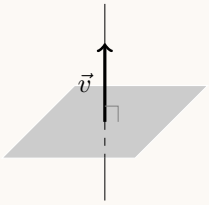
$$(x_P-1)^2+(y_P-2)^2+(z_P+1)^2 = 10 \Leftrightarrow (1-1)^2+(3-2)^2+(z_P+1)^2 = 10 \Leftrightarrow 0^2+1^2+(z_P+1)^2 = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z_P+1)^2 = 10-1 \Leftrightarrow z_P+1 = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow z_P = -1 \pm 3 \Leftrightarrow z_P = -4 \vee z_P = 2$$

Como a cota do ponto P é negativa, as coordenadas do ponto P são $(1,3,-4)$

Como o plano é perpendicular à reta r, vetor diretor da reta ($\vec{v} = (4,1,-2)$) é um vetor normal do plano, e assim a equação do plano é da forma:

$$4x + y - 2z + d = 0$$



E como o ponto P pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo as coordenadas, na equação anterior:

$$4(1)+3-2(-4)+d = 0 \Leftrightarrow 4+3+8+d = 0 \Leftrightarrow 15+d = 0 \Leftrightarrow d = -15$$

E assim, uma equação do plano que passa no ponto P e é perpendicular à reta r, é:

$$4x + y - 2z - 15 = 0$$

4.2. Como a superfície esférica tem de equação

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2 = 10 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-(-1))^2 = 10$$

As coordenadas do centro são $C(1,2,-1)$, pelo que as coordenadas do ponto A são $(1,2,1)$
Assim temos que, como O é a origem do referencial $\overrightarrow{OA} = (1,2,1)$ e $\overrightarrow{OC} = (1,2,-1)$, pelo que:

- $\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$
- $\left\|\overrightarrow{OC}\right\| = \sqrt{1^2+2^2+(-1)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

E assim, recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos\left(\overrightarrow{OA}\widehat{\ }\overrightarrow{OC}\right) = \frac{\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OC}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OC}\right\|} = \frac{(1,2,1).(1,2,-1)}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}} = \frac{1+4-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Logo, a amplitude do ângulo AOC, em graus, arredondado às unidades, é:

$$A\hat{O}C = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48^\circ$$

5. No primeiro instante considerado a amplitude do ângulo ASM é α, e a distância de Mercúrio ao Sol é $d(\alpha) = \dfrac{555}{10 - 2{,}06\cos\alpha}$

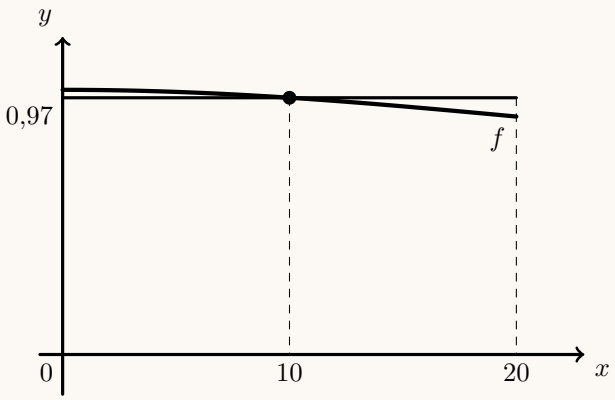
   Relativamente ao segundo instante considerado, a amplitude do ângulo ASM é três vezes maior, ou seja, 3α, e a distância respetiva é $d(3\alpha) = \dfrac{555}{10 - 2{,}06\cos\alpha}$
   Ainda relativamente ao segundo instante considerado, como a distância do planeta Mercúrio ao Sol diminuiu 3%, é igual a 97% da distância anterior, ou seja:

$$d(3\alpha) = 0{,}97 \times d(\alpha) \Leftrightarrow \frac{555}{10 - 2{,}06\cos(3\alpha)} = 0{,}97 \times \frac{555}{10 - 2{,}06\cos\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{10 - 2{,}06\cos\alpha}{10 - 2{,}06\cos(3\alpha)} = 0{,}97 \times \frac{555}{555} \Leftrightarrow \frac{10 - 2{,}06\cos\alpha}{10 - 2{,}06\cos(3\alpha)} = 0{,}97$$

   Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função $f(x) = \dfrac{10 - 2{,}06\cos x}{10 - 2{,}06\cos(3x)}$, e a reta horizontal de equação $y = 0{,}97$, para $0 < x < 20$ (porque α está compreendido entre 0 e 20 graus), reproduzido na figura ao lado, e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (às unidades) da abcissa do ponto de interseção, ou seja:

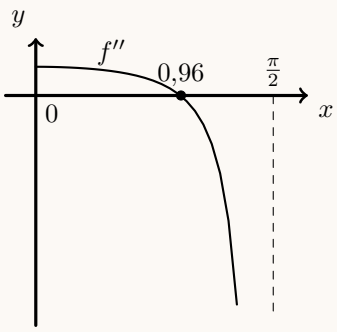
$$\alpha \approx 10^\circ$$



6. Como a abcissa do ponto de inflexão é o zero da segunda derivada da função, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$f''(x) = (f'(x))' = (3x - \operatorname{tg} x)' = (3x)' - (\operatorname{tg} x)' = 3 - \frac{(x)'}{\cos^2 x} = 3 - \frac{1}{\cos^2 x}$$

   Representando na calculadora gráfica o gráfico da função f'', para valores de $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, (reproduzido na figura ao lado) e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados dos zeros de uma função determinamos o valor (aproximado às centésimas) do zero da função f''



   Assim, temos que a abcissa do ponto de inflexão do gráfico da função f, aproximado às centésimas, é 0,96

   Resposta: **Opção D**

7. Como o terceiro termo da progressão aritmética é 4, designado a razão por r, temos que:

   - $u_3 = 4 \Leftrightarrow u_1 + (3-1) \times r = 4 \Leftrightarrow u_1 + 2r = 4 \Leftrightarrow u_1 = 4 - 2r$
   - $u_{12} = u_1 + (12-1) \times r = u_1 + 11r$
   - a soma dos 12 primeiros termos é:

   $$S_{12} = \frac{u_1 + u_{12}}{2} \times 12 = \frac{u_1 + u_1 + 11r}{2} \times 12 = (4 - 2r + 4 - 2r + 11r) \times \frac{12}{2} = (8 + 7r) \times 6$$

   Como a soma dos doze primeiros termos é 174, temos que:

   $$S_{12} = 174 \Leftrightarrow (8 + 7r) \times 6 = 174 \Leftrightarrow 8 + 7r = \frac{174}{6} \Leftrightarrow 7r = 29 - 8 \Leftrightarrow r = \frac{21}{7} \Leftrightarrow r = 3$$

   Assim, vem que:

   - $u_1 = 4 - 2 \times 3 = 4 - 6 = -2$
   - $u_n = u_1 + (n-1) \times r = -2 + 3(n-1)$

   E assim, resolvendo a equação $u_n = 5371$, vem:

   $$u_n = 5371 \Leftrightarrow -2 + 3(n-1) = 5371 \Leftrightarrow 3n - 3 = 5371 + 2 \Leftrightarrow 3n = 5373 + 3 \Leftrightarrow n = \frac{5376}{3} \Leftrightarrow n = 1792$$

   Como a solução da equação é um número natural, então 5371 é o termo de ordem 1972 da sucessão (u_n), ou seja, $u_{1792} = 5371$

8. Como a circunferência tem raio 1, e o ponto C pertence ao semieixo real negativo, designado por w o número complexo cujo afixo é o ponto C, temos que $w = -1$

   Como z e w são ambos raízes de índice 5 do mesmo número complexo, temos que:

   $$z^5 = w^5 = (-1)^5 = -1$$

   Resposta: **Opção A**

Caderno 2

9.

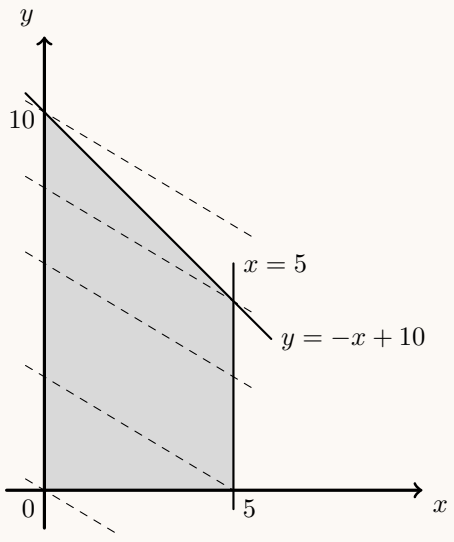
   9.1. Representando a região admissível, de acordo com as restrições apresentadas, reproduzida na figura ao lado, e retas com o declive igual à reta definida pela função objetivo:

   $$L = 3x + 5y \Leftrightarrow 5y = -3x + L \Leftrightarrow y = -\frac{3}{5}x + \frac{L}{5}$$

   Podemos verificar que o máximo é obtido no vértice de coordenadas (0,10). Assim, substituindo as coordenadas deste ponto na função objetivo, temos:

   $$L = 3(0) + 5(10) = 0 + 50 = 50$$

   Resposta: **Opção B**



9.2. Como a $\overline{F_1F_2} = 12$, ou seja a distância entre os focos é $2c = 12$, então a distância dos focos ao centro da elipse é:

$$c = \frac{\overline{F_1F_2}}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Como a soma das distâncias aos focos de qualquer ponto da elipse é igual ao comprimento do eixo maior $(2a)$, temos que:

$$2a = \overline{PF_1} + \overline{PF_2} \Leftrightarrow 2a = 20 \Leftrightarrow a = \frac{20}{2} \Leftrightarrow a = 10$$

Assim podemos calcular o comprimento do semi-eixo menor (b), sabendo que $a^2 = b^2 + c^2$:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow 10^2 = b^2 + 6^2 \Leftrightarrow 100 = b^2 + 36 \Leftrightarrow 100 - 36 = b^2 \Leftrightarrow 64 = b^2$$

Assim, temos que a equação da elipse centrada na origem e com os focos sobre o eixo Ox é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ou seja, nas condições do enunciado, } \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

Resposta: **Opção B**

10. Simplificando a expressão de z, como $i^{15} = i^{4\times3+3} = i^3 = -i$, temos que:

$$z = \frac{(2-i)^2 + 1 + i}{1-2i} + 3i^{15} = \frac{4 - 2\times 2i + i^2 + 1 + i}{1-2i} + 3(-i) = \frac{4 - 4i - 1 + 1 + i}{1-2i} - 3i =$$

$$= \frac{4-3i}{1-2i} - 3i = \frac{(4-3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} - 3i = \frac{4 + 8i - 3i - 6i^2}{1 + 2i - 2i - 4i^2} - 3i = \frac{4 + 5i - 6(-1)}{1 - 4(-1)} - 3i =$$

$$= \frac{4 + 5i + 6}{1 + 4} - 3i = \frac{10 + 5i}{5} - 3i = 2 + i - 3i = 2 - 2i$$

Assim, vem que $\overline{z} = 2 + 2i$, pelo que:

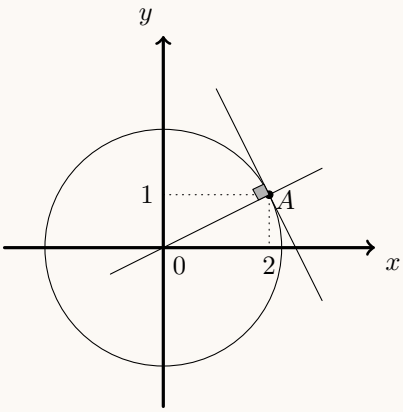
$$-\frac{1}{2} \times \overline{z} = -\frac{1}{2} \times (2 + 2i) = -1 - i$$

Escrevendo $-\frac{1}{2} \times \overline{z}$ na forma trigonométrica $(\rho e^{i\theta})$ temos:

- $\rho = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{-1}{-1} = 1$; como $\operatorname{sen}\theta < 0$ e $\cos\theta < 0$, θ é um ângulo do 3º quadrante, logo $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

Assim $-\frac{1}{2} \times \overline{z} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$

11. Como a tangente é perpendicular ao raio, a reta r é perpendicular à reta OA, ou seja, declive da reta r é o simétrico do declive da reta OA



Calculando o declive da reta OA, temos:

$$m_{OA} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2}$$

Assim, o declive da reta r, é:

$$m_r = -\frac{1}{m_{OA}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

Logo a equação da reta r é da forma $y = -2x + b$ pelo que, substituindo as coordenadas do ponto A na equação da reta, podemos calcular o valor de b, ou seja, da ordenada na origem:

$$1 = -2 \times 2 + b \Leftrightarrow 1 = -4 + b \Leftrightarrow 1 + 4 = b \Leftrightarrow 5 = b$$

Resposta: **Opção B**

12.

12.1. Para averiguar a existência de pontos que pertençam simultaneamente aos planos α, β e γ, ou seja, que pertençam à interseção dos três planos, resolvemos o sistema seguinte:

$$\begin{cases} y = -x \\ y = z \\ 2x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = y \\ 2(-y) + 3y - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = y \\ -2y + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = y \\ 0y = 1 \end{cases}$$

Como a equação $0y = 1$ é impossível, o sistema é impossível, ou seja, não existem pontos que pertençam aos três planos, ou seja, a interseção dos três planos é o conjunto vazio.

Resposta: **Opção D**

12.2. Calculando o valor do limite, vem que:

$$\lim\left(\frac{n+5}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim\left(\frac{n\left(1+\frac{5}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\lim\left(\frac{1+\frac{5}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\lim\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n}}{\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{e^5}{e^1}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(e^{5-1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(e^4\right)^{\frac{1}{2}} = e^{4\times\frac{1}{2}} = e^2$$

Resposta: **Opção D**

13. Resolvendo a inequação, como $3 = \log_2 8$, temos que:

$$\log_2(x+1) \leq 3 - \log_2(8-x) \Leftrightarrow \log_2(x+1) + \log_2(8-x) \leq 3 \Leftrightarrow \log_2\left((x+1)\times(8-x)\right) \leq \log_2 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(8-x) \leq 8 \Leftrightarrow 8x - x^2 + 8 - x \leq 8 \Leftrightarrow 7x - x^2 \leq 8 - 8 \Leftrightarrow 7x - x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x(7-x) \leq 0$$

Mas como a expressão $\log_2(x+1) \leq 3 - \log_2(8-x)$ só está definida se:

$$x + 1 > 0 \wedge 8 - x > 0 \Leftrightarrow x > -1 \wedge 8 > x \Leftrightarrow x > -1 \wedge x < 8$$

E como $x(7-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 7 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 7 = x$, podemos estudar o sinal de $x(7-x)$, para os valores de x definidos, recorrendo a uma tabela:

x	-1		0		7		8
x	n.d.	$-$	0	$+$	$+$	$+$	n.d.
$7-x$	n.d.	$+$	$+$	$+$	0	$-$	n.d.
$x(7-x)$	n.d.	$-$	0	$+$	0	$-$	n.d.

Pelo que o conjunto dos números reais que são soluções da inequação é: $]-1,0] \cup [7,8[$

14.

14.1. Recorrendo à definição de derivada num ponto, temos que:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{3+\frac{e^x}{1-x} - \left(3+\frac{e^0}{1-0}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{3+\frac{e^x}{1-x} - 3 - \frac{1}{1}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x}{1-x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x}{1-x} - \frac{1-x}{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-(1-x)}{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1-x)}{x(1-x)} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1-x)}{x(1-x)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+x}{x(1-x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x(1-x)} + \frac{x}{x(1-x)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\times\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-x}\right) = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x} + \lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x} =$$

$$= 1\times\frac{1}{1-0} + \frac{1}{1-0} = 1\times 1 + 1 = 2$$

14.2. Para averiguar a existência de assíntotas horizontais vamos calcular o limite da função quando $x \to -\infty$ e quando $x \to -\infty$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(3+\dfrac{e^x}{1-x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} 3 + \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{1-x} = 3+\dfrac{e^{-\infty}}{1-(-\infty)} =$

$$= 3+\frac{0^+}{1+\infty} = 3+\frac{0^+}{+\infty} = 3+0 = 3$$

Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$, a reta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal do gráfico de f

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2)+2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x^2)}{x}+\dfrac{2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2)}{x} + \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x} =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}+\frac{2}{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\left(2\times\frac{\ln x}{x}\right)+0 = \lim_{x\to+\infty} 2\times \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 2\times 0 = 0$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, a reta de equação $y = 0$ também é assíntota horizontal do gráfico de f

14.3. Considerando a função h, podemos observar que:

$$h(1) = 1+1 \Leftrightarrow h(1) = 2 \Leftrightarrow h^{-1}(2) = 1$$

E assim, vem que:

$$\left(f\circ h^{-1}\right)(2) = f\left(h^{-1}(2)\right) = f(1) = \frac{\ln(1^2)+2}{1} = \frac{0+2}{1} = 2$$

Resposta: **Opção C**

15. Como o declive da reta tangente ao gráfico de g em cada ponto é dado pela função derivada, começamos por determinar a expressão de g':

$$g'(x) = \left(2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x\right)' = \left(2\operatorname{sen} x\right)' + \left(\operatorname{sen}^2 x\right)' = 2\cos x + \left(\operatorname{sen} x \times \operatorname{sen} x\right)' =$$

$$= 2\cos x + \left(\operatorname{sen} x\right)' \times \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \times \left(\operatorname{sen} x\right)' = 2\cos x + \cos x \times \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \times \cos x =$$

$$= 2\cos x + 2 \times \operatorname{sen} x \times \cos x = 2\cos x + \operatorname{sen}(2x)$$

Como o máximo de uma função corresponde a um zero da função derivada, vamos determinar a expressão da função derivada da função g', ou seja g'', para determinar o declive máximo:

$$g''(x) = (g'(x))' = (2\cos x + \operatorname{sen}(2x))' = (2\cos x)' + (\operatorname{sen}(2x))' = 2 \times (-\operatorname{sen} x) + (2x)' \times \cos(2x) =$$

$$= -2\operatorname{sen} x + 2x\cos(2x)$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função ($[0,\pi]$), vem:

$$-2\operatorname{sen} x + 2\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos(2x) = 2\operatorname{sen} x \Leftrightarrow \cos(2x) = \operatorname{sen} x \underset{\operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee 2x = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee 2x - x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como se pretende identificar os valores de $x \in [0,\pi]$, atribuindo valores inteiros a k para identificar as soluções no intervalo definido, temos:

- $k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = -\frac{\pi}{2} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \notin [0,\pi]\right)$
- $k = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = -\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \quad \left(\frac{3\pi}{2} \notin [0,\pi]\right)$
- $k = 2 \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{8\pi}{6} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{2} + 4\pi \quad \left(\frac{3\pi}{2} \notin [0,\pi] \quad \text{e} \quad 4\pi - \frac{\pi}{2} \notin [0,\pi]\right)$

Assim, as soluções da equação $g''(x) = 0$, que pertencem ao domínio da função, são $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$, pelo que Estudando a variação do sinal da derivada de g', e relacionando com a monotonia do declive, vem:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$g''(x)$	+	+	0	−	0	+	+
$g'(x)$	min	↗	Máx	↘	min	↗	Máx

Assim temos que os valores máximos do declive são:

- $g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$
- $g'(\pi) = 2\cos\pi + \operatorname{sen}(2\pi) = 2 \times (-1) + 0 = -2$

Como $g'\left(\frac{\pi}{6}\right) > g(\pi)$ então $g'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ é o máximo absoluto e o valor máximo do declive das retas tangentes ao gráfigo de g, ou seja, o declive da reta r é:

$$m_r = g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2018

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Caderno 1

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 6 Páginas

Caderno 1: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.
É permitido o uso de calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.

Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens de cada caderno encontram-se no final do respetivo caderno.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Nos termos da lei em vigor, as provas de avaliação externa são obras protegidas pelo Código do Direito de Autor e dos Direitos Conexos. A sua divulgação não suprime os direitos previstos na lei. Assim, é proibida a utilização destas provas, além do determinado na lei ou do permitido pelo IAVE, I.P., sendo expressamente vedada a sua exploração comercial.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr ($\alpha -$ amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r -$ raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ ($\alpha -$ amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r -$ raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ ($r -$ raio da base; $g -$ geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ ($r -$ raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ ($r -$ raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis}\theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis}\theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\ e^u$

$(a^u)' = u'\ a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 1.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 1.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

1.1. Seja Ω o espaço amostral (espaço de resultados) associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- A e B são acontecimentos independentes e equiprováveis;
- $P(A \cup B) = 0{,}64$

Qual é o valor de $P(A)$?

(A) $0{,}42$ **(B)** $0{,}40$ **(C)** $0{,}38$ **(D)** $0{,}36$

PMC2015

1.2. Um ponto P desloca-se numa reta numérica, no intervalo de tempo $I = [0,4]$ (medido em segundos), de tal forma que a respetiva abcissa é dada por

$$x(t) = \text{sen}(\pi t) + \cos(\pi t), \text{ com } t \in I$$

Qual é a amplitude deste oscilador harmónico?

(A) 1 **(B)** $\sqrt{2}$ **(C)** $\sqrt{3}$ **(D)** 2

2. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ e o ponto P de coordenadas $(1,1,1)$, pertencente a essa superfície esférica.

2.1. Seja $\vec{u} = -2\overrightarrow{OP}$ e seja $Q = P + \vec{u}$

Determine as coordenadas do ponto Q e refira, no contexto do problema, o significado de $[PQ]$

2.2. Seja R o ponto de intersecção da superfície esférica com o semieixo negativo das ordenadas.

Determine a amplitude do ângulo ROP

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

3. Com cinco pessoas, quantos conjuntos com, pelo menos, três pessoas é possível formar?

(A) 60 **(B)** 81 **(C)** 10 **(D)** 16

4. A soma dos dois últimos elementos de uma certa linha do triângulo de Pascal é 35

Escolhem-se, ao acaso, dois elementos dessa linha.

Determine a probabilidade de esses dois elementos serem iguais.

Apresente o resultado na forma decimal, arredondado às centésimas.

5. Na cidade de Saint Louis, nos Estados Unidos, existe um monumento em forma de arco conhecido como Portal do Oeste. No ponto mais elevado desse arco, encontra-se um miradouro ao qual se acede por um ascensor.

A Figura 1 é uma fotografia dessa estrutura, e a Figura 2 representa um esquema do arco.



Figura 1

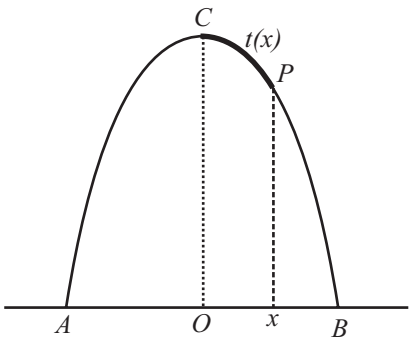


Figura 2

Relativamente à Figura 2, sabe-se que:

- os pontos A e B representam a intersecção do arco com o solo;
- o ponto O é o ponto médio de $[AB]$
- o ponto C representa o miradouro, e a reta OC é um eixo de simetria do arco.

Considere a reta AB como um eixo orientado da esquerda para a direita, com origem no ponto O e em que uma unidade corresponde a um metro.

Admita que o ascensor se está a deslocar no arco CB, do miradouro C para o ponto B

Para cada ponto P, de abcissa x, situado no arco CB, o tempo que o ascensor demora a percorrer o arco CP é dado, em minutos, por

$$t(x) = 0{,}34(e^{0{,}0257x} - e^{-0{,}0257x}), \text{ com } x \in [0,96]$$

Num certo instante, o ascensor encontra-se num ponto F (não coincidente com o ponto C), a uma certa distância da reta OC. Passado algum tempo, o ascensor encontra-se num ponto G

A Figura 3 ilustra a situação.

Sabe-se que:

- a distância do ponto G à reta OC é igual ao triplo da distância do ponto F à mesma reta;
- o tempo que o ascensor demora a percorrer o arco que vai de F até G é igual ao triplo do tempo que demora a percorrer o arco que vai de C até F

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a distância, x, em metros, do ponto F à reta OC

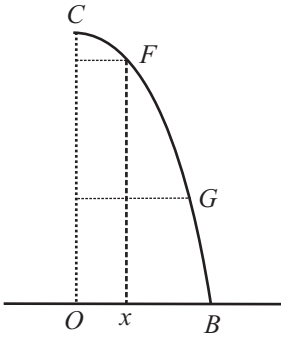


Figura 3

Na sua resposta:

– equacione o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;

– apresente o valor da distância pedida arredondado às décimas.

6. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a expressão $i^0 + i + i^2 + ... + i^{2018}$ é igual a

(A) i **(B)** $-i$ **(C)** $-1+i$ **(D)** $1+i$

7. Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \frac{n+5}{n+3}$

Estude a sucessão (u_n) quanto à monotonia.

8. Seja Ω o espaço amostral (espaço de resultados) associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}6$
- $P(B) = 0{,}7$

Mostre que $P(B|A) \geq \frac{1}{2}$

9. Para um certo número real a, diferente de zero, são paralelas as retas r e s, definidas, num referencial o.n. xOy, pelas condições $r : ax + 2y + 1 = 0$ e $s : (x, y) = (1,1) + k(a, 2a), \quad k \in \mathbb{R}$

Qual é o valor de a ?

(A) -4 **(B)** 2 **(C)** -2 **(D)** 4

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item											
Cotação (em pontos)											
1.1.	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	
8		12	12	8	12	12	8	12	13	8	**105**

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2018

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Caderno 2

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 5 Páginas

Caderno 2: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.

Não é permitido o uso de calculadora.

10.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 10.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 10.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

10.1. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$,

- a reta r, definida pela condição $\frac{x-1}{2} = \frac{3-y}{5} = \frac{z}{3}$
- o plano α, definido pela equação $3x - 2z - 3 = 0$

Qual é a posição relativa da reta r e do plano α ?

(A) r é estritamente paralela a α

(B) r e α são concorrentes, mas não perpendiculares.

(C) r é perpendicular a α

(D) r está contida em α

PMC2015

10.2. Seja g uma função real, de domínio $[0,1]$

Sabe-se que a função g não tem mínimo.

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) A função g não tem zeros.

(B) A função g não é limitada.

(C) A função g não tem máximo.

(D) A função g não é contínua.

11. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o conjunto

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : z^4 + 16 = 0 \ \wedge \ \mathrm{Re}(z) < 0 \right\}$$

Determine os elementos do conjunto A e apresente-os na forma algébrica.

12.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 12.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 12.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

12.1. Um dado cúbico equilibrado tem todas as faces numeradas, umas com o número 0 e as restantes com o número 1

Lança-se o dado três vezes e, em cada lançamento, regista-se o número da face que fica voltada para cima.

Seja X a variável aleatória «produto dos números saídos nos três lançamentos».

A tabela de distribuição de probabilidades da variável X é a seguinte.

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{19}{27}$	$\frac{8}{27}$

Quantas faces estão numeradas com o número 1 ?

(A) Duas. **(B)** Três. **(C)** Quatro. **(D)** Cinco.

PMC2015

12.2. Qual é o valor do limite da sucessão $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n}$?

(A) 1 **(B)** e **(C)** e^2 **(D)** $+\infty$

13. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x^3 + 6\ln x$

Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;

– as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

14. Seja h a função, de domínio $\left[-\frac{\pi}{3}, +\infty\right[$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}^2 x}{\text{sen}(x^2)} & \text{se} \quad -\frac{\pi}{3} \leq x < 0 \\ \frac{e^x}{x+1} & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

14.1. Mostre que a função h é contínua no ponto 0

14.2. Estude a função h quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

14.3. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) A função h é estritamente decrescente em $[0, +\infty[$

(B) A função h é estritamente crescente em $[0, +\infty[$

(C) A função h tem um máximo para $x = 1$

(D) A função h tem um mínimo para $x = 1$

15. Considere a função f, definida em $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ por $f(x) = \cos x$

Qual dos seguintes conjuntos é o contradomínio da função f?

(A) $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ **(B)** $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$

(C) $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ **(D)** $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

16. Seja m um número real pertencente ao intervalo $]0,1[$, e seja a um número real positivo.

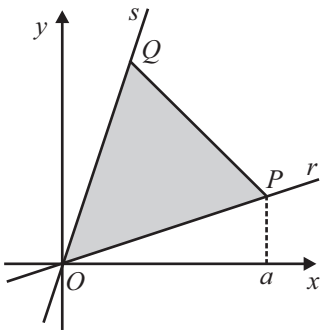


Figura 4

Na Figura 4, estão representadas as retas r e s, que passam na origem do referencial e que têm declives m e $\frac{1}{m}$, respetivamente. Estão também representados os pontos P e Q, pertencentes ao primeiro quadrante. O ponto P pertence à reta r, e o ponto Q pertence à reta s

Sabe-se que o ponto P tem abcissa a e que $\overline{OP} = \overline{OQ}$

Mostre que a área do triângulo $[OPQ]$ é dada por $\frac{a^2}{2}(1-m^2)$

FIM

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item											
Cotação (em pontos)											
10.1.	**10.2.**	**11.**	**12.1.**	**12.2.**	**13.**	**14.1.**	**14.2.**	**14.3.**	**15.**	**16.**	
8		12	8		13	13	13	8	8	12	**95**

TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)	**200**

Exame final nacional de Matemática A **(2018, Época especial)**

Proposta de resolução

Caderno 1

1.

1.1. Como A e B são acontecimentos equiprováveis, temos que $P(A) = P(B)$

E como A e B são acontecimentos independentes, temos que

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = P(A) \times P(A) = \big(P(A)\big)^2$$

Logo, como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, temos que:

$$0{,}64 = P(A) + P(A) - \big(P(A)\big)^2 \Leftrightarrow \big(P(A)\big)^2 - 2 \times P(A) + 0{,}64 = 0$$

Finalmente, usando a fórmula resolvente para equações do segundo grau, temos que:

$$P(A) = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 0{,}64}}{2 \times 1} \Leftrightarrow P(A) = \frac{2 \pm 1{,}2}{2} \Leftrightarrow P(A) = 1{,}6 \vee P(A) = 0{,}4$$

Como $P(A) \leq 1$, então temos que $P(A) = 0{,}4 = 0{,}40$

Resposta: **Opção B**

1.2. Escrevendo a expressão na forma $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, em que A é a amplitude do oscilador harmónico, temos:

$$x(t) = \operatorname{sen}(\pi t) + \cos(\pi t) = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\big(\operatorname{sen}(\pi t) + \cos(\pi t)\big) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \operatorname{sen}(\pi t) + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \cos(\pi t)\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \times \operatorname{sen}(\pi t) + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \times \cos(\pi t)\right) = \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{4} + \frac{8\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\pi t + \frac{7\pi}{4}\right)$$

Assim temos que a amplitude A do oscilador é $\sqrt{2}$

Resposta: **Opção B**

2.

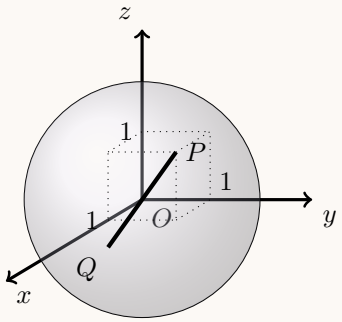
2.1. Determinando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$ e depois do vetor $\overrightarrow{u}$, temos:

$$\overrightarrow{OP} = P - O = (1,1,1) - (0,0,0) = (1,1,1)$$

$$\overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{OP} = -2(1,1,1) = (-2,-2,-2)$$

Assim, temos que as coordenadas do ponto Q são:

$$Q = P + \overrightarrow{u} = (1,1,1) + (-2,-2,-2) = (-1,-1,-1)$$



No contexto do problema, como $[OP]$ é um raio da superfície esférica (porque O é o centro da esfera e P um ponto da superfície esférica), então o ponto $Q = P - 2\overrightarrow{OP} = P + 2\overrightarrow{PO}$ é o ponto simétrico do ponto P relativamente a O, ou seja, $[QP]$ é um diâmetro da superfície esférica.

2.2. Como o ponto R pertence ao semieixo negativo das ordenadas, tem coordenadas da forma $(0,y_R,0)$, com $y_R \in \mathbb{R}^-$. Assim, fazendo a substituição na equação da superfície esférica, podemos calcular o valor de y_R:

$$0^2 + {y_R}^2 + 0^2 = 3 \Leftrightarrow 0 + {y_R}^2 + 0 = 3 \Leftrightarrow y_R = \pm\sqrt{3}$$

Como $y_R \in \mathbb{R}^-$, as coordenadas do do ponto R são $\left(0,-\sqrt{3},0\right)$.

Assim temos que, como O é a origem do referencial $\overrightarrow{OR} = \left(0,-\sqrt{3},0\right)$ e $\overrightarrow{OP} = (1,1,1)$, pelo que:

- $\left\|\overrightarrow{OR}\right\| = \sqrt{0^2 + (-\sqrt{3})^2 + 0^2} = \sqrt{0+3+0} = \sqrt{3}$
- $\left\|\overrightarrow{OP}\right\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

Logo, recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos\left(\overrightarrow{OR}\,\overrightarrow{OP}\right) = \frac{\overrightarrow{OR}\,.\,\overrightarrow{OP}}{\left\|\overrightarrow{OR}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OP}\right\|} = \frac{\left(0,-\sqrt{3},0\right).(1,1,1)}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{0-\sqrt{3}+0}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Logo, a amplitude do ângulo ROC, em graus, arredondado às unidades, é:

$$A\hat{O}C = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 125^\circ$$

3. Se pretendemos formar conjuntos com, pelo menos, três pessoas de entre um conjunto alargado de cinco pessoas, devemos considerar todos os conjuntos de três pessoas, com todos os conjuntos de quatro pessoas e ainda o único conjunto de cinco pessoas, ou seja:

$${}^5C_3 + {}^5C_4 + {}^5C_5 = 10 + 5 + 1 = 16$$

Resposta: **Opção D**

4. Como a soma dos dois últimos elementos da linha do triângulo de Pascal é 35, e o último número é 1, sabemos que o penúltimo número é $35-1=34$. Logo os elementos desta linha são todos da forma ${}^{34}C_k$, pelo que esta linha do triângulo de Pascal tem 35 elementos $({}^{34}C_0; {}^{34}C_1; {}^{34}C_2; {}^{34}C_3; \ldots; {}^{34}C_{34})$

   Como se trata de uma linha com um número ímpar de elementos, e pela simetria do triângulo de pascal podemos dividir estes elementos em dois grupos de 17 elementos (iguais dois a dois) e o número que ocupa a posição central, diferente de todos os restantes.

   Assim, escolhendo, ao acaso, dois elementos desta linha, podemos formar ${}^{35}C_2$ pares de números (casos possíveis), sendo que apenas 17 destes pares são compostos por números iguais (casos favoráveis), ou seja, o valor da probabilidade, na forma decimal, arredondado às centésimas, é :

   $$\frac{17}{{}^{35}C_2} = 0{,}03$$

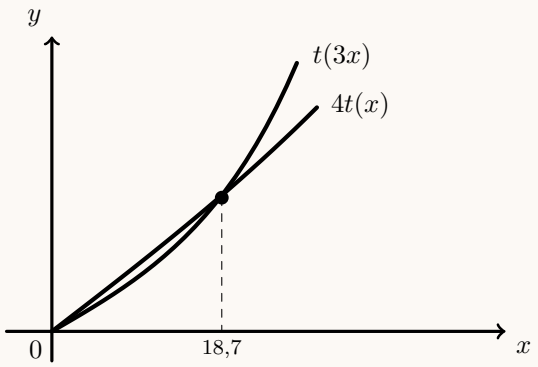
5. Como x é a distância, em metros, do ponto F à reta OC, designando por x_G a distância, em metros, do ponto G à reta OC, temos, de acordo com os dados do enunciado, que:

   - $x_G = 3 \times x$
   - o tempo que o ascensor demora a percorrer o arco que vai de F até G é $t(x_G) - t(x)$, pelo que:

   $$t(x_G) - t(x) = 3 \times t(x) \Leftrightarrow t(x_G) = 3 \times t(x) + t(x) \Leftrightarrow t(\underbrace{x_G}_{3x}) = 4 \times t(x) \Leftrightarrow t(3x) = 4t(x)$$

   Assim, visualizando na calculadora gráfica os gráficos das funções $t(3x)$ e $4t(x)$, numa janela compatível com o domínio da função t, reproduzido na figura ao lado, e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (às décimas) da abcissa do ponto de interseção, ou seja, a distância, em metros, do ponto F à reta OC:

   $$x \approx 18{,}7$$

6. Sabemos que, como $i^0 + i^1 + i^2 + i^3 = 1 + i - 1 - i = 0$ e como $i^n = i^{n+4} (\forall n \in \mathbb{N})$, então a soma de quaisquer quatro parcelas consecutivas é nula.

   O valor pedido é a soma de 2019 parcelas (porque incluí i^0), pelo que, como $2019 = 4 \times 504 + 3$, temos que:

   $$i^0 + i^1 + i^2 + \underbrace{i^3 + i^4 + i^5 + i^6}_{0} + \ldots + \underbrace{i^{2017} + i^{2016} + i^{2017} + i^{2018}}_{0} = i^0 + i^1 + i^2 = 1 + i - 1 = i$$

   Resposta: **Opção A**

7. Determinando uma expressão de $u_{n+1} - u_n$ temos

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)+5}{(n+1)+3} - \frac{n+5}{n+3} = \frac{n+6}{n+4_{(n+3)}} - \frac{n+5}{n+3_{(n+4)}} = \frac{(n+6)(n+3)-(n+5)(n+4)}{(n+4)(n+3)} =$$

$$= \frac{n^2+3n+6n+18-\left(n^2+4n+5n+20\right)}{(n+4)(n+3)} = \frac{n^2+3n+6n+18-n^2-4n-5n-20}{(n+4)(n+3)} =$$

$$= \frac{9n+18-9n-20}{(n+4)(n+3)} = \frac{-2}{(n+4)(n+3)}$$

Como $n > 0$, temos que $(n+4)(n+3) > 0$, e como o quociente de um número negativo (-2) por um positivo ($(n+4)(n+3)$), é sempre um valor negativo, temos que

$$u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ou seja, (u_n) é uma sucessão **monótona decrescente**.

8. Como $P(A \cup B) \leq 1$ e $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, temos que:

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow 0{,}6 + 0{,}7 - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow 1{,}3 - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$-P(A \cap B) \leq 1 - 1{,}3 \Leftrightarrow -P(A \cap B) \leq -0{,}3 \Leftrightarrow P(A \cap B) \geq 0{,}3$$

Assim, usando a definição de probabilidade condicionada e como $P(A) = 0{,}6$, vem que:

$$P(A \cap B) \geq 0{,}3 \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \geq \frac{0{,}3}{0{,}6} \Leftrightarrow P(B|A) \geq \frac{3}{6} \Leftrightarrow P(B|A) \geq \frac{1}{2}$$

9. Escrevendo a equação da reta r na forma reduzida, para identificar o valor do declive, temos:

$$ax + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow 2y = -ax - 1 \Leftrightarrow y = \frac{-ax-1}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{a}{2}x - \frac{1}{2}, \text{ e assim } m_r = -\frac{a}{2}$$

Calculando o valor do declive da reta s, através das coordenadas do vetor diretor, vem:

$$m_s = \frac{2a}{a} = 2$$

Como as retas r e s são paralelas, os respetivos declives são iguais, pelo que podemos calcular o valor de a:

$$m_r = m_s \Leftrightarrow -\frac{a}{2} = 2 \Leftrightarrow -a = 2 \times 2 \Leftrightarrow a = -4$$

Resposta: **Opção A**

Caderno 2

10.

10.1. Identificando as coordenadas de um vetor diretor da reta r, temos:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{3-y}{5}=\frac{z}{3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2}=\frac{-(-3+y)}{5}=\frac{z}{3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-5}=\frac{z}{3}$$

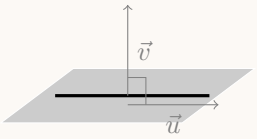
Ou seja, um vetor diretor da reta r é $\overrightarrow{u}=(2,-5,3)$ e como $3x-2z-3=0 \Leftrightarrow 3x+0y-2z-3=0$ então um vetor normal do plano α é $\overrightarrow{v}=(3,0,-2)$

Calculando o produto escalar dos dois vetores temos:

$$\vec{u}\,.\,\vec{v}=(2,-5,3)\,.\,(3,0,-2)=2\times 3-5\times 0+3\times(-2)=6-0-6=0$$

Como $\vec{u}\,.\,\vec{v}=0$, ou seja, os vetores são perpendiculares, ou seja, a reta r e o plano α são paralelos.

