

COMPENDIUM POLONIA 2025

Reválida Bachillerato (Nivel básico y avanzado) 2005



Gerard Romo Garrido

Toomates Coolección vol. 85.3



Toomates Colección

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "licencias digitales", "licencias de uso" y en general cualquier forma de "pago por el acceso a los materiales didácticos", con las que algunas empresas pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo material, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.

Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de pago por acceso a los materiales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía.** El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las empresas comerciales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de los materiales que ofrecen, (que son muy mediocres) y no mediante retorcidas técnicas comerciales.

Estos libros se comparten bajo una licencia "Creative Commons 4.0 (Attribution Non Commercial)": Se permite, se promueve y se fomenta cualquier uso, reproducción y edición de todos estos materiales siempre que sea sin ánimo de lucro y se cite su procedencia. Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato "pdf" para una cómoda lectura y en el formato "doc" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas. ¡**Libérate de la tiranía y mediocridad de los productos comerciales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos.**

Problem Solving (en español):

[Geometría Axiomática](#) [Problemas de Geometría Volumen 1](#) [Volumen 2](#) [Volumen 3](#)
[Introducción a la Geometría](#) [Álgebra](#) [Teoría de números](#) [Combinatoria](#) [Probabilidad](#)
[Trigonometría](#) [Desigualdades](#) [Números complejos](#) [Calculus & Precalculus](#)

Libros de texto para ESO y bachillerato (en español y en catalán):

[Cálculo infinitesimal ESP](#) [CAT](#) [Álgebra Lineal ESP](#) [CAT](#) [Geometría Lineal ESP](#) [CAT](#)
[Números Complejos ESP](#) [CAT](#) [Combinatoria y probabilidad ESP](#) [CAT](#) [Estadística ESP](#) [CAT](#)
[Programación Lineal ESP](#) [CAT](#) [Álgebra ESP](#) [CAT](#) [Trigonometría ESP](#) [CAT](#)
[Geometría analítica ESP](#) [CAT](#) [Funciones ESP](#) [CAT](#) [Números \(Preálgebra\) ESP](#) [CAT](#)
[Proporcionalidad ESP](#) [CAT](#) [Medidas geométricas ESP](#) [CAT](#) [Mates amb Excel](#)

PAU españolas:

[Cataluña TEC](#) [Cataluña CCSS](#) [Valencia](#) [Galicia](#) [País Vasco](#) [Balears](#)

Reválidas internacionales:

[Portugal](#) [Italia](#) [Francia](#) [Rumanía](#) [Hungría](#) [Polonia](#) [Pearson Edexcel International A Level](#)
[China-Gaokao](#) [Corea-Suneung](#) [Pearson Edexcel IGCSE](#) [Cambridge International A Level](#)
[Cambridge IGCSE](#) [AQA GCSE](#) [International Baccalaureate \(IB\)](#)

Evaluación diagnóstica y pruebas de acceso:

[ACM6EP](#) [ACM4](#) [CFGS](#) [PAP](#)

Competiciones matemáticas:

Canguro: [España](#) [Cataluña](#) [Francia](#) [USA](#) [Reino Unido](#) [Austria](#)
USA: [Mathcounts](#) [AMC 8](#) [10](#) [12](#) [AIME](#) [USAJMO](#) [USAMO](#) [TSTST](#) [TST](#) [ELMO](#) [Putnam](#)
España: [OME](#) [OMEFL](#) [OMEEX](#) [OMC](#) [OMEA](#) [OMEM](#) [OMA](#) [CDP](#)
Europa: [OMI](#) [Arquimede](#) [HMMT](#) [BMO](#) [Balkan MO](#) [JBMO](#) [OPM](#)
Internacional: [IMO](#) [IGO](#) [SMT](#) [INMO](#) [CMO](#) [HMMT](#) [EGMO](#)
AHSME: [Book 1](#) [Book 2](#) [Book 3](#) [Book 4](#) [Book 5](#) [Book 6](#) [Book 7](#) [Book 8](#) [Book 9](#)

Otros materiales:

Pizzazz! [Book A](#) [Book B](#) [Book C](#) [Book D](#) [Book E](#) [Pre-Algebra](#) [Algebra](#) , [REOIM](#) , [Llibre3r](#)

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales para facilitar su edición.

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a toomates@gmail.com

¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.

Consulta el [catálogo de libros](http://www.toomates.net) completo en <http://www.toomates.net>

¿Problemas para descargar algún documento? Descarga toda la biblioteca Toomates [Aquí](#) 

Visita mi [Canal de Youtube](https://www.youtube.com/c/GerardRomo): <https://www.youtube.com/c/GerardRomo> 

Visita mi [blog](https://toomatesbloc.blogspot.com/): <https://toomatesbloc.blogspot.com/>

Este documento forma parte del siguiente bloque:

Polonia Reválida Bachillerato Nivel Avanzado (2005 - 2024):

<http://www.toomates.net/biblioteca/Polonia.pdf>

Polonia Reválida Bachillerato Nivel Básico (2005 - 2024):

<http://www.toomates.net/biblioteca/Polonia2.pdf>

Polonia Reválida Bachillerato Nivel Básico y avanzado 2025:

<http://www.toomates.net/biblioteca/Polonia3.pdf>

Otros compendiums de pruebas PAU internacionales:

Portugal: <http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal.pdf>

Italia: <http://www.toomates.net/biblioteca/Italia.pdf>

Francia: <http://www.toomates.net/biblioteca/Francia.pdf>

Rumanía: <http://www.toomates.net/biblioteca/Rumania.pdf>

Hungría: <http://www.toomates.net/biblioteca/Hungria.pdf>

Polonia: <http://www.toomates.net/biblioteca/Polonia.pdf>

China Gaokao: <http://www.toomates.net/biblioteca/Gaokao.pdf>

Corea Suneung: <http://www.toomates.net/biblioteca/Suneung.pdf>

International Baccalaureate (IB):

<http://www.toomates.net/biblioteca/CompendiumIB.pdf>

Pearson Edexcel International A Level:

<http://www.toomates.net/biblioteca/Edexcel.pdf>

Pearson Edexcel IGCSE:

<http://www.toomates.net/biblioteca/EdexcelIGCSE.pdf>

Cambridge International AS & A Level:

<http://www.toomates.net/biblioteca/Cambridge.pdf>

Cambridge IGCSE: <http://www.toomates.net/biblioteca/CambridgeIGCSE.pdf>

AQA GCSE: <http://www.toomates.net/biblioteca/AQAGCSE.pdf>

Compendiums de pruebas PAU españolas:

Cataluña (TEC): <http://www.toomates.net/biblioteca/Pautec.pdf>

Cataluña (CCSS): <http://www.toomates.net/biblioteca/Paucss.pdf>

Valencia: <http://www.toomates.net/biblioteca/Valencia.pdf>

Galicia: <http://www.toomates.net/biblioteca/Galiciapau.pdf>

País Vasco: <http://www.toomates.net/biblioteca/Paisvascopau.pdf>

Baleares: <http://www.toomates.net/biblioteca/Balears.pdf>

Índice.

Nivel intermedio	Enunciados	Soluciones
Prueba simulada noviembre 2024	5	33
Prueba simulada diciembre 2024	47	79
Prueba marzo 2025	110	138
Prueba abril 2025	154	182
Prueba mayo 2025	200	232
Prueba mayo 2025 Sistema antiguo	272	308
Prueba junio 2025	338	380
Prueba junio 2025 Sistema antiguo	412	444
Prueba agosto	477	509
Prueba Agosto Sistema antiguo	540	576
 Nivel avanzado		
Prueba simulada noviembre 2024	605	621
Prueba simulada diciembre 2024	635	667
Prueba simulada marzo 2025	701	731
Prueba simulada abril 2025	758	788
Prueba mayo 2025	818	850
Prueba mayo 2025 Sistema antiguo	900	932
Prueba junio 2025	985	1017
Prueba junio 2025 Sistema antiguo	1062	1094
Prueba junio Recuperación	1137	1169

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

PESEL

Egzamin maturalny

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Próbna Matura z Operonem 2024/2025

DATA: **20 listopada 2024 r.**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:

- ☐ dostosowania zasad oceniania
- ☐ dostosowania w zw. z dyskalkulią
- ☐ nieprzenoszenia zaznaczeń na kartę.

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 25 stron (zadania 1.–32.). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
3. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
4. Symbol  zamieszczony w nagłówku zadania oznacza, że rozwiązanie zadania zamkniętego musisz przenieść na kartę odpowiedzi.
5. Odpowiedzi do zadań zamkniętych zaznacz na karcie odpowiedzi w części karty przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj  pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem  i zaznacz właściwe.
6. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
7. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
8. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
9. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
10. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.

1.

0-1

Zadanie 1. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right)^{-2}$ jest równa:

A. $\frac{100}{9}$

B. $\frac{1}{9}$

C. $-\frac{1}{9}$

D. 21

Brudnopis

2.

0-1

Zadanie 2. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\frac{4^8 + 2^{20}}{16^5}$ jest równa:

A. $\frac{17}{16}$

B. $\frac{9}{10}$

C. $\frac{1}{4^5}$

D. 2^{12}

Brudnopis

3.

0-1-2

Zadanie 3. (0-2)

Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej k liczba $(3k + 2)^2 + (k + 3)^2 + 2k$ przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3.

Zadanie 4. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $2(\log_{0,1} 3 + \log_{0,1} 6) - (\log_{0,1} 27 + \log_{0,1} 12)$ jest równa:

A. 1

B. 2

C. 0

D. 3

Brudnopis

4.

0–1

Zadanie 5. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla każdej liczby rzeczywistej x wyrażenie $(x+2)^2 - \frac{(2x+1)(x-2)}{2}$ jest równe:

A. $\frac{11}{2}x + 5$

B. $\frac{4x^2 + 5x + 6}{2}$

C. $2x^2 + \frac{5}{2}x + 3$

D. $\frac{11}{2}x - 5$

Brudnopis

5.

0–1

6.

0-1

Zadanie 6. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Najmniejszą liczbą pierwszą spełniającą nierówność $-4x + 7x > (x - 4)(x - 2) - x^2$ jest liczba:

A. 1

B. 2

C. 3

D. 5

Brudnopis

7.

0-1

Zadanie 7. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równanie $\frac{x+3}{4x+8} = \frac{1}{x+1}$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

A. nie ma rozwiązania

B. ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x = \sqrt{5}$

C. ma dwa rozwiązania, których suma wynosi 0

D. ma dokładnie dwa rozwiązania: (-3) , (-1)

Brudnopis

8.

0-1-2

[illegible]

9.

0-1

$$\mathbf{A.} \begin{cases} x + y = 190 \\ \frac{x}{60} = \frac{y}{80} + \frac{1}{4} \end{cases}$$

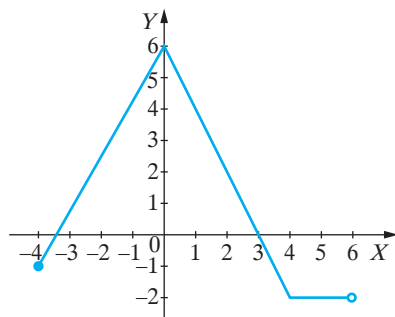
$$\mathbf{B.} \begin{cases} x + y = 190 \\ \frac{y}{60} = \frac{x}{80} + \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{C. } \begin{cases} x + y = 190 \\ \frac{x}{60} = \frac{y}{80} \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x + y = 190 \\ \frac{x}{60} = \frac{y}{80} - \frac{1}{4} \end{cases}$$

[illegible]

0-1-2



1.	Maksymalny przedział, w którym funkcja f jest rosnąca	
2.	Przedział, który określa zbiór wartości funkcji f	

- [illegible]

0-1

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Brudnopis

12.

0-1

Zadanie 12. (0-1)

Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = (k^2 - 3k + 2)x - k + 2$, gdzie $k \in \mathbb{R}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja f nie ma miejsc zerowych dla:

A. $k = 2$

B. $k = -2$

C. $k = 1$

D. $k \in \{1, 2\}$

Brudnopis

Zadanie 13.

Dana jest funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x) = -(x+1)^2 + 4$.

13.1.

0-1

Zadanie 13.1. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział:

A. $(-\infty, -1]$

B. $(-\infty, 4]$

C. $[4, +\infty)$

D. $[-1, 4]$

Brudnopis

0-1

[illegible]

0-1

D. $f(x) = -(x + 1)^2$

[illegible]

14.

0-1

Zadanie 14. (0-1)

Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \frac{-3}{x}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla $x = 1 - \sqrt{3}$ wartość funkcji f jest równa:

A. $\frac{-3 - \sqrt{3}}{2}$

B. $-3 + 3\sqrt{3}$

C. $\frac{-3 + \sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{3 + 3\sqrt{3}}{2}$

Brudnopis

15.

0-1

Zadanie 15. (0-1)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = -(n+2)(4-n)$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Wyrazami ujemnymi ciągu (a_n) są wyrazy pierwszy, drugi oraz trzeci.	P	F
2.	Dwa wyrazy ciągu (a_n) mają wartość zero.	P	F

Brudnopis

0-1

[illegible]

0-1

A.	arytmetyczny	dla	1.	$m = \frac{7}{3}$
			2.	$m = 6$
B.	geometryczny		3.	$m = 1$

[illegible]

0-1-2

Ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Czwarty wyraz tego ciągu jest równy 11, a suma czterech początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 68.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form a uniform pattern of small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

0-1

Kąt α jest ostry.

Wartość wyrażenia $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$ jest równa:

- ### D. 1

[illegible]

Dany jest trójkąt ABC o bokach długości 12, 14 oraz 16. Wierzchołek C jest położony naprzeciwko najdłuższego boku trójkąta. Cosinus największego kąta tego trójkąta jest równy $-\frac{1}{4}$.

20.1.

0-1-2

[illegible]

20.2.

0-1-2

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

0-1

Wysokość tego trapezu ma długość:

- ### D. 3

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Dany jest trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych długości $|AC| = \sqrt{6}$ oraz $|BC| = 2\sqrt{2}$.

0-1

1)

Na tym trójkącie opisano okrąg. Długość promienia tego okręgu jest równa:

- D.** $\frac{1}{2}\sqrt{7}$

A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 10 units wide by 10 units high. There are no margins or additional markings on the page.

Zadanie 22.2. (0–2)

Oblicz odległość środka ciężkości tego trójkąta od wierzchołka C . Zapisz obliczenia.

22.2.

0–1–2

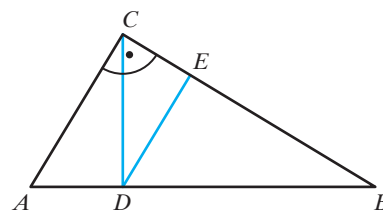


23.

0-1-2

Zadanie 23. (0-2)

Dany jest trójkąt prostokątny ABC , w którym $|\angle ACB| = 90^\circ$ oraz $|\angle BAC| = 60^\circ$. Punkt D jest punktem wspólnym wysokości poprowadzonej z wierzchołka C kąta prostego i przeciwprostokątnej AB . Przez punkt D poprowadzono prostą równoległą do boku AC , która przecięła bok BC w punkcie E (zobacz rysunek).



Wykaż, że $|DE| = \frac{3}{4}|AC|$.



Zadanie 24. (0–3)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest równoległobok $ABCD$. Trzy kolejne wierzchołki równoległoboku mają współrzędne $A = (-1, 3)$, $B = (5, 1)$, $C = (7, 5)$.

Przez wierzchołek C poprowadzono prostą k równoległą do prostej zawierającej przekątną BD równoległoboku. Prosta k przecięła prostą zawierającą podstawę AB równoległoboku w punkcie P . Przekątna BD zawiera się w prostej o równaniu $y = -\frac{3}{2}x + \frac{17}{2}$.

Oblicz współrzędne punktu P . Zapisz obliczenia.



24.

0–1
2–3

25.

0-1

Zadanie 25. (0-1)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest okrąg O o środku w punkcie $S = (3, -4)$. Okrąg O ma jeden punkt wspólny z osią Ox układu współrzędnych.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Okrąg O jest określony równaniem:

A. $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 16$

B. $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$

C. $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 16$

D. $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$

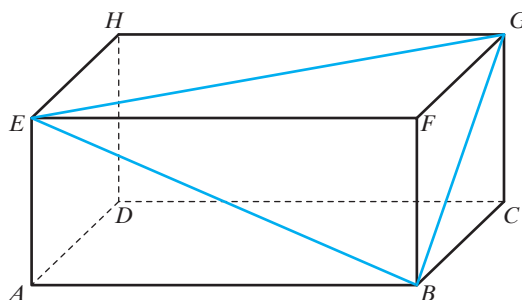
Brudnopis

26.

0-1

Zadanie 26. (0-1)

W prostopadłościanie $ABCDEFGH$ dane są długości boków $|AB| = \sqrt{11}$, $|AD| = \sqrt{13}$, $|AE| = \sqrt{15}$.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole boczne tego prostopadłościanu jest równe:

A. $2\sqrt{15}\sqrt{24}$

B. $2\sqrt{15}(\sqrt{11} + \sqrt{13})$

C. $12\sqrt{5}$

D. $2\sqrt{2145}$

Brudnopis

Zadanie 27. (0–1)

Dany jest ostrosłup prawidłowy. Liczba wszystkich krawędzi tego ostrosłupa jest równa 54.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba wszystkich wierzchołków tego ostrosłupa jest równa:

A. 27

B. 55

C. 36

D. 28

27.

0–1

Brudnopis

Zadanie 28. (0–1)

Objętość walca W_1 o promieniu podstawy 6 jest równa 288π . Pole powierzchni bocznej walca W_2 podobnego do walca W_1 jest równe 216π .

Uzupełnij poniższe zdanie. Wpisz odpowiednią liczbę w wykropkowanym miejscu tak, aby zdanie było prawdziwe.

Stosunek objętości walca W_1 do objętości walca W_2 jest równy

28.

0–1

Brudnopis

0-1

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 8

B. 12

C. 24

D. 128

[illegible]

0-1

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba ocen	0	4	9	13	3	1

A. Średnia arytmetyczna ocen uzyskanych ze sprawdzianu jest równa 3,60 oraz mediana tych ocen wynosi 4.

B. Średnia arytmetyczna ocen uzyskanych ze sprawdzianu jest równa 3,60 oraz mediana tych ocen wynosi 3,5.

C. Średnia arytmetyczna ocen uzyskanych ze sprawdzianu jest równa 3,63 oraz mediana tych ocen wynosi 4.

D. Średnia arytmetyczna ocen uzyskanych ze sprawdzianu jest równa 3,63 oraz mediana tych ocen wynosi 3,5.

[illegible]

31.	
0-1-2	

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb jest liczbą podzielną przez 3. Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

32.

0-1-2
3-4

Zadanie 32. (0–4)

Różnica dwóch liczb x i y jest równa 8 oraz $x > y$. Wyrażenie W jest sumą podwojonej liczby y oraz potrojonego kwadratu liczby x zmniejszonej o jeden.

Wyznacz x oraz y , dla których wartość wyrażenia W jest najmniejsza. Oblicz tę najmniejszą wartość. Zapisz obliczenia.



BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)



BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)



KARTA ODPOWIEDZI

WYPEŁNIA UCZEŃ

Kod ucznia

PESEL

Nr zad.	Odpowiedzi							
1.	A	B	C	D				
2.	A	B	C	D				
4.	A	B	C	D				
5.	A	B	C	D				
6.	A	B	C	D				
7.	A	B	C	D				
9.	A	B	C	D				
10.1.	A	B	C	D			E	F
10.2.	A	B	C	D			E	F
11.	PP	PF	FP	FF				
12.	A	B	C	D				
13.1.	A	B	C	D				
13.2.	PP	PF	FP	FF				
13.3.	A	B	C	D				
14.	A	B	C	D				
15.	PP	PF	FP	FF				
17.	A1	A2	A3					
	B1	B2	B3					
	C1	C2	C3					
19.	A	B	C	D				
21.	A	B	C	D				
22.1.	A	B	C	D				

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:

dostosowania zasad oceniania ☐

dostosowania w zw. z dyskalkulią ☐

nieprzenoszenia zaznaczeń na kartę ☐

WYPEŁNIA EGZAMINATOR

Nr zad.	Punkty				
	0	1	2	3	4
3.	☐	☐	☐		
8.	☐	☐	☐		
16.	☐	☐			
18.	☐	☐	☐		
20.1.	☐	☐	☐		
20.2.	☐	☐	☐		
22.2.	☐	☐	☐		
23.	☐	☐	☐		
24.	☐	☐	☐	☐	
28.	☐	☐			
31.	☐	☐	☐		
32.	☐	☐	☐	☐	☐

Nr zad.	Odpowiedzi			
25.	A	B	C	D
26.	A	B	C	D
27.	A	B	C	D
29.	A	B	C	D
30.	A	B	C	D

ISBN 978-83-8197-508-7



9 788381 975087

Rodzaj dokumentu:	Zasady oceniania rozwiązań zadań
Egzamin:	Egzamin maturalny
Przedmiot:	Matematyka
Poziom:	Poziom podstawowy

Zasady oceniania są zgodne z podstawą programową kształcenia ogólnego dla szkoły ponadpodstawowej z 2024 r., <https://isap.sejm.gov.pl/isap.nsf/download.xsp/WDU20240001019/O/D20241019.pdf> (dostęp: 20.09.2024).

Uwagi:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający, rozwiązując zadanie otwarte, popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa.	Zdający: I.1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie

A

Zadanie 2. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie

A

Zadanie 3. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: I.2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia [...].

Zasady oceniania

2 pkt – przekształcenie wyrażenia do postaci $5(2k^2 + 4k + 2) + 3$

ALBO

przekształcenie wyrażenia do postaci $10(k^2 + 2k + 1) + 3$ oraz zapisanie, że wyrażenie $10(k^2 + 2k + 1)$ jest podzielne przez 5 lub liczba 10 jest podzielna przez 5

ALBO

przekształcenie wyrażenia do postaci $10k^2 + 20k + 13$ oraz zapisanie, że składniki $10k^2$ oraz $20k$, a reszta z dzielenia liczby 13 przez 5 jest równa 3

1 pkt – zapisanie wyrażenia tylko w postaci $10k^2 + 20k + 13$,

0 pkt – rozwiązanie z zastosowaniem błędnej metody albo brak rozwiązania

Uwaga:

Jeśli zdający sprawdza prawdziwość tezy tylko dla wybranych wartości k , to otrzymuje 0 punktów za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

$$(3k + 2)^2 + (k + 3)^2 + 2k = 9k^2 + 12k + 4 + k^2 + 6k + 9 + 2k = 10k^2 + 20k + 13 = 5(2k^2 + 4k + 2) + 3$$

Zadanie 4. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa.	Zdający: I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie

C

Zadanie 5. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa.	Zdający: II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie

A

Zadanie 6. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: III.3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie

B

Zadanie 7. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: III.1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny, tym np. przekształca równoważnie równanie $\frac{5}{x+1} = \frac{x+3}{2x-1}$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie

C

Zadanie 8. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: III.5) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej.

Zasady oceniania

2 pkt – wyznaczenie wszystkich rozwiązań równania: $x = \sqrt{11}$, $x = -\sqrt{11}$, $x = 0$, $x = \frac{4}{5}$

1 pkt – wykorzystanie własności iloczynu i zapisanie dwóch równań $3x^2 - 33 = 0$ oraz $5x^2 - 4x = 0$

ALBO

– obliczenie lub podanie rozwiązania jednego z równań $x^2 - 33 = 0$ lub $5x^2 - 4x = 0$

0 pkt – rozwiązanie z zastosowaniem błędnej metody lub brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

$$(3x^2 - 33)(5x^2 - 4x) = 0$$

$$3x^2 - 33 = 0 \text{ lub } 5x^2 - 4x = 0$$

$$3x^2 = 33$$

$$x(5x - 4) = 0$$

$$x^2 = 11$$

$$x = 0 \text{ lub } 5x - 4 = 0$$

$$x = \sqrt{11} \text{ lub } x = -\sqrt{11}$$

$$x = 0 \text{ lub } x = \frac{4}{5}$$

Zadanie 9. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: IV.2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie

A

Zadanie 10. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały [...].

Zasady oceniania

2 pkt – wybranie dwóch poprawnych odpowiedzi

1 pkt – wybranie jednej lub dwóch odpowiedzi, z których jedna jest poprawna

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie

1. C, 2. D

Zadanie 11. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: V.5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie

FF

Zadanie 12. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: V.6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie lub o jej własnościach.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie

C

Zadanie 13.1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: V.8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje).

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie

B

Zadanie 13.2. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: V.9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie

PP

Zadanie 13.3. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: V.12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x - a)$ [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie

C

Zadanie 14. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa.	Zdający: V.2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie

D

Zadanie 15. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: VI.1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie

PF

Zadanie 16. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: VI.2) oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie.

Zasady oceniania

1 pkt – poprawne zapisanie wartości czwartego wyrazu ciągu; $b_4 = 87$

0 pkt – błędne rozwiązanie lub brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

$$\begin{cases} b_1 = 3 \\ b_{n+1} = 4b_n - 5 \end{cases}$$

$$b_2 = 4 \cdot 3 - 5 = 7$$

$$b_3 = 4 \cdot 7 - 5 = 23$$

$$b_4 = 4 \cdot 23 - 5 = 87$$

Zadanie 17. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: VI.4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie

B1

Zadanie 18. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: VI.5) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i obliczenie $a_1 = 23$

1 pkt – zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć a_1 , np.:

$$a_1 + 3r = 11 \text{ oraz } a_1 + a_1 + r + a_1 + 2r + a_1 + 3r = 68$$

$$a_1 + 3r = 11 \text{ oraz } 68 = \frac{a_1 + a_1 + 3r}{2} \cdot 4$$

0 pkt – rozwiązanie z zastosowaniem błędnej metody albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

$$\begin{cases} a_1 + 3r = 11 \\ a_1 + a_1 + r + a_1 + 2r + a_1 + 3r = 68 \\ a_1 + 3r = 11 \\ 4a_1 + 6r = 68 \\ -2a_1 - 6r = -22 \\ 4a_1 + 6r = 68 \end{cases}$$

$$2a_1 = 46$$

$$a_1 = 23$$

Zadanie 19. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: VII.2) korzysta z wzorów $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie

A

Zadanie 20.1. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	VII.3) stosuje twierdzenia [...] wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie wzoru na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$ i uzyskanie poprawnego wyniku:
 $P = 21\sqrt{15}$

1 pkt – obliczenie sinusa największego kąta tego trójkąta $\sin \gamma = \frac{\sqrt{15}}{4}$

0 pkt – rozwiązanie z zastosowaniem błędnej metody albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczenie sinusa największego kąta tego trójkąta:

$$\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\sin^2 \gamma + \frac{1}{16} = 1$$

$$\sin^2 \gamma = \frac{15}{16}$$

$$\sin \gamma = \frac{\sqrt{15}}{4} \text{ lub } \sin \gamma = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Sinus kąta rozwartego jest dodatni, więc $\sin \gamma = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 14 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 21\sqrt{15}$$

Zadanie 20.2. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: VII.3) stosuje twierdzenie cosinusów [...].

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i obliczenie cosinusa najmniejszego kąta trójkąta; $\cos \alpha = \frac{308}{448}$

1 pkt – zastosowanie twierdzenia cosinusów i zapisanie równania

$$12^2 = 14^2 + 16^2 - 2 \cdot 14 \cdot 16 \cdot \cos \alpha$$

0 pkt – rozwiązanie z zastosowaniem błędnej metody albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Z twierdzenia cosinusów $12^2 = 14^2 + 16^2 - 2 \cdot 14 \cdot 16 \cdot \cos \alpha$

$$448 \cdot \cos \alpha = 308$$

$$\cos \alpha = \frac{308}{448}$$

Zadanie 21. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: VIII.12) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie

B

Zadanie 22.1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: VIII.10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, [...] oraz korzysta z ich własności.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie

C

Zadanie 22.2. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	VIII.10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: [...] środek ciężkości oraz korzysta z ich własności.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i obliczenie odległości środka ciężkości tego trójkąta od wierzchołka C: $|CS| = \frac{\sqrt{14}}{3}$

$$\text{chołka C: } |CS| = \frac{\sqrt{14}}{3}$$

1 pkt – zapisanie zależności wynikającej z własności środka ciężkości, np.: $|CS| = \frac{2}{3}|CO|$, gdzie S jest środkiem ciężkości trójkąta, a O – środkiem przeciwprostokątnej AB trójkąta

0 pkt – rozwiązanie z zastosowaniem błędnej metody albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia:

S – środek ciężkości trójkąta

O – środek przeciwprostokątnej AB trójkąta

$$|CS| = \frac{2}{3}|CO|$$

$$\text{W trójkącie prostokątnym } |CO| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}\sqrt{14}$$

$$|CS| = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{14} = \frac{\sqrt{14}}{3}$$

Zadanie 23. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: VIII.11) przeprowadza dowody geometryczne.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz wykazanie, że w podanym trójkącie prostokątnym ABC

$$\text{prawdziwa jest zależność } |DE| = \frac{3}{4}|AC|$$

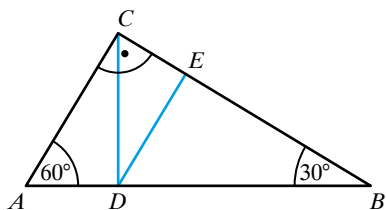
1 pkt – określenie związku zależności między długościami odcinków AC oraz AD : $|AD| = \frac{1}{2}|AC|$

ALBO

– określenie związku zależności między długościami odcinków AC oraz CE : $|CE| = \frac{\sqrt{3}}{4}|AC|$

0 pkt – rozwiązanie z zastosowaniem błędnej metody albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie



Z treści zadania $|\angle BAC| = 60^\circ$, więc $|\angle ABC| = 30^\circ$

W trójkącie ABC prawdziwa jest zależność $\sin \angle ABC = \frac{|AC|}{|AB|}$, stąd $\frac{1}{2} = \frac{|AC|}{|AB|}$,

więc $|AB| = 2|AC|$

W trójkącie ADC $|\angle DCA| = 30^\circ$

$\sin \angle DCA = \frac{|AD|}{|AC|}$, zatem $\frac{1}{2} = \frac{|AD|}{|AC|}$,

więc $|AD| = \frac{1}{2}|AC|$

Zatem $|BD| = |AB| - |AD| = \frac{3}{2}|AC|$

Trójkąt BED jest prostokątny, zatem $\triangle BED \sim \triangle BCA$ (kkk).

Zachodzi zależność: $\frac{|DE|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|AB|}$

$\frac{|DE|}{|AC|} = \frac{3|AC|}{2|AC|}$, zatem $\frac{|DE|}{|AC|} = \frac{3}{4}$, więc $|DE| = \frac{3}{4}|AC|$

Zadanie 24. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: IX.1) [...] znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje; IX.2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak np. przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość do innej prostej).

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i wyznaczenie współrzędnych punktu $P = (11, -1)$

2 pkt – wyznaczenie równań prostej AB : $y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$ oraz prostej k : $y = -\frac{3}{2}x + \frac{31}{2}$

1 pkt – wyznaczenie równania prostej AB : $y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$

ALBO

– wyznaczenie równania prostej k : $y = -\frac{3}{2}x + \frac{31}{2}$

0 pkt – rozwiązanie z zastosowaniem błędnej metody albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczamy równanie prostej przechodzącej przez punkty $A = (-1, 3)$, $B = (5, 1)$

$$\begin{cases} 3 = -a + b \\ 1 = 5a + b \end{cases}$$

Stąd $a = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{8}{3}$, więc prosta AB : $y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$

Wyznaczamy równanie prostej k równoległej do prostej zawierającej przekątną BD równoległoboku

$$y = -\frac{3}{2}x + b$$

Podstawiamy współrzędne punktu $C = (7, 5)$:

$$5 = -\frac{3}{2} \cdot 7 + b, \text{ stąd } b = \frac{31}{2}, \text{ a prosta } k \text{ ma równanie } k: y = -\frac{3}{2}x + \frac{31}{2}$$

Punkt P jest punktem przecięcia prostej k oraz przechodzącej przez punkty A, B , więc rozwiązując

$$\text{układ } \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \\ y = -\frac{3}{2}x + \frac{31}{2} \end{cases}, \text{ otrzymujemy współrzędne punktu } P = (11, -1)$$

Zadanie 25. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: IX.4) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie

A

Zadanie 26. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: X.5) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie

B

Zadanie 27. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: SP(VII-VIII) XI.1) rozpoznaje graniastosłupy i ostrosłupy – w tym proste i prawidłowe.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie

D

Zadanie 28. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: X.6) wykorzystuje zależność między objętościami brył podobnych.

Zasady oceniania

1 pkt – poprawny wynik: $\frac{8}{27}$

0 pkt – błędne rozwiązanie lub brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Dla walca W_1 objętość $V_1 = 288\pi$ oraz promień podstawy $r_1 = 6$, więc $288\pi = \pi \cdot 36 \cdot h_1$ czyli $h_1 = 8$, a $P_1 = 96\pi$

Dla walca W_2 , pole powierzchni bocznej $P_2 = 216\pi$

Walec W_2 jest podobny do walca W_1

$$k^2 = \frac{P_1}{P_2} = \frac{96\pi}{216\pi} = \frac{4}{9}$$

$$k = \frac{2}{3}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = k^3 = \frac{8}{27}$$

Zadanie 29. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: XI.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie

B

Zadanie 30. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: XII.2) oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną, znajduje medianę i dominantę.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Rozwiązanie

A

Zadanie 31. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia A i uzyskanie poprawnego wyniku: $P(A) = \frac{14}{42}$

1 pkt – wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych lub obliczenie/podanie liczby tych zdarzeń: $|\Omega| = 42$
ALBO

– wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A :

$\{(11, 13), (11, 16), (12, 15), (13, 11), (13, 14), (13, 17), (14, 13), (14, 16), (15, 12), (16, 11), (16, 14), (16, 17), (17, 13), (17, 16)\}$ i niewypisanie żadnego niewłaściwego lub podanie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A : $|A| = 14$, o ile nie zostały zliczone błędne pary

0 pkt – rozwiązanie z zastosowaniem błędnej metody albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

$$|\Omega| = 7 \cdot 6 = 42$$

$$A = \{(11, 13), (11, 16), (12, 15), (13, 11), (13, 14), (13, 17), (14, 13), (14, 16), (15, 12), (16, 11), (16, 14), (16, 17), (17, 13), (17, 16)\}$$

$$|A| = 14$$

$$P(A) = \frac{14}{42}$$

Zadanie 32. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: XIII) rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i obliczenie $W\left(\frac{2}{3}\right) = -14\frac{1}{3}$

3 pkt – obliczenie wartości $x = \frac{2}{3}$, dla której funkcja $W(x)$ przyjmuje wartość najmniejszą

2 pkt – zapisanie wyrażenia W w zależności od jednej zmiennej w postaci: $W(x) = 3x^2 - 4x - 13$

1 pkt – zapisanie poprawnie wyrażenia $W = 2y + 3(x-1)^2$ oraz zależności między liczbami x i y :
 $x - y = 8$

0 pkt – rozwiązanie z zastosowaniem błędnej metody albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyrażenie W , które jest sumą podwojonej liczby y oraz potrojonego kwadratu liczby x zmniejszonej o jeden, zapisujemy za pomocą wzoru $W = 2y + 3(x-1)^2$

Wykorzystujemy zależność, że różnica dwóch liczb x i y jest równa 8 oraz $x > y$, więc:

$x - y = 8$, stąd $y = x - 8$

Zatem $W(x) = 2(x-8) + 3(x^2 - 2x + 1) = 3x^2 - 4x - 13$

Korzystając z własności funkcji kwadratowej, obliczamy wartości x , dla której funkcja $W(x)$ przyjmuje

wartość najmniejszą: $x = \frac{-(-4)}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$

Obliczamy tę najmniejszą wartość: $W\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} - 13 = -14\frac{1}{3}$

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

PESEL

Miejsce na naklejkę.

Sprawdź, czy kod na naklejce to
M-100.

Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom podstawowy

TEST DIAGNOSTYCZNY

Symbol arkusza

MMAP-P0-**100**-2412

DATA: **6 grudnia 2024 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:

- ☐ dostosowania zasad oceniania
- ☐ dostosowania w zw. z dyskalkulią
- ☐ nieprzenoszenia odpowiedzi na kartę.

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

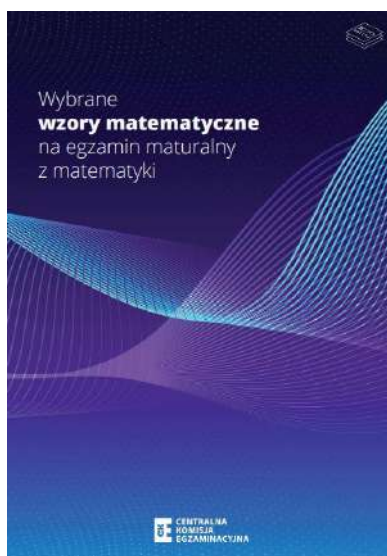
1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.





Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 31 stron (zadania 1–30).
Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Symbol  zamieszczony w nagłówku zadania oznacza, że rozwiązanie zadania zamkniętego musisz przenieść na kartę odpowiedzi. Ocenie podlegają wyłącznie odpowiedzi zaznaczone na karcie odpowiedzi.
4. Odpowiedzi do zadań zamkniętych zaznacz na karcie odpowiedzi w części przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj  pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem  i zaznacz właściwe.
5. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
6. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
7. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
8. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
9. Nie wpisuj żadnych znaków w tabelkach przeznaczonych dla egzaminatora.
Tabelki umieszczone są na marginesie przy odpowiednich zadaniach.
10. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
11. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla i linijki oraz z kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



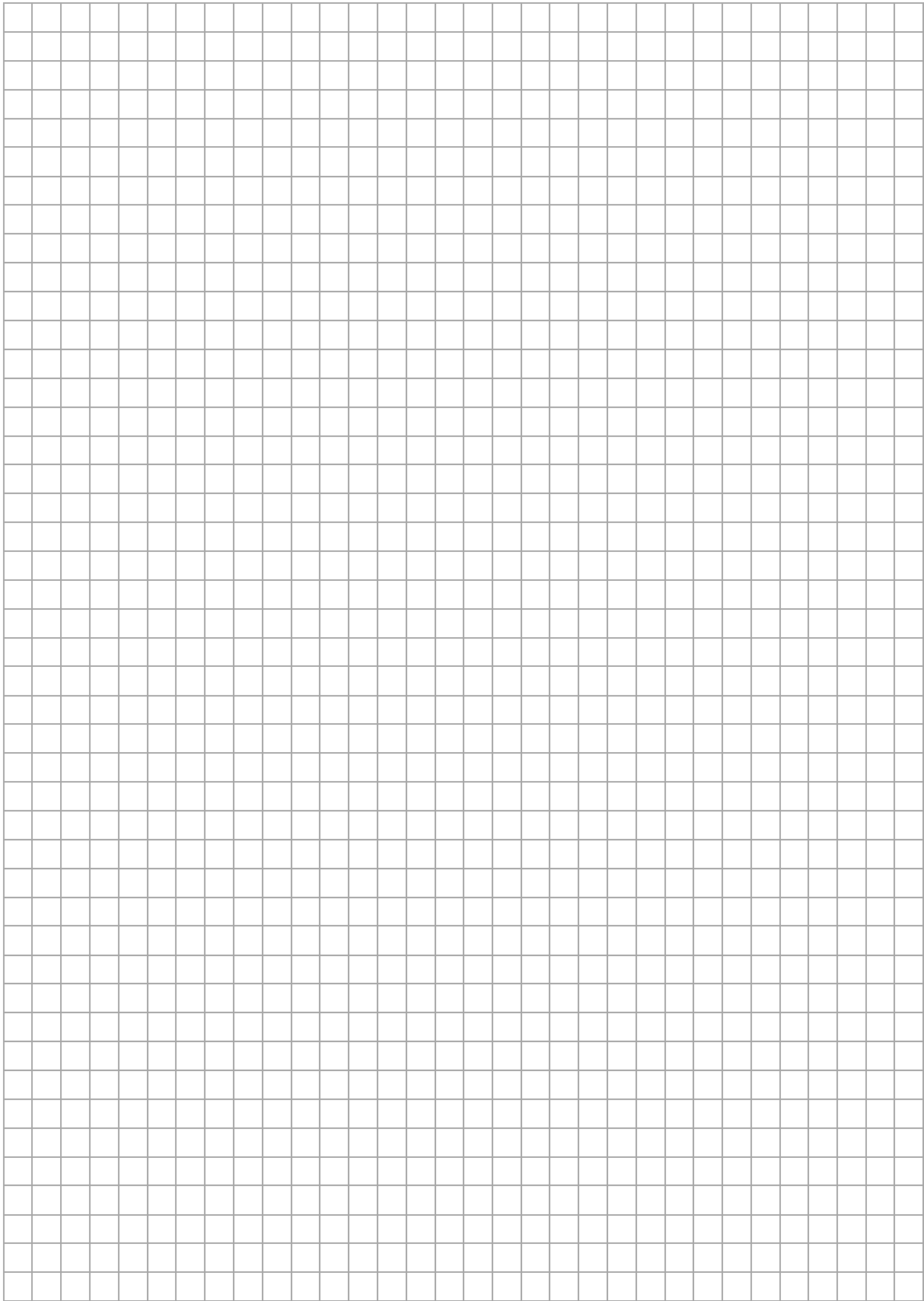
**Zadania egzaminacyjne są wydrukowane
na następnych stronach.**

Zadanie 3. (0–2)

Wykaż, że liczba $2^{100} + 4^{49} + 16^{24}$ jest podzielna przez 21.

3.

0–1–2



0-1-
2-3

Rozwiąż równanie

$$\frac{x+3}{x-1} = \frac{x}{2x-2}$$

Zapisz konieczne założenie i obliczenia.



$$x(x - 6) \leq 7$$

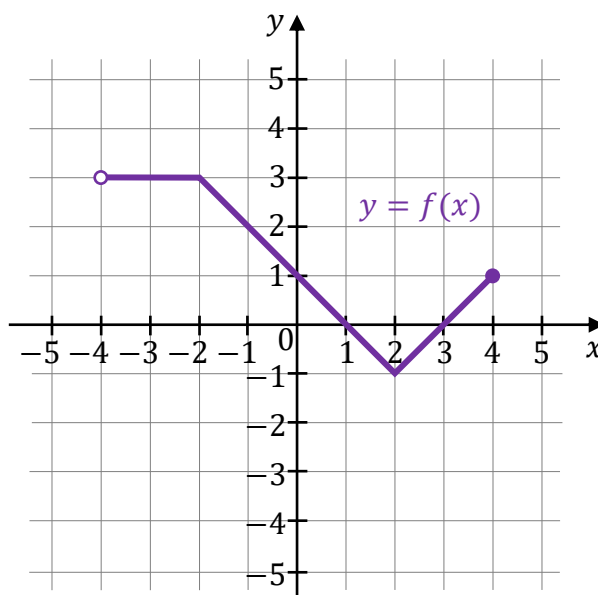
Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Funkcja f jest określona następująco:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } x \in (-4, -2] \\ -x + 1 & \text{dla } x \in (-2, 2] \\ x - 3 & \text{dla } x \in (2, 4] \end{cases}$$

Wykres funkcji $y = f(x)$ przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku poniżej.



0-1-
2-3-4

Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie przedziały w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe.

1. Dziedzina funkcji f jest przedział
2. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział
3. Zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne, jest przedział
4. Zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje największą wartość, jest przedział

[illegible]

A Cartesian coordinate system with x and y axes ranging from -5 to 5. A purple line, labeled $y = f(x)$, is graphed. The line passes through the y-intercept at (0, 4) and the x-intercept at (2, 0). The equation of the line is $y = -2x + 4$.

Współczynnik kierunkowy prostej, która jest wykresem funkcji f , jest równy (-2) .	P	F
Pole trójkąta ograniczonego osiami kartezjańskiego układu współrzędnych (x, y) oraz wykresem funkcji f jest równe 8.	P	F

Brudnopis

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Funkcja g ma jedno miejsce zerowe.	P	F
W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) osią symetrii wykresu funkcji g jest prosta o równaniu $x = 3$.	P	F

Brudnopis

Zadanie 15. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Trzywyrazowy ciąg $(5m, 4 + 2m, m)$ jest arytmetyczny, gdy liczba m jest równa

A. (-4)

B. (-1)

C. 1

D. 4

Brudnopis

Zadanie 16. (0–1)

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, w którym $a_2 = \frac{1}{6}$ oraz $a_3 = \frac{1}{9}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Piąty wyraz ciągu (a_n) jest równy

A. $\frac{1}{15}$

B. $\frac{2}{27}$

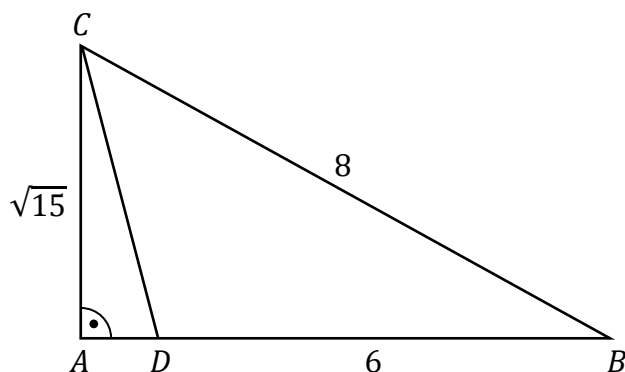
C. $\frac{4}{81}$

D. $\frac{8}{243}$

Brudnopis

Zadanie 17.

Dany jest trójkąt prostokątny ABC , w którym $|AC| = \sqrt{15}$ i $|BC| = 8$. Na przyprostokątnej AB leży taki punkt D , że $|BD| = 6$ (zobacz rysunek).



Zadanie 17.1. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Sinus kąta ostrego ABC jest równy

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{7}{8}$ C. $\frac{\sqrt{15}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{8}$

Brudnopis

Zadanie 17.2. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Tangens kąta ostrego ADC jest równy

- A. $\sqrt{15}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{7}{8}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{8}$

Brudnopis

Zadanie 18. (0–1)

Kąt o mierze α jest rozarty oraz $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Cosinus kąta o mierze α jest równy

A. $\left(-\frac{\sqrt{13}}{4}\right)$

B. $\left(-\frac{1}{2}\right)$

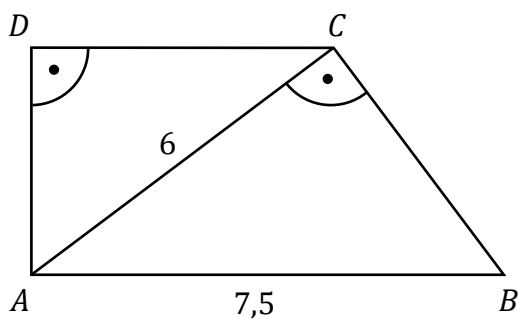
C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{13}}{4}$

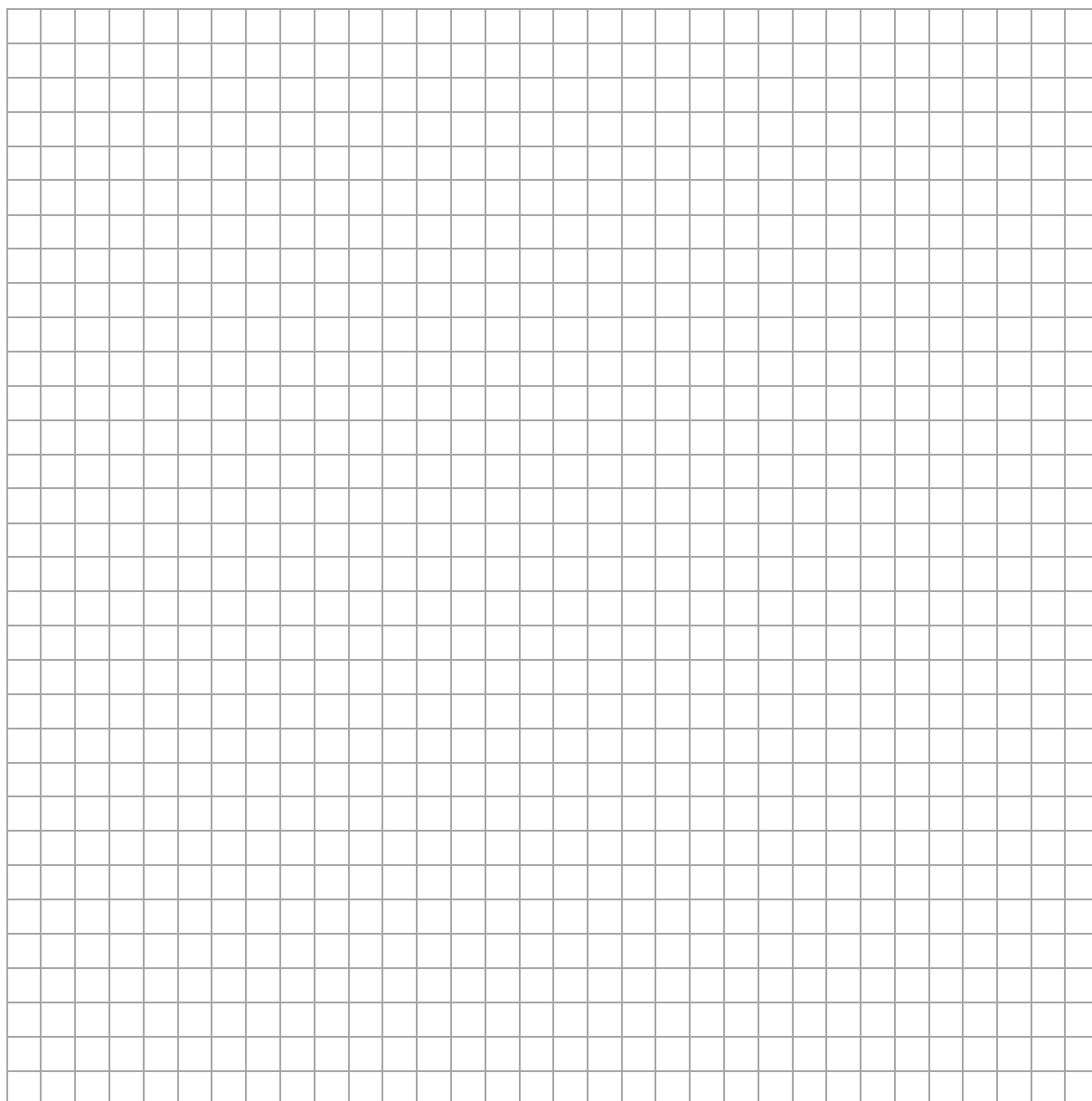
Brudnopis

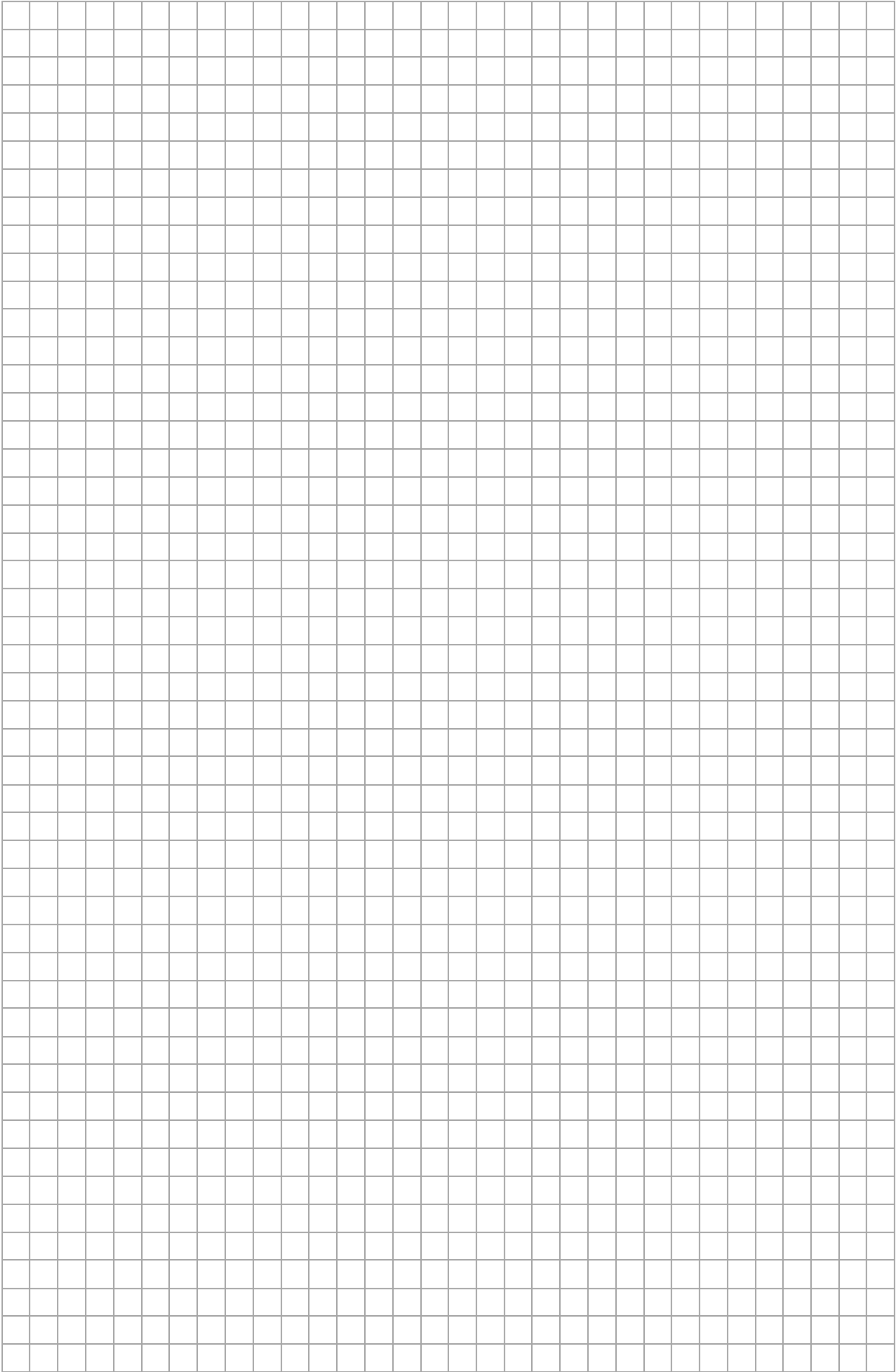
Zadanie 19. (0–4)

W trapezie prostokątnym $ABCD$ dłuższa podstawa AB ma długość $7,5$. Krótsza przekątna AC ma długość równą 6 i dzieli trapez na dwa trójkąty prostokątne (zobacz rysunek).

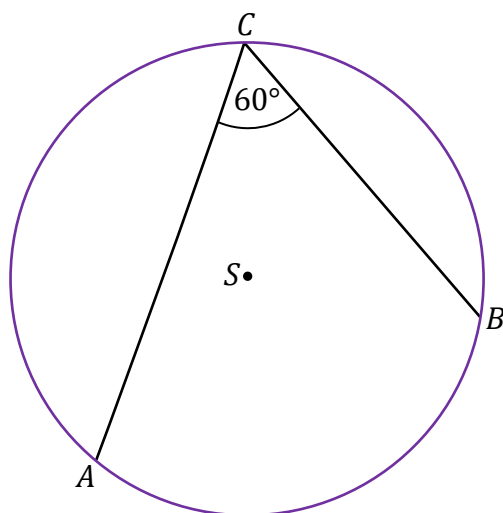


Oblicz pole trapezu $ABCD$. Zapisz obliczenia.