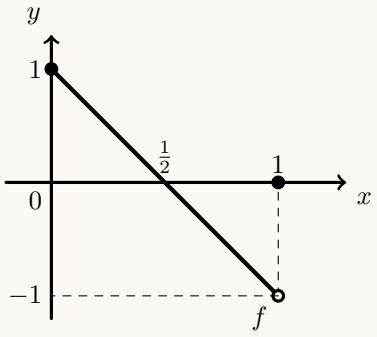
Considerando um ponto da reta r, por exemplo o ponto de coordenadas (1,3,0) podemos averiguar se o ponto também pertence ao plano α: $3(1)-2(0)-3=0 \Leftrightarrow 3-0-3=0 \Leftrightarrow 0=0$ Assim, como a reta r é paralela ao plano α e um ponto da reta também pertence ao plano, podemos concluir que r está contida em α



Resposta: **Opção D**

10.2. Considerando, por exemplo a função g definida pelo gráfico reproduzido na figura ao lado, e compatível com as condições do enunciado, podemos verificar que:

- a função tem um zero $\left(f\left(\frac{1}{2}\right)=0\right)$
- a função é limitada $\left(|f(x)|\leq 1, \forall x\in[0,1]\right)$
- a função tem um máximo $\left(f(x)\leq f(0), \forall x\in[0,1]\right)$



Assim, de entre as afirmações apresentadas, a única que não pode ser rejeitada com o exemplo da função f, é a de que a função g não é contínua.

Resposta: **Opção D**

11. Como $-16 = 16e^{i(\pi)}$, resolvendo a equação $z^4 + 16 = 0$, temos que:

$$z^4 + 16 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -16 \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{-16} \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{16}e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)}, k \in \{0,1,2,3\}$$

Ou seja, temos 4 números complexos z tais que $z^4 + 16 = 0$:

- $k = 0 \rightarrow z_1 = \sqrt[4]{16}e^{i\left(\frac{\pi+0}{4}\right)} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$
- $k = 1 \rightarrow z_2 = \sqrt[4]{16}e^{i\left(\frac{\pi+2\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$
- $k = 2 \rightarrow z_3 = \sqrt[4]{16}e^{i\left(\frac{\pi+4\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$
- $k = 3 \rightarrow z_4 = \sqrt[4]{16}e^{i\left(\frac{\pi+6\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(\frac{7\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

Como $\text{Re}(z) < 0 \Leftrightarrow \left(-\pi < \text{Arg}(z) < -\frac{\pi}{2} \vee \frac{\pi}{2} < \text{Arg}(z) < \pi\right)$, os elementos do conjunto A são os números z_2 e z_3, ou seja:

- $z_2 = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$
- $z_3 = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

12.

12.1. Da análise da tabela de distribuição de probabilidades da variável X podemos verificar que:

$$P(X = 1) = \frac{8}{27}$$

Como o produto dos números saídos nos três lançamentos do dado é 1, o que ocorre apenas se sair face numerada com o número 1 em todos os lançamentos, designado por n o número de faces numeradas com o número 1 no dado, temos que:

$$P(X = 1) = \frac{n}{6} \times \frac{n}{6} \times \frac{n}{6} = \frac{n^3}{6^3} = \frac{n^3}{216}$$

Desta forma podemos calcular o valor de n, resolvendo a equação:

$$\frac{n^3}{216} = \frac{8}{27} \Leftrightarrow n^3 = \frac{8 \times 216}{27} \Leftrightarrow n = \sqrt[3]{\frac{2^3 \times 6^3}{3^3}} \Leftrightarrow n = \frac{2 \times 6}{3} \Leftrightarrow n = \frac{2 \times 2 \times 3}{3} \Leftrightarrow n = 4$$

Resposta: **Opção C**

12.2. Calculando o valor do limite, vem que:

$$\lim\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n} = \lim\left(\frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^{2n} = \left(\lim\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n}\right)^2 = \left(\frac{\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right)^2 = \left(\frac{e^2}{e^1}\right)^2 =$$

$$= \left(e^{2-1}\right)^2 = \left(e^1\right)^2 = e^2$$

Resposta: **Opção C**

13. Para estudar o sentido das concavidades do gráfico e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da primeira e depois da segunda derivadas:

- $f'(x) = \left(x^3 + 6\ln x\right)' = \left(x^3\right)' + \left(6\ln x\right)' = 3x^2 + 6\left(\ln x\right)' = 3x^2 + 6 \times \frac{1}{x} = 3x^2 + \frac{6}{x}$
- $f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(3x^2 + \frac{6}{x}\right)' = \left(3x^2\right)' + \left(\frac{6}{x}\right)' = 2 \times 3x + \frac{(6)' \times x - 6 \times (x)'}{x^2} =$

$$= 6x + \frac{0 \times x - 6 \times 1}{x^2} = 6x - \frac{6}{x^2}$$

Como os pontos de inflexão são zeros da segunda derivada, vamos determiná-los, no domínio da função, ou seja, para $x \in \mathbb{R}^+$:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - \frac{6}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{6x}{1}{}_{x^2} - \frac{6}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{6x^3}{x^2} - \frac{6}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{6x^3 - 6}{x^2} = 0 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} 6x^3 - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x^3 = 6 \Leftrightarrow x^3 = \frac{6}{6} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1} \Leftrightarrow x = 1$$

Assim, estudando o sinal da segunda derivada para relacionar com o sentido das concavidades, vem:

x	0		1	$+\infty$
$6x^3 - 6$	n.d.	$-$	0	$+$
x^2	n.d.	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	n.d.	$-$	0	$+$
$f(x)$	n.d.	∩	Pt. I.	∪

Calculando a ordenada do ponto de inflexão, temos que:

$$f(1) = 1^3 + 6\ln(1) = 1 + 6 \times 0 = 1$$

Logo, podemos concluir que o gráfico de f:

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]0,1]$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $[1, +\infty[$
- tem um único ponto de inflexão cujas coordenadas são (1,1)

14.

14.1. Para mostrar que a função h é contínua em $x=0$, temos que verificar que $h(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)$:

- $h(0)=\dfrac{e^0}{0+1}=\dfrac{1}{1}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{e^x}{x+1}\right)=\dfrac{e^0}{0+1}=\dfrac{1}{1}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0^-}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}(x^2)}\right)=\dfrac{\operatorname{sen}^2(0)}{\operatorname{sen}(0^2)}=\dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}(x^2)}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\operatorname{sen}x\times\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}(x^2)}\times\frac{x^2}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\times\frac{\operatorname{sen}x}{x}\times\frac{x^2}{\operatorname{sen}(x^2)}\right)=$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)}_{\text{Lim. Notável}}\times\underbrace{\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)}_{\text{Lim. Notável}}\times\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x^2}{\operatorname{sen}(x^2)}\right)=1\times 1\times\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x^2}{\operatorname{sen}(x^2)}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x^2}{\operatorname{sen}(x^2)}\right)=$$

(fazendo $y=x^2$, temos que se $x\to 0^-$, então $y\to 0^+$)

$$=\lim_{y\to 0^-}\left(\frac{y}{\operatorname{sen}y}\right)=\lim_{y\to 0^-}\left(\frac{1}{\frac{\operatorname{sen}y}{y}}\right)=\frac{\lim\limits_{y\to 0^-}1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to 0^-}\left(\frac{\operatorname{sen}y}{y}\right)}_{\text{Lim. Notável}}}=\frac{1}{1}=1$$

Assim, temos que, como $\lim\limits_{x\to 0^-}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=h(0)$, a função h é contínua em $x=0$

14.2. Como a função h é contínua (é contínua no intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{3},0\right[$ porque resulta do quociente e do produto de funções contínuas, é contínua em $x=0$, de acordo com o item anterior, e é contínua no intervalo $[0,+\infty[$ porque é o quociente de funções contínuas), então o gráfico de h não admite qualquer assíntota vertical.

Como o domínio da função é $\left[-\dfrac{\pi}{3},+\infty\right[$, só poderá existir uma assíntota oblíqua quando $x\to+\infty$. Desta forma, vamos averiguar a existência de uma assíntota de equação $y=mx+b$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{x+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}=$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}}_{\text{Lim. Notável}}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=+\infty\times\frac{1}{1+\frac{1}{+\infty}}=+\infty\times\frac{1}{1+0}=+\infty\times 1=+\infty$$

Assim, como $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}$ não é um valor finito, não existe qualquer assíntota oblíqua do gráfico de h.

14.3. Começamos por determinar a expressão da derivada da função h, para $x \in [0, +\infty[$:

$$h'(x) = \left(\frac{e^x}{x+1}\right)' = \frac{(e^x)'(x+1) - e^x(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{e^x(x+1) - e^x(1)}{(x+1)^2} = \frac{e^x(x+1-1)}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{e^x(x)}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$$

Calculando os zeros da derivada, no intervalo $[0, +\infty[$, vem:

$$\frac{xe^x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow xe^x = 0 \wedge \underbrace{(x+1)^2 \neq 0}_{\text{Prop. Verdadeira, } x \geq 0} \Leftrightarrow x = 0 \vee \underbrace{e^x = 0}_{\text{Impossível}} \Leftrightarrow x = 0$$

Como a derivada é contínua e não tem zeros no intervalo $[0, +\infty[$, tem sinal constante neste intervalo. Podemos verificar que é positiva, (por exemplo, $f'(1) = \frac{1 \times e^1}{(1+1)^2} = \frac{e}{2^2} = \frac{e}{4}$), e assim concluir que h é estritamente crescente em $[0, +\infty[$

Resposta: **Opção B**

15. Considerando a monotonia da função f no domínio definido $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, temos:

x	$-\frac{\pi}{6}$		0		$\frac{\pi}{3}$
$f(x)$	min	↗	Máx	↘	min

Temos ainda que:

- $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

Como $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ então $\frac{1}{2}$ é um mínimo absoluto, pelo que o contradomínio da função f é $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Resposta: **Opção C**

16. Como ambas as retas passam na origem do referencial, ambas têm ordenada na origem nula, pelo que a equação reduzida da reta r é $y = mx$.

Assim, a ordenada do ponto P é:

$$y_P = ma$$

Considerando os pontos $P'(a,0)$ e $Q'(0,a)$, a reta r', perpendicular à reta r que contém o ponto O, e ainda o ponto Q'' , pertencente à reta r', tal que $\overline{OP} = \overline{OQ''}$, temos que:

- as áreas dos triângulos $[OPP']$ e $[OQ'Q'']$ são iguais $\left(A_{[OPP']} = A_{[OQ'Q'']}\right)$
- a reta r' é definida pela equação $y = -\frac{1}{m}x$ e por isso é simétrica, relativamente ao eixo Oy, à reta s (definida pela equação $y = \frac{1}{m}x$)
- as áreas dos triângulos $[OQQ']$ e $[OQ'Q'']$ também são iguais, e assim, são ambas iguais à área do triângulo $[OPP']$
- como as coordenadas do ponto P são (a,ma), temos que as coordenadas do ponto Q'' são $(-ma,a)$ e as coordenadas do ponto Q' são (ma,a)

Assim, considerando o ponto $R(a,a)$ e o quadrado $[OP'RQ']$ temos que:

$$A_{[OPQ]} = A_{[OP'RQ']} - A_{[OP'P]} - A_{[OQ'Q]} - A_{[PQR]} =$$

$$= a^2 - \frac{a \times ma}{2} - \frac{a \times ma}{2} - \frac{(a-ma) \times (a-ma)}{2} =$$

$$= a^2 - 2 \times \frac{ma^2}{2} - \frac{(a-ma)^2}{2} =$$

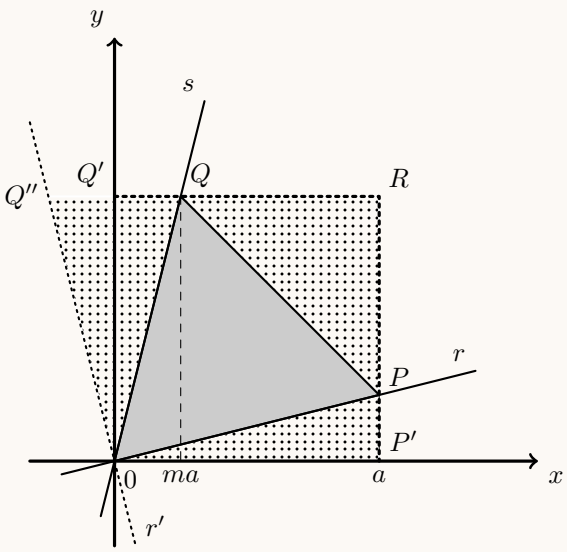
$$= a^2 - ma^2 - \frac{a^2 - 2ma^2 + m^2a^2}{2} =$$

$$= a^2 - ma^2 - \frac{a^2}{2} + \frac{2ma^2}{2} - \frac{^2a^2}{2} =$$

$$= a^2 - ma^2 - \frac{a^2}{2} + ma^2 - \frac{m^2a^2}{2} =$$

$$= \frac{a^2}{2} - \frac{m^2a^2}{2} =$$

$$= \frac{a^2}{2}(1 - m^2)$$



REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2018

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Critérios de Classificação

10 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de resposta restrita, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à fórmula da probabilidade condicionada», «recorrendo à calculadora gráfica»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

Caderno 1

1.1. ..... **8 pontos**

Opção **(B)**

1.2. ..... **8 pontos**

Opção **(B)**

2.1. ..... **12 pontos**

Determinar as coordenadas do vetor $\vec{u}$ ..... 4 pontos

Obter as coordenadas do ponto Q $((-1,-1,-1))$ ..... 3 pontos

Referir o significado de $[PQ]$

(O segmento de reta $[PQ]$ é um diâmetro da superfície esférica.) ..... 5 pontos

2.2. ..... **12 pontos**

Determinar as coordenadas do ponto R ..... 3 pontos

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OR}$ ..... 1 ponto

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$ ..... 1 ponto

Calcular $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OP}$ ..... 2 pontos

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{OR}$ ..... 1 ponto

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{OP}$ ..... 1 ponto

Escrever $-\sqrt{3} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \cos \alpha$ (ou equivalente) ..... 1 ponto

Obter a amplitude do ângulo ROP (125°) ..... 2 pontos

3. ..... **8 pontos**

Opção **(D)**

4. ..... **12 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Apresentar o número de casos possíveis: ${}^{35}C_2$ (**ver nota 1**) ..... 5 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis: 17 (**ver nota 2**) ..... 5 pontos

Obter a probabilidade pedida (**ver nota 3**) $(0{,}03)$ ..... 2 pontos

2.º Processo

Apresentar o número de casos possíveis: $^{35}A_2$ (**ver nota 1**) ..... 5 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis: 34 (**ver nota 2**) ..... 5 pontos

Obter a probabilidade pedida (**ver nota 3**) $(0{,}03)$ ..... 2 pontos

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a $^{35}C_2$ (1.º processo de resolução) ou a $^{35}A_2$ (2.º processo de resolução), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

2. Se o número de casos favoráveis apresentado não for 17 (1.º processo de resolução) ou 34 (2.º processo de resolução), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

3. Se a etapa relativa ao número de casos possíveis e a etapa relativa ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. A pontuação de 0 pontos também deve ser atribuída caso o valor obtido não pertença ao intervalo $[0,1]$

5. ..... **12 pontos**

Equacionar o problema $\left(t(3x) = 4t(x) \text{ ou equivalente}\right)$ ..... 6 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota**) ..... 3 pontos

Apresentar o valor pedido $(18{,}7)$ ..... 3 pontos

Nota – Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

6. ..... **8 pontos**

Opção **(A)**

7. ..... **12 pontos**

Escrever $u_{n+1} = \dfrac{n+6}{n+4}$ ..... 2 pontos

Obter $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-2}{(n+4)(n+3)}$ ..... 5 pontos

Referir que a expressão $\dfrac{-2}{(n+4)(n+3)}$ é negativa, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ ..... 3 pontos

Concluir que a sucessão é decrescente ..... 2 pontos

8. ..... **13 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $P(A \cup B) \leq 1$ ..... 3 pontos

Escrever $0{,}6 + 0{,}7 - P(A \cap B) \leq 1$ ..... 3 pontos

Obter $P(A \cap B) \geq 0{,}3$ ..... 2 pontos

Escrever $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} \geq \frac{0{,}3}{0{,}6}$ ..... 3 pontos

Obter $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} \geq \frac{1}{2}$ ..... 1 ponto

Concluir que $P(B|A) \geq \frac{1}{2}$ ..... 1 ponto

2.º Processo

Escrever $P(B|A) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \geq \frac{1}{2}$ ..... 2 pontos

Escrever $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{P(A) + P(B) - P(A \cup B)}{P(A)} \geq \frac{1}{2}$ ..... 4 pontos

Escrever $\frac{P(A) + P(B) - P(A \cup B)}{P(A)} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{0{,}6 + 0{,}7 - P(A \cup B)}{0{,}6} \geq \frac{1}{2}$ ..... 1 ponto

Escrever $\frac{0{,}6 + 0{,}7 - P(A \cup B)}{0{,}6} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(A \cup B) \leq 1$ ..... 3 pontos

Referir que a desigualdade $P(A \cup B) \leq 1$ é verdadeira, para quaisquer acontecimentos A e B ..... 3 pontos

9. ..... **8 pontos**

Opção **(A)**

Caderno 2

10.1. ..... **8 pontos**

Opção **(D)**

10.2. ..... **8 pontos**

Opção **(D)**

11. ..... **12 pontos**

Escrever $z^4 = 16\text{cis}\pi$ ou $z^4 = 16e^{i\pi}$ ..... 1 ponto

Escrever $z = 2\text{cis}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)$ ou $z = 2e^{i\frac{\pi + 2k\pi}{4}}$ $\left(\text{com } k \in \{0,1,2,3\}\right)$ ..... 2 pontos

Obter as soluções da equação ..... 4 pontos

Identificar as soluções da equação que são elementos do conjunto A ..... 3 pontos

Escrever essas soluções na forma algébrica $\left(-\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i \text{ e } -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i\right)$ .. 2 pontos

12.1. ..... **8 pontos**

Opção **(C)**

12.2. ..... **8 pontos**

Opção **(C)**

13. ..... **13 pontos**

Determinar $f'(x)$ ..... 2 pontos

Determinar $f''(x)$ (**ver nota 1**)..... 2 pontos

Determinar o zero de f'' ..... 3 pontos

- Escrever $f''(x) = 0$ ..... 1 ponto
- Obter o zero de f'' ..... 2 pontos

Apresentar um quadro de sinal de f'' e de sentido da concavidade do gráfico de f (ou equivalente) ..... 3 pontos

Referir que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]0,1]$ (**ver nota 2**) ..... 1 ponto

Referir que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $[1,+\infty[$ (**ver nota 3**) ..... 1 ponto

Indicar as coordenadas do ponto de inflexão do gráfico da função $f\ \left((1,1)\right)$ ..... 1 ponto

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a segunda derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

2. Se, na resposta, for referido que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]0,1[$, em vez de em $]0,1]$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

3. Se, na resposta, for referido que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $]1,+\infty[$, em vez de em $[1,+\infty[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

14.1. ..... **13 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)$ ..... 8 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}(x^2)}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}(x^2)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \times \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2}{\operatorname{sen}(x^2)}$ .... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \times \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2}{\operatorname{sen}(x^2)} =$

$= 1 \times \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2}{\operatorname{sen}(x^2)}$ ..... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2}{\operatorname{sen}(x^2)} \underset{y=x^2}{=} \lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{y}{\operatorname{sen} y}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{y}{\operatorname{sen} y} = \dfrac{1}{\lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} y}{y}}$ ..... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = 1$ ..... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$ ..... 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x}{x+1}$ ..... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 1$ ..... 2 pontos

Obter $h(0) = 1$ ..... 1 ponto

Concluir que a função h é contínua ..... 1 ponto

14.2. ..... **13 pontos**

Justificar que o gráfico da função h não tem assíntotas verticais ..... 4 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{e^x}{x+1}}{x}$ ..... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{e^x}{x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x^2}\times\dfrac{x}{x+1}\right)$ ..... 3 pontos

Obter $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}=+\infty$ ..... 2 pontos

Concluir que o gráfico da função h não tem assíntotas não verticais ..... 2 pontos

14.3. ..... **8 pontos**

Opção **(B)**

15. ..... **8 pontos**

Opção **(C)**

16. ..... **12 pontos**

Identificar as coordenadas do ponto P (a,ma) ..... 1 ponto

Identificar as coordenadas do ponto Q (ma,a) ..... 3 pontos

Determinar as coordenadas do ponto M, ponto médio do segmento $[PQ]$ .... 2 pontos

Determinar $\overline{OM}$ ..... 2 pontos

Determinar $\overline{PQ}$ ..... 2 pontos

Obter a área do triângulo $[OPQ]$, em função de a e de m ..... 2 pontos

COTAÇÕES

Item											
Cotação (em pontos)											
1.1.	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	
8		12	12	8	12	12	8	12	13	8	**105**
10.1.	**10.2.**	**11.**	**12.1.**	**12.2.**	**13.**	**14.1.**	**14.2.**	**14.3.**	**15.**	**16.**	
8		12	8		13	13	13	8	8	12	**95**
TOTAL											**200**

2019

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2019

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Caderno 1

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 6 Páginas

Caderno 1: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.
É permitido o uso de calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.

Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens de cada caderno encontram-se no final do respetivo caderno.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr ($\alpha -$ amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r -$ raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ ($\alpha -$ amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r -$ raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ ($r -$ raio da base; $g -$ geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ ($r -$ raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ ($r -$ raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis}\theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis}\theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\ e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\ e^u$

$(a^u)' = u'\ a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$

Os vértices A e C têm coordenadas $(2,1,0)$ e $(0,-1,2)$, respetivamente.

O vértice V tem coordenadas $(3,-1,2)$

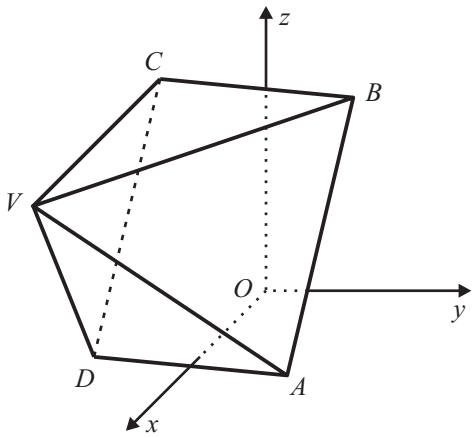


Figura 1

1.1. Determine a amplitude do ângulo VAC

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

1.2. Determine uma equação do plano que contém a base da pirâmide.

Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$

2.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 2.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 2.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, implementado em 2015-2016 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

2.1. Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio 5 e desvio padrão $\frac{1}{2}$

Qual é o valor, arredondado às milésimas, de $P(X > 6)$?

(A) $0{,}046$ **(B)** $0{,}042$ **(C)** $0{,}023$ **(D)** $0{,}021$

PMC2015

2.2. Qual é o limite da sucessão de termo geral $\left(\frac{n-2}{n}\right)^{3n}$?

(A) $\frac{1}{e^3}$ **(B)** e^3 **(C)** $\frac{1}{e^6}$ **(D)** e^6

3. Uma caixa contém bolas de várias cores, indistinguíveis ao tato, umas com um logotipo desenhado e outras não. Das bolas existentes na caixa, dez são amarelas. Dessas dez bolas, três têm o logotipo desenhado.

3.1. Retira-se, ao acaso, uma bola da caixa.

Sabe-se que a probabilidade de ela não ser amarela ou de não ter um logotipo desenhado é igual a $\frac{15}{16}$

Determine o número de bolas que a caixa contém.

3.2. Dispõem-se, ao acaso, as dez bolas amarelas, lado a lado, em linha reta.

Qual é a probabilidade de as três bolas com o logotipo desenhado ficarem juntas?

(A) $\frac{1}{16}$ **(B)** $\frac{1}{15}$ **(C)** $\frac{1}{14}$ **(D)** $\frac{1}{13}$

4. Considere todos os números naturais de sete algarismos que se podem escrever utilizando dois algarismos 5, quatro algarismos 6 e um algarismo 7

Determine quantos destes números são ímpares e maiores do que seis milhões.

5. Uma lente de contacto é um meio transparente limitado por duas faces, sendo cada uma delas parte de uma superfície esférica. Na Figura 2, pode observar-se uma lente de contacto.



Figura 2

Na Figura 3, está representado um corte longitudinal de duas superfícies esféricas, uma de centro C_1 e raio r_1 e outra de centro C_2 e raio r_2, com $r_2 > r_1$, que servem de base à construção de uma lente de contacto, representada a sombreado na figura.

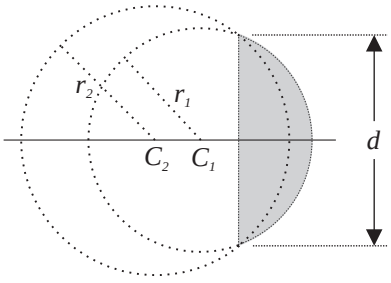


Figura 3

Seja $x = \overline{C_1 C_2}$

Sabe-se que o diâmetro, d, da lente é dado por

$$\frac{\sqrt{\left[(r_1 + r_2)^2 - x^2\right]\left[x^2 - (r_1 - r_2)^2\right]}}{x}, \text{ com } r_2 - r_1 < x < \sqrt{r_2^2 - r_1^2}$$

Uma lente de contacto foi obtida a partir de duas superfícies esféricas com $7\,\text{mm}$ e $8\,\text{mm}$ de raio, respetivamente.

O diâmetro dessa lente excede em $9\ \text{mm}$ a distância, x, entre os centros das duas superfícies esféricas.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de x, sabendo-se que esse valor é único no intervalo $]r_2 - r_1\,,\sqrt{r_2^2 - r_1^2}[$

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor pedido em milímetros, arredondado às décimas.

6. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z = -1 + 2i$

Seja θ o menor argumento positivo do número complexo $\overline{z}$ (conjugado de z).

A qual dos intervalos seguintes pertence θ?

(A) $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ **(B)** $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ **(C)** $\left]\pi, \frac{5\pi}{4}\right[$ **(D)** $\left]\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$

7. Seja r um número real maior do que 1

Sabe-se que r é a razão de uma progressão geométrica de termos positivos.

Sabe-se ainda que, de dois termos consecutivos dessa progressão, a sua soma é igual a 12 e a diferença entre o maior e o menor é igual a 3

Determine o valor de r

8. Sejam a e b dois números reais positivos tais que $a > b$

Sabe-se que $a + b = 2(a - b)$

Qual é o valor, arredondado às décimas, de $\ln(a^2 - b^2) - 2\ln(a + b)$?

(A) $0{,}7$ **(B)** $1{,}4$ **(C)** $-0{,}7$ **(D)** $-1{,}4$

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item											
Cotação (em pontos)											
1.1.	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	
12	12	8		13	8	12	12	8	12	8	**105**

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 635

1.ª Fase

CADERNO 1

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2019

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Caderno 2

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 5 Páginas

Caderno 2: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.

Não é permitido o uso de calculadora.

9.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 9.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 9.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, implementado em 2015-2016 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

9.1. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os planos α, β e γ, definidos pelas equações $x+y+z=1$, $2x+2y+2z=1$ e $x+y=0$, respetivamente.

A intersecção dos planos α, β e γ é

(A) o conjunto vazio. **(B)** um ponto. **(C)** uma reta. **(D)** um plano.

PMC2015

9.2. Na Figura 4, estão representados, num referencial o.n. xOy, uma elipse e um círculo, ambos centrados na origem do referencial. Os focos da elipse, F_1 e F_2, pertencem ao eixo Ox

Sabe-se que:

- a distância focal e o eixo menor da elipse são iguais ao diâmetro do círculo;
- a área do círculo é igual a 9π

Qual das equações seguintes é a equação reduzida da elipse?

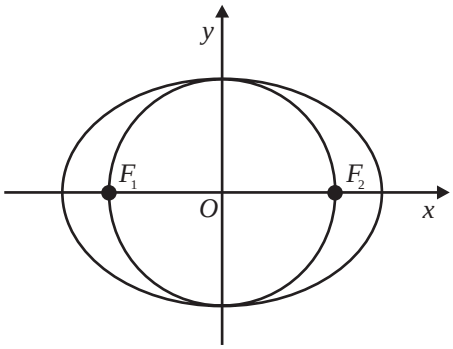


Figura 4

(A) $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$ **(B)** $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{9}=1$

(C) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{20}=1$ **(D)** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{18}=1$

10. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, $z_1=3+4i$ e $z_2=4+6i$

Seja $w=\frac{z_1+i^6+2\overline{z_1}}{z_1-z_2}$

No plano complexo, a condição $|z|=|w| \wedge \text{Im}(z)\geq 0 \wedge \text{Re}(z)\geq 0$ define uma linha.

Determine o comprimento dessa linha.

11. Qual é a solução da equação $2\cos x + 1 = 0$ no intervalo $[-\pi, 0]$?

(A) $-\frac{5\pi}{6}$ **(B)** $-\frac{2\pi}{3}$ **(C)** $-\frac{\pi}{3}$ **(D)** $-\frac{\pi}{6}$

12.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 12.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 12.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, implementado em 2015-2016 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

12.1. Um dado cúbico equilibrado tem uma face numerada com o número -1 e cinco faces numeradas com o número 1

Lança-se este dado duas vezes.

Seja X a variável aleatória «soma dos números saídos nos dois lançamentos».

Qual é o valor de k para o qual $P(X = k) = \frac{5}{18}$?

(A) 0 **(B)** 2 **(C)** -2 **(D)** -1

PMC2015

12.2. Um ponto P desloca-se numa reta numérica, no intervalo de tempo $I = [0, 10]$ (medido em segundos), de tal forma que a respetiva abcissa é dada por $x(t) = 3\cos\left(\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$, com $t \in I$

Qual é o período, em segundos, deste oscilador harmónico?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 2π **(D)** 3π

13. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x} & \text{se } x<0\\ 0 & \text{se } x=0\\ \dfrac{x}{x-\ln x} & \text{se } x>0\end{cases}$$

13.1. Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 1

13.2. Averigue se a função f é contínua no ponto 0

Justifique a sua resposta.

14. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por $g(x)=\dfrac{e^{-x}}{x}$

14.1. Estude a função g quanto à monotonia e determine, caso existam, os extremos relativos.

14.2. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x)=g(x)+2x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Sabe-se que o gráfico da função h tem uma assíntota oblíqua.

Qual é o declive dessa assíntota?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** e **(D)** e^2

15. Na Figura 5, estão representados, num referencial o.n. xOy, os pontos A e B, de abcissas positivas, e as retas OB e r

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo Ox
- a reta OB é definida pela equação $y=\dfrac{4}{3}x$
- a reta r contém a bissetriz do ângulo AOB

Determine a equação reduzida da reta r

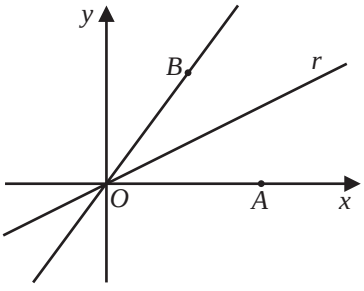


Figura 5

FIM

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item											
Cotação (em pontos)											
9.1.	**9.2.**	**10.**	**11.**	**12.1.**	**12.2.**	**13.1.**	**13.2.**	**14.1.**	**14.2.**	**15.**	
8		13	8	8		13	14	13	8	10	**95**

TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)	**200**

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 635

1.ª Fase

CADERNO 2

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2019

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Critérios de Classificação

11 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Se forem apresentadas respostas a dois itens em alternativa, será classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de resposta restrita, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	**Classificação**
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à fórmula da probabilidade condicionada», «recorrendo à calculadora gráfica»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

Situação	Classificação
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

Caderno 1

1.1. ..... **12 pontos**

Determinar as coordenadas do ponto A ..... 2 pontos

Identificar as coordenadas do ponto B ..... 2 pontos

Determinar $\overline{AB}$ ..... 3 pontos

Determinar $\overline{BG}$ ..... 3 pontos

Obter o volume do paralelepípedo (300) ..... 2 pontos

1.2. ..... **12 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, quatro processos.

1.º Processo

Escrever $(x,y,z)=(1,-4,3)+k(3,4,0),\ k\in\mathbb{R}$ ..... 3 pontos

Escrever as coordenadas de um ponto genérico da reta r, em função de k .... 3 pontos

Obter uma equação na variável k, substituindo x e y na equação do plano ABC pelas coordenadas desse ponto genérico da reta r ..... 3 pontos

Obter o valor de k ..... 1 ponto

Obter as coordenadas do ponto pedido $\left((4,0,3)\right)$ ..... 2 pontos

2.º Processo

Escrever $\frac{x-1}{3}=\frac{y+4}{4}\wedge z=3$ ..... 4 pontos

Escrever $\begin{cases}\frac{x-1}{3}=\frac{y+4}{4}\\ z=3\\ 3x+4y-12=0\end{cases}$ ..... 4 pontos

Obter as coordenadas do ponto pedido $\left((4,0,3)\right)$ ..... 4 pontos

3.º Processo

Designemos por $I(x,\,y,\,z)$ o ponto de intersecção da reta r com o plano ABC e por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não colineares deste plano.

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{PI}$, em função de x, y e z ..... 1 ponto

Determinar as coordenadas dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ..... 2 pontos

Escrever $\begin{cases}\overrightarrow{PI}\,.\,\vec{u}=0\\ \overrightarrow{PI}\,.\,\vec{v}=0\\ 3x+4y-12=0\end{cases}$ ..... 3 pontos

Obter $\begin{cases} 4x-3y-16=0 \\ 3-z=0 \\ 3x+4y-12=0 \end{cases}$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

Obter as coordenadas do ponto I $\left((4,0,3)\right)$ ..... 3 pontos

4.º Processo

Designemos por $I(x, y, z)$ o ponto de intersecção da reta r com o plano ABC

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{PI}$, em função de x, y e z ..... 1 ponto

Escrever $\begin{cases} (x-1, y+4, z-3)=k(3,4,0),\ k\in\mathbb{R} \\ 3x+4y-12=0 \end{cases}$ ..... 4 pontos

Obter uma equação na variável k ..... 4 pontos

Obter o valor de k ..... 1 ponto

Obter as coordenadas do ponto I $\left((4,0,3)\right)$ ..... 2 pontos

1.3. ..... **12 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Apresentar o número de casos possíveis: ${}^8A_2$ (**ver nota 1**) ..... 5 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis: $2\times{}^4A_2$ (**ver nota 2**) ..... 5 pontos

Obter a probabilidade pedida (**ver nota 3**) $\left(\frac{3}{7}\right)$ ..... 2 pontos

2.º Processo

Apresentar o número de casos possíveis: ${}^8C_2$ (**ver nota 1**) ..... 5 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis: $2\times{}^4C_2$ (**ver nota 2**) ..... 5 pontos

Obter a probabilidade pedida (**ver nota 3**) $\left(\frac{3}{7}\right)$ ..... 2 pontos

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a ${}^8A_2$ (1.º processo de resolução) ou a ${}^8C_2$ (2.º processo de resolução), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se a expressão apresentada for ${}^4A_2$ ou equivalente (1.º processo de resolução) ou ${}^4C_2$ ou equivalente (2.º processo de resolução), a pontuação a atribuir nesta etapa é 2 pontos. Caso a expressão apresentada seja incorreta e diferente das expressões referidas, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
3. Se a etapa relativa ao número de casos possíveis e a etapa relativa ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. A mesma pontuação de 0 pontos deve ser atribuída caso o valor obtido não pertença ao intervalo $[0,1]$

2.1. ..... **13 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Designemos por A o acontecimento «o aluno escolhido é rapaz» e por B o acontecimento «o aluno escolhido frequenta o 10.º ano».

Identificar o pedido com $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ ..... 2 pontos

Escrever $P(A|B) = \frac{3}{5}$ ..... 2 pontos

Escrever $P(A) = \frac{11}{21}$ ..... 1 ponto

Escrever $P(A \cap B) = \frac{1}{7}$ ..... 2 pontos

Obter $P(B)$ ..... 1 ponto

Escrever $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B)$ ..... 2 pontos

Escrever $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$ ..... 1 ponto

Responder ao problema $(0{,}38)$ ..... 2 pontos

2.º Processo

Construir uma tabela de dupla entrada cujas entradas sejam «é rapaz, não é rapaz» e «frequenta o 10.º ano, não frequenta o 10.º ano» ..... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa à informação «$\frac{1}{7}$ dos alunos da escola são rapazes e frequentam o 10.º ano» ..... 2 pontos

Preencher a célula da tabela relativa à informação «$\frac{11}{21}$ dos alunos da escola são rapazes» ..... 2 pontos

Obter o valor a colocar na célula da tabela relativa à probabilidade de o aluno frequentar o 10.º ano ..... 3 pontos

Preencher as restantes células da tabela necessárias à resolução do problema ..... 3 pontos

Responder ao problema $(0{,}38)$ ..... 2 pontos

3.º Processo

Construir um diagrama em árvore de cuja raiz saem os ramos «frequenta o o 10.º ano» e «não frequenta o 10.º ano» e, de cada um destes, saem dois novos ramos, «é rapaz» e «não é rapaz» ..... 1 ponto

Escrever $\frac{3}{5}$ no respetivo ramo ..... 1 ponto

Escrever $\frac{1}{7}$ na extremidade do ramo referido na etapa anterior ..... 1 ponto

Calcular a probabilidade de um aluno frequentar o 10.º ano e escrevê-la no respetivo ramo ..... 3 pontos

Escrever, no respetivo ramo, a probabilidade de um aluno não frequentar o 10.º ano ..... 1 ponto

Calcular a probabilidade de um aluno não frequentar o 10.º ano e ser rapaz e escrevê-la no local adequado ..... 3 pontos

Responder ao problema $(0{,}38)$ ..... 3 pontos

2.2. ..... **8 pontos**

Opção **(D)**

3.1. ..... **8 pontos**

Opção **(B)**

3.2. ..... **8 pontos**

Opção **(B)**

4. ..... **12 pontos**

Apresentar uma equação que permite resolver o problema

$\left(60+10\log_{10}(I+150)=0{,}014\left(60+10\log_{10}I\right)^2\right)$ (**ver notas 1** e **2**) ..... 4 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota 3**) ..... 4 pontos

Apresentar o valor pedido (50) ..... 4 pontos

Notas:

1. Se a equação apresentada não traduzir corretamente o problema, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

2. Se a resposta se limitar à apresentação da equação $N(I+150)=0{,}014[N(I)]^2$, a classificação a atribuir à resposta é 2 pontos.

3. Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

5. ..... **8 pontos**

Opção **(D)**

6. ..... **12 pontos**

Escrever $\frac{a}{2}=\frac{b}{a}$ ..... 4 pontos

Escrever $b-a+2=2-b$ ..... 4 pontos

Escrever $\frac{a}{2}=\frac{b}{a} \wedge b-a+2=2-b$ (ou equivalente) ..... 1 ponto

Obter o valor de a e o valor de b $\left(a=1 \text{ e } b=\frac{1}{2}\right)$ ..... 3 pontos

7. ..... **8 pontos**

Opção **(A)**

Caderno 2

8. ..... **13 pontos**

Escrever $\overline{z}_2 = 1 + 2i$ ..... 2 pontos

Escrever $w = \dfrac{3(2-3i) - i(1+2i)}{1-i}$ ..... 2 pontos

Obter $w = \dfrac{8-10i}{1-i}$ ..... 2 pontos

Escrever $w = \dfrac{8-10i}{1-i} \times \dfrac{1+i}{1+i}$ ..... 1 ponto

Obter $w = 9 - i$ ..... 3 pontos

Verificar que $|w - z_1| = \sqrt{53}$ ..... 3 pontos

9.1. ..... **8 pontos**

Opção **(C)**

9.2. ..... **8 pontos**

Opção **(C)**

10. ..... **8 pontos**

Opção **(B)**

11.1. ..... **8 pontos**

Opção **(C)**

11.2. ..... **8 pontos**

Opção **(C)**

12.1. ..... **14 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ ..... 7 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x} \times \dfrac{x}{x-1} \right)$ ..... 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$ ..... 4 pontos

Determinar $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$ ..... 2 pontos

Concluir que a reta de equação $y = 0$ é a única assíntota horizontal do gráfico da função h ..... 1 ponto

Justificar que apenas a reta de equação $x = 1$ pode ser assíntota vertical do gráfico da função h ..... 1 ponto

Determinar $\lim_{x \to 1^-} h(x)$ ou $\lim_{x \to 1^+} h(x)$ ..... 2 pontos

Concluir que a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical do gráfico da função h ..... 1 ponto

12.2. ..... **13 pontos**

Escrever $(x-1) \times h(x) + 2e^{-x} = 3 \Leftrightarrow (x-1) \times \frac{e^x}{x-1} + \frac{2}{e^x} = 3$ ..... 2 pontos

Escrever $(x-1) \times \frac{e^x}{x-1} + \frac{2}{e^x} = 3 \Leftrightarrow e^x + \frac{2}{e^x} = 3$ ..... 2 pontos

Escrever $e^x + \frac{2}{e^x} = 3 \Leftrightarrow e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ ..... 3 pontos

Escrever $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \vee e^x = 1$ ..... 4 pontos

Obter as soluções da equação dada $(0$ e $\ln 2)$ ..... 2 pontos

13.1. ..... **13 pontos**

Determinar $g'(x)$ ..... 2 pontos

Determinar $g''(x)$ (**ver nota 1**) ..... 2 pontos

Determinar o zero de g'' ..... 3 pontos

Escrever $g''(x) = 0$ ..... 1 ponto

Obter o zero de g'' ..... 2 pontos

Apresentar um quadro de sinal de g'' e de sentido da concavidade do gráfico de g (ou equivalente) ..... 3 pontos

Referir que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima em $\left]0, \frac{2\pi}{3}\right]$ (**ver nota 2**) ..... 1 ponto

Referir que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$ (**ver nota 3**) ..... 1 ponto

Indicar as coordenadas do ponto de inflexão do gráfico da função g $\left(\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{3}{8}\right)\right)$ ..... 1 ponto

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a segunda derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

2. Se, na resposta, for referido que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima em $\left]0, \frac{2\pi}{3}\right[$, em vez de em $\left]0, \frac{2\pi}{3}\right]$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

3. Se, na resposta, for referido que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo em $\left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$, em vez de em $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

13.2. ..... **8 pontos**

Opção **(B)**

14. ..... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Seja a a abcissa do ponto P, e seja k a abcissa do ponto Q

Determinar o declive da reta r, em função de a ..... 1 ponto

Determinar o declive da reta s, em função de a ..... 1 ponto

Escrever $2k = -\frac{1}{2a}$ ..... 2 pontos

Determinar as coordenadas do ponto Q, em função de a ..... 1 ponto

Obter a equação $y = 2ax - a^2$ (ou equivalente) ..... 1 ponto

Obter a equação $y = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2}$ (ou equivalente) ..... 1 ponto

Escrever $y = 2ax - a^2 \wedge y = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2}$ (ou equivalente) ..... 1 ponto

Obter $y = -\frac{1}{4}$ ..... 2 pontos

2.º Processo

Seja a a abcissa do ponto P

Determinar o declive da reta r, em função de a ..... 1 ponto

Obter a equação $y = 2ax - a^2$ (ou equivalente) ..... 1 ponto

Determinar o declive da reta s, em função de a ..... 1 ponto

Escrever $y = x^2 \wedge y = -\frac{1}{2a}x + b$ ..... 1 ponto

Obter o valor de b, de modo que a condição anterior tenha uma única solução ..... 3 pontos

Escrever $y = 2ax - a^2 \wedge y = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2}$ (ou equivalente) ..... 1 ponto

Obter $y = -\frac{1}{4}$ ..... 2 pontos

COTAÇÕES

Item											
Cotação (em pontos)											
1.1.	**1.2.**	**1.3.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	
12	12	12	13	8	8		12	8	12	8	**105**
8.	**9.1.**	**9.2.**	**10.**	**11.1.**	**11.2.**	**12.1.**	**12.2.**	**13.1.**	**13.2.**	**14.**	
13	8		8	8		14	13	13	8	10	**95**
TOTAL											**200**

Exame final nacional de Matemática A **(2019, 2.ª fase)**

Proposta de resolução

Caderno 1

1.

1.1. Como $[ABCDEFGH]$ é um paralelepípedo e os pontos A, B e G pertencem ao plano xOy (porque têm todos cota nula), então a reta CB é paralela ao eixo Oz, e o ponto B tem abcissa e ordenada, respetivamente iguais às do ponto C e cota nula (porque pertence ao eixo Oy, ou seja, as coordenadas do ponto B são (0,3,0)

Como o ponto A pertence ao eixo Ox tem ordenada e cota nulas, e como pertence ao plano ABC, podemos determinar a sua abcissa substituindo o valor da ordenada na equação do plano:

$$3x + 4(0) - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x + 0 = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{3} \Leftrightarrow x = 4$$

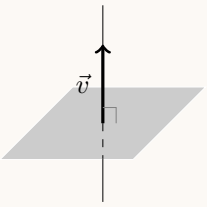
Assim, temos que as coordenadas do ponto A são (4,0,0), e, calculando a distância entre dois pontos, temos que o volume do paralelepípedo, é:

$$V_{[ABCDEFGH]} = \overline{AB} \times \overline{BG} \times \overline{BC} =$$

$$= \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2 + (0-0)^2} \times \sqrt{(0-6)^2 + (3-11)^2 + (0-0)^2} \times \sqrt{(0-0)^2 + (3-3)^2 + (0-6)^2} =$$

$$= \sqrt{16+9} \times \sqrt{36+64} \times \sqrt{36} = \sqrt{25} \times \sqrt{100} \times 6 = 5 \times 10 \times 6 = 300$$

1.2. Como a reta r é perpendicular ao plano ABC, vetor normal do plano ($\vec{v} = (3,4,0)$) é um vetor diretor da reta, e assim, considerando as coordenadas do ponto P, temos que uma equação vetorial da reta r é:



$$(x,y,z) = (1,-4,3) + \lambda(3,4,0), \lambda \in \mathbb{R}$$

Assim, as coordenadas de todos os pontos da reta r, e em particular o ponto de interseção da reta r com o plano ABC, para $\lambda \in \mathbb{R}$, são da forma:

$$(x,y,z) = (1,-4,3) + \lambda(3,4,0) = (1+3\lambda, -4+4\lambda, 3+0\times\lambda) = (1+3\lambda, -4+4\lambda, 3)$$

Como o ponto de interseção da pertence ao plano ABC podemos determinar o valor de λ substituindo as coordenadas genéricas do ponto, na equação do plano:

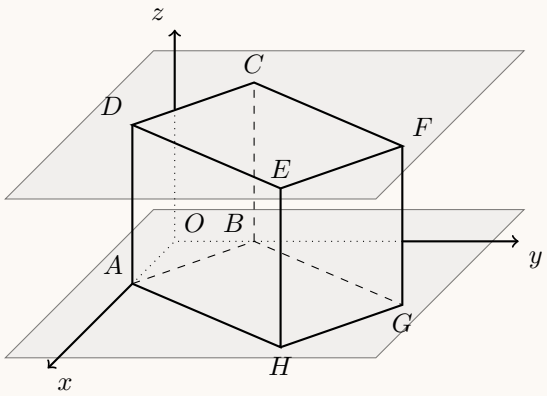
$$3(1+3\lambda) + 4(-4+4\lambda) - 12 = 0 \Leftrightarrow 3 + 9\lambda - 16 + 16\lambda - 12 = 0 \Leftrightarrow 25\lambda = -3 + 16 + 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25\lambda = 25 \Leftrightarrow \lambda = \frac{25}{25} \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Desta forma temos que as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano ABC são:

$$\big(1+3\times 1, -4+4\times 1, 3\big) = (1+3, -4+4, 3) = (4,0,3)$$

1.3. Para que a terceira coordenada do vetor $\overrightarrow{XY}$ seja igual a zero, isto é, para que os pontos X e Y tenham a mesma cota, como $[ABCDEFGH]$ é um paralelepípedo retângulo e o vértice A pertence ao eixo Ox e o vértice B pertence ao eixo Oy, então os pontos X e Y pertencem ambos ao plano ABG, ou pertencem ambos ao plano CDE



Assim, como existem 8 vértices do paralelepípedo, o número de vetores diferentes que podem ser definidos, ou seja o número de casos possíveis, é ${}^8C_2$

Como em cada um dos 2 grupos de vértices que originam um vetor $\overrightarrow{XY}$ com cota nula existem 4 vértices, temos que o número de vetores diferentes nas condições do enunciado, ou seja, o número de casos favoráveis, é $2\times {}^4C_2$

Assim, recorrendo à Regra de Laplace, calculando a probabilidade e apresentando o resultado na forma de fração irredutível, temos:

$$p = \frac{2\times {}^4C_2}{{}^8C_2} = \frac{3}{7}$$

2.

2.1. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno da escola, e os acontecimentos:
R:«O aluno é um rapaz»
D:«O aluno frequenta o décimo ano»

Temos que $P(R|D) = \frac{3}{5}$; $P(R) = \frac{11}{21}$ e $P(R \cap D) = \frac{1}{7}$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P(D) = \frac{P(R \cap D)}{P(R|D)} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{21}$
- $P\left(\overline{D}\right) = 1 - P(D) = 1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21}$
- $P\left(R \cap \overline{D}\right) = P(R) - P(D \cap R) = \frac{11}{21} - \frac{1}{7} = \frac{8}{21}$

	R	$\overline{R}$	
D	$\frac{1}{7}$		$\frac{5}{21}$
$\overline{D}$	$\frac{8}{21}$		$\frac{16}{21}$
	$\frac{11}{21}$		1

Assim, a probabilidade de o aluno escolhido ser uma rapariga e não frequentar o 10.º ano, na forma de dízima, arredondado às centésimas, é:

$$P\left(\overline{R} \cap \overline{D}\right) = P\left(\overline{D}\right) - P\left(R \cap \overline{D}\right) = \frac{16}{21} - \frac{8}{21} = \frac{8}{21} \approx 0{,}38$$

2.2. Como o delegado de turma tem de fazer parte da comissão e esta deve incluir rapazes e raparigas, os restantes dois membros devem ser duas raparigas ou um rapaz e uma rapariga.

Como a turma tem 15 raparigas, selecionando duas delas, temos que existem ${}^{15}C_2 = 105$ comissões formadas pelo delegado e por mais duas raparigas.

Selecionando uma das 15 raparigas, e um dos $26 - 15 - 1 = 10$ rapazes (correspondendo a retirar dos 26 alunos, as 15 raparigas e o delegado que deve integrar a comissão obrigatoriamente), temos que existem $15 \times 10 = 150$ comissões formadas pelo delegado e por um rapaz e uma rapariga.

Assim, o número de comissões diferentes, que incluam rapazes e raparigas, se podem formar, sabendo-se que o delegado de turma tem de fazer parte da comissão é:

$${}^{15}C_2 + 15 \times 10 = 105 + 150 = 255$$

Resposta: **Opção D**

3.

3.1. Como a caixa contém duas bolas brancas e três bolas pretas, num total de cinco e se retiram-se, ao acaso e em simultâneo, duas bolas da caixa, identificando os valores que a variável X pode assumir, e calculando as respetivas probabilidades, temos:

- 0 - correspondente à extração de duas bolas pretas;
  $P(X=0)=\dfrac{{}^{3}C_{2}}{{}^{5}C_{2}}=\dfrac{3}{10}$
- 1 - correspondente à extração de uma bola branca e outra preta;
  $P(X=1)=\dfrac{{}^{3}C_{1}\times{}^{2}C_{1}}{{}^{5}C_{2}}=\dfrac{3}{5}$
- 2 - correspondente à extração de duas bolas brancas;
  $P(X=2)=\dfrac{{}^{2}C_{2}}{{}^{5}C_{2}}=\dfrac{1}{10}$

Logo, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

E assim, o valor médio da variável X, é:

$$\mu=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{10}=\frac{3}{5}+\frac{2}{10}=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{4}{5}=0{,}8$$

Resposta: **Opção B**

3.2. Como o ângulo interno de maior amplitude se opõe ao lado maior do triângulo (concretamente o lado de comprimento 6), podemos calcular o valor de $\cos\alpha$ recorrendo à Lei dos cossenos:

$$6^2=5^2+4^2-2\times5\times4\times\cos\alpha\Leftrightarrow36=25+16-40\cos\alpha\Leftrightarrow40\cos\alpha=41-36\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{5}{40}\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{1}{8}$$

Recorrendo à fórmula fundamental da trigonometria, como o α é um ângulo interno de um triângulo, então $\operatorname{sen}\alpha>0$, e assim temos que o valor de $\operatorname{sen}\alpha$, arredondado às milésimas, é:

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow\operatorname{sen}^2\alpha+\left(\frac{1}{8}\right)^2=1\Leftrightarrow\operatorname{sen}^2\alpha=1-\frac{1}{64}\Rightarrow\operatorname{sen}\alpha=\sqrt{\frac{63}{64}}\Rightarrow\operatorname{sen}\alpha\approx0{,}992$$

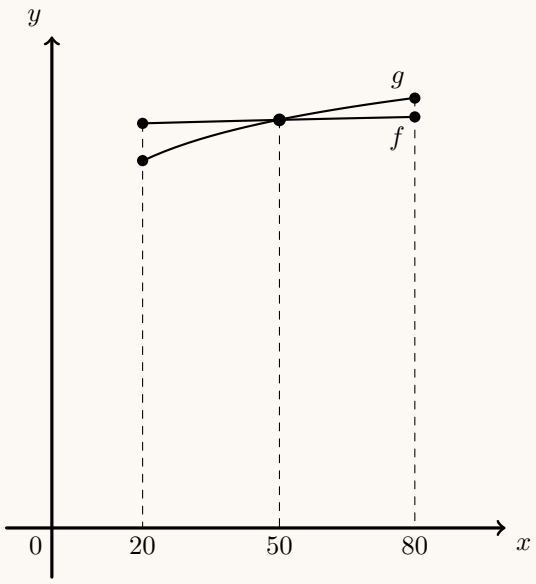
Resposta: **Opção B**

4. Relativamente a um nível de som inicial do despertador, um aumento da respetiva intensidade em 150 $\mu W/m^2$ é representado por $60 + 10\log_{10}(I + 150)$ e 1,4% do quadrado do nível inicial é representado por $0{,}014\,(60 + 10\log_{10} I)^2$, pelo que o valor da intensidade inicial do som desse despertador, é a solução da equação:

$$60 + 10\log_{10}(I + 150) = 0{,}014\,(60 + 10\log_{10} I)^2$$

Assim, visualizando na calculadora gráfica os gráficos das funções $f(x) = 60 + 10\log_{10}(I + 150)$ e $g(x) = 0{,}014\,(60 + 10\log_{10} I)^2$, para $20 < x < 80$, reproduzido na figura ao lado, e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (às unidades) da abcissa do ponto de interseção, ou seja, o valor da intensidade inicial do som desse despertador:

$$50\ \mu W/m^2$$



5. Como a função é contínua em $\mathbb{R}$, também é contínua em $x = 1$, pelo que

$$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

Temos que $f(1) = \log_3 k$

E calculando $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, vem:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x+1) = 1+1 = 2$$

Como $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$, podemos calcular o valor de k:

$$\log_3 k = 2 \Leftrightarrow k = 3^2 \Leftrightarrow k = 9$$

Resposta: **Opção D**

6. Como 2, a e b são três termos consecutivos de uma progressão geométrica, designado por r a razão da progressão, temos que:

$$2 \times r = a \Leftrightarrow r = \frac{a}{2}, \text{ e também que } a \times r = b \Leftrightarrow r = \frac{b}{a}$$

E assim, vem que:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow a^2 = 2b$$

Por outro lado, como $a-2$, b e 2 são três termos consecutivos de uma progressão aritmética, designado por k a razão da progressão, temos que:

$$a - 2 + k = b \Leftrightarrow k = b - a + 2, \text{ e também que } b + k = 2 \Leftrightarrow k = 2 + b$$

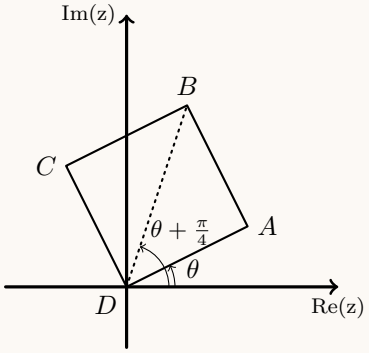
E assim, vem que:

$$b - a + 2 = 2 + b \Leftrightarrow 2b = a$$

Resolvendo o sistema seguinte, determinamos a e b:

$$\begin{cases} a^2 = 2b \\ 2b = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ b = \frac{a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a = 0 \\ b = \frac{a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a-1) = 0 \\ b = \frac{a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \vee a - 1 = 0 \\ b = \frac{a}{2} \end{cases} \underset{a \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

7. Considerando $\overline{AB} = \rho$ e o ângulo definido pelo semieixo positivo horizontal e a reta AD com amplitude θ, temos que $z = \rho e^{i\theta}$



Como $[ABCD]$ é um quadrado, a diagonal $\overline{BD} = \rho\sqrt{2}$ e $A\hat{D}B = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, pelo que o ângulo definido pelo semieixo positivo horizontal e a reta BD tem amplitude $\theta + \frac{\pi}{4}$. Assim, temos que o ponto B é o afixo do número complexo

$$w = \rho\sqrt{2}e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}$$

Decompondo o número complexo num produto de dois números complexos, vem que:

$$w = \rho\sqrt{2}e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} = \rho e^{i\theta} \times \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} = z \times \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) = z \times \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = z(1+i)$$

Resposta: **Opção A**

Caderno 2

---

8. Simplificando a expressão de w, como $i^7 = i^{4+3} = i^4 \times i^3 = 1 \times (-i) = -i$, e $\overline{z_2} = 1 + 2i$, temos que:

$$w = \frac{3(2-3i) - i(1+2i)}{1+(-i)} = \frac{6 - 9i - i - 2i^2}{1-i} = \frac{6 - 10i - 2(-1)}{1-i} = \frac{6 - 10i + 2}{1-i} = \frac{8 - 10i}{1-i} =$$

$$= \frac{(8-10i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{8 + 8i - 10i - 10i^2}{1^2 - i^2} = \frac{8 - 2i - 10(-1)}{1-(-1)} = \frac{8 - 2i + 10}{1+1} = \frac{18 - 2i}{2} = 9 - i$$

Calculando a distância entre os afixos de z_1 e w, temos:

$$|w - z_1| = |9 - i - (2 - 3i)| = |9 - i - (2 - 3i)| = |9 - i - 2 + 3i| = |7 + 2i| = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{49 + 4} = \sqrt{53}$$

Como a distância entre os afixos de z_1 e w é igual a $\sqrt{53}$, o afixo do número complexo w pertence à circunferência de centro no afixo (imagem geométrica) de z_1 e raio igual a $\sqrt{53}$

9.

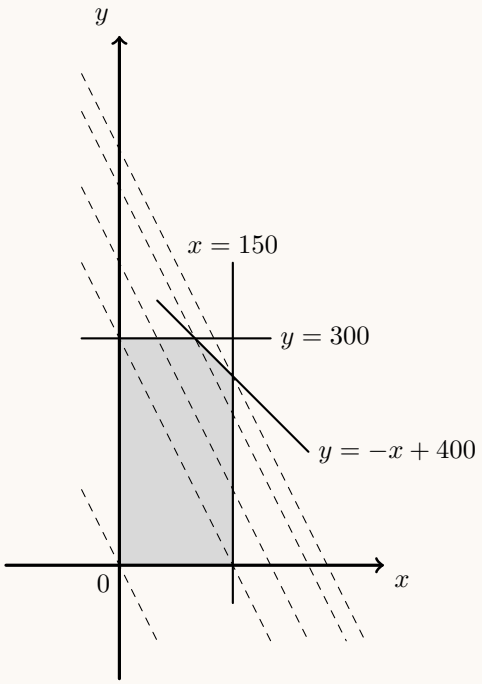
9.1. Representando a região admissível, de acordo com as restrições apresentadas, reproduzida na figura ao lado, e retas com o declive igual à reta definida pela função objetivo:

$$L = 2x + y \Leftrightarrow y = L - 2x \Leftrightarrow y = -2x + L$$

Podemos verificar que o máximo é obtido no vértice que resulta da interseção da reta $x = 150$ com a reta $y = -x + 400$, ou seja o ponto de coordenadas $(150, -150 + 400)$. Assim, substituindo as coordenadas deste ponto na função objetivo, calculamos o valor máximo que a função objetivo pode alcançar nesta região:

$$L = 2(150) + (-150 + 400) = 300 + 250 = 550$$

Resposta: **Opção C**



9.2. Como $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, então $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, e assim:

$$\text{sen}\left(3 \arccos \frac{1}{2}\right) = \text{sen}\left(3 \times \frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\,(\pi) = 0$$

Resposta: **Opção C**

10. Como o ponto B pertence ao semieixo positivo Oy e à reta de equação $y = 2x + 4$, as suas coordenadas são (0,4)

Como o ponto A pertence ao semieixo negativo Ox, tem ordenada nula, pelo que a sua abcissa é: $0 = 2x + 4 \Leftrightarrow -4 = 2x \Leftrightarrow -\frac{4}{2} = x \Leftrightarrow -2 = x$

Assim, as coordenadas do ponto médio, M, do segmento de reta $[AB]$, são:

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{-2+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (-1,2)$$

Resposta: **Opção B**

11.

11.1. As equações que definem a reta r podem ser escritas na forma seguinte:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{3-y}{4}=z \Leftrightarrow \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-0}{1}$$

Assim, um vetor diretor da reta r é $\vec{v}=(2,-4,1)$

Desta forma, de entre as opções apresentadas, o único vetor que pode ser um vetor diretor de uma reta perpendicular à reta r, por ser perpendicular a um vetor diretor da reta r (ou seja, o produto escalar entre os dois vetores é nulo), é o vetor $\vec{c}$, de acordo com a verificação apresentada a seguir:

- $\vec{a}.\vec{v}=(2,4,1).(2,-4,1)=2\times 2+4\times(-4)+1\times 1=4-16+1=-11$
- $\vec{b}.\vec{v}=(-3,1,0).(2,-4,1)=-3\times 2+1\times(-4)+0\times 1=-6-4+0=-10$
- $\vec{c}.\vec{v}=(1,1,2).(2,-4,1)=1\times 2+1\times(-4)+2\times 1=2-4+2=0$
- $\vec{d}.\vec{v}=(-4,2,0).(2,-4,1)=-4\times 2+2\times(-4)+0\times 1=-8-8+0=-16$

Resposta: **Opção C**

11.2. Calculando o limite da sucessão, temos:

$$\lim\left(\left(\frac{n+\ln a}{n}\right)^{n+2}\right)=\lim\left(\left(\frac{n}{n}+\frac{\ln a}{n}\right)^{n+2}\right)=\lim\left(\left(1+\frac{\ln a}{n}\right)^{n}\times\left(1+\frac{\ln a}{n}\right)^{2}\right)=$$

$$=\lim\left(1+\frac{\ln a}{n}\right)^{n}\times\lim\left(1+\frac{\ln a}{n}\right)^{2}=e^{\ln a}\times\left(1+\frac{\ln a}{+\infty}\right)^{2}=a\times(1+0)^2=a\times 1=a$$

Resposta: **Opção C**

12.

12.1. Como a função é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ (porque é o quociente de funções contínuas), a reta de equação $x=1$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de h. Para averiguar esta hipótese vamos calcular $\lim\limits_{x\to 1^-}h(x)$ e $\lim\limits_{x\to 1^+}h(x)$:

- $\lim\limits_{x\to 1^-}h(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{e^x}{x-1}=\frac{e^{1^-}}{1^--1}=\frac{e}{0^-}=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{e^x}{x-1}=\frac{e^{1^+}}{1^+-1}=\frac{e}{0^+}=+\infty$

Logo a reta de equação $x=1$ é a única assíntota do gráfico de h paralela ao eixo das ordenadas.

Para averiguar a existência de assíntotas horizontais, vamos calcular $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x-1}=\frac{e^{-\infty}}{-\infty-1}=\frac{0^+}{-\infty}=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x-1}=\frac{e^{+\infty}}{+\infty-1}=\frac{+\infty}{+\infty}$ (indeterminação)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{x}}{\frac{x-1}{x}}=\frac{\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}-\frac{1}{x}\right)}=\frac{+\infty}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{+\infty}{1+\frac{1}{+\infty}}=\frac{0}{1+0}=+\infty$$

Logo, podemos concluir que a reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal do gráfico de h, quando $x\to-\infty$ e que não existe qualquer assíntota do gráfico de h, quando $x\to+\infty$, pelo que a reta $y=0$ é a única assíntota do gráfico de h paralela ao eixo das abcissas.

12.2. Resolvendo a equação, temos:

$$(x-1)\times h(x)+2e^{-x}=3 \Leftrightarrow (x-1)\times\frac{e^x}{x-1}+2\times\frac{1}{e^x}=3 \underset{x\neq 1}{\Leftrightarrow} e^x+\frac{2}{e^x}-3=0 \Leftrightarrow \frac{(e^x)^2}{e^x}+\frac{2}{e^x}-\frac{3e^x}{e^x}=0 \underset{e^x\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2+2-3e^x=0 \Leftrightarrow (e^x)^2-3e^x+2=0 \Leftrightarrow$$

Fazendo a substituição de variável $y=e^x$, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$\Leftrightarrow y^2-3y+2=0 \Leftrightarrow y=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(2)}}{2} \Leftrightarrow y=\frac{3\pm\sqrt{9+8}}{2} \Leftrightarrow y=\frac{3\pm 1}{2} \Leftrightarrow y=1 \vee y=2$$

Como $y=e^x$, temos que:

$$e^x=1 \vee e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 1 \vee x=\ln 2 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\ln 2$$

C.S.$=\{0,\ln 2\}$

13.

13.1. Para estudar o sentido das concavidades do gráfico e a existência de pontos de inflexão, vamos determinar a expressão da segunda derivada, pelo que começamos por determinar g':

$$g'(x) = \left(\frac{1}{4}\cos(2x) - \cos x\right)' = \left(\frac{1}{4}\cos(2x)\right)' - (\cos x)' = \frac{1}{4}(\cos(2x))' - (-\operatorname{sen} x) =$$

$$= \frac{1}{4}(-(2x)'\operatorname{sen}(2x)) + \operatorname{sen} x = \frac{1}{4} \times (-2) \times \operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen} x$$

Assim, determinando g'', temos que:

$$g''(x) = (g'(x))' = \left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen} x\right)' = \left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\right)' + (\operatorname{sen} x)' = -\frac{1}{2}(\operatorname{sen}(2x))' + \cos x =$$

$$= -\frac{1}{2}((2x)'\cos(2x)) + \cos x = -\frac{1}{2} \times 2 \times \cos(2x) + \cos x = -\cos(2x) + \cos x$$

Como os pontos de inflexão são zeros da segunda derivada, vamos determiná-los:

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow -\cos(2x) + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \cos(2x) \Leftrightarrow x = 2x + 2k\pi \vee x = -2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 2x = 2k\pi \vee x + 2x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -x = 2k\pi \vee 3x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -2k\pi \vee x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 1$, vem $x = -2\pi \vee x = \frac{2\pi}{3}$, e como $x \in]0,\pi[$, podemos verificar que a única solução da equação é $x = \frac{2\pi}{3}$

Assim, estudando o sinal da segunda derivada para relacionar com o sentido das concavidades, vem:

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$g''(x)$	n.d.	+	0	−	n.d.
$g(x)$	n.d.	∪	Pt. I.	∩	n.d.

Cálculos auxiliares:

$$g''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\pi + 0 = -(-1) + 0 = 1 > 0$$

$$g''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(2 \times \frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} = -0 - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$$

Logo, podemos concluir que o gráfico de h:

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right[$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]0,\frac{2\pi}{3}\right]$
- tem um ponto de inflexão de abcissa $\frac{2\pi}{3}$ e cuja ordenada é:

$$g\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}\cos\left(2 \times \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{8} + \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$$

Ou seja, o ponto de inflexão do gráfico da função tem coordenadas $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{3}{8}\right)$

13.2. Simplificando a expressão da função f, como $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ e $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha$, temos:

$$f(x)=g(-x)+g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{4}\cos(2(-x))-\cos(-x)+\frac{1}{4}\cos\left(2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\cos(-2x)-\cos(-x)+\frac{1}{4}\cos(\pi-2x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{4}\cos(2x)-\cos x+\frac{1}{4}(-\cos(2x))-\operatorname{sen}x=$$

$$=\frac{1}{4}\cos(2x)-\cos x-\frac{1}{4}\cos(2x)-\operatorname{sen}x=-\cos x-\operatorname{sen}x=-\operatorname{sen}x-\cos x$$

Resposta: **Opção B**

14. Designando por a a abcissa do ponto P, temos que as suas coordenadas são $(a,f(a))=(a,a^2)$, e como o declive da reta tangente no ponto P, é o valor da derivada no ponto e $(x^2)'=2x$, o declive da reta r é:

$$m_r=f'(a)=2a$$

Assim, a equação da reta r é da forma $y=2ax+b$, e substituindo as coordenadas do ponto P (que pertence à reta) podemos determinar uma expressão para o valor da ordenada na origem:

$$a^2=2a\times a+b\Leftrightarrow a^2=2a^2+b\Leftrightarrow a^2-2a^2=b\Leftrightarrow -a^2=b$$

Ou seja, a equação reduzida da reta r é da forma $y=2ax-a^2$

Designando por k a abcissa do ponto Q $(k<0)$, temos que as suas coordenadas são $(k,f(k))=(k,k^2)$ e como o declive da reta tangente no ponto Q, é o valor da derivada no ponto pelo que o declive da reta s é:

$$m_s=f'(k)=2k$$

Temos ainda que, como o declive da reta perpendicular é o simétrico do inverso da reta, temos que o declive da reta s é:

$$m_s=-\frac{1}{2a}$$

Ou seja, temos que: $2k=-\frac{1}{2a}\Leftrightarrow k=-\frac{1}{2\times 2a}\Leftrightarrow k=-\frac{1}{4a}$, pelo que as coordenadas do ponto Q são $(k,k^2)=\left(-\frac{1}{4a},\left(-\frac{1}{4a}\right)^2\right)=\left(-\frac{1}{4a},\frac{1}{16a^2}\right)$

Assim a equação reduzida da reta s é da forma $y=-\frac{1}{2a}x+b$ e substituindo as coordenadas do ponto Q (que pertence à reta) podemos determinar uma expressão para o valor da ordenada na origem:

$$\frac{1}{16a^2}=-\frac{1}{2a}\times-\frac{1}{4a}+b\Leftrightarrow\frac{1}{16a^2}=\frac{1}{8a^2}+b\Leftrightarrow\frac{1}{16a^2}-\frac{1}{8a^2}=b\Leftrightarrow\frac{1}{16a^2}-\frac{2}{16a^2}=b\Leftrightarrow-\frac{1}{16a^2}=b$$

Ou seja, a equação reduzida da reta r é da forma $y=-\frac{1}{2a}x-\frac{1}{16a^2}$

Determinando as coordenadas do ponto de interseção das retas r e s, em particular a ordenada, vem:

$$\begin{cases}y=2ax-a^2\\ y=-\frac{1}{2a}x-\frac{1}{16a^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y+a^2=2ax\\ y+\frac{1}{16a^2}=-\frac{1}{2a}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{y+a^2}{2a}=x\\ -2ay-\frac{2a}{16a^2}=x\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{y+a^2}{2a}=-2ay-\frac{2a}{16a^2}\Leftrightarrow\frac{y}{2a}+\frac{a^2}{2a}=-2ay-\frac{2}{16a}\Leftrightarrow\frac{y}{2a}+\frac{a}{2}=-2ay-\frac{1}{8a}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{4y}{8a}+\frac{4a^2}{8a}=-\frac{16a^2y}{8a}-\frac{1}{8a}\underset{a>0}{\Leftrightarrow}4y+4a^2=-16a^2y-1\Leftrightarrow4y+16a^2y=-4a^2-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow4y(1+4a^2)=-(1+4a^2)\Leftrightarrow4y=\frac{-(1+4a^2)}{1+4a^2}\underset{1+4a^2\neq0}{\Leftrightarrow}4y=-1\Leftrightarrow y=-\frac{1}{4}$$

Logo o valor da ordenada do ponto de interseção das retas r e s é $-\frac{1}{4}$, independentemente do valor de a

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2019

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Caderno 1

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 6 Páginas

Caderno 1: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.
É permitido o uso de calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.

Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens de cada caderno encontram-se no final do respetivo caderno.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr ($\alpha -$ amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r -$ raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ ($\alpha -$ amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r -$ raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ ($r -$ raio da base; $g -$ geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ ($r -$ raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ ($r -$ raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis}\theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis}\theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\ e^u$

$(a^u)' = u'\ a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$,

- o plano α, de equação $2x + 3y - z - 9 = 0$
- a reta r, de equação vetorial $(x, y, z) = (1, 2, 1) + k(0, 1, 5),\ k \in \mathbb{R}$

1.1. Seja A o ponto da reta r cuja ordenada é igual a 4

Determine uma equação do plano que é paralelo ao plano α e que passa pelo ponto A

Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$

1.2. Seja P o ponto de intersecção da reta r com o plano α

Determine as coordenadas do ponto P

2.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 2.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 2.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, implementado em 2015-2016 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

2.1. Lança-se cinco vezes um dado tetraédrico equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 4, e regista-se o número da face voltada para baixo.

Qual é o valor, arredondado às centésimas, da probabilidade de, nos cinco lançamentos, sair face 4 exatamente três vezes?

(A) $0{,}01$ **(B)** $0{,}03$ **(C)** $0{,}07$ **(D)** $0{,}09$

PMC2015

2.2. De um triângulo, sabe-se que os comprimentos dos seus lados são $4,\ 5$ e 8

Seja α a amplitude, em graus, do maior ângulo interno desse triângulo.

Qual é o valor de α, arredondado às unidades?

(A) 75° **(B)** 100° **(C)** 120° **(D)** 125°

3. Um saco contém nove cartões, indistinguíveis ao tato, numerados de 1 a 9.

3.1. Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, quatro cartões do saco.

Qual é a probabilidade de o menor dos números saídos ser 3 e o maior ser 8?

(A) $\frac{1}{18}$ **(B)** $\frac{1}{21}$ **(C)** $\frac{1}{6}$ **(D)** $\frac{1}{7}$

3.2. Colocam-se os nove cartões em cima de uma mesa, lado a lado, em linha reta.

Determine de quantas maneiras diferentes é possível colocar os cartões, de modo que os números inscritos nos três primeiros cartões sejam primos.

4. Numa turma de 12.º ano, apenas alguns alunos estão matriculados na disciplina de Química.

Relativamente a essa turma, sabe-se que:

- o número de raparigas é o dobro do número de alunos matriculados na disciplina de Química;
- um terço dos alunos matriculados na disciplina de Química são raparigas;
- metade dos rapazes não estão matriculados na disciplina de Química.

Escolhe-se ao acaso um aluno da turma.

Determine a probabilidade de esse aluno estar matriculado na disciplina de Química.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

5. Na Figura 1, está representado, no plano complexo, o quadrado $[ABCD]$, cujo centro coincide com a origem.

Os pontos A, B, C e D são os afixos (imagens geométricas) dos números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4, respetivamente.

A que é igual $z_1 + z_2 + z_3 + z_4$?

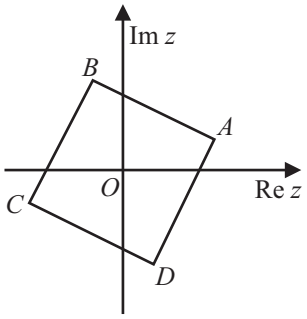


Figura 1

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

6. Na Figura 2, estão representadas, em referencial o.n. xOy,

- parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x$
- parte do gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \frac{\ln x}{x}$

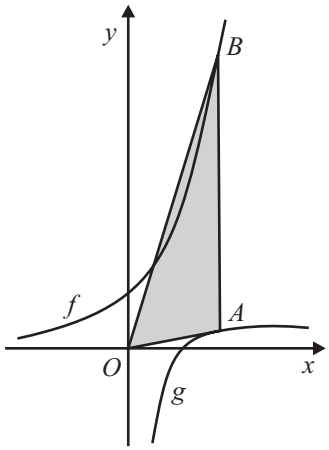


Figura 2

Considere que um ponto A se desloca no primeiro quadrante sobre o gráfico da função g. Para cada posição do ponto A, seja B o ponto do gráfico da função f cuja abcissa é igual à do ponto A

Seja a $(a > 1)$ a abcissa comum dos pontos A e B

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de a para o qual a área do triângulo $[OAB]$ é igual a 5, sabendo-se que esse valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor de a arredondado às décimas.

7. Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$

Determine a menor ordem a partir da qual todos os termos da sucessão (u_n) são maiores do que $-0{,}01$

8. Para um certo número real k, é contínua em $\mathbb{R}$ a função f, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2+x-2} & \text{se } x > 1 \\ k & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

Qual é o valor de k?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item											
Cotação (em pontos)											
1.1.	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	
12	12	8		8	12	13	8	12	12	8	**105**

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2019

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Caderno 2

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 6 Páginas

Caderno 2: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.

Não é permitido o uso de calculadora.

9.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 9.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 9.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, implementado em 2015-2016 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

9.1. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a reta r, definida por $1 - x = y \wedge z = 3$

Qual das equações seguintes define um plano perpendicular à reta r?

(A) $x + y = 5$ **(B)** $x - y = 5$

(C) $x + y + 3z = 5$ **(D)** $x - y + 3z = 5$

PMC2015

9.2. Considere, num referencial o.n. xOy, a elipse que passa nos pontos de coordenadas $(2,0)$ e $(0,-1)$ e que é simétrica em relação aos eixos coordenados.

Qual é a distância focal desta elipse?

(A) $2\sqrt{2}$ **(B)** $2\sqrt{3}$ **(C)** $2\sqrt{5}$ **(D)** $2\sqrt{6}$

10. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \frac{5 + (1+i)^4}{2 + 2i^{15}} - \frac{i}{2}$

Determine o menor número natural n para o qual z^n é um número real negativo.

11. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$

Sabe-se que $f(x) = 2x + 1$ e que $(f \circ g)(x) = 7$, para todo o valor real de x

Qual das seguintes expressões define a função g?

(A) -3 **(B)** 3 **(C)** $x - 3$ **(D)** $x + 3$

12.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 12.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 12.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, implementado em 2015-2016 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

12.1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos equiprováveis e independentes.

Sabe-se que $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{8}{9}$

Qual é o valor de $P(A)$?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{3}{4}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{2}{3}$

PMC2015

12.2. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \ln x$

Seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^{\frac{n}{4}}$

Qual é o valor de $\lim f(u_n)$?

(A) 4 **(B)** 2 **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{1}{4}$

13. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x)=\begin{cases} x\ln(1-x) & \text{se } x\leq 0 \\ \dfrac{1-3x}{1-e^{-x}} & \text{se } x>0 \end{cases}$$

13.1. Qual é o declive da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa -1?

(A) $0{,}5+\ln 2$ **(B)** $-0{,}5+\ln 2$

(C) $0{,}5-\ln 2$ **(D)** $-0{,}5-\ln 2$

13.2. O gráfico da função g tem uma assíntota oblíqua, quando $x\to+\infty$

Determine a equação reduzida dessa assíntota.

14. Considere a função f, definida em $]0,\pi[$ por $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}x}{2+\cos x}$

14.1. Determine $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\pi-x)}{x}$

14.2. Estude a função f quanto à monotonia e determine, caso existam, os extremos relativos.

15. A Figura 3 é uma fotografia da torre da Igreja de São Pedro, situada em Zurique, na Suíça. Nessa torre, encontra-se um dos maiores relógios da Europa.



Figura 3

Na Figura 4, está representado um esquema desse relógio. No esquema, o segmento de reta $[EF]$ representa o ponteiro das horas.

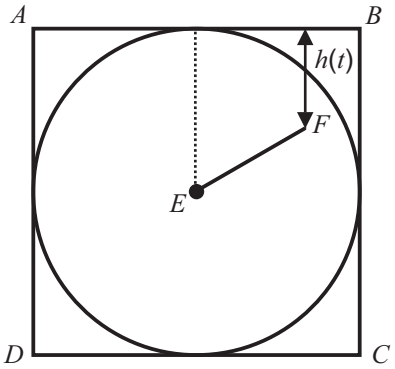


Figura 4

Relativamente à Figura 4, sabe-se ainda que:

- o círculo de centro E está inscrito no quadrado $[ABCD]$
- $\overline{EF} = 3{,}5\text{ m}$ e $\overline{AB} = 9\text{ m}$

Seja h a função que dá a distância, em metros, da extremidade do ponteiro das horas à reta AB, t horas após as zero horas.

Determine, em função de t, uma expressão analítica da função h

FIM

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item											
Cotação (em pontos)											
9.1.	**9.2.**	**10.**	**11.**	**12.1.**	**12.2.**	**13.1.**	**13.2.**	**14.1.**	**14.2.**	**15.**	
8		13	8	8		8	14	13	13	10	**95**

TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)	**200**

Exame final nacional de Matemática A **(2019, Época especial)**

Proposta de resolução

Caderno 1

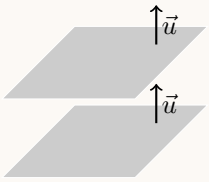
1.