Miara kąta wpisanego ACB jest równa 60° (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość łuku AB , na którym oparty jest kąt wpisany ACB , jest równa

- A.** 2π **B.** 4π **C.** 6π **D.** 12π

Brudnopis

Zadanie 23. (0–1)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są cztery okręgi: o_1 , o_2 , o_3 , o_4 , o równaniach:

$$o_1: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$$

$$o_2: (x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

$$o_3: (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$$

$$o_4: (x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 16$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Okręgiem, który nie ma żadnego punktu wspólnego z osiami układu współrzędnych (x, y) , jest

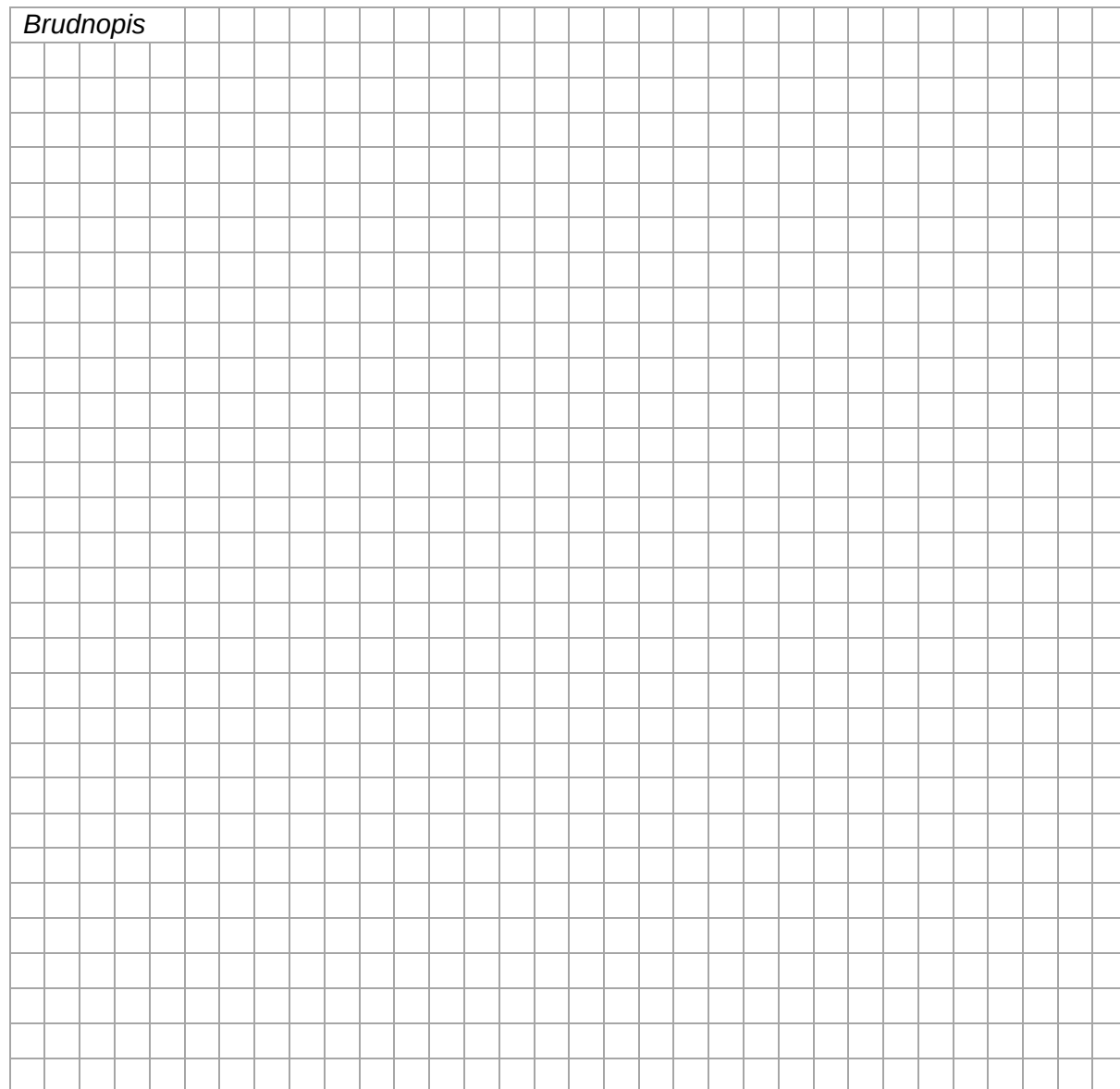
A. o_1

B. o_2

C. o_3

D. o_4

Brudnopis

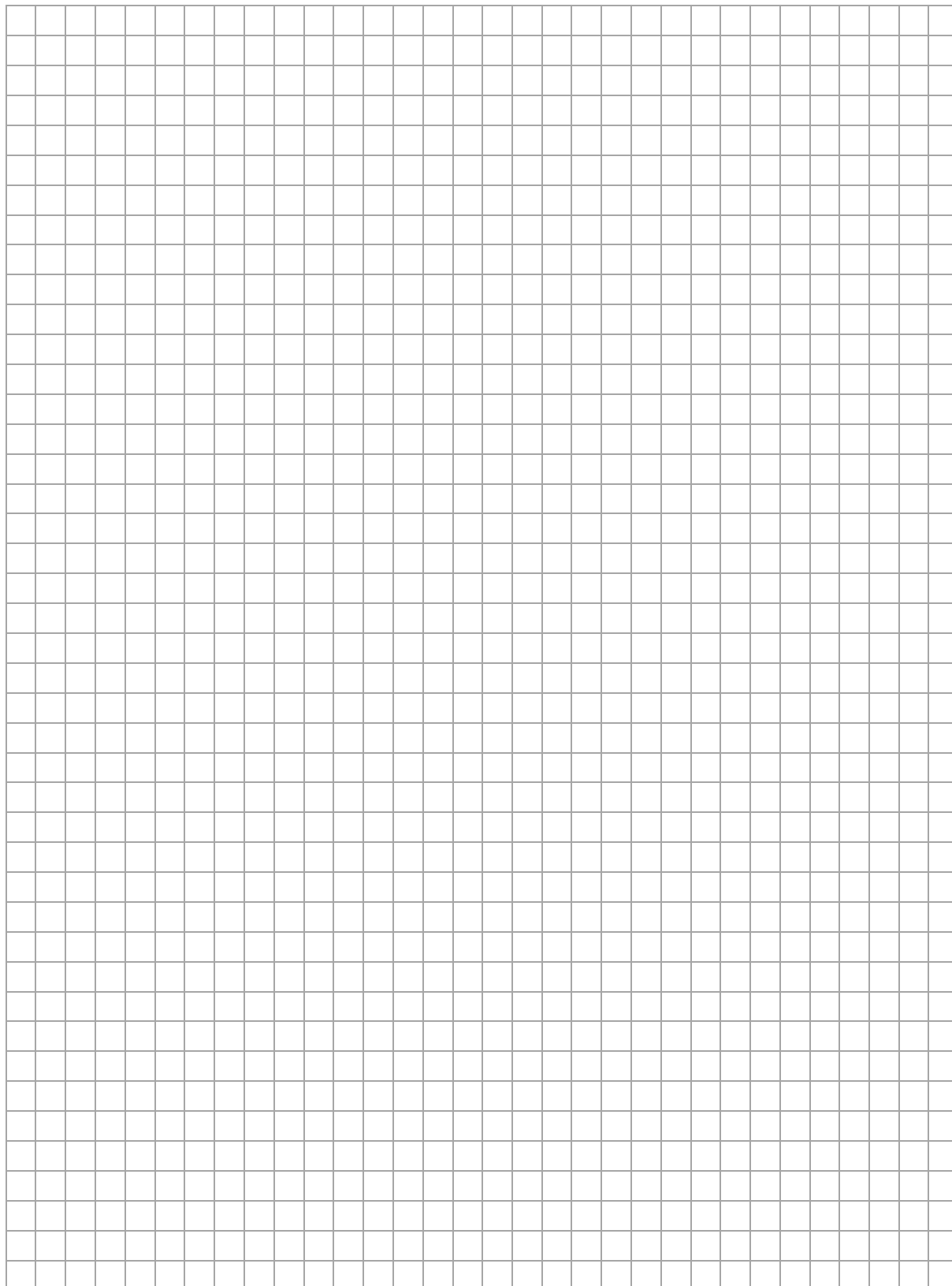


Zadanie 26. (0–2)

Objętość stożka o wysokości 2 jest równa 8π .

26.**0–1–2**

Oblicz miarę kąta rozwarcia tego stożka. Zapisz obliczenia.



Zadanie 27. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych nieparzystych, w których zapisie dziesiętnym występują wyłącznie cyfry 0, 1, 2, 3 (np. 12 303, 11 111), jest

A. 32

B. 384

C. 512

D. 576

Brudnopis

Zadanie 28. (0–2)

Dane są dwa zbiory: $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ oraz $D = \{7, 8, 9, 10\}$.

Losujemy jedną liczbę ze zbioru C , a następnie losujemy jedną liczbę ze zbioru D .

28.

0-1-2

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że wylosujemy liczby, których iloczyn będzie podzielny przez 4. Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

29.	0-1-2

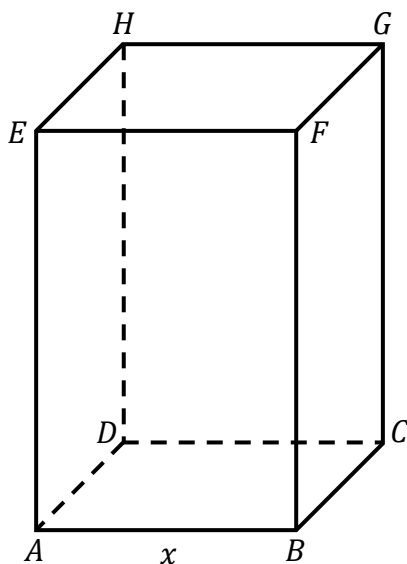
Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe.

- Brudnopis*

Zadanie 30. (0–4)

Rozważamy wszystkie prostopadłościany $ABCDEFGH$, w których krawędź AE jest 3 razy dłuższa od krawędzi AB , a suma długości wszystkich dwunastu krawędzi prostopadłościanu jest równa 48 (zobacz rysunek).

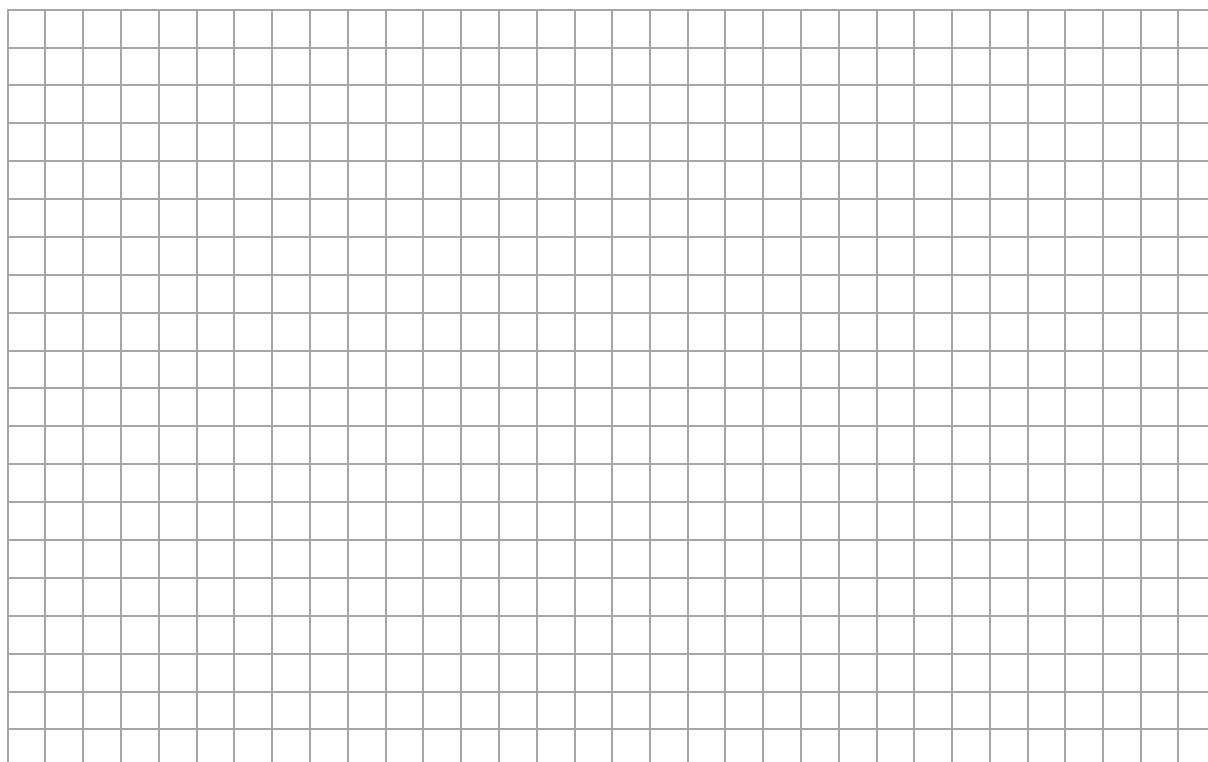
Niech $P(x)$ oznacza funkcję pola powierzchni całkowitej takiego prostopadłościanu w zależności od długości x krawędzi AB .

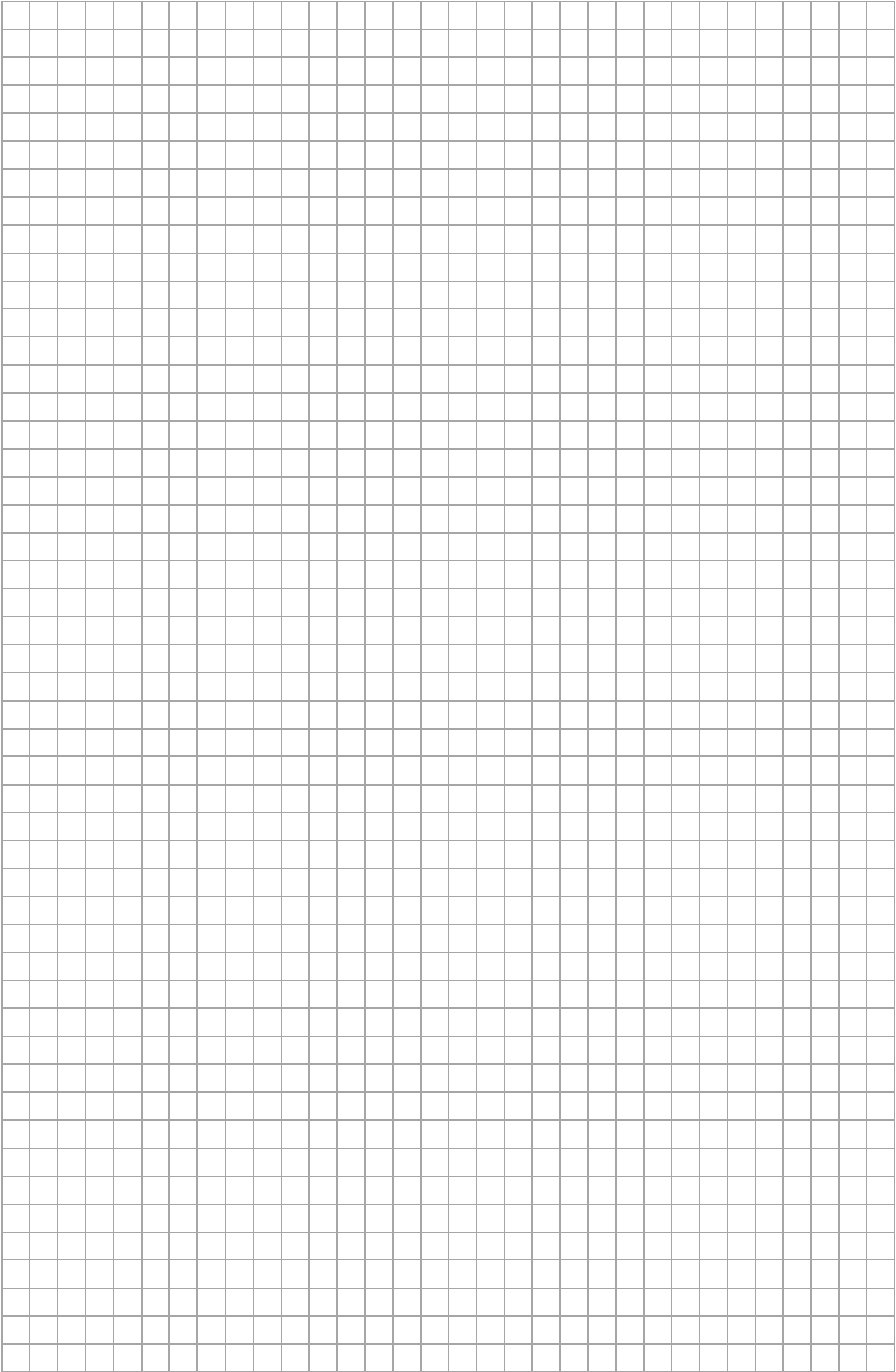


30.

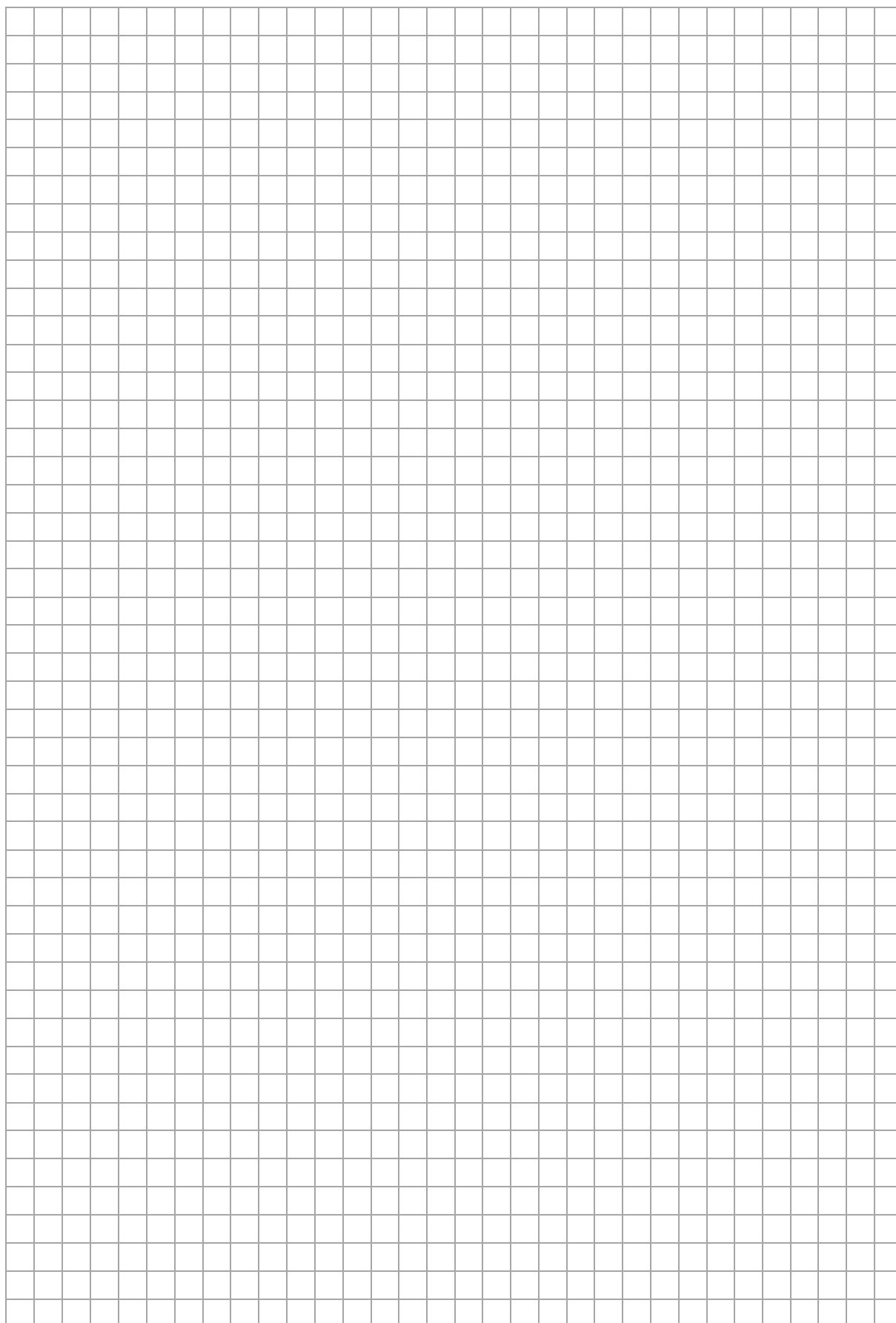
0–1–
2–3–4

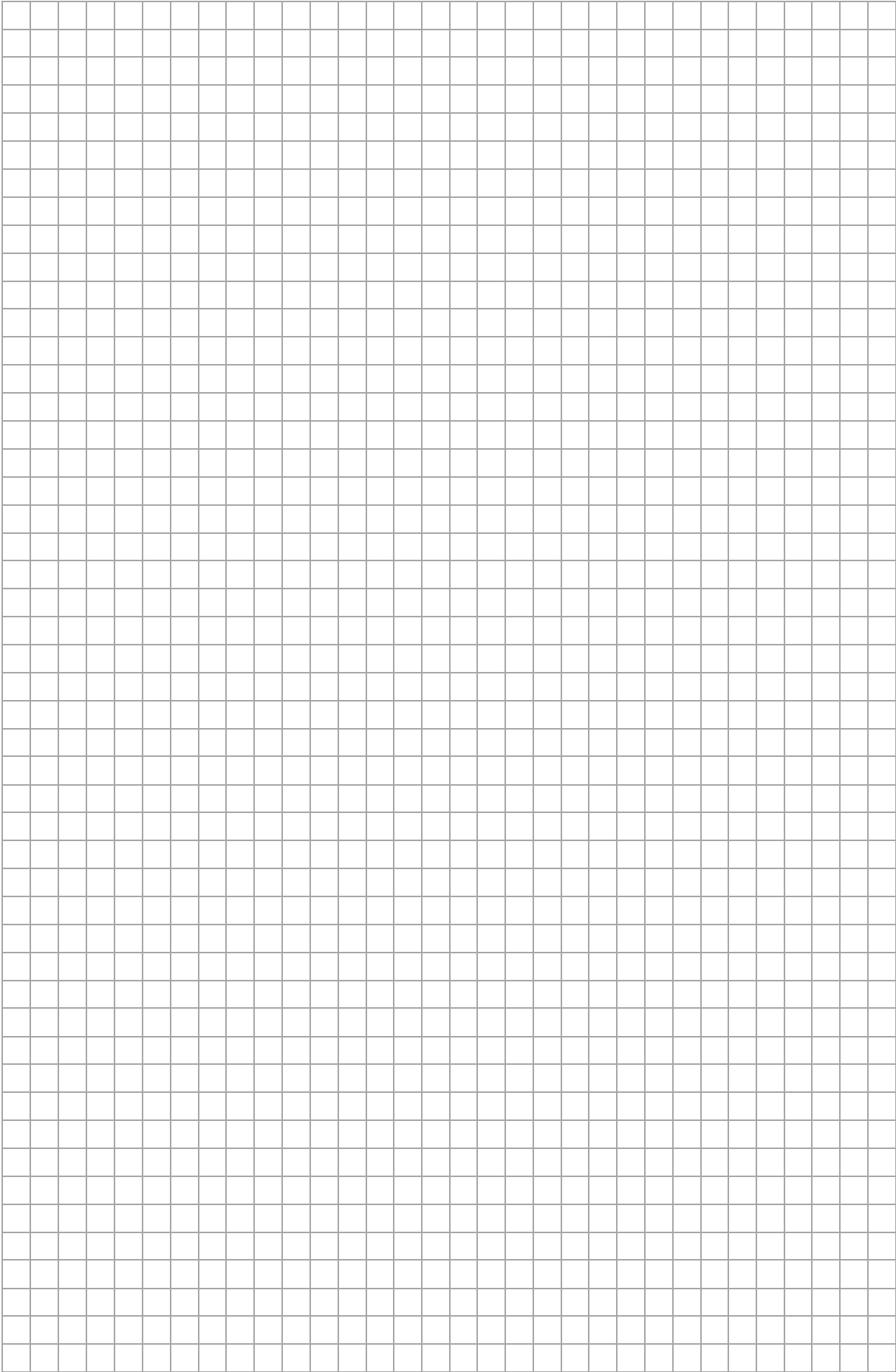
Wyznacz wzór i dziedzinę funkcji P . Oblicz długość x krawędzi AB tego z rozważanych prostopadłościanów, którego pole powierzchni całkowitej jest największe. Zapisz obliczenia.





BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)





MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Formuła 2023



MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Formuła 2023



MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Formuła 2023



<i>Rodzaj dokumentu:</i>	Zasady oceniania rozwiązań zadań
<i>Egzamin:</i>	Egzamin maturalny TEST DIAGNOSTYCZNY
<i>Przedmiot:</i>	Matematyka
<i>Poziom:</i>	Poziom podstawowy
<i>Formy arkusza:</i>	MMAP-P0-100, MMAP-P0-200, MMAP-P0-300, MMAP-P0-400, MMAP-P0-700, MMAP-P0-Q00, MMAP-P0-K00, MMAU-P0-100
<i>Termin egzaminu:</i>	6 grudnia 2024 r.
<i>Data publikacji dokumentu:</i>	11 grudnia 2024 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże zadanie i otrzyma poprawny wynik, lecz w końcowym zapisie przekształca ten wynik i popełnia przy tym błąd, to może uzyskać maksymalną liczbę punktów.
3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Uwaga:

Gdy wymaganie egzaminacyjne dotyczy treści z II etapu edukacyjnego, dopisano „SP”.

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania określone w podstawie programowej ¹	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania typu: $ x + 4 = 5$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: I.4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

¹ Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz.U. z 2024 r. poz. 1019).

Zadanie 3. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: I.2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych [...]; I.4) stosuje [...] prawa działań na potęgach [...].

Zasady oceniania

2 pkt – przekształcenie wyrażenia $2^{100} + 4^{49} + 16^{24}$ do postaci $21 \cdot n$, gdzie n jest liczbą naturalną, np.: $2^{96} \cdot 21$, $4^{48} \cdot 21$.

1 pkt – przekształcenie wyrażenia $2^{100} + 4^{49} + 16^{24}$ do postaci $2^{100} + 2^{98} + 2^{96}$
ALBO

– przekształcenie wyrażenia $2^{100} + 4^{49} + 16^{24}$ do postaci $4^{50} + 4^{49} + 4^{48}$,
ALBO

– przekształcenie wyrażenia $2^{100} + 4^{49} + 16^{24}$ do postaci $16^{25} + 16^{24} \cdot 4 + 16^{24}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania**Sposób I**

Korzystamy z własności działań na potęgach i otrzymujemy:

$$2^{100} + 4^{49} + 16^{24} = 2^{100} + (2^2)^{49} + (2^4)^{24} = 2^{100} + 2^{98} + 2^{96}$$

Wylączamy wspólny czynnik przed nawias

$$2^{100} + 2^{98} + 2^{96} = 2^{96} \cdot (2^4 + 2^2 + 1) = 2^{96} \cdot 21$$

Liczba 2^{96} jest liczbą całkowitą, zatem liczba $2^{100} + 4^{49} + 16^{24}$ jest podzielna przez 21.

Sposób II

Korzystamy z własności działań na potęgach i otrzymujemy:

$$2^{100} + 4^{49} + 16^{24} = (2^2)^{50} + 4^{49} + (4^2)^{24} = 4^{50} + 4^{49} + 4^{48}$$

Wylączamy wspólny czynnik przed nawias

$$4^{50} + 4^{49} + 4^{48} = 4^{48} \cdot (4^2 + 4 + 1) = 4^{48} \cdot 21$$

Liczba 4^{48} jest liczbą całkowitą, zatem liczba $2^{100} + 4^{49} + 16^{24}$ jest podzielna przez 21.

Sposób III

Korzystamy z własności działań na potęgach i otrzymujemy:

$$2^{100} + 4^{49} + 16^{24} = (2^4)^{25} + (4^2)^{24} \cdot 4 + 16^{24} = 16^{25} + 16^{24} \cdot 4 + 16^{24}$$

Wylączamy wspólny czynnik przed nawias

$$16^{25} + 16^{24} \cdot 4 + 16^{24} = 16^{24} \cdot (16 + 4 + 1) = 16^{24} \cdot 21$$

Liczba 16^{24} jest liczbą całkowitą, zatem liczba $2^{100} + 4^{49} + 16^{24}$ jest podzielna przez 21.

Zadanie 4. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.9) [...] posługuje się wzorami na logarytm iloczynu [...] i logarytm potęgi.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 5. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 2. Używanie języka matematycznego do tworzenia tekstów matematycznych, w tym do opisu prowadzonych rozumowań i uzasadniania wniosków, a także do przedstawiania danych.	Zdający: I.8) wykorzystuje własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych, zysków z lokat i kosztów kredytów.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 6. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: II.4) [...] dzieli wyrażenia wymierne.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 7. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IV.1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 8. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny, w tym np. przekształca równoważnie równanie $\frac{5}{x+1} = \frac{x+3}{2x-1}$; III.4) rozwiązuje równania [...] kwadratowe. SP VI. Równania z jedną niewiadomą. 3) rozwiązuje równania, które po prostych przekształceniach wyrażeń algebraicznych sprowadzają się do równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody **oraz** zapisanie założenia: $x \neq 1$, **oraz** poprawny wynik: $x = -6$.

2 pkt – przekształcenie równania $\frac{x+3}{x-1} = \frac{x}{2x-2}$ do równania liniowego, np.

$2(x+3) = x$, **oraz** rozwiązanie tego równania: $x = -6$
 ALBO

– przekształcenie równania $\frac{x+3}{x-1} = \frac{x}{2x-2}$ do równania kwadratowego, np.

$(x+3)(2x-2) = x(x-1)$, **oraz** rozwiązanie tego równania:
 $x = -6$ oraz $x = 1$,
 ALBO

– przekształcenie równania $\frac{x+3}{x-1} = \frac{x}{2x-2}$ do równania liniowego, np.

$2(x+3) = x$, **oraz** zapisanie założenia: $x \neq 1$,
 ALBO

– przekształcenie równania $\frac{x+3}{x-1} = \frac{x}{2x-2}$ do równania kwadratowego, np.

$(x+3)(2x-2) = x(x-1)$, **oraz** zapisanie założenia: $x \neq 1$.

1 pkt – przekształcenie równania $\frac{x+3}{x-1} = \frac{x}{2x-2}$ do równania liniowego, np.

$2(x+3) = x$
 ALBO

– przekształcenie równania $\frac{x+3}{x-1} = \frac{x}{2x-2}$ do równania kwadratowego, np.

$(x+3)(2x-2) = x(x-1)$,
 ALBO

– zapisanie założenia: $x \neq 1$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający stosuje metodę analizy starożytnych i nie zapisze założenia, ale uwzględni je w końcowej odpowiedzi, to może otrzymać **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Każde z wyrażeń: $\frac{x+3}{x-1}$, $\frac{x}{2x-2}$ ma sens liczbowy dla $x \neq 1$.

Przekształcamy równanie równoważnie:

$$\frac{x+3}{x-1} = \frac{x}{2x-2} \quad / \cdot 2(x-1), \text{ gdzie } x \neq 1$$
$$2(x+3) = x, \text{ gdzie } x \neq 1$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie liniowe:

$$2x + 6 = x$$
$$x = -6$$

Rozwiązaniem równania $\frac{x+3}{x-1} = \frac{x}{2x-2}$ jest liczba (-6) .

Sposób II

Każde z wyrażeń: $\frac{x+3}{x-1}$, $\frac{x}{2x-2}$ ma sens liczbowy dla $x \neq 1$.

Przekształcamy równanie równoważnie:

$$\frac{x+3}{x-1} = \frac{x}{2x-2}$$
$$(x+3)(2x-2) = x(x-1), \text{ gdzie } x \neq 1$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe:

$$2x^2 - 2x + 6x - 6 = x^2 - x$$
$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

Obliczamy wyróżnik trójmianu $x^2 + 5x - 6$:

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 49$$

Stąd

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = -6$$
$$x_2 = \frac{-5 + \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = 1$$

Wobec założenia $x \neq 1$ jedynym rozwiązaniem równania $\frac{x+3}{x-1} = \frac{x}{2x-2}$ jest liczba (-6) .

Zadanie 9. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.4) rozwiązuje [...] nierówności kwadratowe.

Zasady oceniania

2 pkt – spełnienie warunku określonego w zasadach oceniania za 1 pkt **oraz** zapisanie zbioru rozwiązań nierówności: $x \in [-1, 7]$

ALBO

– spełnienie warunku określonego w zasadach oceniania za 1 pkt **oraz** przedstawienie zbioru rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.

1 pkt – obliczenie lub podanie pierwiastków trójmianu kwadratowego $x^2 - 6x - 7$:
 $x_1 = -1$ oraz $x_2 = 7$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający, obliczając pierwiastki trójmianu $x^2 - 6x - 7$, popełni błędy (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionych błędów zapisze zbiór rozwiązań nierówności, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego w przypadku, gdy błędnie obliczony przez zdającego wyróżnik Δ jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający rozpatruje inny niż podany w zadaniu trójmian kwadratowy, który nie wynika z błędu przekształcenia (np. $x^2 - 6x$), i w konsekwencji rozpatruje inną nierówność (np. $x^2 - 6x \leq 0$), to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
4. Akceptowane jest zapisanie pierwiastków trójmianu w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi.
5. Jeżeli zdający poda zbiór rozwiązań w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów i jednocześnie zapisze niewłaściwy przedział jako zbiór rozwiązań (np. $x \in (-1, 7)$), to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $[7, -1]$, to otrzymuje **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zapisujemy nierówność w postaci $x^2 - 6x - 7 \leq 0$ i obliczamy miejsca zerowe funkcji $y = x^2 - 6x - 7$.

Obliczamy wyróżnik trójmianu $x^2 - 6x - 7$:

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 64$$

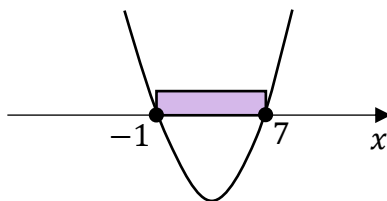
Stąd

$$x_1 = \frac{-(-6) - \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = -1$$

$$x_2 = \frac{-(-6) + \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = 7$$

Szkicujemy wykres funkcji $y = x^2 - 6x - 7$.

Odczytujemy argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości niedodatnie.



Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $[-1, 7]$.

Zadanie 10. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów [...].	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, [...] przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, [...] argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane.

Zasady oceniania

- 4 pkt – zapisanie dokładnie czterech poprawnych odpowiedzi.
 3 pkt – zapisanie dokładnie trzech poprawnych odpowiedzi.
 2 pkt – zapisanie dokładnie dwóch poprawnych odpowiedzi.
 1 pkt – zapisanie dokładnie jednej poprawnej odpowiedzi.
 0 pkt – brak spełnienia powyższych kryteriów.

Rozwiązanie

1. Dziedziną funkcji f jest przedział $(-4, 4]$.
2. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $[-1, 3]$.
3. Zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne, jest przedział $(1, 3)$.
4. Zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje największą wartość, jest przedział $(-4, -2]$.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej przy zachowaniu poprawnych krańców przedziału, np. zapisze, że dziedziną funkcji f jest przedział $[4, -4)$, to otrzymuje **1 punkt** za tak zapisaną odpowiedź.

Zadanie 11. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów [...].	Zdający: V.6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie lub o jej własnościach; V.11) wykorzystuje własności funkcji liniowej [...] do interpretacji zagadnień geometrycznych [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

PF

Zadanie 12.1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: V.4) odczytuje [...] przedziały monotoniczności [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 12.2. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

Zasady oceniania

2 pkt – wybranie dwóch odpowiedzi, z których obie są poprawne.

1 pkt – wybranie jednej lub dwóch odpowiedzi, z których jedna jest poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Uwaga:

Jeżeli zdający wybierze trzy lub więcej odpowiedzi, to otrzymuje **0 punktów**.

Rozwiązanie

BD

Zadanie 12.3. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: V.12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji [...] $y = f(x) + b$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

FP

Zadanie 13. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

FP

Zadanie 14. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym; VI.4) sprawdza, czy dany ciąg jest [...] geometryczny.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

FP

Zadanie 15. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.7) wykorzystuje własności ciągów [...] arytmetycznych [...] do rozwiązywania zadań [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 16. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.6) stosuje wzór na n -ty wyraz [...] ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 17.1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus [...] dla kątów od 0° do 180° [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 17.2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.1) wykorzystuje definicje funkcji [...] tangens dla kątów od 0° do 180° [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 18. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.2) korzysta z wzorów $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 19. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VIII.8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów. SP IX. Wielokąty. 2) stosuje wzory na pole trójkąta, [...] trapezu, a także do wyznaczania długości odcinków [...].

Zasady oceniania4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $P_{ABCD} = 22,14$.3 pkt – obliczenie długości odcinków AD oraz CD : $|AD| = 3,6$ oraz $|CD| = 4,8$
ALBO– obliczenie pól trójkątów ABC oraz CAD : $P_{ABC} = 13,5$ oraz $P_{CAD} = 8,64$.2 pkt – obliczenie długości odcinka AD : $|AD| = 3,6$
ALBO– obliczenie długości odcinka CD : $|CD| = 4,8$,
ALBO– obliczenie pola trójkąta ABC : $P_{ABC} = 13,5$.1 pkt – obliczenie długości odcinka BC : $|BC| = 4,5$
ALBO– zapisanie równania wynikającego z podobieństwa trójkątów ABC i CAD , np.

$$\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|},$$

ALBO

- zapisanie, że trójkąt ABC jest podobny do trójkąta CAD w skali $k = \frac{7,5}{6}$,
ALBO
- zapisanie, że trójkąt CAD jest podobny do trójkąta ABC w skali $k = \frac{6}{7,5}$,
ALBO
- zapisanie, że $|\angle BAC| = |\angle ACD|$ oraz obliczenie cosinusa kąta BAC :
 $\cos|\angle BAC| = \frac{6}{7,5}$,
ALBO
- zapisanie zależności między wysokością AD trapezu a długością ramienia BC , np.
 $\frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot |AD| = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot |BC|$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:

- a) zastosowanie niepoprawnej definicji jednej funkcji trygonometrycznej
- b) błędne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa
- c) zastosowanie niepoprawnej tożsamości $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$
- d) błędne zastosowanie podobieństwa trójkątów (zapisanie błędnej proporcji),

i rozwiązanie zostanie doprowadzone konsekwentnie do końca, to zdający może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Jeżeli zdający popełni więcej niż jeden z wymienionych błędów a)–d), to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Trójkąty ABC oraz CAD są podobne na podstawie cechy kąt – kąt – kąt podobieństwa trójkątów. Stąd

$$\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|}$$

$$\frac{|CD|}{6} = \frac{6}{7,5}$$

$$|CD| = 4,8$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa i obliczamy długość odcinka AD :

$$|AD|^2 = |AC|^2 - |CD|^2$$

$$|AD|^2 = 6^2 - 4,8^2$$

$$|AD|^2 = 12,96$$

$$|AD| = 3,6$$

Obliczamy pole trapezu $ABCD$:

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (|AB| + |CD|) \cdot |AD| = \frac{1}{2} \cdot (7,5 + 4,8) \cdot 3,6 = 22,14$$

Sposób II

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa i obliczamy długość odcinka BC :

$$|BC|^2 = |AB|^2 - |AC|^2$$

$$|BC|^2 = 7,5^2 - 6^2$$

$$|BC|^2 = 20,25$$

$$|BC| = 4,5$$

Obliczamy pole trójkąta ABC :

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4,5 = 13,5$$

Trójkąt CAD jest podobny do trójkąta ABC (na podstawie cechy kąt – kąt – kąt podobieństwa trójkątów) w skali $k = \frac{6}{7,5} = 0,8$.

Wykorzystujemy zależność między polami figur podobnych i obliczamy pole trójkąta CAD :

$$P_{CAD} = k^2 \cdot P_{ABC} = 0,8^2 \cdot 13,5 = 8,64$$

Obliczamy pole trapezu $ABCD$:

$$P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{CAD} = 13,5 + 8,64 = 22,14$$

Sposób III

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa i obliczamy długość odcinka BC :

$$|BC|^2 = |AB|^2 - |AC|^2$$

$$|BC|^2 = 7,5^2 - 6^2$$

$$|BC|^2 = 20,25$$

$$|BC| = 4,5$$

Długość odcinka AD jest równa wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C .

Pole trójkąta ABC jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot |AD|$$

Ponadto pole trójkąta ABC można obliczyć jako połowę iloczynu długości przyprostokątnych:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4,5 = 13,5$$

Zatem

$$\frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot |AD| = 13,5$$

$$|AD| = 3,6$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa i obliczamy długość odcinka CD :

$$|CD|^2 = |AC|^2 - |AD|^2$$

$$|CD|^2 = 6^2 - 3,6^2$$

$$|CD|^2 = 23,04$$

$$|CD| = 4,8$$

Obliczamy pole trapezu $ABCD$:

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (|AB| + |CD|) \cdot |AD| = \frac{1}{2} \cdot (7,5 + 4,8) \cdot 3,6 = 22,14$$

Sposób IV

Zauważmy, że $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle BAC|$.

$$\text{Zatem } \cos|\sphericalangle ACD| = \cos|\sphericalangle BAC| = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{6}{7,5} = 0,8.$$

$$\text{Jednocześnie } \cos|\sphericalangle ACD| = \frac{|CD|}{|AC|} = \frac{|CD|}{6}.$$

Stąd

$$\frac{|CD|}{6} = 0,8$$

więc

$$|CD| = 4,8$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa i obliczamy długość odcinka AD :

$$|AD|^2 = |AC|^2 - |CD|^2$$

$$|AD|^2 = 6^2 - 4,8^2$$

$$|AD|^2 = 12,96$$

$$|AD| = 3,6$$

Obliczamy pole trapezu $ABCD$:

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (|AB| + |CD|) \cdot |AD| = \frac{1}{2} \cdot (7,5 + 4,8) \cdot 3,6 = 22,14$$

Zadanie 20. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych; VIII.6) stosuje wzory na [...] długość łuku okręgu.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 21. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: IX.3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 22. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IX.2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej [...], w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich, jak np. [...] równoległość do innej prostej).

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 23. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.4) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 24. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: X.3) rozpoznaje w [...] ostrosłupach [...] kąty między ścianami [...]; X.5) oblicza objętości [...] ostrosłupów, [...] również z wykorzystaniem trygonometrii.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 25. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście [...] matematycznym [...].	Zdający: X.5) oblicza objętości [...] graniastosłupów [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 26. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: X.4) rozpoznaje [...] w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów; X.5) oblicza objętości [...] stożka [...].

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 120° .

1 pkt – obliczenie kwadratu promienia podstawy stożka: $r^2 = 12$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Ze wzoru na objętość stożka otrzymujemy:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot H$$

$$8\pi = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 2$$

$$r^2 = 12$$

$$r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Niech α oznacza połowę miary kąta rozwarcia stożka. Wtedy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Stąd $\alpha = 60^\circ$.

Zatem kąt rozwarcia stożka ma miarę 120° .

Zadanie 27. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście [...] matematycznym [...].	Zdający: XI.2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 28. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $P(A) = \frac{11}{24}$.

1 pkt – wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych *LUB* obliczenie/podanie liczby tych zdarzeń: $|\Omega| = 6 \cdot 4$, *LUB* sporządzenie tabeli o 24 polach odpowiadających zdarzeniom elementarnym, *LUB* sporządzenie pełnego drzewa stochastycznego *ALBO*

– wypisanie (lub zaznaczenie w tabeli) wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu *A* i niewypisanie żadnego niewłaściwego, *ALBO*

– podanie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu *A*: $|A| = 11$, o ile nie zostały zliczone błędne pary, *ALBO*

– sporządzenie fragmentu drzewa stochastycznego, który zawiera wszystkie gałęzie sprzyjające zdarzeniu *A*, **oraz** zapisanie prawdopodobieństwa na co najmniej jednym odcinku każdego z etapów doświadczenia, *ALBO*

– podanie prawdopodobieństwa jednoelementowego zdarzenia (elementarnego): $\frac{1}{24}$, *ALBO*

– zapisanie tylko $P(A) = \frac{11}{24}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający zapisuje tylko liczby 11 lub 24 i z rozwiązania nie wynika znaczenie tych liczb, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie uporządkowane pary liczb (x, y) , gdzie $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ oraz $y \in \{7, 8, 9, 10\}$.

Liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych obliczamy z wykorzystaniem reguły mnożenia. Moc zbioru Ω jest równa $6 \cdot 4 = 24$.

Zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:

$(1, 8), (2, 8), (2, 10), (3, 8), (4, 7), (4, 8), (4, 9), (4, 10), (5, 8), (6, 8), (6, 10)$,
więc moc zbioru A jest równa 11.

Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe $\frac{11}{24}$.

Sposób II

W tabeli literą $\mathcal{A}$ zaznaczamy zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A (pary liczb, których iloczyn jest podzielny przez 4).

$\begin{smallmatrix} C \\ D \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6
7				$\mathcal{A}$		
8	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$
9				$\mathcal{A}$		
10		$\mathcal{A}$		$\mathcal{A}$		$\mathcal{A}$

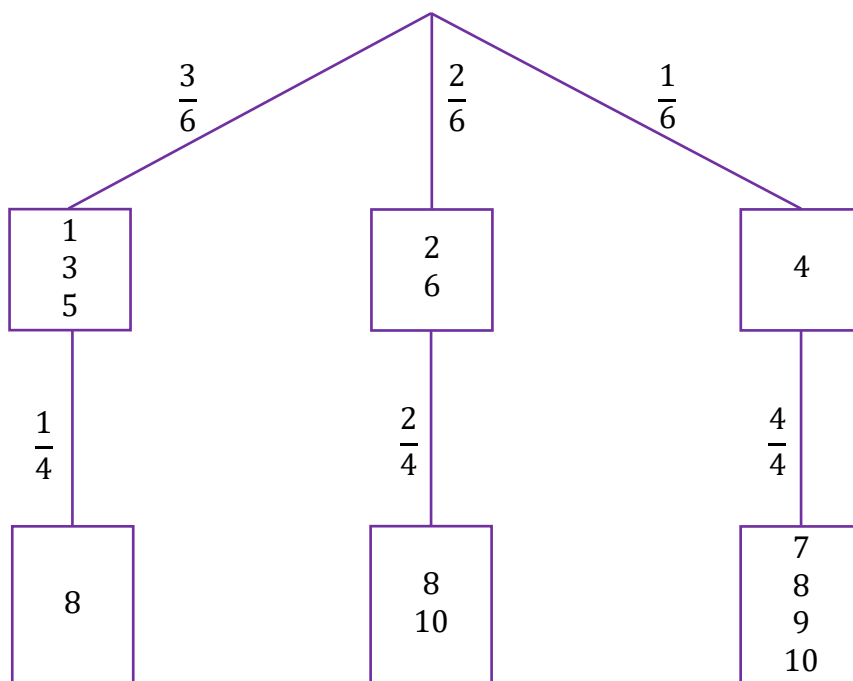
Moc zbioru Ω jest równa 24.

Zdarzeń sprzyjających wylosowaniu liczb, których iloczyn jest podzielny przez 4, jest 11.

Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe $\frac{11}{24}$.

Sposób III (drzewo stochastyczne)

Rysujemy fragment drzewa stochastycznego rozważanego doświadczenia z uwzględnieniem wszystkich istotnych gałęzi.



Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{4} = \frac{11}{24}$$

Zadanie 29. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: XII.2) oblicza średnią arytmetyczną [...], znajduje medianę [...].

Zasady oceniania

2 pkt – zapisanie dokładnie dwóch poprawnych odpowiedzi.

1 pkt – zapisanie dokładnie jednej poprawnej odpowiedzi.

0 pkt – brak spełnienia powyższych kryteriów.

Uwaga:

Nie akceptuje się zaokrągleń otrzymanych wyników.

Rozwiązanie

- Średnia arytmetyczna liczby przeczytanych książek w tej grupie uczniów jest równa 6,38.
- Mediana liczby przeczytanych książek w tej grupie uczniów jest równa 6,5.

Zadanie 30. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XIII) rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawne wyniki, np.:

$$P(x) = -26x^2 + 96x \text{ oraz } D = (0, 3) \text{ oraz } x = \frac{24}{13}.$$

3 pkt – zapisanie poprawnego wzoru na pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu $ABCDEFGH$ w zależności od zmiennej x **oraz** wyznaczenie dziedziny D tej funkcji, np. $P(x) = -26x^2 + 96x$ oraz $D = (0, 3)$

ALBO

– zapisanie poprawnego wzoru na pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu $ABCDEFGH$ w zależności od zmiennej x (bez wyznaczonej dziedziny funkcji P) **oraz** prawidłowe obliczenie pierwszej współrzędnej wierzchołka wykresu funkcji P , np. $P(x) = -26x^2 + 96x$ oraz $x = \frac{24}{13}$.

2 pkt – zapisanie poprawnego wzoru na pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu $ABCDEFGH$ w zależności od zmiennej x (bez wyznaczonej dziedziny funkcji P), np. $P(x) = -26x^2 + 96x$

ALBO

– zapisanie zależności między długościami krawędzi AD i AB prostopadłościanu **oraz** wyznaczenie zakresu zmienności x , np. $4 \cdot x + 4 \cdot |AD| + 4 \cdot 3x = 48$ oraz $x \in (0, 3)$.

1 pkt – zapisanie zależności między długościami krawędzi AD i AB prostopadłościanu, np. $4 \cdot x + 4 \cdot |AD| + 4 \cdot 3x = 48$

ALBO

– wyznaczenie zakresu zmienności x : $x \in (0, 3)$.

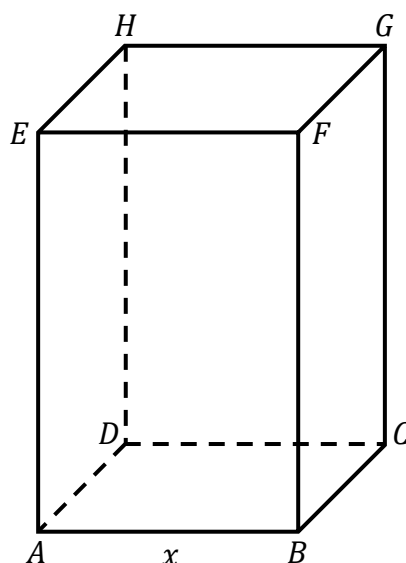
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisze poprawny wzór funkcji P zmiennej x oraz zapisze poprawną dziedzinę funkcji P , a następnie obliczy $P\left(\frac{24}{13}\right)$ oraz wartości funkcji P dla dwóch argumentów leżących symetrycznie względem prostej $x = \frac{24}{13}$, i nie odwoła się do symetrii wykresu funkcji kwadratowej, to otrzymuje **3 punkty** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający nie zapisze pola powierzchni całkowitej prostopadłościanu jako funkcji P zmiennej x , a jedynie obliczy wartości pola dla wybranych długości krawędzi i na tej podstawie wskazuje największą wartość pola, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.
3. Jeżeli zdający zamiast sumy długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu rozpatruje sumę obwodów wszystkich jego ścian i rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (za konsekwentne: wyznaczenie wzoru funkcji pola, dziedziny tej funkcji oraz obliczenie wartości x , dla której funkcja osiąga wartość największą).
4. Jeżeli zdający w wyniku popełnionych błędów otrzymuje funkcję pola, która jest funkcją kwadratową o dodatnim współczynniku przy x^2 , to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za zapisanie zależności między długościami krawędzi AD i AB prostopadłościanu oraz za wyznaczenie zakresu zmienności x).
5. Jeżeli zdający oblicza największą wartość funkcji P z wykorzystaniem rachunku różniczkowego i nie uzasadni, że w punkcie będącym miejscem zerowym pochodnej funkcji P jest największa wartość funkcji P , to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
 Za poprawne uzasadnienie, że w punkcie będącym miejscem zerowym pochodnej funkcji P jest największa wartość funkcji P , można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej (np. szkicuje wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznacza na rysunku, np. znakami „+” i „-”, znak pochodnej), **oraz**:
 – opisuje przedziały monotoniczności funkcji P (słownie lub graficznie – np. przy użyciu strzałek)
 LUB
 – zapisuje, że dla wyznaczonego miejsca zerowego pochodnej, funkcja P ma maksimum lokalne i jest to jednocześnie jej największa wartość,
 LUB
 – zapisuje, że dla wyznaczonego miejsca zerowego pochodnej, funkcja P ma maksimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Ponieważ $|AB| = x$, więc $|AE| = 3x$.

Suma długości wszystkich dwunastu krawędzi prostopadłościanu jest równa 48, zatem

$$4 \cdot |AB| + 4 \cdot |AD| + 4 \cdot |AE| = 48$$

$$|AB| + |AD| + |AE| = 12$$

$$x + |AD| + 3x = 12$$

$$|AD| = 12 - 4x$$

Pole P powierzchni całkowitej prostopadłościanu $ABCDEFGH$ jest równe

$$P = 2 \cdot (|AB| \cdot |AD| + |AB| \cdot |AE| + |AD| \cdot |AE|)$$

Ponieważ $|AB| = x$, $|AD| = 12 - 4x$, $|AE| = 3x$, więc wzór funkcji P zmiennej x ma postać

$$P(x) = 2 \cdot [x \cdot (12 - 4x) + x \cdot 3x + (12 - 4x) \cdot 3x]$$

$$P(x) = 2 \cdot (12x - 4x^2 + 3x^2 + 36x - 12x^2)$$

$$P(x) = 2 \cdot (-13x^2 + 48x)$$

$$P(x) = -26x^2 + 96x$$

Wyznaczamy dziedzinę funkcji P . Z warunków zadania wynika, że:

$$|AB| = x > 0 \text{ oraz } |AD| = 12 - 4x > 0 \text{ oraz } |AE| = 3x > 0$$

Zatem

$$x > 0 \text{ oraz } x < 3$$

Zmienna x może przyjmować wartości z przedziału $(0, 3)$.

Wykresem funkcji P jest fragment paraboli skierowanej ramionami do dołu. Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka tej paraboli:

$$p = \frac{-96}{2 \cdot (-26)} = \frac{24}{13} \in (0, 3)$$

Zatem funkcja P przyjmuje wartość największą dla argumentu $\frac{24}{13}$.

Spośród rozważanych prostopadłościanów największe pole powierzchni całkowitej ma ten, w którym $x = \frac{24}{13}$.

Matura próbna 2025

test diagnostyczny przed sesją maj 2025

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

PESEL

Miejsce na naklejkę.

Sprawdź, czy kod na naklejce to

M-100.

Jeżeli tak – przyklej naklejkę.

Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Symbol arkusza

MMA-P0-**100**-2503

DATA: **5 marca 2025 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:

☐ dostosowania zasad oceniania

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

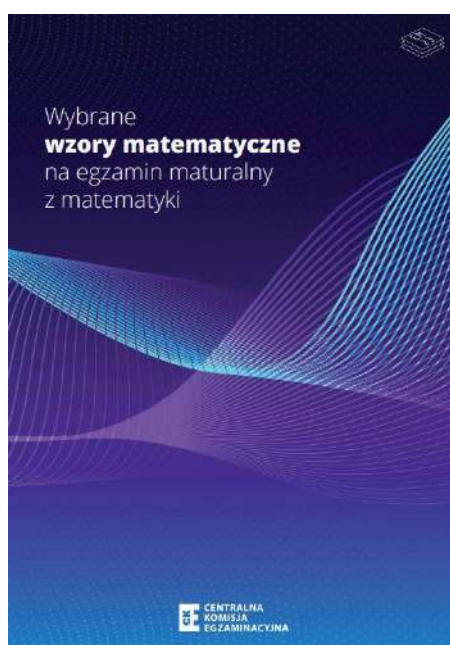
1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.





Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 27 stron (zadania 1–28). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Symbol  zamieszczony w nagłówku zadania oznacza, że rozwiązanie zadania zamkniętego musisz przenieść na kartę odpowiedzi. Ocenie podlegają wyłącznie odpowiedzi zaznaczone na karcie odpowiedzi.
4. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
5. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
6. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
7. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
8. Nie wpisuj żadnych znaków w tabelkach przeznaczonych dla egzaminatora. Tabelki umieszczone są na marginesie przy odpowiednich zadaniach.
9. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
10. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla i linijki oraz z kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



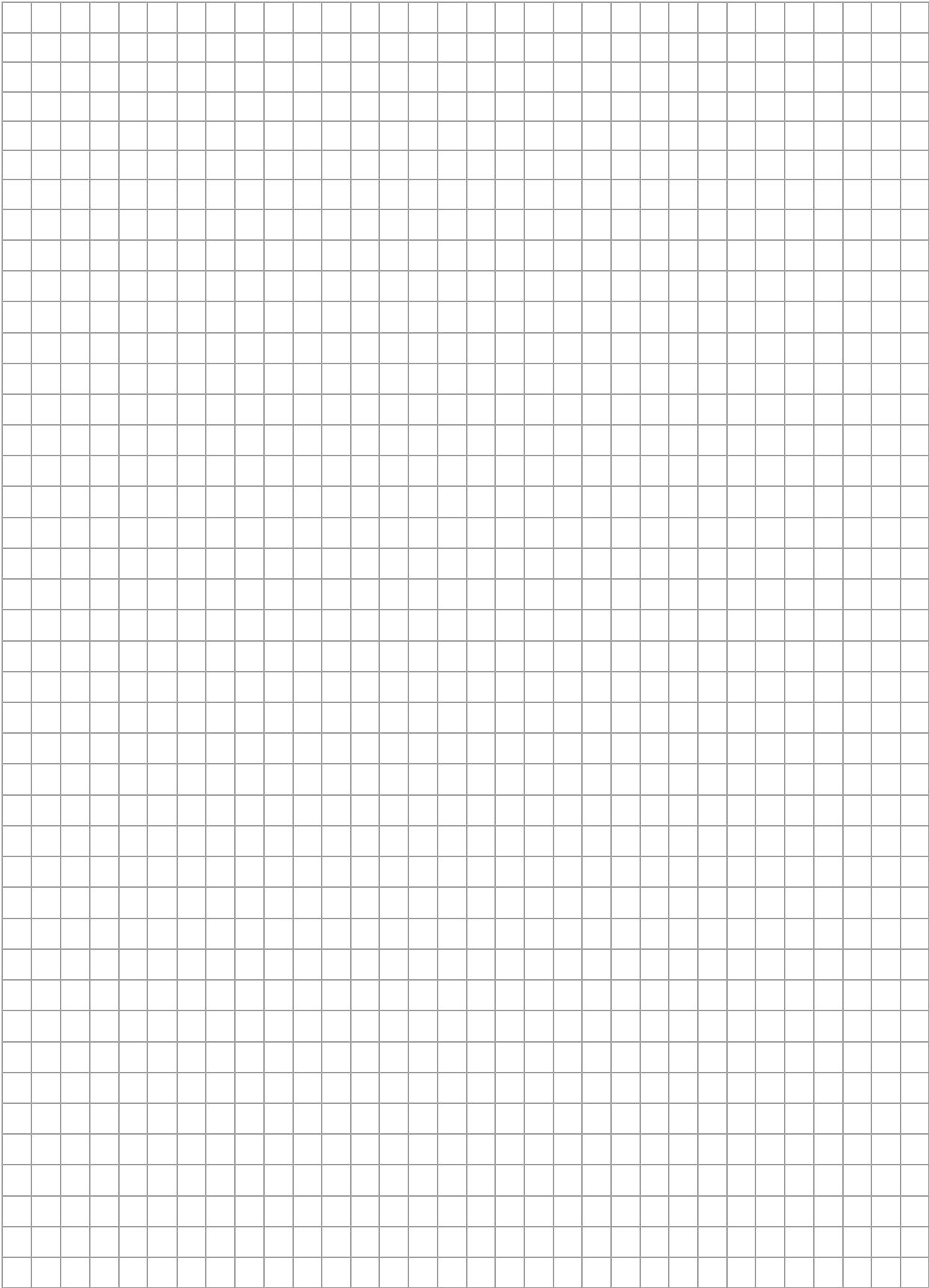
**Zadania egzaminacyjne są wydrukowane
na następnych stronach.**

Zadanie 3. (0–2)

Wykaż, że liczba $3^{94} + 9^{46} + 27^{30}$ jest podzielna przez 39.

3.

0–1–2



Zadanie 4. (0–1)

Dane jest równanie

$$\sqrt{4x^2 + 4x + 1} = 11$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Iloczyn wszystkich rzeczywistych rozwiązań tego równania jest równy

- A. (–5) B. 30 C. 5 D. (–30)

Brudnopis

Zadanie 5. (0–1) Dane są liczby a i b dla których spełnione są warunki: $a + b = 6$ oraz $a \cdot b = 4$.**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**Wartość wyrażenia $a^4 + b^4$ jest równa

- A. 1296 B. 1264 C. 864 D. 752

Brudnopis



Zadanie 8. (0–3)

Rozwiąż równanie

$$\frac{4x+1}{2x+1} = \frac{6x-3}{4x+2}$$

Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, equal-sized squares formed by thin gray lines. There are 20 columns and 20 rows of squares, creating a total area of 400 small squares. The grid covers the entire page except for a narrow white border around the edges.

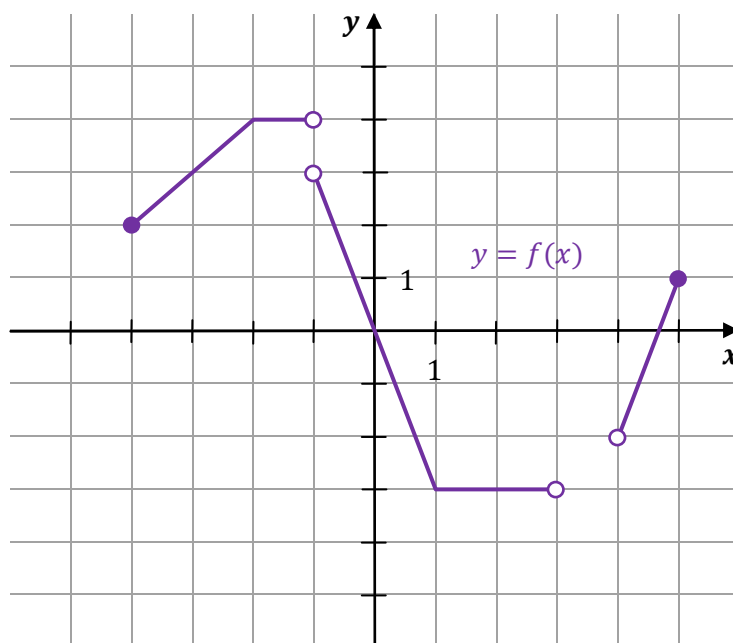
Zadanie 9. (0–2)**Rozwiąż nierówność**

$$3(x + 1)^2 \geq 4(x^2 + 3)$$

Zapisz obliczenia.**9.****0–1–2**

10.
0-1- 2-3-4

$$f(x) = \begin{cases} x + 6 & \text{dla } x \in [-4, -2] \\ 4 & \text{dla } x \in (-2, -1) \\ -3x & \text{dla } x \in (-1, 1] \\ -3 & \text{dla } x \in (1, 3) \\ 3x - 14 & \text{dla } x \in (4, 5] \end{cases}$$

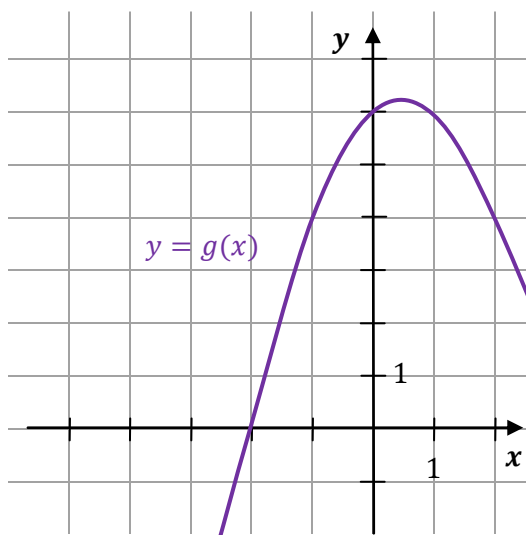


1. Dziedzina funkcji f jest przedział
2. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział
3. Zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą jest przedział
4. Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $f(x) \geq 3$ jest przedział

[illegible]

Zadanie 11.

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dana jest funkcja kwadratowa g określona dla każdej liczby rzeczywistej x . Jednym z miejsc zerowych funkcji g jest liczba (-2) , a także funkcja g przecina oś y w punkcie $(0, 6)$. Oś symetrii tej funkcji jest $x = \frac{1}{2}$.



Fragment wykresu funkcji $y = g(x)$ przedstawiono na rysunku powyżej.

Zadanie 11.1. (0–2)

Uzupełnij zdanie. Wybierz dwie właściwe odpowiedzi spośród podanych oznaczonych literami A-F i wpisz te litery w wy kropkowanych miejscach.

Wzór funkcji g można przedstawić w postaci oraz

- A.** $g(x) = -x^2 + x + 6$
B. $g(x) = -x^2 - x + 6$
C. $g(x) = -2x^2 + x + 6$
D. $g(x) = -(x - 2)(x + 3)$
E. $g(x) = -2(x + 2)(x - 3)$
F. $g(x) = -(x + 2)(x - 3)$

11.1.

0-1-2

7

[illegible]

Zadanie 11.2. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zbiorem wartości funkcji g jest przedział

- A.** $\left(-\infty, 6\frac{1}{2}\right]$ **B.** $[7, +\infty)$ **C.** $\left(-\infty, 6\frac{1}{4}\right]$ **D.** $(-\infty, 7]$

[illegible]

11.3.

0-1

Zadanie 11.3. (0–1)

Zapisz poniżej w postaci przedziału zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja g przyjmuje wartości większe od 4.

[illegible]

Zadanie 11.4. (0-1)

Funkcja kwadratowa h jest określona za pomocą funkcji g następująco: $h(x) = g(x + 3) - 2$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Największą wartość funkcja h przyjmuje dla argumentu

- A.** $x = -2\frac{1}{2}$ **B.** $x = -\frac{1}{4}$ **C.** $x = -\frac{1}{2}$ **D.** $x = -1\frac{1}{4}$

[illegible]

$$c_n = \begin{cases} c_1 = -3 \\ c_{n+1} = 2c_n + 3n - 5 \end{cases} \quad \text{dla ka\k{z}dej liczby naturalnej } n \geq 1$$

0-1

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednią liczbę w wy kropkowanym miejscu, aby zdanie było prawdziwe.

Suma pięciu początkowych wyrazów ciągu (c_n) jest równa

Brudnopis

Rozpatrujemy wszystkie liczby naturalne trzycyfrowe, które przy dzieleniu przez 7 dają resztę 2.

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Takich liczb jest

A.	128	oraz ich suma wynosi	1.	70144
B.	129		2.	70692
C.	130		3.	71240

Brudnopis

18.
0-1-2

Zadanie 18. (0–2)

Wyznacz równanie symetralnej odcinka $|AB|$ o punktach $A = (3, 2)$ oraz $B = (7, 8)$, przechodzącej przez punkt $C = (11, 1)$. Zapisz obliczenia.



Zadanie 19. (0–1)

Dane są proste k oraz l o równaniach:

$$k: y = |m - 2| \cdot x - 6m + 4 + (m - 3) \cdot x$$

$$l: y = (7 + m) \cdot x - 2m - 7$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Proste k i l są równoległe dla

A. $m \in \{-3, 2\}$

B. $m \in \{-4, 6\}$

C. $m \in \{-7, 2\}$

D. $m \in \{-8, 12\}$

Brudnopis

Zadanie 20. (0–1)

Dwa boki pewnego trójkąta mają długości 7 i 8 oraz cosinus kąta naprzeciwko trzeciego boku jest równy $\frac{11}{16}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Obwód tego trójkąta wynosi

A. 16

B. 21

C. 35

D. 37

Brudnopis

The diagram shows a circle with center O . A line segment AK is tangent to the circle at point K . A line segment AB is a chord. A line segment OB is a radius. A line segment OK is a radius. An angle of 60° is marked between the tangent line AK and the radius OK .

Długość odcinka $|BK|$ wynosi

- [illegible]



Zadanie 24. (0–4)

Kąt rozwarcia stożka ma miarę 60° a także jego objętość wynosi $9\sqrt{3}\pi$.

Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka. Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, equal-sized squares formed by thin gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wszystkich takich liczb jest dokładnie

- A.** 75 **B.** 96 **C.** 115 **D.** 134

[illegible]

Zadanie 26. (0–2)

Ze zbioru $K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy dwukrotnie ze zwracaniem po jednej liczbie.

26.

0-1-2

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że wartość bezwzględna sumy bądź różnicy wylosowanych liczb jest liczbą pierwszą. Zapisz obliczenia.

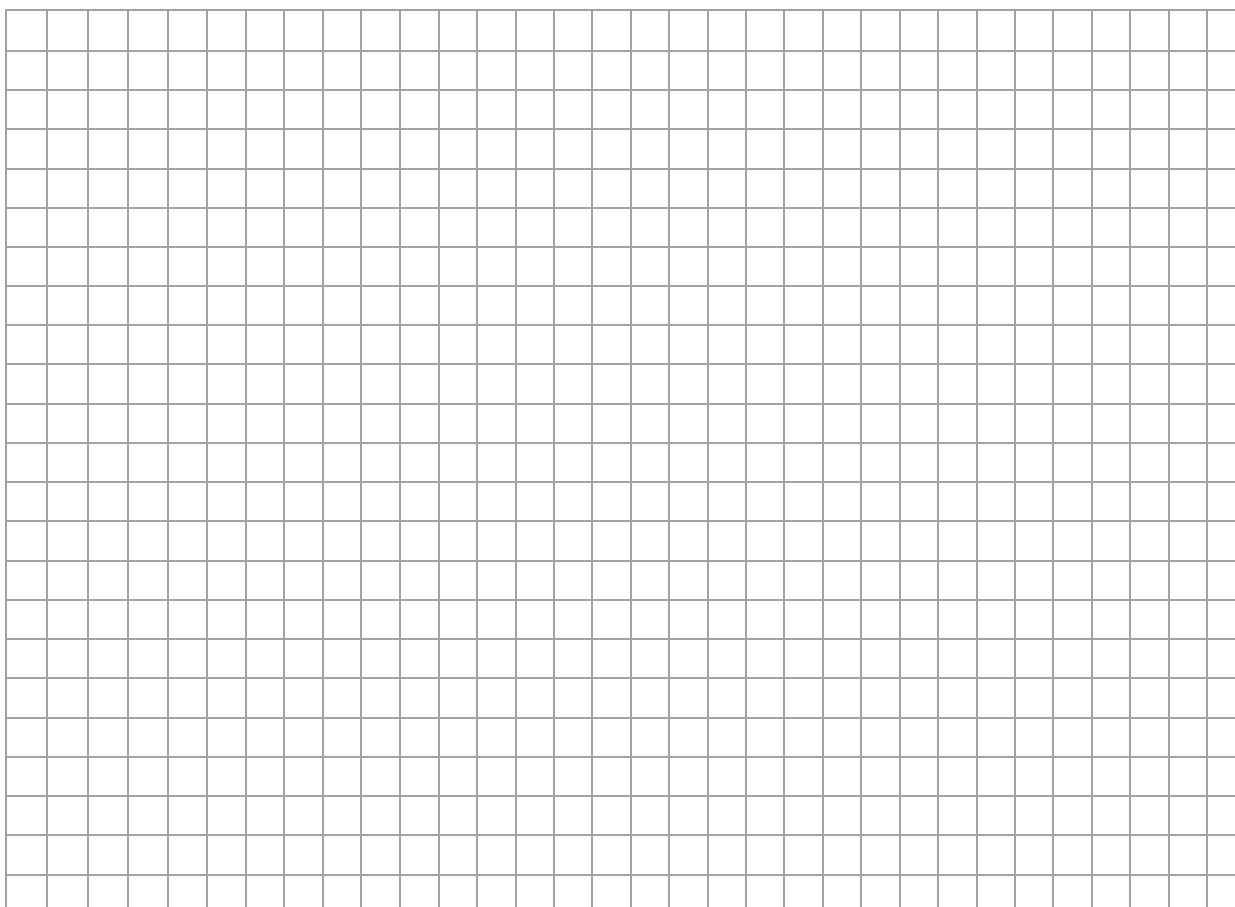
This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, equal-sized squares formed by thin gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

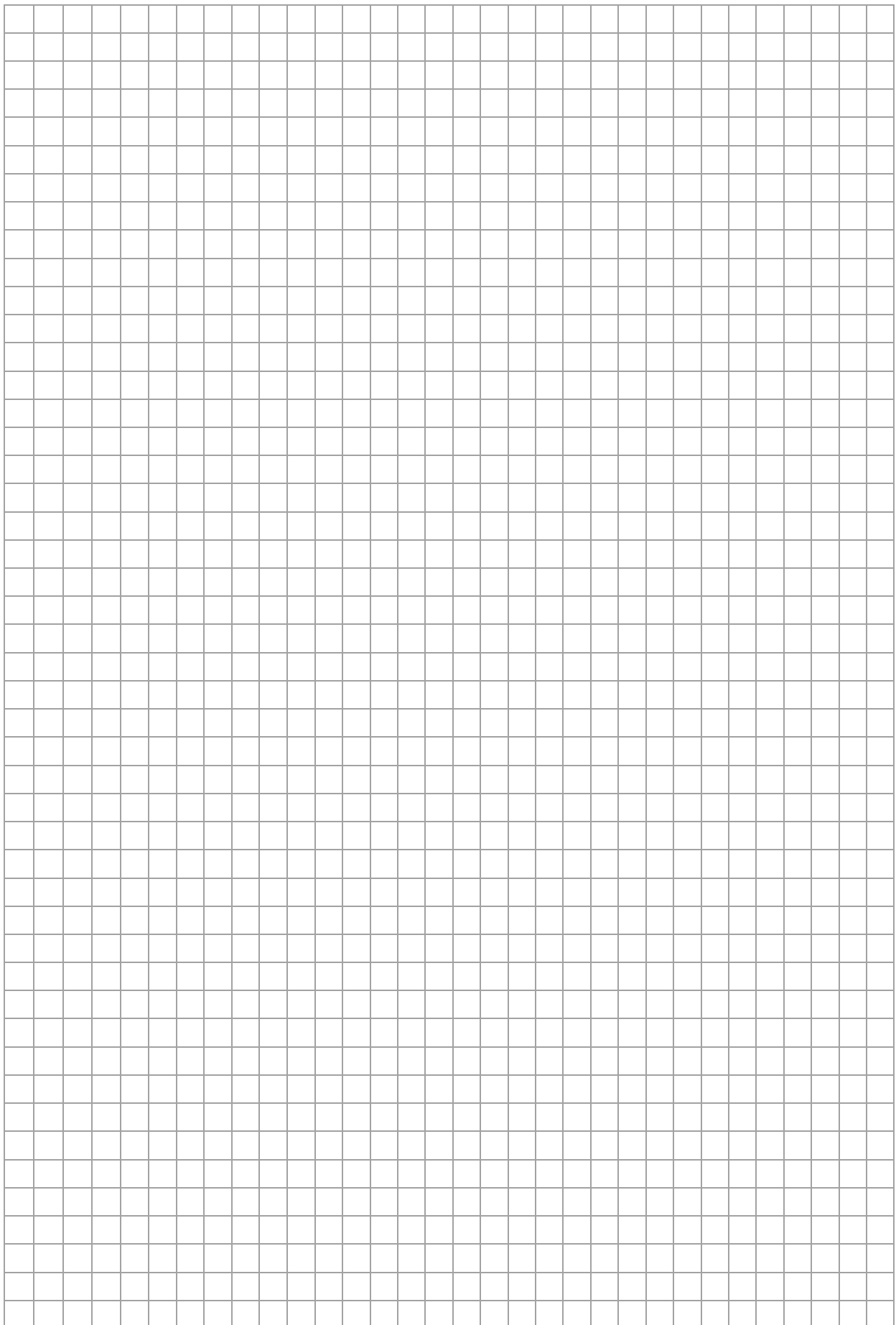
Zadanie 28. (0–4)

Deweloper projektuje tablicę do pisania do sali lekcyjnej. Jej kształt można opisać za pomocą dwóch figur: prostokąta oraz dwóch trójkątów równobocznych o boku równym długości krótszego boku prostokąta, przylegających do tych boków (patrz rysunek). Na obwód całej figury (tj. ramki tablicy i drzwiczek) deweloper przewiduje 120 dm metalowej obwódki.

**28.**0–1–
2–3–4

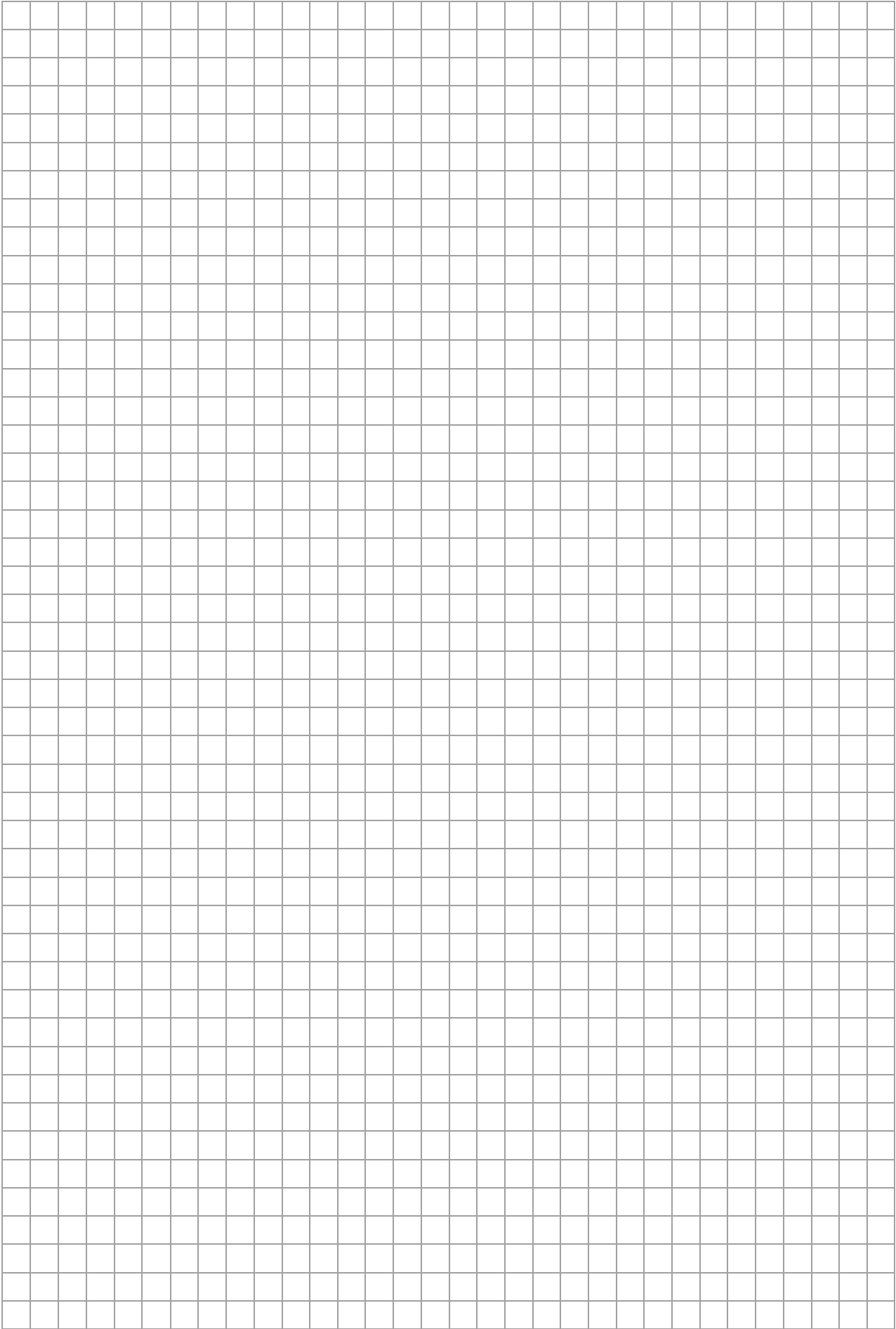
Oblicz największe możliwe pole tej tablicy. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego. Usuń niewymierność z mianownika. Zapisz obliczenia.





Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.



MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Formuła 2023



MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Formuła 2023



MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Formuła 2023



Matura próbna 2025

test diagnostyczny przed sesją maj 2025

<i>Rodzaj dokumentu:</i>	Zasady oceniania rozwiązań zadań
<i>Egzamin:</i>	Egzamin maturalny
<i>Przedmiot:</i>	Matematyka
<i>Poziom:</i>	Poziom podstawowy
<i>Formy arkusza:</i>	MMAP-P0-100
<i>Termin egzaminu:</i>	5 marca 2025 r.
<i>Data publikacji dokumentu:</i>	6 marca 2025 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże zadanie i otrzyma poprawny wynik, lecz w końcowym zapisie przekształca ten wynik i popełnia przy tym błąd, to może uzyskać maksymalną liczbę punktów.
3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 2. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 3. (0–2)

Zasady oceniania

2 pkt – przekształcenie wyrażenia $3^{94} + 9^{46} + 27^{30}$ do postaci $39 \cdot 3^{89} \cdot 7$

1 pkt – przekształcenie wyrażenia $3^{94} + 9^{46} + 27^{30}$ do postaci $91 \cdot 3^{90}$.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy wyrażenie $3^{94} + 9^{46} + 27^{30}$ do postaci podstaw liczby 3:

$3^{94} + (3^2)^{46} + (3^3)^{30}$, co daje $3^{94} + 3^{92} + 3^{90}$. Wyciągamy najwyższy czynnik przed nawias:

$3^{90} \cdot (3^4 + 3^2 + 1)$. Upraszczamy $91 \cdot 3^{90}$. Rozpisujemy liczbę 91 na iloczyn liczb pierwszych:

$3^{90} \cdot 7 \cdot 13$, co daje końcowo $39 \cdot 3^{89} \cdot 7$. Liczba $3^{89} \cdot 7$ jest całkowita, zatem cała liczba

$3^{94} + 9^{46} + 27^{30}$ jest podzielna przez 39. ■

Zadanie 4. (0–1)**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 5. (0–1)**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 6. (0–1)**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 7. (0–1)**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 8. (0–3)

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawny wynik: $x = -\frac{5}{2}$

2 pkt – przekształcenie równania do postaci $4x + 1 = \frac{6x-3}{2}$ (dla *sposobu I*)

ALBO

– przekształcenie równania do postaci $4x^2 + 12x + 5 = 0$ (dla *sposobu II i III*)

ALBO

– przekształcenie równania do postaci $\frac{8x+2-6x+3}{4x+2} = 0$ (dla *sposobu IV*)

ALBO

– przekształcenie równania do postaci $(2x + 1)(2(4x + 1) - (6x - 3)) = 0$
(dla *sposobu V*)

1 pkt – zapisanie niezbędnych założeń oraz rozwiązanie ich: $x \neq -\frac{1}{2}$

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Przykładowe pełne rozwiązania

Zapisujemy konieczne założenia, aby spełniony był sens liczbowy:

$$2x + 1 \neq 0 \quad \text{oraz} \quad 4x + 2 \neq 0$$

Stąd dziedzina: $x \neq -\frac{1}{2}$.

Sposób I

$$\frac{4x + 1}{2x + 1} = \frac{6x - 3}{4x + 2}$$

Mnożymy obustronnie przez $(2x + 1)$:

$$4x + 1 = \frac{6x - 3}{2}$$

Mnożymy obustronnie przez 2:

$$8x + 2 = 6x - 3$$

$$2x = -5$$

$$x = -\frac{5}{2} \in D$$

Sposób II

$$\frac{4x + 1}{2x + 1} = \frac{6x - 3}{4x + 2}$$

Z proporcji

$$(4x + 1)(4x + 2) = (6x - 3)(2x + 1)$$

$$\begin{aligned}
 16x^2 + 12x + 2 &= 12x^2 - 3 \\
 4x^2 + 12x + 5 &= 0 \\
 (2x + 5)(2x + 1) &= 0 \\
 x = -\frac{5}{2} \in D &\quad \text{lub} \quad x = -\frac{1}{2} \notin D
 \end{aligned}$$

Sposób III

Skorzystamy z proporcji i wzoru skróconego mnożenia

$$\begin{aligned}
 \frac{4x + 1}{2x + 1} &= \frac{6x - 3}{4x + 2} \\
 (4x + 1)(4x + 2) &= (6x - 3)(2x + 1) \\
 (4x + 1)(4x + 2) &= 3(2x - 1)(2x + 1)
 \end{aligned}$$

Zwijamy w różnicę kwadratów

$$\begin{aligned}
 (4x + 1)(4x + 2) &= 3(4x^2 - 1) \\
 16x^2 + 12x + 2 &= 12x^2 - 3 \\
 4x^2 + 12x + 5 &= 0 \\
 (2x + 5)(2x + 1) &= 0 \\
 x = -\frac{5}{2} \in D &\quad \text{lub} \quad x = -\frac{1}{2} \notin D
 \end{aligned}$$

Sposób IV

Przenosimy wszystkie wyrażenia na jedną stronę i sprowadzamy do wspólnego mianownika

$$\begin{aligned}
 \frac{4x + 1}{2x + 1} &= \frac{6x - 3}{4x + 2} \\
 \frac{4x + 1}{2x + 1} - \frac{6x - 3}{4x + 2} &= 0 \\
 \frac{2(4x + 1)}{2(2x + 1)} - \frac{6x - 3}{4x + 2} &= 0 \\
 \frac{8x + 2}{4x + 2} - \frac{6x - 3}{4x + 2} &= 0 \\
 \frac{8x + 2 - 6x + 3}{4x + 2} &= 0 \\
 \frac{2x + 5}{4x + 2} &= 0 \\
 2x + 5 &= 0 \\
 x = -\frac{5}{2} &\in D
 \end{aligned}$$

Sposób V

Wykorzystamy **grupowanie wyrazów**. Z proporcji wynika

$$\frac{4x+1}{2x+1} = \frac{6x-3}{4x+2}$$

$$(4x+1)(4x+2) = (6x-3)(2x+1)$$

Przenosimy wyrażenia na jedną stronę

$$(4x+1)(4x+2) - (6x-3)(2x+1) = 0$$

$$2(4x+1)(2x+1) - (6x-3)(2x+1) = 0$$

Wyciągamy $(2x+1)$ przed nawias

$$(2x+1)(2(4x+1) - (6x-3)) = 0$$

$$(2x+1)(8x+2-6x+3) = 0$$

$$(2x+1)(2x+5) = 0$$

$$x = -\frac{5}{2} \in D \quad \text{lub} \quad x = -\frac{1}{2} \notin D$$

Zadanie 9. (0–2)

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawny wynik: $x = 3$

1 pkt – przekształcenie nierówności do postaci $(x-3)^2 \leq 0$

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Przykładowe pełne rozwiązanie

Rozwijamy wzór skróconego mnożenia oraz przenosimy wszystkie wyrazy na jedną stronę

$$3(x+1)^2 \geq 4(x^2+3)$$

$$3(x^2+2x+1) \geq 4x^2+12$$

$$3x^2+6x+3-4x^2-12 \geq 0$$

$$-x^2+6x-9 \geq 0$$

$$x^2-6x+9 \leq 0$$

$$(x-3)^2 \leq 0$$

Nierówność jest prawdziwa tylko wtedy, gdy

$$(x-3)^2 = 0$$

$$x-3 = 0$$

$$x = 3$$

Zadanie 10. (0–4)**Zasady oceniania**

- 4 pkt – cztery odpowiedzi poprawne.
 3 pkt – trzy odpowiedzi poprawne.
 2 pkt – dwie odpowiedzi poprawne.
 1 pkt – jedna odpowiedź poprawna.
 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

1. Dziedziną funkcji f jest przedział $[-4, -1) \cup (-1, 3) \cup (4, 5]$.
2. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $[-3, 4]$.
3. Zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą jest przedział $[1, 3)$.
4. Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $f(x) \geq 3$ jest przedział $[-3, -1)$.

Zadanie 11.1 (0–2)**Zasady oceniania**

- 2 pkt – poprawne dwie odpowiedzi.
 1 pkt – poprawna jedna odpowiedź.
 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A F

Zadanie 11.2. (0–1)**Zasady oceniania**

- 1 pkt – odpowiedź poprawna.
 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 11.3. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

$(-1, 2)$

Zadanie 11.4. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 12. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

PF

Zadanie 13. (0–2)

Zasady oceniania

2 pkt – przeprowadzenie pełne rozumowania

1 pkt – wyznaczenie wyrazu a_{n+1} : $6^n \cdot 2$

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Ciąg jest geometryczny, gdy jego iloraz jest stałą liczbą rzeczywistą. Zatem $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Obliczamy wyraz a_{n+1} :

$$a_{n+1} = 2^{n+1} \cdot 3^n = 2^n \cdot 2 \cdot 3^n = 2^n \cdot 3^n \cdot 2 = 6^n \cdot 2$$

Wtedy:

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{6^n \cdot 2}{2^n \cdot 3^{n-1}} = \frac{6^n \cdot 2}{2^n \cdot 3^n \cdot 3^{-1}} = \frac{6^n \cdot 2}{2^n \cdot 3^n \cdot \frac{1}{3}} = \frac{6^n \cdot 2}{6^n \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6$$

Iloraz ciągu (b_n) jest liczbą stałą i wynosi 6, zatem ciąg (b_n) jest geometryczny.

Zadanie 14. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

–97

Zadanie 15. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B2

Zadanie 16. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 17. (0–2)

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawny wynik: 2

1 pkt – przekształcenie wyrażenia $\frac{\sin^3 \beta}{\cos \beta} + \sin \beta \cdot \cos \beta$ do postaci $\operatorname{tg} \beta$

ALBO

– obliczenie wartości tangensa kąta β : $\operatorname{tg} \beta = 2$

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Z warunku $\frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{1}{2}$ wynika, że $\frac{\sin \beta}{\cos \beta} = 2$ a zatem $\operatorname{tg} \beta = 2$.

Przekształcamy wyrażenie $\frac{\sin^3 \beta}{\cos \beta} + \sin \beta \cdot \cos \beta$:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^3 \beta}{\cos \beta} + \sin \beta \cdot \cos \beta &= \frac{\sin^3 \beta}{\cos \beta} + \frac{\sin \beta \cdot \cos^2 \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin^3 \beta + \sin \beta \cdot \cos^2 \beta}{\cos \beta} = \\ &= \frac{\sin \beta (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta)}{\cos \beta} \end{aligned}$$

Zauważamy jednostkę trygonometryczną: $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$, więc

$$\frac{\sin \beta (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta)}{\cos \beta} = \frac{\sin \beta \cdot 1}{\cos \beta} = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \operatorname{tg} \beta = 2$$

Zadanie 18. (0–2)

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawny wynik: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{25}{3}$

1 pkt – obliczenie współrzędnych środka odcinka $|AB|$: $S = (5,5)$

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Symetralna ma równanie $y = ax + b$. Symetralna $y = ax + b$ przechodzi przez środek odcinka $|AB|$, więc liczymy współrzędne środka tego odcinka: $S = \left(\frac{3+7}{2}, \frac{2+8}{2}\right) = (5,5)$.

Obliczamy współczynniki a i b . Wykorzystamy do tego współrzędne punktów S oraz C :

$$\begin{cases} 1 = 11a + b \\ 5 = 5a + b \end{cases}$$

Po obustronnym odjęciu równań:

$$-4 = 6a$$

$$a = -\frac{2}{3}$$

Wtedy

$$b = \frac{25}{3}$$

Symetralna ma równanie $y = -\frac{2}{3}x + \frac{25}{3}$.

Zadanie 19. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 20. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 21. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 22. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 23. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 24. (0–3)

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawny wynik: 27π

3 pkt – obliczenie długości tworzącej stożka: 6

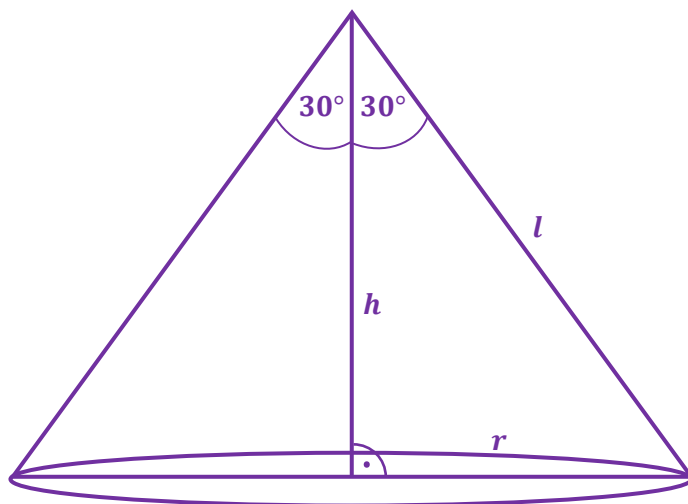
2 pkt – obliczenie długości promienia podstawy stożka i jego wysokości: $r = 3$ oraz $h = 3\sqrt{3}$

1 pkt – zapisanie związku między promieniem podstawy stożka i jego wysokością, np.:

$$r^2 = \frac{27\sqrt{3}}{h}, \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{r}{h}$$

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Przykładowe pełne rozwiązanie



Zapisujemy równanie z dwiema niewiadomymi – promieniem podstawy i wysokością stożka.

Korzystamy z trygonometrii kąta prostego:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{r}{h}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{r}{h}$$

$$3r = \sqrt{3}h$$

$$h = \frac{3r}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}r$$

Ze wzoru na objętość stożka:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 9\sqrt{3}\pi$$

Dzielimy obustronnie przez $\frac{1}{3}\pi$

$$r^2 h = 27\sqrt{3}$$

Z zależności $h = \sqrt{3}r$

$$r^2 \cdot \sqrt{3}r = 27\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}r^3 = 27\sqrt{3}$$

$$r^3 = 27$$

$$r = 3$$

Stąd $h = 3\sqrt{3}$.

Obliczamy długość tworzącej stożka. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa

$$3^2 + (3\sqrt{3})^2 = l^2$$

$$l^2 = 9 + 27$$

$$l^2 = 36$$

$$l = 6$$

Obliczamy pole powierzchni całkowitej stożka. Korzystamy ze wzoru

$$P_c = \pi r(r + l)$$

$$P_c = 3\pi(3 + 6) = 27\pi$$

Zadanie 25. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 26. (0–2)

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawny wynik: $P(A) = \frac{33}{49}$

1 pkt – wyznaczenie $|A| = 33$

ALBO

– wyznaczenie $|\Omega| = 49$

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych Ω :

$$|\Omega| = 7^2 = 49$$

Obliczamy $|A|$. Zastosujemy rozwiązanie poprzez utworzenie tabelki.

	1	2	3	4	5	6	7
1	A	A	A	A		A	
2	A		A	A	A		A
3	A	A		A	A	A	
4	A	A	A			A	A
5		A	A			A	A
6	A		A	A	A		A
7		A		A	A	A	

Zatem $|A| = 33$.

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A .

$$P(A) = \frac{33}{49}$$

Zadanie 27.1. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 27.2. (0–1)**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 28. (0–4)**Zasady oceniania**

4 pkt – obliczenie największego możliwego pola tablicy i przedstawienie go w postaci

$$P = \frac{600(\sqrt{3}+6)}{11}$$

3 pkt – obliczenie długości boku, dla której pole tablicy jest największe, np. $a = \frac{20(\sqrt{3}+6)}{11}$

2 pkt – wyznaczenie wzoru funkcji opisującej pole tablicy przy pomocy jednej niewiadomej,

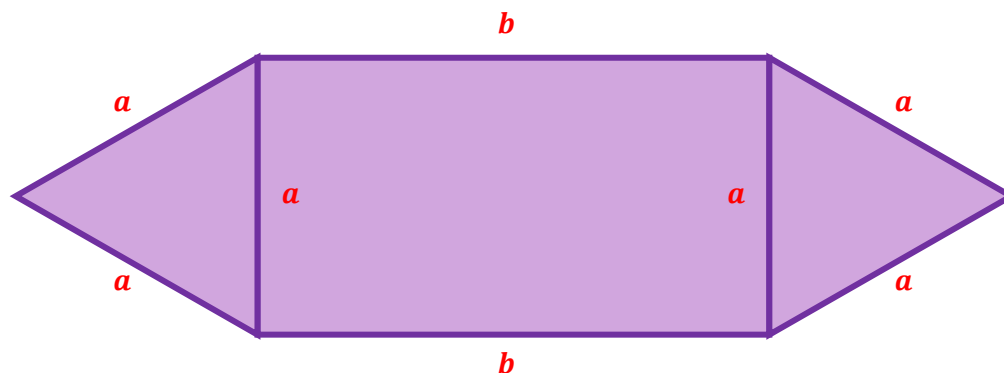
$$\text{np. } P(a) = \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right) \cdot a^2 + 60 \cdot a$$

1 pkt – wyznaczenie dziedziny funkcji opisującej pole tablicy przy pomocy jednej niewiadomej, np. $a \in (0,20)$

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku poniżej.



Na obwód wraz z ramkami deweloper przeznacza 120 dm, zatem

$$a + b + a + a + b + a + a + a = 120$$

$$6a + 2b = 120$$

$$3a + b = 60$$

Wyznaczamy b :

$$b = 60 - 3a$$

Zapisujemy konieczne założenia i wyznaczamy dziedzinę funkcji opisującej pole tablicy.

$$a > 0 \quad \text{oraz} \quad b > 0$$

$$a > 0 \quad \text{oraz} \quad 60 - 3a > 0$$

$$a > 0 \quad \text{oraz} \quad 60 > 3a$$

$$a > 0 \quad \text{oraz} \quad a < 20$$

Zatem

$$a \in (0, 20)$$

Tworzymy wzór funkcji opisującej pole tablicy:

$$P = 2 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + a \cdot b$$

$$P(a) = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} + a(60 - 3a) = \frac{2a(60 - 3a) + a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{a^2(\sqrt{3} - 6) + 120a}{2}$$

Co daje w rezultacie

$$P(a) = \left(\frac{\sqrt{3} - 6}{2} \right) a^2 + 60a$$

Funkcja $P(a)$ jest kwadratowa, zatem największą wartość osiągnie w wierzchołku paraboli będącej jej wykresem. Wyznaczamy długość a , dla której funkcja P osiąga wartość maksymalną

$$p = -\frac{60}{2 \cdot \frac{\sqrt{3} - 6}{2}} = \frac{-60}{\sqrt{3} - 6} = \frac{-60(\sqrt{3} + 6)}{-33} = \frac{20(\sqrt{3} + 6)}{11} \in (0, 20)$$

Obliczamy największe możliwe pole tablicy. Jest nim $P\left(\frac{20(\sqrt{3}+6)}{11}\right)$.

Największe pole jest równe

$$q = \frac{-\left(60^2 - 4 \cdot \frac{\sqrt{3} - 6}{2} \cdot 0\right)}{4 \cdot \frac{\sqrt{3} - 6}{2}} = \frac{-3600}{2(\sqrt{3} - 6)} = \frac{-1800}{\sqrt{3} - 6} = \frac{-1800(\sqrt{3} + 6)}{-33} = \frac{600(\sqrt{3} + 6)}{11}$$

Największe możliwe pole tej tablicy jest równe $\frac{600(\sqrt{3}+6)}{11} \text{ dm}^2$.

Matura próbna 2025

test diagnostyczny przed sesją maj 2025

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

PESEL

Miejsce na naklejkę.

Sprawdź, czy kod na naklejce to

M-100.

Jeżeli tak – przyklej naklejkę.

Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Symbol arkusza

MMAP-P0-**100**-2504

DATA: **14 kwietnia 2025 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:

☐ dostosowania zasad oceniania

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

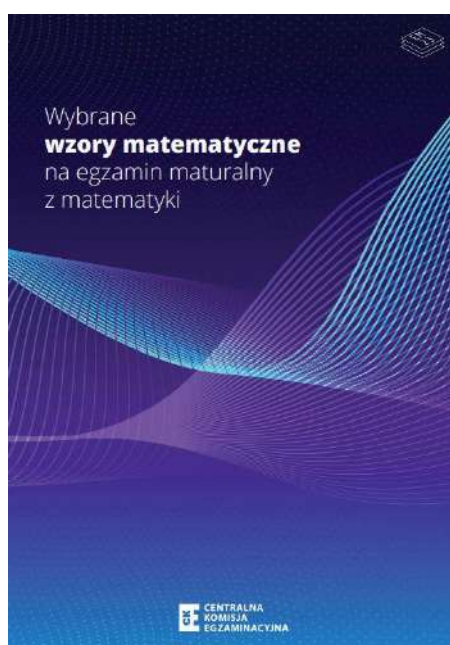
1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.





Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 27 stron (zadania 1–30). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Symbol  zamieszczony w nagłówku zadania oznacza, że rozwiązanie zadania zamkniętego musisz przenieść na kartę odpowiedzi. Ocenie podlegają wyłącznie odpowiedzi zaznaczone na karcie odpowiedzi.
4. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
5. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
6. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
7. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
8. Nie wpisuj żadnych znaków w tabelkach przeznaczonych dla egzaminatora. Tabelki umieszczone są na marginesie przy odpowiednich zadaniach.
9. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
10. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla i linijki oraz z kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



**Zadania egzaminacyjne są wydrukowane
na następnych stronach.**

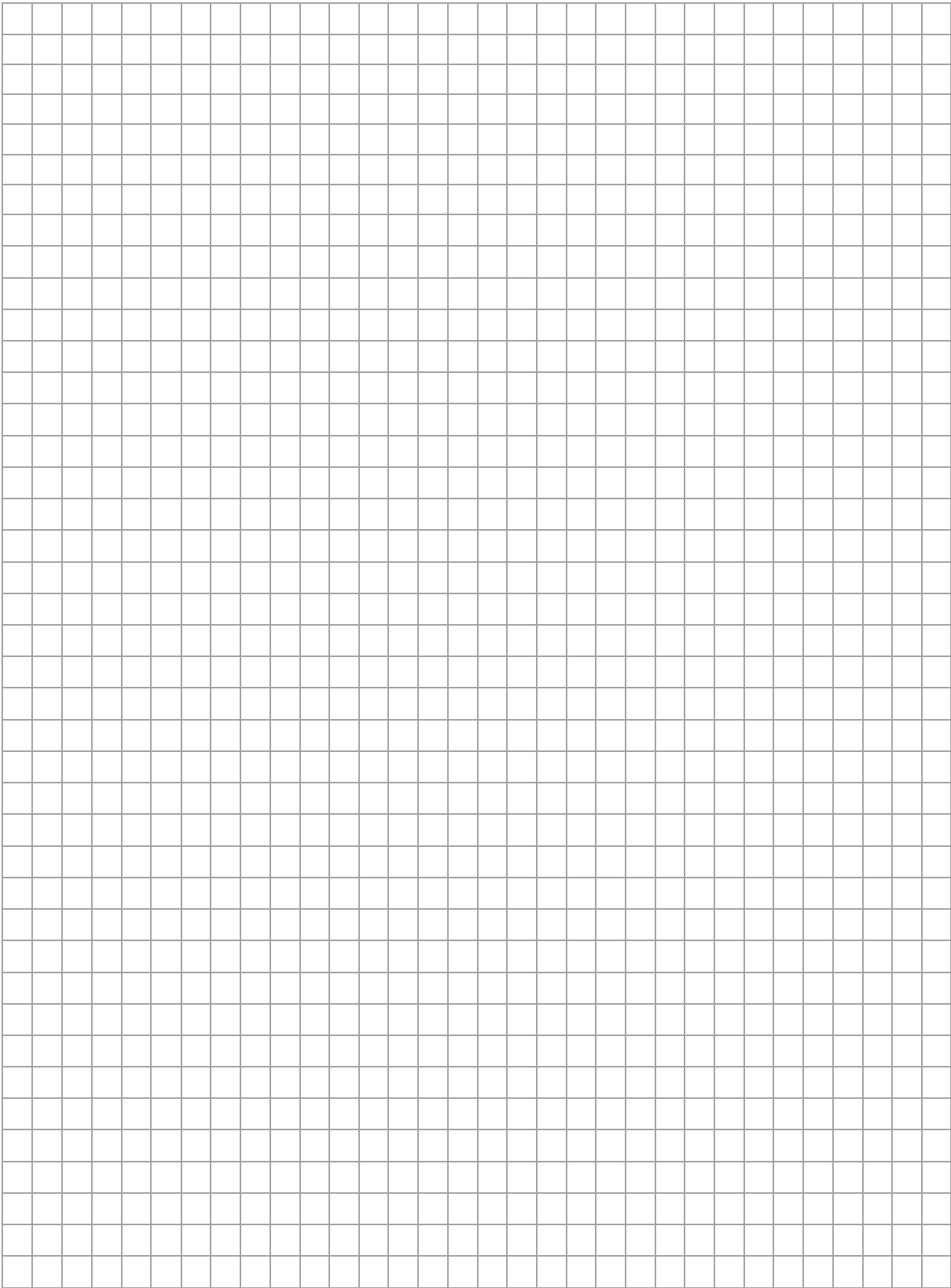
Zadanie 1. (0–1) **Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**Liczba $|3 - 2\sqrt{2}| - |6 - 3\sqrt{2}| - |1 - \sqrt{2}|$ jest równa**A.** -2 **B.** $-2\sqrt{2}$ **C.** $2(4 - 3\sqrt{2})$ **D.** $2\sqrt{2}$ *Brudnopis***Zadanie 2. (0–1)** **Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**Liczba $\frac{1}{3}\log_5 125 - 3\log_{125} \frac{1}{5}$ jest równa**A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 5 *Brudnopis*

Zadanie 3. (0–2)

Wykaż, że suma kwadratów czterech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 5 jest liczbą podzielną przez 10.

3.

0–1–2



Różnica tych liczb jest równa 250, oraz 85% liczby a stanowi 95% liczby b .

Oblicz $a + b$. Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, equal-sized squares formed by thin gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

$$(x^6 + 32x)(x + 5)^2(x^2 - 16)(x^3 - 27)(x^2 - 2x + 1)(x + 6) = 0$$

w zbiorze liczb rzeczywistych. Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, equal-sized squares formed by thin gray lines. There are 20 columns and 20 rows of squares, creating a total of 400 square units. The grid covers the entire area of the page, leaving no margins or other markings.

10.

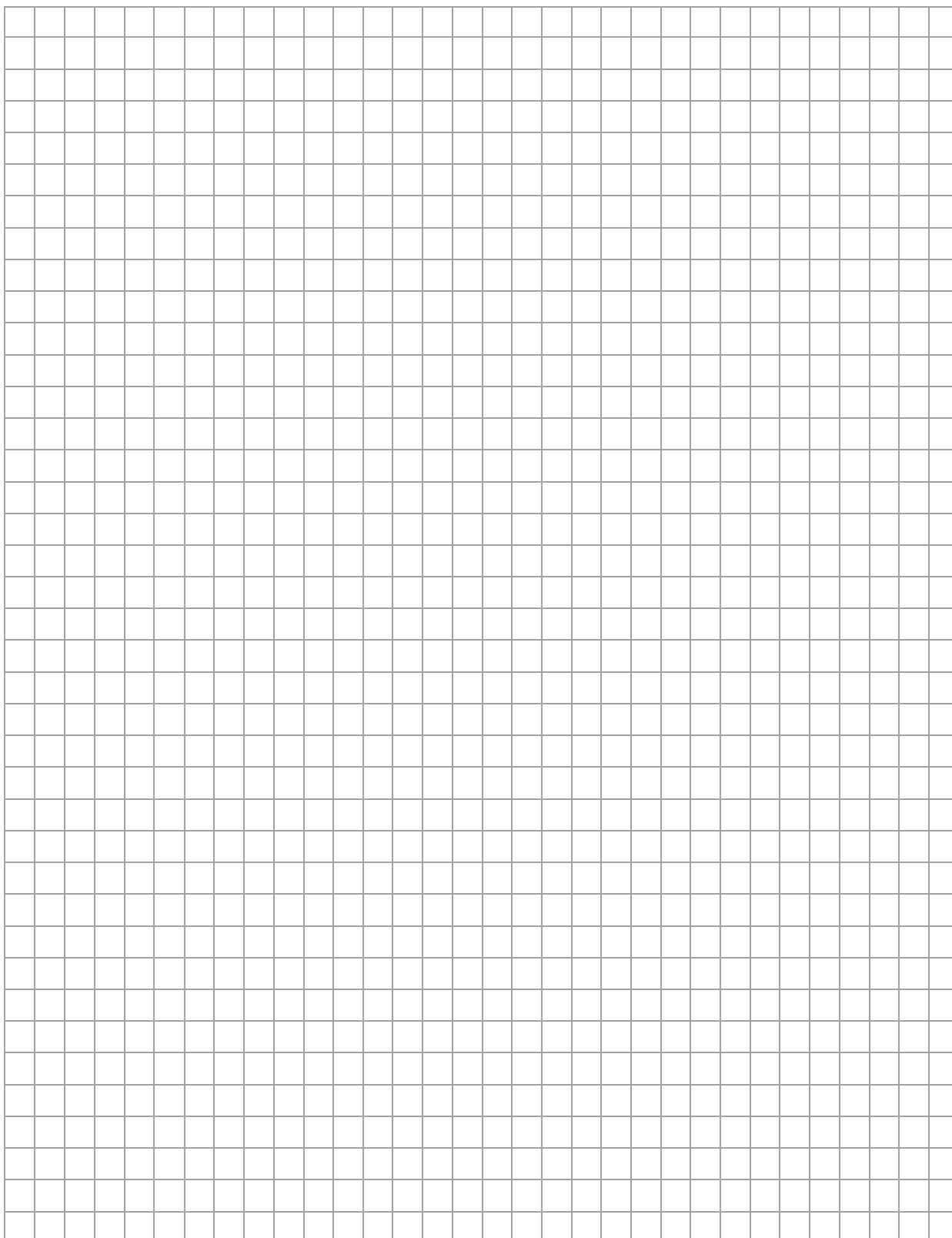
0-1-2

Zadanie 10. (0-2)

Rozwiąż nierówność

$$-2x(8x + 3) < 1$$

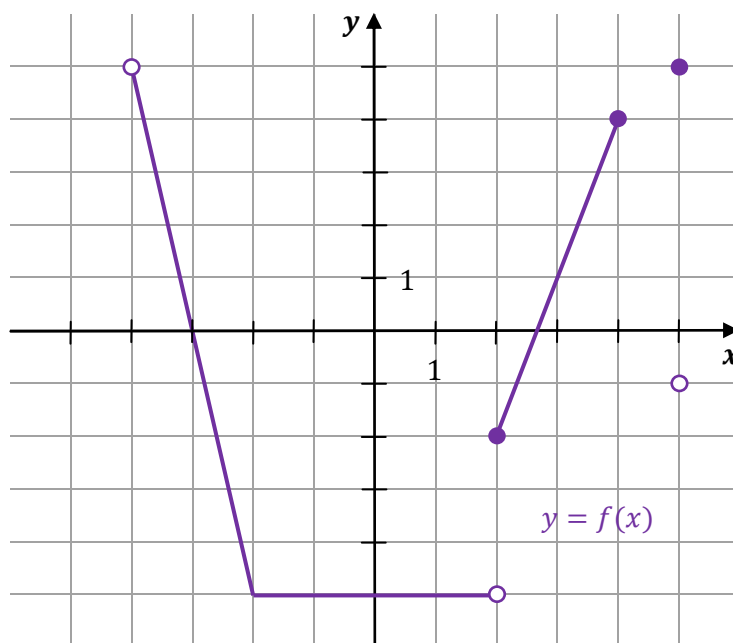
Zapisz obliczenia.



Funkcja f jest określona następująco:

$$f(x) = \begin{cases} -5x - 15 & \text{dla } x \in (-4, -2] \\ -5 & \text{dla } x \in (-2, 2) \\ 3x + 8 & \text{dla } x \in [2, 4] \\ 5 & \text{dla } x = 5 \end{cases}$$

Wykres funkcji $y = f(x)$ przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku poniżej.



Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie przedziały w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe.

1. Dziedzina funkcji f jest przedział
2. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział
3. Zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą jest przedział
4. Zbiorem wszystkich argumentów dla których funkcja f jest malejąca jest przedział

[illegible]

Zadanie 12.

Funkcja kwadratowa $y = g(x)$, której wierzchołek, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) ma współrzędne $W = (2, 27)$ przechodzi przez punkt $A = (4, 15)$.

12.1.

0-1-
2-3

Zadanie 12.1. (0-3)

Wyznacz wzór funkcji $g(x)$ w postaci iloczynowej. Zapisz obliczenia.



Zadanie 12.2. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja g jest rosnąca w przedziale

- A. $(-\infty, 27]$ B. $[2, +\infty)$ C. $[27, +\infty)$ D. $(-\infty, 2]$

Brudnopis

Zadanie 12.3. (0–1)

Funkcja $h(x)$ jest wyrażona za pomocą funkcji g następująco: $h(x) = g(x + 5)$.

Wyznacz wzór funkcji $h(x)$. Zapisz obliczenia.

12.3.

0–1

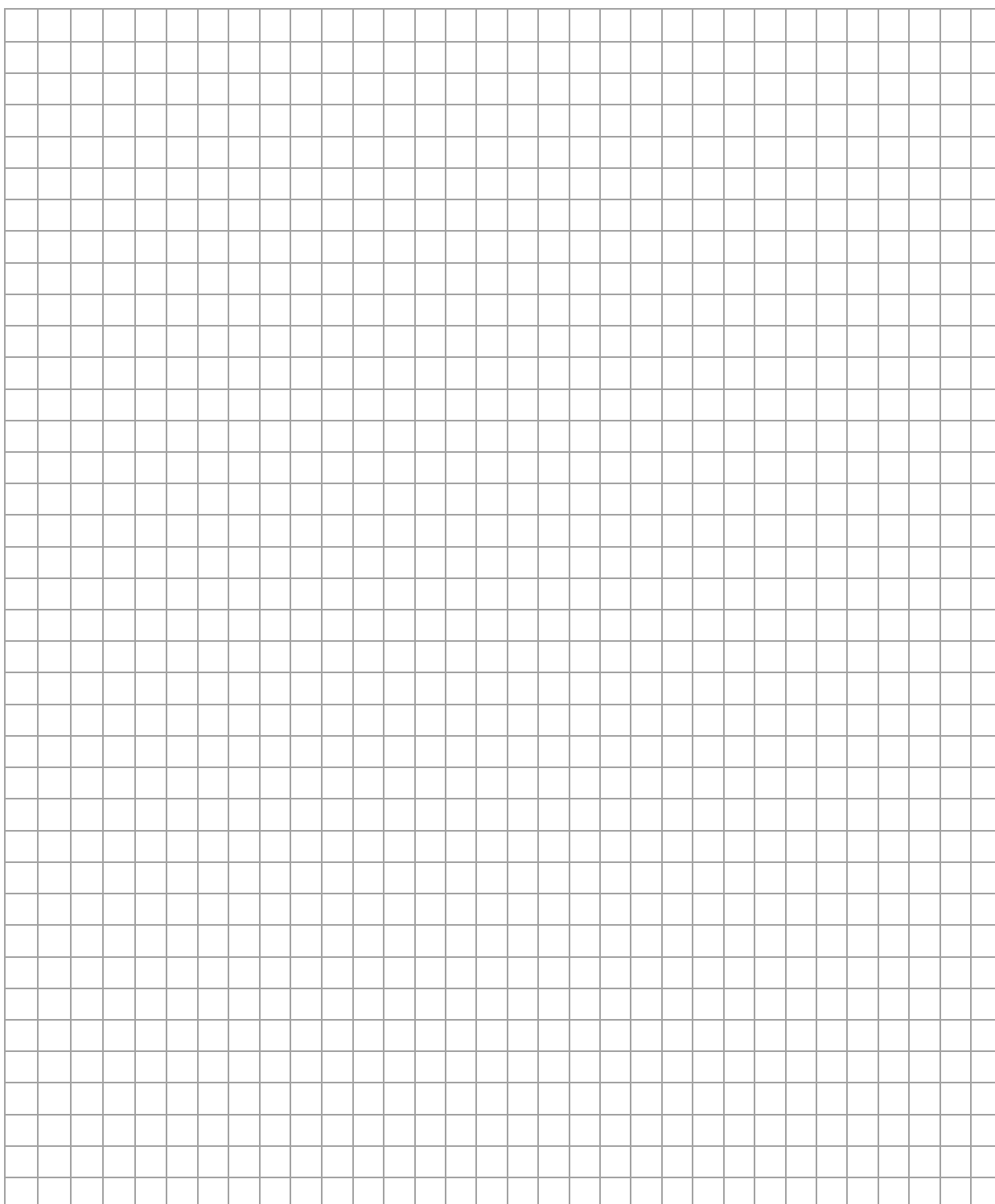
Zadanie 13. (0–3)

Ciąg

$$(m - 6, \quad m + 6, \quad m^2 - 6)$$

jest monotoniczny oraz geometryczny.

Oblicz iloraz tego ciągu oraz określ jego monotoniczność. Zapisz obliczenia.