1.1. Substituindo o valor da ordenada do ponto A, $y_A = 4$ na equação da reta r, podemos calcular o valor de k, e depois, o valor da cota do ponto de interseção:

$$\begin{cases} x = 1 + 0k \\ y = 2 + k \\ z = 1 + 5k \end{cases} \underset{y=4}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 1 \\ 4 = 2 + k \\ z = 1 + 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2 = k \\ z = 1 + 5 \times 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ k = 2 \\ z = 1 + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ k = 2 \\ z = 11 \end{cases}$$

Ou seja, as coordenadas do ponto A são (1,4,11)

Observando a equação do plano α podemos verificar que $\vec{u} = (2,3,-1)$ é um vetor normal do plano α, e também de todos os planos paralelos ao plano α, cujas equações são da forma:



$$2x + 3y - z + d = 0$$

Como as coordenadas do ponto A são (1,4,11), e este pertence ao plano pretendido, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo estas coordenadas, na equação anterior:

$$2(1) + 3(4) - 11 + d = 0 \Leftrightarrow 2 + 12 - 11 + d = 0 \Leftrightarrow 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$$

Logo, uma equação do plano que é paralelo ao plano α e que passa pelo ponto A é:

$$2x + 3y - z - 3 = 0$$

1.2. As coordenadas de todos os pontos da reta r, e em particular o ponto de interseção da reta r com o plano α, para $k \in \mathbb{R}$, são da forma:

$$(x,y,z) = (1,2,1) + k(0,1,5) = (1 + 0 \times k \ , \ 2 + 1 \times k \ , \ 1 + 5 \times k) = (1 \ , \ 2 + k \ , \ 1 + 5k)$$

Como o ponto de interseção da pertence ao plano α podemos determinar o valor de k substituindo as coordenadas genéricas do ponto, na equação do plano:

$$2(1) + 3(2 + k) - (1 + 5k) - 9 = 0 \Leftrightarrow 2 + 6 + 3k - 1 - 5k - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + 6 + 3k - 1 - 5k - 9 = 0 \Leftrightarrow -2k - 2 = 0 \Leftrightarrow -2k = 2 \Leftrightarrow k = \frac{2}{-2} \Leftrightarrow k = -1$$

Desta forma temos que as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano α, ou seja as coordenadas do ponto P, são:

$$\left(1 \ , \ 2 + (-1) \ , 1 + 5(-1)\right) = (1,1,-4)$$

2.

2.1. Como a experiência se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades segue o modelo binomial $\left(P(X = k) = {}^{n}C_k \, p^k \, q^{n-k}\right)$.

Temos que:

- $n = 5$ (repete-se o lançamento do dado por cinco vezes).
- $p = \frac{1}{4}$ (a probabilidade do sucesso, ou seja «*Sair face 4*» é $\frac{1}{4}$, porque o dado tem quatro faces e apenas uma delas tem o número 4).
- $q = \frac{3}{4}$, a probabilidade do insucesso pode ser calculada como $q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Assim, calculando a probabilidade de sair face 4 exatamente três vezes ($k = 3$), e arredondando o resultado às centésimas, temos:

$$P(X = 3) = {}^{5}C_3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \approx 0{,}09$$

Resposta: **Opção D**

2.2. Como o ângulo interno de maior amplitude se opõe ao lado maior do triângulo (concretamente o lado de comprimento 8), podemos calcular o valor de $\cos\alpha$ recorrendo à Lei dos cossenos:

$$8^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \times 5 \times 4 \times \cos\alpha \Leftrightarrow 64 = 25 + 16 - 40\cos\alpha \Leftrightarrow 40\cos\alpha = 41 - 64 \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{-23}{40}$$

Como α é um ângulo interno de um triângulo ($0° < \alpha < 180°$), temos que a sua amplitude, em graus, arredondada às unidades, é:

$$\cos^{-1}\left(-\frac{23}{40}\right) \approx 125°$$

Resposta: **Opção D**

3.

3.1. Como existem 9 cartões no saco e são retirados simultaneamente 4, o número de conjuntos diferentes de 4 cartões que é possível escolher, ou seja, o número de casos possíveis, é ${}^9C_4$

De entre estes ${}^9C_4$ conjuntos de 4 cartões, os que contêm apenas os números 3 e 8, e, adicionalmente são compostos por mais dois números compreendidos entres os anteriores (4, 5, 6 e 7) corresponde a considerar o número de conjuntos de dois cartões que podem ser formados com quatro cartões identificados.
Assim, o número de conjuntos compostos pelo cartão 3, pelo cartão 8 e por mais dois cartões cujos números estão compreendidos entres estes - ou seja, o número de casos favoráveis - é ${}^4C_2$

Desta forma, a probabilidade de o menor dos números saídos ser 3 e o maior ser 8, é:

$$p = \frac{{}^4C_2}{{}^9C_4} = \frac{1}{21}$$

Resposta: **Opção B**

3.2. Nas condições indicadas pretende-se colocar os cartões numa fila que pode ser dividida em duas partes - a primeira com três posições e a segunda com seis posições.

Como na primeira parte da fila existem três posições onde podem ser colocados quatro cartões (2, 3, 5, e 7), e a ordem dos cartões é relevante, o número de formas diferentes de ocupar os três primeiros lugares da fila é ${}^4A_3$

Para a segunda parte da fila, com seis posições, existem 6 números disponíveis para os ocupar (o número primo que não foi colocado antes e todos os restantes), pelo que o número de disposições dos lugares é ${}^6A_6 = P_6 = 6!$

Assim, o número de maneiras diferentes de colocar os cartões, de modo que os números inscritos nos três primeiros cartões sejam primos, é:

$${}^4A_3 \times {}^6A_6 = 17\,280$$

4. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno da turma, e os acontecimentos:
Q:«O aluno está matriculado na disciplina de Química»
H:«O aluno é um rapaz»

Temos que $P\left(\overline{H}\right) = 2 \times P(Q)$; $P\left(\overline{H}|Q\right) = \frac{1}{3}$ e $P\left(\overline{Q}|H\right) = \frac{1}{2}$

Assim, considerando $P\left(Q\right) = k$ e organizando os dados numa tabela obtemos:

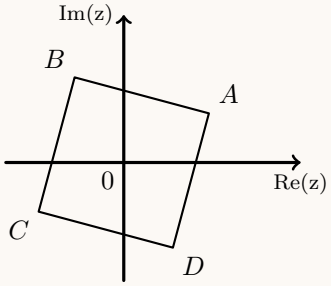
- $P\left(\overline{H}\right) = 2k$
- $P\left(\overline{H} \cap Q\right) = P(Q) \times P\left(\overline{H}|Q\right) = k \times \frac{1}{3} = \frac{k}{3}$
- $P(H) = 1 - P\left(\overline{H}\right) = 1 - 2k$
- $P\left(\overline{Q} \cap H\right) = P(H) \times P\left(\overline{Q}|H\right) = (1-2k) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - k$
- $P(H \cap Q) = P(H) - P\left(\overline{Q} \cap H\right) = 1 - 2k - \left(\frac{1}{2} - k\right) =$
  $= 1 - 2k - \frac{1}{2} + k = \frac{1}{2} - k$

	Q	$\overline{Q}$	
H	$\frac{1}{2} - k$	$\frac{1}{2} - k$	$1 - 2k$
$\overline{H}$	$\frac{k}{3}$		$2k$
	k		1

Assim, temos que probabilidade do aluno escolhido ao acaso estar matriculado na disciplina de Química é o valor de k, ou seja a solução da equação:

$$P(Q) = P(H \cap Q) + P\left(\overline{H} \cap Q\right) \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} - k + \frac{k}{3} \Leftrightarrow 6k = 3 - 6k + 2k \Leftrightarrow 10k = 3 \Leftrightarrow k = \frac{3}{10}$$

5. Como os pontos A e C são equidistantes da origem e o respetivo ponto médio é a origem, temos que são afixos de números complexos simétricos, ou seja, $z_1 = -z_3$ (alternativamente podemos verificar que $-z_1 = z_1 \times i^2 = z_1 \times i \times i = z_2 \times i = z_3$)



De forma análoga temos que os pontos B e D são afixos de números complexos simétricos, ou seja, $z_2 = -z_4$

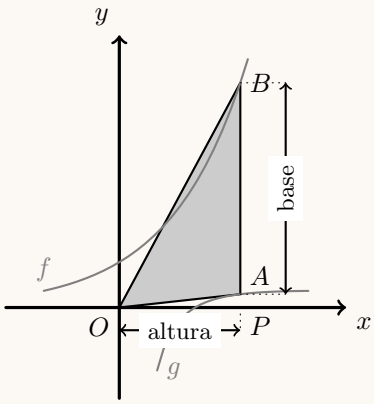
Assim, temos que

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = z_1 + z_2 - z_1 - z_2 = 0$$

Resposta: **Opção A**

6. Considerando como a base do triângulo o lado $[AB]$, temos que:

$$\overline{AB} = f(a) - g(a) = e^a - \frac{\ln a}{a}$$



Considerando o ponto P (de ordenada nula e abcissa a), temos que a altura correspondente à base anterior é $[OP]$, e que:

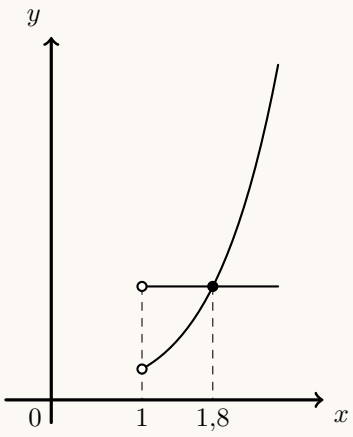
$$\overline{OP} = a$$

Pelo que a área do triângulo $[OAB]$ é dada, em função de a, por:

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{OP}}{2} = \frac{\left(e^a - \frac{\ln a}{a}\right) \times a}{2} = \frac{ae^a - \ln a}{2}, \ (a > 1)$$

Assim, o valor de a para o qual a área do triângulo $[OAB]$ é igual a 5, é a solução da equação:

$$\frac{ae^a - \ln a}{2} = 5$$



Desta forma, visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função $y = \frac{xe^x - \ln x}{2}$, e a reta horizontal de equação $y = 5$, numa janela compatível com a restrição do valor de a ($x > 1$), (reproduzido na figura ao lado), e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos um valor aproximado (às décimas) para a abcissa do ponto de interseção, ou seja, a solução da equação:

$$x \approx 1{,}8$$

7. Observando a expressão da sucessão, temos que:

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \frac{(-1)^n \times (-1)^1}{n+1} = -\frac{(-1)^n}{n+1} = \begin{cases} -\dfrac{1}{n+1} & \text{se } n \text{ par} \\ \dfrac{1}{n+1} & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Desta forma, quando n é ímpar, todos os termos são positivos, pelo que, $u_n > -0{,}01$

Quando o n é par, temos que:

$$u_n > -0{,}01 \Leftrightarrow -\frac{1}{n+1} > -\frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} - \frac{1}{100} < 0 \Leftrightarrow \frac{100-n-1}{100(n+1)} < 0 \underset{100(n+1)>0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 100 - n - 1 < 0 \Leftrightarrow -n < -99 \Leftrightarrow n > 99$$

Ou seja, os termos da sucessão (u_n) são maiores do que –0,01 para ordens pares superiores a 99 e também para todas as ordens ímpares, ou seja, a menor ordem a partir da qual todos os termos da sucessão (u_n) são maiores do que –0,01 é 99.

8. Como a função é contínua em $\mathbb{R}$, também é contínua em $x = 1$, pelo que

$$f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

Como $\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = k$, calculando $\lim_{x \to 1^+} f(x)$, temos:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \frac{1-1}{1+1-2} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

Verificando que $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$, usando, por exemplo, a fórmula resolvente, temos:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

Assim, como $f(1) = k$, e f é contínua, temos que $f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$

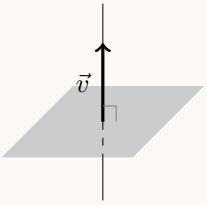
Resposta: **Opção C**

Caderno 2

9.

9.1. Reescrevendo a equação da reta r, temos que:

$$1-x=y \wedge z=3 \Leftrightarrow \frac{x-1}{-1}=\frac{y-0}{1} \wedge z=3$$



O que nos permite identificar um vetor diretor da reta, $\vec{v}_r=(-1,1,0)$

Como o plano deve ser perpendicular à reta r, o vetor diretor da reta deve ser colinear com o vetor normal do plano.

Assim, identificando os vetores normais dos planos relativos a cada opção apresentada, e identificando qual deles é colinear com o vetor diretor da reta, temos:

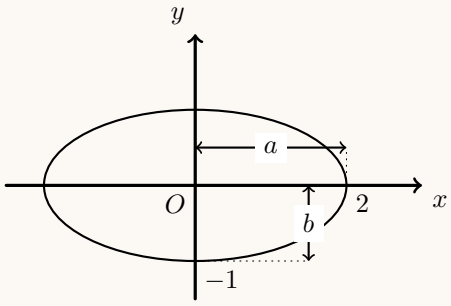
- Vetor normal do plano: $\vec{u}_A=(1,1,0)$
- Vetor normal do plano: $\vec{u}_B=(1,-1,0)=-(-1,1,0)=-\vec{v}_r$
- Vetor normal do plano: $\vec{u}_C=(1,1,3)$
- Vetor normal do plano: $\vec{u}_D=(1,-1,3)$

Resposta: **Opção B**

9.2. Como a elipse é simétrica em relação aos eixos coordenados, os pontos identificados (por estarem sobre os eixos são vértices da elipse).

Assim, temos que a medida do semieixo maior é $a=2$ e que a medida do semieixo menor é $b=1$ Desta forma a semidistância focal (c) pode ser calculada por:

$$a^2=b^2+c^2 \Leftrightarrow 2^2=1^2+c^2 \Leftrightarrow 4-1=c^2 \underset{c>0}{\Rightarrow} c=\sqrt{3}$$



Ou seja a distância focal é:

$$2c=2\sqrt{3}$$

Resposta: **Opção B**

10. Escrevendo $1+i$ na f.t. temos $1+i=\rho e^{i\theta}$, onde:

- $\rho=|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{1}{1}=1$; como $\operatorname{sen}\theta>0$ e $\cos\theta>0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta=\dfrac{\pi}{4}$

E assim $1+i=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$, pelo que:

$$(1+i)^4=\left(\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)^4=\left(\sqrt{2}\right)^4\times e^{i\left(4\times\frac{\pi}{4}\right)}=4e^{i\pi}=-4$$

Assim, simplificando a expressão de z, como $i^{15}=i^{4\times3+3}=i^3=-i$, temos que:

$$z=\frac{5+(1+i)^4}{2+2i^{15}}-\frac{i}{2}=\frac{5+(-4)}{2+2(-i)}-\frac{i}{2}=\frac{1}{2-2i}-\frac{i}{2}=\frac{2}{4-4i}-\frac{2i-2i^2}{4-4i}=\frac{2-2i-(-2\times(-1))}{4-4i}=$$

$$=\frac{-2i}{4-4i}=\frac{-i}{2-2i}=\frac{-i(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)}=\frac{-2i-2i^2}{2^2-(2i)^2}=\frac{-2i-2(-1)}{4-4\times(-1)}=\frac{2-2i}{8}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\,i$$

Escrevendo z na forma trigonométrica ($w=\rho e^{i\theta}$) temos:

- $\rho=|z|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{16}}=\sqrt{\dfrac{2}{16}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{16}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$
- $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}=-1$; como $\operatorname{sen}\theta<0$ e $\cos\theta>0$, θ é um ângulo do 4º quadrante, logo $\theta=-\dfrac{\pi}{4}$

Assim $z=\dfrac{\sqrt{2}}{4}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$, e z^n é dado por:

$$z^n=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n e^{i\left(n\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

Para que z^n seja um número real negativo, $\operatorname{Arg}(z^n)=\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Assim, atribuindo valores a n, temos que:

- $n=1$, $\operatorname{Arg}(z^n)=1\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\pi}{4}$ $(\neq\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z})$
- $n=2$, $\operatorname{Arg}(z^n)=2\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{2\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{2}$ $(\neq\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z})$
- $n=3$, $\operatorname{Arg}(z^n)=3\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{3\pi}{4}$ $(\neq\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z})$
- $n=4$, $\operatorname{Arg}(z^n)=4\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{4\pi}{4}=-\pi$

Desta forma, o menor número natural n para o qual z^n é um número real negativo é 4

11. Como $(f\circ g)(x)=7$ e $f(x)=2x+1$, temos que:

$$(f\circ g)(x)=7\Leftrightarrow f\big(g(x)\big)=7\Leftrightarrow 2\big(g(x)\big)+1=7\Leftrightarrow 2\big(g(x)\big)=7-1\Leftrightarrow g(x)=\frac{6}{2}\Leftrightarrow g(x)=3$$

Resposta: **Opção B**

12.

12.1. Temos que:

- Pelas leis de De Morgan temos que $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cap B}\right) = \frac{8}{9}$
- Pelo teorema do acontecimento contrário, $P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P\left(A \cap B\right) = \frac{8}{9}$
- Como são independentes $(P(A \cap B) = P(A) \times P(B))$ vem que $1 - P\left(A \cap B\right) = 1 - \big(P(A) \times P(B)\big) = \frac{8}{9}$
- Como os acontecimentos são equiprováveis $(P(B) = P(A))$, vem que $1 - \big(P(A) \times P(A)\big) = \frac{8}{9}$

Assim, resolvendo a equação temos:

$$1 - \big(P(A) \times P(A)\big) = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \big(P(A)\big)^2 = 1 - \frac{8}{9} \Leftrightarrow \big(P(A)\big)^2 = \frac{1}{9} \underset{P(A)>0}{\Leftrightarrow} P(A) = \sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{3}$$

Resposta: **Opção C**

12.2. Calculando o limite da sucessão, temos:

$$\lim\left(\left(\frac{n+2}{n}\right)^{\frac{n}{4}}\right) = \lim\left(\left(\frac{n}{n} + \frac{2}{n}\right)^{n \times \frac{1}{4}}\right) = \lim\left(\left(\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{4}}\right) = \left(\lim\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(e^2\right)^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{2}}$$

Assim, temos que:

$$\lim f(u_n) = \lim_{x \to e^{\frac{1}{2}}} f(x) = \lim_{x \to e^{\frac{1}{2}}} \ln x = \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$$

Resposta: **Opção C**

13.

13.1. Como o declive da reta tangente é igual ao valor da derivada, começamos por determinar a derivada da função para $x = -1$:

$$\big(x \ln(1-x)\big)' = \big(x\big)' \ln(1-x) + x\big(\ln(1-x)\big)' = 1 \times \ln(1-x) + x \times \frac{\big(1-x\big)'}{1-x} =$$

$$= \ln(1-x) + x \times \frac{0-1}{1-x} = \ln(1-x) - \frac{x}{1-x}$$

Logo, o declive da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa -1 é:

$$g'(-1) = \ln(1-(-1)) - \frac{-1}{1-(-1)} = \ln 2 + \frac{1}{2} = 0{,}5 + \ln 2$$

Resposta: **Opção A**

13.2. Começamos por determinar o declive da assíntota oblíqua do gráfico de g, quando $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1-3x}{1-e^{-x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-3x}{x\,(1-e^{-x})} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1-3x}{x} \times \frac{1}{1-e^{-x}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-3x}{x} \times \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{3x}{x}\right) \times \frac{1}{1-e^{-(+\infty)}} =$$

$$= \left(\frac{1}{+\infty} - 3\right) \times \frac{1}{1-e^{-\infty}} = (0-3) \times \frac{1}{1-0} = -3 \times 1 = -3$$

Calculando o valor da ordenada na origem, temos que:

$$b = \lim_{x\to+\infty} \big(g(x) - mx\big) = \lim_{x\to+\infty} \big(g(x) - (-3)x\big) = \lim_{x\to+\infty} \big(g(x) + 3x\big) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1-3x}{1-e^{-x}} + 3x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1-3x}{1-e^{-x}} + \frac{3x(1-e^{-x})}{1-e^{-x}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-3x+3x-3xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-3xe^{-x}}{1-e^{-x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-3x\times\frac{1}{e^x}}{1-e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{3x}{e^x}}{1-e^{-x}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\frac{3x}{e^x}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty} (1-e^{-x})} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x}{e^x}}{1-e^{-(+\infty)}} =$$

$$= \frac{1-\frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 3}{\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}}}{1-e^{-\infty}} = \frac{1-\frac{3}{\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}}}{1-0} = \frac{1-\frac{3}{+\infty}}{1} = 1-0 = 1$$

Desta forma a equação reduzida da assíntota oblíqua do gráfico de g, quando $x \to +\infty$, é:

$$y = -3x + 1$$

14.

14.1. Como $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$ e $\cos(\pi - x) = -\cos x$, calculando o valor do limite, temos:

$$\lim_{x\to0} \frac{f(\pi-x)}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(\pi-x)}{2+\cos(\pi-x)}}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{2-\cos x}}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} x}{x(2-\cos x)} = \frac{\operatorname{sen} 0^+}{0(2-\cos 0)} = \frac{0}{0} \text{ (Indet.)}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} x}{x(2-\cos x)} = \lim_{x\to0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \frac{1}{2-\cos x}\right) = \underbrace{\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x\to0} \frac{1}{2-\cos x} =$$

$$= 1 \times \frac{1}{2-\cos 0} = 1 \times \frac{1}{2-1} = 1 \times \frac{1}{1} = 1$$

14.2. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f, no intervalo $]0,\pi[$:

$$f'(x)=\left(\frac{\operatorname{sen}x}{2+\cos x}\right)'=\frac{(\operatorname{sen}x)'(2+\cos x)-\operatorname{sen}x\,(2+\cos x)'}{(2+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{\cos x(2+\cos x)-\operatorname{sen}x\,((2)'+(\cos x)')}{(2+\cos x)^2}=\frac{2\cos x+\cos^2 x-\operatorname{sen}x\,(0-\operatorname{sen}x)}{(2+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{2\cos x+\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{(2+\cos x)^2}=\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função $]0,\pi[$, vem:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}=0\Leftrightarrow 2\cos x+1=0\wedge\underbrace{(2+\cos x)^2\neq 0}_{\text{condição universal}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x=-1\Leftrightarrow\cos x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\cos x=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\Leftrightarrow$$

$$x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ \vee\ x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

Como se pretende identificar os valores de $x\in]0,\pi[$, atribuindo valores inteiros a k para identificar as soluções no intervalo definido, temos:

- $k=0\ \rightarrow\ x=\frac{2\pi}{3}\vee x=-\frac{2\pi}{3}\quad\left(-\frac{2\pi}{3}\notin]0,\pi[\right)$
- $k=1\ \rightarrow\ x=\frac{2\pi}{3}+2\pi\vee x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi=-\frac{2\pi}{3}+\frac{6\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}\quad\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi\notin]0,\pi[\quad\text{e}\quad\frac{4\pi}{3}\notin]0,\pi[\right)$

Assim, temos que $f'(x)$ tem um zero em $]0,\pi]$ e estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$2\cos x+1$	n.d.	+	0	−	n.d.
$(2+\cos x)^2$	n.d.	+	+	+	n.d.
$f'(x)$	n.d.	+	0	−	n.d.
$f(x)$	n.d.	↗	Máx	↘	n.d.

Cálculos auxiliares:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2\cos\frac{\pi}{2}+1}{\left(2+\cos\frac{\pi}{2}\right)^2}=\frac{2\times 0+1}{(2+0)^2}=$$
$$=\frac{1}{4}>0$$

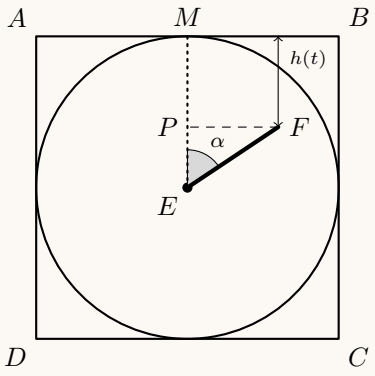
$$f'\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{2\cos\frac{5\pi}{6}+1}{\left(2+\cos\frac{5\pi}{6}\right)^2}=$$
$$=\frac{2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1}{(2+\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{-\sqrt{3}+1}{\left(\frac{4+\sqrt{3}}{4}\right)^2}<0$$

Assim, podemos concluir que a função f, no intervalo $]0,\pi[$:

- é crescente no intervalo $\left]0,\frac{2\pi}{3}\right]$;
- é decrescente no intervalo $\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right[$;
- tem um máximo relativo para $x=\frac{2\pi}{3}$, cujo valor é:

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}}{2+\cos\frac{2\pi}{3}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

15. Designando por M o ponto médio do lado $[AB]$ e por α o ângulo $F\hat{E}M$, (como indicado na figura ao lado), e ainda, considerando o ponto P como a projeção ortogonal do ponto F sobre o segmento de reta EM, usando a definição de cosseno, temos que:



$$\cos\alpha = \frac{\overline{EP}}{\overline{EF}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{EP}}{3{,}5} \Leftrightarrow \overline{EP} = 3{,}5\cos\alpha$$

Assim, como $\overline{EM} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$ cm, e considerando o segmento de reta EM como o lado origem do ângulo α, temos que a distância do ponto F à reta AB, t horas após as zero horas, é dada por:

$$h(t) = \overline{EM} - \overline{EP} = 4{,}5 - 3{,}5\cos\alpha$$

Estabelecendo a proporção do tempo, em horas, com a amplitude do ângulo α correspondente, temos que:

$$\frac{12}{2\pi} = \frac{t}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi \times t}{12} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi \times t}{6} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}\,t$$

Ou seja, definindo a função h em função de t, temos:

$$h(t) = 4{,}5 - 3{,}5\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2019

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Critérios de Classificação

10 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Se forem apresentadas respostas a dois itens em alternativa, será classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de resposta restrita, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à fórmula da probabilidade condicionada», «recorrendo à calculadora gráfica»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

Situação	Classificação
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

Caderno 1

1.1. ..... **12 pontos**

Determinar o valor de k ..... 2 pontos

Obter as coordenadas do ponto A ..... 2 pontos

Escrever $2x + 3y - z + d = 0$ ..... 4 pontos

Obter o valor de d ..... 3 pontos

Escrever uma equação do plano pedido

$(2x + 3y - z - 3 = 0$ ou outra equação equivalente, na forma pedida$)$ ..... 1 ponto

1.2. ..... **12 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever as coordenadas de um ponto genérico da reta r, em função de k ... 4 pontos

Obter uma equação na variável k, substituindo x, y e z na equação do plano α pelas coordenadas desse ponto genérico da reta r ..... 4 pontos

Obter o valor de k ..... 2 pontos

Obter as coordenadas do ponto $P\ ((1,1,-4))$ ..... 2 pontos

2.º Processo

Escrever $y - 2 = \frac{z-1}{5} \wedge x = 1$ ..... 4 pontos

Escrever $\begin{cases} x = 1 \\ y - 2 = \frac{z-1}{5} \\ 2x + 3y - z - 9 = 0 \end{cases}$ ..... 4 pontos

Obter as coordenadas do ponto $P\ ((1,1,-4))$ ..... 4 pontos

2.1. ..... **8 pontos**

Opção **(D)**

2.2. ..... **8 pontos**

Opção **(D)**

3.1. ..... **8 pontos**

Opção **(B)**

3.2. ..... **12 pontos**

Apresentar a expressão

$\left({}^4A_3 \times 6!\text{ ou equivalente}\right)$ (**ver nota 1**) ..... 11 pontos

Obter o valor pedido $(17\,280)$ (**ver nota 2**) ..... 1 ponto

Notas:

1. Por cada fator incorreto ou não apresentado devem ser descontados 6 pontos. Se, por aplicação deste critério, o valor obtido for negativo, esta etapa deve ser pontuada com 0 pontos.

2. Se a etapa anterior tiver sido pontuada com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

4. ..... **13 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Designemos por R o acontecimento «o aluno escolhido é rapariga» e por Q o acontecimento «o aluno escolhido frequenta a disciplina de Química».

Escrever $P(R) = 2P(Q)$ ..... 1 ponto

Escrever $P\left(R \mid Q\right) = \frac{1}{3}$ ..... 2 pontos

Escrever $P\left(\overline{Q} \mid \overline{R}\right) = \frac{1}{2}$ ..... 2 pontos

Obter $P\left(R \cap Q\right) = \frac{1}{3}P\left(Q\right)$ ..... 2 pontos

Escrever $P\left(\overline{R} \cap \overline{Q}\right) = 1 - P\left(R \cup Q\right)$ ..... 1 ponto

Escrever $P\left(\overline{R} \cap \overline{Q}\right) = 1 - P\left(R\right) - P\left(Q\right) + P\left(R \cap Q\right)$ ..... 1 ponto

Obter $\frac{1 - 2P\left(Q\right) - P\left(Q\right) + \frac{1}{3}P\left(Q\right)}{1 - 2P\left(Q\right)} = \frac{1}{2}$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Responder ao problema $\left(\frac{3}{10}\right)$ ..... 2 pontos

2.º Processo

Designemos por a a probabilidade de o aluno escolhido frequentar a disciplina de Química.

Construir uma tabela de dupla entrada cujas entradas sejam «é rapariga, não é rapariga» e «frequenta a disciplina de Química, não frequenta a disciplina de Química» ..... 1 ponto

Escrever a na célula da tabela relativa à probabilidade de o aluno escolhido frequentar a disciplina de Química ..... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa à informação «o número de raparigas é o dobro do número de alunos matriculados na disciplina de Química» ..... 2 pontos

Preencher a célula da tabela relativa à informação «um terço dos alunos matriculados na disciplina de Química são raparigas» ..... 2 pontos

Preencher a célula da tabela relativa à probabilidade de o aluno ser rapaz ..... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa à informação «metade dos rapazes não estão matriculados na disciplina de Química» ..... 2 pontos

Obter uma equação que permita determinar o valor de a ..... 2 pontos

Responder ao problema $\left(\frac{3}{10}\right)$ ..... 2 pontos

5. ..... **8 pontos**

Opção **(A)**

6. ..... **12 pontos**

Apresentar uma equação que permite resolver o problema

$\left(\frac{a\left(e^a - \frac{\ln a}{a}\right)}{2} = 5, \text{ ou equivalente}\right)$ (**ver notas 1 e 2**) ..... 5 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota 3**) ..... 4 pontos

Apresentar o valor de a $(1,8)$ ..... 3 pontos

Notas:

1. Se a equação apresentada for $\frac{a\left(\frac{\ln a}{a} - e^a\right)}{2} = 5$ (ou equivalente), a pontuação a atribuir nesta etapa é 2 pontos.

2. Se a equação apresentada não for equivalente a $\frac{a\left(e^a - \frac{\ln a}{a}\right)}{2} = 5$ nem a $\frac{a\left(\frac{\ln a}{a} - e^a\right)}{2} = 5$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

3. Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

7. ..... **12 pontos**

Reconhecer que $u_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{n+1} & \text{se } n \text{ par} \\ \dfrac{1}{n+1} & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$ ..... 4 pontos

Reconhecer que $u_n > -0{,}01$ para qualquer número n ímpar ..... 2 pontos

Escrever $-\dfrac{1}{n+1} > -0{,}01$ ..... 3 pontos

Obter $n > 99$ ..... 2 pontos

Responder ao problema (99) ..... 1 ponto

8. ..... **8 pontos**

Opção **(C)**

Caderno 2

9.1. ..... **8 pontos**

Opção **(B)**

9.2. ..... **8 pontos**

Opção **(B)**

10. ..... **13 pontos**

Obter $(1+i)^4 = -4$ ..... 2 pontos

Obter $z = \dfrac{1}{2-2i} - \dfrac{i}{2}$ ..... 1 ponto

Obter $z = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}i$ ..... 3 pontos

Escrever z na forma trigonométrica ..... 2 pontos

Obter z^n ..... 1 ponto

Escrever $-\dfrac{\pi}{4}n = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Obter o valor de n (4) ..... 2 pontos

11. ..... **8 pontos**

Opção **(B)**

12.1. ..... **8 pontos**

Opção **(C)**

12.2. ..... **8 pontos**

Opção **(C)**

13.1. ..... **8 pontos**

Opção **(A)**

13.2. ..... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Determinar $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$ ..... 6 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1-3x}{1-e^{-x}}}{x}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1-3x}{1-e^{-x}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-3x}{x(1-e^{-x})}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-3x}{x(1-e^{-x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-3x}{x}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1-e^{-x}}$ 2 pontos

Obter $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$ ..... 2 pontos

Determinar $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)+3x\right]$ ..... 7 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)+3x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-3x}{1-e^{-x}}+3x\right)$ ..... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-3x}{1-e^{-x}}+3x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-3xe^{-x}}{1-e^{-x}}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-3xe^{-x}}{1-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{3x}{e^{x}}}{1-e^{-x}}$ ..... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{3x}{e^{x}}}{1-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{3}{\frac{e^{x}}{x}}}{1-e^{-x}}$ ..... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)+3x\right]$ ..... 2 pontos

Concluir que a reta de equação $y=-3x+1$ é assíntota oblíqua do gráfico da função g, quando $x\to+\infty$ ..... 1 ponto

2.º Processo

Identificar a reta de equação $y = -3x + 1$ com a assíntota oblíqua do gráfico da função g, quando $x \to +\infty$ ..... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[g(x) - (-3x+1) \right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{-3x+1}{1-e^{-x}} - (-3x+1) \right]$ ..... 3 pontos

Escrever

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{-3x+1}{1-e^{-x}} - (-3x+1) \right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-3x+1-(-3x+1)(1-e^{-x})}{1-e^{-x}}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-3x+1-(-3x+1)(1-e^{-x})}{1-e^{-x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-3xe^{-x}+e^{-x}}{1-e^{-x}}$ ..... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-3xe^{-x}+e^{-x}}{1-e^{-x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{-3x}{e^x}+e^{-x}}{1-e^{-x}}$ ..... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{-3x}{e^x}+e^{-x}}{1-e^{-x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{-3}{\frac{e^x}{x}}+e^{-x}}{1-e^{-x}}$ ..... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{-3}{\frac{e^x}{x}}+e^{-x}}{1-e^{-x}} = 0$ ..... 2 pontos

Concluir que a reta de equação $y = -3x + 1$ é assíntota oblíqua do gráfico da função g, quando $x \to +\infty$ ..... 1 ponto

Nota – Se a resposta se limitar à identificação da reta de equação $y = -3x + 1$ com a assíntota oblíqua do gráfico da função g, quando $x \to +\infty$, a resposta é classificada com 0 pontos.

14.1. ..... **13 pontos**

Escrever $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(\pi - x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(\pi - x)}{2 + \cos(\pi - x)}}{x}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(\pi - x)}{2 + \cos(\pi - x)}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi - x)}{x\left(2 + \cos(\pi - x)\right)}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi - x)}{x\left(2 + \cos(\pi - x)\right)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x(2 - \cos x)}$ ..... 5 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x(2 - \cos x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2 - \cos x}$ ..... 3 pontos

Obter o valor de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(\pi - x)}{x}$ (1) ..... 3 pontos

14.2. ..... **13 pontos**

Determinar $f'(x)$ (**ver nota**) ..... 3 pontos

Escrever $f'(x) = 0$ ..... 1 ponto

Obter o zero de f' ..... 3 pontos

Apresentar um quadro de sinal de f' e de monotonia de f (ou equivalente) 3 pontos

Determinar $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ..... 3 pontos

Nota – Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

15. ..... **10 pontos**

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo cujo lado origem é $\dot{E}M$, em que M é o ponto médio de $[AB]$, e cujo lado extremidade é $\dot{E}F$, e seja G a projeção ortogonal do ponto F sobre a reta EM

Escrever $\overline{EG}$, em função de α ..... 2 pontos

Obter a distância do ponto F à reta AB, em função de α
$(4,5 - 3,5\cos\alpha)$ ..... 2 pontos

Determinar α, em função de t ..... 4 pontos

Obter a expressão pedida $\left(h(t) = 4,5 - 3,5\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right)$ ..... 2 pontos

COTAÇÕES

Item											
Cotação (em pontos)											
1.1.	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	
12	12	8		8	12	13	8	12	12	8	**105**
9.1.	**9.2.**	**10.**	**11.**	**12.1.**	**12.2.**	**13.1.**	**13.2.**	**14.1.**	**14.2.**	**15.**	
8		13	8	8		8	14	13	13	10	**95**
TOTAL											**200**

Exame final nacional de Matemática A **(2019, 1.ª fase)**

Proposta de resolução

Caderno 1

1.

1.1. Calculando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AV}$, e a sua norma:

$$\overrightarrow{AV} = V - A = (3, -1{,}2) - (2{,}1{,}0) = (1, -2{,}2)$$

$$\left\|\overrightarrow{AV}\right\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

Calculando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$, e a sua norma:

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0, -1{,}2) - (2{,}1{,}0) = (-2, -2{,}2)$$

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12}$$

Recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos\left(\overrightarrow{AV}\,\widehat{}\,\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AV} \,.\, \overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AV}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{(1, -2{,}2).(-2, -2{,}2)}{3\sqrt{12}} = \frac{-2+4+4}{3\sqrt{12}} = \frac{6}{3\sqrt{12}} = \frac{2}{\sqrt{12}}$$

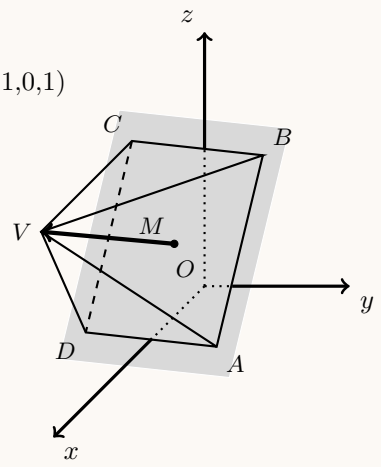
Logo, a amplitude do ângulo VAC, em graus, arredondado às unidades, é

$$V\hat{A}C = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{12}}\right) \approx 55^\circ$$

1.2. Como a pirâmide é quadrangular regular, considerando M o ponto centro da base, ou seja o ponto médio do segmento $[AC]$, temos que o vetor $\overrightarrow{MV}$ é perpendicular ao plano que contém a base, ou seja, é um vetor normal do plano que contém a base da pirâmide.

Determinando as coordenadas do ponto M, temos:

$$\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2}+\frac{z_A+z_C}{2}\right)=\left(\frac{2+0}{2},\frac{1+(-1)}{2}+\frac{0+2}{2}\right)=(1,0,1)$$



Calculando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{MV}$, temos:

$$\overrightarrow{MV}=V-M=(3,-1,2)-(1,0,1)=(2,-1,1)$$

Desta forma, a equação do plano é da forma:

$$2x-y+z+d=0$$

E como o ponto A pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo as coordenadas, na equação anterior:

$$2(2)-1+0+d=0 \Leftrightarrow 4-1+d=0 \Leftrightarrow 3+d=0 \Leftrightarrow d=-3$$

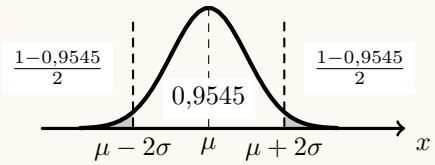
E assim, a equação do plano é:

$$2x-y+z-3=0$$

2.

2.1. Como $\mu=5$ e $sigma=\frac{1}{2}$, então $P(X>6)=P(X>5+2\times\frac{1}{2})=P(X>\mu+2\sigma)$

Assim, temos que $P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)\approx 0{,}9545$ e como $P(X<\mu-2\sigma)=P(X>\mu+2\sigma)$, temos que:



$$P(X>6)=P(X>\mu+2\sigma)\approx\frac{1-0{,}9545}{2}\approx 0{,}023$$

Resposta: **Opção C**

2.2. Calculando o valor do limite, vem que:

$$\lim\left(\frac{n-2}{n}\right)^{3n}=\lim\left(\frac{n}{n}+\frac{-2}{n}\right)^{3n}=\left(\lim\left(1+\frac{-2}{n}\right)^{n}\right)^{3}=\left(e^{-2}\right)^{3}=e^{-2\times 3}=e^{-6}=\frac{1}{e^6}$$

Resposta: **Opção C**

3.

3.1. Considerando a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, uma bola da caixa, e os acontecimentos:

- A: A bola ser amarela
- L: A bola ter o logotipo desenhado

Designando por n o número de bolas que a caixa contém, de acordo com o enunciado, temos que:

- $P(A) = \dfrac{10}{n}$
- $P(L|A) = \dfrac{3}{10}$
- $P\left(\overline{A} \cup \overline{L}\right) = \dfrac{15}{16}$

Desta forma, usando as leis de DeMorgan, e a probabilidade do acontecimento contrário, temos que:

$$P\left(\overline{A} \cup \overline{L}\right) = P\left(\overline{A \cap L}\right) = 1 - P(A \cap L)$$

E assim, vem que:

$$P\left(\overline{A} \cup \overline{L}\right) = \frac{15}{16} \Leftrightarrow 1 - P(A \cap L) = \frac{15}{16} \Leftrightarrow 1 - \frac{15}{16} = P(A \cap L) \Leftrightarrow \frac{1}{16} = P(A \cap L)$$

Logo, recorrendo à definição de probabilidade condicionada, podemos determinar o valor de n, ou seja, o número de bolas que a caixa contém:

$$P(L|A) = \frac{P(L \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow \frac{3}{10} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{10}{n}} \Leftrightarrow \frac{3 \times 10}{10 \times n} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \frac{3}{n} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow 16 \times 3 = n \Leftrightarrow 48 = n$$

3.2. Como existem 10 posições na fila e pretendemos observar as posições em ficam as 3 bolas com logotipo serão colocadas, podemos considerar apenas as 3 posições que serão ocupadas pelas bolas com logotipo, de entre as 10 posições, considerando as restantes posições irrelevantes porque serão ocupadas por bolas indistinguíveis. Assim, o número de conjuntos de 3 posições que é possível escolher, ou seja, o número de casos possíveis, é ${}^{10}C_3$

De entre estes ${}^{10}C_3$ conjuntos de posições, os que correspondem a três posições adjacentes, são 8 (considerando o bloco de três bolas como único, só existem 8 posições - as setes posições de bolas sem logotipo e a posição ocupada pelo bloco de bolas com logotipo), pelo que a probabilidade de as três bolas com o logotipo desenhado ficarem juntas, é:

$$p = \frac{8}{{}^{10}C_3} = \frac{1}{15}$$

Resposta: **Opção B**

4. Para que os números sejam ímpares e maiores do que seis milhões, têm que, cumulativamente, ter o primeiro algarismo maior ou igual a 6 e o último algarismo ímpar.