Zadanie 16. (0–1)

Kąt α jest ostry oraz $\operatorname{tg} \alpha = 7$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Cosinus kąta α wynosi

- D.** $\frac{7}{50}$

[illegible]

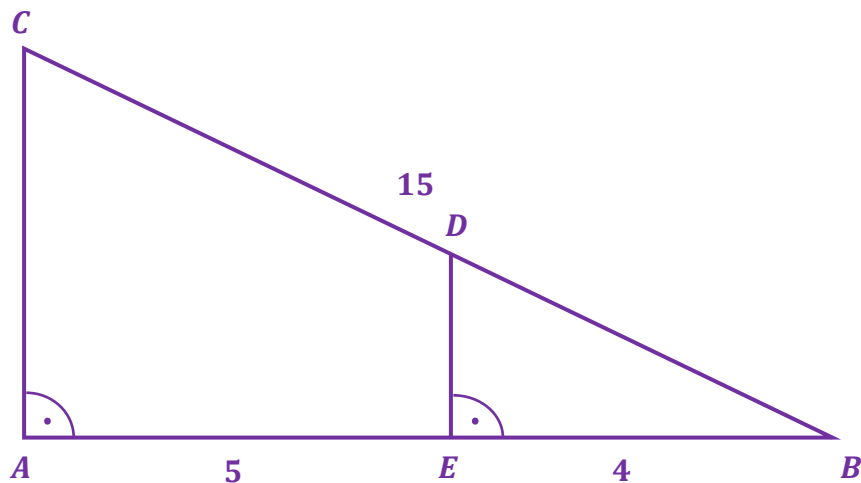
Zadanie 17. (0–2)

Na trójkącie równobocznym opisano okrąg o promieniu R .

Wykaż, że pole tego trójkąta wyraża się wzorem $\frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot R^2$.

A full-page sheet of white graph paper featuring a light gray grid. The grid consists of small, equal-sized squares that cover the entire area of the page. There are no margins, text, or other markings present.

Oblicz pole czworokąta $AEDC$. Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, equal-sized squares formed by thin gray lines. There are 20 columns and 20 rows of squares, creating a total of 400 square units. The margins are consistent on all sides, and there are no markings or text on the paper.



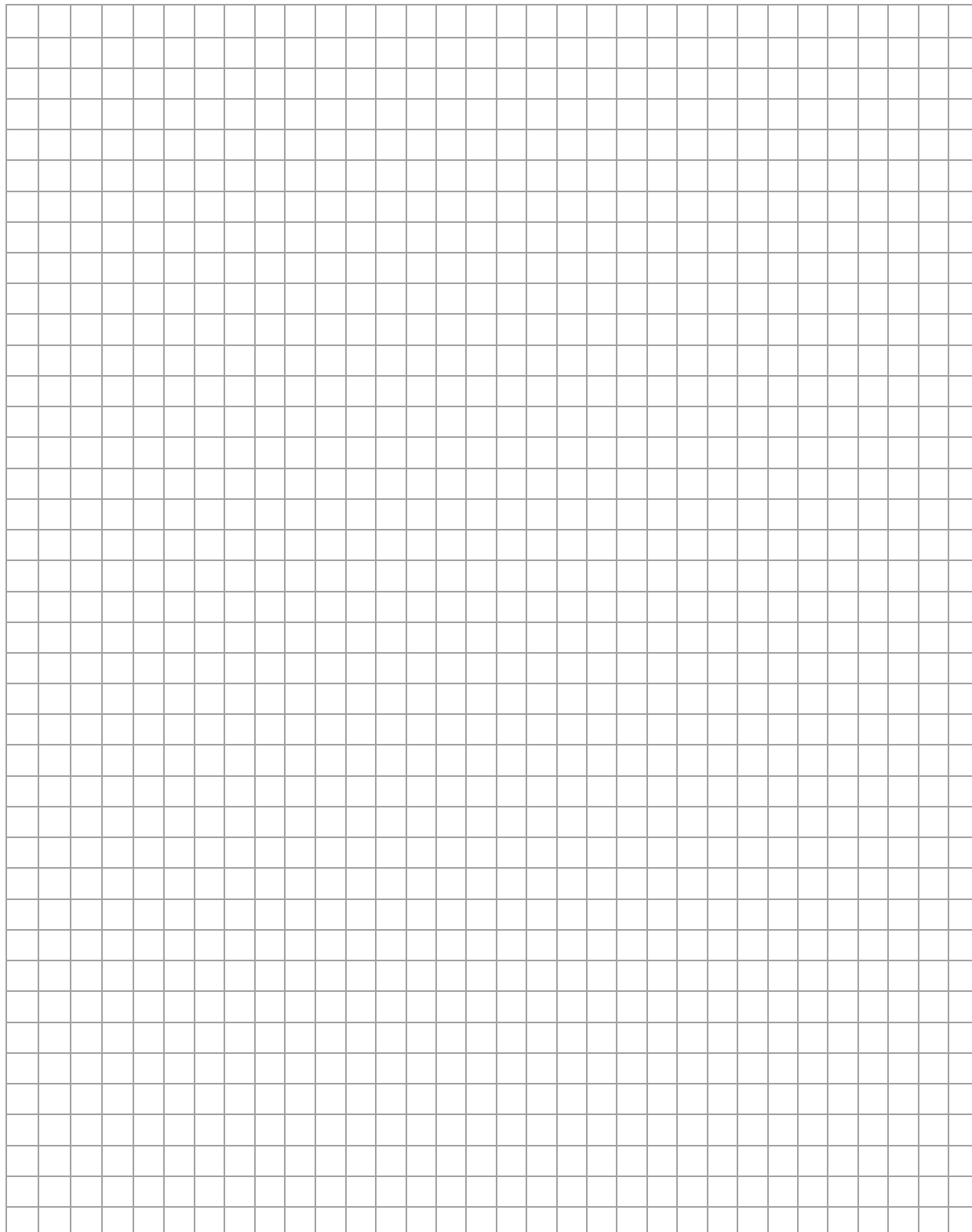
D. 65°

Zadanie 24. (0–3)

Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny, którego pole powierzchni bocznej wynosi $8\sqrt{3}$. Przekątna ściany bocznej jest nachylona do krawędzi podstawy pod kątem 30° .

Oblicz pole podstawy tego graniastosłupa. Zapisz obliczenia.

24.

0–1–
2–3

Zadanie 25. (0–1)

Rozważamy kulę Q , której pole powierzchni całkowitej jest równe jej objętości.

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Kula Q ma promień o długości

A.	3	oraz jej pole powierzchni całkowitej wynosi	1.	36π
B.	4		2.	64π
C.	6		3.	144π

Brudnopis

Zadanie 26. (0–1)

Suma długości promienia podstawy oraz wysokości pewnego walca jest równa 12.

Pole powierzchni całkowitej tego walca wynosi 120π .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Objętość tego walca jest równa

A. 125π

B. 150π

C. 175π

D. 225π

Brudnopis



Zadanie 30. (0–2)

Producent mydła w płynie planuje zaoszczędzić, oraz przy tej samej cenie produkcji wyprodukować więcej palet z kartonami mydła. Producent decyduje się na zmniejszenie ilości mydła w każdym kartonie o x litrów. Niech funkcja $P(x)$ oznacza liczbę wyprodukowanych palet z mydłem w ciągu dnia, w zależności od ilości zmniejszanego mydła w x litrach w każdym kartonie.

$$P(x) = -0,35x^2 + 1,484x + 33,42696$$

dla $x \in (0, 12, 12)$.

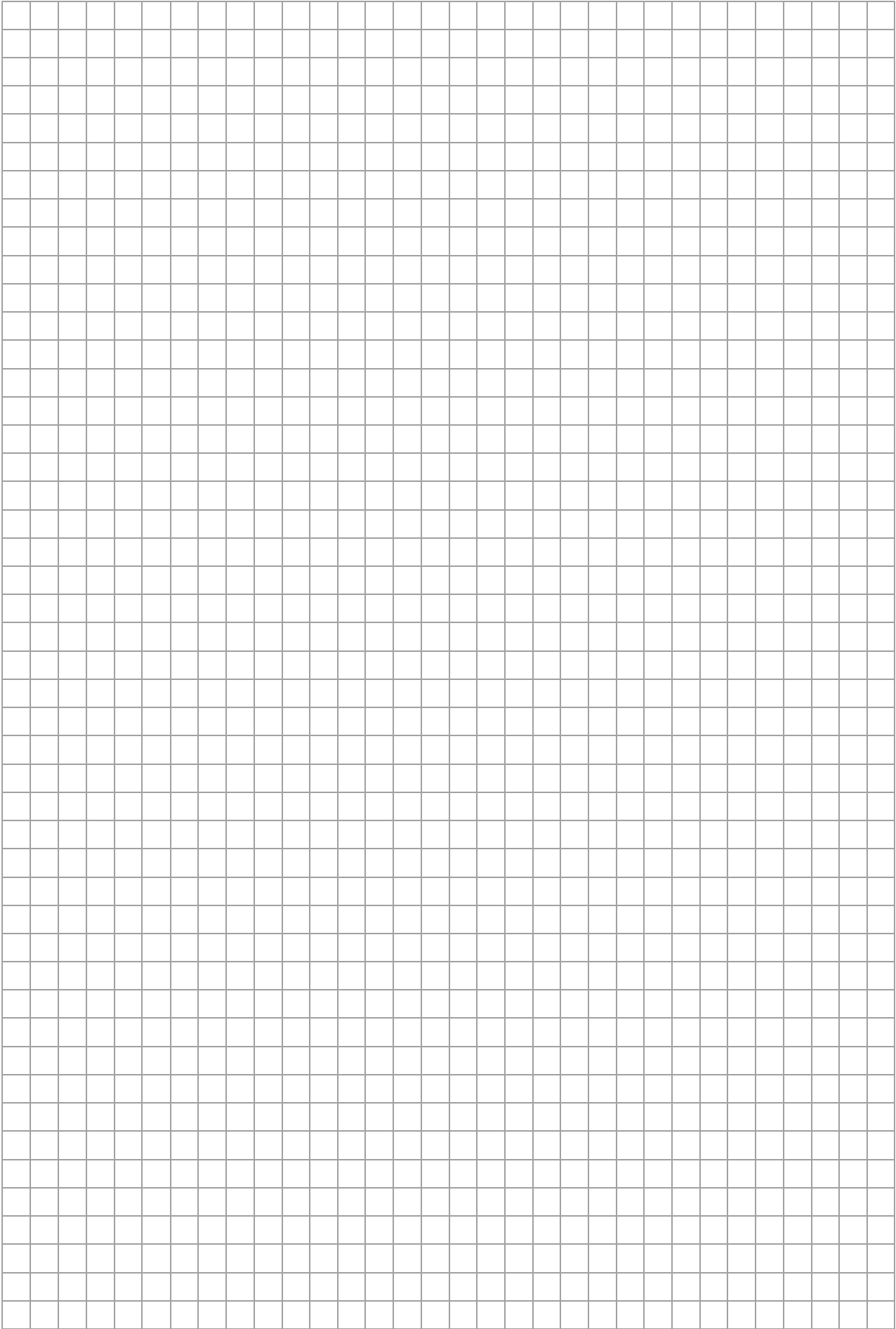
Oblicz, o ile litrów producent powinien zmniejszyć ilość mydła w każdym kartonie, aby w ciągu dnia wyprodukować jak najwięcej palet z mydłem (przy zachowaniu tych samych kosztów). Oblicz, ile palet z mydłem wyprodukuje. Zapisz obliczenia.

30.

0–1–2

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.



MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Formuła 2023



MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Formuła 2023



MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Formuła 2023



Matura próbna 2025

test diagnostyczny przed sesją maj 2025

<i>Rodzaj dokumentu:</i>	Zasady oceniania rozwiązań zadań
<i>Egzamin:</i>	Egzamin maturalny
<i>Przedmiot:</i>	Matematyka
<i>Poziom:</i>	Poziom podstawowy
<i>Formy arkusza:</i>	MMAP-P0-100
<i>Termin egzaminu:</i>	14 kwietnia 2025 r.
<i>Data publikacji dokumentu:</i>	15 kwietnia 2025 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże zadanie i otrzyma poprawny wynik, lecz w końcowym zapisie przekształca ten wynik i popełnia przy tym błąd, to może uzyskać maksymalną liczbę punktów.
3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 2. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 3. (0–2)

Zasady oceniania

2 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania

1 pkt – algebraiczne zapisanie sumy kwadratów czterech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 5, np. $(5k + 1)^2 + (5k + 2)^2 + (5k + 3)^2 + (5k + 4)^2$
gdzie $k \in \mathbb{Z}$

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zapisujemy w postaci algebraicznej sumę kwadratów czterech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 5: $(5k + 1)^2 + (5k + 2)^2 + (5k + 3)^2 + (5k + 4)^2$ przy czym k jest liczbą całkowitą $k \in \mathbb{Z}$. Rozwijamy wzory skróconego mnożenia oraz sumujemy wyrażenia algebraiczne otrzymując

$$(5k + 1)^2 + (5k + 2)^2 + (5k + 3)^2 + (5k + 4)^2 = 100k^2 + 100k + 30$$

Stąd $10(10k^2 + 10k + 3)$ gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Zatem liczba jest podzielna przez 10, bo wyrażenie $10k^2 + 10k + 3$ jest liczbą całkowitą, bo $k \in \mathbb{Z}$. To kończy dowód.

Zadanie 4. (0–1)**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 5. (0–1)**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

FF

Zadanie 6. (0–1)**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 7. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 8. (0–2)

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawny wynik: 4500

1 pkt – zapisanie układu równań:

$$\begin{cases} a - b = 250 \\ 0,85a = 0,95b \end{cases}$$

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Z założenia $a > b$ więc $a - b > 0$ oraz $b - a < 0$ dlatego też zapisujemy równanie

$$a - b = 250$$

Z drugiego warunku wynika, że $0,85a = 0,95b$.

Rozwiązujemy układ równań liniowych

$$\begin{cases} a - b = 250 \\ 0,85a = 0,95b \end{cases}$$

z czego otrzymujemy

$$\begin{cases} a = 2375 \\ b = 2125 \end{cases}$$

Suma $a + b$ wynosi $2375 + 2125 = 4500$

Zadanie 9. (0–2)

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz podanie wszystkich poprawnych rozwiązań:

$$x \in \{-6, -5, -4, -2, 0, 1, 3, 4\}$$

1 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz podanie co najmniej 6 poprawnych rozwiązań spośród zbioru $\{-6, -5, -4, -2, 0, 1, 3, 4\}$

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Rozwiązujemy równanie

$$(x^6 + 32x)(x + 5)^2(x^2 - 16)(x^3 - 27)(x^2 - 2x + 1)(x + 6) = 0$$

w zbiorze liczb rzeczywistych. Każdy z czynników przyrównujemy do 0 oraz rozwiązujemy sześć równań:

$$x^6 + 32x = 0$$

$$x(x^5 + 32) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x^5 = -32$$

$$x = 0 \text{ lub } x = -2$$

$$(x + 5)^2 = 0$$

$$x + 5 = 0$$

$$x = -5$$

$$x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4 \text{ lub } x = -4$$

$$x^3 - 27 = 0$$

$$x^3 = 27$$

$$x = 3$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

$$x + 6 = 0$$

$$x = -6$$

Stąd $x \in \{-6, -5, -4, -2, 0, 1, 3, 4\}$.

Zadanie 10. (0–2)

Zasady oceniania

- 2 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawna odpowiedź: $x \in \mathbb{R}$
1 pkt – przekształcenie trójmianu kwadratowego do postaci ogólnej poprzez przeniesienie wszystkich jego czynników na jedną stronę nierówności, np. $16x^2 + 6x + 1 > 0$
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy nierówność.

$$-2(8x^2 + 3x) < 1$$

Przenosimy wszystkie składniki na jedną stronę

$$-16x^2 - 6x - 1 < 0$$

$$16x^2 + 6x + 1 > 0$$

Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego: $\Delta = 36 - 64 = -28 < 0$.

Wyróżnik jest ujemny, funkcja nie ma miejsc zerowych. Zauważamy, że współczynnik przy najwyższej potędze jest dodatni, zatem funkcja znajduje się w całości nad osią x . Stąd też wniosek i odpowiedź: $x \in \mathbb{R}$

Zadanie 11. (0–4)

Zasady oceniania

- 4 pkt – cztery odpowiedzi poprawne.
3 pkt – trzy odpowiedzi poprawne.
2 pkt – dwie odpowiedzi poprawne.
1 pkt – jedna odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

1. Dziedziną funkcji jest przedział $(-4, 4] \cup \{5\}$.
2. Zbiorem wartości funkcji jest przedział $[-5, 5]$.
3. Zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartość najmniejszą jest przedział $[-2, 2]$.
4. Zbiorem wszystkich argumentów dla których funkcja jest malejąca jest przedział $(-4, -2]$

Zadanie 12.1. (0–3)**Zasady oceniania**

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawna odpowiedź: $g(x) = -3(x + 1)(x - 5)$

2 pkt – wyznaczenie wzoru funkcji g w postaci ogólnej: $g(x) = -3x^2 + 12x + 15$

1 pkt – zapisanie wzoru funkcji g w postaci kanonicznej z jedną niewiadomą, np.:

$$g(x) = a(x - 2)^2 + 27$$

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zapisujemy wzór funkcji g w postaci kanonicznej: $g(x) = a(x - 2)^2 + 27$.

Z punktu $A = (4, 15)$ zapisujemy równanie i obliczamy a :

$$15 = a(4 - 2)^2 + 27$$

Stąd $a = -3$.

Wzór funkcji w postaci kanonicznej to $g(x) = -3(x - 2)^2 + 27$.

Aby wyznaczyć postać iloczynową, doprowadzamy postać kanoniczną do ogólnej

$g(x) = -3x^2 + 12x + 15$, następnie obliczamy pierwiastki trójmianu: (-1) oraz 5 i otrzymujemy:

$$g(x) = -3(x + 1)(x - 5)$$

Zadanie 12.2. (0–1)**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 12.3. (0–1)

1 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawna odpowiedź: $h(x) = -3x^2 - 18x$
(lub $h(x) = -3x(x + 6)$)

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zapisujemy wzór funkcji h za pomocą funkcji g : $h(x) = -3(x - 5 + 5)(x + 1 + 5)$,

co po uproszczeniu daje wynik: $h(x) = -3x^2 - 18x$.

Zadanie 13. (0–3)

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawna odpowiedź: $q = 5$ **oraz** rosnący

2 pkt – obliczenie m oraz dla danych wartości m obliczenie ilorazu ciągu:

$$m = -2 \text{ i } q = \left(-\frac{1}{2}\right), \quad m = 0 \text{ i } q = (-1) \text{ oraz } m = 9 \text{ i } q = 5$$

1 pkt – zapisanie związku na trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego:

$$(m + 6)^2 = (m - 6)(m^2 - 6)$$

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Ciąg $(m - 6, m + 6, m^2 - 6)$ jest geometryczny, zatem:

$$(m + 6)^2 = (m - 6)(m^2 - 6)$$

$$m^2 + 12m + 36 = m^3 - 6m - 6m^2 + 36$$

$$-m^3 + 7m^2 + 18m = 0$$

$$m(-m^2 + 7m + 18) = 0$$

$$m = 0 \text{ lub } -m^2 + 7m + 18 = 0$$

Stąd:

$$m = 0 \text{ lub } m = -2 \text{ lub } m = 9$$

Dla $m = 0$ ciąg nie jest monotoniczny: $(-6, 6, -6)$.

Dla $m = -2$ ciąg nie jest monotoniczny: $(-8, 4, -2)$.

Dla $m = 9$ ciąg jest monotoniczny: $(3, 15, 75)$.

Zatem $q = \frac{15}{3} = \frac{75}{15} = 5$ oraz ciąg ten jest *rosnący*.

Zadanie 14. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

210 859

Zadanie 15. (0–1)**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 16. (0–1)**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 17. (0–2)**Zasady oceniania**

2 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania

1 pkt – wyprowadzenie zależności między boki trójkąta a promieniem okręgu opisanego:

$$a = \sqrt{3}R$$

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Przykładowe pełne rozwiązaniaOznaczmy bok trójkąta równobocznego poprzez a .**Sposób I**

Ze wzorów trójkąta równobocznego otrzymujemy:

$$R = \frac{2}{3}h$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

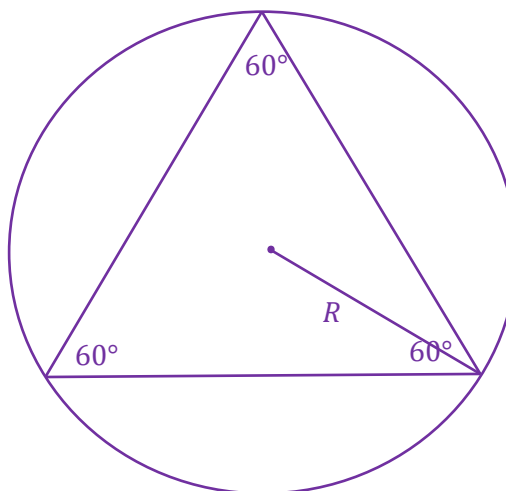
Stąd:

$$R = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Następnie:

$$3R = a\sqrt{3}$$

$$a = \frac{3R}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}R$$



Ze wzoru na pole trójkąta równobocznego:

$$P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(\sqrt{3}R)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$$

co kończy dowód.

Sposób Ia

Można skorzystać także ze wzoru na pole trójkąta z promieniem okręgu opisanego na trójkącie:

$$P = \frac{abc}{4R}$$

Trójkąt jest równoboczny, zatem

$$P = \frac{a \cdot a \cdot a}{4R} = \frac{a^3}{4R} = \frac{(\sqrt{3}R)^3}{4R} = \frac{3\sqrt{3}R^3}{4R} = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$$

Sposób II

Z własności kątów w kole zapisujemy kąt środkowy o mierze $2 \cdot 60^\circ$ co daje 120° .

Następnie z twierdzenia cosinusów:

$$a^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos 120^\circ$$

Rozpisujemy

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$a^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

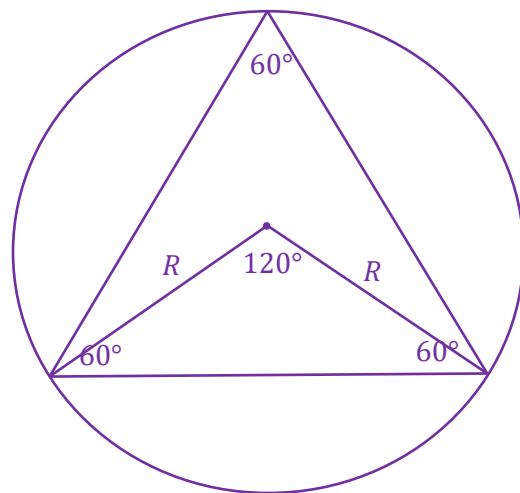
$$a^2 = R^2 + R^2 + R^2$$

$$a^2 = 3R^2$$

$$a = \sqrt{3}R$$

Analogicznie

$$P = \frac{(\sqrt{3}R)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(\sqrt{3}R)^3}{4R} = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$$



Sposób III

Pole całego tego trójkąta to suma pól trzech trójkątów równoramiennych o boku R .

Ze wzoru na **pole trójkąta z sinusem**:

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin 120^\circ$$

Rozpisujemy

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

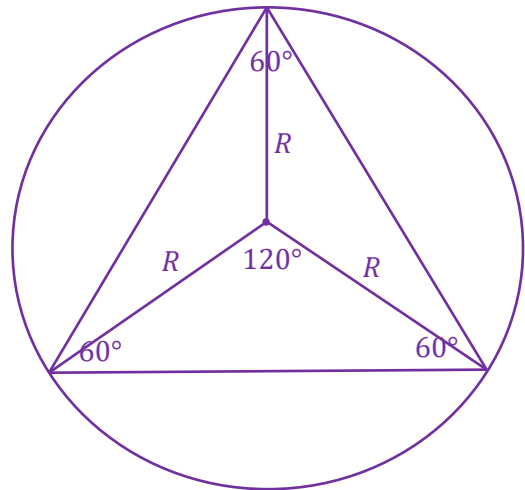
$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$P_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} R^2$$

Zatem

$$P = 3P_1$$

$$P = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$$

**Sposób IV**

Z **twierdzenia sinusów**:

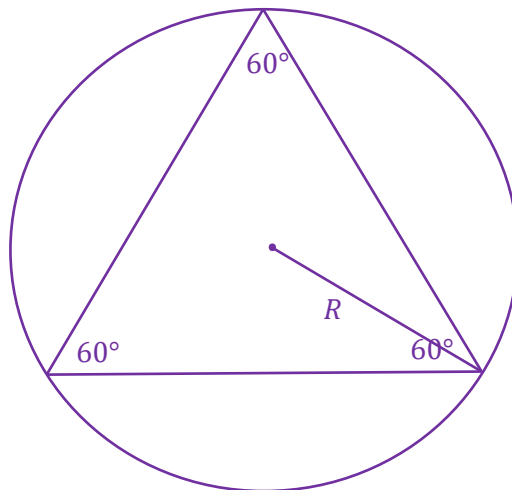
$$\frac{a}{\sin 60^\circ} = 2R$$

$$\frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

$$2R = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$a = \sqrt{3}R$$



Analogicznie

$$P = \frac{(\sqrt{3}R)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(\sqrt{3}R)^3}{4R} = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$$

Zadanie 18. (0–3)

Zasady oceniania

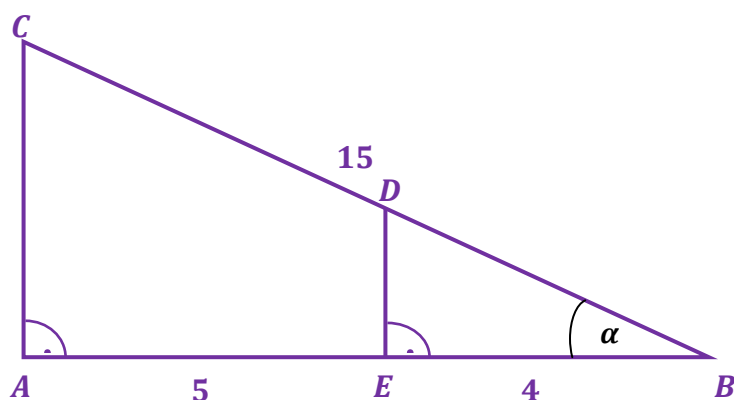
3 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawny wynik: $\frac{130}{3}$ (lub $43\frac{1}{3}$)

2 pkt – obliczenie długości boku $|DE|$: $\frac{16}{3}$

1 pkt – obliczenie długości boku $|AC|$: 12

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Przykładowe pełne rozwiązania



Obliczamy długość boku $|AC|$ przy użyciu twierdzenia Pitagorasa:

$$|AC|^2 + (5 + 4)^2 = 15^2$$

$$|AC|^2 + 81 = 225$$

$$|AC|^2 = 144$$

$$|AC| = 12$$

Obliczamy długość boku $|DE|$.

Sposób I

Skorzystamy z **funkcji trygonometrycznych** w trójkącie prostokątnym. Zapisujemy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|DE|}{4}$$

oraz

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{9}$$

Po przyrównaniu tangensów otrzymujemy

$$\frac{|DE|}{4} = \frac{12}{9}$$

$$9|DE| = 48$$

$$|DE| = \frac{16}{3}$$

Sposób II

Zauważamy, że trójkąty DEB oraz CAB są podobne na cesze kąt-kąt-kąt, zatem z podobieństwa trójkątów układamy zależność:

$$\frac{|DE|}{4} = \frac{|CA|}{9}$$

$$\frac{|DE|}{4} = \frac{12}{9}$$

$$|DE| = \frac{16}{3}$$

Sposób III

Jako, iż $CA \parallel DE$, to skorzystamy z twierdzenia Talesa. Układamy zależność:

$$\frac{|DE|}{4} = \frac{|CA|}{5+4}$$

$$\frac{|DE|}{4} = \frac{|CA|}{9}$$

$$\frac{|DE|}{4} = \frac{12}{9}$$

$$|DE| = \frac{16}{3}$$

Obliczamy pole figury $AEDC$.

Sposób I

Figura $AEDC$ jest trapezem prostokątnym, zatem obliczymy pole trapezu $AEDC$ o podstawach $|DE|$ i $|AC|$ oraz wysokości $|AE|$.

$$P_{AEDC} = \frac{\frac{16}{3} + 12}{2} \cdot 5 = \frac{130}{3}$$

Sposób II

Pole figury $AEDC$ można obliczyć jako różnica pól trójkątów ABC i DEB . Zatem

$$P_{AEDC} = \frac{12 \cdot 9}{2} - \frac{\frac{16}{3} \cdot 4}{2} = \frac{130}{3}$$

Zadanie 19. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 20. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 21. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 22. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 23. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

PP

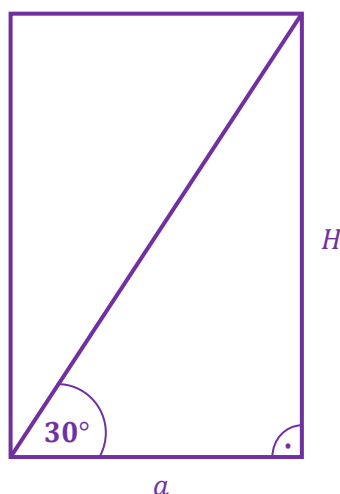
Zadanie 24. (0–3)**Zasady oceniania**

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawny wynik: $6\sqrt{3}$

2 pkt – obliczenie długości krawędzi podstawy graniastopuła: 2

1 pkt – zapisanie zależności między wysokością graniastopuła a jego krawędzią podstawy przy użyciu trygonometrii: $H = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyrażamy wysokość graniastopuła h za pomocą krawędzi podstawy a . Korzystamy z funkcji trygonometrycznych:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{H}{a}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{H}{a}$$

$$H = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

Ze wzoru na pole powierzchni bocznej:

$$P_b = 6 \cdot a \cdot H$$

$$P_b = 6a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}a = 2\sqrt{3}a^2$$

Z polecenia $P_b = 8\sqrt{3}$, zatem

$$2\sqrt{3}a^2 = 8\sqrt{3}$$

$$a^2 = 4$$

$$a = 2$$

Obliczamy pole podstawy:

$$P_p = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$$

Zadanie 25. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A1

Zadanie 26. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 27. (0–2)

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawny wynik: 1

1 pkt – obliczenie $|A| = 20$ (*sposób I*)

ALBO

– obliczenie $|\Omega| = 20$

ALBO

– obliczenie $|A'| = 0$ (*sposób II*)

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Uwagi

1. Jeżeli zdający zapisuje wynik 1 bez żadnych obliczeń oraz stosownego komentarza uzasadniającego rozwiązanie, to otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający zapisuje wynik 1 bez żadnych obliczeń, ale zapisuje stosowny komentarz uzasadniający słuszność rozwiązania, to otrzymuje **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych Ω :

$$|\Omega| = 5 \cdot 4 = 20$$

Sposób I

Aby obliczyć $|A|$ skorzystamy z tabelki

	1	2	3	8	9
4	A	A	A	A	A
5	A	A	A	A	A
6	A	A	A	A	A
7	A	A	A	A	A

Zauważamy, że $|A| = 20$.

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A :

$$P(A) = \frac{20}{20} = 1$$

Sposób II

Zdarzenie A' polega na tym, że wylosujemy liczby, których suma bądź iloczyn nie będą parzyste.

Uzyskujemy $|A'| = 0$, gdyż iloczyn dwóch liczb, z których jedna jest parzysta będzie parzysty, a suma dwóch liczb nieparzystych jest parzysta. Wtedy

$$P(A') = \frac{0}{20} = 0$$

$$P(A) = 1 - P(A')$$

$$P(A) = 1 - 0 = 1$$

Zadanie 28. (0–1)**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 29. (0–1)

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 30. (0–2)

Zasady oceniania

2 pkt – obliczenie liczby wyprodukowanych palet gdy producent zmniejszy ilość mydła o 2,12 litra w każdym z kartonów: 35

1 pkt – obliczenie o ile litrów producent powinien zmniejszyć ilość mydła w każdym z kartonów: 2,12 (lub $\frac{53}{25}$)

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Funkcja $P(x)$ jest kwadratowa, zatem największą wartość osiągnie w wierzchołku paraboli będącej jej wykresem.

Obliczamy o ile litrów producent powinien zmniejszyć ilość mydła w każdym z kartonów:

$$p = -\frac{1,484}{2 \cdot (-0,35)} = 2,12 \in (0, 12,12)$$

Obliczamy ile palet wyprodukuje:

$$P(2,12) = -0,35 \cdot 2,12^2 + 1,484 \cdot 2,12 + 33,42696 = 35$$

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

PESEL

Miejsce na naklejkę.

Sprawdź, czy kod na naklejce to
M-100.

Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Symbol arkusza

MMAP-P0-**100**-2505

DATA: **6 maja 2025 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

☐ Uprawnienie zdającego do
dostosowania w związku z dyskalkulią.

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

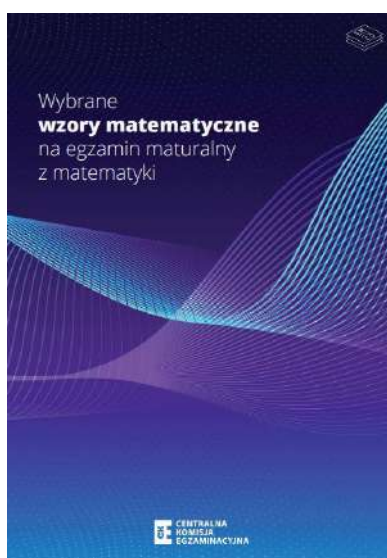
1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.





Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 31 stron (zadania 1–31).
Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Symbol  zamieszczony w nagłówku zadania oznacza, że rozwiązanie zadania zamkniętego musisz przenieść na kartę odpowiedzi. Ocenie podlegają wyłącznie odpowiedzi zaznaczone na karcie odpowiedzi.
4. Odpowiedzi do zadań zamkniętych zaznacz na karcie odpowiedzi w części przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj  pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem  i zaznacz właściwe.
5. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
6. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
7. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
8. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
9. Nie wpisuj żadnych znaków w tabelkach przeznaczonych dla egzaminatora.
Tabelki umieszczone są na marginesie przy odpowiednich zadaniach.
10. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
11. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla i linijki oraz z kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



**Zadania egzaminacyjne są wydrukowane
na następnych stronach.**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $(\sqrt{32} - \sqrt{2})^2$ jest równa

- A. 16** **B. 18** **C. 30** **D. 34**

Brudnopis

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\frac{5^{12} + 5^{13} + 5^{14}}{5^{12}}$ jest równa

- A.** 30 **B.** 31 **C.** 5^{12} **D.** 5^{27}

Brudnopis

5.
0-1-2

Zadanie 5. (0–2)

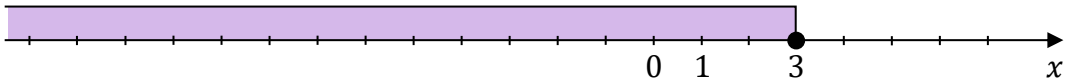
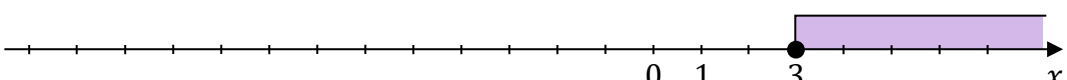
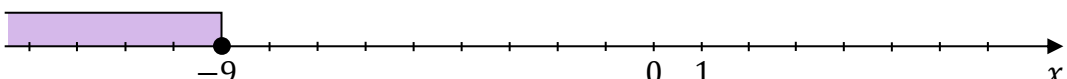
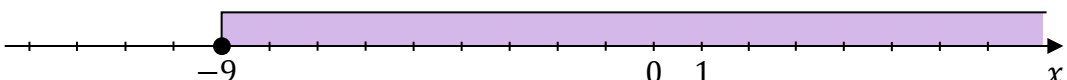
Wykaż, że dla każdej nieparzystej liczby naturalnej n liczba $3n^2 + 2n + 7$ jest podzielna przez 4.

Zadanie 6. (0–1)

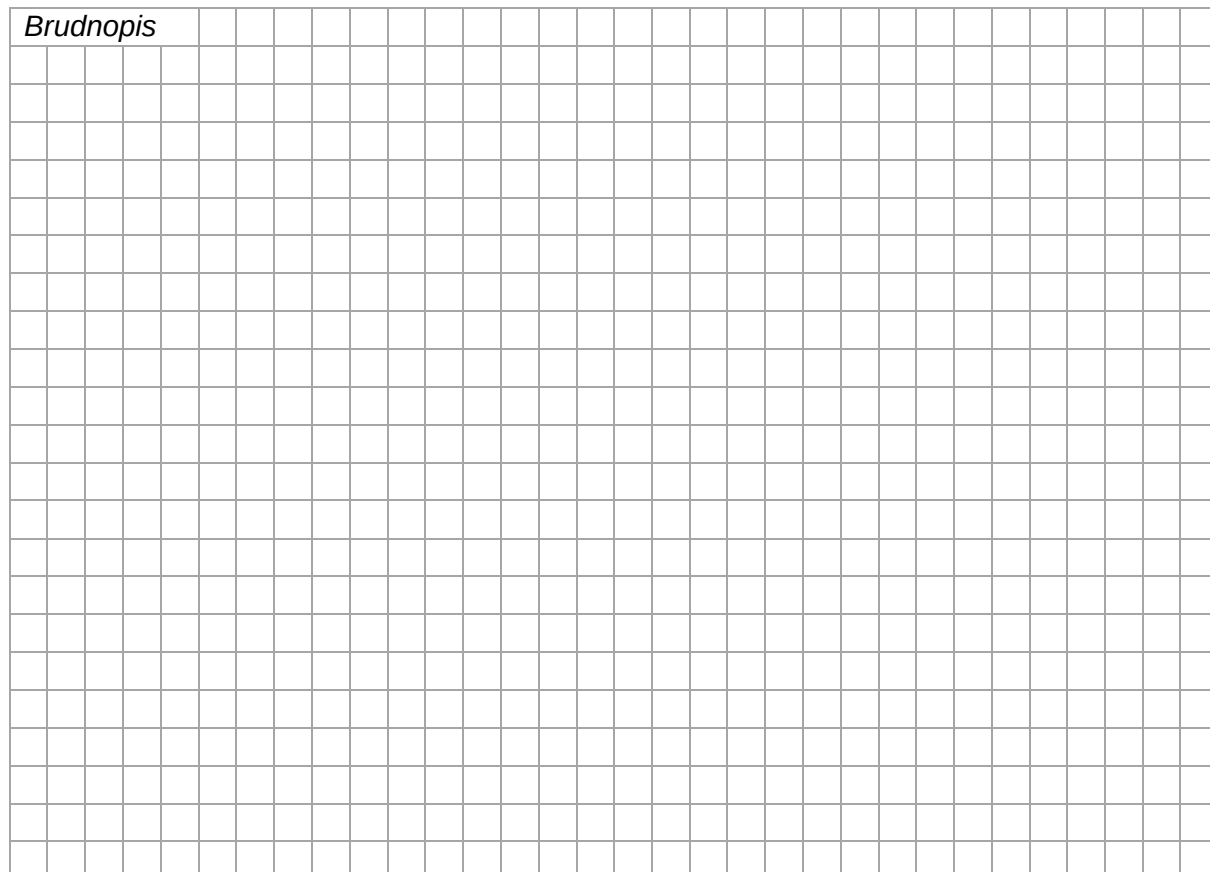
Dana jest nierówność

$$3 - 2(1 - 2x) \geq 2x - 17$$

Na którym rysunku poprawnie zaznaczono na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających powyższą nierówność? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 
- B. 
- C. 
- D. 

Brudnopis



Zadanie 9. (0–2)

Zarząd firmy wydzielił z budżetu kwotę 1 200 000 złotych łącznie na projekty badawcze dla dwóch zespołów: A i B. W pierwszym półroczu realizacji tych projektów oba zespoły wykorzystały łącznie 146 700 złotych – zespół A wykorzystał 13% przyznanych mu środków, a zespół B wykorzystał 11% przyznanych mu środków.

**Oblicz kwotę przyznaną zespołowi A na realizację projektu badawczego.
Zapisz obliczenia.**

9.	0-1-2

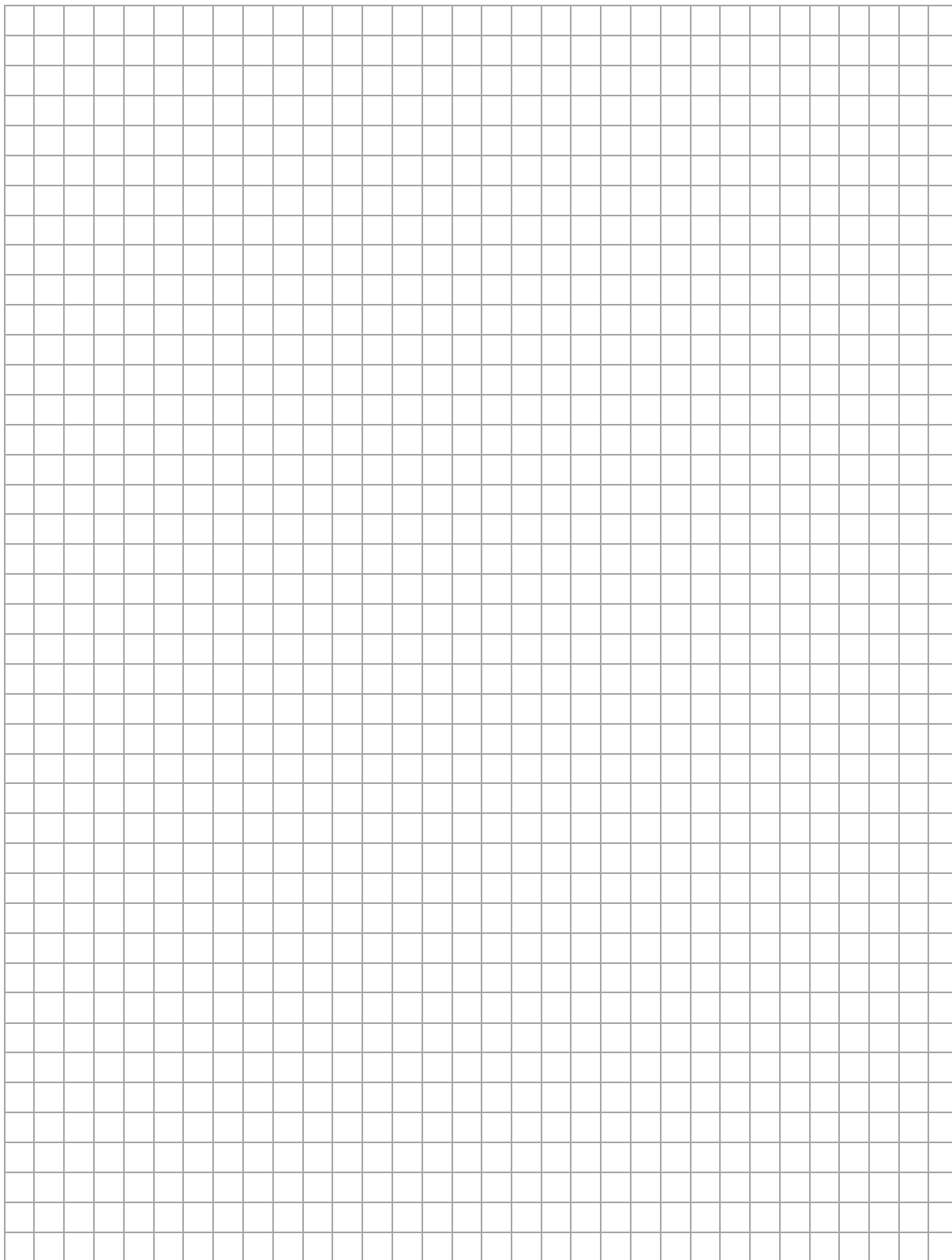
Wiecej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl

Zadanie 10. (0–2)

Rozwiąż nierówność

$$3(2x^2 + 1) < 11x$$

Zapisz obliczenia.

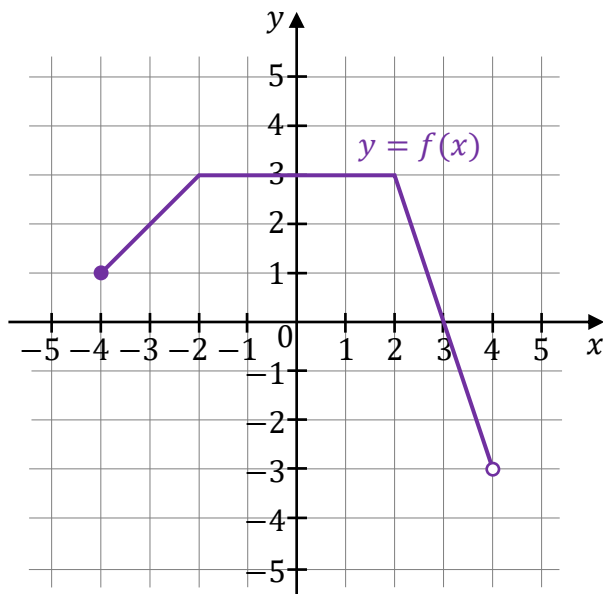


Zadanie 11. (0–4)

Funkcja f jest określona następująco:

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{dla } x \in [-4, -2] \\ 3 & \text{dla } x \in (-2, 2] \\ -3x + 9 & \text{dla } x \in (2, 4) \end{cases}$$

Wykres funkcji $y = f(x)$ przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku poniżej.



Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie przedziały w wy kropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe.

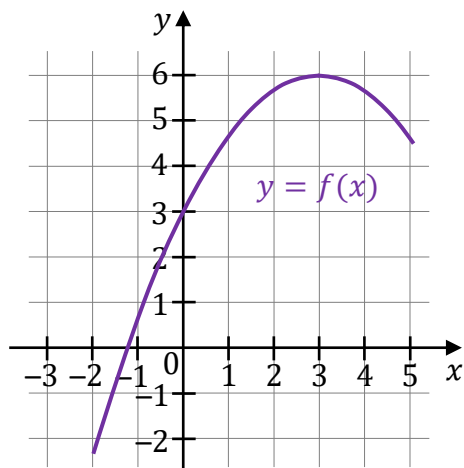
1. Dziedziną funkcji f jest przedział
2. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział
3. Zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie, jest przedział
4. Zbiorem wszystkich rozwiązań równania $f(x) = 3$ jest przedział

11.
0–1–
2–3–4

Brudnopis																			

Zadanie 12.

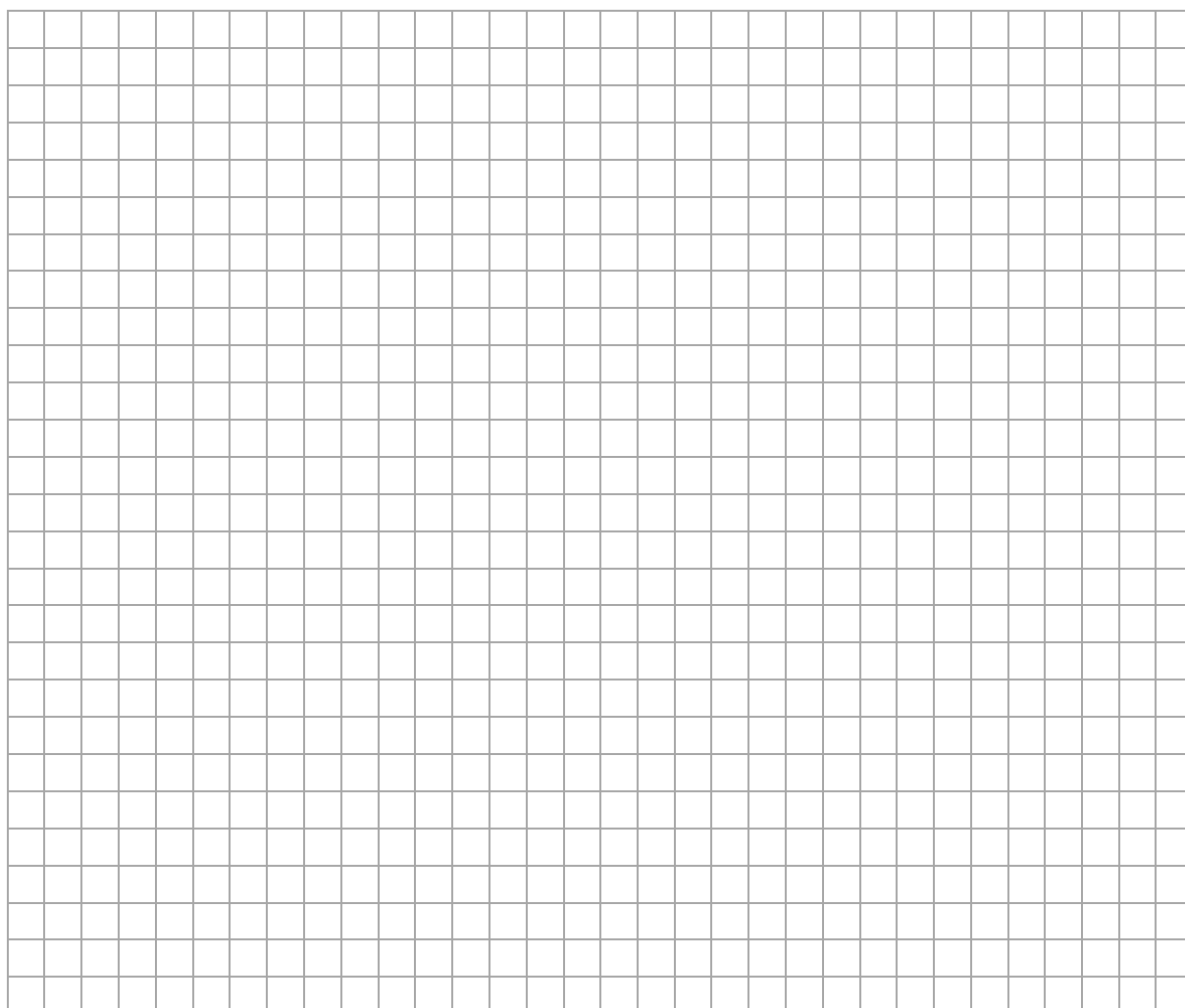
W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) przedstawiono fragment paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej f (zobacz rysunek). Wierzchołek tej paraboli ma współrzędne $(3, 6)$. Ta parabola przecina oś Oy w punkcie o współrzędnych $(0, 3)$.

**12.1.**

0-1-2

Zadanie 12.1. (0-2)

Wyznacz wzór funkcji f w postaci kanonicznej. Zapisz obliczenia.



Zadanie 12.2. (0–1)**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**Ośią symetrii wykresu funkcji f jest prosta o równaniu

- A. $x = 3$ B. $x = -3$ C. $y = 6$ D. $y = -6$

*Brudnopis***Zadanie 12.3. (0–1)**Funkcja g jest określona dla każdej liczby rzeczywistej x wzorem $g(x) = f(x) - 3$.Liczby x_1 oraz x_2 są różnymi miejscami zerowymi funkcji g .**Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednią liczbę w wy kropkowanym miejscu, aby zdanie było prawdziwe.**Suma $x_1 + x_2$ jest równa**12.3.**

0–1

Brudnopis

Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = (3 - m)x - 4$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja f nie ma miejsca zerowego dla m równego

- A.** (-3) **B.** 0 **C.** 3 **D.** 4

Brudnopis

Zadanie 14.

Ciąg (a_n) jest określony następująco:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \end{cases} \text{ dla każdej liczby naturalnej } n \geq 1$$

Zadanie 14.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Trzeci wyraz ciągu (a_n) jest równy

A. 4

B. 5

C. 7

D. 11

Brudnopis

Zadanie 14.2. (0–1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Ciąg (a_n) jest arytmetyczny.	P	F
Ciąg (a_n) jest geometryczny.	P	F

Brudnopis

Zadanie 15. (0–3)

Wyznacz wartość m , dla której trzywyrazowy ciąg

$$(2m + 11, m^2 + 3, 5 - m)$$

jest arytmetyczny i malejący. Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, equal-sized squares formed by thin gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Zadanie 16. (0–1)

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, w którym $a_1 = 27$ oraz $a_2 = 9$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Czwarty wyraz ciągu (a_n) jest równy

A. $\frac{1}{3}$

B. 1

C. 3

D. 729

Brudnopis

Zadanie 17. (0–1)

Kąt α jest ostry i spełnia warunek $\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha = 2 \sin \alpha$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Cosinus kąta α jest równy

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

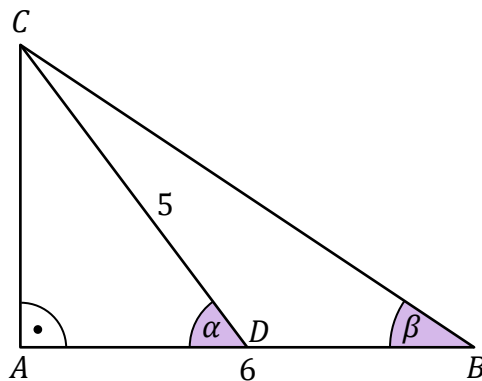
C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Brudnopis

Zadanie 18.

Dany jest trójkąt prostokątny ABC , w którym bok BC jest przeciwprostokątną, przyprostokątna AB ma długość 6, a środkowa CD ma długość 5. Oznaczmy kąt ADC przez α , natomiast kąt ABC – przez β (zobacz rysunek).

**Zadanie 18.1. (0–1)**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Tangens kąta α jest równy

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{4}{5}$

D. $\frac{4}{3}$

Brudnopis

Zadanie 18.2. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Sinus kąta β jest równy

A. $\frac{2}{\sqrt{13}}$

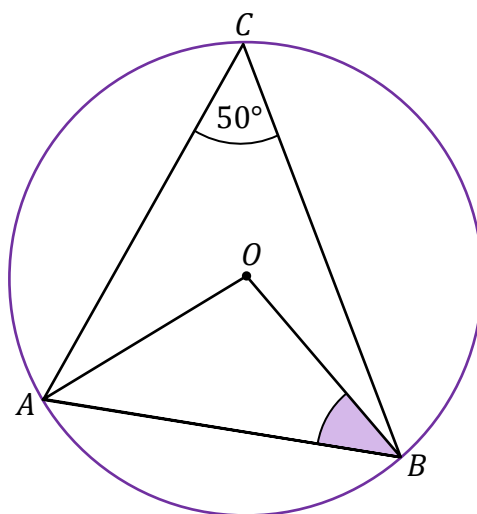
B. $\frac{3}{\sqrt{13}}$

C. $\frac{5}{2\sqrt{13}}$

D. $\frac{4}{5}$

Brudnopis

Punkty A , B oraz C leżą na okręgu o środku w punkcie O .
Miara kąta BCA jest równa 50° (zobacz rysunek).



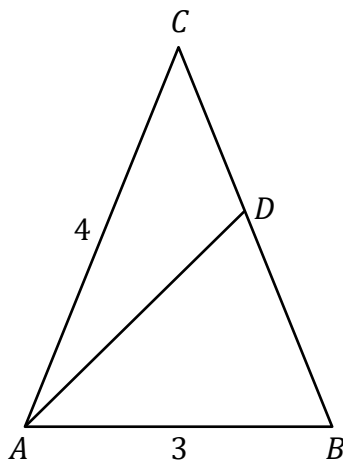
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta ostrego ABO jest równa

- A.** 20° **B.** 35° **C.** 40° **D.** 50°

[illegible]

Na boku BC , między punktami B i C , wybrano taki punkt D , że trójkąty ABC i BDA są podobne (zobacz rysunek).



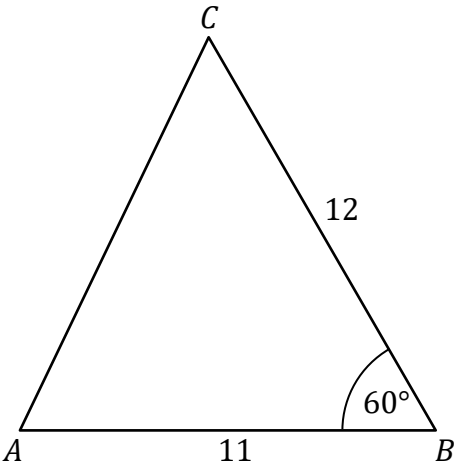
Odcinek BD ma długość

- A. 2** **B. 2,25** **C. 2,5** **D. 3**

Brudnopis

Zadanie 21. (0–1)

Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AB| = 11$, $|BC| = 12$ oraz $|\sphericalangle ABC| = 60^\circ$ (zobacz rysunek).



Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Trójkąt ABC jest równoramienny.	P	F
Pole trójkąta ABC jest równe $33\sqrt{3}$.	P	F

Brudnopis

Zadanie 24. (0–1)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkt $P = (0, 0)$ leży na okręgu $\mathcal{O}$ o środku w punkcie $S = (2, 4)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Okrąg $\mathcal{O}$ jest określony równaniem

A. $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 2\sqrt{5}$

B. $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 20$

C. $(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 2\sqrt{5}$

D. $(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 20$

Brudnopis

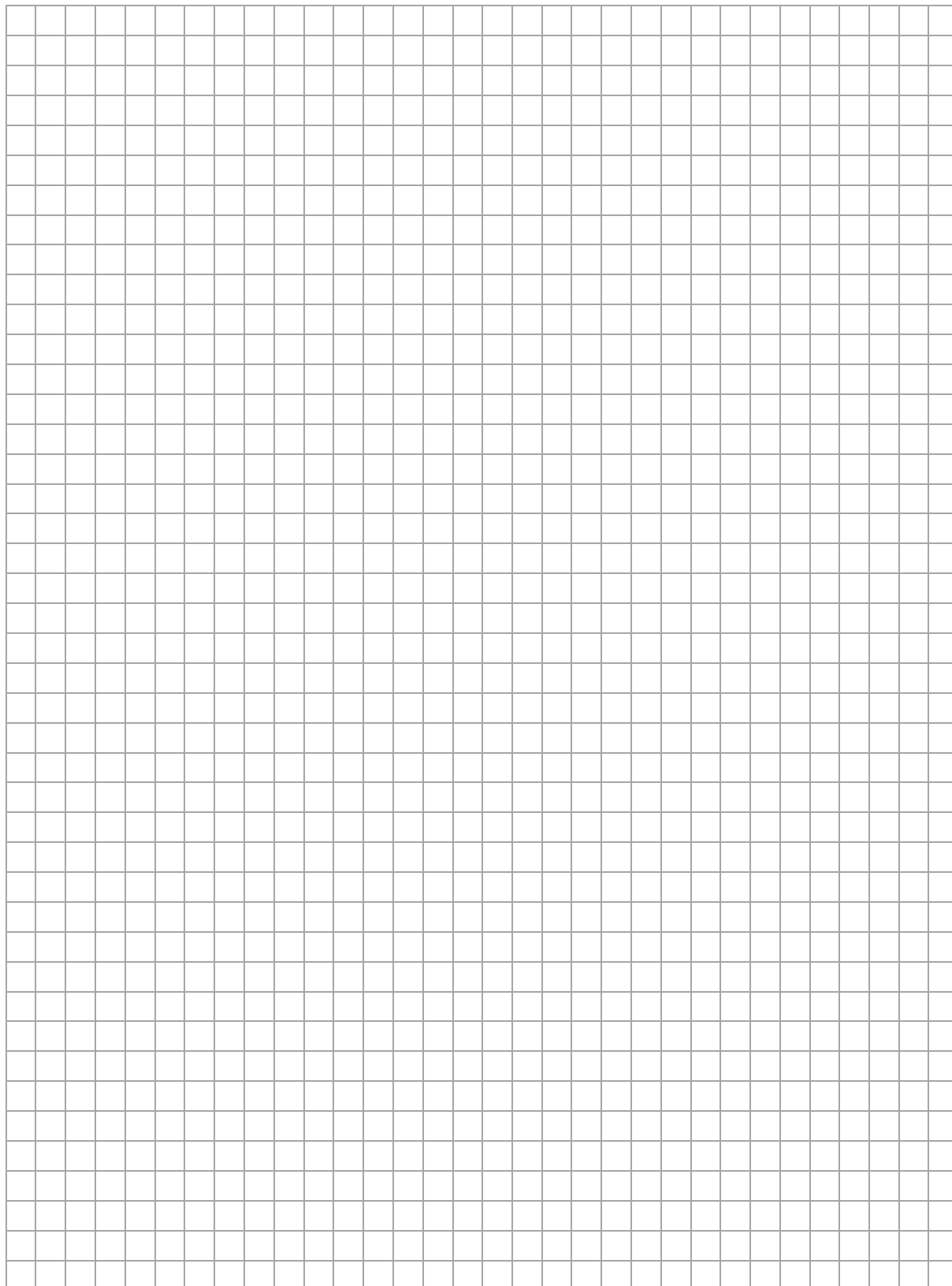
Zadanie 25. (0–3)

Tworząca stożka ma długość 8. Kąt rozwarcia tego stożka ma miarę 120° .

25.

0–1–

2–3

Oblicz objętość tego stożka. Zapisz obliczenia.

Zadanie 28. (0–1)

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ścianie ma inną liczbę oczek – od jednego oczka do sześciu oczek. Zdarzenie A polega na tym, że suma liczb wyrzuconych oczek będzie równa 11.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

A. $\frac{1}{36}$

B. $\frac{6}{36}$

C. $\frac{11}{36}$

D. $\frac{2}{36}$

Brudnopis

Zadanie 29. (0–1)

Średnia arytmetyczna siedmiu liczb: 1, 2, 3, 4, 5, x , y , jest równa 3.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Suma $x + y$ jest równa

A. 4

B. 5

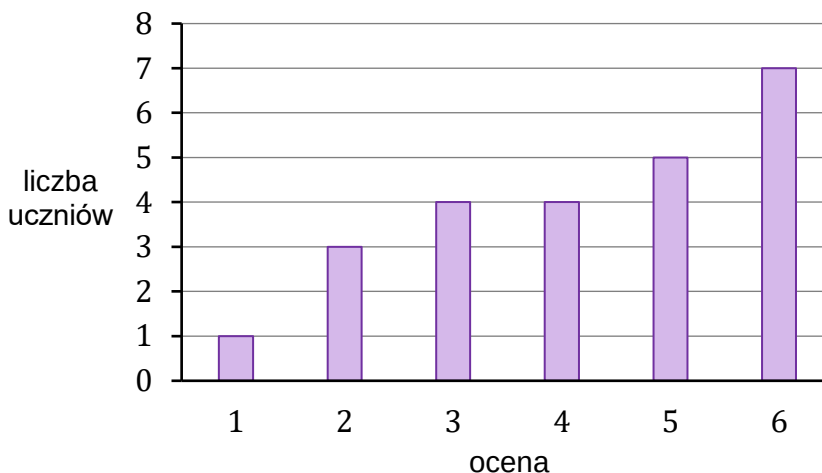
C. 6

D. 7

Brudnopis

Zadanie 30. (0–2)

Na diagramie przedstawiono wyniki sprawdzianu z matematyki w pewnej klasie maturalnej liczącej 24 uczniów. Na osi poziomej podano oceny, które uzyskali uczniowie tej klasy, a na osi pionowej podano liczbę uczniów, którzy otrzymali daną ocenę.



Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe.

1. Mediana ocen uzyskanych z tego sprawdzianu przez uczniów tej klasy jest równa
2. Dominanta ocen uzyskanych z tego sprawdzianu przez uczniów tej klasy jest równa

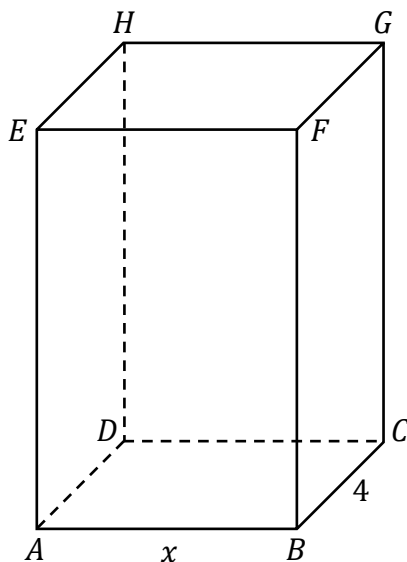
30.	
0-1-2	

[illegible]

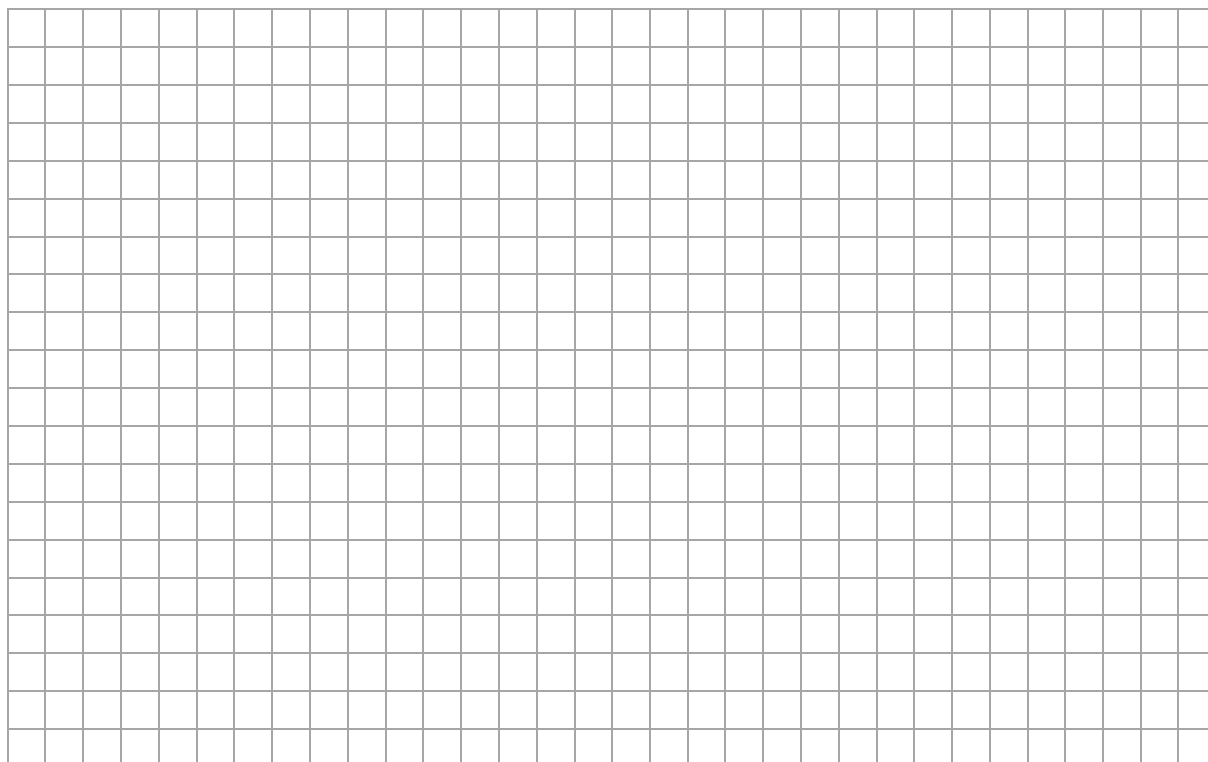
Zadanie 31. (0–4)

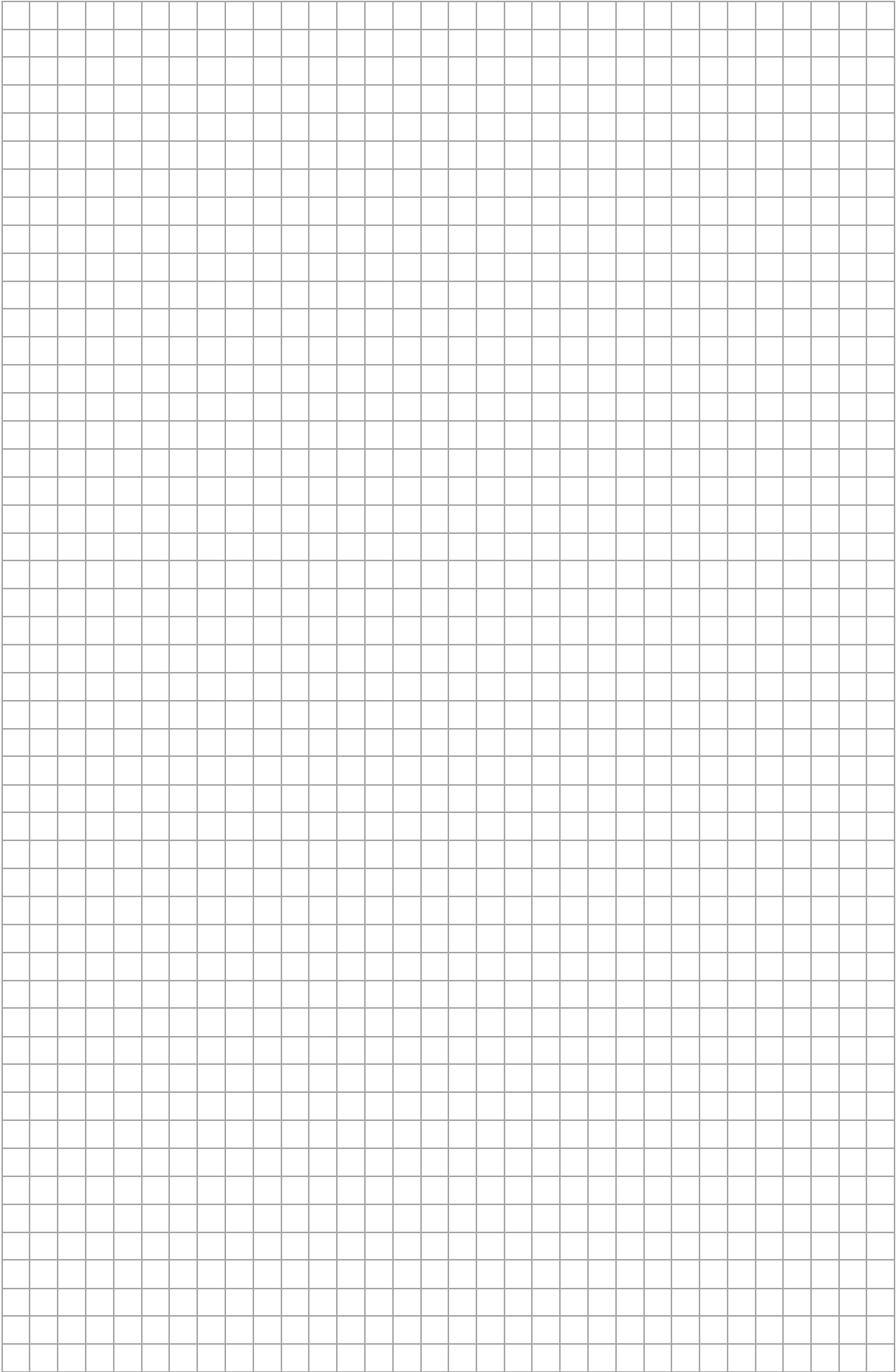
Rozważamy wszystkie prostopadłościany $ABCDEFGH$, w których krawędź BC ma długość 4 oraz suma długości wszystkich krawędzi wychodzących z wierzchołka B jest równa 15 (zobacz rysunek).

Niech $P(x)$ oznacza funkcję pola powierzchni całkowitej takiego prostopadłościanu w zależności od długości x krawędzi AB .

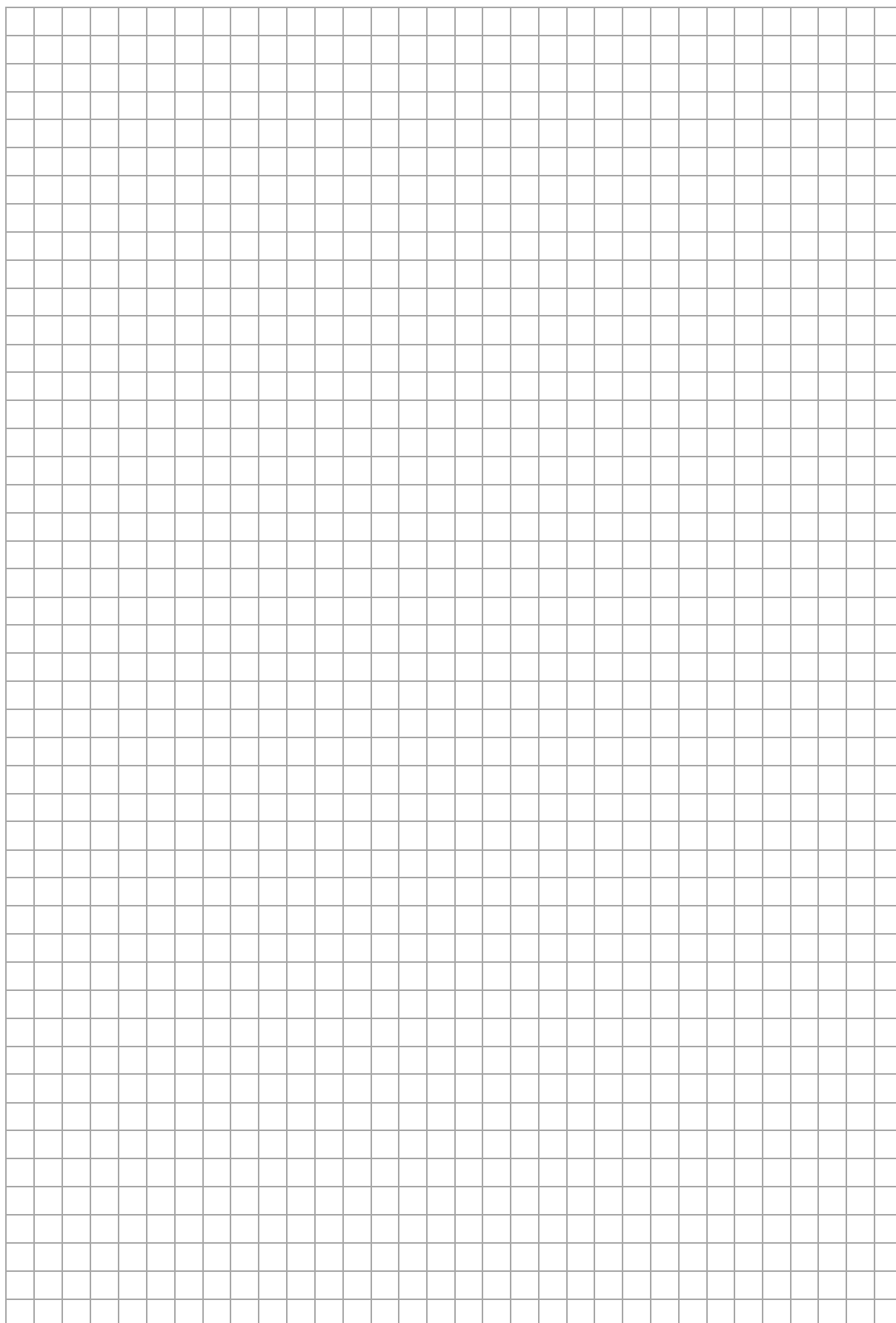
**31.**0–1–
2–3–4

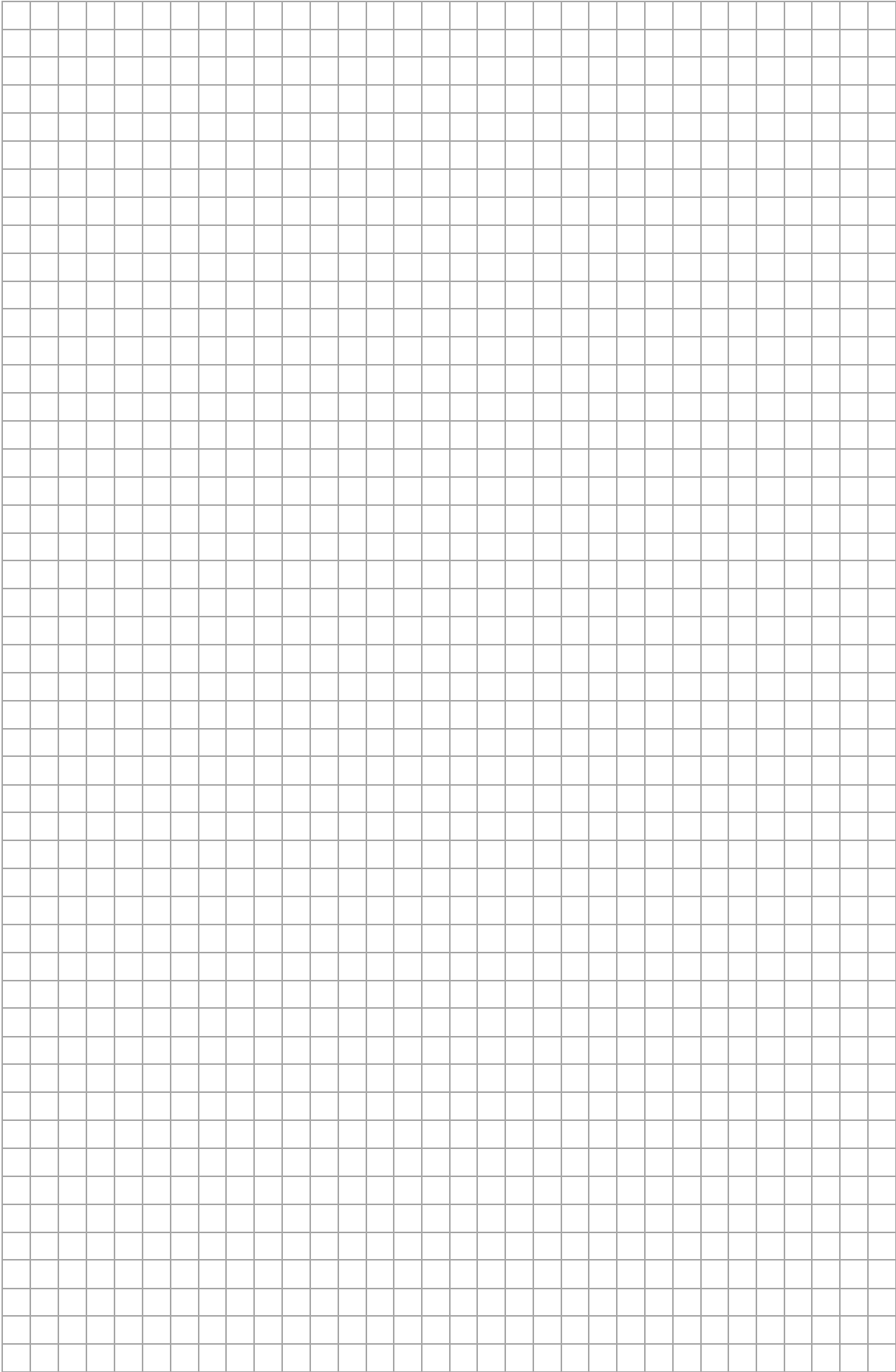
Wyznacz wzór i dziedzinę funkcji P . Oblicz długość x krawędzi AB tego z rozważanych prostopadłościanów, którego pole powierzchni całkowitej jest największe. Zapisz obliczenia.





BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)





MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Formuła 2023



MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Formuła 2023



MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Formuła 2023



<i>Rodzaj dokumentu:</i>	Zasady oceniania rozwiązań zadań
<i>Egzamin:</i>	Egzamin maturalny
<i>Przedmiot:</i>	Matematyka
<i>Poziom:</i>	Poziom podstawowy
<i>Formy arkusza:</i>	MMAP-P0-100 (wersje arkusza: A i B), MMAP-P0-200, MMAP-P0-300, MMAP-P0-400, MMAP-P0-700, MMAP-P0-Q00, MMAP-P0-K00, MMAU-P0-100
<i>Termin egzaminu:</i>	6 maja 2025 r.
<i>Data publikacji dokumentu:</i>	27 czerwca 2025 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże zadanie i otrzyma poprawny wynik, lecz w końcowym zapisie przekształca ten wynik i popełnia przy tym błąd, to może uzyskać maksymalną liczbę punktów.
3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania określone w podstawie programowej ¹	
Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: I.3) stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia [...]; I.4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach.

Zasady oceniania

- 1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A
B

Wersja B
C

¹ Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz.U. z 2024 r. poz. 1019).

Zadanie 2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: I.4) stosuje [...] prawa działań na potęgach [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A

B

Wersja B

D

Zadanie 3. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na [...] logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A

A

Wersja B

C

Zadanie 4. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$; II.2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A

Wersja B

C

D

Zadanie 5. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: I.2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia [...].

Zasady oceniania

2 pkt – zapisanie, że $n = 2l + 1$, **oraz** przekształcenie wyrażenia $3n^2 + 2n + 7$ do postaci $4(3l^2 + 4l + 3)$

ALBO

– przekształcenie wyrażenia $3n^2 + 2n + 7$ do postaci sumy algebraicznej liczb podzielnych przez 4 **oraz** uzasadnienie, że każdy ze składników tej sumy jest podzielny przez 4,

ALBO

– rozpatrzenie przypadku, gdy $n = 4l + 1$, tj. przekształcenie wyrażenia $3n^2 + 2n + 7$ do postaci $4(12l^2 + 8l + 3)$, **oraz** rozpatrzenie przypadku, gdy $n = 4l + 3$, tj. przekształcenie wyrażenia $3n^2 + 2n + 7$ do postaci $4(12l^2 + 20l + 10)$,

ALBO

- zapisanie, że liczba $3n^2$ przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3 **oraz** zapisanie, że liczba $2n$ przy dzieleniu przez 4 daje resztę 2 **oraz** zapisanie, że suma reszt z dzielenia przez 4 liczb: $3n^2$, $2n$, 7, jest podzielna przez 4.

1 pkt – zapisanie, że $n = 2l + 1$, **oraz** przekształcenie wyrażenia $3n^2 + 2n + 7$ do postaci $3(4l^2 + 4l + 1) + 2(2l + 1) + 7$

ALBO

- przekształcenie wyrażenia $3n^2 + 2n + 7$ do postaci sumy algebraicznej liczb podzielnych przez 4, w której podzielność przez 4 jednego ze składników nie wymaga uzasadnienia: $4(n^2 + n + 2) - (n + 1)^2$, $(3n - 1)(n + 1) + 8$, $4(n^2 + n + 1) - (n + 3)(n - 1)$,

ALBO

- przekształcenie wyrażenia $3n^2 + 2n + 7$ do postaci sumy algebraicznej liczb podzielnych przez 4: $2n(n + 1) + (n^2 + 7)$, $(n + 1)^2 + 2(n^2 + 3)$, **oraz** uzasadnienie podzielności przez 4 jednego ze składników tej sumy,

ALBO

- rozpatrzenie przypadku, gdy $n = 4l + 1$, tj. przekształcenie wyrażenia $3n^2 + 2n + 7$ do postaci $4(12l^2 + 8l + 3)$,

ALBO

- rozpatrzenie przypadku, gdy $n = 4l + 3$, tj. przekształcenie wyrażenia $3n^2 + 2n + 7$ do postaci $4(12l^2 + 20l + 10)$,

ALBO

- zapisanie, że liczba $3n^2$ przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3 **oraz** zapisanie, że liczba $2n$ przy dzieleniu przez 4 daje resztę 2.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość tezy tylko dla wybranych wartości n , to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający wykazuje, że dla każdej liczby naturalnej nieparzystej n wyrażenie $3n^2 - 2n + 7$ (zamiast $3n^2 + 2n + 7$) jest podzielne przez 4, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający przedstawia n w postaci $2l + 1$, a następnie przekształca wyrażenie $3n^2 + 2n + 7$ np. do postaci $4(3l^2 + 4l + 3)$ i kontynuuje rozumowanie, popełniając błędy we wnioskowaniu, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający przedstawia n w postaci $2l + 1$, a następnie błędnie przekształca wyrażenie $3(2l + 1)^2 + 2(2l + 1) + 7$, ale uzyskuje całkowitą wielokrotność liczby 4 postaci $4 \cdot (a \cdot l^2 + b \cdot l + c)$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ i $a \neq 0$, to może otrzymać **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Ponieważ liczba n jest nieparzysta, więc zapisujemy ją w postaci $n = 2l + 1$, gdzie $l \in \mathbb{Z}$ i $l \geq 0$. Wówczas

$$\begin{aligned} 3n^2 + 2n + 7 &= 3(2l + 1)^2 + 2(2l + 1) + 7 = 3(4l^2 + 4l + 1) + 4l + 2 + 7 = \\ &= 12l^2 + 12l + 3 + 4l + 9 = 12l^2 + 16l + 12 = 4(3l^2 + 4l + 3) \end{aligned}$$

Ponieważ $l \in \mathbb{Z}$, więc również suma $3l^2 + 4l + 3$ jest liczbą całkowitą. Zatem iloczyn $4(3l^2 + 4l + 3)$ jest podzielny przez 4. To należało wykazać.

Sposób II

Zapisujemy liczbę $3n^2 + 2n + 7$ w postaci sumy algebraicznej liczb podzielnych przez 4, np.:

$$3n^2 + 2n + 7 = 4n^2 - n^2 + 4n - 2n + 8 - 1 = 4(n^2 + n + 2) - (n + 1)^2$$

Liczba $4(n^2 + n + 2)$ jest podzielna przez 4 dla dowolnej liczby całkowitej n .

Liczba n jest nieparzysta, zatem liczba $n + 1$ jest parzysta. Stąd jej kwadrat jest liczbą podzielną przez 4. Zatem liczba $3n^2 + 2n + 7$ jest podzielna przez 4 jako różnica liczb podzielnych przez 4. To należało wykazać.

Sposób III

Reszty z dzielenia liczby naturalnej nieparzystej przez 4 mogą być równe jedynie 1 lub 3.

Rozważmy dwa przypadki.

Przypadek pierwszy – gdy n jest liczbą, która przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1.

Wtedy możemy ją zapisać w postaci $n = 4l + 1$, gdzie $l \in \mathbb{Z}$ i $l \geq 0$. Wówczas

$$\begin{aligned} 3n^2 + 2n + 7 &= 3(4l + 1)^2 + 2(4l + 1) + 7 = 3(16l^2 + 8l + 1) + 8l + 2 + 7 = \\ &= 48l^2 + 24l + 3 + 8l + 9 = 48l^2 + 32l + 12 = 4(12l^2 + 8l + 3) \end{aligned}$$

Ponieważ $l \in \mathbb{Z}$, więc również suma $12l^2 + 8l + 3$ jest liczbą całkowitą. Zatem iloczyn $4(12l^2 + 8l + 3)$ jest podzielny przez 4.

Przypadek drugi – gdy n jest liczbą, która przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3.

Wtedy możemy ją zapisać w postaci $n = 4l + 3$, gdzie $l \in \mathbb{Z}$ i $l \geq 0$. Wówczas

$$\begin{aligned} 3n^2 + 2n + 7 &= 3(4l + 3)^2 + 2(4l + 3) + 7 = 3(16l^2 + 24l + 9) + 8l + 6 + 7 = \\ &= 48l^2 + 72l + 27 + 8l + 13 = 48l^2 + 80l + 40 = 4(12l^2 + 20l + 10) \end{aligned}$$

Ponieważ $l \in \mathbb{Z}$, więc również suma $12l^2 + 20l + 10$ jest liczbą całkowitą. Zatem iloczyn $4(12l^2 + 20l + 10)$ jest podzielny przez 4. To należało wykazać.

Sposób IV

Ponieważ liczba n jest nieparzysta, więc liczba n^2 przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1. Stąd wynika, że liczba $3n^2$ daje przy dzieleniu przez 4 resztę 3, a liczba $2n$ daje przy dzieleniu przez 4 resztę 2. Ponadto liczba 7 daje przy dzieleniu przez 4 resztę 3.

Zatem reszta z dzielenia przez 4 liczby $3n^2 + 2n + 7$ jest równa reszcie z dzielenia przez 4 liczby $3 + 2 + 3 = 8$. Liczba 8 jest podzielna przez 4, zatem liczba $3n^2 + 2n + 7$ jest również podzielna przez 4. To należało wykazać.

Zadanie 6. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: III.3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą. I.6) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A

D

Wersja B

D

Zadanie 7. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.5) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A

A

Wersja B

A

Zadanie 8. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: II.4) mnoży [...] wyrażenia wymierne.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A

Wersja B

C

B

Zadanie 9. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: IV.2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 735 000 zł.

1 pkt – zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć kwoty przyznane poszczególnym zespołom, np.

$$x + y = 1\,200\,000 \quad \text{oraz} \quad 0,13x + 0,11y = 146\,700$$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą pozwalającego obliczyć kwotę przyznaną zespołowi A, np.:

$$2\% \cdot x = 14\,700,$$

$$0,13x + 0,11 \cdot (1\,200\,000 - x) = 146\,700,$$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą pozwalającego obliczyć kwotę przyznaną zespołowi B, np.

$$0,13 \cdot (1\,200\,000 - y) + 0,11y = 146\,700.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający sprawdza warunki zadania dla wybranych par liczb x oraz y i wskaże właściwą odpowiedź, ale nie uzasadni, że jest to jedyne rozwiązanie zadania, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający w rozwiązaniu używa wartości przybliżonych i otrzymuje wynik różny od 735 000, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Oznaczmy:

x – kwota przyznana zespołowi A,

y – kwota przyznana zespołowi B.

Po uwzględnieniu warunków zadania otrzymujemy:

$$x + y = 1\,200\,000 \quad \text{oraz} \quad 0,13x + 0,11y = 146\,700$$

Z pierwszego z tych równań wyznaczamy $y = 1\,200\,000 - x$ i podstawiamy w miejsce y do drugiego z równań, otrzymując

$$0,13x + 0,11 \cdot (1\,200\,000 - x) = 146\,700$$

$$0,13x + 132\,000 - 0,11x = 146\,700$$

$$0,02x = 14\,700$$

$$x = 735\,000$$

Zespół A otrzymał 735 000 zł.

Zadanie 10. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.4) rozwiązuje [...] nierówności kwadratowe.

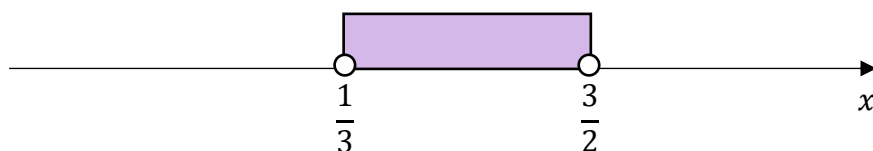
Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i zapisanie zbioru rozwiązań nierówności:

$$x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$$

ALBO

- zastosowanie poprawnej metody i przedstawienie zbioru rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziału, np.



1 pkt – obliczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego $6x^2 - 11x + 3$:

$$x_1 = \frac{1}{3} \text{ oraz } x_2 = \frac{3}{2}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

- Jeżeli zdający, obliczając pierwiastki trójmianu $6x^2 - 11x + 3$, popełni błędy (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionych błędów zapisze zbiór rozwiązań nierówności, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
- Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego, w przypadku gdy błędnie obliczony przez zdającego wyróżnik Δ jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
- Jeżeli zdający rozpatruje inny niż podany w zadaniu trójmian kwadratowy, który nie wynika z błędu przekształcenia (np. $3(2x^2 + 1)$), i w konsekwencji rozpatruje inną nierówność (np. $3(2x^2 + 1) < 0$), to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
- Jeżeli zdający poda zbiór rozwiązań w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziału i jednocześnie zapisze niewłaściwy przedział jako zbiór rozwiązań (np. $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right]$), to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający spełni kryterium za 1 punkt, a następnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right)$, to otrzymuje **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zapisujemy nierówność w postaci $6x^2 - 11x + 3 < 0$ i obliczamy miejsca zerowe funkcji $y = 6x^2 - 11x + 3$.

Obliczamy wyróżnik trójmianu $6x^2 - 11x + 3$:

$$\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 3 = 49$$

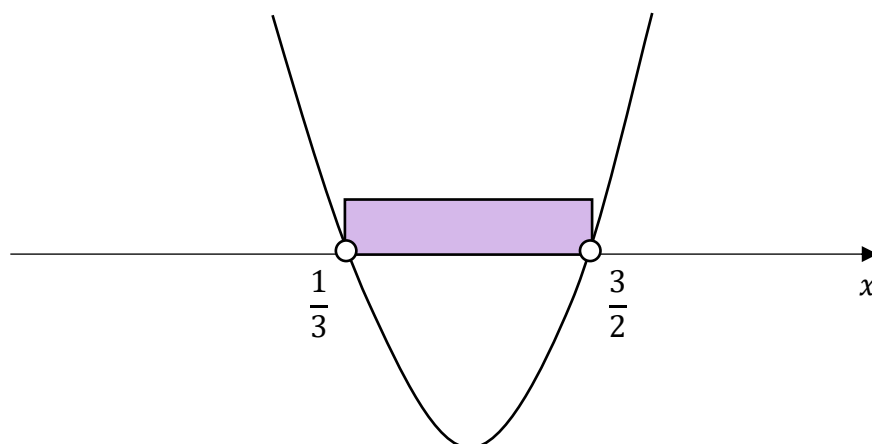
Stąd

$$x_1 = \frac{-(-11) - \sqrt{49}}{2 \cdot 6} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-(-11) + \sqrt{49}}{2 \cdot 6} = \frac{3}{2}$$

Szkicujemy wykres funkcji $y = 6x^2 - 11x + 3$.

Odczytujemy argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne.



Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$.

Zadanie 11. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane. I.6) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego [...].

Zasady oceniania

- 4 pkt – poprawne uzupełnienie czterech zdań.
- 3 pkt – poprawne uzupełnienie trzech zdań.
- 2 pkt – poprawne uzupełnienie dwóch zdań.
- 1 pkt – poprawne uzupełnienie jednego zdania.
- 0 pkt – brak spełnienia powyższych kryteriów.

Rozwiązanie

1. Dziedziną funkcji f jest przedział $[-4, 4)$.
2. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-3, 3]$.
3. Zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie, jest przedział $[-4, 3)$.
4. Zbiorem wszystkich rozwiązań równania $f(x) = 3$ jest przedział $[-2, 2]$.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej przy zachowaniu poprawnych krańców przedziału, np. zapisze, że dziedziną funkcji f jest przedział $(4, -4]$, to otrzymuje **1 punkt** za tak uzupełnione zdanie.

Zadanie 12.1. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda i zapisanie wzoru funkcji f w postaci kanonicznej:

$$f(x) = -\frac{1}{3}(x - 3)^2 + 6.$$

1 pkt – zapisanie wzoru funkcji f w postaci $f(x) = a(x - 3)^2 + 6$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą prowadzącego do obliczenia a , np.:

$$3 = a(0 - 3)^2 + 6, \quad \frac{3a - 1}{2a} = 3,$$

ALBO

– obliczenie (lub podanie wraz z uzasadnieniem) współczynnika a : $a = -\frac{1}{3}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisze $f(x) = -\frac{1}{3}(x - 3)^2 + 6$ i nie obliczy (ani nie uzasadni), że

$$a = -\frac{1}{3}, \text{ to otrzymuje } \mathbf{1 \text{ punkt}}.$$

2. Jeżeli zdający zapisze wzór funkcji f w postaci $f(x) = a(x - 3)^2 + 6$ oraz poprawnie obliczy współczynnik a , to otrzymuje **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązania*Sposób I*

Korzystamy ze wzoru na postać kanoniczną funkcji kwadratowej i zapisujemy:

$$f(x) = a(x - 3)^2 + 6, \text{ gdzie } a \neq 0$$

Punkt $(0, 3)$ leży na wykresie funkcji f , więc

$$f(0) = 3$$

$$a(0 - 3)^2 + 6 = 3$$

$$9a = -3$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

Zatem $f(x) = -\frac{1}{3}(x-3)^2 + 6$.

Sposób II

Korzystamy ze wzoru na postać ogólną funkcji kwadratowej i zapisujemy:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ gdzie } a \neq 0$$

Punkty $(0, 3)$, $(3, 6)$, $(6, 3)$ leżą na wykresie funkcji f , zatem

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(3) = 6 \\ f(6) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 3 \\ a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 6 \\ a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 3 \\ 9a + 3b + c = 6 \\ 36a + 6b + c = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9a + 3b + 3 = 6 \\ 36a + 6b + 3 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a + b = 1 \\ 6a + b = 0 \end{cases}$$

Odejmujemy równania stronami i otrzymujemy:

$$-3a = 1$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

Stąd

$$b = 1 - 3a = 1 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 + 1 = 2$$

Zapisujemy wzór funkcji f w postaci ogólnej:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 3$$

Przekształcamy wzór funkcji f do postaci kanonicznej:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 3 = -\frac{1}{3}(x^2 - 6x - 9) = -\frac{1}{3}(x^2 - 6x + 9 - 18) = \\ &= -\frac{1}{3}[(x-3)^2 - 18] = -\frac{1}{3}(x-3)^2 + 6 \end{aligned}$$

Zadanie 12.2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.11) wykorzystuje własności funkcji [...] kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A

A

Wersja B

B

Zadanie 12.3. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji [...] $y = f(x) + b$; V.4) odczytuje z wykresu funkcji: [...] miejsca zerowe [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

RozwiązanieSuma $x_1 + x_2$ jest równa 6.

Zadanie 13. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej; V.6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie lub o jej własnościach.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A

Wersja B

C

B

Zadanie 14.1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.2) oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A

Wersja B

D

A

Zadanie 14.2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A

Wersja B

FF

FF

Zadanie 15. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VI.7) wykorzystuje własności ciągów [...] arytmetycznych [...] do rozwiązywania zadań [...].

Zasady oceniania3 pkt – obliczenie i uzasadnienie, że jedyną wartością m , dla której ciąg $(2m + 11, m^2 + 3, 5 - m)$ jest arytmetyczny i malejący jest $\frac{5}{2}$.2 pkt – wyznaczenie wartości m , dla których ciąg $(2m + 11, m^2 + 3, 5 - m)$ jestarytmetyczny: $m = -2$ oraz $m = \frac{5}{2}$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą m , np.:

$$\frac{2m + 11 + 5 - m}{2} = m^2 + 3,$$

$$(m^2 + 3) - (2m + 11) = (5 - m) - (m^2 + 3),$$

oraz rozwiązanie co najmniej jednej z trzech nierówności:

$$\bullet \quad 2m + 11 > m^2 + 3 : m \in (-2, 4)$$

$$\bullet \quad m^2 + 3 > 5 - m : m \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$$

$$\bullet \quad 2m + 11 > 5 - m : m \in (-2, +\infty),$$

ALBO

– obliczenie wszystkich wartości r , dla których ciąg $(2m + 11, m^2 + 3, 5 - m)$ jest

$$\text{arytmetyczny: } r = -\frac{27}{4} \text{ lub } r = 0,$$

ALBO

- obliczenie wartości r , dla której ciąg $(2m + 11, m^2 + 3, 5 - m)$ jest arytmetyczny i malejący: $r = -\frac{27}{4}$.

1 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą m , np.:

$$\frac{2m + 11 + 5 - m}{2} = m^2 + 3,$$

$$(m^2 + 3) - (2m + 11) = (5 - m) - (m^2 + 3)$$

ALBO

– zapisanie układu równań z dwiema niewiadomymi pozwalającego obliczyć m i r , np.

$$m^2 + 3 = 2m + 11 + r \quad \text{oraz} \quad 5 - m = 2m + 11 + 2r,$$

ALBO

– rozwiązanie co najmniej jednej z trzech nierówności:

- $2m + 11 > m^2 + 3 : m \in (-2, 4)$
- $m^2 + 3 > 5 - m : m \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$
- $2m + 11 > 5 - m : m \in (-2, +\infty)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający myli ciąg arytmetyczny z geometrycznym, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów (np. za rozwiązanie nierówności $2m + 11 > m^2 + 3$).
2. Jeżeli zdający nie uwzględni istotnych nawiasów i rozwiązuje równanie postaci $(m^2 + 3) - 2m + 11 = (5 - m) - m^2 + 3$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów (np. za rozwiązanie nierówności $2m + 11 > m^2 + 3$).
3. Jeżeli zdający zapisze tylko $m = \frac{5}{2}$, to otrzymuje **0 punktów**. Natomiast jeżeli zdający dodatkowo sprawdzi, zapisując odpowiednie obliczenia, że dla tej wartości m spełnione są warunki zadania, ale nie uzasadni, że jest to jedyne rozwiązanie, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający wyznaczy wartości m , dla których ciąg $(2m + 11, m^2 + 3, 5 - m)$ jest arytmetyczny: $m = -2$ oraz $m = \frac{5}{2}$, i zapisze, że dla $m = -2$ ciąg nie jest malejący, to otrzymuje **3 punkty**.
5. Jeżeli zdający wyznaczy wartości m , dla których ciąg $(2m + 11, m^2 + 3, 5 - m)$ jest arytmetyczny: $m = -2$ oraz $m = \frac{5}{2}$, a następnie obliczy dla każdej z tych wartości m wyrazy ciągu i nie wskaże, że $m = \frac{5}{2}$ jest jedyną szukaną wartością, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania*Sposób I*

Z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy:

$$\frac{2m + 11 + 5 - m}{2} = m^2 + 3$$

$$m + 16 = 2m^2 + 6$$

$$2m^2 - m - 10 = 0$$

Obliczamy wyróżnik trójmianu $2m^2 - m - 10$:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10) = 81$$

Stąd

$$m_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = -2$$

$$m_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{5}{2}$$

Dla $m = -2$ otrzymujemy ciąg $(7, 7, 7)$, który jest stały.

Dla $m = \frac{5}{2}$ otrzymujemy ciąg $\left(16, \frac{37}{4}, \frac{5}{2}\right)$, który jest malejący.

Zatem ciąg $(2m + 11, m^2 + 3, 5 - m)$ jest malejącym ciągiem arytmetycznym, gdy $m = \frac{5}{2}$.

Sposób II

Ciąg $(2m + 11, m^2 + 3, 5 - m)$ jest malejący, gdy

$$(m^2 + 3) - (2m + 11) < 0 \quad \text{i} \quad (5 - m) - (m^2 + 3) < 0$$

$$m^2 - 2m - 8 < 0 \quad \text{i} \quad -m^2 - m + 2 < 0$$

$$m^2 - 4m + 2m - 8 < 0 \quad \text{i} \quad -m^2 - 2m + m + 2 < 0$$

$$m(m - 4) + 2(m - 4) < 0 \quad \text{i} \quad -m(m + 2) + (m + 2) < 0$$

$$(m - 4)(m + 2) < 0 \quad \text{i} \quad -(m + 2)(m - 1) < 0$$

$$m \in (-2, 4) \quad \text{i} \quad m \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$$

Zatem ciąg $(2m + 11, m^2 + 3, 5 - m)$ jest malejący, gdy $m \in (1, 4)$.

Z definicji/własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy:

$$(m^2 + 3) - (2m + 11) = (5 - m) - (m^2 + 3)$$

Stąd

$$m^2 - 2m - 8 = -m^2 - m + 2$$

$$2m^2 - m - 10 = 0$$

$$2m^2 + 4m - 5m - 10 = 0$$

$$2m^2 + 4m - 5m - 10 = 0$$

$$2m(m + 2) - 5(m + 2) = 0$$

$$(m + 2)(2m - 5) = 0$$

$$m + 2 = 0 \quad \text{lub} \quad 2m - 5 = 0$$

$$m = -2 \notin (1, 4) \quad \text{lub} \quad m = \frac{5}{2} \in (1, 4)$$

Zatem ciąg $(2m + 11, m^2 + 3, 5 - m)$ jest malejącym ciągiem arytmetycznym, gdy $m = \frac{5}{2}$.

Sposób III

Ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego otrzymujemy:

$$\begin{cases} m^2 + 3 = 2m + 11 + r \\ 5 - m = 2m + 11 + 2r \end{cases}$$

gdzie r jest różnicą ciągu arytmetycznego. Stąd

$$\begin{cases} 2m^2 + 6 = 4m + 22 + 2r \\ 5 - m = 2m + 11 + 2r \end{cases}$$

Odejmujemy równania stronami i otrzymujemy:

$$2m^2 + 6 - 5 + m = 4m + 22 + 2r - 2m - 11 - 2r$$

$$2m^2 - m - 10 = 0$$

Obliczamy wyróżnik trójmianu $2m^2 - m - 10$:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10) = 81$$

Stąd

$$m_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = -2$$

$$m_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{5}{2}$$

Ciąg $(2m + 11, m^2 + 3, 5 - m)$ jest malejący, zatem

$$2m + 11 > 5 - m$$

Stąd

$$m > -2$$

Dla $m = \frac{5}{2}$ otrzymujemy ciąg arytmetyczny $\left(16, \frac{37}{4}, \frac{5}{2}\right)$, który jest malejący.

Zatem ciąg $(2m + 11, m^2 + 3, 5 - m)$ jest malejącym ciągiem arytmetycznym, gdy $m = \frac{5}{2}$.

Sposób IV

Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego otrzymujemy:

$$\begin{cases} m^2 + 3 = 2m + 11 + r \\ 5 - m = 2m + 11 + 2r \end{cases}$$

gdzie r jest różnicą ciągu arytmetycznego. Stąd

$$\begin{cases} m^2 - 2m - r - 8 = 0 \\ 3m + 2r + 6 = 0 \end{cases}$$

Z drugiego z tych równań wyznaczamy $m = -\frac{2}{3}r - 2$ i podstawiamy w miejsce m do pierwszego z równań, otrzymując:

$$\left(-\frac{2}{3}r - 2\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}r - 2\right) - r - 8 = 0$$

$$\frac{4}{9}r^2 + \frac{8}{3}r + 4 + \frac{4}{3}r + 4 - r - 8 = 0$$

$$\frac{4}{9}r^2 + 3r = 0 \quad / : r \quad (\text{ciąg jest malejący, więc } r < 0)$$

$$\frac{4}{9}r + 3 = 0$$

$$r = -\frac{27}{4}$$

Gdy $r = -\frac{27}{4}$, to ciąg $(2m + 11, m^2 + 3, 5 - m)$ jest malejący

$$\text{ i } m = -\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{27}{4}\right) - 2 = \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2}.$$

Zatem ciąg $(2m + 11, m^2 + 3, 5 - m)$ jest malejącym ciągiem arytmetycznym, gdy $m = \frac{5}{2}$.

Zadanie 16. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.6) stosuje wzór na n -ty wyraz [...] ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A

Wersja B

B

A

Zadanie 17. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.2) korzysta z wzorów $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$;

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A

Wersja B

C

D

Zadanie 18.1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.1) wykorzystuje definicje funkcji [...] tangens dla kątów od 0° do 180° [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A

Wersja B

D

C

Zadanie 18.2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus [...] dla kątów od 0° do 180° [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A

Wersja B

A

B

Zadanie 19. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A

Wersja B

C

B

Zadanie 20. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A

Wersja B

B

C

Zadanie 21. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.	Zdający: VII.3) stosuje twierdzenie cosinusów oraz wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A

FP

Wersja B

FP

Zadanie 22. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IX.3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A

C

Wersja B

B

Zadanie 23. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej [...], w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich, jak np. [...] równoległość do innej prostej).

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A

Wersja B

B

A

Zadanie 24. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.4) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A

Wersja B

B

C

Zadanie 25. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: X.4) rozpoznaje [...] w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą) [...]; X.5) oblicza objętości [...] stożka [...], również z wykorzystaniem trygonometrii.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $V = 64\pi$.

2 pkt – zapisanie promienia podstawy stożka: $r = 4\sqrt{3}$ **oraz** zapisanie wysokości

stożka: $H = 4$

ALBO

– obliczenie kwadratu promienia podstawy stożka: $r^2 = 48$ **oraz** zapisanie wysokości

stożka: $H = 4$,

ALBO

– zapisanie wysokości stożka: $H = 4$ **oraz** wyznaczenie objętości stożka

w zależności od H , np. $V = \frac{1}{3}\pi(H\sqrt{3})^2 \cdot H$,

ALBO

– zapisanie promienia podstawy stożka: $r = 4\sqrt{3}$ **oraz** wyznaczenie objętości stożka

w zależności od r , np. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{r}{\sqrt{3}}$,

ALBO

– wyznaczenie objętości stożka w zależności od tworzącej l , np. $V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{l}{2}$.

1 pkt – zapisanie promienia podstawy stożka: $r = 4\sqrt{3}$

ALBO

– zapisanie wysokości stożka: $H = 4$,

ALBO

– obliczenie kwadratu promienia podstawy stożka: $r^2 = 48$,

ALBO

– zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć r oraz H , np.:

$r = x\sqrt{3}$ oraz $H = x$ oraz $l = 2x$ oraz $l = 8$,

$\frac{r}{8} = \sin 60^\circ$ oraz $\frac{H}{8} = \cos 60^\circ$,

$\frac{1}{2} \cdot 2r \cdot H = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \sin 120^\circ$ oraz $r^2 + H^2 = 8^2$,

$(2r)^2 = 8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \cos 120^\circ$ oraz $r^2 + H^2 = 8^2$,

ALBO

- wyznaczenie objętości stożka w zależności od H , np. $V = \frac{1}{3}\pi(H\sqrt{3})^2 \cdot H$,
ALBO
- wyznaczenie objętości stożka w zależności od r , np. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{r}{\sqrt{3}}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający przyjmuje w rozwiązaniu, że:

- a) trójkąt SOB jest trójkątem równobocznym,
- b) wysokość stożka jest równa 8, lub
- c) promień podstawy stożka jest równy 8,

to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:

- a) zastosowanie niepoprawnej definicji jednej funkcji trygonometrycznej,
- b) błędne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa,
- c) błędne zastosowanie twierdzenia cosinusów,
- d) zastosowanie niepoprawnej tożsamości $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$,
- e) błędne zastosowanie własności trójkąta o kątach 30° , 60° , 90° (tzn. zapisanie, że promień podstawy stożka jest równy 4 i wysokość stożka jest równa $4\sqrt{3}$),
lub
- f) przyjęcie, że kąt 120° to kąt wycinka koła o promieniu 8 tworzącego
powierzchnię boczną stożka,

i rozwiązanie zostanie doprowadzone konsekwentnie do końca, to zdający może otrzymać **1 punkt** za całe rozwiązanie (za konsekwentne obliczenie objętości stożka).

Jeżeli zdający popełni więcej niż jeden z wymienionych błędów a)–f), to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów (np. za zapisanie wysokości stożka: $H = 4$).

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

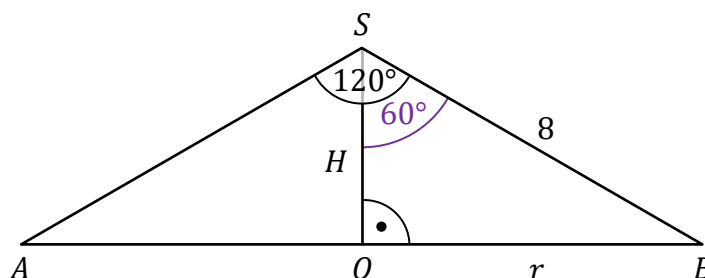
Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku przedstawiającym przekrój osiowy rozważanego stożka:

S – wierzchołek stożka,

O – spodek wysokości stożka,

r – promień podstawy stożka,

H – wysokość stożka.



Zauważamy, że $r > 0$ i $H > 0$.

Ponieważ O jest spodkiem wysokości stożka, to $|\angle OSB| = 60^\circ$.

W trójkącie prostokątnym OBS mamy

$$\sin 60^\circ = \frac{|OB|}{|SB|} = \frac{r}{8}$$

Zatem

$$r = 8 \cdot \sin 60^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

Ponadto

$$\cos 60^\circ = \frac{|SO|}{|SB|} = \frac{H}{8}$$

Stąd

$$H = 8 \cdot \cos 60^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

Obliczamy objętość V stożka:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (4\sqrt{3})^2 \cdot 4 = 64\pi$$

Sposób II

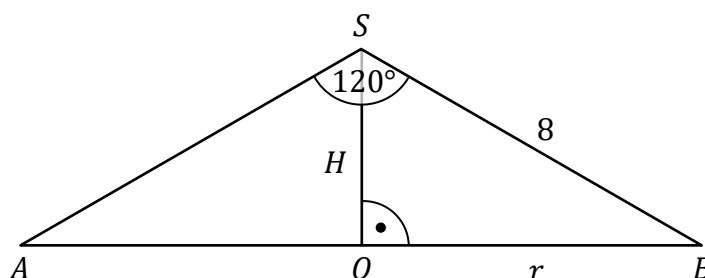
Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku przedstawiającym przekrój osiowy rozważanego stożka:

S – wierzchołek stożka,

O – spodek wysokości stożka,

r – promień podstawy stożka,

H – wysokość stożka.



Zauważamy, że $r > 0$ i $H > 0$.

Korzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABS i otrzymujemy:

$$(2r)^2 = 8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \cos 120^\circ$$

$$4r^2 = 128 - 128 \cdot \cos 120^\circ$$

Ponieważ $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$, więc

$$4r^2 = 128 - 128 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$4r^2 = 192$$

$$r^2 = 48$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta OBS i obliczamy wysokość stożka:

$$H^2 = 8^2 - r^2$$

$$H^2 = 64 - 48$$

$$H^2 = 16$$

$$H = 4$$

Obliczamy objętość V stożka:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 48 \cdot 4 = 64\pi$$

Sposób III

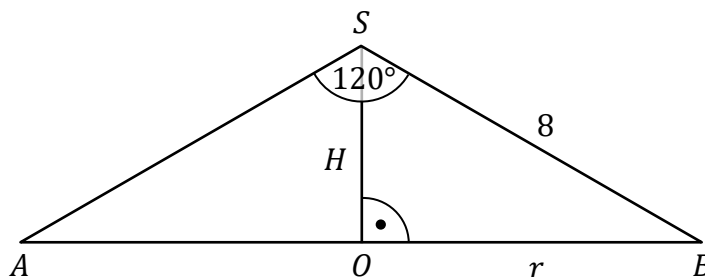
Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku przedstawiającym przekrój osiowy rozważanego stożka:

S – wierzchołek stożka,

O – spodek wysokości stożka,

r – promień podstawy stożka,

H – wysokość stożka.



Zauważamy, że $r > 0$ i $H > 0$.

Pole trójkąta ABS jest równe

$$P_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \sin 120^\circ = 32 \cdot \sin 60^\circ = 32 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$$

Zatem

$$\frac{1}{2} \cdot 2r \cdot H = 16\sqrt{3}$$

stąd

$$r \cdot H = 16\sqrt{3}$$

Korzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABS i otrzymujemy:

$$(2r)^2 = 8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \cos 120^\circ$$

$$4r^2 = 128 - 128 \cdot (-\cos 60^\circ)$$

$$4r^2 = 128 - 128 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$4r^2 = 192$$

$$r^2 = 48$$

$$r = 4\sqrt{3}$$

Obliczamy objętość V stożka:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r \cdot r \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4\sqrt{3} \cdot 16\sqrt{3} = 64\pi$$

Zadanie 26. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: X.5) oblicza objętości [...] graniastosłupów [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A

Wersja B

A

D

Zadanie 27. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XI.2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A

Wersja B

A

D

Zadanie 28. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A

Wersja B

D

B

Zadanie 29. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: XII.2) oblicza średnią arytmetyczną [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A

Wersja B

C

A

Zadanie 30. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: XII.2) [...] znajduje medianę i dominantę.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne uzupełnienie dwóch zdań.