   Como só existe um algarismo 7, os números ímpares que se podem formar maiores que sete milhões, devem terminar em 5, pelo que usando o 7 para o algarismo dos milhões e um dos 5 para o algarismo das unidades, restam escolher a posição do outro algarismo 5, de entre as 5 posições disponíveis, sendo que as restantes posições serão ocupadas por algarismos 6. Assim, nestas condições o número de números ímpares que se podem formar maiores que sete milhões é: ${}^5C_1 = 5$

   Caso o algarismo dos milhões seja um 6, podemos considerar a hipótese do algarismo das unidades ser o 7, e neste caso, a contagem do número de hipóteses corresponde a escolher 2 das 5 posições restantes onde devem figurar os algarismos 5, ou seja, ${}^5C_2 = 10$

   Ainda no caso do algarismo dos milhões ser um 6, devemos considerar a hipótese do algarismo das unidades ser 5, e nesse caso será necessário escolher uma posição para o 5 restante, de entre as 5 posições restantes e outra para o 7, de entre as 4 restantes, ou seja, ${}^5C_1 \times {}^4C_1 = 20$

   Assim, o número de números ímpares e maiores do que seis milhões, de acordo com as restrições do enunciado, é:

   $$ {}^5C_1 + {}^5C_2 + {}^5C_1 \times {}^4C_1 = 5 + 10 + 20 = 35$$

5. Como a lente de contacto foi obtida a partir de superfícies esféricas com 7 mm e 8 mm de raio, e $r_2 > r_1$, temos que $r_2 = 8$ e $r_1 = 7$.

   Assim, temos que:

   $$\frac{\sqrt{[(7+8)^2 - x^2]\,[x^2 - (7-8)^2]}}{x}\text{, com } 8-7 < x < \sqrt{8^2 - 7^2}$$

   Ou seja:

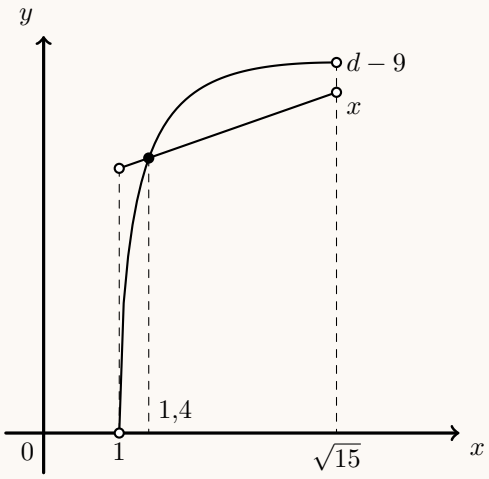
   $$\frac{\sqrt{(225 - x^2)(x^2 - 1)}}{x}\text{, com } 1 < x < \sqrt{15}$$

   Como o diâmetro da lente d excede em 9 mm a distância entre os centros das duas superfícies esféricas, ou seja, x, temos que:

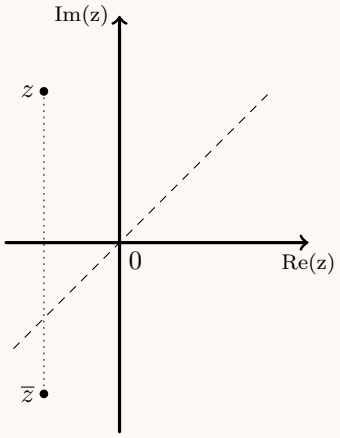
   $$d = x + 9 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(225 - x^2)(x^2 - 1)}}{x} = x + 9$$

   Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função d e a reta $y = x + 9$, para os valores de x indicados,$1 < x < \sqrt{15}$, (reproduzidos na figura ao lado), e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, obtemos um valor aproximado (às décimas) da abcissa do ponto de interseção, ou seja, a solução da equação:

   $$x \approx 1{,}4$$



6. Como $z = -1 + 2i$, temos que $\overline{z} = -1 - 2i$



Como $\text{Re}(z) < 0$ e $\text{Im}(z) < 0$, temos que θ é um ângulo do 3º quadrante, ou seja, $\theta \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, pelo que $\theta < \frac{3\pi}{2}$

Por outro lado, como $\text{tg}\,\theta = \frac{-2}{-1} = 2$, ou seja, $\text{tg}\,\theta > 1$, temos que $\theta > \frac{5\pi}{4}$

Assim, vem que:

$$\theta \in \left]\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$$

Resposta: **Opção D**

7. Designado por a o maior dos dois termos considerados da progressão geométrica, e por b 0 menor, como a razão é r, temos que:

$$\frac{a}{b} = r \Leftrightarrow a = b \times r$$

Como a soma dos termos é 12, temos que: $a + b = 12 \Leftrightarrow b \times r + b = 12 \Leftrightarrow b \times r = 12 - b$

Como a diferença dos termos é 3, temos que: $a - b = 3 \Leftrightarrow b \times r - b = 3 \Leftrightarrow b \times r = 3 + b$

Assim, por transitividade das duas igualdades anteriores, temos que:

$$12 - b = 3 + b \Leftrightarrow 12 - 3 = b + b \Leftrightarrow 9 = 2b \Leftrightarrow \frac{9}{2} = b$$

Substituindo o valor de b na igualdade $b \times r - b = 3$, e resolvendo a equação, obtemos o valor de r:

$$\frac{9}{2} \times r = 3 + \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{9}{2} \times r = \frac{6}{2} + \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{9}{2} \times r = \frac{15}{2} \Leftrightarrow r = \frac{15 \times 2}{2 \times 9} \Leftrightarrow r = \frac{5}{3}$$

8. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que:

$$\ln(a^2 - b^2) - 2\ln(a + b) = \ln(a^2 - b^2) - \ln(a + b)^2 = \ln\frac{a^2 - b^2}{(a + b)^2} = \ln\frac{(a + b)(a - b)}{(a + b)(a + b)} = \ln\frac{a - b}{a + b}$$

Como $a + b = 2(a - b)$, obtendo o valor da aproximação com a calculadora, temos que:

$$\ln\frac{a - b}{a + b} = \ln\frac{a - b}{2(a - b)} = \ln\frac{1}{2} \approx -0{,}7$$

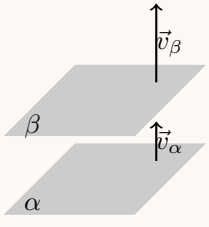
Resposta: **Opção C**

Caderno 2

9.

9.1. Observando as equações dos planos α e β, podemos verificar que os respetivos vetores normais ($\vec{v}_\alpha = (1,1,1,1)$ e $\vec{v}_\beta = (2,2,2)$) são colineares, porque: $\vec{v}_\beta = 2\vec{v}_\alpha$
Desta forma, como as duas equações não são equivalentes, podemos concluir que os planos α e β são estritamente paralelos.

Logo, não existem pontos em comum entre estes dois planos, pelo que também não existem pontos em comum aos três planos, ou seja, a intersecção dos planos α, β e γ é o conjunto vazio.



Resposta: **Opção A**

9.2. Como a área do círculo é 9π, podemos calcular a medida do raio (r), recorrendo à fórmula da área:

$$A_\circ = \pi r^2 \Leftrightarrow \pi r^2 = 9\pi \Leftrightarrow r^2 = \frac{9\pi}{\pi} \underset{r\geq 0}{\Rightarrow} r = \sqrt{9} \Rightarrow r = 3$$

Assim, relativamente à elipse, podemos verificar que o semieixo menor (vertical) tem comprimento 3 ($b = 3$), tal como a semidistância focal($c = 3$).

Calculando o comprimento de a, semieixo maior (horizontal), vem que:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = 3^2 + 3^2 \Leftrightarrow a^2 = 9 + 9 \Leftrightarrow a^2 = 18 \underset{a\geq 0}{\Rightarrow} a = \sqrt{18}$$

Logo, a equação da elipse é:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{18}^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Resposta: **Opção A**

10. Simplificando a expressão de w, como $i^6 = i^{4+2} = i^4 \times i^2 = 1 \times (-1) = -1$, e $\overline{z_1} = 3 - 4i$ temos que:

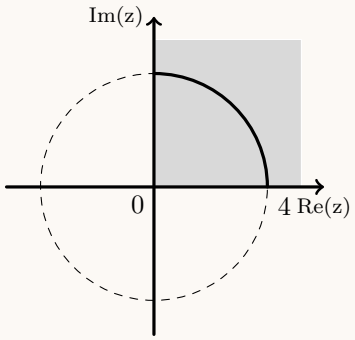
$$w = \frac{3 + 4i + (-1) + 2(3 - 4i)}{3 + 4i - (4 + 6i)} = \frac{3 + 4i - 1 + 6 - 8i}{3 + 4i - 4 - 6i} = \frac{8 - 4i}{-1 - 2i} = \frac{(8 - 4i)(-1 + 2i)}{(-1 - 2i)(-1 + 2i)} =$$

$$= \frac{-8 + 16i + 4i - 8i^2}{(-1)^2 - (2i)^2} = \frac{-8 + 20i - 8(-1)}{1 - 4i^2} = \frac{-8 + 20i + 8}{1 - 4(-1)} = \frac{20i}{1 + 4} = \frac{20i}{5} = 4i$$

Assim, temos que:

$$|w| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$$

E a condição $|z| = |w| \Leftrightarrow |z| = 4$ define uma circunferência de centro na origem e raio 4, pelo que a condição $|z| = |w| \wedge \text{Im}\, z \geq 0 \wedge \text{Re}\, z \geq 0$ corresponde a um quarto da circunferência anterior.



Desta forma o comprimento da linha definido pela condição é um quarto do perímetro da circunferência:

$$\frac{P_\circ}{4} = \frac{2\pi r}{4} = \frac{2\pi \times 4}{4} = 2\pi$$

11. Simplificando a equação, temos:

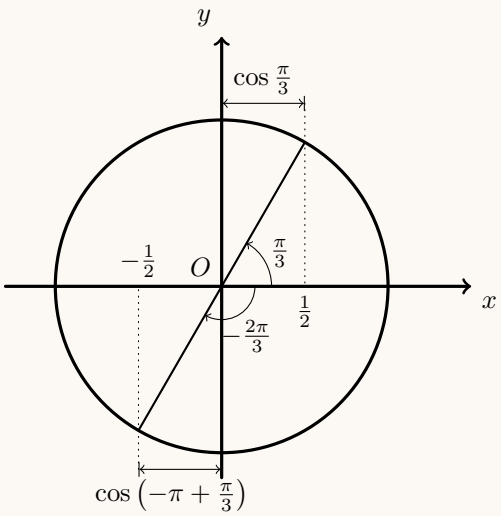
$$2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

Como $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, podemos observar no círculo trigonométrico que:

$$\cos\left(-\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

Pelo que a solução da equação no intervalo $[-\pi, 0]$ é:

$$x = -\frac{2\pi}{3}$$



Resposta: **Opção B**

12.

12.1. Organizando todas as somas possíveis numa tabela, temos:

	-1	1	1	1	1	1
-1	-2	0	0	0	0	0
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2

Logo, pela observação da tabela, podemos observar os valores possíveis para a soma e as respetivas probabilidades:

- $P(X=-2)=\dfrac{1}{36}$
- $P(X=0)=\dfrac{10}{36}=\dfrac{5}{18}$
- $P(X=2)=\dfrac{25}{36}$

Assim, temos que $P(X=k)=\dfrac{5}{18}$, para $k=0$

Resposta: **Opção A**

12.2. Para um oscilador harmónico escrito na forma $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$, ω é a pulsação, e o período é dado por $\dfrac{2\pi}{\omega}$

Assim, no caso deste oscilador harmónico, temos que $\omega=\pi$, pelo que o período é: $\dfrac{2\pi}{\pi}=2$

Resposta: **Opção A**

13.

13.1. Para calcular o declive da reta tangente, no ponto de abcissa 1 começamos por determinar a expressão da derivada da função, para $x > 0$:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x-\ln x}\right)' = \frac{(x)'(x-\ln x) - x(x-\ln x)'}{(x-\ln x)^2} = \frac{1\times(x-\ln x) - x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(x-\ln x)^2} =$$

$$= \frac{x-\ln x - x + \frac{x}{x}}{(x-\ln x)^2} \underset{x>0}{=} \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$$

Assim, temos que o declive da reta tangente no ponto de abcissa 4 é:

$$m = f'(1) = \frac{1-\ln 1}{(1-\ln 1)^2} = \frac{1-0}{(1-0)^2} = 1$$

Logo a equação da reta tangente é da forma $y = 1\times x + b \Leftrightarrow y = x + b$

Como $f(1) = f'(1) = \frac{1}{1-\ln 1} = \frac{1}{1-0} = 1$, sabemos que o ponto $P(1,1)$ pertence ao gráfico da função e também à reta tangente.
Assim, substituindo as coordenadas do ponto de tangência na equação da reta, podemos calcular o valor de b:

$$1 = 1 + b \Leftrightarrow 1 - 1 = b \Leftrightarrow 0 = b$$

Pelo que a equação da reta tangente é:

$$y = x - 0 \Leftrightarrow y = x$$

13.2. Para mostrar que a função f é contínua em $x = 0$, temos que verificar que $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$:

- $f(0) = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{x-\ln x}\right) = \frac{0^+}{0^+ - \ln 0^+} = \frac{0^+}{0^+ - (-\infty)} = \frac{0^+}{+\infty} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right) = \frac{1-\cos(0^-)}{0^-} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1-\cos x}{x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right) = \lim_{x\to 0^-}\frac{1^2-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\operatorname{sen} x\times\operatorname{sen} x}{x\times(1+\cos x)}\right) = \underbrace{\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}\times\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = 1\times\frac{\operatorname{sen} 0^+}{1+\cos 0^+} = 1\times\frac{0}{1+1} = 1\times 0 = 0$$

Assim, temos que, como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, a função f é contínua em $x = 0$

14.

14.1. Começamos por determinar a expressão da derivada da função g, em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$:

$$g'(x)=\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)'=\frac{\left((-x)'e^{-x}\right)x-e^{-x}\times(x)'}{x^2}=\frac{-1\times e^{-x}\times x-e^{-x}\times 1}{x^2}=\frac{-xe^{-x}-e^{-x}}{x^2}$$

Calculando os zeros da derivada da função g, em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$:

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-xe^{-x}-e^{-x}}{x^2}=0 \Leftrightarrow \frac{e^{-x}(-x-1)}{x^2}=0 \Leftrightarrow e^{-x}(-x-1)=0 \wedge \underbrace{x^2\neq 0}_{\text{P.V, pq } x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-x}=0}_{\text{Impossível}} \vee -x-1=0 \Leftrightarrow -1=x$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	$-\infty$	-1		0	$-\infty$
e^{-x}	$+$	$+$	$+$	n.d.	$+$
$(-x-1)$	$+$	0	$-$	n.d.	$-$
$e^{-x}(-x-1)$	$+$	0	$-$	n.d.	$-$
x^2	$+$	$+$	$+$	n.d.	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	n.d.	$-$
$g(x)$	↗	Máx	↘	n.d.	↘

Assim, podemos concluir que a função g:

- é decrescente no intervalo $]-1{,}0]$ e também no intervalo $[0,+\infty[$;
- é crescente no intervalo $]-\infty,-1]$;
- tem um máximo relativo que é $f(-1)=\dfrac{e^{-(-1)}}{-1}=\dfrac{e^1}{-1}=-e$

14.2. Como a função h tem domínio $\mathbb{R}^+$, o e o respetivo gráfico tem uma assíntota oblíqua, o seu declive m, é o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

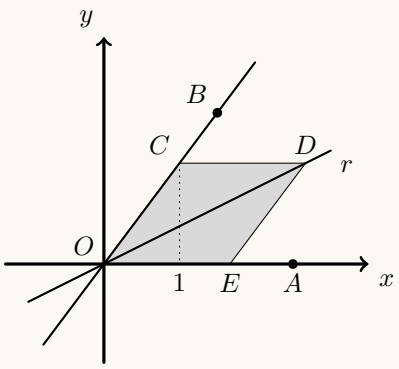
Assim, calculando o valor do declive, temos:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)+2x-\frac{1}{\sqrt{x}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^{-x}}{x}+2x-\frac{1}{\sqrt{x}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{e^{-x}}{x}}{x}+\frac{2x}{x}-\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{-x}}{x^2}+2-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)=\frac{e^{-(+\infty)}}{+\infty}+2-\frac{1}{+\infty\times+\infty}=\frac{0^+}{+\infty}+2-\frac{1}{+\infty}=0+2-0=2$$

Resposta: **Opção B**

15. Identificando que a diagonal de um losango bisseta os ângulos relativos aos vértices que definem essa diagonal, podemos considerar que a reta r contém a diagonal de um losango $[OCDE]$, em que C é um ponto da reta OB e E é um ponto sobre o eixo das abcissas (como na figura ao lado).



Assim, assumindo, sem perda de generalidade que a abcissa do ponto C é 1, calculamos a ordenada:

$$y_C = \frac{4}{3} \times 1 = \frac{4}{3}$$

Desta forma, como as coordenadas do ponto C são $\left(1, \frac{4}{3}\right)$, o lado do losango é:

$$\overline{OC} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{9}{9} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

Assim, como $[OCDE]$ é um losango, $\overline{OC} = \overline{CD}$, pelo que a ordenada do ponto D é $y_D = \frac{4}{3}$ e a abcissa é $x_D = 1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3}$

Logo, o declive da reta OD, ou seja, a reta r, é:

$$m_r = \frac{y_D - y_O}{x_D - x_O} = \frac{\frac{4}{3} - 0}{\frac{8}{3} - 0} = \frac{3 \times 4}{3 \times 8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Pelo que, como a reta r contém a origem, a respetiva ordenada na origem é nula, e assim a sua equação reduzida é:

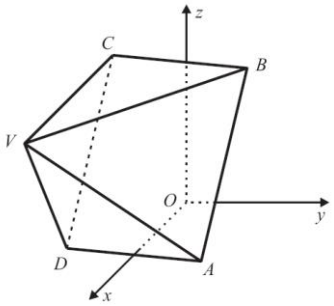
$$y = \frac{1}{2}x$$

Exame Final Nacional de Matemática A (Prova 635)
1.ª Fase , Ensino Secundário , 2019, Portugal.

Primer cuaderno. Duración de la prueba: 75 minutos. Tolerancia: 15 minutos.
Está permitido el uso de calculadoras.

1.

En la siguiente figura está representada una pirámide cuadrangular regular ABCDV. Los vértices A y C tienen coordenadas $(2,1,0)$ y $(0,-1,2)$, respectivamente. El vértice V tiene coordenadas $(3,-1,2)$.



a) Determina la amplitud del ángulo $\angle VAC$.
b) Determine una ecuación del plano que contiene la base de la pirámide. Presente esa ecuación de la forma $ax+by+cz+d=0$.

2. (Opción A) (P2001/2002)

Sea X una variable aleatoria con distribución normal de valor medio 5 y desviación estándar 1/2. ¿Cuál es el valor, redondeado a las milésimas, de $P(X>6)$?

(A) 0.046 (B) 0.042 (C) 0.023 (D) 0.021

2. (Opción B) (PMC 2015)

¿Cuál es el límite de la sucesión de término general $\left(\frac{n-2}{n}\right)^{3n}$?

(A) $\frac{1}{e^3}$ (B) e^3 (C) $\frac{1}{e^6}$ (D) e^6

3.

Una caja contiene bolas de varios colores, indistinguibles al tacto, unas con un logotipo impreso y otras no. De las bolas existentes en la caja, diez son amarillas. De esas diez bolas, tres tienen logotipo.

a) Se retira al azar una bola de la caja. Se sabe que la probabilidad de que no sea amarilla o de que no tenga logotipo es igual a $15/16$. Determine el número de bolas que contiene la caja.

b) Tomamos las diez bolas amarillas y las colocamos en fila. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres bolas con logotipo queden colocadas juntas?

(A) 1/16 (B) 1/15 (C) 1/14 (D) 1/13

4.

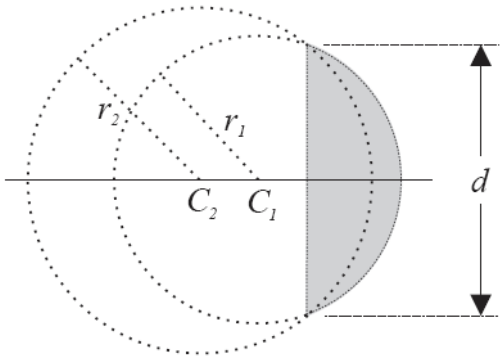
Considere todos los números naturales de siete cifras que se pueden escribir utilizando dos cifras "5", cuatro cifras "6" y una cifra "7". Determine cuántos de estos números son impares y mayores que seis millones.

5.

Una lente de contacto es un medio transparente delimitado por dos caras, cada una de ellas parte de una superficie esférica. En la siguiente figura se puede observar una lente de contacto.



En la siguiente figura está representado un corte longitudinal de dos superficies esféricas, una de centro C_1 y radio r_1 y otra de centro C_2 y radio r_2, con $r_2 > r_1$, que sirven de base para la construcción de una lente de contacto, representada como la zona sombreada.



Sea $x = \overline{C_1C_2}$.

Se sabe que el diámetro d de la lente viene dado por

$$\frac{\sqrt{((r_1 + r_2)^2 - x^2)\,(x^2 - (r_1 - r_2)^2)}}{x}$$, con $r_2 - r_1 < x < \sqrt{r_2^2 - r_1^2}$

Hemos obtenido una lente de contacto a partir de dos superficies esféricas de 7mm y 8mm de radio, respectivamente.

El diámetro de dicha lente excede en 9mm la distancia x entre los dos centros de las superficies esféricas.
Determine, recurriendo a las capacidades gráficas de la calculadora, el valor de x, sabiendo que ese valor es único en el intervalo $\left(r_2 - r_1, \sqrt{r_2^2 - r_1^2}\right)$.
No justifique la validez del resultado obtenido por la calculadora.

En su respuesta:

- Presente una ecuación que le permita resolver el problema;
- Reproduzca, en un sistema referencial, los gráficos de las funciones visualizadas en la calculadora que le permiten resolver la ecuación;
- Presente el resultado en milímetros, redondeando a las décimas.

6.

En C, el conjunto de números complejos, sea $z = -1 + 2i$
Sea θ el menor argumento positivo del número complejo $\bar{z}$ (conjugado de z).
¿A cuál de los intervalos siguientes pertenece θ?

(A) $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ (B) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ (C) $\left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$ (D) $\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$

7.

Sea r un número real mayor que 1. Se sabe que r es la razón de una progresión geométrica de términos positivos. Se sabe, además, que para dos términos consecutivos de dicha progresión, su suma es igual a 12 y su diferencia entre el mayor y el menor es igual a 3. Determine el valor de r.

8.

Sean a y b dos números reales positivos tales que $a > b$. Se sabe que $a + b = 2(a - b)$
¿Cuál es el valor, redondeando a las décimas, de $\ln(a^2 - b^2) - 2\ln(a + b)$?

(A) 0.7 (B) 1.4 (C) -0.7 (D) -1.4

Segundo cuaderno. Duración de la prueba: 75 minutos. Tolerancia: 15 minutos.
No está permitido el uso de calculadoras.

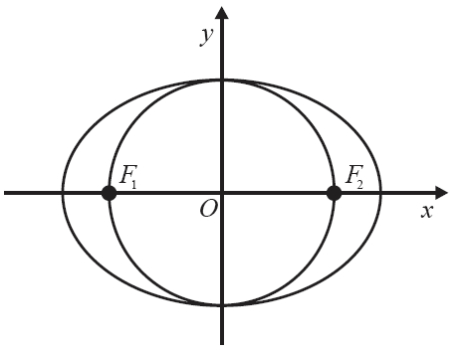
9. (Opción A)

Considere los planos α, β, γ determinados por las ecuaciones $x + y + z = 1$, $2x + 2y + 2z = 1$, $x + y = 0$, respectivamente. La intersección de estos tres planos es:

(A) El conjunto vacío (B) Un punto (C) Una recta (D) Un plano.

9. (Opción B)

En la figura siguiente están representadas una elipse y una circunferencia, ambas centradas en el origen. Los focos de la elipse, F_1 y F_2 pertenecen al eje X.



Se sabe, además, que:
- La distancia focal y el eje menor de la elipse son iguales al diámetro de la circunferencia.
- El área de la circunferencia es igual a 9π

¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a la ecuación reducida de la elipse?

(A) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ (B) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{9} = 1$ (C) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{20} = 1$ (D) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{18} = 1$

10.

Considere en C, el conjunto de números complejos, $z_1 = 3 + 4i$ y $z_2 = 4 + 6i$.

Sea $w = \dfrac{z_1 + i^6 + 2\overline{z_1}}{z_1 - z_2}$

En el plano complejo, la condición $|z| = |w| \wedge \text{Im}(z) \geq 0 \wedge \text{Re}(z) \geq 0$ define un arco de circunferencia. Determine su longitud.

11.

¿Cuál es la solución de la ecuación $2\cos x + 1 = 0$ en el intervalo $[-\pi, 0]$?

(A) $-\dfrac{5\pi}{6}$ (B) $-\dfrac{2\pi}{3}$ (C) $-\dfrac{\pi}{3}$ (D) $-\dfrac{\pi}{6}$

12. (Opción A) (P2001/2002)

Un dado cúbico equilibrado tiene una cara marcada con el número -1 y cinco caras marcadas con el número 1. Lanzamos este cubo dos veces. Sea X la variable aleatoria "Suma de los números obtenidos en los dos lanzamientos".

¿Cuál es el valor de k para el cual $P(X = k) = \dfrac{5}{18}$?

(A) 0 (B) 2 (C) -2 (D) -1

12. (Opción B) (PMC2015)

Un punto P se mueve en una recta numérica, en el intervalo de tiempo $I = [0,10]$ (medido en segundos), de forma que su respectiva abscisa viene dada por $x(t) = 3\cos\left(\pi t + \dfrac{2\pi}{3}\right)$, con $t \in I$. ¿Cuál es el periodo, en segundos, de este oscilador armónico?

(A) 2 (B) 3 (C) 2π (D) 3π

13.

Sea f la función, de dominio IR, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & si\ x < 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ \dfrac{x}{x - \ln x} & si\ x > 0 \end{cases}$$

a) Determina la ecuación reducida de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa 1.

b) Determine si la función f es continua en el punto 0. Justifique su respuesta.

14.

Sea g la función, de dominio $IR \setminus \{0\}$, definida por $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$

a) Estudie la monotonía de la función g y determine, si existen, sus extremos relativos.

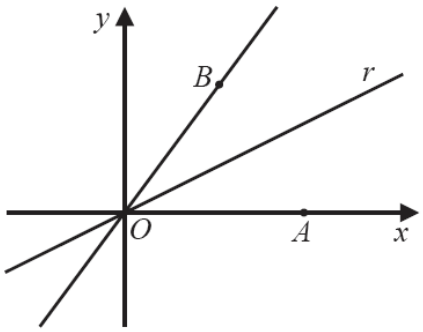
b) Sea h la función, de dominio IR^+, definida por $h(x) = g(x) + 2x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Se sabe que la gráfica de la función h tiene una asíntota oblicua. ¿Cuál es la pendiente de dicha asíntota?

(A) 1 (B) 2 (C) e (D) e^2

15.

En la siguiente figura están representados los puntos A y B, de abscisas positivas, y las rectas OB y r.



Sabemos que:

- El punto A pertenece al eje X.
- La recta OB está definida por la ecuación $y = \dfrac{4}{3}x$
- La recta r contiene la bisectriz del ángulo $\angle AOB$.

Determina la ecuación reducida de la recta r.

Puntuaciones:

1a	1b	2	3a	3b	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13a	13b	14a	14b	15
12	12	8	13	8	12	12	8	12	8	8	13	8	8	13	14	13	8	10

Total: 200 puntos.

Soluciones.

1.

a)

$$\overrightarrow{AV} = V - A = (3,-1,2) - (2,1,0) = (1,-2,2) \rightarrow \left|\overrightarrow{AV}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0,-1,2) - (2,1,0) = (-2,-2,2) \rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\cos \angle VAC = \frac{\overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AV}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{1(-2) + (-2)(-2) + 2 \cdot 2}{3 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle VAC = arc\cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 54.73^{\circ}$$

b) El centro de la base de la pirámide será el punto medio M del segmento AC:

$$M = \frac{A + C}{2} = \frac{(2,1,0) + (0,-1,2)}{2} = \frac{(2,0,2)}{2} = (1,0,1)$$

El vector $\overrightarrow{MV} = V - M = (3,-1,2) - (1,0,1) = (2,-1,1)$ será perpendicular a la base, con lo que nos sirve de vector normal. Luego la ecuación del plano que contiene la base será de la forma $2x - y + z + d = 0$

Y como sabemos que pasa por el punto $A = (2,1,0)$

$2 \cdot 2 - 1 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$

La ecuación es, por tanto, $2x - y + z - 3 = 0$

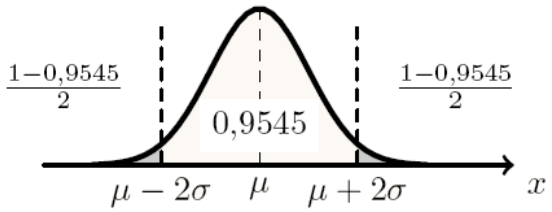
2. (Opción A)

$\mu = 5$, $\sigma = 1/2$, luego $P(X > 6) = P\left(X > 5 + 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = P(X > \mu + 2\sigma)$

Así pues, tenemos que $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \cong 0.9545$,

y como $P(X < \mu - 2\sigma) = P(X > \mu + 2\sigma)$, tenemos que:

$$P(X > 6) = P(X > \mu + 2\sigma) \cong \frac{1 - 0.9545}{2} \cong 0.023 \qquad \text{(C)}$$



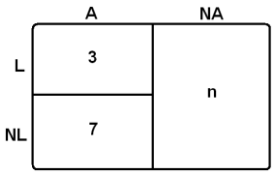
2. (Opción B)

$$\left(\frac{n-2}{n}\right)^{3n} = \left(\frac{n}{n} + \frac{-2}{n}\right)^{3n} = \left(1 + \frac{-2}{n}\right)^{3n} = \left(1 + \frac{1}{(-n/2)}\right)^{3n} = \left(\left(1 - \frac{1}{(n/2)}\right)^{-n/2}\right)^{-6} \rightarrow e^{-6} = \frac{1}{e^6}$$

La respuesta correcta es la (C)

3.

a) Sean n las bolas no amarillas "NA". Representando los diferentes sucesos en un esquema:



$$\frac{15}{16} = P(NA \cup NL) = \frac{n+7}{n+10} \Rightarrow 16(n+7) = 15(n+10) \Rightarrow 16n+112 = 15n+150 \Rightarrow n = 48$$

b) Hay ocho posiciones de poner las tres con logotipo:

L	L	L	A	A	A	A	A	A	A
A	L	L	L	A	A	A	A	A	A
A	A	L	L	L	A	A	A	A	A
A	A	A	L	L	L	A	A	A	A
A	A	A	A	L	L	L	A	A	A
A	A	A	A	A	L	L	L	A	A
A	A	A	A	A	A	L	L	L	A
A	A	A	A	A	A	A	L	L	L

Para cada una de estas posiciones, hay $3!$ formas de colocar las tres bolas con logotipo y $7!$ formas de colocar las siete restantes bolas amarillas sin logotipo.
Luego, en total, hay $8 \cdot 3! 7!$ posibilidades, y por tanto

$$P = \frac{F}{T} = \frac{8 \cdot 3! 7!}{10!} = \frac{8 \cdot 3!}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{3!}{10 \cdot 9} = \frac{1}{5 \cdot 3} = \frac{1}{15} \quad \text{(B)}$$

4.

A	B	C	D	E	F	G
6	0	0	0	0	0	0

El dígito A solo puede ser un "6" o un "7".
El dígito G solo puede ser un "5" o un "7"

A="6", G="5", y para el resto tenemos 1 "5", 3 "6" y 1 "7": El número de posibilidades será el de formas de colocar los 3 "6" en las cinco posiciones:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{20}{2} = 10$$

Y luego colocar el "5" y el "7", dos posiciones. Luego el total es $2C_5^3 = 20$

A="6", G="7", y para el resto tenemos 2 "5", 3 "6":
El número de posibilidades quedará determinado por las posiciones de los "6":

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{20}{2} = 10$$

A="7", G="5", y para el resto tenemos 1 "5", 4 "6":
El número de posibilidades quedará determinado por las formas de colocar los cuatro "6":

$$C_5^4 = \frac{5!}{4!1!} = 5$$

Luego, en total, hay $20+10+5=35$ números diferentes.

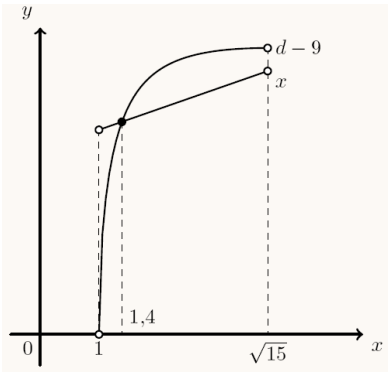
5.
En este problema tenemos que resolver la siguiente ecuación:

$$\left.\begin{matrix} r_1 = 7 \\ r_2 = 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow d = \frac{\sqrt{(15^2 - x^2)\,(x^2 - 1^2)}}{x} = x + 9$$

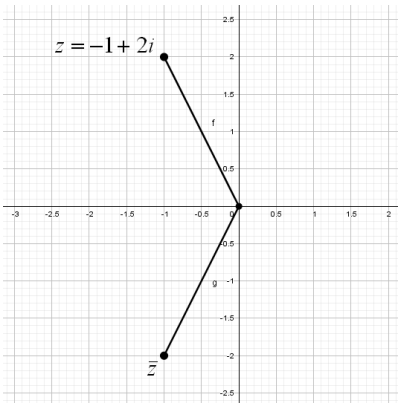
Visualizando en la calculadora gráfica las gráficas de las funciones d y la recta $y = x + 9$

Para los valores $1 < x < \sqrt{15}$, y usando la función de la calculadora para determinar valores aproximados de las coordenadas de los puntos de intersección de dos gráficas, obtenemos un valor aproximado (a las décimas) de la abscisa del punto de intersección, es decir, de la solución de las ecuaciones:

$$x \cong 1.4$$



6.
Representando el número $z = -1 + 2i$:



Vemos que su argumento está en el tercer cuadrante, más cerca de $3\pi/2$ que de π, luego la solución es D.

7.

$a_n = a_0 \cdot r^n$. Vamos a suponer que la sucesión es creciente, es decir, que $r > 1$.

$$12 = a_n + a_{n-1} = a_0 \cdot r^n + a_0 \cdot r^{n-1} = a_0 r^{n-1}(r+1) \Rightarrow \frac{12}{r+1} = a_0 r^{n-1}$$

$$3 = a_n - a_{n-1} = a_0 \cdot r^n - a_0 \cdot r^{n-1} = a_0 r^{n-1}(r-1) \Rightarrow \frac{3}{r-1} = a_0 r^{n-1}$$

Luego

$$\frac{12}{r+1} = \frac{3}{r-1} \Rightarrow 12(r-1) = 3(r+1) \Rightarrow 12r - 12 = 3r + 3 \Rightarrow 12r - 3r = 3 + 12$$

$$\Rightarrow 9r = 15 \Rightarrow r = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

8.

$$\ln\left(a^2 - b^2\right) - 2\ln(a+b) = \ln\left(a^2 - b^2\right) - \ln\left((a+b)^2\right) = \ln\left(\frac{a^2 - b^2}{(a+b)^2}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)^2}\right) = \ln\left(\frac{a-b}{a+b}\right) = \ln\left(\frac{a-b}{2(a-b)}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cong -0.693$$

La solución es (C).

9. (Opción A)

Se ve claramente que los dos primeros planos son paralelos y no coincidentes, luego su intersección es vacía, independientemente del tercer plano. La solución es (A).

9. (Opción B)

$9\pi = \pi r^2 \Rightarrow r = 3$

$c = 3 \Rightarrow F_1 = (c,0) = (3,0)$, $F_2 = (-3,0)$

$b = 3 \Rightarrow b^2 = 9$

$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow 3^2 = a^2 - 3^2 \Rightarrow a^2 = 18$

Y la ecuación es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$, es decir, la opción (A)

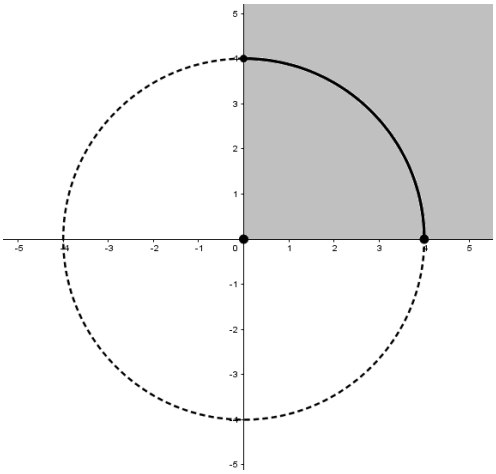
10.

$$z_1 + i^6 + 2\overline{z_1} = 3 + 4i + (-1) + 2(3 - 4i) = 8 - 4i = 4(2 - i) \Rightarrow \left|z_1 + i^6 + 2\overline{z_1}\right| = 4\sqrt{2^2 + 1^2} = 4\sqrt{5}$$

$$z_1 - z_2 = 3 + 4i - (4 + 6i) = -1 - 2i = -(1 + 2i) \Rightarrow |z_1 - z_2| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$|w| = \frac{\left|z_1 + i^6 + 2\overline{z_1}\right|}{|z_1 - z_2|} = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 4$$

Luego el conjunto $|z| = |w| \wedge \mathrm{Im}(z) \geq 0 \wedge \mathrm{Re}(z) \geq 0$ determina la parte del primer cuadrante de la circunferencia $|z| = 4$

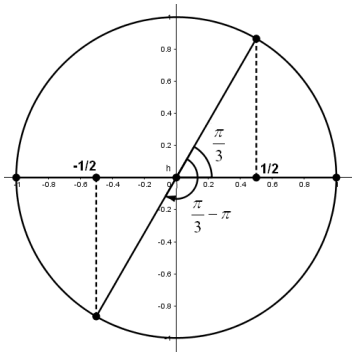


Cuya longitud es $\frac{2\pi r}{4} = \frac{2\pi 4}{4} = 2\pi$

11.

$$2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{-1}{2}$$

Sabemos que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, luego el ángulo buscado será el simétrico de este alrededor del centro:



$\frac{\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$ (B)

12. (Opción A)

Vemos las posibilidades mediante un esquema de doble entrada. En filas, la primera tirada, y en columnas, la segunda:

	-1	1	1	1	1	1
-1	-2	0	0	0	0	0
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2

$P(X=-2)=\frac{1}{36}$, $P(X=0)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$, $P(X=2)=\frac{25}{36}$

La solución es (A)

12. (Opción B) (PMC2015)

En el caso de este oscilador armónico tenemos que $\omega=\pi$, por lo que el periodo es $\frac{2\pi}{\pi}=2$, y la respuesta correcta es (A).

13.

a) Alrededor de $x=1$ la función es $f(x)=\frac{x}{1-\ln x}$, y por tanto

$$\left.\begin{array}{l} x\to 1 \\ x-\ln x\to 1-1/x \end{array}\right\}\to f'(x)=\frac{1(x-\ln x)-x(1-1/x)}{(x-\ln x)^2}=\frac{x-\ln x-x+1/x}{(x-\ln x)^2}=\frac{1/x-\ln x}{(x-\ln x)^2}$$

$$f'(1)=\frac{1/1-\ln 1}{(1-\ln 1)^2}=\frac{1-0}{(1-0)^2}=1$$

$$f(1)=\frac{1}{1-\ln 1}=\frac{1}{1}=1$$

$y=1x+b\to 1=1\cdot 1+b\to b=0\Rightarrow y=x$ es la ecuación de la recta tangente pedida.

b)

Resolvemos las indeterminaciones $0/0$ aplicando Hopital:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{1}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x-\ln x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1-1/x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{(x-1)/x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x-1}=\frac{0}{-1}=0$$

Y por tanto $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0$ y la función es continua en $x=0$.