1 pkt – poprawne uzupełnienie jednego zdania.

0 pkt – brak spełnienia powyższych kryteriów.

Uwaga:

Nie akceptuje się zaokrągleń otrzymanych wyników.

Rozwiązanie

1. Mediana ocen uzyskanych z tego sprawdzianu przez uczniów tej klasy jest równa 4,5.
2. Dominanta ocen uzyskanych z tego sprawdzianu przez uczniów tej klasy jest równa 6.

Zadanie 31. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XIII) rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawne wyniki, np.

$$P(x) = -2x^2 + 22x + 88 \text{ oraz } D = (0, 11) \text{ oraz } x = \frac{11}{2}.$$

- 3 pkt – wyznaczenie poprawnego wzoru na pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu $ABCDEFGH$ w zależności od zmiennej x **oraz** wyznaczenie dziedziny D tej funkcji, np. $P(x) = -2x^2 + 22x + 88$ oraz $D = (0, 11)$,
ALBO
 – wyznaczenie poprawnego wzoru na pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu $ABCDEFGH$ w zależności od zmiennej x (bez wyznaczonej dziedziny funkcji P)

oraz prawidłowe obliczenie pierwszej współrzędnej wierzchołka wykresu funkcji P ,
np. $P(x) = -2x^2 + 22x + 88$ oraz $x = \frac{11}{2}$.

2 pkt – wyznaczenie poprawnego wzoru na pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu $ABCDEFGH$ w zależności od zmiennej x (bez wyznaczonej dziedziny funkcji P),
np. $P(x) = -2x^2 + 22x + 88$,
ALBO

– zapisanie zależności między długościami krawędzi BF i AB prostopadłościanu
oraz wyznaczenie zakresu zmienności x , np.
 $x + 4 + |BF| = 15$ oraz $x \in (0, 11)$.

1 pkt – zapisanie zależności między długościami krawędzi BF i AB prostopadłościanu, np.
 $x + 4 + |BF| = 15$,
ALBO

– zapisanie wzoru na pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu w zależności od długości x krawędzi AB oraz długości krawędzi BF :
 $P = 2 \cdot (4x + x \cdot |BF| + 4 \cdot |BF|)$,
ALBO
– wyznaczenie zakresu zmienności x : $x \in (0, 11)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

- Jeżeli zdający zapisze jedynie zakres zmienności x : $x \in (0, 11)$ oraz zapisze, że szukaną wartością x jest liczba $\frac{11}{2}$, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie. Jeżeli zdający zapisze jedynie, że szukaną wartością x jest liczba $\frac{11}{2}$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
- Jeżeli zdający nie zapisze pola powierzchni całkowitej prostopadłościanu jako funkcji P zmiennej x , a jedynie obliczy wartości pola dla wybranych długości krawędzi i na tej podstawie wskaże największą wartość pola, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów (np. za zapisanie zależności między długościami krawędzi BF i AB prostopadłościanu: $x + 4 + |BF| = 15$).
- Jeżeli zdający przyjmuje, że ściany $ABFE$ oraz $BCGF$ są przystającymi prostokątami i na tym opiera swoje rozwiązanie, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za zapisanie zależności między długościami krawędzi AB i BF oraz za wyznaczenie dziedziny funkcji).
- Jeżeli zdający zamiast funkcji $P(x)$ rozważa w całym rozwiązaniu funkcję postaci $\frac{1}{2} \cdot P(x)$ albo funkcję pola powierzchni całkowitej w zależności od długości krawędzi BF , to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (za związek między długościami krawędzi AB i BF , za wyznaczenie dziedziny funkcji i za poprawne wyznaczenie argumentu, dla którego pole powierzchni całkowitej jest największe).
- Jeżeli zdający stosuje rachunek różniczkowy i nie uzasadni, że w punkcie będącym miejscem zerowym pochodnej funkcji P jest największa wartość funkcji P , to może

otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Za poprawne uzasadnienie, że w punkcie będącym miejscem zerowym pochodnej funkcji P jest największa wartość funkcji P , można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej (np. szkicuje wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznacza na rysunku, np. znakami „+” i „-”, znak pochodnej), **oraz**:

– opisuje przedziały monotoniczności funkcji P (słownie lub graficznie – np. przy użyciu strzałek)

LUB

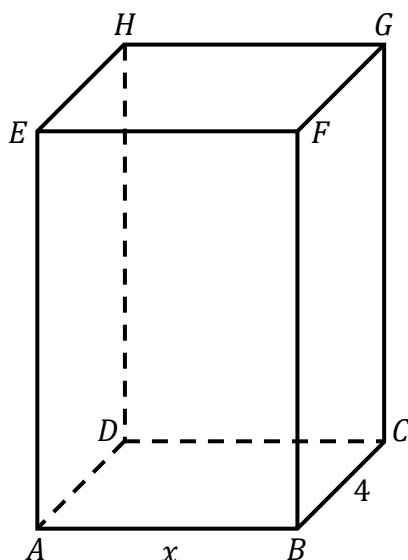
– zapisuje, że dla wyznaczonego miejsca zerowego pochodnej, funkcja P ma maksimum lokalne i jest to jednocześnie jej największa wartość,

LUB

– zapisuje, że dla wyznaczonego miejsca zerowego pochodnej, funkcja P ma maksimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Suma długości wszystkich trzech krawędzi prostopadłościanu wychodzących z wierzchołka B jest równa 15, zatem

$$|AB| + |BC| + |BF| = 15$$

$$x + 4 + |BF| = 15$$

$$|BF| = 11 - x$$

Pole P powierzchni całkowitej prostopadłościanu $ABCDEFGH$ jest równe

$$P = 2 \cdot (|AB| \cdot |BC| + |AB| \cdot |BF| + |BC| \cdot |BF|)$$

Ponieważ $|AB| = x$, $|BC| = 4$, $|BF| = 11 - x$, więc wzór funkcji P zmiennej x ma postać

$$P(x) = 2 \cdot [x \cdot 4 + x \cdot (11 - x) + 4 \cdot (11 - x)]$$

$$P(x) = 2 \cdot (4x + 11x - x^2 + 44 - 4x)$$

$$P(x) = 2 \cdot (-x^2 + 11x + 44)$$

$$P(x) = -2x^2 + 22x + 88$$

Wyznaczamy dziedzinę funkcji P . Z warunków zadania wynika, że:

$$|AB| = x > 0 \text{ oraz } |BF| = 11 - x > 0$$

Zatem

$$x > 0 \text{ oraz } x < 11$$

Zmienna x może przyjmować wartości z przedziału $D = (0, 11)$.

Wykresem funkcji P jest fragment paraboli skierowanej ramionami do dołu.

Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka tej paraboli:

$$p = \frac{-22}{2 \cdot (-2)} = \frac{-22}{-4} = \frac{11}{2} \in (0, 11)$$

Zatem funkcja P przyjmuje wartość największą dla argumentu $\frac{11}{2}$.

Spośród rozważanych prostopadłościanów największe pole powierzchni całkowitej ma ten, w którym $x = \frac{11}{2}$.

Ocena prac osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Obowiązują zasady oceniania stosowane przy sprawdzaniu prac zdających bez stwierdzonej dyskalkulii z dodatkowym uwzględnieniem:

- I. **ogólnych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią (punkty 1.–12.);
- II. dodatkowych **szczegółowych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią – egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, termin główny 2025.

I. Ogólne zasady oceniania zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

1. Nie należy traktować jako błędy merytoryczne pomyłek, wynikających z:
 - błędnego przepisania
 - przestawienia cyfr
 - zapisania innej cyfry, ale o podobnym wyglądzie
 - przestawienia położenia przecinka
 - przestawienia położenia znaku liczby.
2. W przypadku błędów, wynikających ze zmiany znaku liczby, należy w każdym zadaniu oddzielnie przeanalizować, czy zdający opanował inne umiejętności, poza umiejętnościami rachunkowymi, oceniane w zadaniu. W przypadku opanowania badanych umiejętności zdający powinien otrzymać przynajmniej 1 punkt.
3. We wszystkich zadaniach otwartych, w których wskazano poprawną metodę rozwiązania, części lub całości zadania, zdającemu należy przyznać przynajmniej 1 punkt, zgodnie z kryteriami do poszczególnych zadań.
4. Jeśli zdający przedstawia nieprecyzyjne zapisy, na przykład pomija nawiasy lub zapisuje nawiasy w niewłaściwych miejscach, ale przeprowadza poprawne rozumowanie lub stosuje właściwą strategię, to może otrzymać przynajmniej 1 punkt za rozwiązanie zadania.
5. W przypadku zadania wymagającego wyznaczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi poprawną metodę wyznaczania pierwiastków trójmianu kwadratowego, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
6. W przypadku zadania wymagającego rozwiązania nierówności kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli stosuje poprawny algorytm rozwiązywania nierówności kwadratowej, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
7. W przypadku zadania wymagającego stosowania własności funkcji kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt za wykorzystanie konkretnych własności funkcji kwadratowej, istotnych przy poszukiwaniu rozwiązania.

8. W przypadku zadania wymagającego zastosowania własności ciągów arytmetycznych lub geometrycznych zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi wykorzystanie takiej własności ciągu, która umożliwi znalezienie rozwiązania zadania.
9. W przypadku zadania wymagającego analizowania figur geometrycznych na płaszczyźnie kartezjańskiej zdający może otrzymać punkty, jeżeli przy poszukiwaniu rozwiązania przedstawi poprawne rozumowanie, wykorzystujące własności figur geometrycznych lub zapisze zależności, pozwalające rozwiązać zadanie.
10. W przypadku zadania z rachunku prawdopodobieństwa zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeśli przy wyznaczaniu liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających rozważanemu zdarzeniu przyjmuje określoną regularność lub podaje prawidłową metodę wyznaczenia tej liczby zdarzeń elementarnych.
11. W przypadku zadania z geometrii zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeżeli podaje poprawną metodę wyznaczenia długości odcinka potrzebnej do znalezienia rozwiązania.
12. W przypadku zadania wymagającego przeprowadzenia dowodu (z zakresu algebry lub geometrii), jeśli w przedstawionym rozwiązaniu zdający powoła się na własność, która wyznacza istotny postęp, prowadzący do przeprowadzenia dowodu, to może otrzymać 1 punkt.

II. Dodatkowe **szczegółowe zasady oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Zadanie 5.

1 pkt – zapisanie, że $n = 2l + 1$, **oraz** przekształcenie wyrażenia $3n^2 + 2n + 7$ do postaci $3(2l + 1)^2 + 2(2l + 1) + 7$.

Zadanie 9.

1 pkt – zapisanie równania $13\% \cdot x + 11\% \cdot y = 146\,700$.

Zadanie 10.

1 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego $6x^2 - 11x + 3$, tzn. zastosowanie wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego i obliczenie tych pierwiastków

ALBO

– konsekwentne (do otrzymanego w wyniku popełnienia błędów o charakterze dyskalkulicznym ujemnego wyróżnika) narysowanie paraboli,

ALBO

– poprawne rozwiązanie nierówności $3(2x^2 + 1) < 0$ (tzn. stosuje się punkt 6. ogólnych zasad oceniania),

ALBO

- konsekwentne (do wyznaczonych przez siebie pierwiastków oraz rozpatrywanego trójmianu i nierówności) wyznaczenie zbioru rozwiązań nierówności.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający, rozwiązując nierówność, pomyli porządek liczb na osi liczbowej i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right)$, to może otrzymać **2 punkty** za całe rozwiązanie.
2. Nie stosuje się uwag 2. i 3. z zasad oceniania arkusza standardowego.
3. Akceptowane jest zapisanie pierwiastków trójmianu w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi.

Zadanie 11.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 12.1.

- 1 pkt – zapisanie wzoru funkcji f w postaci $f(x) = a(x - p)^2 + q$ **oraz** zapisanie $p = 3$ oraz $q = 6$.

Zadanie 12.3.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 15.

- 2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą m , np.:

$$\frac{2m + 11 + 5 - m}{2} = m^2 + 3,$$

$$(m^2 + 3) - (2m + 11) = (5 - m) - (m^2 + 3),$$

oraz zapisanie co najmniej jednej z trzech nierówności:

- $2m + 11 > m^2 + 3$
- $m^2 + 3 > 5 - m$
- $2m + 11 > 5 - m$

- 1 pkt – zapisanie co najmniej jednej z trzech nierówności:

- $2m + 11 > m^2 + 3$
- $m^2 + 3 > 5 - m$
- $2m + 11 > 5 - m$

ALBO

- zapisanie równania z dwiema niewiadomymi: m oraz r (gdzie r jest różnicą ciągu arytmetycznego), np. $2m + 11 + r = m^2 + 3$.

Zadanie 25.

1 pkt – zastosowanie definicji funkcji trygonometrycznej lub związków miarowych w trójkącie o kątach 30° , 60° , 90° i zapisanie równania z jedną niewiadomą (wysokością stożka lub promieniem podstawy stożka), np.: $\frac{H}{8} = \cos 60^\circ$, $\frac{r}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Zadanie 30.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 31.

2 pkt – zapisanie zależności między długościami krawędzi BF i AB prostopadłościanu, np. $x + 4 + |BF| = 15$ oraz zapisanie wzoru na pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu w zależności od długości x krawędzi AB oraz długości krawędzi BF : $P = 2 \cdot (4x + x \cdot |BF| + 4 \cdot |BF|)$.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

PESEL

Miejsce na naklejkę.

Sprawdź, czy kod na naklejce to
E-100.

Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny

Formuła 2015

MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Symbol arkusza

EMAP-P0-100-2505

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

☐ Uprawnienie zdającego do
dostosowania w związku z dyskalkulią.

DATA: **6 maja 2025 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **170 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

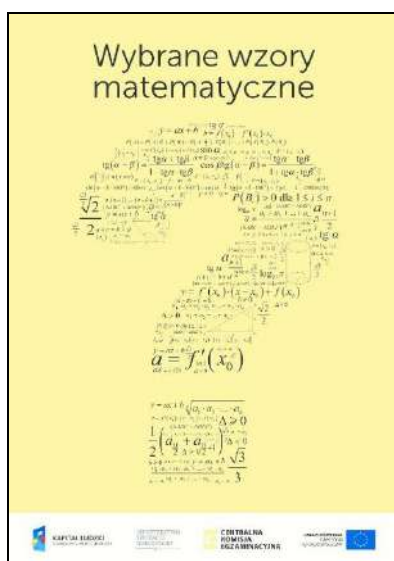
Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**,
tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym**
poziomie.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi.
Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu
takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.



Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 33 strony (zadania 1–34).
Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Odpowiedzi do zadań zamkniętych (1–25) zaznacz na karcie odpowiedzi w części karty przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj  pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem  i zaznacz właściwe.
4. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego (26–34) może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
5. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
6. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
7. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
8. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
9. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
10. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla i linijki oraz z kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



**Zadania egzaminacyjne są wydrukowane
na następnych stronach.**

W każdym z zadań od 1. do 25. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Dodatnia liczba a stanowi 80% liczby b .

Liczba b stanowi

- A. 125% liczby a .
- B. 25% liczby a .
- C. 20% liczby a .
- D. 12,5% liczby a .

Zadanie 2. (0–1)

Liczba $(\sqrt{32} - \sqrt{2})^2$ jest równa

- A. 16
- B. 18
- C. 30
- D. 34

Zadanie 3. (0–1)

Liczba $\frac{5^{12} + 5^{13} + 5^{14}}{5^{12}}$ jest równa

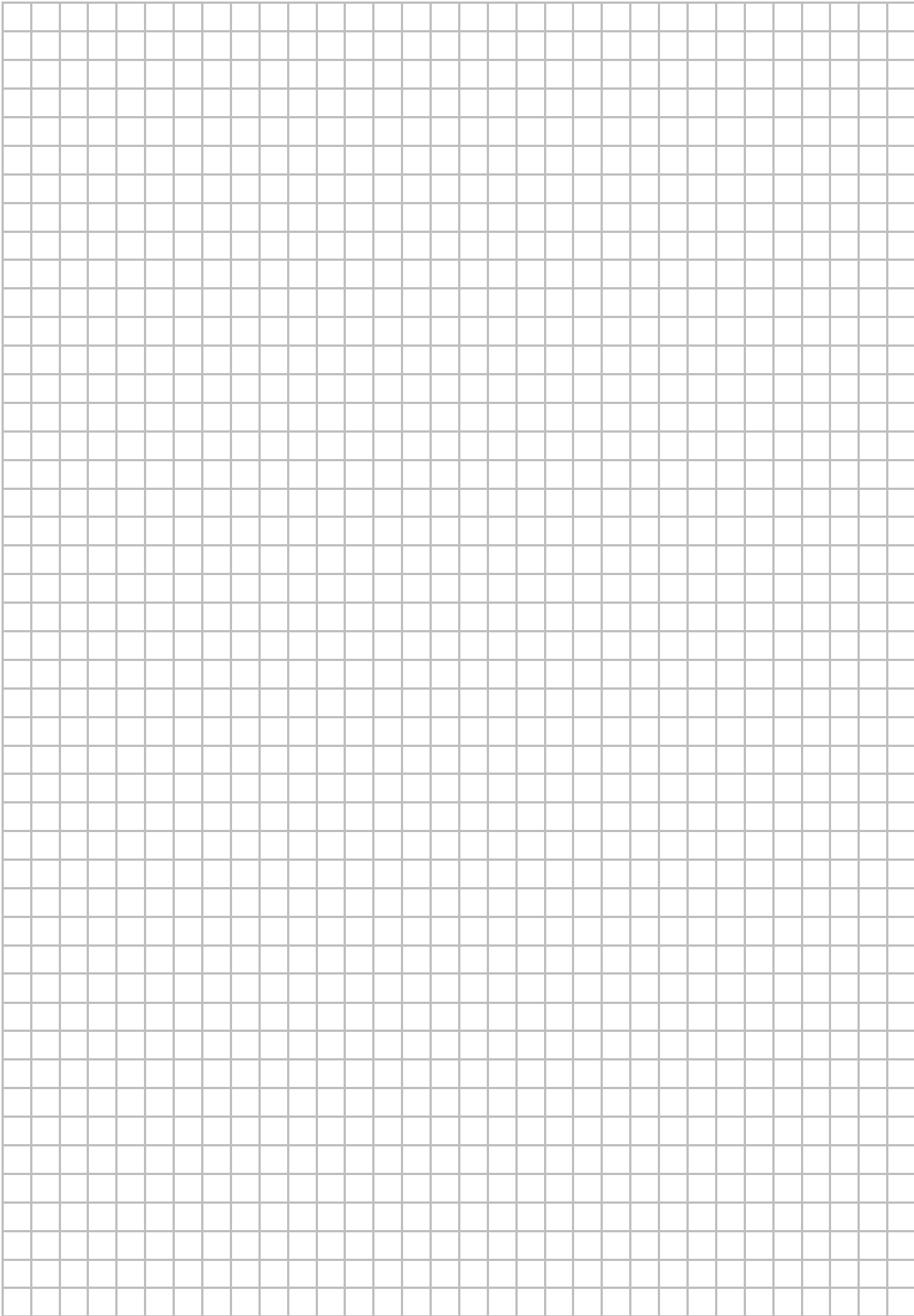
- A. 30
- B. 31
- C. 5^{12}
- D. 5^{27}

Zadanie 4. (0–1)

Liczba $\log_3 108 - 2\log_3 2$ jest równa

- A. 3
- B. 9
- C. $\log_3 104$
- D. $2\log_3 54$

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)



Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl

Zadanie 5. (0–1)

Dla każdej liczby rzeczywistej x wartość wyrażenia $(3x + 2)^2 - (2x - 3)^2$ jest równa wartości wyrażenia

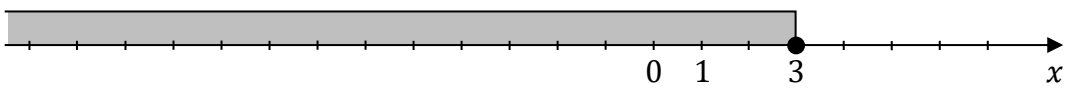
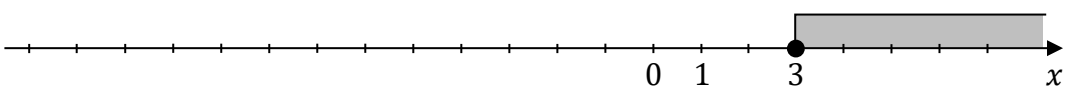
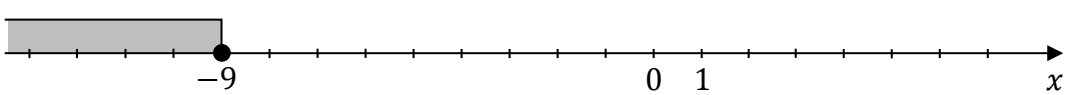
- A. $5x^2 - 5$
- B. $5x^2 + 13$
- C. $5x^2 + 24x - 5$
- D. $5x^2 + 24x - 13$

Zadanie 6. (0–1)

Dana jest nierówność

$$3 - 2(1 - 2x) \geq 2x - 17$$

Wybierz rysunek, na którym poprawnie zaznaczono na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających powyższą nierówność.

- A. 
- B. 
- C. 
- D. 

Zadanie 7. (0–1)

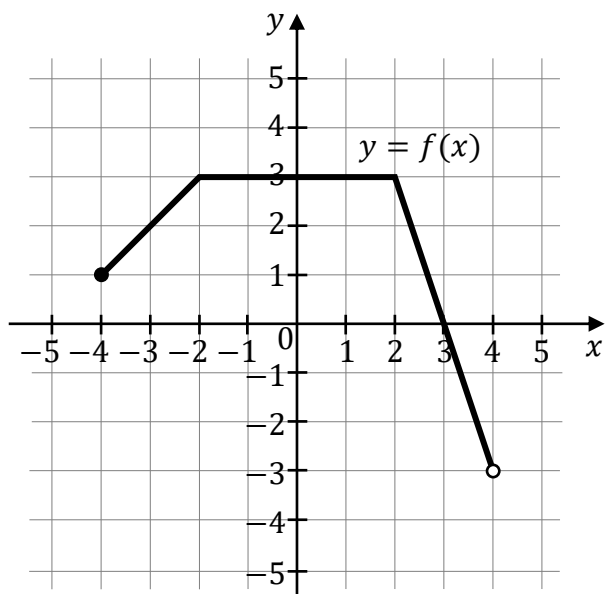
Równanie $2x(x + 3)(x^2 + 25) = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych ma dokładnie

- A. dwa rozwiązania: (-3) oraz 0 .
- B. dwa rozwiązania: (-3) oraz 2 .
- C. trzy rozwiązania: (-5) , (-3) oraz 0 .
- D. cztery rozwiązania: (-5) , (-3) , 0 oraz 5 .

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Informacja do zadań 8.–9.

Na rysunku, w układzie współrzędnych (x, y) , przedstawiono wykres funkcji f .

**Zadanie 8. (0–1)**

Dziedziną funkcji f jest przedział

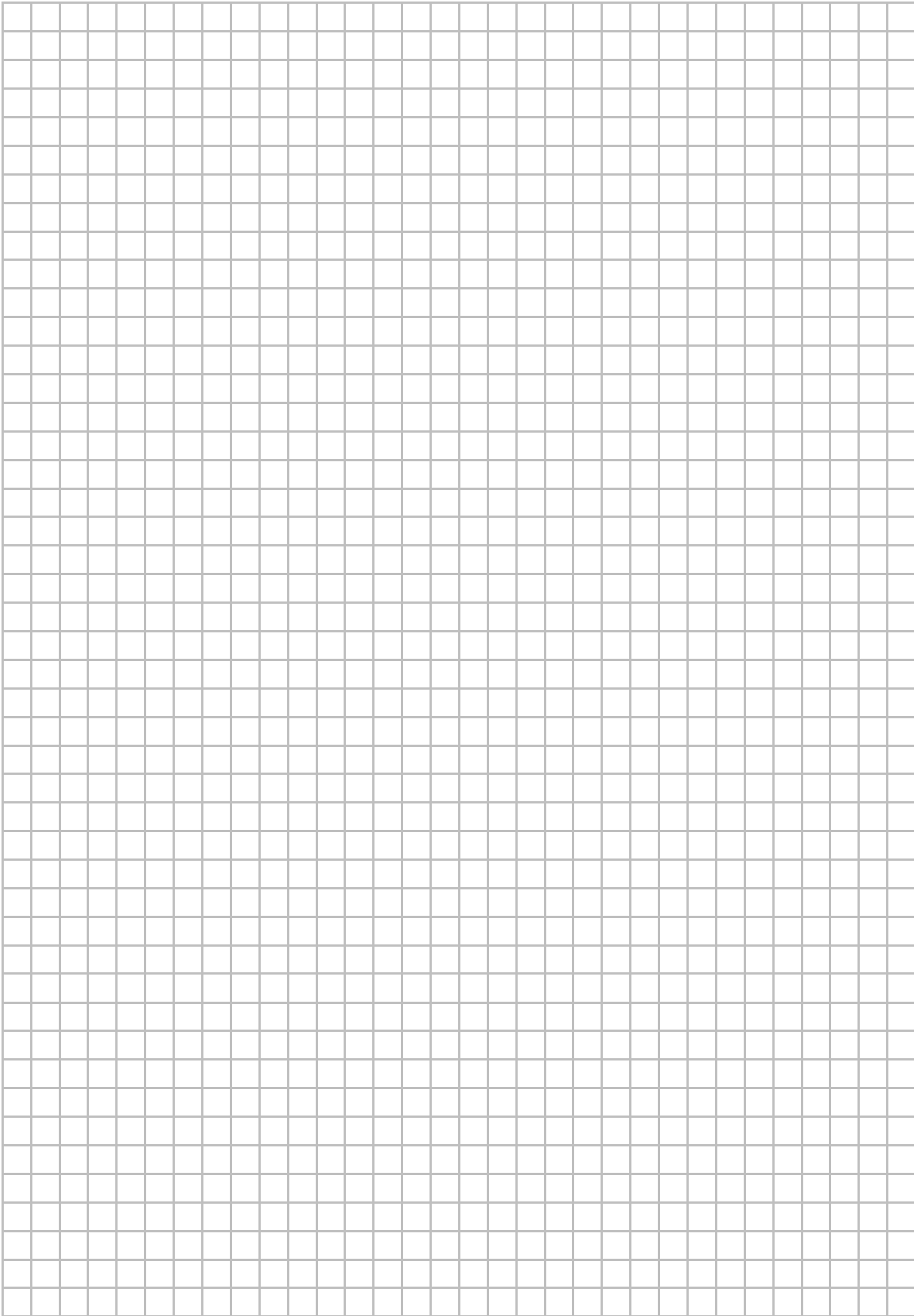
- A. $(-4, 4)$ B. $\langle -4, 4 \rangle$ C. $\langle -3, 3 \rangle$ D. $(-3, 3)$

Zadanie 9. (0–1)

Funkcja f jest rosnąca w przedziale

- A. $\langle -4, -2 \rangle$ B. $\langle 1, 3 \rangle$ C. $\langle 2, 4 \rangle$ D. $(-3, 3)$

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)



Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl

Zadanie 10. (0–1)

Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = (3 - m)x - 4$.

Funkcja f nie ma miejsca zerowego dla m równego

- A. (-3) B. 0 C. 3 D. 4

Zadanie 11. (0–1)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = (n + 3)(n - 5)$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Liczba wszystkich ujemnych wyrazów tego ciągu jest równa

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

Zadanie 12. (0–1)

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, w którym $a_1 = 27$ oraz $a_2 = 9$.

Czwarty wyraz ciągu (a_n) jest równy

- A. $\frac{1}{3}$ B. 1 C. 3 D. 729

Zadanie 13. (0–1)

Kąt α jest ostry i spełnia warunek $\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha = 2 \sin \alpha$.

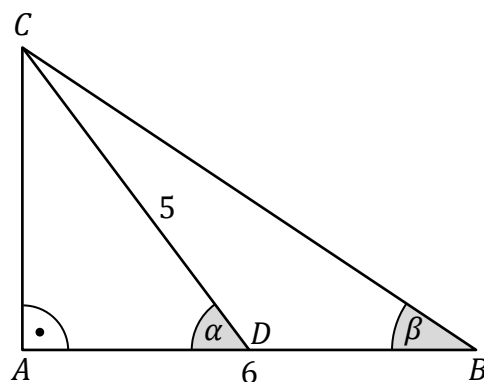
Cosinus kąta α jest równy

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Informacja do zadań 14.–15.

Dany jest trójkąt prostokątny ABC , w którym bok BC jest przeciwprostokątną, punkt D jest środkiem przyprostokątnej AB oraz $|AB| = 6$ i $|CD| = 5$. Oznaczmy kąt ADC przez α , natomiast kąt ABC – przez β (zobacz rysunek).

**Zadanie 14. (0–1)**

Tangens kąta α jest równy

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{4}{5}$

D. $\frac{4}{3}$

Zadanie 15. (0–1)

Sinus kąta β jest równy

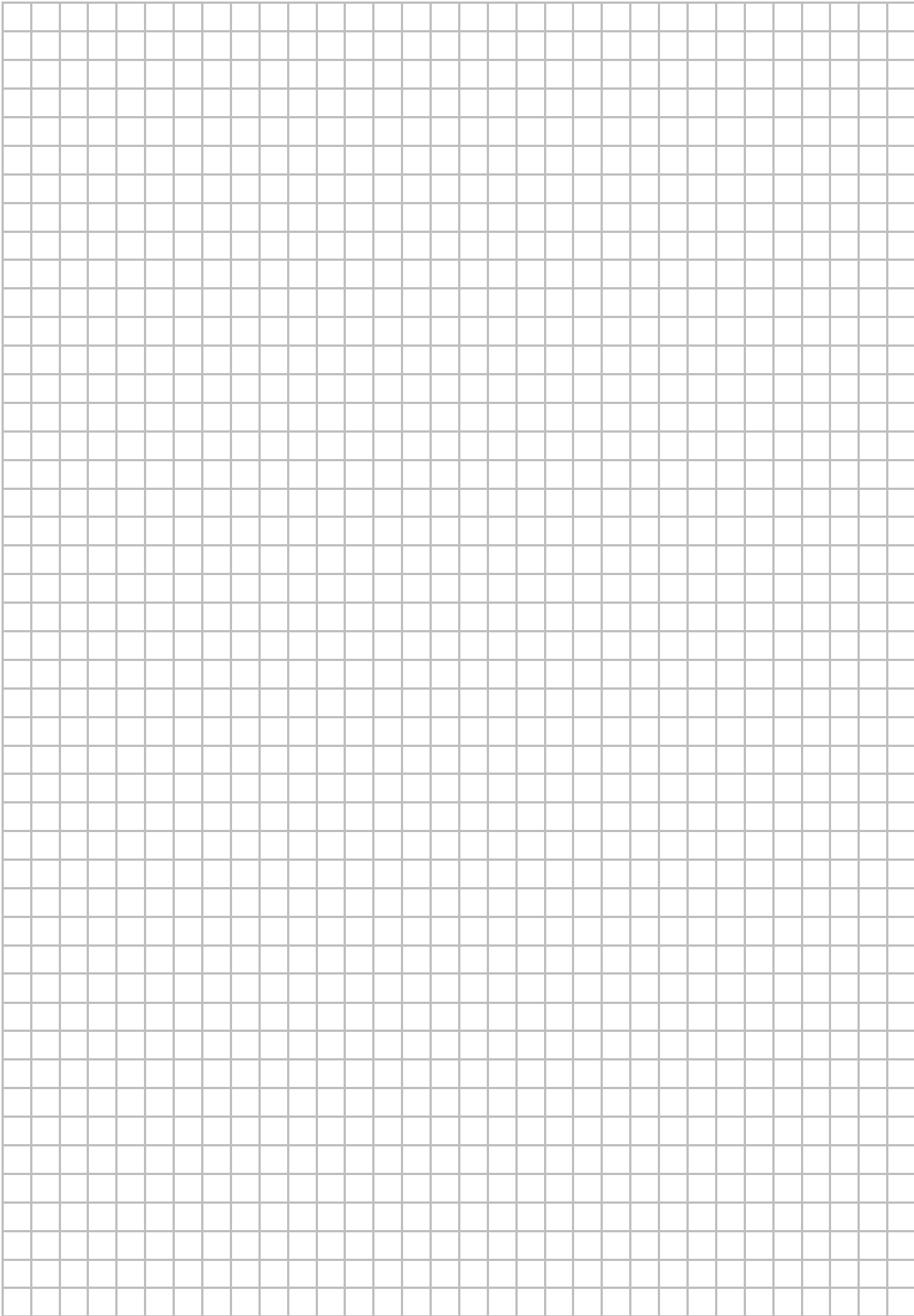
A. $\frac{2}{\sqrt{13}}$

B. $\frac{3}{\sqrt{13}}$

C. $\frac{5}{2\sqrt{13}}$

D. $\frac{4}{5}$

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

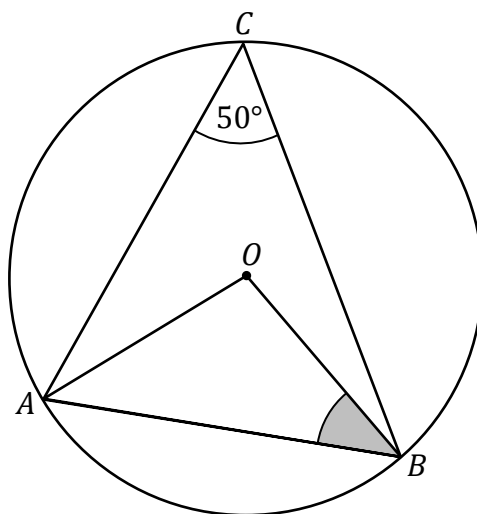


Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl

Zadanie 16. (0–1)

Punkty A , B oraz C leżą na okręgu o środku w punkcie O .

Miara kąta BCA jest równa 50° (zobacz rysunek).



Miara kąta ostrego ABO jest równa

A. 20°

B. 35°

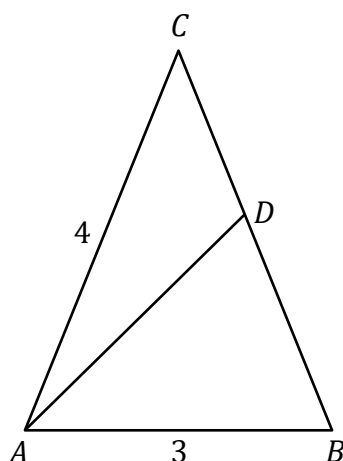
C. 40°

D. 50°

Zadanie 17. (0–1)

W trójkącie równoramiennym ABC dane są: $|AC| = |BC| = 4$ i $|AB| = 3$.

Na boku BC , między punktami B i C , wybrano taki punkt D , że trójkąty ABC i BDA są podobne (zobacz rysunek).



Odcinek BD ma długość

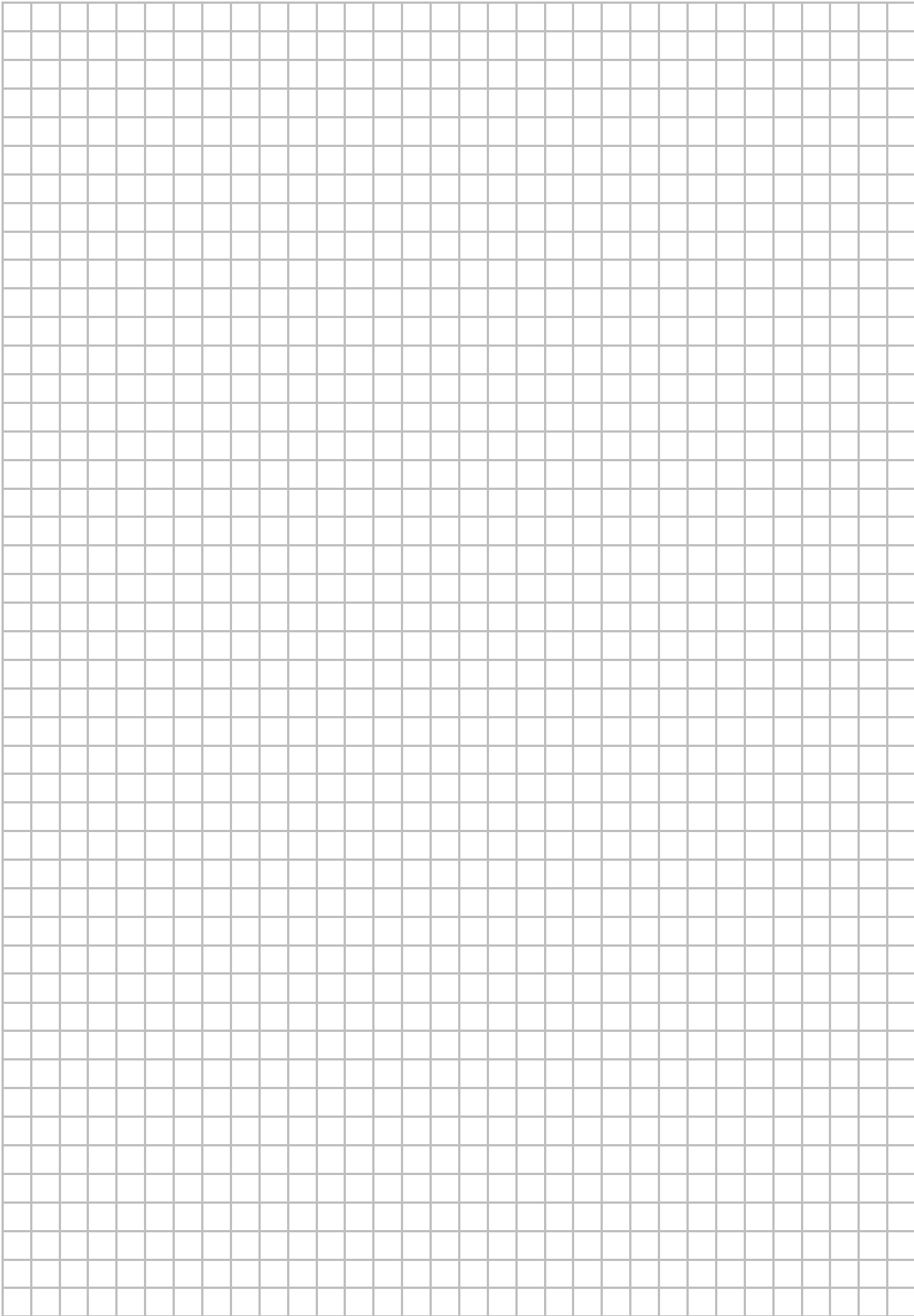
A. 2

B. 2,25

C. 2,5

D. 3

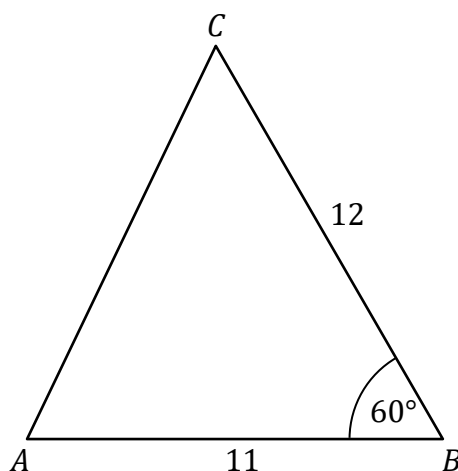
BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)



Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl

Zadanie 18. (0–1)

Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AB| = 11$, $|BC| = 12$ oraz $|\angle ABC| = 60^\circ$ (zobacz rysunek).



Pole trójkąta ABC jest równe

- A. 33 B. $33\sqrt{3}$ C. 66 D. $66\sqrt{3}$

Zadanie 19. (0–1)

W układzie współrzędnych (x, y) proste k oraz l są określone równaniami

$$k: y = (m - 2)x + 5$$

$$l: y = -4x + (m + 3)$$

Proste k oraz l są równoległe, gdy liczba m jest równa

- A. (-4) B. (-2) C. 2 D. 5

Zadanie 20. (0–1)

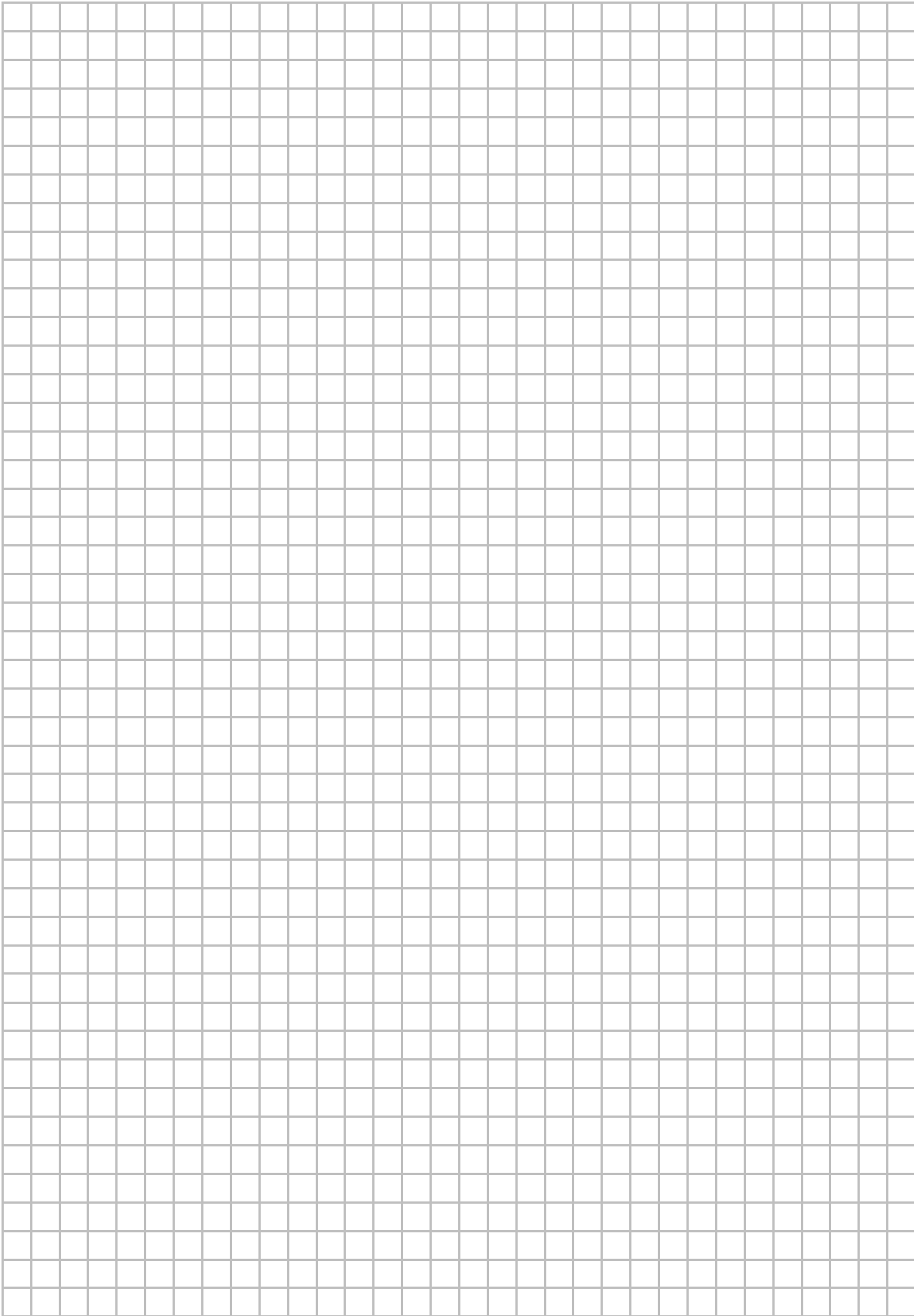
W układzie współrzędnych (x, y) dany jest kwadrat $ABCD$, w którym $A = (4, -1)$.

Przekątne tego kwadratu przecinają się w punkcie $S = (1, 3)$.

Przekątna kwadratu $ABCD$ ma długość

- A. 5 B. 7 C. 10 D. 14

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)



Zadanie 21. (0–1)

Objętość sześcianu jest równa 729.

Długość przekątnej tego sześcianu jest równa

- A. $9\sqrt{3}$ B. $9\sqrt{2}$ C. $3\sqrt{3}$ D. $3\sqrt{2}$

Zadanie 22. (0–1)

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCD S$ o podstawie $ABCD$.

Długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa jest równa 10. Wysokość tego ostrosłupa jest trzy razy dłuższa od krawędzi podstawy.

Wysokość ściany bocznej poprowadzona z wierzchołka S do krawędzi podstawy AB tego ostrosłupa jest równa

- A. $5\sqrt{10}$ B. $5\sqrt{35}$ C. $5\sqrt{37}$ D. $10\sqrt{2}$

Zadanie 23. (0–1)

Wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych nieparzystych, w których zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jeden raz cyfra 0, jest

- A. 45 B. 50 C. 54 D. 81

Zadanie 24. (0–1)

W pudełku znajdują się wyłącznie kule białe i czerwone. Kule różnią się jedynie kolorem.

Stosunek liczby kul białych do liczby kul czerwonych jest równy $3 : 5$.

Z pudełka losujemy jedną kulę.

Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe

- A. $\frac{3}{8}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{5}{8}$ D. $\frac{2}{5}$

Zadanie 25. (0–1)

Średnia arytmetyczna siedmiu liczb: 1, 2, 3, 4, 5, x , y , jest równa 3.

Suma $x + y$ jest równa

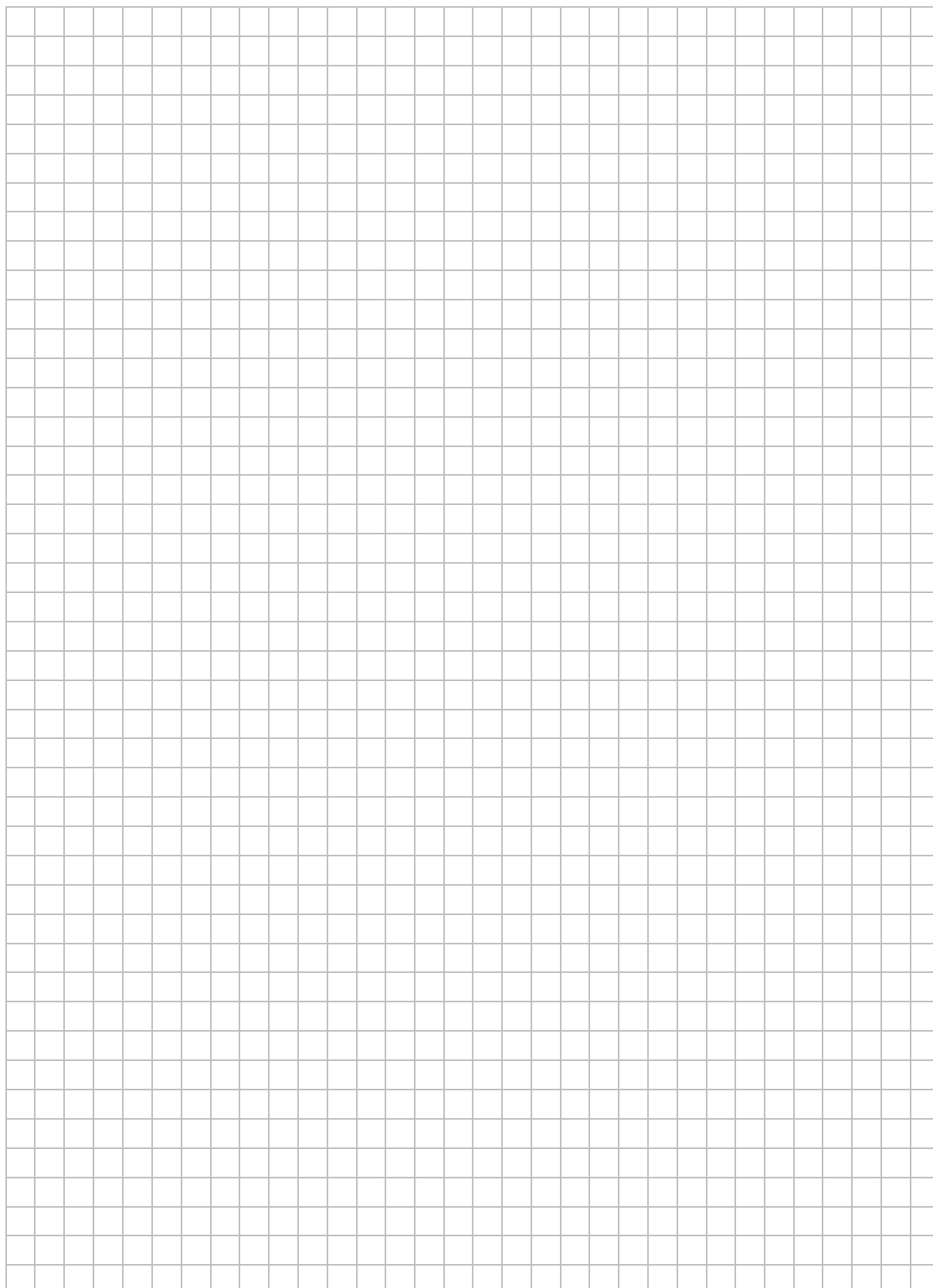
- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność

$$3(2x^2 + 1) < 11x$$



Zadanie 27. (0–2)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$ i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność

$$5x^2 + 2y^2 > 2xy$$

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	26.	27.
	Maks. liczba pkt	2	2
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 28. (0–2)

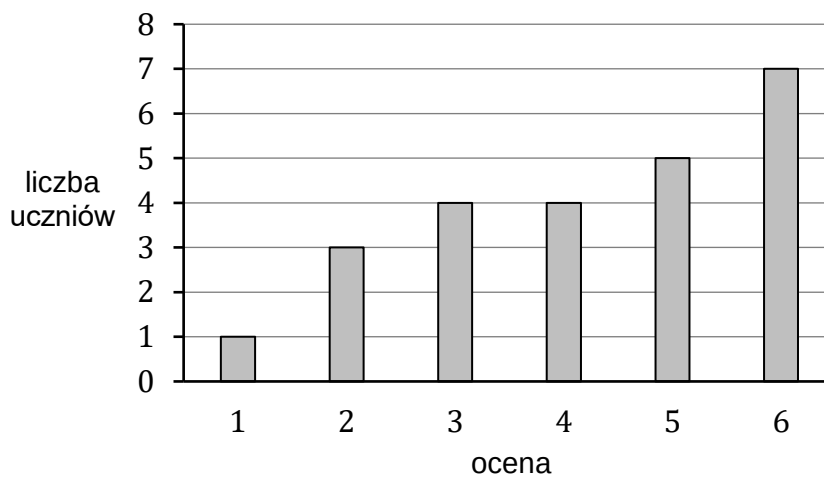
Zarząd firmy wydzielił z budżetu kwotę 1 200 000 złotych łącznie na projekty badawcze dla dwóch zespołów: A i B. W pierwszym półroczu realizacji tych projektów oba zespoły wykorzystały łącznie 146 700 złotych – zespół A wykorzystał 13% przyznanych mu środków, a zespół B wykorzystał 11% przyznanych mu środków.

Oblicz kwotę przyznaną zespołowi A na realizację projektu badawczego.

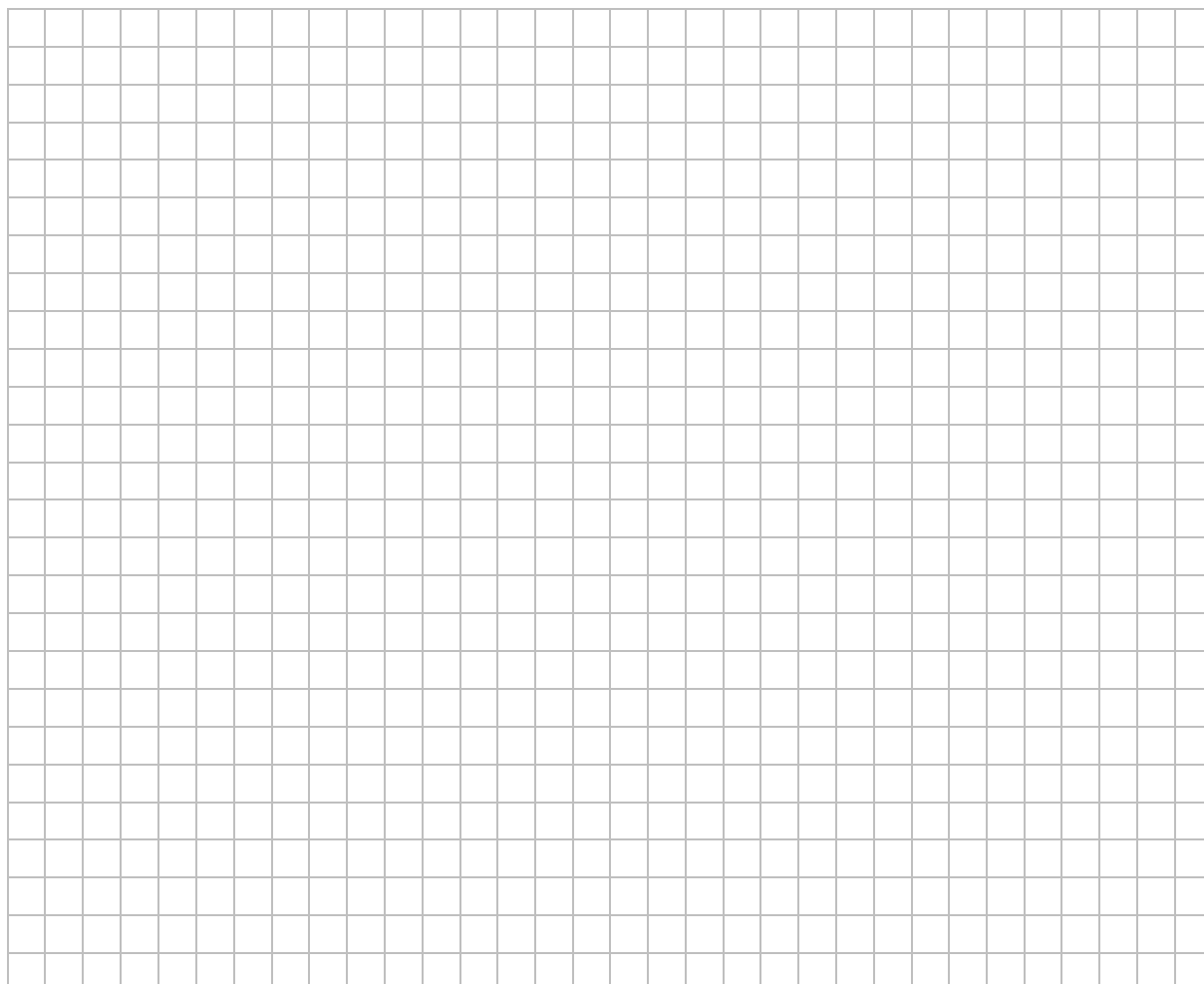
This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Zadanie 30. (0–2)

Na diagramie przedstawiono wyniki sprawdzianu z matematyki w pewnej klasie maturalnej liczącej 24 uczniów. Na osi poziomej podano oceny, które uzyskali uczniowie tej klasy, a na osi pionowej podano liczbę uczniów, którzy otrzymali daną ocenę.



Oblicz średnią arytmetyczną oraz medianę ocen uzyskanych z tego sprawdzianu przez uczniów tej klasy.



Zadanie 31. (0–2)

Dane są dwa zbiory: $X = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ oraz $Y = \{2, 4, 6, 8\}$.

Losujemy jedną liczbę ze zbioru X , a następnie losujemy jedną liczbę ze zbioru Y i tworzymy uporządkowaną parę liczb (x, y) , gdzie x jest liczbą wylosowaną ze zbioru X oraz y jest liczbą wylosowaną ze zbioru Y .

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że suma $x + y$ wylosowanych liczb będzie liczbą podzielną przez 3.

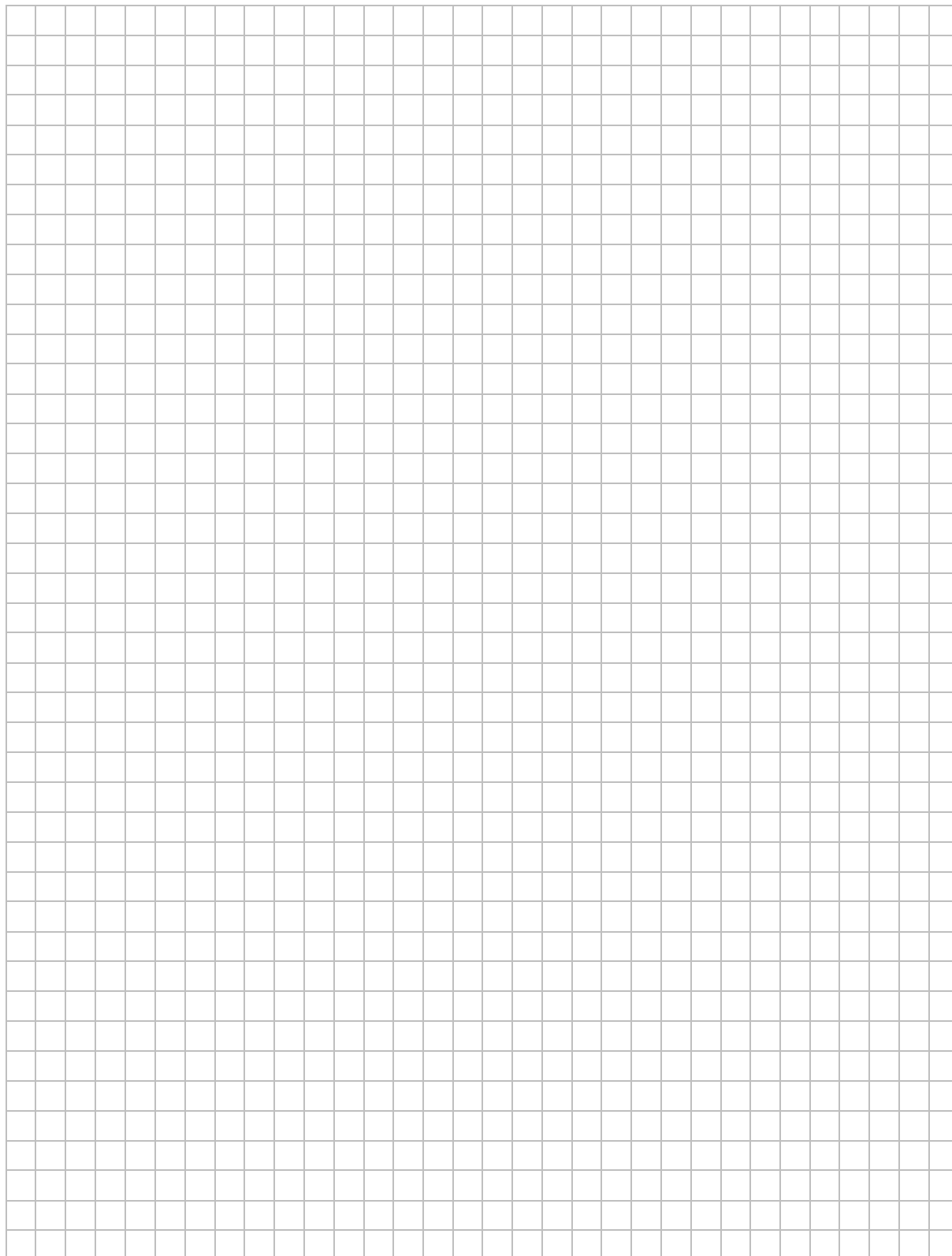
Wypełnia egzaminator	Nr zadania	30.	31.
	Maks. liczba pkt	2	2
	Uzyskana liczba pkt		

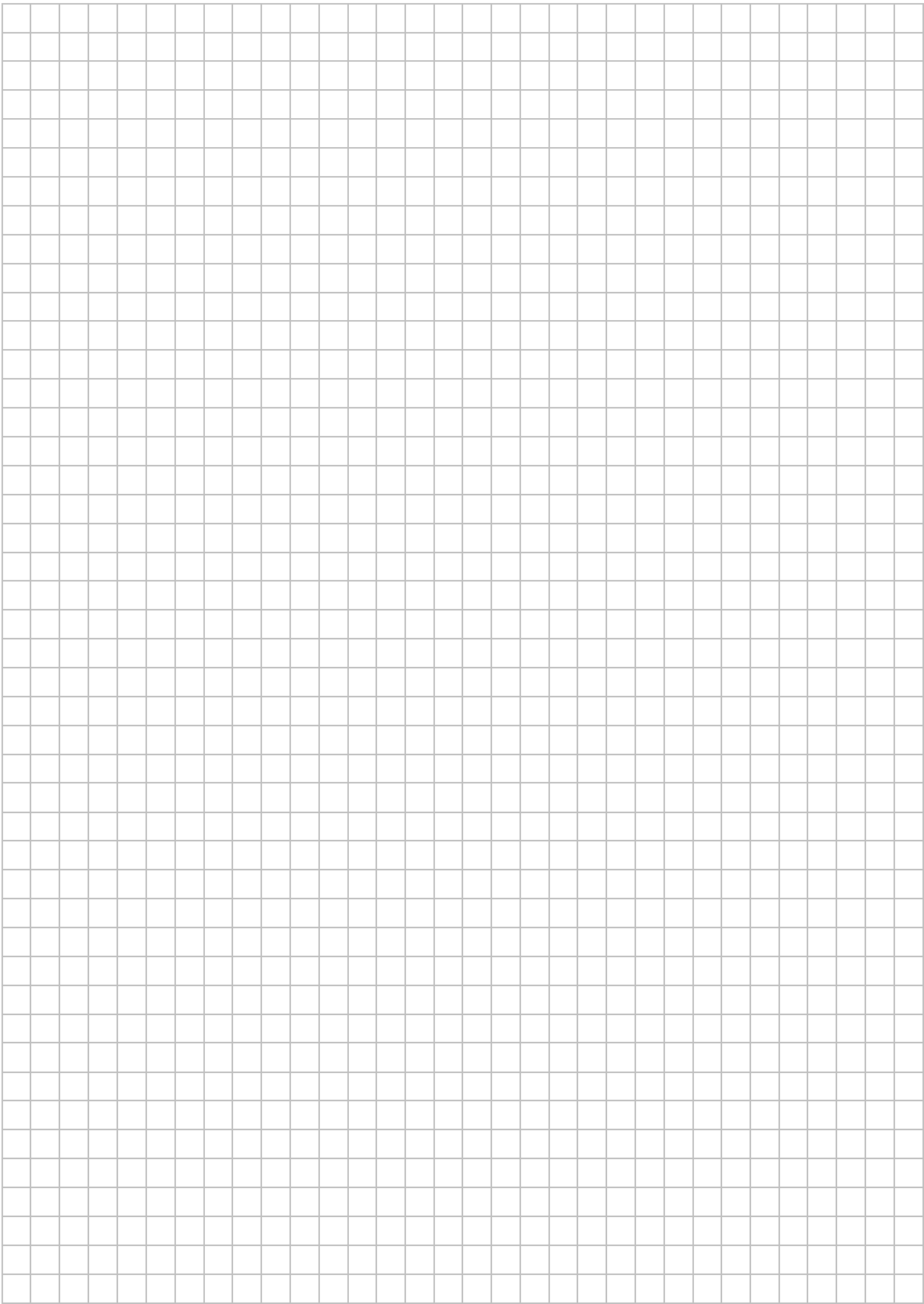
Zadanie 32. (0–4)

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-\infty, 6)$. Parabola, która jest wykresem funkcji f , przechodzi przez punkty $A = (-1, 3)$ i $B = (5, 3)$.

Oblicz wartość współczynnika c .



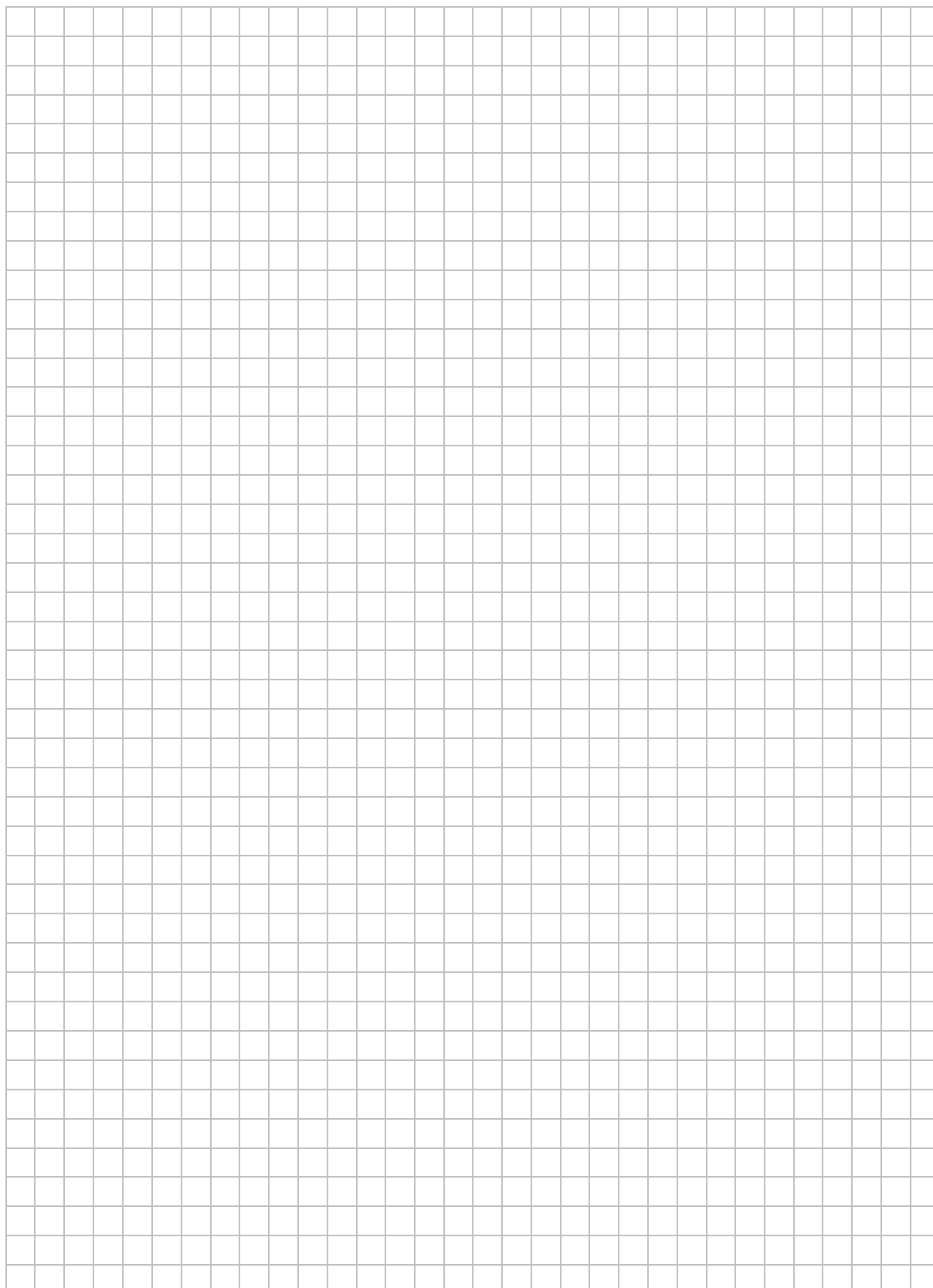


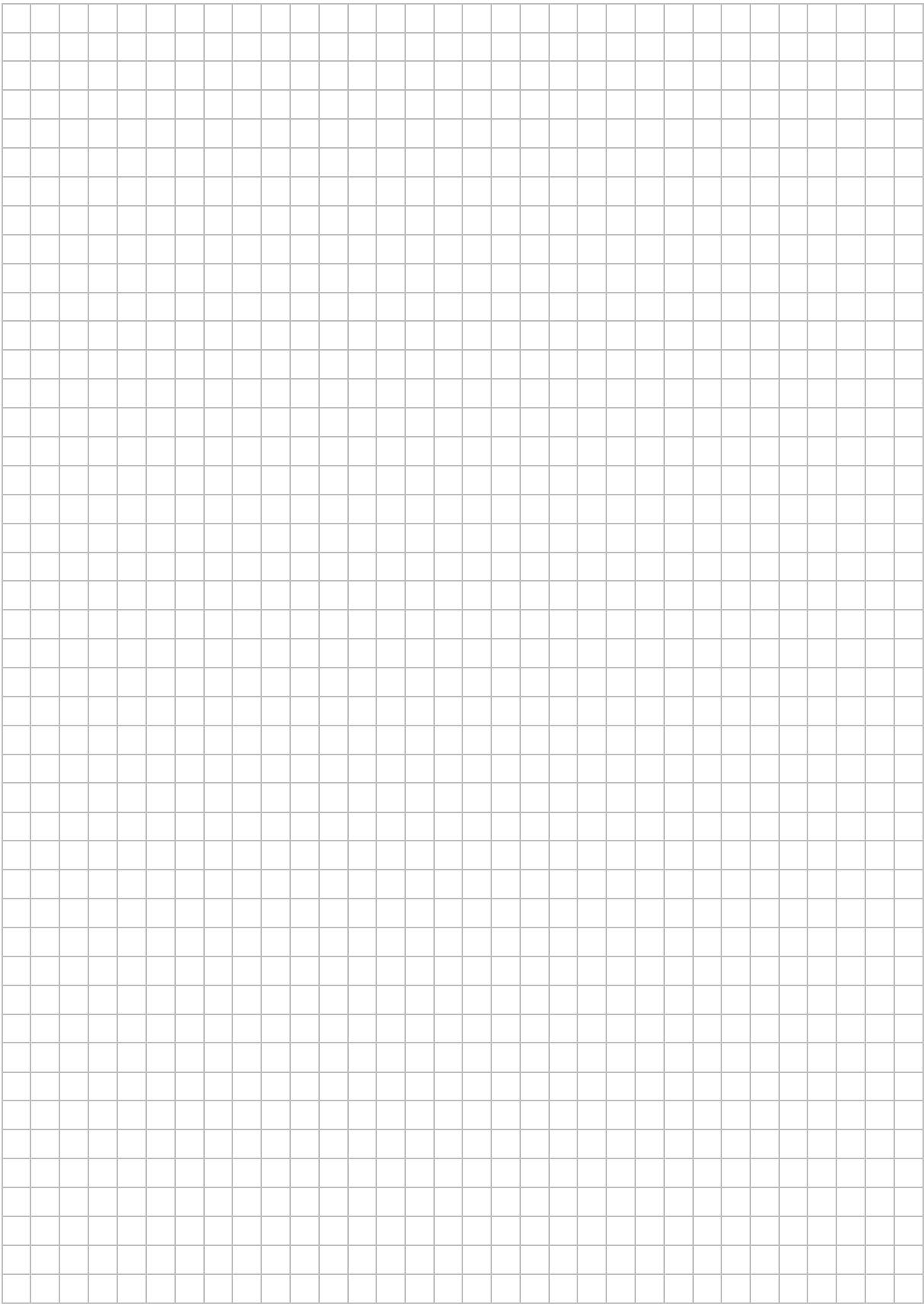
Wypełnia egzaminator	Nr zadania	32.
	Maks. liczba pkt	4
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 33. (0–4)

Tworząca stożka ma długość 8. Kąt rozwarcia tego stożka ma miarę 120° .

Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego stożka.





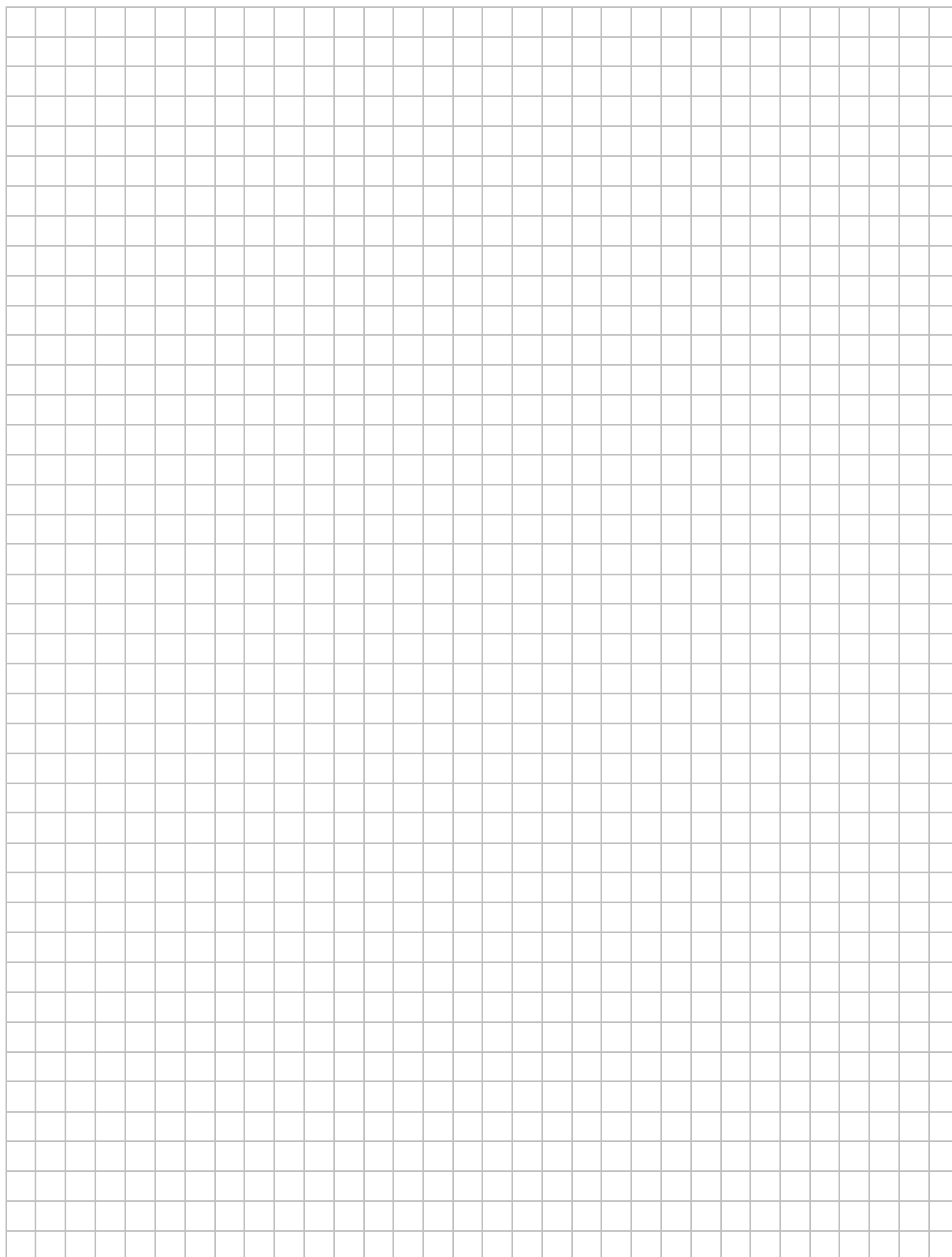
Wypełnia egzaminator	Nr zadania	33.
	Maks. liczba pkt	4
	Uzyskana liczba pkt	

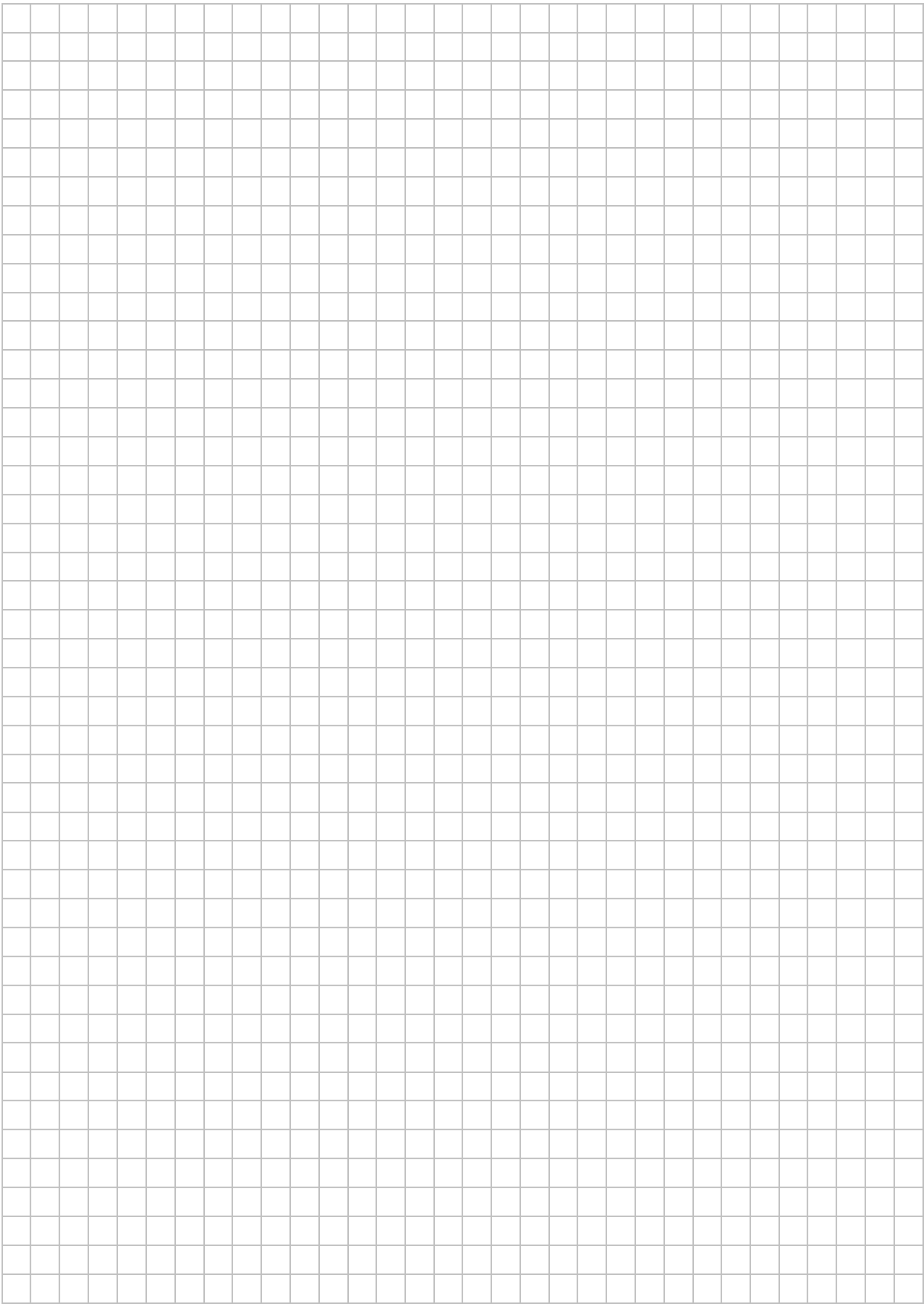
Zadanie 34. (0–5)

W układzie współrzędnych (x, y) punkty $A = (-2, -1)$, $B = (0, 0)$ oraz $C = (4, 8)$ są wierzchołkami trapezu prostokątnego $ABCD$ o podstawach AB i CD .

Kąt DAB jest prosty.

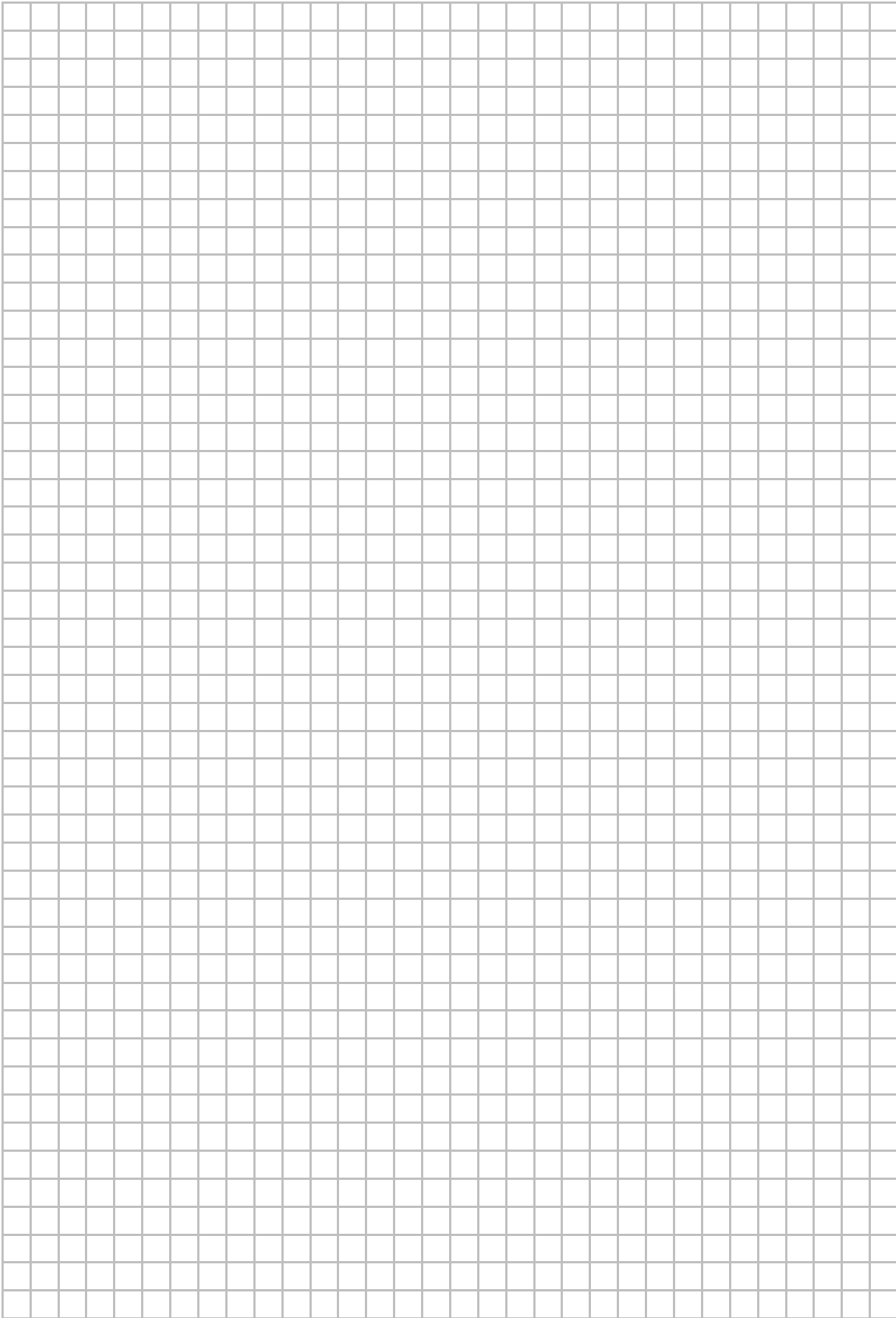
Oblicz współrzędne punktu D oraz długość odcinka BD .



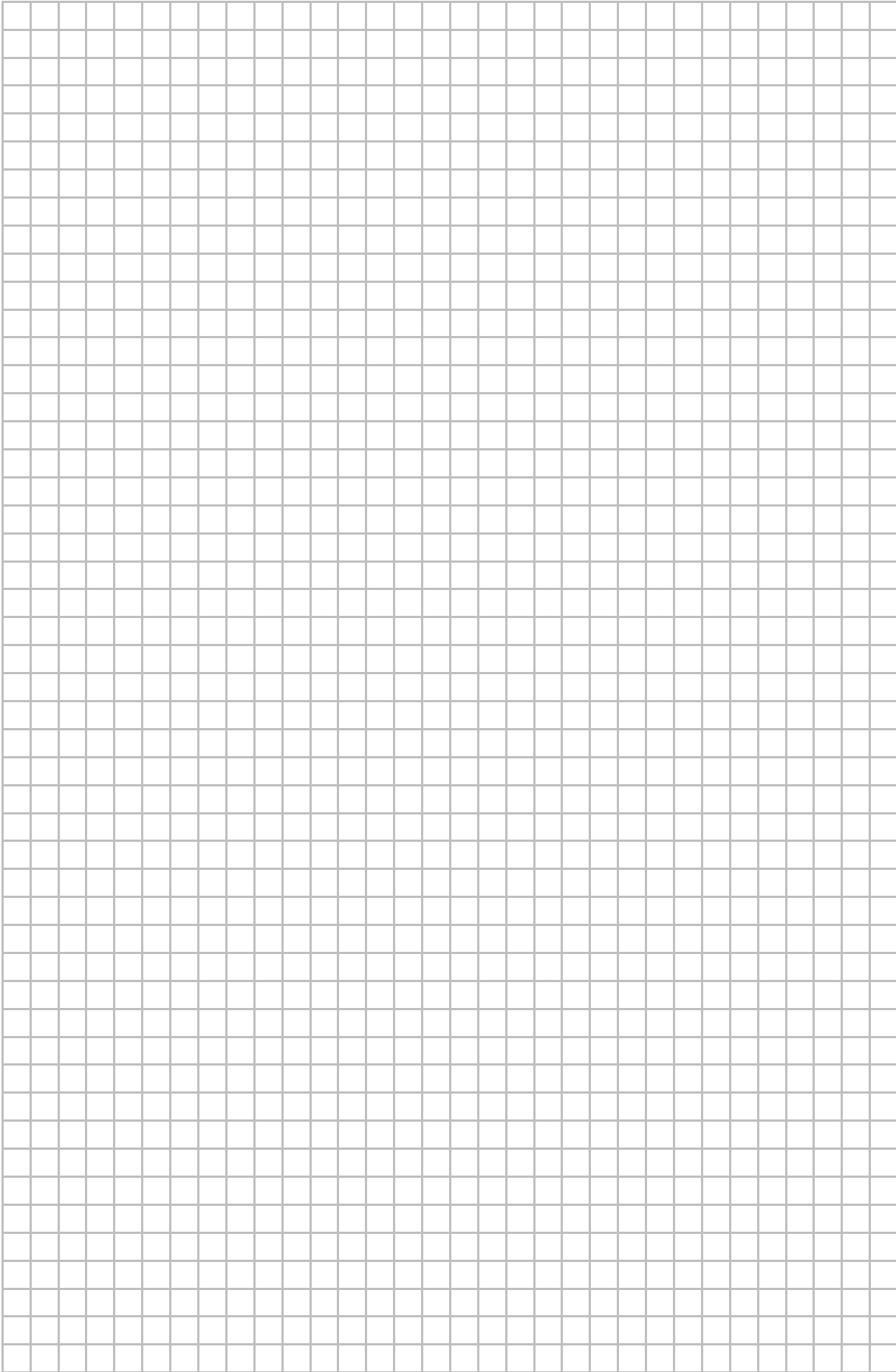


Wypełnia egzaminator	Nr zadania	34.
	Maks. liczba pkt	5
	Uzyskana liczba pkt	

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)



Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl



MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Formuła 2015

MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Formuła 2015

MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Formuła 2015

<i>Rodzaj dokumentu:</i>	Zasady oceniania rozwiązań zadań
<i>Egzamin:</i>	Egzamin maturalny
<i>Przedmiot:</i>	Matematyka
<i>Poziom:</i>	Poziom podstawowy
<i>Formy arkusza:</i>	EMAP-P0-100, EMAP-P0-200, EMAP-P0-300, EMAP-P0-400, EMAP-P0-660, EMAP-P0-700, EMAP-P0-Q00, EMAU-P0-100
<i>Termin egzaminu:</i>	6 maja 2025 r.
<i>Data publikacji dokumentu:</i>	27 czerwca 2025 r.

Uwaga:

Gdy wymaganie egzaminacyjne dotyczy treści z III etapu edukacyjnego, dopisano „G”.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania określone w podstawie programowej ¹	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 1.9) wykonuje obliczenia procentowe [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.3) posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

¹ Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 27 sierpnia 2012 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół (Dz.U. z 2012 r. poz. 977, z późn. zm., tj. Dz.U. z 2014 r. poz. 803, Dz.U. z 2016 r. poz. 895).

Zadanie 3. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.4) [...] stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 4. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.6) wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 5. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 2.1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 6. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 3.3) rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą. 1.8) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 7. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.7) korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x + 1)(x - 7) = 0$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 8. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 4.3) odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę [...]).

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 9. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 4.3) odczytuje z wykresu własności funkcji ([...] maksymalne przedziały, w których funkcja [...] rośnie [...]).

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 10. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 4.6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie; 4.7) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 11. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 5.1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 12. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 5.4) stosuje wzór na n -ty wyraz [...] ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 13. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 6.4) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 14. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 6.1) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji [...] tangens kątów o miarach od 0° do 180° .

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 15. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 6.1) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus [...] kątów o miarach od 0° do 180° .

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 16. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 7.1) stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 17. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 7.3) rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje [...] cechy podobieństwa trójkątów.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 18. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 7.4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 19. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 8.2) bada równoległość [...] prostych na podstawie ich równań kierunkowych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 20. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 8.6) oblicza odległość dwóch punktów.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 21. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: G11.2) oblicza [...] objętość graniastosłupa prostego [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 22. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: G11.2) oblicza pole powierzchni [...] ostrosłupa [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 23. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.2) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 24. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 10.3) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 25. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: G9.4) wyznacza średnią arytmetyczną [...] zestawu danych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

ZADANIA OTWARTE

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże zadanie i otrzyma poprawny wynik, lecz w końcowym zapisie przekształca ten wynik i popełnia przy tym błąd, to może uzyskać maksymalną liczbę punktów.
3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 26. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.5) rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.

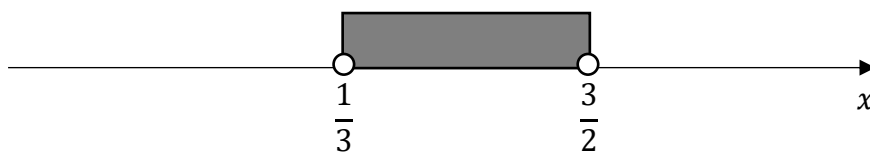
Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i zapisanie zbioru rozwiązań nierówności:

$$x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$$

ALBO

- zastosowanie poprawnej metody i przedstawienie zbioru rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziału, np.



1 pkt – obliczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego $6x^2 - 11x + 3$:

$$x_1 = \frac{1}{3} \text{ oraz } x_2 = \frac{3}{2}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający, obliczając pierwiastki trójmianu $6x^2 - 11x + 3$, popełni błędy (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionych błędów zapisze zbiór rozwiązań nierówności, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego, w przypadku gdy błędnie obliczony przez zdającego wyróżnik Δ jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli zdający rozpatruje inny niż podany w zadaniu trójmian kwadratowy, który nie wynika z błędu przekształcenia (np. $3(2x^2 + 1)$), i w konsekwencji rozpatruje inną nierówność (np. $3(2x^2 + 1) < 0$), to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający poda zbiór rozwiązań w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziału i jednocześnie zapisze niewłaściwy przedział jako zbiór rozwiązań (np. $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right]$), to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający spełni kryterium za 1 punkt, a następnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right)$, to otrzymuje **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zapisujemy nierówność w postaci $6x^2 - 11x + 3 < 0$ i obliczamy miejsca zerowe funkcji $y = 6x^2 - 11x + 3$.

Obliczamy wyróżnik trójmianu $6x^2 - 11x + 3$:

$$\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 3 = 49$$

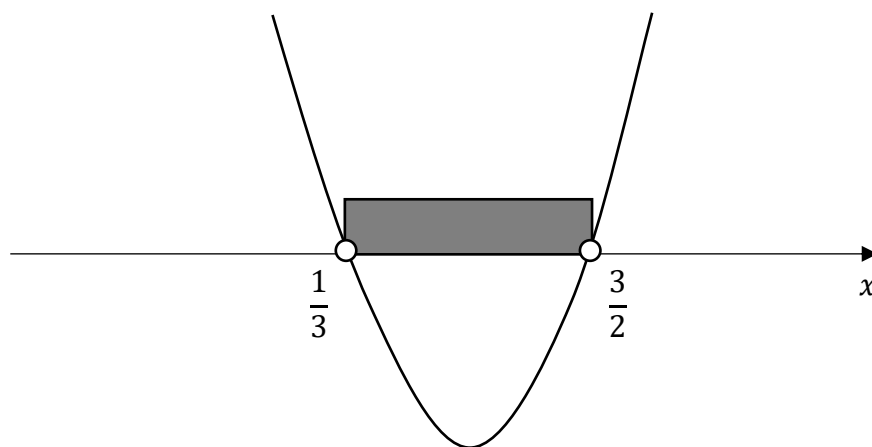
Stąd

$$x_1 = \frac{-(-11) - \sqrt{49}}{2 \cdot 6} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-(-11) + \sqrt{49}}{2 \cdot 6} = \frac{3}{2}$$

Szkicujemy wykres funkcji $y = 6x^2 - 11x + 3$.

Odczytujemy argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne.



Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$.

Zadanie 27. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 2.1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.

Zasady oceniania

- 2 pkt – przekształcenie nierówności $5x^2 + 2y^2 > 2xy$ do postaci $4x^2 + (x - y)^2 + y^2 > 0$ **oraz** powołanie się na założenie i stwierdzenie, że $4x^2$ jest liczbą dodatnią i suma $4x^2 + (x - y)^2 + y^2$ jest liczbą dodatnią
- przekształcenie nierówności $5x^2 + 2y^2 > 2xy$ do postaci $(2x - y)^2 + (x + y)^2 > 0$ **oraz** powołanie się na założenie i stwierdzenie, że przynajmniej jeden ze składników $(2x - y)^2$ lub $(x + y)^2$ jest liczbą dodatnią i suma $(2x - y)^2 + (x + y)^2$ jest liczbą dodatnią,
ALBO
- obliczenie wyróżnika trójmianu kwadratowego $5x^2 - 2yx + 2y^2$ zmiennej x **oraz** uzasadnienie, że jest on niedodatni, oraz uzasadnienie prawdziwości nierówności $5x^2 + 2y^2 > 2xy$ dla $y = 0$,
ALBO
- obliczenie wyróżnika trójmianu kwadratowego $2y^2 - 2xy + 5x^2$ zmiennej y **oraz** uzasadnienie, że ten wyróżnik jest ujemny dla każdego $x \neq 0$.
- 1 pkt – przekształcenie nierówności $5x^2 + 2y^2 > 2xy$ do postaci $4x^2 + (x - y)^2 + y^2 > 0$
ALBO
- przekształcenie nierówności $5x^2 + 2y^2 > 2xy$ do postaci $(2x - y)^2 + (x + y)^2 > 0$,
ALBO
- obliczenie wyróżnika Δ trójmianu kwadratowego $5x^2 - 2yx + 2y^2$ zmiennej x :
 $\Delta = -36y^2$,
ALBO
- obliczenie wyróżnika Δ trójmianu kwadratowego $2y^2 - 2xy + 5x^2$ zmiennej y :
 $\Delta = -36x^2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeśli zdający sprawdza prawdziwość nierówności tylko dla wybranych wartości x i y , to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przekształcamy nierówność $5x^2 + 2y^2 > 2xy$ w sposób równoważny:

$$5x^2 - 2xy + 2y^2 > 0$$

$$4x^2 + x^2 - 2xy + y^2 + y^2 > 0$$

$$4x^2 + (x - y)^2 + y^2 > 0$$

Z założenia wiadomo, że $x \neq 0$, więc $4x^2$ jest liczbą dodatnią. Liczby $(x - y)^2$ oraz y^2 są nieujemne, zatem suma $4x^2 + (x - y)^2 + y^2$ jest liczbą dodatnią. To należało wykazać.

Sposób II

Przekształcamy nierówność $5x^2 + 2y^2 > 2xy$ w sposób równoważny:

$$5x^2 - 2xy + 2y^2 > 0$$

$$4x^2 + x^2 - 4xy + 2xy + y^2 + y^2 > 0$$

$$4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 + 2xy + y^2 > 0$$

$$(2x - y)^2 + (x + y)^2 > 0$$

Z założenia wiadomo, że $x \neq 0$, więc przynajmniej jeden ze składników $(2x - y)^2$ lub $(x + y)^2$ jest liczbą dodatnią, zatem suma $(2x - y)^2 + (x + y)^2$ jest liczbą dodatnią. To należało wykazać.

Sposób III (trójmian kwadratowy zmiennej x z parametrem y)

Przekształcamy równoważnie nierówność $5x^2 + 2y^2 > 2xy$ i otrzymujemy:

$$5x^2 - 2yx + 2y^2 > 0$$

Wyrażenie $5x^2 - 2yx + 2y^2$ traktujemy jako trójmian kwadratowy zmiennej x .

Obliczamy wyróżnik Δ trójmianu:

$$\Delta = (-2y)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2y^2$$

$$\Delta = 4y^2 - 40y^2$$

$$\Delta = -36y^2$$

Gdy $y \neq 0$, to $\Delta < 0$ i funkcja kwadratowa $f(x) = 5x^2 - 2yx + 2y^2$ zmiennej x nie ma miejsc zerowych, a ponieważ współczynnik przy drugiej potęgze zmiennej jest dodatni, więc wykres funkcji f leży powyżej osi odciętych. Zatem funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie.

Gdy $y = 0$, to $\Delta = 0$ i funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe: $x = 0$. Ponieważ współczynnik przy drugiej potęgze zmiennej jest dodatni, więc żaden fragment wykresu funkcji f nie leży poniżej osi odciętych. Zatem funkcja f przyjmuje wartości dodatnie dla każdego $x \neq 0$.

Oznacza to, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$ i dla każdej liczby rzeczywistej y nierówność $5x^2 - 2yx + 2y^2 > 0$ jest prawdziwa.

Zatem nierówność $5x^2 + 2y^2 > 2xy$ również jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$ i dla każdej liczby rzeczywistej y . To należało wykazać.

Sposób IV (trójmian kwadratowy zmiennej y z parametrem x)

Przekształcamy równoważnie nierówność $5x^2 + 2y^2 > 2xy$ i otrzymujemy:

$$2y^2 - 2xy + 5x^2 > 0$$

Wyrażenie $2y^2 - 2xy + 5x^2$ traktujemy jako trójmian kwadratowy zmiennej y .

Obliczamy wyróżnik Δ trójmianu:

$$\Delta = (-2x)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5x^2$$

$$\Delta = 4x^2 - 40x^2$$

$$\Delta = -36x^2$$

Gdy $x \neq 0$, to $\Delta < 0$ i funkcja kwadratowa $f(y) = 2y^2 - 2xy + 5x^2$ zmiennej y nie ma miejsc zerowych, a ponieważ współczynnik przy drugiej potęgze zmiennej jest dodatni, więc wykres funkcji f leży powyżej osi odciętych. Zatem funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie.

Oznacza to, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$ i dla każdej liczby rzeczywistej y nierówność $2y^2 - 2xy + 5x^2 > 0$ jest prawdziwa.

Zatem nierówność $5x^2 + 2y^2 > 2xy$ również jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$ i dla każdej liczby rzeczywistej y . To należało wykazać.

Zadanie 28. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: G7.7) za pomocą równań lub układów równań opisuje i rozwiązuje zadania osadzone w kontekście praktycznym.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 735 000 zł.

1 pkt – zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć kwoty przyznane poszczególnym zespołom, np.

$$x + y = 1\,200\,000 \quad \text{oraz} \quad 0,13x + 0,11y = 146\,700,$$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą pozwalającego obliczyć kwotę przyznaną zespołowi A, np.:

$$2\% \cdot x = 14\,700,$$

$$0,13x + 0,11 \cdot (1\,200\,000 - x) = 146\,700,$$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą pozwalającego obliczyć kwotę przyznaną zespołowi B, np.

$$0,13 \cdot (1\,200\,000 - y) + 0,11y = 146\,700.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

- Jeżeli zdający sprawdza warunki zadania dla wybranych par liczb x oraz y i wskaże właściwą odpowiedź, ale nie uzasadni, że jest to jedyne rozwiązanie zadania, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
- Jeżeli zdający w rozwiązaniu używa wartości przybliżonych i otrzymuje wynik różny od 735 000, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Oznaczmy:

x – kwota przyznana zespołowi A,

y – kwota przyznana zespołowi B.

Po uwzględnieniu warunków zadania otrzymujemy:

$$x + y = 1\,200\,000 \quad \text{oraz} \quad 0,13x + 0,11y = 146\,700$$

Z pierwszego z tych równań wyznaczamy $y = 1\,200\,000 - x$ i podstawiamy w miejsce y do drugiego z równań, otrzymując

$$0,13x + 0,11 \cdot (1\,200\,000 - x) = 146\,700$$

$$0,13x + 132\,000 - 0,11x = 146\,700$$

$$0,02x = 14700$$

$$x = 735000$$

Zespół A otrzymał 735 000 zł.

Zadanie 29. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 5.3) stosuje wzór na n -ty wyraz [...] ciągu arytmetycznego.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $m = -2$, $m = \frac{5}{2}$.

1 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą m , np.:

$$\frac{2m + 11 + 5 - m}{2} = m^2 + 3 \quad \text{lub} \quad (m^2 + 3) - (2m + 11) = (5 - m) - (m^2 + 3).$$

ALBO

– zapisanie układu równań z dwiema niewiadomymi pozwalającego obliczyć m i r , np.

$$m^2 + 3 = 2m + 11 + r \quad \text{oraz} \quad 5 - m = 2m + 11 + 2r.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający myli ciąg arytmetyczny z geometrycznym, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.
2. Jeżeli zdający nie uwzględni istotnych nawiasów i rozwiązuje równanie postaci $(m^2 + 3) - 2m + 11 = (5 - m) - m^2 + 3$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.
3. Jeżeli zdający zapisze bez stosownych obliczeń $m = \frac{5}{2}$ oraz $m = -2$ i nie uzasadni, że są to jedyne rozwiązania, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie. Natomiast jeśli poda tylko jedną z tych wartości, to otrzymuje **0 punktów**.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy:

$$\frac{2m + 11 + 5 - m}{2} = m^2 + 3$$

$$m + 16 = 2m^2 + 6$$

$$2m^2 - m - 10 = 0$$

Obliczamy wyróżnik trójmianu $2m^2 - m - 10$:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10) = 81$$

Stąd

$$m_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = -2$$

$$m_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{5}{2}$$

Zatem ciąg $(2m + 11, m^2 + 3, 5 - m)$ jest arytmetyczny dla $m = -2$ oraz dla $m = \frac{5}{2}$.

Sposób II

Z definicji/własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy:

$$(m^2 + 3) - (2m + 11) = (5 - m) - (m^2 + 3)$$

Stąd

$$m^2 - 2m - 8 = -m^2 - m + 2$$

$$2m^2 - m - 10 = 0$$

$$2m^2 + 4m - 5m - 10 = 0$$

$$2m^2 + 4m - 5m - 10 = 0$$

$$2m(m + 2) - 5(m + 2) = 0$$

$$(m + 2)(2m - 5) = 0$$

$$m + 2 = 0 \quad \text{lub} \quad 2m - 5 = 0$$

$$m = -2 \quad \text{lub} \quad m = \frac{5}{2}$$

Zatem ciąg $(2m + 11, m^2 + 3, 5 - m)$ jest arytmetyczny dla $m = -2$ oraz dla $m = \frac{5}{2}$.

Sposób III

Ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego otrzymujemy:

$$\begin{cases} m^2 + 3 = 2m + 11 + r \\ 5 - m = 2m + 11 + 2r \end{cases}$$

gdzie r jest różnicą ciągu arytmetycznego. Stąd

$$\begin{cases} 2m^2 + 6 = 4m + 22 + 2r \\ 5 - m = 2m + 11 + 2r \end{cases}$$

Odejmujemy równania stronami i otrzymujemy:

$$2m^2 + 6 - 5 + m = 4m + 22 + 2r - 2m - 11 - 2r$$

$$2m^2 - m - 10 = 0$$

Obliczamy wyróżnik trójmianu $2m^2 - m - 10$:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10) = 81$$

Stąd

$$m_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = -2$$

$$m_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{5}{2}$$

Zatem ciąg $(2m + 11, m^2 + 3, 5 - m)$ jest arytmetyczny dla $m = -2$ oraz dla $m = \frac{5}{2}$.

Zadanie 30. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: G9.4) wyznacza średnią arytmetyczną i medianę zestawu danych.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawne wyniki: $\bar{x} = 4,25$ oraz $Me = 4,5$.

1 pkt – obliczenie średniej arytmetycznej ocen: $\bar{x} = 4,25$

ALBO

– obliczenie mediany ocen: $Me = 4,5$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy średnią arytmetyczną ocen:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 7 \cdot 6}{24} = \frac{102}{24} = 4,25$$

Medianą ciągu 24 ocen uporządkowanego niemalejąco jest średnia arytmetyczna dwóch środkowych wyrazów tego ciągu (tzn. średnia arytmetyczna wyrazów dwunastego i trzynastego). Zatem

$$Me = \frac{4 + 5}{2} = 4,5$$

Zadanie 31. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.3) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia A

i uzyskanie poprawnego wyniku: $P(A) = \frac{7}{20}$.

1 pkt – wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych *LUB* obliczenie/podanie liczby tych zdarzeń: $|\Omega| = 5 \cdot 4$, *LUB* sporządzenie tabeli o 20 polach odpowiadających zdarzeniom elementarnym, *LUB* sporządzenie pełnego drzewa stochastycznego *ALBO*

– wypisanie (lub zaznaczenie w tabeli) wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i niewypisanie żadnego niewłaściwego, *ALBO*

– podanie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A : $|A| = 7$, o ile nie zostały zliczone błędne pary, *ALBO*

– sporządzenie fragmentu drzewa stochastycznego, który zawiera wszystkie gałęzie sprzyjające zdarzeniu A , **oraz** zapisanie prawdopodobieństwa na co najmniej jednym odcinku każdego z etapów doświadczenia, *ALBO*

– podanie prawdopodobieństwa jednoelementowego zdarzenia (elementarnego): $\frac{1}{20}$, *ALBO*

– zapisanie tylko $P(A) = \frac{7}{20}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający zapisuje tylko liczby 7 lub 20 i z rozwiązania nie wynika znaczenie tych liczb, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie uporządkowane pary liczb (x, y) , gdzie $x \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ oraz $y \in \{2, 4, 6, 8\}$.

Liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych obliczamy z wykorzystaniem reguły mnożenia.

Moc zbioru Ω jest równa $5 \cdot 4 = 20$.

Zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:

$(1, 2), (1, 8), (3, 6), (5, 4), (7, 2), (7, 8), (9, 6)$, więc moc zbioru A jest równa 7.

Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe $\frac{7}{20}$.

Sposób II

W tabeli literą $\mathcal{A}$ zaznaczamy zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A (pary liczb, których suma jest liczbą podzieloną przez 3).

$X \backslash Y$	2	4	6	8
1	$\mathcal{A}$			$\mathcal{A}$
3			$\mathcal{A}$	
5		$\mathcal{A}$		
7	$\mathcal{A}$			$\mathcal{A}$
9			$\mathcal{A}$	

Moc zbioru Ω jest równa 20.

Zdarzeń sprzyjających wylosowaniu liczb, których suma jest podzielna przez 3, jest 7.

Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe $\frac{7}{20}$.

Zadanie 32. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 4.9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $c = \frac{14}{3}$.

3 pkt – zapisanie wzoru funkcji f w postaci $f(x) = a(x - 2)^2 + 6$ **oraz** obliczenie

współczynnika a : $a = -\frac{1}{3}$

ALBO

– zapisanie układu trzech niezależnych równań z trzema niewiadomymi a , b , c prowadzącego do obliczenia wartości współczynników a , b oraz c , np.:

$$a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 3 \text{ oraz}$$

$$a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 3 \text{ oraz}$$

$$\frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = 6$$

lub

$$a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 3 \text{ oraz}$$

$$a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 3 \text{ oraz}$$

$$a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 6$$

ALBO

– zapisanie wzoru funkcji g w postaci $g(x) = a(x + 1)(x - 5)$ **oraz** obliczenie

współczynnika a : $a = -\frac{1}{3}$.

ALBO

– zapisanie wzoru funkcji f w postaci $f(x) = a(x + 1)(x - 5) + 3$ **oraz** obliczenie

współczynnika a : $a = -\frac{1}{3}$.

2 pkt – zapisanie wzoru funkcji f w postaci $f(x) = a(x - 2)^2 + 6$

ALBO

– zapisanie, że rzędna q wierzchołka paraboli jest równa 6: $q = 6$, **oraz** zapisanie jednego z równań:

$$a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 3 \text{ lub } a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 3, \text{ lub } -\frac{b}{2a} = 2,$$

ALBO

– zapisanie układu dwóch równań z trzema niewiadomymi a , b , c , z których jedno jest którymś z równań

$$\frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = 6 \text{ lub } a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 6,$$

natomiast drugie jest jednym z równań

$$a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 3 \text{ lub } a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 3, \text{ lub } -\frac{b}{2a} = 2,$$

ALBO

- zapisanie wzoru funkcji g w postaci $g(x) = a(x+1)(x-5)$ **oraz** obliczenie współrzędnych wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji g : $W_g = (2, 3)$,

ALBO

- zapisanie wzoru funkcji f w postaci $f(x) = a(x+1)(x-5) + 3$ **oraz** obliczenie współrzędnych wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f : $W_f = (2, 6)$.

1 pkt – zapisanie, że rzędna q wierzchołka paraboli jest równa 6: $q = 6$,

ALBO

- zapisanie, że odcięta p wierzchołka paraboli jest równa 2: $p = 2$,

ALBO

- zapisanie jednego równania z niewiadomymi a , b oraz c wynikającego z treści zadania, np. $a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 3$,

ALBO

- zapisanie wzoru funkcji g w postaci $g(x) = f(x) - 3$ **oraz** zapisanie wzoru funkcji g w postaci $g(x) = a(x+1)(x-5)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający błędnie przyjmie współrzędne wierzchołka paraboli $W = (6, 2)$, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.
2. Jeżeli zdający poprawnie obliczy/poda obie współrzędne wierzchołka paraboli, ale zapisze błędne równanie $3 = a(-1+2)^2 + 6$ lub $3 = a(5+2)^2 + 6$, a następnie konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający poprawnie zidentyfikuje miejsca zerowe funkcji g , ale zapisze błędne równanie $3 = a(2-1)(2+5)$ lub $3 = a(2-1)(2-5)$ lub $3 = a(2+1)(2+5)$, a następnie konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający poprawnie zidentyfikuje miejsca zerowe funkcji g , ale zapisze błędne równanie $6 = a(2+1)(2-5)$, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie (za wyznaczenie pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli).

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Parabola, która jest wykresem funkcji f , przechodzi przez punkty $A = (-1, 3)$ i $B = (5, 3)$.

Punkty A i B mają równe rzędne, więc są symetryczne względem osi symetrii tej paraboli,

stąd odcięta p wierzchołka tej paraboli jest równa $\frac{-1+5}{2} = 2$.

Ponieważ zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-\infty, 6)$, więc rzędna q wierzchołka paraboli jest równa 6. Zatem wierzchołek W paraboli ma współrzędne $W = (2, 6)$.

Korzystamy ze wzoru na postać kanoniczną funkcji kwadratowej i zapisujemy:

$$f(x) = a(x - 2)^2 + 6, \text{ gdzie } a \neq 0$$

Punkt $(-1, 3)$ leży na wykresie funkcji f , więc

$$f(-1) = 3$$

$$a(-1 - 2)^2 + 6 = 3$$

$$9a = -3$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

Zatem $f(x) = -\frac{1}{3}(x - 2)^2 + 6$.

Obliczamy wartość współczynnika c :

$$c = f(0) = -\frac{1}{3}(0 - 2)^2 + 6 = -\frac{4}{3} + 6 = \frac{14}{3}$$

Sposób II

Parabola, która jest wykresem funkcji f , przechodzi przez punkty $A = (-1, 3)$ i $B = (5, 3)$, więc

$$\begin{cases} f(-1) = 3 \\ f(5) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 3 \\ a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b + c = 3 \\ 25a + 5b + c = 3 \end{cases}$$

Odejmując równania stronami, otrzymujemy:

$$(a - b + c) - (25a + 5b + c) = 3 - 3$$

$$-24a - 6b = 0$$

$$b = -4a$$

Ponieważ zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-\infty, 6]$, więc rzędna q wierzchołka paraboli jest równa 6.

Stąd

$$\frac{-\Delta}{4a} = 6$$

$$\frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = 6$$

Podstawiamy do ostatniego równania w miejsce b wyrażenie $(-4a)$ i otrzymujemy:

$$\frac{-((-4a)^2 - 4ac)}{4a} = 6$$

$$\frac{4a \cdot (-4a + c)}{4a} = 6$$

$$-4a + c = 6$$

$$a = \frac{c - 6}{4}$$

Z uzyskanych wcześniej równań $a - b + c = 3$, $b = -4a$ oraz $a = \frac{c-6}{4}$ obliczamy c :

$$a - b + c = 3$$

$$a + 4a + c = 3$$

$$5a + c = 3$$

$$5\left(\frac{c-6}{4}\right) + c = 3$$

$$5c - 30 + 4c = 12$$

$$9c = 42$$

$$c = \frac{42}{9} = \frac{14}{3}$$

Sposób III

Punkty A i B mają równe rzędne, więc są symetryczne względem osi symetrii tej paraboli, stąd odcięta p wierzchołka tej paraboli jest równa $\frac{-1+5}{2} = 2$.

Ponieważ zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-\infty, 6)$, więc rzędna q wierzchołka paraboli jest równa 6. Zatem wierzchołek W paraboli ma współrzędne $W = (2, 6)$.

Punkty $(-1, 3)$, $(5, 3)$, $(2, 6)$ leżą na wykresie funkcji f , zatem

$$\begin{cases} f(-1) = 3 \\ f(5) = 3 \\ f(2) = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 3 \\ a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 3 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b + c = 3 \\ 25a + 5b + c = 3 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = a + c - 3 \\ 25a + 5b + c = 3 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25a + 5(a + c - 3) + c = 3 \\ 4a + 2(a + c - 3) + c = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25a + 5a + 5c - 15 + c = 3 \\ 4a + 2a + 2c - 6 + c = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30a + 6c = 18 \\ 6a + 3c = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 \cdot 6a + 6c = 18 \\ 6a = -3c + 12 \end{cases}$$

Stąd

$$\begin{aligned} 5 \cdot (-3c + 12) + 6c &= 18 \\ -15c + 60 + 6c &= 18 \\ -9c &= -42 \\ c &= \frac{-42}{-9} = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

Sposób IV

Parabola, która jest wykresem funkcji f , przechodzi przez punkty $A = (-1, 3)$ i $B = (5, 3)$. Punkty A i B mają równe rzędne, więc są symetryczne względem osi symetrii tej paraboli. Zatem odcięta p wierzchołka tej paraboli jest równa

$$p = \frac{-1 + 5}{2} = 2$$

Stąd

$$\begin{aligned} \frac{-b}{2a} &= 2 \\ b &= -4a \end{aligned}$$

Ponieważ zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-\infty, 6)$, więc rzędna q wierzchołka paraboli jest równa 6.