14.

a)

$$\left.\begin{array}{l} e^{-x}\to -e^{-x} \\ x\to 1 \end{array}\right\}\Rightarrow g'(x)=\frac{-xe^{-x}-1e^{-x}}{x^2}=\frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}=0\Leftrightarrow x=-1$$

Estudiamos ahora la variación de la monotonía alrededor de $x=-1$

$x<-1\Rightarrow x+1<0\Rightarrow g'(x)=\frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}>0$ creciente

$x>-1\Rightarrow x+1>0\Rightarrow g'(x)=\frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}<0$ decreciente

Luego podemos garantizar que la función tiene un máximo relativo en $x=-1$, y

$$g(-1)=\frac{e^1}{-1}=-e$$

b) Sabemos que la pendiente de la asíntota oblicua es

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{x^2}+\frac{2x}{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{x^2}+2-\frac{1}{x\sqrt{x}}=2$$

Puesto que $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}=0$, y la respuesta correcta es (B).

15.

Una forma de terminar esta bisectriz sería construyendo un triángulo isósceles y determinando su mediana, puesto que en todo triángulo isósceles coinciden mediana y bisectriz.

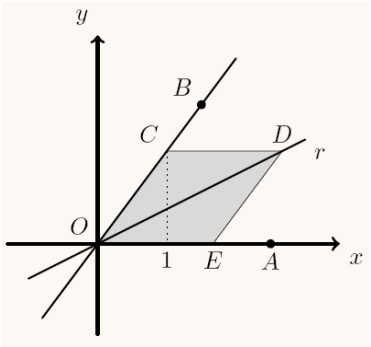
La recta OB es $y=\frac{4}{3}x$. Luego pasa por el punto $C=(3,4)$ $|OC|=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

Luego tomando $D=(5,0)$ tenemos que ΔDOC es isósceles en O.

El punto medio de su base $\overline{CD}$ es $M=\frac{(3,4)+(5,0)}{2}=\frac{(8,4)}{2}=(4,2)$

Luego la recta buscada pasa por O y M, que tiene por ecuación $y=\frac{1}{2}x$, y su pendiente es $\frac{1}{2}$.

Nota: En las soluciones de http://mat.absolutamente.net/joomla/index.php/recursos/exames-e-testes-intermedios/matematica-a se presenta una solución alternativa equivalente mediante la construcción de un rombo:



Documento de referencia para las soluciones: "**19_f1_r.pdf**"

http://mat.absolutamente.net/joomla/index.php/recursos/exames-e-testes-intermedios/matematica-a

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2020

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho | Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 4 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final (itens **5.1.**, **5.2.**, **7.1.** e **7.2.**). Dos restantes 14 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \ \text{e} \ n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\, v)' = u'\, v + u\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\, v - u\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\, u^{n-1}\, u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\ e^u$

$(a^u)' = u'\ a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \dfrac{8n-4}{n+1}$

1.1. Estude a sucessão (u_n) quanto à monotonia.

1.2. Seja f a função, de domínio $]-\infty, 8[$, definida por $f(x) = \log_2(8-x)$

A que é igual $\lim f(u_n)$?

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

2. Quatro pessoas vão escolher, cada uma e em segredo, um dos seguintes números: $1,\ 2,\ 3,\ 4$ e 5

Qual é a probabilidade de exatamente duas delas escolherem o número 5 ?

(A) $0{,}1530$ **(B)** $0{,}1532$ **(C)** $0{,}1534$ **(D)** $0{,}1536$

3. Um saco contém bolas azuis e bolas brancas, indistinguíveis ao tato. Cada bola tem uma única cor e só existem bolas azuis e bolas brancas no saco.

3.1. Retiram-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas do saco.

Sejam A e B os acontecimentos:

A : «A primeira bola retirada é azul»

B : «A segunda bola retirada é branca»

Sabe-se que $P(A \cap B) = \dfrac{1}{3}P(A)$

Justifique que inicialmente existia um número ímpar de bolas azuis no saco.

Sugestão: comece por designar por a o número de bolas azuis e por b o número de bolas brancas que existiam inicialmente no saco.

3.2. Considere que se alterou a constituição inicial do saco e que, neste, estão agora oito bolas azuis e sete bolas brancas.

Pretende-se colocar todas estas bolas em dez caixas numeradas de 1 a 10, de tal forma que:

- cada caixa com número par tenha, pelo menos, uma bola azul;
- cada caixa com número ímpar tenha, pelo menos, uma bola branca;
- cada caixa tenha, no máximo, duas bolas.

Nestas condições, de quantas maneiras diferentes podem ficar colocadas as bolas nas dez caixas?

(A) 1176 **(B)** 2520 **(C)** $28\,016$ **(D)** $30\,550$

4. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

4.1. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 = \overline{z}$

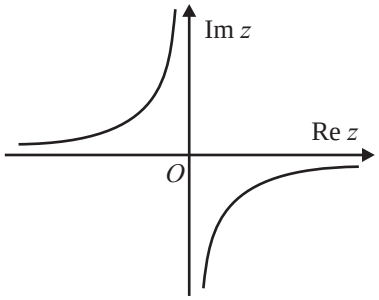
Sabe-se que, no plano complexo, os afixos dos números complexos não nulos que são soluções desta equação são os vértices de um polígono regular.

Determine o perímetro desse polígono.

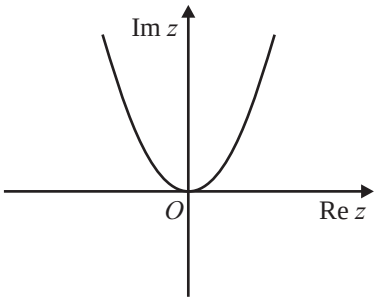
4.2. Considere, em $\mathbb{C}$, a condição $\mathrm{Re}(z) \times \mathrm{Im}(z) = 1$

Em qual das opções seguintes pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição?

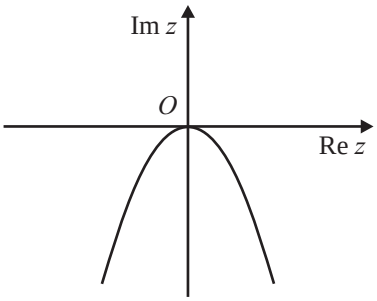
(A)



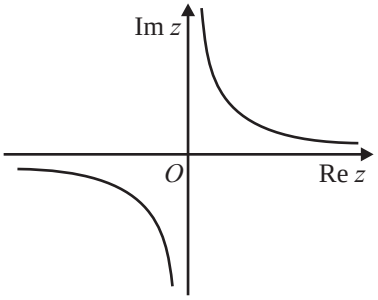
(B)



(C)



(D)



5. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cilindro reto.

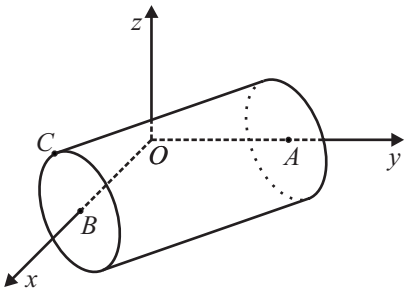


Figura 1

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo Oy e é o centro de uma das bases do cilindro, e o ponto B pertence ao eixo Ox e é o centro da outra base;
- o ponto C pertence à circunferência de centro B que delimita uma das bases do cilindro;
- o plano ABC é definido pela equação $3x + 4y + 4z - 12 = 0$

Resolva os itens **5.1.** e **5.2.** sem recorrer à calculadora.

5.1. Determine $\overline{BC}$, sabendo que o volume do cilindro é igual a 10π

5.2. Seja P o ponto de coordenadas $(3, 5, 6)$

Determine as coordenadas do ponto do plano ABC que se encontra mais próximo do ponto P

6. Na Figura 2, estão representados, num referencial o.n. xOy, os pontos S, T e U e a reta r de equação $y = 2x + 4$

Sabe-se que:

- os pontos S e T são, respetivamente, os pontos de intersecção da reta r com os eixos Oy e Ox
- o ponto U pertence ao eixo Ox e tem abcissa inferior à do ponto T

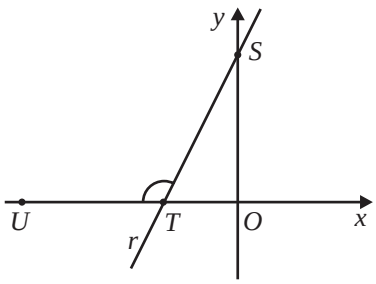


Figura 2

Qual dos valores seguintes é o valor, aproximado às centésimas, da amplitude, em radianos, do ângulo STU?

(A) 4,25 **(B)** 2,68 **(C)** 2,03 **(D)** 1,82

7. O mecanismo de manivela-biela é composto por uma manivela de comprimento fixo, que efetua um movimento de rotação (sempre no mesmo sentido), e por uma biela, também de comprimento fixo, que transforma esse movimento de rotação no movimento alternado de translação de um pistão.

Na Figura 3, está representado esse mecanismo.

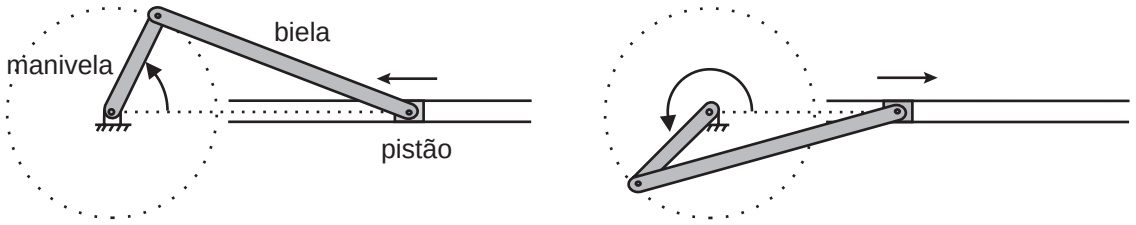


Figura 3

Na Figura 4, está representado um esquema do mecanismo descrito.

Relativamente a esta figura, sabe-se que:

- o ponto P representa o pistão;
- o segmento de reta $[OM]$ representa a manivela, que tem 1 cm de comprimento;
- o segmento de reta $[MP]$ representa a biela;
- os pontos A e B são os pontos em que a distância do pistão ao centro de rotação da manivela, O, é mínima e máxima, respetivamente;
- os pontos O, A, P e B são colineares.

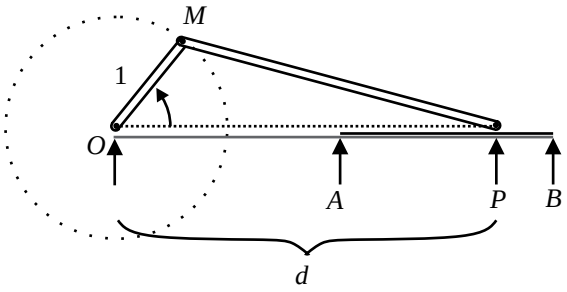


Figura 4

Sabe-se que o movimento de rotação da manivela se inicia quando o pistão se encontra na posição B e que a manivela descreve voltas completas a uma frequência angular constante.

Admita que a função que dá, em centímetros, a distância do pistão ao ponto O, em função do tempo, t, em segundos, contado a partir do instante em que é iniciado o movimento, é dada por

$$d(t) = \cos t + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2 t} \ , \quad t \geq 0$$

(o argumento das funções seno e cosseno está expresso em radianos)

7.1. Qual é, em centímetros, o comprimento da biela neste mecanismo?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5

7.2. Durante os primeiros cinco segundos, após o início do movimento, registou-se, num certo instante t_0, a distância do pistão ao ponto O

Sabe-se que, dois segundos após esse instante, a distância do pistão ao ponto O diminuiu 25%.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a distância, em centímetros, arredondada às décimas, do pistão ao ponto O no instante t_0, sabendo-se que este valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;
- apresente o valor pedido em centímetros, arredondado às décimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

8. Na Figura 5, estão representados, num referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica, a reta r de equação $x=1$, e um ponto A, de ordenada a $(a>1)$, pertencente à reta r

Está também representada a semirreta $\dot{O}A$, que intersecta a circunferência trigonométrica no ponto B

Qual das expressões seguintes dá, em função de a, a abscissa do ponto B?

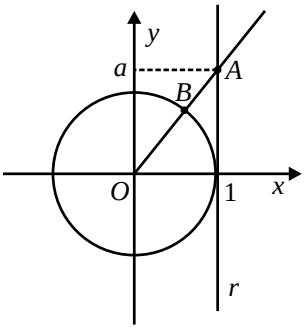


Figura 5

(A) $\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ **(B)** $\sqrt{a^2+1}$

(C) $\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$ **(D)** $\sqrt{a^2-1}$

9. Seja f a função definida em $]-\infty, 2]$ por $f(x)=x+\ln(e^x+1)$

Resolva os itens **9.1.** e **9.2.** sem recorrer à calculadora.

9.1. O gráfico de f tem uma assíntota oblíqua.

Determine uma equação dessa assíntota.

9.2. A equação $f(x)=2x+1$ tem uma única solução.

Determine essa solução e apresente-a na forma $-\ln k$, com $k>0$

9.3. Seja h a função definida em $]-\infty, 2]$ por $h(x) = f(x) - x$

Qual das expressões seguintes pode ser a expressão analítica da função h^{-1}, função inversa de h?

(A) $e^x - 1$ **(B)** $1 - e^x$ **(C)** $\ln(e^x - 1)$ **(D)** $\ln(1 - e^x)$

10. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - e^x} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x^2 \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens **10.1.** e **10.2.** sem recorrer à calculadora.

10.1. Averigue se a função g é contínua em $x = 0$

10.2. Estude a função g quanto à monotonia em $]0, +\infty[$ e determine, caso existam, os extremos relativos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**5.1.**				**5.2.**				**7.1.**			**7.2.**			**Subtotal**
Cotação (em pontos)	16				20				16			20			**72**
Destes 14 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**1.1.**	**1.2.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	**6.**	**8.**	**9.1.**	**9.2.**	**9.3.**	**10.1.**	**10.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	8 x 16 pontos														**128**
TOTAL															**200**

Exame final nacional de Matemática A **(2020, 1.ª fase)**

Proposta de resolução

1.

1.1. Determinando uma expressão de $u_{n+1} - u_n$ temos

$$u_{n+1} - u_n = \frac{8(n+1)-4}{(n+1)+1} - \frac{8n-4}{n+1} = \frac{8n+4}{n+2}_{(n+1)} - \frac{8n-4}{n+1}_{(n+2)} = \frac{(8n+4)(n+1)-(8n-4)(n+2)}{(n+2)(n+1)} =$$

$$= \frac{8n^2+8n+4n+4-\left(8n^2+16n-4n-8\right)}{(n+2)(n+1)} = \frac{8n^2+8n+4n+4-8n^2-16n+4n+8}{(n+2)(n+1)} =$$

$$= \frac{12n+4-12n+8}{(n+2)(n+1)} = \frac{12}{(n+2)(n+1)}$$

Como $n > 0$, temos que $(n+2)(n+1) > 0$, e como o quociente de dois números positivos (12 e $(n+2)(n+1)$) é um valor positivo, temos que:

$$u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

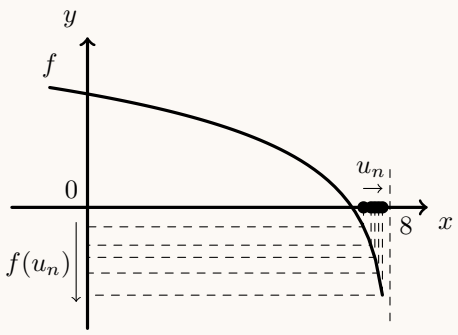
Ou seja, (u_n) é uma sucessão **monótona crescente**.

1.2. Como $\lim u_n = \lim\left(\frac{8n-4}{n+1}\right) = \lim\left(\frac{8n}{n}\right) = 8$ e (u_n) é uma monótona crescente, então $\lim u_n = 8^-$

E assim, vem que:

$$\lim f(u_n) = \lim_{x \to 8^-} f(x) = \log_2(8-8^-) = \log_2(0^+) = -\infty$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (x_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $g(x_n)$, que tendem para $-\infty$, quando o valor de n aumenta.



Resposta: **Opção A**

2. Como cada uma das 4 pessoas escolhe um de entre 5 números, podendo ocorrer repetições, o número de escolhas diferentes que podem ocorrer, ou seja o número de casos possíveis, é ${}^5A'_2 = 5^4$

   Como duas pessoas devem escolher o número cinco, e as restantes um número dos restantes 4, o número de escolhas que obedecem a esta condição, ou seja, o número de casos favoráveis, é $1^2 \times 4^2 \times {}^4C_2$, onde ${}^4C_2$ permite calcular o número de posições diferentes das 2 pessoas que escolhem o número cinco na sequência das 4 pessoas.

   Assim a probabilidade de exatamente duas delas das cinco pessoas escolherem o número 5, é:

$$\frac{4^2 \times {}^4C_2}{5^4} = 0{,}1536$$

   Resposta: **Opção D**

3.

   3.1. Podemos observar que:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{3}P(A) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(B|A) = \frac{1}{3}$$

   E assim, designando por a o número de bolas azuis e por b o número de bolas brancas que existiam inicialmente no saco, temos que o número de bolas brancas na segunda extração, sabendo que a primeira bola extraída foi azul, é b e o número total de bolas é $a - 1 + b$

   Assim, como a probabilidade de retirar uma bola branca na segunda extração, sabendo que foi retirada uma bola azul na primeira extração, é $\frac{1}{3}$, temos que:

$$P(B|A) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{b}{a-1+b} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3b = a - 1 + b \Leftrightarrow 3b - b + 1 = a \Leftrightarrow 2b + 1 = a$$

   Desta forma, como b é um número natural, $2b+1$ é um número ímpar, ou seja, a, o número de bolas azuis que inicialmente existia no saco era ímpar.

   3.2. Como cada uma das 5 caixas com número par deve ter, pelo menos, uma bola azul e existem 8 bolas azuis, restam $8 - 5 = 3$ bolas azuis para colocar como uma segunda bola.

   Como cada uma das 5 caixas com número ímpar deve ter, pelo menos, uma bola branca e existem 7 bolas brancas, restam $7 - 5 = 2$ bolas brancas para colocar como uma segunda bola.

   Desta forma podemos selecionar quaisquer duas das 10 caixas para colocar as duas bolas brancas, a que correspondem ${}^{10}C_2$ escolhas diferentes; e depois, por cada uma destas escolhas, devemos escolher 3 das restantes 8 caixas (porque nenhuma pode conter mais do que duas bolas), para colocar as 3 bolas azuis restantes, a que correspondem ${}^8C_3$

   Assim, o número de maneiras diferentes em podem ficar colocadas as bolas nas dez caixas, nas condições indicadas, é:

$${}^{10}C_2 \times {}^8C_3 = 2520$$

   Resposta: **Opção B**

4.

4.1. Considerando $z = \rho e^{i\theta}$, temos que:

$$z^2 = \overline{z} \Leftrightarrow \left(\rho e^{i\theta}\right)^2 = \rho e^{i(-\theta)} \Leftrightarrow \rho^2 e^{i(2\theta)} = \rho e^{i(-\theta)} \Leftrightarrow \rho^2 = \rho \wedge 2\theta = -\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Assim temos que:

- $\rho^2 = \rho \Leftrightarrow \rho^2 - \rho = 0 \Leftrightarrow \rho(\rho - 1) = 0 \Leftrightarrow \rho = 0 \vee \rho - 1 = 0 \Leftrightarrow \rho = 0 \vee \rho = 1$
- $2\theta = -\theta + 2k\pi \Leftrightarrow 2\theta + \theta = 2k\pi \Leftrightarrow 3\theta = 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \dfrac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Assim, três soluções não nulas da equação ($\rho \neq 0$), com afixos diferentes, são:

- $z_1 = e^{i(0)}$ ($\rho = 1 \wedge k = 0$)
- $z_2 = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$ ($\rho = 1 \wedge k = 1$)
- $z_3 = e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$ ($\rho = 1 \wedge k = 2$)

(As restantes soluções não nulas da equação, associadas a outros valores de k, têm afixos iguais a um dos três apresentados).

Logo, escrevendo duas das soluções apresentadas na forma algébrica, vem:

- $z_1 = e^{i(0)} = e^0 = 1$
- $z_2 = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

Logo, como os afixos dos números complexos não nulos que são soluções desta equação são os vértices de um polígono regular, ou seja de um triângulo equilátero, temos que respetivo o perímetro é dado pelo triplo da medida do lado, que, por sua vez, é a distância entre dois afixos, ou seja:

$$P = 3 \times |z_1 - z_2| = 3 \times \left|1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right| = 3 \times \left|1 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 3 \times \left|\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| =$$

$$= 3 \times \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 3\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = 3\sqrt{\frac{12}{4}} = 3\sqrt{3}$$

4.2. Observando a condição, temos que:

$$\text{Re}\,(z) \times \text{Im}\,(z) = 1 \Leftrightarrow \text{Im}\,(z) = \frac{1}{\text{Re}\,(z)}$$

Ou seja, o conjunto de afixos que verificam a condição, são os afixos de números complexos, cujas partes real e imaginária são inversamente proporcionais, ou seja, o conjunto de pontos é uma hipérbole.

Podemos ainda verificar que estes afixos pertencem ao 1.º e 3.º quadrantes, porque os números complexos correspondentes têm as partes real e imaginária, ambas positivas, ou ambas negativas.

Assim, de entre as opções apresentadas, a única onde pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição, é a opção D.

Resposta: **Opção D**

5.

5.1. Determinando as coordenadas dos pontos A e B, com recurso à equação que define o plano ABC, temos:

- Como o ponto A pertence ao eixo Ox, tem ordenada e cota nulas, e assim, a sua abcissa é:

$$3x+4(0)+4(0)-12=0 \Leftrightarrow 3x+0+0=12 \Leftrightarrow x=\frac{12}{3} \Leftrightarrow x=4$$

- Como o ponto B pertence ao eixo Oy, tem abcissa e cota nulas, e assim, a sua ordenada é:

$$3(0)+4y+4(0)-12=0 \Leftrightarrow 0+4y+0=12 \Leftrightarrow y=\frac{12}{4} \Leftrightarrow y=3$$

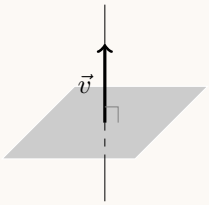
Assim, as coordenadas dos pontos A e B são, respetivamente, (4,0,0) e (0,3,0) e a distância $\overline{AB}$, ou seja, a altura do cilindro, é:

$$\overline{AB}=\sqrt{(0-4)^2+(3-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{(-4)^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

Como o volume do cilindro (V_C) é igual a 10π podemos determinar $\overline{BC}$, ou seja, a medida do raio da base do cilindro:

$$V_C=\pi\times\overline{BC}^2\times\overline{AB} \Leftrightarrow 10\pi=\pi\times\overline{BC}^2\times 5 \Leftrightarrow \frac{10\pi}{5\pi}=\overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2=2 \underset{\overline{BC}>0}{\Leftrightarrow} \overline{BC}=\sqrt{2}$$

5.2. Designado por Q o ponto do plano ABC que se encontra mais próximo do ponto P, então a reta PQ é perpendicular ao plano ABC, pelo que o vetor normal do plano ABC ($\overrightarrow{v}=(3,4,4)$)é também um vetor diretor da reta PQ. Assim, temos que uma equação vetorial da reta PQ, é:



$$(x,y,z)=P+\lambda\overrightarrow{v},\ \lambda\in\mathbb{R} \Leftrightarrow (x,y,z)=(3,5,6)+\lambda(3,4,4),\ \lambda\in\mathbb{R}$$

Assim, as coordenadas de todos os pontos da reta PQ, e em particular o ponto do ponto Q, para $\lambda\in\mathbb{R}$, são da forma:

$$(x,y,z)=(3,5,6)+\lambda(3,4,4)=(3+3\lambda,5+4\lambda,6+4\lambda)$$

Como o ponto Q pertence ao plano ABC podemos determinar o valor de λ substituindo as coordenadas genéricas do ponto, na equação do plano:

$$3(3+3\lambda)+4(5+4\lambda)+4(6+4\lambda)-12=0 \Leftrightarrow 9+9\lambda+20+16\lambda+24+16\lambda-12=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 41\lambda=12-9-20-24 \Leftrightarrow 41\lambda=-41 \Leftrightarrow \lambda=-\frac{41}{41} \Leftrightarrow \lambda=-1$$

Desta forma temos que as coordenadas do ponto Q são:

$$\big(3+3(-1),5+4(-1),6+4(-1)\big)=(3-3,5-4,6-4)=(0,1,2)$$

6. Como o declive da reta é a tangente da inclinação ($m=\operatorname{tg}O\hat{T}S$), ou seja:

$$\operatorname{tg}O\hat{T}S=2 \Rightarrow O\hat{T}S=\operatorname{tg}^{-1}(2)$$

Como o ponto S pertence ao eixo Oy e tem abcissa inferior à do ponto T $S\hat{T}U$ e $O\hat{T}S$ são ângulos suplementares, ou seja:

$$S\hat{T}U+O\hat{T}S=\pi \text{ rad}$$

E assim, recorrendo à calculadora, temos que:

$$S\hat{T}U+\operatorname{tg}^{-1}(2)=\pi \Leftrightarrow S\hat{T}U=\pi-\operatorname{tg}^{-1}(2) \Rightarrow S\hat{T}U\approx 2{,}03 \text{ rad}$$

Resposta: **Opção C**

7.

7.1. Como quando o movimento de rotação da manivela se inicia, o pistão se encontra na posição B, a distância do pistão ao ponto O, zero segundos, após o instante em que é iniciado o movimento, é dada por:

$$\overline{OP} = \overline{OB} = d(0)$$

Assim, o comprimento da biela, em centímetros, é:

$$\overline{OB} - \overline{OM} = d(0) - 1 = \cos(0) + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2(0)} - 1 = 1 + \sqrt{9-0} - 1 = 3$$

Resposta: **Opção B**

7.2. Temos que no instante t_0, a distância do pistão ao ponto O é $d(t_0)$ e passados 2 segundos, a distância é dada por $d(t_0 + 2)$

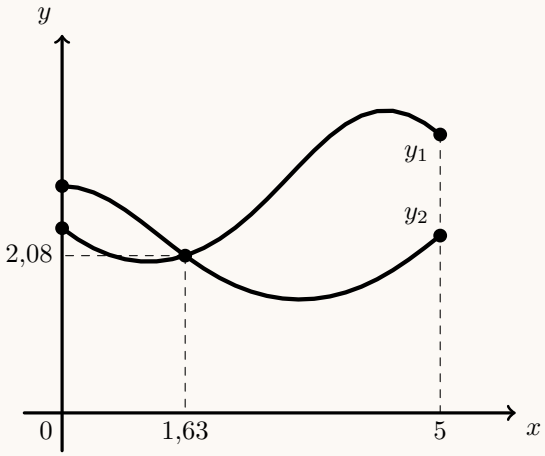
Como nestes dois segundos a distância diminuiu 25%, ficou reduzida a 75% do valor anterior, ou seja:

$$d(t_0 + 2) = 0{,}75 d(t_0)$$

Desta forma simplificando a equação temos:

$$d(t_0 + 2) = 0{,}75 d(t_0) \Leftrightarrow \cos(t_0 + 2) + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2(t_0 + 2)} = 0{,}75\big(\cos(t_0) + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2(t_0)}\big)$$

Visualizando na calculadora gráfica os gráficos das funções $y_1 = \cos(x+2) + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2(x+2)}$, e $y_2 = 0{,}75\big(\cos(x) + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2(x)}\big)$, para $0 \leq x \leq 5$ (porque a situação descrita se reporta aos primeiros 5 segundos do movimento), reproduzidos na figura ao lado, e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado com duas casas decimais das coordenadas do ponto de interseção $(1{,}63; 2{,}08)$



Assim, temos que $t_0 \approx 1{,}63$ e que a distância correspondente, arredondada às décimas, é:

$$d(1{,}63) \approx \cos(1{,}63) + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2(1{,}63)} \approx 2{,}8 \text{ cm}$$

8. Como o ponto A está sobre a reta definida pela equação $x = 1$, tangente à circunferência trigonométrica, então a ordenada do ponto A é $y_A = \operatorname{tg}\alpha = a$, sendo α o ângulo definido pelo semieixo positivo Ox e pela semireta $\dot{O}A$

Como o ponto B pertence à circunferência trigonométrica, tem coordenadas $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, ou seja, a abcissa do ponto B é $x_B = \cos\alpha$

Desta forma, como $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $\operatorname{tg}\alpha \neq 0$, e $\cos\alpha \neq 0$, temos que a abcissa do ponto B:

$$1 + a^2 = \frac{1}{{x_B}^2} \Leftrightarrow {x_B}^2 = \frac{1}{1+a^2} \underset{x_B>0}{\Leftrightarrow} x_B = \sqrt{\frac{1}{1+a^2}} \Leftrightarrow x_B = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

Resposta: **Opção A**

9.

9.1. Como a função está definida em $]-\infty,2]$, começamos por determinar o declive da assíntota oblíqua do gráfico de f, quando $x \to -\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\ln(e^x+1)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{x} + \frac{\ln(e^x+1)}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{\ln(e^x+1)}{x}\right) = 1 + \frac{\ln(e^{-\infty}+1)}{-\infty} = 1 + \frac{\ln(0^+ + 1)}{-\infty} = 1 + \frac{0^+}{-\infty} = 1 - 0 = 1$$

Calculando o valor da ordenada na origem, temos que:

$$b = \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - x\big) = \lim_{x\to+\infty} \left(x + \ln(e^x+1) - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln(e^x+1)\right) =$$

$$= \ln(e^{-\infty}+1) = \ln(0^+ + 1) = \ln 1 = 0$$

Desta forma a equação reduzida da assíntota oblíqua do gráfico de f é:

$$y = x + 0 \Leftrightarrow y = x$$

9.2. Resolvendo a equação dada, para $x \in]-\infty,2]$, temos:

$$f(x) = 2x+1 \Leftrightarrow x + \ln(e^x+1) = 2x+1 \Leftrightarrow \ln(e^x+1) = -x+2x+1 \Leftrightarrow \ln(e^x+1) = x+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{x+1} = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x \times e - e^x = 1 \Leftrightarrow e^x(e-1) = 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{e-1} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{e-1}\right)$$

Apresentando a única solução na forma $-\ln k$, $k > 0$, vem:

$$\ln\left(\frac{1}{e-1}\right) = \ln\left((e-1)^{-1}\right) = (-1)\ln(e-1) = -\ln(e-1) \quad \left(\text{como } e > 1, \text{ então } e-1 > 0\right)$$

9.3. Resolvendo a equação $y = f(x) - x$ em ordem a x, para determinar a expressão algébrica da função h^{-1}, temos:

$$y = f(x) - x \Leftrightarrow y = x + \ln(e^x+1) - x \Leftrightarrow y = \ln(e^x+1) \Leftrightarrow e^y = e^x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^y = e^x + 1 \Leftrightarrow e^y - 1 = e^x \Leftrightarrow \ln(e^y - 1) = x$$

Desta forma temos que, para $x \in]-\infty,2]$, $h^{-1}(x) = \ln(e^x - 1)$

Resposta: **Opção C**

10.

10.1. Para averiguar se a função g é contínua em $x=0$, temos que verificar se $g(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$

- $g(0)=0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2\ln x\right)=0\times(-\infty)$ (Indeterminação)

  (fazendo $y=\dfrac{1}{x}$, temos $x=\dfrac{1}{y}$ e se $x\to 0^+$, então $y\to+\infty$)

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x^2\ln x\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{y}\right)^2\times\ln\frac{1}{y}\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y^2}\times(\ln 1-\ln y)\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(-\frac{\ln y}{y^2}\right)=$$

$$=-\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{\ln y}{y^2}\right)=-\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{\ln y}{y}\times\frac{1}{y}\right)=-\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}\times\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}=-0\times\frac{1}{+\infty}=0\times 0^+=0$$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(1+\dfrac{\operatorname{sen}x}{1-e^x}\right)=1+\dfrac{\operatorname{sen}0}{1-e^0}=1+\dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 0^-} g(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(1+\frac{\operatorname{sen}x}{1-e^x}\right)=\lim_{x\to 0^-}1+\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}x}{1-e^x}=1+\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}x}{-(-1+e^x)}=$$

$$=1+\lim_{x\to 0^-}\frac{\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}}{-\dfrac{e^x-1}{x}}=1+\frac{\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\dfrac{e^x-1}{x}\right)}=1+\frac{\underbrace{\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}}{-\underbrace{\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x-1}{x}}_{\text{Lim. Notável}}}=1+\frac{1}{-1}=1-1=0$$

Como $g(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$, a função g é contínua em $x=0$

10.2. Começamos por determinar a expressão da derivada da função g, em $]0,+\infty[$:

$$g'(x)=\left(x^2\ln x\right)'=(x^2)'\times\ln x+x^2(\ln x)'=2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}=2x\ln x+\frac{x^2}{x}\underset{x\neq 0}{=}2x\ln x+x$$

Calculando os zeros da derivada da função g, em $]0,+\infty[$, temos:

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 2x\ln x+x=0\Leftrightarrow x(2\ln x+1)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underset{0\notin]0,+\infty[}{x=0}\vee 2\ln x+1=0\Rightarrow 2\ln x=-1\Leftrightarrow\ln x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
g'	n.d.	$-$	0	$+$
g	n.d.	↘	min	↗

Assim, podemos concluir que a função g:

- é decrescente no intervalo $\left]0,e^{-\frac{1}{2}}\right]$;
- é crescente no intervalo $\left[e^{-\frac{1}{2}},+\infty\right[$;
- tem um mínimo relativo que é:

$$g\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=e^{-1}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\ln e=\frac{1}{e}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times 1=-\frac{1}{2e}$$

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2020

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho | Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Critérios de Classificação

9 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de resposta restrita, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

Situação	Classificação
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1.1. ..... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, quatro processos.

1.º Processo

Obter $u_{n+1}=\frac{8n+4}{n+2}$ ..... 3 pontos

Obter $u_{n+1}-u_n=\frac{12}{(n+1)(n+2)}$ ..... 6 pontos

Referir que $\frac{12}{(n+1)(n+2)}>0$, para qualquer $n\in\mathbb{N}$ ..... 5 pontos

Concluir que a sucessão (u_n) é crescente ..... 2 pontos

2.º Processo

Obter $u_n=8-\frac{12}{n+1}$ ..... 6 pontos

Justificar que a sucessão de termo geral $-\frac{12}{n+1}$ é uma sucessão crescente .. 8 pontos

Concluir que a sucessão (u_n) é crescente ..... 2 pontos

3.º Processo

Obter $u_n=8-\frac{12}{n+1}$ ..... 6 pontos

Considerar a função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, definida por

$f(x)=8-\frac{12}{x+1}$ ..... 2 pontos

Referir que a função f é crescente em $]-1,+\infty[$ ..... 3 pontos

Referir que (u_n) é a restrição a $\mathbb{N}$ da função f ..... 3 pontos

Concluir que a sucessão (u_n) é crescente ..... 2 pontos

4.º Processo

Considerar a função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, definida por $f(x)=\frac{8x-4}{x+1}$ ... 4 pontos

Determinar $f'(x)$ ..... 3 pontos

Concluir que a função f' não tem zeros ..... 1 ponto

Apresentar um quadro de sinal de f' e de monotonia de f ..... 3 pontos

Referir que (u_n) é a restrição a $\mathbb{N}$ da função f ..... 3 pontos

Concluir que a sucessão (u_n) é crescente ..... 2 pontos

Nota – Se for apresentada a derivada da função, de domínio $\mathbb{N}$, definida por $u(n)=\frac{8n-4}{n+1}$, a classificação a atribuir à resposta é 0 pontos.

1.2. ..... **16 pontos**

Opção **(A)**

2. ..... **16 pontos**

Opção **(D)**

3.1. ..... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

Designemos por a o número de bolas azuis e por b o número de bolas brancas que existiam inicialmente no saco.

1.º Processo

Escrever $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3}$ ..... 3 pontos

Escrever $P(B \mid A) = \frac{1}{3}$ ..... 3 pontos

Escrever $\frac{b}{a+b-1} = \frac{1}{3}$ ..... 6 pontos

Obter $a = 2b + 1$ ..... 2 pontos

Concluir que a é um número ímpar ..... 2 pontos

2.º Processo

Escrever $\frac{a}{a+b} \times \frac{b}{a+b-1} = \frac{1}{3} \times \frac{a}{a+b}$ ..... 7 pontos

Obter $a = 2b + 1$ ..... 7 pontos

Concluir que a é um número ímpar ..... 2 pontos

3.2. ..... **16 pontos**

Opção **(B)**

4.1. ..... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Seja $z = \rho e^{i\theta}$, com $\rho > 0$

Identificar z^2 com $\rho^2 e^{i2\theta}$ ..... 1 ponto

Identificar $\overline{z}$ com $\rho e^{-i\theta}$ ..... 1 ponto

Escrever $\rho^2 e^{i2\theta} = \rho e^{-i\theta}$ ..... 1 ponto

Escrever $\rho^2 = \rho \wedge 2\theta = -\theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ..... 2 pontos

Obter o valor de ρ ..... 2 pontos

Resolver a equação $2\theta = -\theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$ em ordem a θ ..... 1 ponto

Determinar $|z_1 - z_2|$, sendo z_1 e z_2 duas das soluções não nulas da equação $z^2 = \overline{z}$ ..... 5 pontos

Reconhecer que o polígono é um triângulo ..... 1 ponto

Obter o perímetro do polígono $(3\sqrt{3})$ ..... 2 pontos

2.º Processo

Seja $z = a + bi$, com $(a, b) \neq (0, 0)$

Escrever $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ ..... 2 pontos

Escrever $\overline{z} = a - bi$ ..... 1 ponto

Escrever $a^2 - b^2 = a \ \wedge \ 2ab = -b$ ..... 2 pontos

Resolver a condição $a^2 - b^2 = a \ \wedge \ 2ab = -b$ ..... 3 pontos

Determinar $|z_1 - z_2|$, sendo z_1 e z_2 duas das soluções não nulas da equação $z^2 = \overline{z}$ ..... 5 pontos

Reconhecer que o polígono é um triângulo ..... 1 ponto

Obter o perímetro do polígono $(3\sqrt{3})$ ..... 2 pontos

4.2. ..... **16 pontos**

Opção **(D)**

5.1. ..... **16 pontos**

Determinar as coordenadas do ponto A ..... 2 pontos

Determinar as coordenadas do ponto B ..... 2 pontos

Determinar $\overline{AB}$ ..... 4 pontos

Escrever $\pi \times \overline{BC}^{\,2} \times \overline{AB} = 10\pi$ (ou equivalente) ..... 4 pontos

Obter o valor de $\overline{BC}$ $(\sqrt{2})$ ..... 4 pontos

5.2. ..... **20 pontos**

Designemos por r a reta que passa no ponto P e é perpendicular ao plano ABC

Escrever $(x, y, z) = (3, 5, 6) + k(3, 4, 4),\ k \in \mathbb{R}$ ..... 5 pontos

Escrever as coordenadas de um ponto genérico da reta r, em função de k ... 3 pontos

Obter uma equação na variável k, substituindo x, y e z na equação do plano ABC pelas coordenadas de um ponto genérico da reta r ..... 4 pontos

Obter o valor de k ..... 3 pontos

Obter as coordenadas do ponto pedido $((0, 1, 2))$ ..... 5 pontos

6. ..... **16 pontos**

Opção **(C)**

7.1. ..... **16 pontos**

Opção **(B)**

7.2. ..... **20 pontos**

Apresentar a equação

$\cos(t+2)+\sqrt{9-\text{sen}^2(t+2)}=0{,}75\left(\cos t+\sqrt{9-\text{sen}^2 t}\right)$ (ou uma equação equivalente) (**ver notas 1 e 2**) ..... 6 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota 3**) ..... 5 pontos

Apresentar as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) ..... 4 pontos

Apresentar o valor pedido $(2{,}8)$ ..... 5 pontos

Notas:

1. Se a equação apresentada não traduzir corretamente o problema, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

2. Se não for apresentada qualquer equação, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. As restantes etapas são pontuadas de acordo com o desempenho evidenciado.

3. Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

8. ..... **16 pontos**

Opção **(A)**

9.1. ..... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Determinar $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ ..... 8 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\ln(e^x+1)}{x}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\ln(e^x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{\ln(e^x+1)}{x}\right)$ ..... 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{\ln(e^x+1)}{x}\right)=1+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(e^x+1)}{x}$ ..... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(e^x+1)}{x}$ ..... 2 pontos

Obter $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ ..... 1 ponto

Determinar $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)$ ..... 6 pontos

Escrever $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}(x+\ln(e^x+1)-x)$ ..... 2 pontos

Obter $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)$ ..... 4 pontos

Concluir que a equação da assíntota é $y=x$ ..... 2 pontos

2.º Processo

Referir que $\lim_{x\to-\infty}(\ln(e^x+1))=0$ ..... 7 pontos

Escrever $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=0$ ..... 7 pontos

Concluir que a equação da assíntota é $y=x$ ..... 2 pontos

9.2. ..... **16 pontos**

Escrever $x+\ln(e^x+1)=2x+1$ ..... 1 ponto

Obter $e^x+1=e^{x+1}$ ..... 4 pontos

Obter $e^x=\dfrac{1}{e-1}$ ..... 5 pontos

Obter $x=\ln\left(\dfrac{1}{e-1}\right)$ ..... 2 pontos

Obter $x=-\ln(e-1)$ ..... 4 pontos

9.3. ..... **16 pontos**

Opção **(C)**

10.1. ..... **16 pontos**

Determinar $\lim_{x\to0^-}g(x)$ ..... 7 pontos

Escrever $\lim_{x\to0^-}g(x)=\lim_{x\to0^-}\left(1+\dfrac{\operatorname{sen}x}{1-e^x}\right)$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim_{x\to0^-}\left(1+\dfrac{\operatorname{sen}x}{1-e^x}\right)=1+\lim_{x\to0^-}\dfrac{\operatorname{sen}x}{1-e^x}$ ..... 1 ponto

Escrever $1+\lim_{x\to0^-}\dfrac{\operatorname{sen}x}{1-e^x}=1+\lim_{x\to0^-}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}\times\lim_{x\to0^-}\dfrac{x}{1-e^x}$ ... 2 pontos

Escrever $1+\lim_{x\to0^-}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}\times\lim_{x\to0^-}\dfrac{x}{1-e^x}=1-\lim_{x\to0^-}\dfrac{x}{e^x-1}$ .. 1 ponto

Escrever $1-\lim_{x\to0^-}\dfrac{x}{e^x-1}=1-\lim_{x\to0^-}\dfrac{1}{\frac{e^x-1}{x}}$ ..... 1 ponto

Obter $\lim_{x\to0^-}g(x)=0$ ..... 1 ponto

Determinar $\lim_{x\to0^+}g(x)$ ..... 6 pontos

Escrever $\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}(x^2\ln x)$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2\ln x) \underset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y^2}\ln\frac{1}{y}\right)$ ..... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y^2}\ln\frac{1}{y}\right)=\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{-\ln y}{y^2}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{-\ln y}{y^2}=-\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}\times\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{y}$ ..... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=0$ ..... 1 ponto

Referir que $g(0)=0$ ..... 2 pontos

Concluir que a função g é contínua no ponto 0 ..... 1 ponto

10.2. ..... **16 pontos**

Determinar $g'(x)$ em $]0,+\infty[$ (**ver nota 1**) ..... 4 pontos

Escrever $g'(x)=0$ ..... 1 ponto

Determinar o zero de g' em $]0,+\infty[$ ..... 2 pontos

Apresentar um quadro de sinal de g' e de monotonia de g em $]0,+\infty[$ (ou equivalente) ..... 5 pontos

Apresentar os intervalos de monotonia da função (**ver nota 2**) ..... 1 ponto

Obter $g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\frac{1}{2e}$ ..... 3 pontos

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

2. Se for referido que a função g é decrescente em $\left]0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$, em vez de $\left]0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$, e crescente em $\left]\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right[$, em vez de $\left[\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**5.1.**				**5.2.**				**7.1.**			**7.2.**			**Subtotal**
Cotação (em pontos)	16				20				16			20			**72**
Destes 14 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**1.1.**	**1.2.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	**6.**	**8.**	**9.1.**	**9.2.**	**9.3.**	**10.1.**	**10.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	8 x 16 pontos														**128**
TOTAL															**200**

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2020

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho | Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 7 Páginas

A prova inclui 4 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final (itens **1.1.**, **1.2.**, **9.1.** e **9.2.**). Dos restantes 14 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \ \text{e} \ n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\, v)' = u'\, v + u\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\, v - u\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\, u^{n-1}\, u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\ e^u$

$(a^u)' = u'\ a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$ (o ponto H não está representado na figura).

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(7,1,4)$
- o ponto G tem coordenadas $(5,3,6)$
- a reta AE é definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (7, 1, 4) + k(3, -6, 2),\ k \in \mathbb{R}$

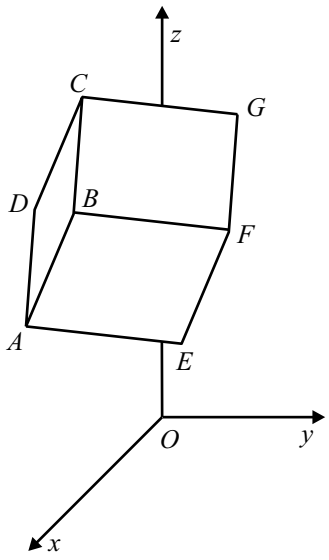


Figura 1

Resolva os itens **1.1.** e **1.2.** sem recorrer à calculadora.

1.1. Determine uma equação do plano EFG

Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$

1.2. Determine a equação reduzida da superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo.

2. Considere um cubo $[MNPQRSTU]$

Escolhem-se, ao acaso, três vértices distintos desse cubo.

Qual é a probabilidade de o plano por eles definido conter uma das faces do cubo?

(A) $\frac{1}{7}$ **(B)** $\frac{3}{7}$ **(C)** $\frac{1}{8}$ **(D)** $\frac{3}{8}$

3. Seja E o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset E$ e $B \subset E)$.

Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}3$; $P(B) = 0{,}4$
- $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0{,}9$

Determine o valor da probabilidade condicionada $P(A \mid (A \cup B))$

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

4. Considere todos os números naturais superiores a 9999 e inferiores a $22\,000$

Destes números, quantos se podem escrever com os algarismos 0, 1, 2 e 3?

(A) 192 **(B)** 236 **(C)** 384 **(D)** 512

5. Dados dois números reais positivos, sabe-se que a soma dos seus logaritmos na base 8 é igual a $\frac{1}{3}$

A que é igual o produto desses dois números?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 8 **(D)** 9

6. De uma progressão aritmética (u_n) sabe-se que o sétimo termo é igual ao dobro do segundo e que a soma dos doze primeiros termos é igual a 57

Sabe-se ainda que 500 é termo da sucessão (u_n)

Determine a ordem deste termo.

7. Seja (v_n) a sucessão definida por

$$v_n = \begin{cases} n & \text{se } n < 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{se } n \geq 10 \end{cases}$$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A sucessão (v_n) tem limite nulo.

(B) A sucessão (v_n) é divergente.

(C) A sucessão (v_n) é limitada.

(D) A sucessão (v_n) é monótona.

8. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

8.1. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja $z_1 = \frac{2}{1-i} + \frac{4}{i^5}$ e seja z_2 um número complexo tal que $|z_2| = \sqrt{5}$

Sabe-se que, no plano complexo, o afixo de $z_1 \times z_2$ tem coordenadas positivas e iguais.

Determine z_2

Apresente a resposta na forma $a + bi$, com a, $b \in \mathbb{R}$

8.2. Seja k um número real.

Sabe-se que $k + i$ é uma das raízes quadradas do número complexo $3 - 4i$

Qual é o valor de k ?

(A) 2 **(B)** 1 **(C)** -1 **(D)** -2

9. Os satélites artificiais são utilizados para diversos fins e a altitude a que são colocados depende do fim a que se destinam.

Admita que a Terra é uma esfera.

A Figura 2 apresenta um esquema em que se pode observar a superfície terrestre coberta por um satélite, quando este se encontra numa certa posição.

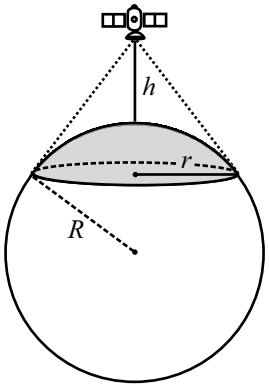


Figura 2

Nesta figura,

- R é o raio, em quilómetros, da Terra;
- h é a altitude, em quilómetros, do satélite $(h > 0)$
- r é o raio, em quilómetros, da base da calote esférica cuja superfície é coberta pelo satélite $(0 < r < R)$
- as grandezas h e r podem relacionar-se por meio da igualdade $r = \frac{R}{h+R}\sqrt{h^2 + 2hR}$

Sabe-se que, para cada posição do satélite, a percentagem da área da superfície terrestre coberta pelo satélite é dada por $50\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}\right)$

9.1. Qual é a percentagem da área da superfície terrestre coberta por um satélite se o raio da base da calote esférica for igual a $\frac{3}{5}$ do raio da Terra?

(A) 20% **(B)** 15% **(C)** 10% **(D)** 5%

9.2. Considere que o raio da Terra é 6400 km

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a percentagem da área da superfície terrestre coberta por um satélite se a altitude deste for igual ao raio da base da respetiva calote esférica.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;

– apresente o valor pedido arredondado às unidades.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

10. Sejam f e g as funções, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por $f(x)=x^2$ e $g(x)=\cos x$

10.1. Qual é o declive da reta tangente ao gráfico da função $f \circ g$ no ponto de abcissa $\frac{\pi}{4}$?

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** 2

10.2. Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que a equação $f(x)=g(x)$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$

11. Seja h a função, de domínio $]-\infty, 4[$, definida por

$$h(x)=\begin{cases} 1+x\,e^{x-1} & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{\sqrt{x}-1}{\operatorname{sen}(x-1)} & \text{se } 1<x<4 \end{cases}$$

Resolva os itens **11.1.** e **11.2.** sem recorrer à calculadora.

11.1. Averigue se a função h é contínua em $x=1$

11.2. Mostre que o gráfico da função h tem uma assíntota horizontal e apresente uma equação dessa assíntota.

12. Seja f uma função, de domínio $]0, +\infty[$, cuja derivada, f', de domínio $]0, +\infty[$, é dada por $f'(x)=\frac{2+\ln x}{x}$

12.1. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;

– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

12.2. Qual é o valor de $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{1 - x^2}$?

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** 2

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.1.**				**1.2.**				**9.1.**			**9.2.**			**Subtotal**
Cotação (em pontos)	16				20				16			20			**72**
Destes 14 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.1.**	**8.2.**	**10.1.**	**10.2.**	**11.1.**	**11.2.**	**12.1.**	**12.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	8 x 16 pontos														**128**
TOTAL															**200**

Prova 635

2.ª Fase

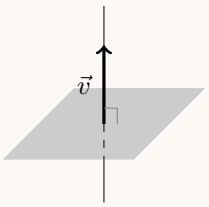
Exame final nacional de Matemática A **(2020, 2.ª fase)**

Proposta de resolução

1.

1.1. Como o plano EFG é perpendicular à reta AE, o vetor diretor da reta ($\vec{v} = (3, -6, 2)$) é um vetor normal do plano, assim a equação do plano é da forma:

$$3x - 6y + 2z + d = 0$$



E como o ponto G pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo as coordenadas, na equação anterior:

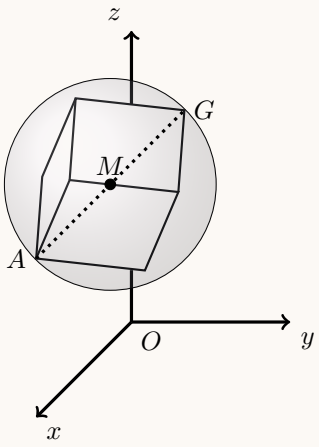
$$3(5) - 6(3) + 2(6) + d = 0 \Leftrightarrow 15 - 18 + 12 + d = 0 \Leftrightarrow 9 + d = 0 \Leftrightarrow d = -9$$

E assim, uma equação do plano EFG, é:

$$3x - 6y + 2z - 9 = 0$$

1.2. Como a superfície esférica de contém os oito vértices do cubo, o respetivo centro está a igual distância de todos os vértices, em particular dos vértices A e G, pelo que o centro é o ponto médio do segmento $[AG]$, e as suas coordenadas podem ser obtidas a partir das coordenadas dos extremos do segmento de reta:

$$\left(\frac{5+7}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{6+4}{2}\right) = \left(\frac{12}{2}, \frac{4}{2}, \frac{10}{2}\right) = (6,2,5)$$



Como $[AG]$ é um diâmetro da superfície esférica, e o raio é metade do diâmetro, temos que:

$$r = \frac{\overline{AG}}{2} = \frac{\sqrt{(5-7)^2 + (3-1)^2 + (6-4)^2}}{2} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 2^2}}{2} = \frac{\sqrt{4+4+4}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{2}$$

E assim, a equação da superfície esférica é:

$$(x-6)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = \left(\frac{\sqrt{12}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (x-6)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = \frac{12}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-6)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 3$$

2. Como o cubo tem 8 vértices, o número de conjuntos de 3 vértices que podem ser escolhidos (número de casos possíveis) é ${}^8C_3$
Como cada face tem 4 vértices, o número de grupos de 3 vértices que definem essa face ${}^4C_3$, e como o cubo tem 6 faces, o número de grupos de 3 vértices que definem um plano que contenha uma face, ou seja o número de casos favoráveis, é $6 \times {}^4C_3$.
Desta forma, a probabilidade é:
$$\frac{6 \times {}^4C_3}{{}^8C_3} = \frac{3}{7}$$
Resposta: **Opção B**

3. De acordo com os acontecimentos A e B definidos, e os dados do enunciado, temos que:
   - $P(A) = 0{,}3$
   - $P(B) = 0{,}4$
   - $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = 0{,}9$

   Assim, usando as Leis de De Morgan, e o teorema do acontecimento contrário, temos que:
$$P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = 0{,}9 \Leftrightarrow P\left(\overline{A \cap B}\right) = 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - P(A \cap B) = 0{,}9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 1 - 0{,}9 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}1$$
   E assim, podemos calcular $P(A \cup B)$:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}6$$
   Como $A \cap (A \cup B) = (A \cap A) \cup (A \cap B) = A \cup (A \cap B) = A$, porque $(A \cap B) \subset A$, então, usando a definição de probabilidade condicionada, podemos calcular $P\big(A|(A \cup B)\big)$, e apresentar o resultado na forma de fração irredutível:
$$P\big(A|(A \cup B)\big) = \frac{P\big(A \cap (A \cup B)\big)}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0{,}3}{0{,}6} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{6}{10}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

4. Como os números devem ser naturais, superiores a 9999 e inferiores a 22 000, então todos têm 5 algarismos, usando apenas os algarismos 0, 1, 2 ou 3.

   O algarismo das dezenas de milhar tem que ser 1 ou 2 (não pode começar por zero e deve ser inferior a 30 000).

   Se o algarismo das dezenas de milhar for 1, então os restantes 4 podem ser escolhidos de entre as 4 alternativas, sem restrições, com repetição e considerando relevante a ordem, ou seja, de ${}^4A'_4 = 4^4 = 256$ formas diferentes.

   Se o algarismo das dezenas de milhar for 2, então o algarismo dos milhares tem que ser 0 ou 1 (2 opções), para que o número seja inferior a 22 000 e os restantes 3 podem ser escolhidos de entre as 4 alternativas, sem restrições, com repetição e considerando relevante a ordem, ou seja, existem $2 \times {}^4A'_3 = 2 \times 4^3 = 2 \times 128$ números diferentes nestas condições.

   Assim, a quantidade de números naturais superiores a 9999 e inferiores a 22 000 escritos usando apenas os algarismos 0, 1, 2 e 3 é:
$${}^4A'_4 + 2 \times {}^4A'_3 = 256 + 128 = 384$$
   Resposta: **Opção C**

5. Designando por a e b os dois números reais positivos, e usando as propriedades dos logaritmos, podemos determinar o produto ab:

$$\log_8 a + \log_8 b = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_8(a \times b) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow ab = 8^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow ab = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow ab = 2$$

Resposta: **Opção A**

6. Como o sétimo termo da progressão aritmética é igual ao dobro do segundo, designado a razão por r, temos que:

$$u_7 = 2 \times u_2 \Leftrightarrow u_1 + (7-1) \times r = 2(u_1 + r) \Leftrightarrow u_1 + 6r = 2u_1 + 2r \Leftrightarrow 6r - 2r = 2u_1 - u_1 \Leftrightarrow 4r = u_1$$

Como a soma dos 12 primeiros termos é:

$$S_{12} = \frac{u_1 + u_{12}}{2} \times 12 = \frac{u_1 + u_1 + 11r}{2} \times 12 = (4r + 4r + 11r) \times \frac{12}{2} = 19r \times 6 = 114r$$

Como a soma dos doze primeiros termos é 57, temos que:

$$S_{12} = 57 \Leftrightarrow 114r = 57 \Leftrightarrow r = \frac{57}{114} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$$

Logo, $u_1 = 4r = 4 \times \frac{1}{2} = 2$ e $u_n = 2 + \frac{n-1}{2}$, pelo que a ordem do termo 500, é a solução da equação $u_n = 500$:

$$u_n = 500 \Leftrightarrow 2 + \frac{n-1}{2} = 500 \Leftrightarrow \frac{n-1}{2} = 500 - 2 \Leftrightarrow n - 1 = 498 \times 2 \Leftrightarrow n = 996 + 1 :\Leftrightarrow n = 997$$

Ou seja, a ordem do termo 500 é 997, isto é, $u_{997} = 500$

7. Observando que $\lim v_n = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + 0 = 1$, podemos garantir que o limite da sucessão não é nulo, e também que a sucessão não é divergente.

Verificando que $v_1 = 1$, $v_9 = 9$ e $v_{10} = 1 + \frac{1}{10} = 1{,}1$, temos que $v_1 < v_9$ e que $v_9 > v_{10}$, é possível afirmar que a sucessão não é monotóna.

Desta forma, de entre as opções apresentadas a única afirmação verdadeira é que a sucessão é limitada, o que pode ser confirmado atendendo a que:

- a representação gráfica dos primeiros nove termos da sucessão são pontos sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares, ou seja $1 \leq v_n \leq 9, \forall n \leq 9$
- a representação gráfica dos restantes termos da sucessão são pontos sobre uma hipérbole tal que $v_n > 1, \forall n \geq 10$

ou seja, $1 \leq v_n \leq 9, \forall n \in \mathbb{N}$

Resposta: **Opção C**

8.

8.1. Escrevendo z_1 na forma algébrica, e como $i^5 = i^{4+1} = i^4 \times i^1 = 1 \times i = i$ temos:

$$z_1 = \frac{2}{1-i} + \frac{4}{i^5} = \frac{2}{1-i} + \frac{4}{i} = \frac{2(i) + 4(1-i)}{(1-i) \times i} = \frac{2i + 4 - 4i}{i - i^2} = \frac{4 - 2i}{i - (-1)} = \frac{4-2i}{1+i} = \frac{(4-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} =$$

$$= \frac{4 - 4i - 2i + 2i^2}{1 - i + i - i^2} = \frac{4 - 6i + 2(-1)}{1 - (-1)} = \frac{4 - 6i - 2}{1 + 1} = \frac{2 - 6i}{2} = 1 - 3i$$

Considerando $z_2 = a + bi$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, o produto $z_1 \times z_2$, é dado por:

$$z_1 \times z_2 = (1 - 3i) \times (a + bi) = a + bi - 3ai - 3bi^2 = a - 3b(-1) - (b - 3a)i = a + 3b + (b - 3a)i$$

Como o afixo de $z_1 \times z_2$ tem coordenadas iguais, vem que:

$$\text{Re}\,(z_1 \times z_2) = \text{Im}\,(z_1 \times z_2) \Leftrightarrow a + 3b = b - 3a \Leftrightarrow a + 3a = b - 3b \Leftrightarrow a + 3b = b - 3a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4a = -2b \Leftrightarrow \frac{4}{-2}a = b \Leftrightarrow b = -2a$$

E assim, como $|z_2| = \sqrt{5}$, temos que:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5} \Rightarrow a^2 + b^2 = 5 \Leftrightarrow a^2 + (-2a)^2 = 5 \Leftrightarrow a^2 + 4a^2 = 5 \Leftrightarrow 5a^2 = 5 \Leftrightarrow a^2 = \frac{5}{5} \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{1}$$

E que:

$$b = -2(1) \vee b = -2(-1) \Leftrightarrow b = -2 \vee b = 2$$

Como o afixo de $z_1 \times z_2$ tem coordenadas positivas, vem que:

- $a + 3b > 0 \wedge b = -2a \Rightarrow a + 3(-2a) > 0 \Leftrightarrow a - 6a > 0 \Leftrightarrow -5a > 0 \Leftrightarrow a < 0$, ou seja, $a = -1$
- $a + 3b > 0 \wedge b = -2a \Leftrightarrow a + 3b > 0 \wedge \frac{b}{-2} = a \Rightarrow -\frac{b}{2} + 3b > 0 \Leftrightarrow -\frac{b}{2} + \frac{6b}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{5b}{2} > 0 \Leftrightarrow b > 0$, ou seja, $b = 2$

Desta forma temos que: $z_2 = a + bi = -1 + 2i$

8.2. Como $k + i$ é uma das raízes quadradas do número complexo $3 - 4i$, então temos que:

$$(k + i)^2 = 3 - 4i \Leftrightarrow k^2 + 2ki + i^2 = 3 - 4i \Leftrightarrow k^2 + 2ki - 1 = 3 - 4i \Leftrightarrow k^2 - 1 + 2ki = 3 - 4i$$

Da igualdade de dois números complexos, resulta que:

$$k^2 - 1 = 3 \wedge 2ki = -4i \Leftrightarrow k^2 = 3 + 1 \wedge k = -\frac{4i}{2i} \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{4} \wedge k = -2 \Leftrightarrow (k = 2 \vee k = 2) \wedge k = -2 \Leftrightarrow k = -2$$

Resposta: **Opção D**

9.

9.1. Como o raio da base da calote esférica é igual a $\frac{3}{5}$ do raio da Terra, ou seja, $r = \frac{3R}{5}$, então a percentagem da área da superfície terrestre coberta por um satélite é:

$$50\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\frac{3R}{5}}{R}\right)^2}\right) = 50\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{3R}{5R}\right)^2}\right) = 50\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}\right) = 10\%$$

Resposta: **Opção C**

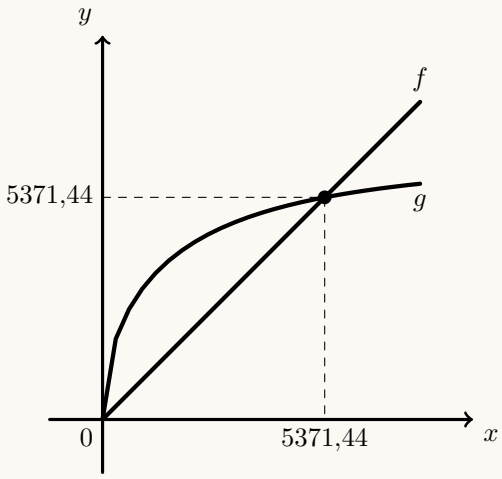
9.2. Como se pretende que a altitude do satélite seja igual ao raio da base da respetiva calote esférica, temos que $r = h$

Por outro lado, sabemos que $r = \dfrac{R}{h+R}\sqrt{h^2+2hR}$, e que o raio da Terra é 6400 km, ou seja, $R = 6400$, pelo que: $r = \dfrac{6400}{h+6400}\sqrt{h^2+2h(6400)} = \dfrac{6400\sqrt{h^2+12800h}}{h+6400}$

Assim, o raio, em quilómetros, da base da calote esférica cuja superfície é coberta pelo satélite (ou a respetiva altura) é a solução da equação da equação:

$$h = \frac{6400\sqrt{h^2+12800h}}{h+6400}$$

Desta forma, visualizando na calculadora gráfica os gráficos das funções $f(x) = x$ e $g(x) = \dfrac{6400\sqrt{x^2+12800h}}{x+6400}$, para $0 < x < 6400$, reproduzido na figura ao lado, e usando a funcionalidade da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (às centésimas) da abcissa do ponto de interseção, ou seja, o raio, em quilómetros, da base da calote esférica cuja superfície é coberta pelo satélite e a respetiva altura, quando estas são iguais:



$$(5371{,}44\,;\,5371{,}44)$$

Assim, temos que $R = 6400$ e $r \approx 5371{,}44$, pelo que a percentagem, arredondada às unidades, da área da superfície terrestre coberta pelo satélite, naquela posição, é:

$$50\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{5371{,}44}{6400}\right)^2}\right) \approx 23\%$$

10.

10.1. Temos que: $(f\circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(\cos(x)\big) = \big(\cos(x)\big)^2 = \cos^2 x$

Como o declive da reta tangente num ponto é dado pelo valor da função derivada nesse ponto, determinamos a derivada da função $f\circ g$:

$$(f\circ g)'(x) = (\cos^2 x)' = \big((\cos x)(\cos x)\big)' = (\cos x)'(\cos x) + (\cos x)(\cos x)' = 2(\cos x)'(\cos x) =$$

$$= 2(-\operatorname{sen} x)(\cos x) = -2\operatorname{sen} x\cos x$$

E assim, o declive da reta tangente no ponto de abcissa $\dfrac{\pi}{4}$ é:

$$(f\circ g)'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = -2\times\frac{2}{4} = -\frac{4}{4} = -1$$

Resposta: **Opção B**

10.2.

Como $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$ e as funções f e g são ambas contínuas em $\mathbb{R}$, então a função $f - g$ também é contínua em $\mathbb{R}$, e em particular é contínua em $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

Como $-1 < 0 < 0{,}6$, ou seja, $f(0) - g(0) < 0 < f\left(\frac{\pi}{3}\right) - g\left(\frac{\pi}{3}\right)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$ tal que $f(c) - g(c) = 0$, ou seja, que a equação $f(x) - g(x) = 0$ e também a equação $f(x) = g(x)$ têm, pelo menos, uma solução em $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$

C.A.

$f(0) - g(0) = 0^2 - \cos 0 = 0 - 1 = -1$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) - g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - \cos\frac{\pi}{3} \approx 0{,}6$

11.

11.1. Para averiguar se a função h é contínua em $x = 1$, temos que verificar se $h(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} h(x)$

- $h(1) = 1 + 1 \times e^{1-1} = 1 + e^0 = 1 + 1 = 2$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(1 + xe^{x-1}\right) = 1 + 1 \times e^{1-1} = 1 + e^0 = 1 + 1 = 2$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\operatorname{sen}(x-1)} = \dfrac{\sqrt{1} - 1}{\operatorname{sen}(1-1)} = \dfrac{1-1}{\operatorname{sen} 0} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

  (fazendo $y = x - 1$, temos $x = y + 1$ e se $x \to 1^+$, então $y \to 0^+$)

$$\lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{y\to 0^+} \frac{\sqrt{y+1} - 1}{\operatorname{sen} y} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{\sqrt{y+1} - 1}{y}}{\frac{\operatorname{sen} y}{y}} = \frac{\lim\limits_{y\to 0^+} \frac{(\sqrt{y+1} - 1)(\sqrt{y+1} + 1)}{y(\sqrt{y+1} + 1)}}{\lim\limits_{y\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{y}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{y\to 0^+} \frac{(\sqrt{y+1})^2 - 1^2)}{y(\sqrt{y+1} + 1)}}{\lim\limits_{y\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{y}} = \frac{\lim\limits_{y\to 0^+} \frac{y + 1 - 1}{y(\sqrt{y+1} + 1)}}{\lim\limits_{y\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{y}} = \frac{\lim\limits_{y\to 0^+} \frac{y}{y(\sqrt{y+1} + 1)}}{\lim\limits_{y\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{y}} = \frac{\lim\limits_{y\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{y+1} + 1}}{\underbrace{\lim\limits_{y\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{0+1} + 1}{1}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Assim, temos que, como $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} h(x)$, a função h não é contínua em $x = 1$

11.2. Como o domínio da função é $]-\infty,4]$, a assíntota horizontal do gráfico de h é determinada quando $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(1 + xe^{x-1}\right) = 1 - \infty \times e^{-\infty-1} = 1 - \infty \times 0 \text{ (Indeterminação)}$$

(fazendo $y = -x$, temos $x = -y$ e se $x \to -\infty$, então $y \to +\infty$)

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{y\to+\infty} \left(1 + (-y)e^{-y-1}\right) = \lim_{y\to+\infty} \left(1 - ye^{-(y+1)}\right) = \lim_{y\to+\infty} \left(1 - \frac{y}{e^{y+1}}\right) =$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \left(1 - \frac{y}{e^y \times e}\right) = \lim_{y\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{e} \times \frac{y}{e^y}\right) = \lim_{y\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{e} \times \frac{1}{\frac{e^y}{y}}\right) =$$

$$= \lim_{y\to+\infty} 1 - \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{e} \times \frac{\lim_{y\to+\infty} 1}{\underbrace{\lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = 1 - \frac{1}{e} \times \frac{1}{+\infty} 1 - \frac{1}{e} \times 0 = 1$$

Como $\lim_{x\to-\infty} h(x) = 1$, a reta de equação $y = 1$ também é assíntota horizontal do gráfico de h

12.

12.1. Para estudar o sentido o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(\frac{2 + \ln x}{x}\right)' = \frac{(2 + \ln x)'(x) - (2 + \ln x)(x)'}{x^2} =$$

$$= \frac{\left((2)' + \frac{(x)'}{x}\right) \times x - (2 + \ln x) \times 1}{x^2} = \frac{\left(0 + \frac{1}{x}\right) \times x - 2 - \ln x}{x^2} = \frac{1 - 2 - \ln x}{x^2} = \frac{-1 - \ln x}{x^2}$$

Determinando os zeros da segunda derivada, vem:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow -1 - \ln x = 0 \wedge \underbrace{x^2 \neq 0}_{\text{PV, } x>0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 = \ln x \Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

Assim, estudando a variação de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f, vem:

x	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$-1 - \ln x$	n.d.	$+$	0	$-$
x^2	n.d.	$+$	$+$	$+$
f''	n.d.	$+$	0	$-$
f	n.d.	$\cup$	Pt. I.	$\cap$

Logo, podemos concluir que o gráfico de f:

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]0, \frac{1}{e}\right]$
- tem um único ponto de inflexão, cuja abcissa é $x = \frac{1}{e}$

12.2. Como $1^2 - x^2 = (1-x)(1+x)$, temos que:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{1-x^2} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{1^2-x^2} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{-(x-1)(1+x)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{-(x-1)(1+x)} = \lim_{x\to 1} \left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \frac{1}{-(1+x)} \right) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \lim_{x\to 1} \frac{1}{-(1+x)} =$$

$$= f'(1) \times \frac{1}{-(1+1)} = -\frac{f'(1)}{2} = -\frac{\frac{2+\ln 1}{1}}{2} = -\frac{2-0}{2} = -1$$

Resposta: **Opção B**

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2020

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho | Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Critérios de Classificação

9 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de resposta restrita, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

Situação	Classificação
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1.1. ..... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Identificar o vetor de coordenadas $(3,-6,2)$ como um vetor normal ao plano EFG ..... 3 pontos

Escrever $3x-6y+2z+d=0$ ..... 5 pontos

Determinar o valor de d ..... 5 pontos

Escrever uma equação do plano pedido

$(3x-6y+2z-9=0$ ou outra equação equivalente, na forma pedida$)$ ..... 3 pontos

2.º Processo

Identificar um vetor $\vec{u}$ normal ao plano EFG ..... 3 pontos

Escrever $\overrightarrow{GP}\,.\,\vec{u}=0$, sendo P um ponto genérico do plano EFG ..... 4 pontos

Escrever $3(x-5)-6(y-3)+2(z-6)=0$ ..... 5 pontos

Obter uma equação do plano pedido

$(3x-6y+2z-9=0$ ou outra equação equivalente, na forma pedida$)$ ..... 4 pontos

1.2. ..... **20 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Determinar as coordenadas do centro da superfície esférica ..... 7 pontos

Determinar o raio da superfície esférica ..... 7 pontos

Escrever a equação reduzida da superfície esférica

$\left((x-6)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=3\right)$ ..... 6 pontos

2.º Processo

Escrever $\overrightarrow{GP}\,.\,\overrightarrow{AP}=0$, sendo P um ponto genérico da superfície esférica ... 5 pontos

Escrever $(x-5,y-3,z-6)\,.\,(x-7,y-1,z-4)=0$ ..... 5 pontos

Obter $x^2-12x+y^2-4y+z^2-10z+62=0$ ..... 4 pontos

Obter a equação reduzida da superfície esférica

$\left((x-6)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=3\right)$ ..... 6 pontos

2. ..... **16 pontos**

Opção **(B)**

3. ..... **16 pontos**

Escrever $P\left(A\left|(A\cup B)\right.\right)=\dfrac{P\left(A\cap(A\cup B)\right)}{P(A\cup B)}$ ..... 2 pontos

Obter $P\left(A\cap(A\cup B)\right)=P(A)$ ..... 4 pontos

Determinar $P(A\cap B)$ ..... 5 pontos

Obter $P(A\cup B)$ ..... 4 pontos

Obter o valor pedido $\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ..... 1 ponto

4. ..... **16 pontos**

Opção **(C)**

5. ..... **16 pontos**

Opção **(A)**

6. ..... **16 pontos**

Escrever $\begin{cases}u_7=2u_2\\S_{12}=57\end{cases}$ ..... 1 ponto

Escrever $\begin{cases}u_1+6r=2(u_1+r)\\\dfrac{u_1+u_1+11r}{2}\times 12=57\end{cases}$

(ou um sistema equivalente, nas variáveis u_1 e r) ..... 4 pontos

Obter o valor de r ..... 3 pontos

Obter o valor de u_1 ..... 3 pontos

Escrever $\dfrac{1}{2}n+\dfrac{3}{2}=500$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

Obter a ordem pedida (997) ..... 2 pontos

7. ..... **16 pontos**

Opção **(C)**

8.1. ..... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Identificar i^5 com i ..... 1 ponto

Escrever $z_1 = \dfrac{2i + 4(1-i)}{(1-i)i}$ ou $z_1 = \dfrac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} + \dfrac{4(-i)}{i(-i)}$ ..... 2 pontos

Obter $z_1 = 1 - 3i$ ..... 1 ponto

Obter $z_1 \times z_2 = a + 3b + i(b - 3a)$, considerando $z_2 = a + bi$ ..... 2 pontos

Escrever $a + 3b = b - 3a$ ..... 1 ponto

Resolver a equação em ordem a a (ou em ordem a b) ..... 1 ponto

Determinar $|z_2|$, em função de b (ou em função de a) ..... 2 pontos

Resolver a equação $|z_2| = \sqrt{5}$ ..... 3 pontos

Concluir que $z_2 = -1 + 2i$ ..... 3 pontos

2.º Processo

Identificar i^5 com i ..... 1 ponto

Escrever $z_1 = \dfrac{2i + 4(1-i)}{(1-i)i}$ ou $z_1 = \dfrac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} + \dfrac{4(-i)}{i(-i)}$ ..... 2 pontos

Obter $z_1 = 1 - 3i$ ..... 1 ponto

Calcular $|z_1|$ ..... 1 ponto

Calcular $|z_1 \times z_2|$ ..... 3 pontos

Concluir que $z_1 \times z_2 = 5 + 5i$ ..... 5 pontos

Escrever $z_2 = \dfrac{(5+5i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}$ ..... 2 pontos

Obter $z_2 \quad (-1 + 2i)$ ..... 1 ponto

8.2. ..... **16 pontos**

Opção **(D)**

9.1. ..... **16 pontos**

Opção **(C)**

9.2. ..... **20 pontos**

Apresentar a equação $r = \frac{6400}{r+6400}\sqrt{r^2+12800r}$ (**ver notas 1 e 2**) ..... 6 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota 3**) ..... 5 pontos

Apresentar as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) ..... 4 pontos

Apresentar o valor pedido (23%) ..... 5 pontos

Notas:

1. Se a equação apresentada não for equivalente a $r = \frac{6400}{r+6400}\sqrt{r^2+12800r}$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

2. Se não for apresentada qualquer equação, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. As restantes etapas são pontuadas de acordo com o desempenho evidenciado.

3. Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

10.1. ..... **16 pontos**

Opção **(B)**

10.2. ..... **16 pontos**

Referir que a função $f-g$ é contínua em $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ ..... 3 pontos

Calcular $(f-g)(0)$ ..... 4 pontos

Calcular $(f-g)\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ..... 4 pontos

Referir que $(f-g)(0) < 0 < (f-g)\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ..... 4 pontos

Concluir o pretendido ..... 1 ponto

11.1. ..... **16 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)$ (ou determinar $h(1)$) ..... 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (1 + x\,e^{x-1})$ ..... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = 2$ ..... 2 pontos

Determinar $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)$ ..... 12 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{\operatorname{sen}(x-1)}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{\operatorname{sen}(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\operatorname{sen}(x-1)}$ ..... 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\operatorname{sen}(x-1)} =$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} \times \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{\operatorname{sen}(x-1)}$ ..... 3 pontos

Escrever

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} \times \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{\operatorname{sen}(x-1)} = \dfrac{1}{2} \times \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}}$ ..... 2 pontos

Escrever $\dfrac{1}{2} \times \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}} \underset{y=x-1}{=} \dfrac{1}{2} \times \lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{1}{\frac{\operatorname{sen} y}{y}}$ .... 2 pontos

Obter $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = \dfrac{1}{2}$ ..... 1 ponto

Concluir que a função h não é contínua em $x = 1$ ..... 1 ponto

11.2. ..... **16 pontos**

Escrever $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} (1 + x\,e^{x-1})$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to -\infty} (1 + x\,e^{x-1}) = 1 + \lim\limits_{x\to -\infty} (x\,e^{x-1})$ ..... 1 ponto

Obter $1 + \lim\limits_{x\to -\infty} (x\,e^{x-1}) = 1 + \dfrac{1}{e} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{e^{-x}}$ ..... 5 pontos

Escrever $1 + \dfrac{1}{e} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{e^{-x}} = 1 - \dfrac{1}{e} \times \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{\frac{e^{-x}}{-x}}$ ..... 4 pontos

Escrever $1 - \dfrac{1}{e} \times \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{\frac{e^{-x}}{-x}} \underset{y=-x}{=} 1 - \dfrac{1}{e} \times \lim\limits_{y\to +\infty} \dfrac{1}{\frac{e^{y}}{y}}$ ..... 2 pontos

Obter $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x)$ ..... 2 pontos

Concluir que a equação da assíntota horizontal do gráfico da função h é $y = 1$ ..... 1 ponto

12.1. ..... **16 pontos**

Determinar $f''(x)$ (**ver nota 1**) ..... 3 pontos

Determinar o zero de f'' ..... 5 pontos

Escrever $f''(x) = 0$ ..... 1 ponto

Obter o zero de f'' ..... 4 pontos

Apresentar um quadro de sinal de f'' e de sentido da concavidade do gráfico de f (ou equivalente) ..... 5 pontos

Referir que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $\left]0, \frac{1}{e}\right]$ (**ver nota 2**) ..... 1 ponto

Referir que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$ (**ver nota 3**) ..... 1 ponto

Indicar a abcissa do ponto de inflexão do gráfico da função f $\left(\frac{1}{e}\right)$ ..... 1 ponto

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a segunda derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

2. Se for referido que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $\left]0, \frac{1}{e}\right[$, em vez de $\left]0, \frac{1}{e}\right]$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

3. Se for referido que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$, em vez de $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

12.2. ..... **16 pontos**

Opção **(B)**

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.1.**				**1.2.**				**9.1.**			**9.2.**			**Subtotal**
Cotação (em pontos)	16				20				16			20			**72**
Destes 14 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.1.**	**8.2.**	**10.1.**	**10.2.**	**11.1.**	**11.2.**	**12.1.**	**12.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	8 x 16 pontos														**128**
TOTAL															**200**

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A
Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2020

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho | Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 4 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final (itens **1.1.**, **1.2.**, **8.1.** e **8.2.**). Dos restantes 14 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \ \text{e} \ n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\, v)' = u'\, v + u\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\, v - u\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\, u^{n-1}\, u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\ e^u$

$(a^u)' = u'\ a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cubo $[ABCDEFGH]$ em que cada aresta é paralela a um dos eixos coordenados.

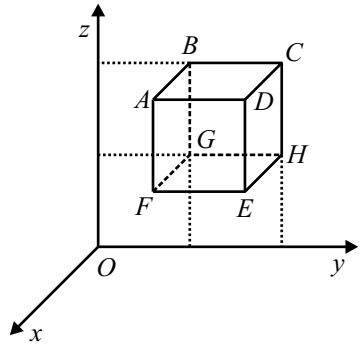


Figura 1

Sabe-se que:

- o vértice B tem coordenadas $(0, 2, 4)$
- o vetor $\overrightarrow{BE}$ tem coordenadas $(2, 2, -2)$
- a aresta $[BG]$ é paralela ao eixo Oz

1.1. Determine a amplitude do ângulo OBE

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

1.2. Seja α o plano que passa por G e é perpendicular à reta OE

Sejam P, Q e R os pontos de α que pertencem aos eixos coordenados.

Determine o volume da pirâmide $[OPQR]$

2. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n. xOy, um hexágono regular $[MNPQRS]$ centrado na origem.

Sabe-se que o vértice M tem coordenadas $(1, 0)$ e que o vértice N pertence ao primeiro quadrante.

Qual é a equação reduzida da reta MN?

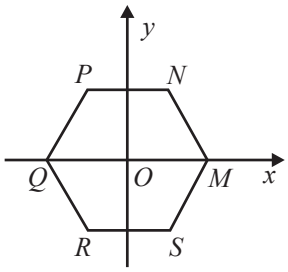


Figura 2

(A) $y = -\sqrt{3}\,x + \sqrt{3}$ **(B)** $y = -\sqrt{3}\,x + \sqrt{6}$

(C) $y = -x + 2$ **(D)** $y = -x + 1$

3. Considere um dado cúbico equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6

Lança-se esse dado quatro vezes e escrevem-se, da esquerda para a direita, os algarismos saídos, obtendo-se, assim, um número com quatro algarismos.

Qual é a probabilidade de esse número ser par, menor do que 5000 e capicua (sequência de algarismos cuja leitura da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita dá o mesmo número)?

(A) $\frac{1}{36}$ **(B)** $\frac{5}{36}$ **(C)** $\frac{1}{108}$ **(D)** $\frac{5}{108}$

4. Um hotel, que promove atividades ao ar livre, é procurado por turistas de várias nacionalidades.

4.1. Num certo dia, o hotel organizou uma descida do rio Zêzere e uma caminhada na serra da Estrela.

Sabe-se que:

- 80% dos hóspedes participaram na caminhada na serra da Estrela;
- 50% dos hóspedes participaram na descida do rio Zêzere;
- 30% dos hóspedes que participaram na descida do rio Zêzere não participaram na caminhada na serra da Estrela.

Escolhe-se, ao acaso, um dos hóspedes do hotel.

Determine a probabilidade de esse hóspede ter participado na caminhada na serra da Estrela e não ter participado na descida do rio Zêzere.

Apresente o resultado na forma de percentagem.

4.2. Três hóspedes suecos e quatro hóspedes dinamarqueses pretendem visitar os arredores do hotel. Para tal, o hotel disponibiliza quatro motos de dois lugares cada uma (uma preta, uma amarela, uma branca e uma verde).

Sabe-se que apenas os hóspedes dinamarqueses podem conduzir.

De quantas maneiras distintas se podem distribuir, deste modo, os sete hóspedes pelas quatro motos?

(A) 21 **(B)** 35 **(C)** 268 **(D)** 576

5. Considere uma progressão geométrica não monótona (u_n)

Sabe-se que $u_3 = \frac{1}{12}$ e que $u_{18} = 4u_{20}$

Determine uma expressão do termo geral de (u_n)

Apresente essa expressão na forma $a \times b^n$, em que a e b são números reais.

6. Considere a sucessão (v_n) definida, por recorrência, por

$$\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{v_n}, \text{ para qualquer número natural } n \end{cases}$$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A sucessão (v_n) é uma progressão aritmética.

(B) A sucessão (v_n) é uma progressão geométrica.

(C) A sucessão (v_n) é monótona.

(D) A sucessão (v_n) é limitada.

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número complexo $z_1 = -1 - i$

7.1. Determine, sem recorrer à calculadora, os números reais a e b, de forma que z_1 seja solução da equação $\dfrac{a}{z^2} + bz^4 = -2 + i$

7.2. Na Figura 3, está representado, no plano complexo, o triângulo equilátero $[OFG]$

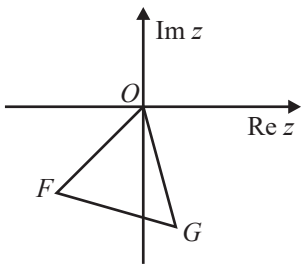


Figura 3

Sabe-se que o ponto F é a imagem geométrica do número complexo z_1 e que o ponto G é a imagem geométrica do número complexo $z_1 \times z_2$ e pertence ao quarto quadrante.

A que é igual o número complexo z_2?

(A) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ **(B)** $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ **(C)** $1 + \sqrt{2}\,i$ **(D)** $1 + \sqrt{3}\,i$

8. Um município construiu, num dos seus parques, uma rampa de *skate* entre duas paredes verticais distanciadas 21 metros uma da outra.

Na Figura 4, estão representados um corte longitudinal da rampa e dois jovens, cada um no seu *skate*.

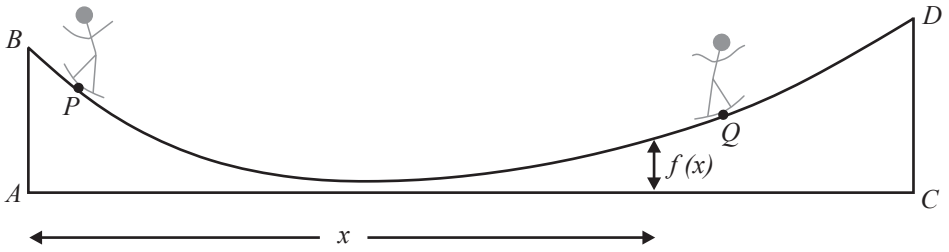


Figura 4

Nesta figura, o arco BD representa a rampa, os segmentos de reta $[AB]$ e $[CD]$ representam as paredes e o segmento de reta $[AC]$ representa o solo. Os pontos P e Q representam as posições dos dois jovens na rampa.

Admita que a distância ao solo, em metros, de um ponto da rampa situado x metros à direita da parede representada na figura por $[AB]$ é dada por

$$f(x) = 0{,}0001x^4 - 0{,}005x^3 + 0{,}11x^2 - x + 3{,}4 \quad , \quad 0 \leq x \leq 21$$

8.1. Qual é, em metros, com arredondamento às décimas, o valor absoluto da diferença entre as alturas das duas paredes da rampa de *skate*?

(A) $0{,}8$

(B) $0{,}7$

(C) $0{,}5$

(D) $0{,}4$

8.2. Num certo instante, os dois jovens estão à mesma distância do solo, um mais próximo da parede representada por $[AB]$ e o outro mais próximo da parede representada por $[CD]$. O jovem que se encontra mais próximo da parede representada por $[AB]$ está a um metro desta parede.

Seja d a distância a que se encontra da parede representada por $[CD]$ o jovem que dela está mais próximo.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de d, sabendo-se que esse valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;
- apresente o valor de d em metros, arredondado às décimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

9. Seja f a função, de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{\operatorname{tg} x}$

Mostre que o gráfico da função f não tem assíntotas.

10. Para um certo número real k, seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{k - kx} & \text{se } x < 1 \\ x^2 - 10 + 8 \ln x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

10.1. Sabe-se que g é contínua no ponto 1

Qual é o valor de k ?

(A) $\frac{1}{6}$

(B) $\frac{1}{7}$

(C) $\frac{1}{8}$

(D) $\frac{1}{9}$

10.2. Estude, sem recorrer à calculadora, a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão no intervalo $]1, +\infty[$

Na sua resposta, apresente:

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo;

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima;

– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g, caso este(s) exista(m).

10.3. Mostre, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, que a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $]\sqrt{e}, e[$

11. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = \dfrac{5}{4 + 3\cos(2x)}$

11.1. Qual é a taxa média de variação da função h entre $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$?

(A) 1 **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** 0 **(D)** $-\frac{1}{2}$

11.2. Determine, sem recorrer à calculadora, as abcissas dos pontos do gráfico da função h, pertencentes ao intervalo $]-\pi, \pi[$, cuja ordenada é 2

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.1.**				**1.2.**				**8.1.**			**8.2.**			**Subtotal**
Cotação (em pontos)	16				20				16			20			**72**
Destes 14 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.**	**6.**	**7.1.**	**7.2.**	**9.**	**10.1.**	**10.2.**	**10.3.**	**11.1.**	**11.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	8 x 16 pontos														**128**
TOTAL															**200**

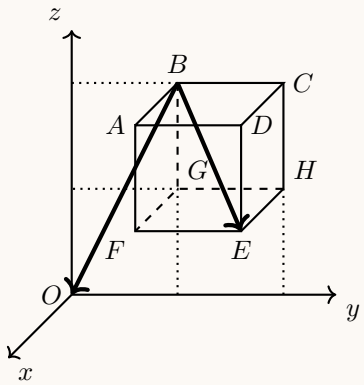
Exame final nacional de Matemática A **(2020, Época especial)**

Proposta de resolução

1.

1.1. Como as coordenadas do ponto B são (0,2,4), o vetor $\overrightarrow{OB}$ tem as mesmas coordenadas, pelo que as coordenadas do vetor $\overrightarrow{BO}$ são:

$$\overrightarrow{BO} = -\overrightarrow{OB} = -(0,2,4) = (0,-2,-4)$$



E a sua norma é:

$$\left\|\overrightarrow{BO}\right\| = \left\|\overrightarrow{OB}\right\| = \sqrt{0^2+2^2+4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

Calculando a norma do vetor $\overrightarrow{BE}$, temos:

$$\left\|\overrightarrow{BE}\right\| = \sqrt{2^2+2^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12}$$

Como o ângulo OBE é o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{BO}$ e $\overrightarrow{BE}$, podemos determinar a sua amplitude a partir do respetivo produto escalar:

$$\cos\left(\overrightarrow{BO}\,\hat{}\,\overrightarrow{BE}\right) = \frac{\overrightarrow{BO}\,.\,\overrightarrow{BE}}{\left\|\overrightarrow{BO}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BE}\right\|} = \frac{(0,-2,-4).(2,2,-2)}{\sqrt{20}\times\sqrt{12}} = \frac{-4+8}{\sqrt{20\times 12}} = \frac{4}{\sqrt{240}}$$

Logo, a amplitude do ângulo OBE, em graus, arredondado às unidades, é

$$O\hat{B}E = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{240}}\right) \approx 75^\circ$$

1.2. Determinando as coordenadas do ponto E, temos:

$$E = B + \overrightarrow{BE} = (0,2,4) + (2,2,-2) = (2,4,2)$$

Como a reta OE é perpendicular ao plano α, um vetor diretor da reta também é um vetor normal do plano, ou seja, o vetor $\overrightarrow{OE}$ (que tem as mesmas coordenadas que o ponto E), é um vetor normal do plano α, e assim a sua equação é da forma:

$$2x + 4y + 2z + d = 0$$

Como a aresta $[BG]$ é paralela ao eixo Oz e a medida da aresta do cubo é 2, temos que as coordenadas do ponto G são $(0,2,2)$, e como o ponto G pertence ao plano α, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo as coordenadas, na equação anterior:

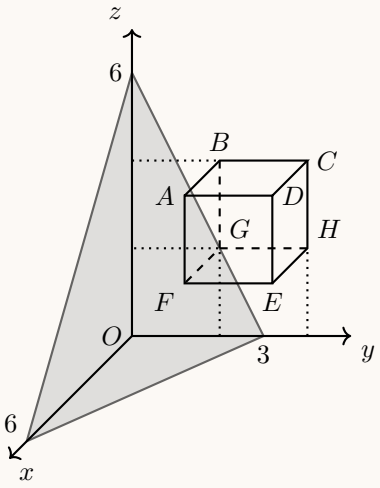
$2(0)+4(2)+2(2)+d = 0 \Leftrightarrow 0+8+4+d = 0 \Leftrightarrow 12+d = 0 \Leftrightarrow d = -12$

E assim, uma equação do plano α, é:

$$2x + 4y + 2z - 12 = 0 \Leftrightarrow x + 2y + z - 6 = 0$$

Desta forma podemos determinar as coordenadas dos pontos do plano que intersetam os eixos coordenados:

- Ponto P $(y = 0 \wedge z = 0)$: $x + 2(0) + (0) - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 6$
- Ponto Q $(x = 0 \wedge z = 0)$: $0 + 2y + (0) - 6 = 0 \Leftrightarrow 2y = 6 \Leftrightarrow y = 3$
- Ponto R $(y = 0 \wedge z = 0)$: $0 + 2(0) + z - 6 = 0 \Leftrightarrow z = 6$

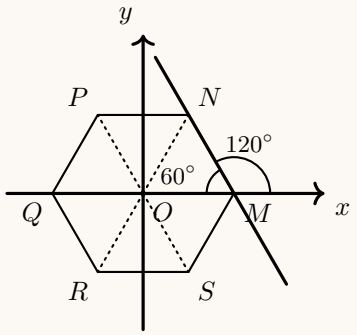


Desta forma a pirâmide $[OPQR]$ pode ser entendida como uma pirâmide cuja base é um triângulo retângulo cujos catetos medem 6 e 3 unidades e cuja altura é 6, ou seja:

$$V_{[OPQR]} = \frac{1}{3} \times A_{[OPQ]} \times \overline{OR} = \frac{1}{3} \times \frac{\overline{OP} \times \overline{OQ}}{2} \times \overline{OR} = \frac{1}{3} \times \frac{3 \times 6}{2} \times 6 = 3 \times 6 = 18$$

2. Como $[MNPQRS]$ é um hexágono regular, pode ser dividido em tiângulos equiláteros, pelo que o triângulo $[OMN]$ é equilátero, temos que $C\hat{M}N = \frac{180}{3} = 60°$, e o ângulo definido pelo semi-eixo positivo Ox e a reta MN é de $180 - 60 = 120°$ ou seja a inclinação da reta MN é $120°$, e assim, o declive correspondente, m_{MN}, é:

$$m_{MN} = \operatorname{tg}(120°) = -\operatorname{tg}(180 - 120°) = -\operatorname{tg}(60°) = -\sqrt{3}$$



Assim, temos que a equação reduzida da reta MN é da forma:

$$y = -\sqrt{3}x + b$$

Como o ponto $M(1,0)$ pertence à reta, podemos calcular o valor de b, substituindo as coordenadas do ponto M na condição anterior:

$$0 = -\sqrt{3} \times 1 + b \Leftrightarrow \sqrt{3} = b$$

Pelo que a equação reduzida da reta MN é:

$$y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$$

Resposta: **Opção A**

3. Como o dado tem 6 faces e é lançado 4 vezes, a quantidade de números que podem ser obtidos, ou seja, o número de casos possíveis, é ${}^{6}A'_{4} = 6^4$

   Para que o número formado seja uma capicua, o algarismo dos milhares deve ser igual ao das unidades e o algarismo das dezenas deverá ser igual ao das centenas. O algarismo dos milhares não pode ser 5 nem 6, para que o números seja inferior a 5000, e também não pode ser 1 nem 3, para que o algarismo das unidades seja par, visto que devem ser iguais. Assim só existem 2 algarismos favoráveis para o primeiro dígito, 6 para o segundo (porque não existem restrições), 1 para o terceiro (porque deve ser igual ao segundo) e 1 para o quarto (porque deve ser igual ao primeiro) para que o algarismo seja uma capicua, ou seja, o número de casos favoráveis é $2 \times 6 \times 1 \times 1$

   Desta forma, a probabilidade é:

   $$\frac{2 \times 6}{6^4} = \frac{2}{6^3} = \frac{1}{108}$$

   Resposta: **Opção C**

4.

   4.1. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um dos hóspedes do hotel, e os acontecimentos:
   E:«O hóspede ter participado na caminhada na serra da Estrela»
   Z:«O hóspede ter participado ter participado na descida do rio Zêzere»

   Temos que $P(E) = 0{,}8$; $P(Z) = 0{,}5$ e $P\left(\overline{E}|Z\right) = 0{,}3$

   Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

   - $P\left(\overline{E} \cap Z\right) = P(Z) \times P\left(\overline{E}|R\right) = 0{,}5 \times 0{,}3 = 0{,}15$
   - $P\left(E \cap Z\right) = P(Z) - P\left(\overline{E} \cap Z\right) = 0{,}5 - 0{,}15 = 0{,}35$

	Z	$\overline{Z}$	
E	0,35	0,45	0,8
$\overline{E}$	0,15		
	0,5		1

   Assim, a probabilidade do hóspede, selecionado ao acaso, ter participado na caminhada na serra da Estrela e não ter participado na descida do rio Zêzere, na forma de percentagem, é 45%, porque

   $$P\left(E \cap \overline{Z}\right) = P(E) - P\left(E \cap Z\right) = 0{,}8 - 0{,}35 = 0{,}45$$

   4.2. Como apenas os 4 hóspedes dinamarqueses podem conduzir as 4 motos diferentes, a forma de os distribuir, um por cada moto é: ${}^{4}A_4 = P_4 = 4!$

   Como devemos distribuir os restantes 3 hóspedes suecos pelos 4 lugares disponíveis, o número de formas diferentes de o fazer é ${}^{4}A_3$ (porque se deve considerar a ordem relevante, uma vez que as motas são diferentes), ou seja, o número total de formas distintas de distribuir os sete hóspedes pelas quatro motos, nas condições definidas, é:

   $$4! \times {}^{4}A_3 = 576$$

   Resposta: **Opção D**

5. Como a sucessão (u_n) é uma progressão geométrica, temos que $u_n = u_1 \times r^{n-1}$, com $r < 0$, porque a progressão não é monótona.

   Sabe-se que:

   - $u_3 = \frac{1}{12} \Leftrightarrow u_1 \times r^2 = \frac{1}{12}$
   - $u_{18} = 4u_{20} \Leftrightarrow u_1 \times r^{17} = 4 \times u_1 \times r^{19}$

   Resolvendo o sistema seguinte, determinamos o valor do primeiro termo e da razão da progressão:

   $$\begin{cases} u_1 \times r^2 = \frac{1}{12} \\ u_1 \times r^{17} = 4 \times u_1 \times r^{19} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{12r^2} \\ \frac{1}{12r^2} \times r^{17} = 4 \times \frac{1}{12r^2} \times r^{19} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{12r^2} \\ r^{17} = 4 \times r^{19} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{12r^2} \\ \frac{1}{4} = \frac{r^{19}}{r^{17}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{12r^2} \\ \frac{1}{4} = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{12r^2} \\ r = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \end{cases} \underset{r<0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} u_1 = \frac{1}{12 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2} \\ r = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{\frac{12}{4}} \\ r = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ r = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

   Assim, temos que a expressão do termo geral na forma $a \times b^n$, é:

   $$u_n = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \times (-2) = -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

6. Como o inverso de 2 é $\frac{1}{2}$ e o inverso de $\frac{1}{2}$ é 2, todos os termos de ordem ímpar da sucessão são iguais a 2 e todos os termos de ordem par são iguais a $\frac{1}{2}$

   Assim, temos que a sucessão não é nem uma progressão aritmética nem uma progressão geométrica.

   Por outro lado verifica-se que os termos alternam sucessivamente entre dois valores, pelo que não é monótona e como $\frac{1}{2} \leq v_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, logo (v_n) é uma sucessão limitada.

   Resposta: **Opção D**

7.

7.1. Escrevendo z_1 na f.t. temos $-1-i=\rho e^{i\theta}$, onde:

- $\rho=|-1-i|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{-1}{-1}=1$; como $\operatorname{sen}\theta<0$ e $\cos\theta<0$, θ é um ângulo do 3.º quadrante, logo $\theta=\pi+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{4}$

E assim $z_1=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$, pelo que:

- $(z_1)^2=\left(\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2e^{i\left(2\times\frac{5\pi}{4}\right)}=2e^{i\left(\frac{5\pi}{2}\right)}=2e^{i\left(\frac{5\pi}{2}-2\pi\right)}=2e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}=2i$
- $(z_1)^4=\left(\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}\right)^4=\left(\sqrt{2}\right)^4e^{i\left(4\times\frac{5\pi}{4}\right)}=4e^{i(5\pi)}=4e^{i(5\pi-4\pi)}=4e^{\pi i}=-4$

Assim, para que z_1 seja solução da equação $\dfrac{a}{z^2}+bz^4=-2+i$, vem que:

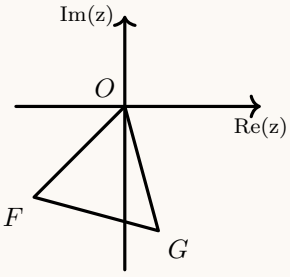
$$\frac{a}{2i}+b\times(-4)=-2+i\ \Leftrightarrow\ \frac{a(i)}{2i^2}-4b=-2+i\ \Leftrightarrow\ \frac{ai}{2\times(-1)}-4b=-2+i\ \Leftrightarrow\ -4b-\frac{a}{2}i=-2+i$$

Pelo que, pela igualdade de dois números complexos vem que:

$$-4b=-2\ \wedge\ -\frac{a}{2}=1\ \Leftrightarrow\ b=\frac{-2}{-4}\ \wedge\ -a=2\ \Leftrightarrow\ b=\frac{1}{2}\ \wedge\ a=-2$$

7.2. Escrevendo z_1 na f.t. temos $-1-i=\rho e^{i\theta}$, onde:

- $\rho=|-1-i|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{-1}{-1}=1$; como $\operatorname{sen}\theta<0$ e $\cos\theta<0$, θ é um ângulo do 3.º quadrante, logo $\theta=\pi+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{4}$



E assim $z_1=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$, pelo que, como o triângulo $[OFG]$ é equilátero, o número complexo cujo afixo é o ponto G tem módulo igual a z_1 e o argumento é $\operatorname{Arg}(z_1)+\dfrac{\pi}{3}$, ou seja, é o número complexo:

$$\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)}=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{19\pi}{12}\right)}$$

Desta forma podemos determinar z_2 resolvendo a equação seguinte:

$$z_1\times z_2=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{19\pi}{12}\right)}\ \Leftrightarrow\ z_2=\frac{\sqrt{2}e^{i\left(\frac{19\pi}{12}\right)}}{z_1}\ \Leftrightarrow\ z_2=\frac{\sqrt{2}e^{i\left(\frac{19\pi}{12}\right)}}{\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}}\ \Leftrightarrow\ z_2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{19\pi}{12}\right)-\left(\frac{5\pi}{4}\right)}\ \Leftrightarrow\ z_2=e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

E assim, escrevendo z_2 na f.a. vem:

$$z_2=\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Resposta: **Opção B**

8.

8.1. Como a função f corresponde à distância ao solo de cada ponto da rampa situado x metros à direita da parede representada por $[AB]$, $f(0)$ corresponde à distância ao solo do ponto da rampa assente sobre esta parede, ou seja à altura desta parede, e da mesma forma $f(21)$ corresponde à altura da parede representada por $[CD]$:

$$\overline{AB} = f(0) = 0{,}0001 \times 0^4 - 0{,}005 \times 0^3 + 0{,}11 \times 0^2 - 0 + 3{,}4 = 3{,}4$$

$$\overline{CD} = f(21) = 0{,}0001 \times 21^4 - 0{,}005 \times 21^3 + 0{,}11 \times 21^2 - 21 + 3{,}4 = 4{,}0531$$

E assim, temos que o valor absoluto da diferença entre as alturas das duas paredes, em metros, com arredondamento às décimas, é:

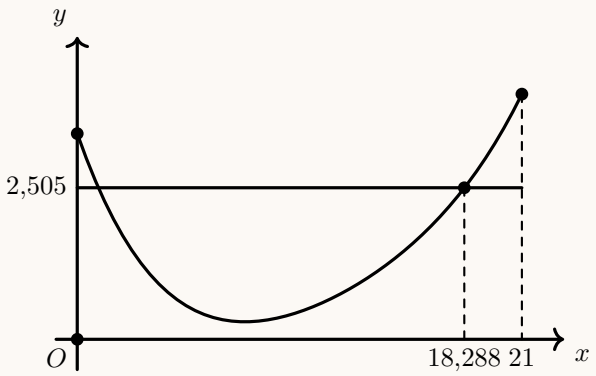
$$\left|\overline{CD} - \overline{AB}\right| = |f(21) - f(0)| \approx 0{,}7$$

Resposta: **Opção B**

8.2. Como o jovem que se encontra mais próximo da parede representada por $[AB]$ está a um metro desta parede, a sua distância ao solo é dada por $f(1)$. Como nesse instante, os dois jovens estão à mesma distância ao solo, a distância do jovem que se encontra mais próximo da parede representada por $[CD]$ está da parede representada por $[AB]$ é dada por:

$$f(x) = f(1)$$

Representado o gráfico da função f, numa janela adequada, ou seja, $x \in [0{,}21]$ e a reta de equação $y = f(1)$, e usando a ferramenta da calculadora gráfica para determinar os valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção, determinamos valores aproximados às centésimas das coordenadas do ponto com maior abcissa em que os dois gráficos se intersetam (por representar o jovem mais próximo da parede da direita), ou seja $(18{,}288; 2{,}505)$



Assim temos que o jovem mais próximo da parede da direita está a 18,288 metros da parede da esquerda, e como as duas paredes distam 21 metros, a distância d, deste jovem à parede da esquerda, em metros, arredondado às décimas, é:

$$d \approx 21 - 18{,}288 \approx 2{,}7$$

9. Como o domínio da função é $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, não existem assíntotas não verticais.

E como a função resulta de operações com funções contínuas em, as retas $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, as retas definida por $x=0$ e $x=\frac{\pi}{2}$ são as únicas retas que podem ser assíntotas do gráfico de f

Assim temos que:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x}-1}{\operatorname{tg} x} = \frac{e^{2\times 0}-1}{\operatorname{tg} 0} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^{2x}-1}{2x}}{\frac{\operatorname{tg} x}{2x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^{2x}-1}{2x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}{2x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^{2x}-1}{2x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{2x\cos x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{2x}-1}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\times\frac{1}{2\cos x}\right)} =$$

(fazendo $y=2x$, temos que se $x\to 0^+$, então $y\to 0^+$)

$$= \frac{\underbrace{\lim\limits_{y\to 0^+} \frac{e^y-1}{y}}_{\text{Lim. Notável}}}{\underbrace{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{2\cos x}} = \frac{1}{1\times\frac{1}{2\times\cos 0}} = \frac{1}{\frac{1}{2\times 1}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Pelo que a reta $x=0$ não é uma assíntota vertical do gráfico de f

Da mesma forma, temos que:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{e^{2x}-1}{\operatorname{tg} x} = \frac{e^{2\times\frac{\pi}{2}}-1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}^-} = \frac{e^{\pi}-1}{+\infty} = 0$$

Pelo que a reta $x=\frac{\pi}{2}$ também não é uma assíntota vertical do gráfico de f e assim podemos concluir que o gráfico de f não tem qualquer assíntota.

10.

10.1. Como a função é contínua em $\mathbb{R}$, também é contínua em $x=1$, pelo que

$$g(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x)$$

Como $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = g(1) = 1^2 - 10 + 8\ln 1 = 1 - 10 + 8\times 0 = -9 + 0 = -9$, calculando $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$, temos:

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-x}{k-kx} = \frac{1^2-1}{k-k\times 1} = \frac{0}{k-k} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-x}{k-kx} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x(x-1)}{k(1-x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x(-(x-1))}{k(1-x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x(1-x)}{k(1-x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x}{k} = -\frac{1}{k}$$

Assim, como $f(1)=-9$, e f é contínua, temos que:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow -9 = -\frac{1}{k} \Leftrightarrow k = \frac{1}{9}$$

Resposta: **Opção D**

10.2. Para estudar o sentido o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada no intervalo $]1,+\infty[$:

$$g'(x)=\left(x^2-10+8\ln x\right)'=\left(x^2\right)'-(10)'+(8\ln x)'=2x-0+8\,(\ln x)'=2x+8\times\frac{1}{x}=2x+\frac{8}{x}$$

$$g''(x)=(f'(x))'=\left(2x+\frac{8}{x}\right)'=(2x)'+\left(\frac{8}{x}\right)'=2+\frac{(8)'\times x-8(x)'}{x^2}=2+\frac{0-8}{x^2}=2-\frac{8}{x^2}$$

Determinando os zeros da segunda derivada, vem:

$$g''(x)=0\Leftrightarrow 2-\frac{8}{x^2}=0\Leftrightarrow 2=\frac{8}{x^2}\underset{x>1}{\Leftrightarrow}2x^2=8\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{4}\underset{x>1}{\Rightarrow}x=2$$

Assim, estudando a variação de sinal de g'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de g, vem:

x	1		2	$+\infty$
g''	n.d.	$-$	0	$+$
g	n.d.	∩	Pt. I.	∪

Logo, podemos concluir que o gráfico de g:

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]1,2]$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $[2,+\infty[$
- tem um único ponto de inflexão no intervalo definido, cuja abcissa é $x=2$

10.3.

Como a função g resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $[1,+\infty[$, é uma função contínua neste intervalo, e, por isso, também é contínua em $[\sqrt{e},e]$.

Como $e-6<0<e^2-2$, ou seja, $g(\sqrt{e})<0<g(e)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c\in\,]\sqrt{e},e[$ tal que $g(c)=0$, ou seja, a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $]\sqrt{e},e[$

C.A.

$$g\left(\sqrt{e}\right)=\left(\sqrt{e}\right)^2-10+8\ln\sqrt{e}=e-10+8\ln 2^{\frac{1}{2}}=$$

$$=e-10+\frac{8}{2}\ln e=e-10+4\times 1=e-6\approx -3{,}3$$

$$g(e)=e^2-10+8\ln e=e^2-10+8=e^2-2\approx 5{,}4$$

11.

11.1. Como:

- $h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{4+3\cos\left(2\times\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{5}{4+3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{5}{4+3\times\frac{1}{2}} = \frac{5}{4+\frac{3}{2}} = \frac{10}{11}$
- $h\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{5}{4+3\cos\left(2\times\frac{7\pi}{6}\right)} = \frac{5}{4+3\cos\left(\frac{14\pi}{6}\right)} = \frac{5}{4+3\cos\left(\frac{14\pi}{6}-2\pi\right)} = \frac{5}{4+3\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right)} =$

$$= \frac{5}{4+3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{5}{4+3\times\frac{1}{2}} = \frac{5}{4+\frac{3}{2}} = \frac{10}{11}$$

Calculando a taxa média de variação da função h no intervalo $\left[\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{7\pi}{6}\right]$, temos:

$$\text{TVM}_{\left[\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{7\pi}{6}\right]} = \frac{h\left(\frac{7\pi}{6}\right)-h\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{7\pi}{6}-\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{11}{10}-\frac{11}{10}}{\frac{6\pi}{6}} = \frac{0}{\pi} = 0$$

Resposta: **Opção C**

11.2. As abcissas dos pontos do gráfico da função h, pertencentes ao intervalo $]-\pi,\pi[$, cuja ordenada é 2 são as soluções da equação $h(x)=2$ que pertencem ao intervalo.

Assim, resolvendo a equação, temos:

$$h(x)=2 \Leftrightarrow \frac{5}{4+3\cos(2x)} = 2 \underset{4+3\cos(2x)\neq 0}{\Leftrightarrow} 5 = 2(4+3\cos(2x)) \Leftrightarrow 5 = 8+6\cos(2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5-8 = 6\cos(2x) \Leftrightarrow -\frac{3}{6} = \cos(2x) \Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2x = \frac{2\pi}{3}+2k\pi \vee 2x = -\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{2\times 3}+\frac{2k\pi}{2} \vee x = -\frac{2\pi}{2\times 3}+\frac{2k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}+k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Como se pretende identificar as soluções do intervalo $]-\pi,\pi[$, atribuindo valores inteiros a k para identificar as soluções no intervalo definido, temos:

- $k=-1 \rightarrow x = \frac{\pi}{3}-\pi = -\frac{2\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{3}-\pi = -\frac{4\pi}{3} \quad \left(-\frac{4\pi}{3} \notin]-\pi,\pi[\right)$
- $k=0 \rightarrow x = \frac{\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{3}$
- $k=1 \rightarrow x = \frac{\pi}{3}+\pi = -\frac{4\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{3}+\pi = \frac{2\pi}{3} \quad \left(\frac{4\pi}{3} \notin]-\pi,\pi[\right)$

Assim, existem quatro pontos no intervalo dado cuja ordenada 2, ou seja, os pontos cujas abcissas são:

$$-\frac{2\pi}{3}\,;\,-\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{3} \text{ e } \frac{2\pi}{3}$$

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2020

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho | Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Critérios de Classificação

9 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de resposta restrita, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

Situação	Classificação
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1.1. ..... **16 pontos**

Obter as coordenadas do vetor $\overrightarrow{BO}$ ..... 1 ponto

Calcular $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BE}$ ..... 4 pontos

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{BO}$ ..... 1 ponto

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{BE}$ ..... 1 ponto

Escrever a equação $4 = \sqrt{12} \times \sqrt{20} \cos(O\hat{B}E)$ (ou equivalente) ..... 5 pontos

Obter a amplitude do ângulo OBE $(75°)$ ..... 4 pontos

Nota: Se for determinada a amplitude do ângulo suplementar do ângulo OBE, a classificação máxima a atribuir à resposta é 11 pontos.

1.2. ..... **20 pontos**

Obter as coordenadas do ponto E ..... 2 pontos

Obter as coordenadas do ponto G ..... 2 pontos

Apresentar um vetor normal ao plano α ..... 2 pontos

Escrever $2x + 4y + 2z + d = 0$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Obter o valor de d ..... 2 pontos

Escrever uma equação do plano α ..... 2 pontos

Determinar as coordenadas dos pontos de intersecção do plano α com os eixos coordenados ..... 3 pontos

Determinar a área de uma face da pirâmide ..... 3 pontos

Obter o volume da pirâmide (18) ..... 2 pontos

2. ..... **16 pontos**

Opção **(A)**

3. ..... **16 pontos**

Opção **(C)**

4.1. ..... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Designemos por C o acontecimento «o hóspede escolhido participou na caminhada na serra da Estrela» e por D o acontecimento «o hóspede escolhido participou na descida do rio Zêzere».

Identificar o pedido com $P(C \cap \overline{D})$ ..... 2 pontos

Escrever $P(C) = 0{,}8$ ..... 1 ponto

Escrever $P(D) = 0{,}5$ ..... 1 ponto

Escrever $P(\overline{C} \mid D) = 0{,}3$ ..... 4 pontos

Escrever $P(\overline{C} \mid D) = \dfrac{P(\overline{C} \cap D)}{P(D)}$ ..... 1 ponto

Determinar $P(\overline{C} \cap D)$ ..... 1 ponto

Obter $P(C \cup \overline{D}) = 1 - P(\overline{C} \cap D)$ ..... 3 pontos

Obter $P(C \cap \overline{D})$ (45%) ..... 3 pontos

2.º Processo

Construir uma tabela de dupla entrada cujas entradas sejam «participa na caminhada na serra da Estrela, não participa na caminhada na serra da Estrela» e «participa na descida do rio Zêzere, não participa na descida do rio Zêzere» ..... 2 pontos

Preencher a célula da tabela relativa à informação «80% dos hóspedes participaram na caminhada na serra da Estrela» ..... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa à informação «50% dos hóspedes participaram na descida do rio Zêzere» ..... 1 ponto

Determinar a probabilidade de o hóspede não participar na caminhada na serra da Estrela e participar na descida do rio Zêzere, e escrever o valor obtido na célula respetiva ..... 5 pontos

Preencher as restantes células que permitem resolver o problema ..... 4 pontos

Responder ao problema (45%) ..... 3 pontos

4.2. ..... **16 pontos**

Opção **(D)**

5. ..... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Designemos por r a razão da progressão e por u_1 o primeiro termo.

Escrever $u_1 \, r^2 = \dfrac{1}{12} \ \wedge \ u_1 \, r^{17} = 4 \, u_1 \, r^{19}$ (ou equivalente) ..... 5 pontos

Obter o valor de r ..... 4 pontos

Obter o valor de u_1 ..... 2 pontos

Escrever uma expressão do termo geral ..... 2 pontos

Escrever o termo geral na forma pedida $\left(u_n = -\dfrac{2}{3} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$ ..... 3 pontos

2.º Processo

Identificar $\frac{u_{20}}{u_{18}}$ com r^2 ..... 6 pontos

Obter o valor de r ..... 4 pontos

Escrever uma expressão do termo geral ..... 3 pontos

Escrever o termo geral na forma pedida $\left(u_n = -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$ ..... 3 pontos

6. ..... **16 pontos**

Opção **(D)**

7.1. ..... **16 pontos**

Obter $(-1-i)^2 = 2i$ ..... 1 ponto

Escrever $(-1-i)^4 = (-1-i)^2 \times (-1-i)^2$ ou $(-1-i)^4 = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)^4$ ..... 3 pontos

Obter $(-1-i)^4 = -4$ ..... 2 pontos

Escrever $\frac{a}{2i} - 4b = -2 + i$ ..... 2 pontos

Obter $-\frac{a}{2}i - 4b = -2 + i$ ..... 3 pontos

Escrever $-4b = -2 \ \wedge \ -\frac{a}{2} = 1$ ..... 3 pontos

Obter o valor de a e o valor de b $\left(a = -2 \text{ e } b = \frac{1}{2}\right)$ ..... 2 pontos

7.2. ..... **16 pontos**

Opção **(B)**

8.1. ..... **16 pontos**

Opção **(B)**

8.2. ..... **20 pontos**

Determinar $f(1)$ ..... 3 pontos

Equacionar o problema $\left(f(x) = f(1)\right)$ (**ver notas 1 e 2**) ..... 5 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota 3**) ..... 4 pontos

Apresentar as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) ..... 4 pontos

Apresentar o valor pedido $(2{,}7)$ (**ver nota 4**) ..... 4 pontos

Notas:

1. Se a equação apresentada não traduzir corretamente o problema, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se não for apresentada qualquer equação, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. As restantes etapas são pontuadas de acordo com o desempenho evidenciado.
3. Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.
4. Se o valor apresentado for $18{,}3$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 2 pontos.

9. ..... **16 pontos**

Justificar que o gráfico de f não tem assíntotas não verticais ..... 1 ponto

Justificar que apenas a reta de equação $x = 0$ e a reta de equação $x = \frac{\pi}{2}$ poderiam ser assíntotas verticais do gráfico da função f ..... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ ..... 10 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^{2x}-1}{\operatorname{tg} x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^{2x}-1}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^{2x}-1}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{e^{2x}-1}{2x} \times 2x}{\frac{\operatorname{sen} x}{x} \times x \times \frac{1}{\cos x}}$ ..... 4 pontos

Escrever

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{e^{2x}-1}{2x} \times 2x}{\frac{\operatorname{sen} x}{x} \times x \times \frac{1}{\cos x}} = 2 \times \frac{\lim\limits_{y \to 0^+} \frac{e^y - 1}{y}}{\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \frac{1}{\cos x} \right)}$ ..... 3 pontos

Obter $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ ..... 2 pontos

Determinar $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)$ ..... 3 pontos

Concluir que o gráfico de f não tem assíntotas verticais ..... 1 ponto

10.1. ..... **16 pontos**

Opção **(D)**

10.2. ..... **16 pontos**

Determinar $g'(x)$ ..... 1 ponto

Determinar $g''(x)$ (**ver nota 1**) ..... 3 pontos

Determinar o zero de g'' ..... 5 pontos

Escrever $g''(x)=0$ ..... 1 ponto

Obter o zero de g'' ..... 4 pontos

Apresentar um quadro de sinal de g'' e de sentido da concavidade do gráfico de g (ou equivalente) ..... 4 pontos

Referir que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo em $]1,2]$ (**ver nota 2**) ..... 1 ponto

Referir que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima em $[2,+\infty[$ (**ver nota 3**) ..... 1 ponto

Indicar a abcissa do ponto de inflexão do gráfico da função g (2) ..... 1 ponto

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a segunda derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

2. Se, na resposta, for referido que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo em $]1,2[$, em vez de em $]1,2]$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

3. Se, na resposta, for referido que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima em $]2,+\infty[$, em vez de em $[2,+\infty[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

10.3. ..... **16 pontos**

Referir que a função g é contínua em $[\sqrt{e},e]$ ..... 2 pontos

Calcular $g(\sqrt{e})$ ..... 4 pontos

Calcular $g(e)$ ..... 4 pontos

Referir que $g(\sqrt{e})<0<g(e)$ ..... 4 pontos

Referir o teorema de Bolzano-Cauchy, para concluir o pretendido ..... 2 pontos

11.1. ..... **16 pontos**

Opção **(C)**

11.2. ..... **16 pontos**

Escrever $h(x) = 2$ $\left(\text{ou } \frac{5}{4 + 3\cos(2x)} = 2\right)$ ..... 2 pontos

Obter $\frac{5}{4 + 3\cos(2x)} = 2 \Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{1}{2}$ ..... 2 pontos

Escrever

$\cos(2x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$ ..... 5 pontos

Escrever

$2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \ \vee \ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$ ..... 3 pontos

Obter os valores pedidos $\left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \text{ e } \frac{2\pi}{3}\right)$ ..... 4 pontos

COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td colspan="4">1.1.</td><td colspan="4">1.2.</td><td colspan="3">8.1.</td><td colspan="3">8.2.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="4">16</td><td colspan="4">20</td><td colspan="3">16</td><td colspan="3">20</td><td>72</td></tr>
<tr><td>Destes 14 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td>2.</td><td>3.</td><td>4.1.</td><td>4.2.</td><td>5.</td><td>6.</td><td>7.1.</td><td>7.2.</td><td>9.</td><td>10.1.</td><td>10.2.</td><td>10.3.</td><td>11.1.</td><td>11.2.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="13">8 x 16 pontos</td><td>128</td></tr>
<tr><td colspan="14">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>