Stąd

$$\begin{aligned} \frac{-\Delta}{4a} &= 6 \\ \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} &= 6 \end{aligned}$$

Podstawiamy do ostatniego równania w miejsce b wyrażenie $(-4a)$ i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{-((-4a)^2 - 4ac)}{4a} &= 6 \\ \frac{4a \cdot (-4a + c)}{4a} &= 6 \\ -4a + c &= 6 \end{aligned}$$

$$c = 4a + 6$$

Punkt $A = (-1, 3)$ leży na wykresie funkcji f , zatem

$$f(-1) = 3$$

$$a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 3$$

$$a - b + c = 3$$

Z uzyskanych równań obliczamy a :

$$a - (-4a) + 4a + 6 = 3$$

$$9a = -3$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

Zatem

$$c = 4a + 6 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 6 = -\frac{4}{3} + 6 = \frac{14}{3}$$

Sposób V

Rozważmy funkcję kwadratową g określoną dla każdej liczby rzeczywistej x wzorem $g(x) = f(x) - 3$.

Wykres funkcji g przechodzi przez punkty $(-1, 0)$ i $(5, 0)$, więc miejscami zerowymi funkcji g są liczby (-1) oraz 5 . Zatem wzór funkcji g możemy zapisać w postaci iloczynowej $g(x) = a(x + 1)(x - 5)$.

Zbiorem wartości funkcji g jest przedział $(-\infty, 3]$, więc rzędna q wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji g , jest równa 3 .

Odcięta p wierzchołka tej paraboli jest równa $\frac{-1+5}{2} = 2$.

Ponieważ $g(2) = 3$, więc

$$a(2 + 1)(2 - 5) = 3$$

$$-9a = 3$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

Zapisujemy wzór funkcji g w postaci ogólnej

$$g(x) = -\frac{1}{3}(x + 1)(x - 5) = -\frac{1}{3}(x^2 - 4x - 5) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$$

Zapisujemy wzór funkcji f w postaci ogólnej

$$f(x) = g(x) + 3 = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3} + 3 = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{14}{3}$$

Stąd otrzymujemy wartość szukanego współczynnika: $c = \frac{14}{3}$.

Zadanie 33. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 9.3) rozpoznaje [...] w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą) [...]; 9.6) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda obliczenia objętości i pola powierzchni całkowitej stożka **oraz** poprawne wyniki: $V = 64\pi$ i $P_c = 48\pi + 32\pi\sqrt{3}$.

3 pkt – obliczenie objętości stożka: $V = 64\pi$

ALBO

– zapisanie wysokości stożka: $H = 4$ **oraz** obliczenie pola powierzchni całkowitej stożka: $P_c = 48\pi + 32\pi\sqrt{3}$,

ALBO

– zapisanie objętości stożka w zależności od tworzącej l , np. $V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{l}{2}$ **oraz** obliczenie pola powierzchni całkowitej stożka: $P_c = 48\pi + 32\pi\sqrt{3}$.

2 pkt – zapisanie promienia podstawy stożka: $r = 4\sqrt{3}$ **oraz** zapisanie wysokości stożka: $H = 4$

ALBO

– obliczenie kwadratu promienia podstawy stożka: $r^2 = 48$ **oraz** zapisanie wysokości stożka: $H = 4$,

ALBO

– obliczenie pola powierzchni całkowitej stożka: $P_c = 48\pi + 32\pi\sqrt{3}$,

ALBO

– zapisanie wysokości stożka: $H = 4$ **oraz** wyznaczenie objętości stożka w zależności od H , np. $V = \frac{1}{3}\pi(H\sqrt{3})^2 \cdot H$,

ALBO

- zapisanie promienia podstawy stożka: $r = 4\sqrt{3}$ oraz wyznaczenie objętości stożka w zależności od r , np. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{r}{\sqrt{3}}$,

ALBO

- wyznaczenie objętości stożka w zależności od tworzącej l , np. $V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{l}{2}$.

1 pkt – zapisanie promienia podstawy stożka: $r = 4\sqrt{3}$

ALBO

- zapisanie wysokości stożka: $H = 4$,

ALBO

- obliczenie kwadratu promienia podstawy stożka: $r^2 = 48$,

ALBO

- zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć r oraz H , np.:

$$r = x\sqrt{3} \quad \text{oraz} \quad H = x \quad \text{oraz} \quad l = 2x \quad \text{oraz} \quad l = 8,$$

$$\frac{r}{8} = \sin 60^\circ \quad \text{oraz} \quad \frac{H}{8} = \cos 60^\circ,$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2r \cdot H = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \sin 120^\circ \quad \text{oraz} \quad r^2 + H^2 = 8^2,$$

$$(2r)^2 = 8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \cos 120^\circ \quad \text{oraz} \quad r^2 + H^2 = 8^2,$$

ALBO

- wyznaczenie objętości stożka w zależności od H , np. $V = \frac{1}{3}\pi(H\sqrt{3})^2 \cdot H$,

ALBO

- wyznaczenie objętości stożka w zależności od r , np. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{r}{\sqrt{3}}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający przyjmuje w rozwiązaniu, że:

- trójkąt SOB jest trójkątem równobocznym,
- wysokość stożka jest równa 8, lub
- promień podstawy stożka jest równy 8,

to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:

- zastosowanie niepoprawnej definicji jednej funkcji trygonometrycznej,
- błędne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa,
- błędne zastosowanie twierdzenia cosinusów,
- zastosowanie niepoprawnej tożsamości $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$,
- błędne zastosowanie własności trójkąta o kątach 30° , 60° , 90° (tzn. zapisanie, że promień podstawy stożka jest równy 4 i wysokość stożka jest równa $4\sqrt{3}$), lub
- przyjęcie, że kąt 120° to kąt wycinka koła o promieniu 8 tworzącego powierzchnię boczną stożka,

i rozwiązanie zostanie doprowadzone konsekwentnie do końca, to zdający może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za konsekwentne obliczenie objętości i pola powierzchni całkowitej stożka).

Jeżeli zdający popełni więcej niż jeden z wymienionych błędów a)–f), to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów (np. za zapisanie wysokości stożka: $H = 4$).

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

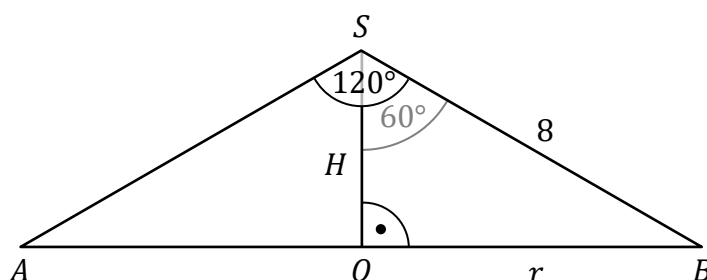
Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku, przedstawiającym przekrój osiowy rozważanego stożka:

S – wierzchołek stożka,

O – spodek wysokości stożka,

r – promień podstawy stożka,

H – wysokość stożka.



Zauważamy, że $r > 0$ i $H > 0$.

Ponieważ O jest spodkiem wysokości stożka, to $|\angle OSB| = 60^\circ$.

W trójkącie prostokątnym OBS mamy

$$\sin 60^\circ = \frac{|OB|}{|SB|} = \frac{r}{8}$$

Zatem

$$r = 8 \cdot \sin 60^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

Ponadto

$$\cos 60^\circ = \frac{|SO|}{|SB|} = \frac{H}{8}$$

Stąd

$$H = 8 \cdot \cos 60^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

Obliczamy objętość V stożka:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (4\sqrt{3})^2 \cdot 4 = 64\pi$$

Obliczamy pole powierzchni całkowitej P_c stożka:

$$P_c = \pi \cdot r \cdot (r + l) = \pi \cdot 4\sqrt{3} \cdot (4\sqrt{3} + 8) = 48\pi + 32\pi\sqrt{3}$$

Sposób II

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku, przedstawiającym przekrój osiowy rozważanego stożka:

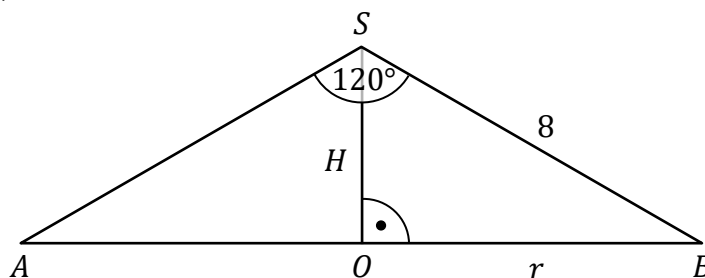
S – wierzchołek stożka,

O – spodek wysokości stożka,

r – promień podstawy stożka,

H – wysokość stożka.

Zauważamy, że $r > 0$ i $H > 0$.



Korzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABS i otrzymujemy:

$$(2r)^2 = 8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \cos 120^\circ$$

$$4r^2 = 128 - 128 \cdot \cos 120^\circ$$

Ponieważ $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$, więc

$$4r^2 = 128 - 128 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$4r^2 = 192$$

$$r^2 = 48$$

$$r = 4\sqrt{3}$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta OBS i obliczamy wysokość stożka:

$$H^2 = 8^2 - r^2$$

$$H^2 = 64 - 48$$

$$H^2 = 16$$

$$H = 4$$

Obliczamy objętość V stożka:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 48 \cdot 4 = 64\pi$$

Obliczamy pole powierzchni całkowitej P_c stożka:

$$P_c = \pi \cdot r \cdot (r + l) = \pi \cdot 4\sqrt{3} \cdot (4\sqrt{3} + 8) = 48\pi + 32\pi\sqrt{3}$$

Sposób III

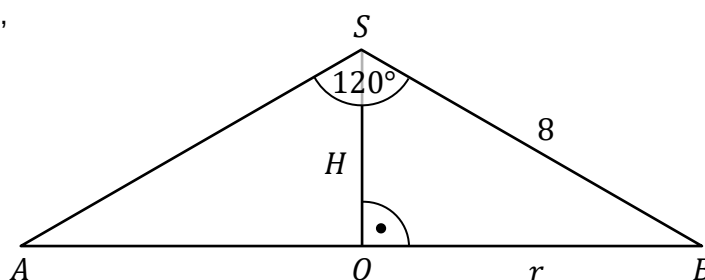
Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku, przedstawiającym przekrój osiowy rozważanego stożka:

S – wierzchołek stożka,

O – spodek wysokości stożka,

r – promień podstawy stożka,

H – wysokość stożka.



Zauważamy, że $r > 0$ i $H > 0$.

Pole trójkąta ABS jest równe

$$P_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \sin 120^\circ = 32 \cdot \sin 60^\circ = 32 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$$

Zatem

$$\frac{1}{2} \cdot 2r \cdot H = 16\sqrt{3}$$

stąd

$$r \cdot H = 16\sqrt{3}$$

Korzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABS i otrzymujemy:

$$(2r)^2 = 8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \cos 120^\circ$$

$$4r^2 = 128 - 128 \cdot (-\cos 60^\circ)$$

$$4r^2 = 128 - 128 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$4r^2 = 192$$

$$r^2 = 48$$

$$r = 4\sqrt{3}$$

Obliczamy objętość V stożka:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r \cdot r \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4\sqrt{3} \cdot 16\sqrt{3} = 64\pi$$

Obliczamy pole powierzchni całkowitej P_c stożka:

$$P_c = \pi \cdot r \cdot (r + l) = \pi \cdot 4\sqrt{3} \cdot (4\sqrt{3} + 8) = 48\pi + 32\pi\sqrt{3}$$

Zadanie 34. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 8.1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej); 8.3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt; 8.4) oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych; 8.6) oblicza odległość dwóch punktów.

Zasady oceniania

5 pkt – poprawna metoda obliczenia współrzędnych punktu D oraz długości odcinka BD

oraz podanie poprawnych wyników: $D = \left(-\frac{22}{5}, \frac{19}{5}\right)$, $|BD| = \frac{13\sqrt{5}}{5}$.

4 pkt – obliczenie współrzędnych punktu D : $D = \left(-\frac{22}{5}, \frac{19}{5}\right)$

ALBO

– obliczenie długości odcinka BD : $|BD| = |AE| = \frac{13\sqrt{5}}{5}$.

3 pkt – zapisanie równania prostej AD , np. $y = -2x - 5$ **oraz** zapisanie równania prostej

CD , np. $y = \frac{1}{2}x + 6$

ALBO

– zapisanie równania, w którym niewiadomą jest jedna ze współrzędnych punktu D , np.

$$\frac{|1 \cdot x_d - 2 \cdot (-2x_d - 5) + 0|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{12}{\sqrt{5}},$$

ALBO

– obliczenie odległości d punktu C od prostej AB : $d = \frac{12}{\sqrt{5}}$ **oraz** obliczenie długości odcinka AB : $|AB| = \sqrt{5}$.

2 pkt – zapisanie równania prostej AD , np. $y = -2x - 5$

ALBO

– zapisanie równania prostej CD , np. $y = \frac{1}{2}x + 6$,

ALBO

– obliczenie odległości d punktu C od prostej AB : $d = \frac{12}{\sqrt{5}}$.

1 pkt – obliczenie współczynnika kierunkowego prostej AB (lub CD): $a_{AB} = \frac{1}{2}$

$$(\text{lub } a_{CD} = \frac{1}{2})$$

ALBO

– zapisanie równania prostej AB w postaci ogólnej: $x - 2y = 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:

- a) zastosowanie niepoprawnego wzoru na współczynnik kierunkowy prostej,
- b) zastosowanie niepoprawnego związku między współczynnikami kierunkowymi prostych równoległych,
- c) zastosowanie niepoprawnego związku między współczynnikami kierunkowymi prostych prostopadłych, lub
- d) zastosowanie niepoprawnego wzoru na odległość punktu od prostej,

i rozwiązanie zostanie doprowadzone konsekwentnie do końca, to zdający może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Jeżeli zdający popełni więcej niż jeden z wymienionych błędów a)–d), to otrzymuje

0 punktów za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej AB :

$$a_{AB} = \frac{0 - (-1)}{0 - (-2)} = \frac{1}{2}$$

Prosta CD jest równoległa do prostej AB , zatem współczynnik kierunkowy prostej CD jest równy $\frac{1}{2}$. Wyznaczamy równanie prostej CD :

$$y = \frac{1}{2}(x - 4) + 8$$

$$y = \frac{1}{2}x + 6$$

Prosta AD jest prostopadła do prostej AB , zatem współczynnik kierunkowy prostej AD jest równy (-2) . Wyznaczamy równanie prostej AD :

$$y = -2(x + 2) - 1$$

$$y = -2x - 5$$

Punkt D jest punktem wspólnym prostych CD i AD , zatem współrzędne tego punktu są rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 6 \\ y = -2x - 5 \end{cases}$$

Stąd

$$\frac{1}{2}x + 6 = -2x - 5$$

$$\frac{5}{2}x = -11$$

$$x = -\frac{22}{5}$$

$$y = -2 \cdot \left(-\frac{22}{5}\right) - 5 = \frac{19}{5}$$

Zatem $D = \left(-\frac{22}{5}, \frac{19}{5}\right)$.

Obliczamy długość odcinka BD :

$$|BD| = \sqrt{\left(-\frac{22}{5} - 0\right)^2 + \left(\frac{19}{5} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{484}{25} + \frac{361}{25}} = \sqrt{\frac{845}{25}} = \frac{13\sqrt{5}}{5}$$

Sposób II

Wyznaczamy równanie prostej AB :

$$(y + 1)(0 + 2) - (0 + 1)(x + 2) = 0$$

$$2y + 2 - x - 2 = 0$$

$$x - 2y = 0$$

$$y = \frac{1}{2}x$$

Prosta AD jest prostopadła do prostej AB , zatem współczynnik kierunkowy prostej AD jest równy (-2) . Wyznaczamy równanie prostej AD :

$$y = -2(x + 2) - 1$$

$$y = -2x - 5$$

Punkt D leży na tej prostej, stąd $y_d = -2x_d - 5$.

Obliczamy odległość d punktu C od prostej AB :

$$d = \frac{|1 \cdot 4 - 2 \cdot 8 + 0|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

Odległość punktu D od prostej AB jest także równa $\frac{12}{\sqrt{5}}$, stąd otrzymujemy równanie

$$\frac{|1 \cdot x_d - 2 \cdot (-2x_d - 5) + 0|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{|5 \cdot x_d + 10|}{\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

$$5 \cdot |x_d + 2| = 12$$

$$|x_d + 2| = \frac{12}{5}$$

$$x_d + 2 = \frac{12}{5} \quad \text{lub} \quad x_d + 2 = -\frac{12}{5}$$

$$\left(x_d = \frac{2}{5} \text{ i } y_d = -2 \cdot \frac{2}{5} - 5 = -\frac{29}{5}\right) \quad \text{lub} \quad \left(x_d = -\frac{22}{5} \text{ i } y_d = -2 \cdot \left(-\frac{22}{5}\right) - 5 = \frac{19}{5}\right)$$

Punkt D leży po tej samej stronie prostej AB co punkt C , zatem $D = \left(-\frac{22}{5}, \frac{19}{5}\right)$.

Obliczamy długość odcinka BD :

$$|BD| = \sqrt{\left(-\frac{22}{5} - 0\right)^2 + \left(\frac{19}{5} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{484}{25} + \frac{361}{25}} = \sqrt{\frac{845}{25}} = \frac{13\sqrt{5}}{5}$$

Sposób III

Wyznaczamy równanie prostej AB :

$$(y + 1)(0 + 2) - (0 + 1)(x + 2) = 0$$

$$2y + 2 - x - 2 = 0$$

$$x - 2y = 0$$

$$y = \frac{1}{2}x$$

Obliczamy odległość d punktu C od prostej AB :

$$d = \frac{|1 \cdot 4 - 2 \cdot 8 + 0|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

Oznaczmy przez E rzut prostokątny punktu B na prostą CD . Wtedy

$$|BE| = d = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

Obliczamy długość odcinka AB :

$$|AB| = \sqrt{(0 + 2)^2 + (0 + 1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa i obliczamy długość odcinka AE :

$$\begin{aligned} |AE|^2 &= |AB|^2 + |BE|^2 \\ |AE|^2 &= (\sqrt{5})^2 + \left(\frac{12}{\sqrt{5}}\right)^2 \\ |AE|^2 &= 5 + \frac{144}{5} = \frac{169}{5} \\ |AE| &= \sqrt{\frac{169}{5}} = \frac{13}{\sqrt{5}} = \frac{13\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

Zatem

$$|BD| = |AE| = \frac{13\sqrt{5}}{5}$$

Prosta AD jest prostopadła do prostej AB , zatem współczynnik kierunkowy prostej AD jest równy (-2) . Wyznaczamy równanie prostej AD :

$$y = -2(x + 2) - 1$$

$$y = -2x - 5$$

Punkt D leży na tej prostej, stąd $y_d = -2x_d - 5$.

Obliczamy współrzędne punktu D :

$$\sqrt{(x_d - 0)^2 + (y_d - 0)^2} = \frac{13\sqrt{5}}{5}$$

$$\sqrt{x_d^2 + (-2x_d - 5)^2} = \frac{13\sqrt{5}}{5}$$

$$x_d^2 + (-2x_d - 5)^2 = \frac{169}{5}$$

$$x_d^2 + 4x_d^2 + 20x_d + 25 = \frac{169}{5}$$

$$25x_d^2 + 100x_d + 125 = 169$$

$$25x_d^2 + 110x_d - 44 = 0$$

$$5x_d(5x_d + 22) - 2(5x_d + 22) = 0$$

$$(5x_d - 2)(5x_d + 22) = 0$$

$$5x_d - 2 = 0 \quad \text{lub} \quad 5x_d + 22 = 0$$

$$\left(x_d = \frac{2}{5} \text{ i } y_d = -2 \cdot \frac{2}{5} - 5 = -\frac{29}{5}\right) \quad \text{lub} \quad \left(x_d = -\frac{22}{5} \text{ i } y_d = -2 \cdot \left(-\frac{22}{5}\right) - 5 = \frac{19}{5}\right)$$

Punkt D leży po tej samej stronie prostej AB co punkt C , zatem $D = \left(-\frac{22}{5}, \frac{19}{5}\right)$.

Ocena prac osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Obowiązują **Zasady oceniania** stosowane przy sprawdzaniu prac zdających bez stwierdzonej dyskalkulii z dodatkowym uwzględnieniem:

- a) **ogólnych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią (punkty 1.–12.);
- b) dodatkowych **szczegółowych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią – egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, termin główny 2025.

I. **Ogólne zasady oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

1. Nie należy traktować jako błędy merytoryczne pomyłek, wynikających z:
 - błędnego przepisania
 - przestawienia cyfr
 - zapisania innej cyfry, ale o podobnym wyglądzie
 - przestawienia położenia przecinka
 - przestawienia położenia znaku liczby.
2. W przypadku błędów, wynikających ze zmiany znaku liczby, należy w każdym zadaniu oddzielnie przeanalizować, czy zdający opanował inne umiejętności, poza umiejętnościami rachunkowymi, oceniane w zadaniu. W przypadku opanowania badanych umiejętności zdający powinien otrzymać przynajmniej 1 punkt.
3. We wszystkich zadaniach otwartych, w których wskazano poprawną metodę rozwiązania, części lub całości zadania, zdającemu należy przyznać przynajmniej 1 punkt, zgodnie z kryteriami do poszczególnych zadań.
4. Jeśli zdający przedstawia nieprecyzyjne zapisy, na przykład pomija nawiasy lub zapisuje nawiasy w niewłaściwych miejscach, ale przeprowadza poprawne rozumowanie lub stosuje właściwą strategię, to może otrzymać przynajmniej 1 punkt za rozwiązanie zadania.
5. W przypadku zadania wymagającego wyznaczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi poprawną metodę wyznaczania pierwiastków trójmianu kwadratowego, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
6. W przypadku zadania wymagającego rozwiązania nierówności kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli stosuje poprawny algorytm rozwiązywania nierówności kwadratowej, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
7. W przypadku zadania wymagającego stosowania własności funkcji kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt za wykorzystanie konkretnych własności funkcji kwadratowej, istotnych przy poszukiwaniu rozwiązania.
8. W przypadku zadania wymagającego zastosowania własności ciągów arytmetycznych lub geometrycznych zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi wykorzystanie takiej własności ciągu, która umożliwia znalezienie rozwiązania zadania.

9. W przypadku zadania wymagającego analizowania figur geometrycznych na płaszczyźnie kartezjańskiej zdający może otrzymać punkty, jeżeli przy poszukiwaniu rozwiązania przedstawi poprawne rozumowanie, wykorzystujące własności figur geometrycznych lub zapisze zależności, pozwalające rozwiązać zadanie.
10. W przypadku zadania z rachunku prawdopodobieństwa zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeśli przy wyznaczaniu liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających rozważanemu zdarzeniu przyjmuje określoną regularność lub podaje prawidłową metodę wyznaczenia tej liczby zdarzeń elementarnych.
11. W przypadku zadania z geometrii zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeżeli podaje poprawną metodę wyznaczenia długości odcinka potrzebnej do znalezienia rozwiązania.
12. W przypadku zadania wymagającego przeprowadzenia dowodu (z zakresu algebry lub geometrii), jeśli w przedstawionym rozwiązaniu zdający powoła się na własność, która wyznacza istotny postępowanie, prowadzący do przeprowadzenia dowodu, to może otrzymać 1 punkt.

II. Dodatkowe **szczegółowe zasady oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Zadanie 26.

- 1 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego $6x^2 - 11x + 3$, tzn. zastosowanie wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego i obliczenie tych pierwiastków
 ALBO
- konsekwentne (do otrzymanego w wyniku popełnienia błędów o charakterze dyskalkulicznym ujemnego wyróżnika) narysowanie paraboli,
 ALBO
 - poprawne rozwiązanie nierówności $3(2x^2 + 1) < 0$ (tzn. stosuje się punkt 6. ogólnych zasad oceniania),
 ALBO
 - konsekwentne (do wyznaczonych przez siebie pierwiastków oraz rozpatrywanego trójmianu i nierówności) wyznaczenie zbioru rozwiązań nierówności.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający, rozwiązując nierówność, pomyli porządek liczb na osi liczbowej i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right)$, to może otrzymać **2 punkty** za całe rozwiązanie.
2. Nie stosuje się uwag 2. i 3. z zasad oceniania arkusza standardowego.
3. Akceptowane jest zapisanie pierwiastków trójmianu w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi.

Zadanie 27.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 28.

1 pkt – zapisanie równania $13\% \cdot x + 11\% \cdot y = 146\,700$.

Zadanie 29.

1 pkt – zapisanie równania z dwiema niewiadomymi: m oraz r (gdzie r jest różnicą ciągu arytmetycznego), np. $2m + 11 + r = m^2 + 3$.

Zadanie 30.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 31.

1 pkt – zapisanie jedynie liczby 20 (należy traktować to jako wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych).

Uwagi:

1. W ocenie rozwiązania tego zadania (dla zdających z dyskalkulią) nie stosuje się uwagi ze standardowych zasad oceniania.
2. Jeżeli zdający poprawnie wypisze/zaznaczy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A , lecz popełni błąd w ich zliczeniu (np. $|A| = 6$) i konsekwentnie zapisze wynik (np. $\frac{6}{20}$), to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 32.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 33.

1 pkt – zastosowanie definicji funkcji trygonometrycznej lub związków miarowych w trójkącie o kątach 30° , 60° , 90° i zapisanie równania z jedną niewiadomą (wysokością stożka lub promieniem podstawy stożka), np.: $\frac{H}{8} = \cos 60^\circ$, $\frac{r}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Zadanie 34.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

PESEL

Miejsce na naklejkę.

Sprawdź, czy kod na naklejce to
M-100.

Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Symbol arkusza

MMAP-P0-**100**-2506

DATA: **4 czerwca 2025 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

☐ Uprawnienie zdającego do
dostosowania w związku z dyskalkulią.

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

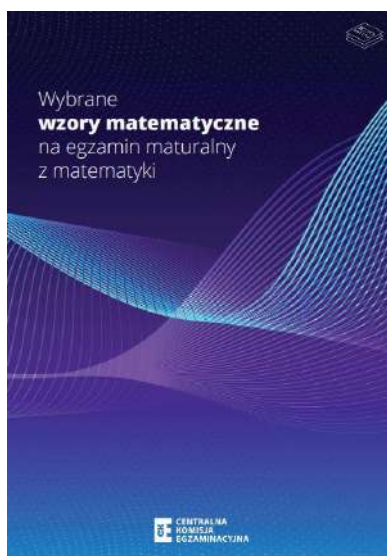
1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**,
tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym**
poziomie.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi.
Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu
takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.





Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 30 stron (zadania 1–31).
Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Symbol  zamieszczony w nagłówku zadania oznacza, że rozwiązanie zadania zamkniętego musisz przenieść na kartę odpowiedzi. Ocenie podlegają wyłącznie odpowiedzi zaznaczone na karcie odpowiedzi.
4. Odpowiedzi do zadań zamkniętych zaznacz na karcie odpowiedzi w części przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj  pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem  i zaznacz właściwe.
5. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
6. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
7. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
8. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
9. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
10. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla i linijki oraz z kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



**Zadania egzaminacyjne są wydrukowane
na następnych stronach.**

Zadanie 5. (0–3)

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej a , która przy dzieleniu przez 5 daje resztę 1, i dla każdej liczby całkowitej b , która przy dzieleniu przez 5 daje resztę 4, liczba $a^2 - b^2$ jest podzielna przez 5.

Dana jest nierówność

$$8 - \frac{1 - 2x}{2} \geq 3x$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Największą liczbą całkowitą, która spełnia tę nierówność, jest

- A.** 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Brudnopis

Zadanie 7. (0–1)



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równanie $4(x-1)^2(x^2-25)=0$ w zbiorze liczb rzeczywistych ma dokładnie

- A. dwa rozwiązania.
B. trzy rozwiązania.
C. cztery rozwiązania.
D. pięć rozwiązań.

Brudnopis

Zadanie 8. (0–2)

W maju 2024 roku założono dwa sady: posadzono w nich łącznie 1410 drzew.

Po roku stwierdzono, że uszło 20% drzew w pierwszym sadzie i 15% drzew w drugim sadzie. Uschnięte drzewa usunięto, a nowych nie dosadzano.

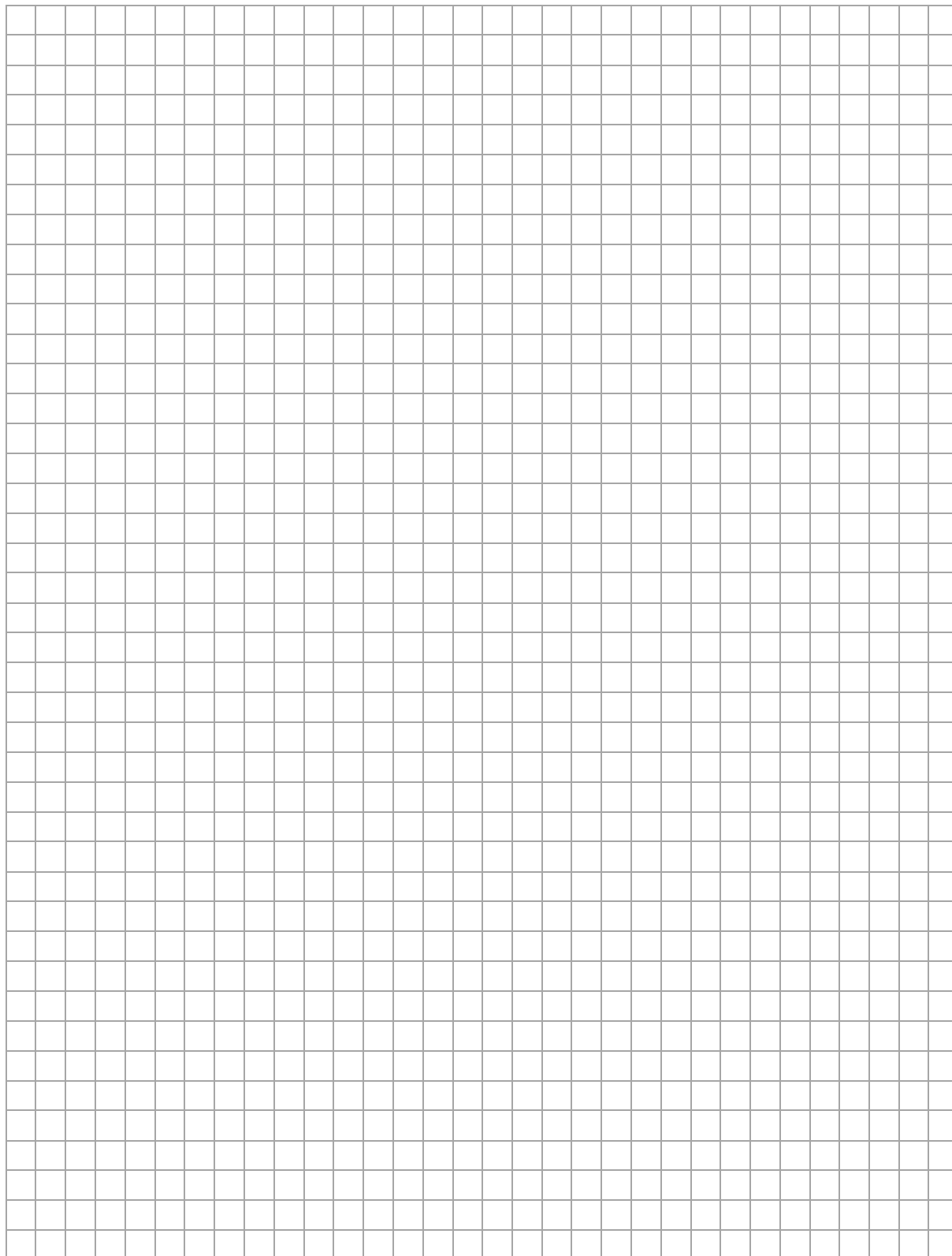
Liczba drzew, które pozostały w drugim sadzie, stanowiła 70% liczby drzew, które pozostały w pierwszym sadzie.

Oblicz, ile drzew posadzono w pierwszym sadzie w maju 2024 roku. Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Zadanie 9. (0–2)**Rozwiąż nierówność**

$$x(x + 4) < x - 2$$

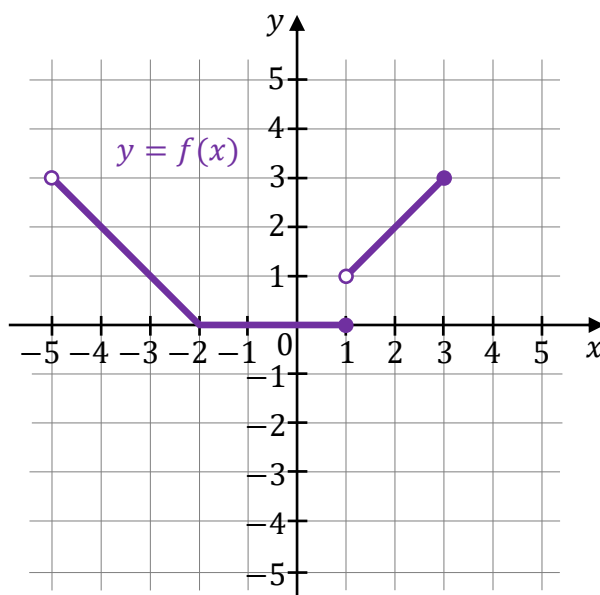
Zapisz obliczenia.A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for the student to write their calculations.

Zadanie 10. (0–4)

Funkcja f jest określona następująco:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{dla } x \in (-5, -2] \\ 0 & \text{dla } x \in (-2, 1] \\ x & \text{dla } x \in (1, 3] \end{cases}$$

Wykres funkcji $y = f(x)$ przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku poniżej.



Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie przedziały w wy kropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe.

1. Dziedziną funkcji f jest przedział
2. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział
3. Zbiorem wszystkich miejsc zerowych funkcji f jest przedział
4. Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $f(x) < f(-3)$ jest przedział

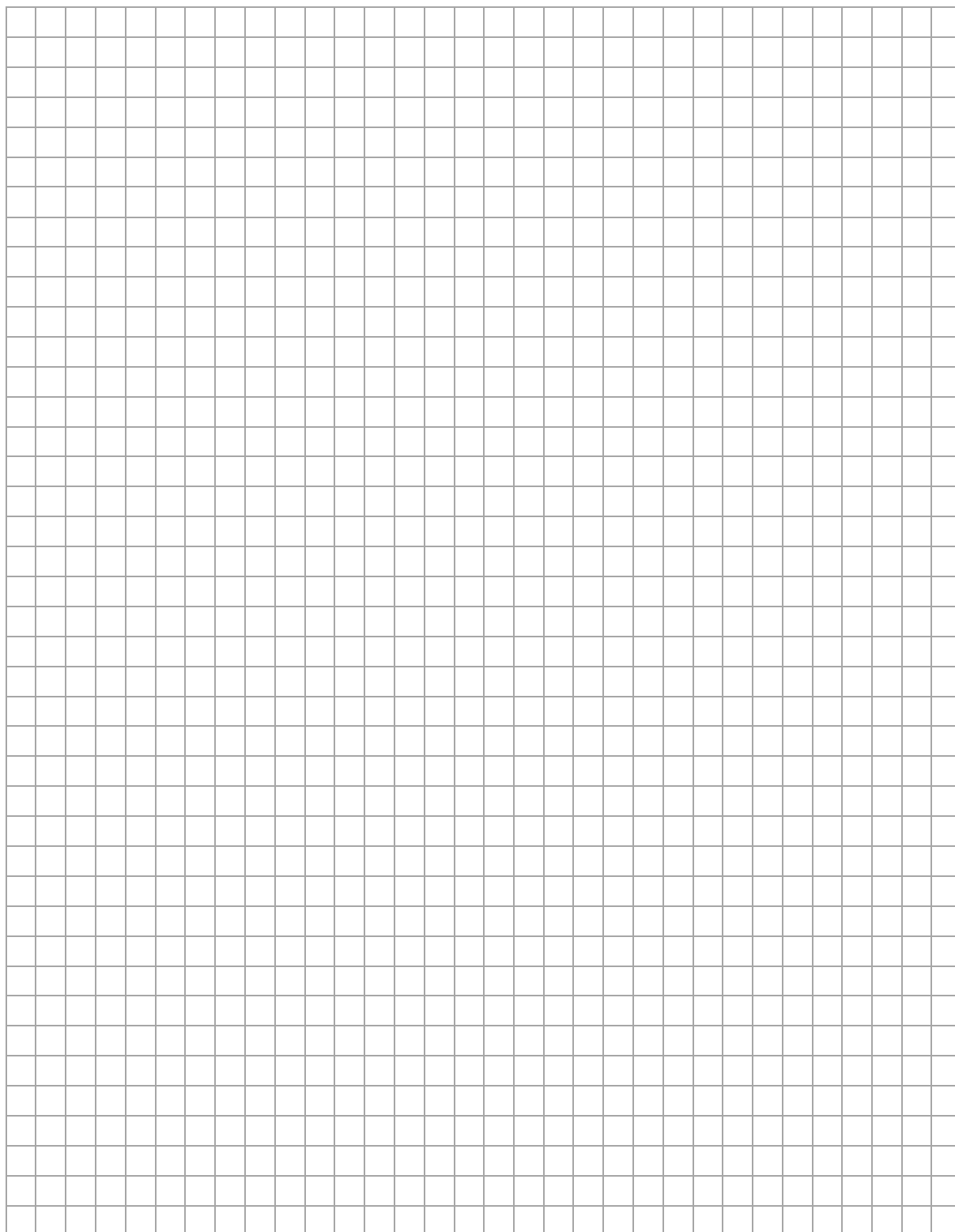
Brudnopis																			



Zadanie 13. (0–3)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) wykres funkcji kwadratowej f przechodzi przez punkt $(2, 15)$. Ośią symetrii tego wykresu jest prosta o równaniu $x = -1$. Jednym z miejsc zerowych funkcji f jest liczba 1 .

Wyznacz wzór funkcji f w postaci kanonicznej. Zapisz obliczenia.



Zadanie 14.

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 3n^2 - 3n$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Zadanie 14.1. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Suma S_3 trzech początkowych kolejnych wyrazów ciągu (a_n) jest równa

- A. 18** **B. 24** **C. 60** **D. 90**

[illegible]

Zadanie 14.2. (0–1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Ciąg (a_n) jest arytmetyczny.	P	F
Wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są liczbami parzystymi.	P	F

[illegible]

Zadanie 15.

W ciągu arytmetycznym (a_n) , określonym dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, dane są wyrazy: $a_1 = 52$ oraz $a_{25} = 2$.

Zadanie 15.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Różnica ciągu (a_n) jest równa

A. $\left(-\frac{25}{12}\right)$

B. (-2)

C. 2

D. $\frac{25}{12}$

Brudnopis

Zadanie 15.2. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Suma S_{25} dwudziestu pięciu początkowych kolejnych wyrazów ciągu (a_n) jest równa

A. 675

B. 700

C. 1300

D. 1325

Brudnopis

Zadanie 16. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Trzywyrazowy ciąg $(4, m, m - 1)$ jest geometryczny, gdy liczba m jest równa

A. (-3)

B. (-2)

C. 2

D. 3

Brudnopis

Zadanie 17. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\frac{\sin^3 25^\circ + \sin 25^\circ \cdot \cos^2 25^\circ}{\cos 25^\circ}$ jest równa

A. $\sin 25^\circ$

B. $\cos 25^\circ$

C. $\operatorname{tg} 25^\circ$

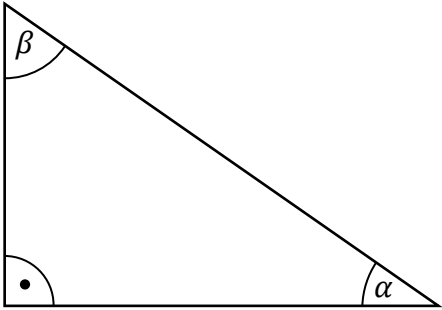
D. 1

Brudnopis

Zadanie 18. (0–1)

Dany jest trójkąt prostokątny o kątach ostrych α oraz β (zobacz rysunek).

Sinus kąta α jest równy $\frac{4}{7}$.



Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

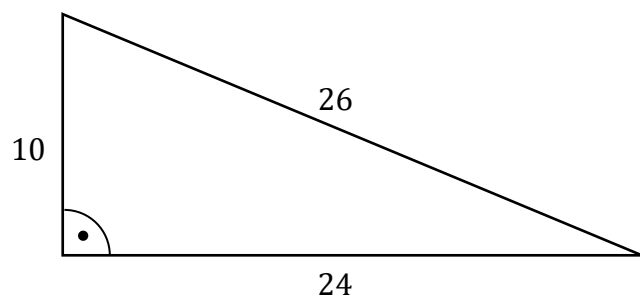
Cosinus kąta α jest równy $\frac{3}{7}$.	P	F
Cosinus kąta β jest równy $\frac{4}{7}$.	P	F

Brudnopis



Zadanie 19.

Dany jest trójkąt prostokątny o bokach długości 10, 24, 26 (zobacz rysunek).

**Zadanie 19.1. (0–1)**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równa

A. $\frac{10}{3}$

B. 4

C. 5

D. $\frac{80}{13}$

Brudnopis

Zadanie 19.2. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest równa

A. $\frac{80}{13}$

B. $\frac{20}{3}$

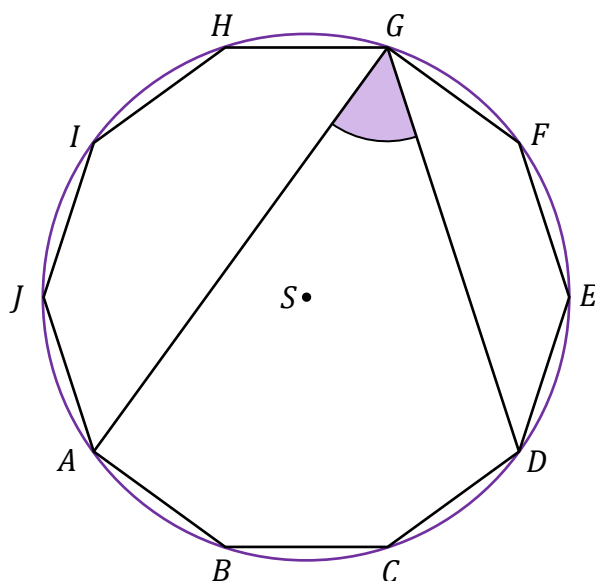
C. 12

D. 13

Brudnopis

Zadanie 20. (0–1)

Na dziesięciokącie foremnym $ABCDEFGHIJ$ opisano okrąg o środku w punkcie S (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta wpisanego AGD jest równa

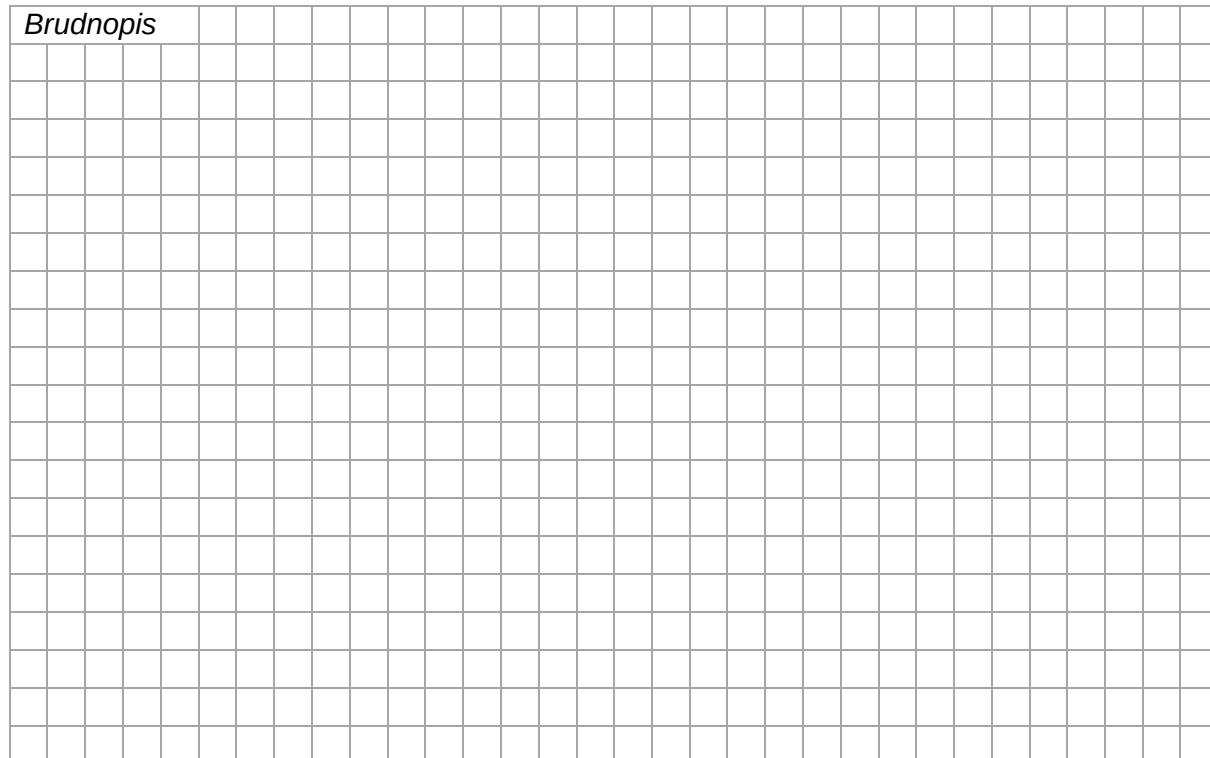
A. 18°

B. 36°

C. 54°

D. 60°

Brudnopis



The diagram illustrates two regions, $\mathcal{K}_1$ and $\mathcal{K}_2$, separated by a vertical line. $\mathcal{K}_1$ is a small square on the left, and $\mathcal{K}_2$ is a large rectangle on the right.

Długość boku kwadratu $\mathcal{K}_1$ jest równa

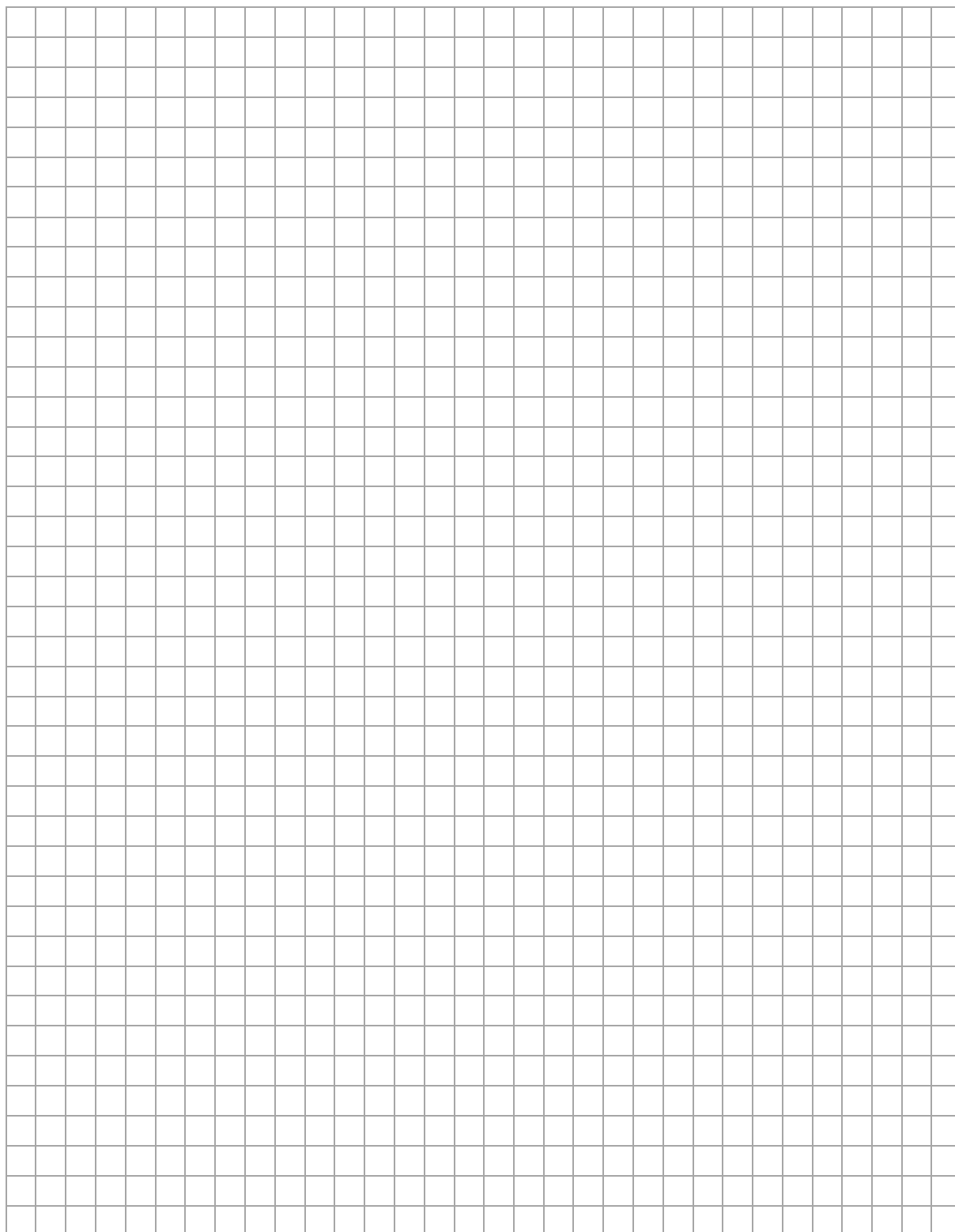
- A.** $\sqrt{3}$ **B.** 3 **C.** $\sqrt{13}$ **D.** 13

Brudnopis

Zadanie 22. (0–2)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dana jest prosta k o równaniu $y = 5x + 7$. Prosta l jest równoległa do prostej k i przecina oś Oy w punkcie $(0, -4)$. Punkt o współrzędnych $(p, 2)$ należy do prostej l .

Oblicz p . Zapisz obliczenia.



Okrąg $\mathcal{K}$ jest obrazem okręgu $\mathcal{O}$ w symetrii osiowej względem osi Oy układu współrzędnych.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

D. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$

Brudnopis

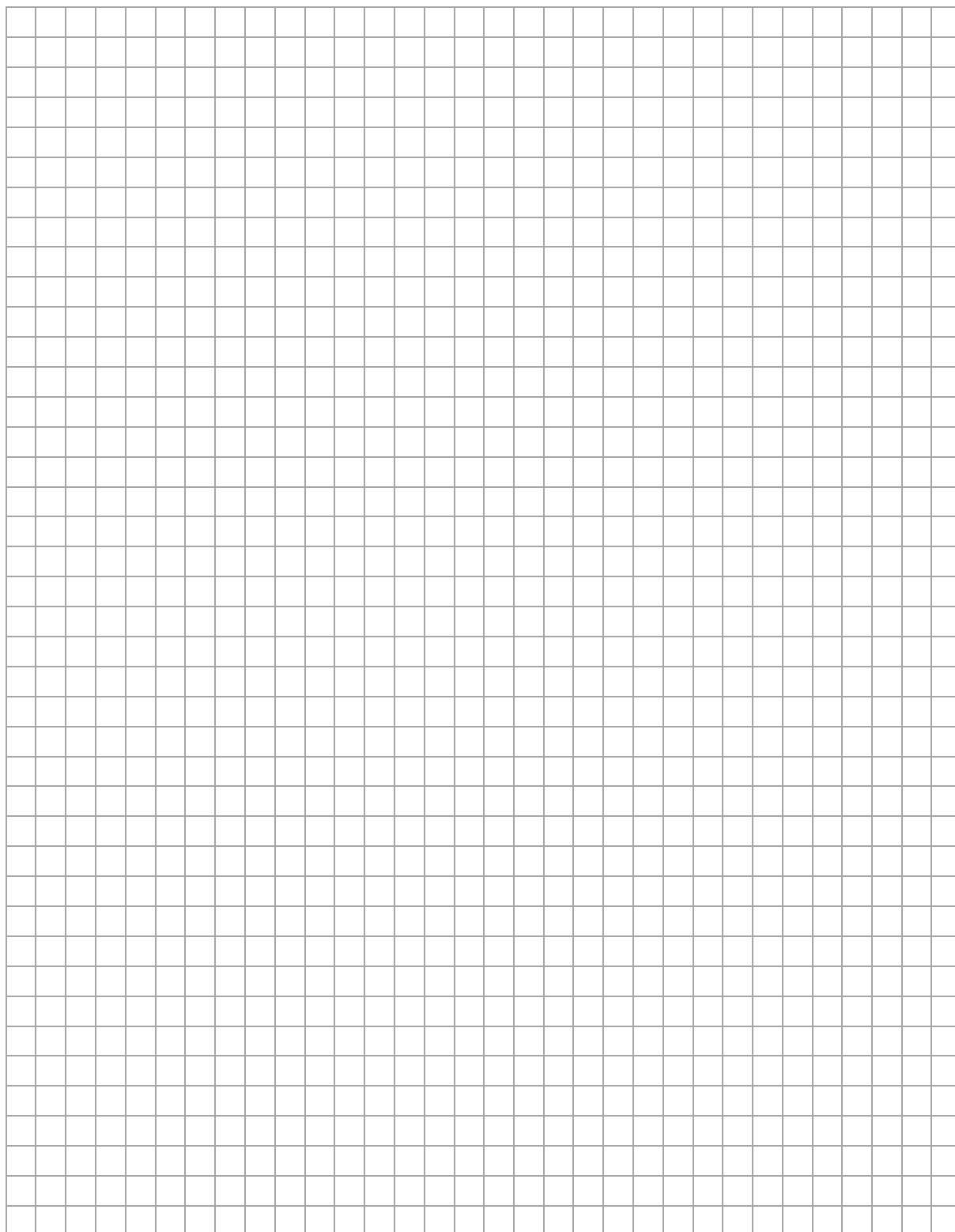
The image shows a full page of graph paper. The top-left corner has the word "Brudnopis" written in a cursive script. The rest of the page is covered by a uniform grid of thin gray lines forming small squares.

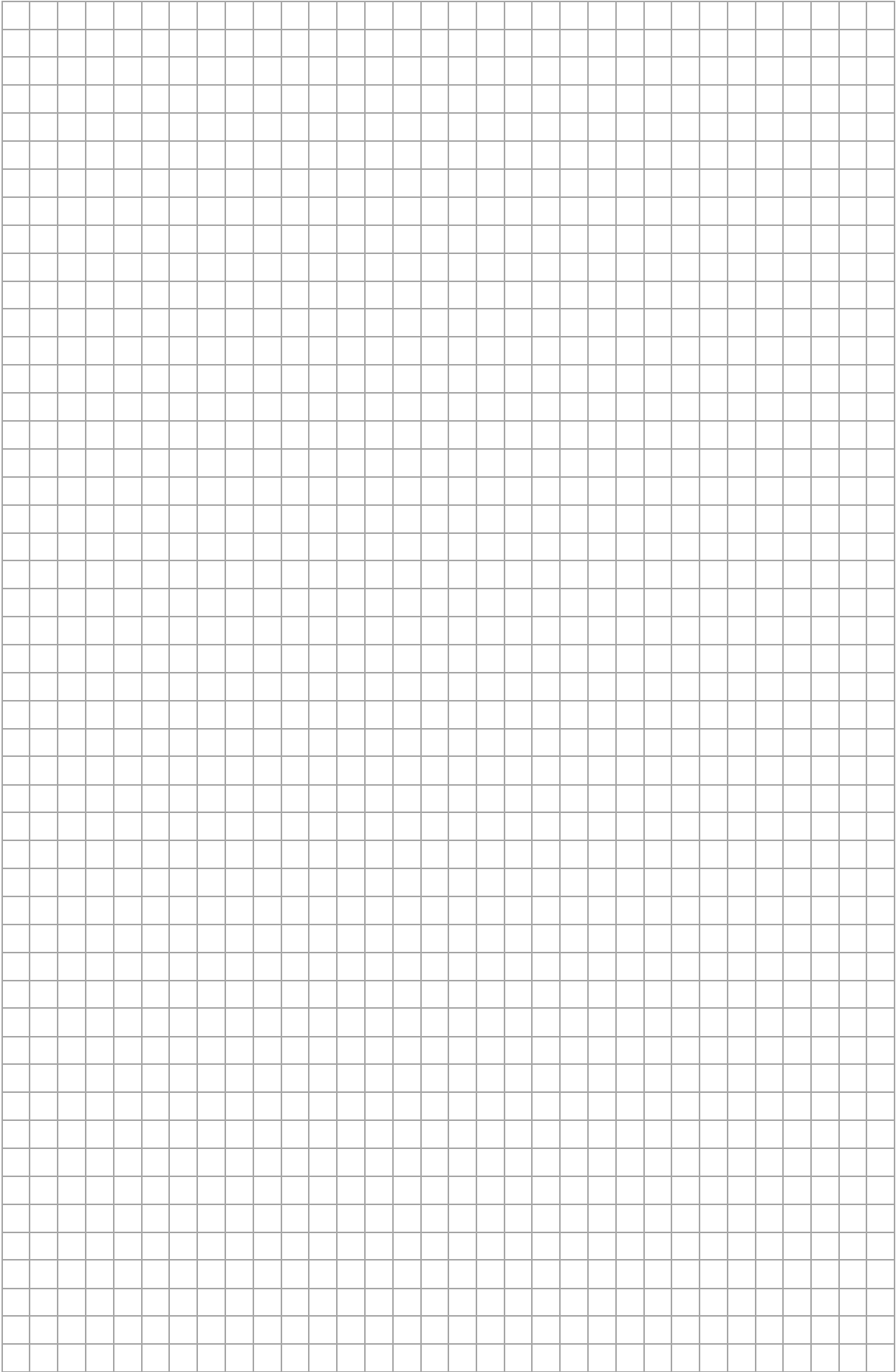
Zadanie 24. (0–4)

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jest równe 94,5.

Długości trzech krawędzi wychodzących z tego samego wierzchołka prostopadłościanu tworzą ciąg geometryczny o ilorazie równym 4.

Oblicz objętość tego prostopadłościanu. Zapisz obliczenia.



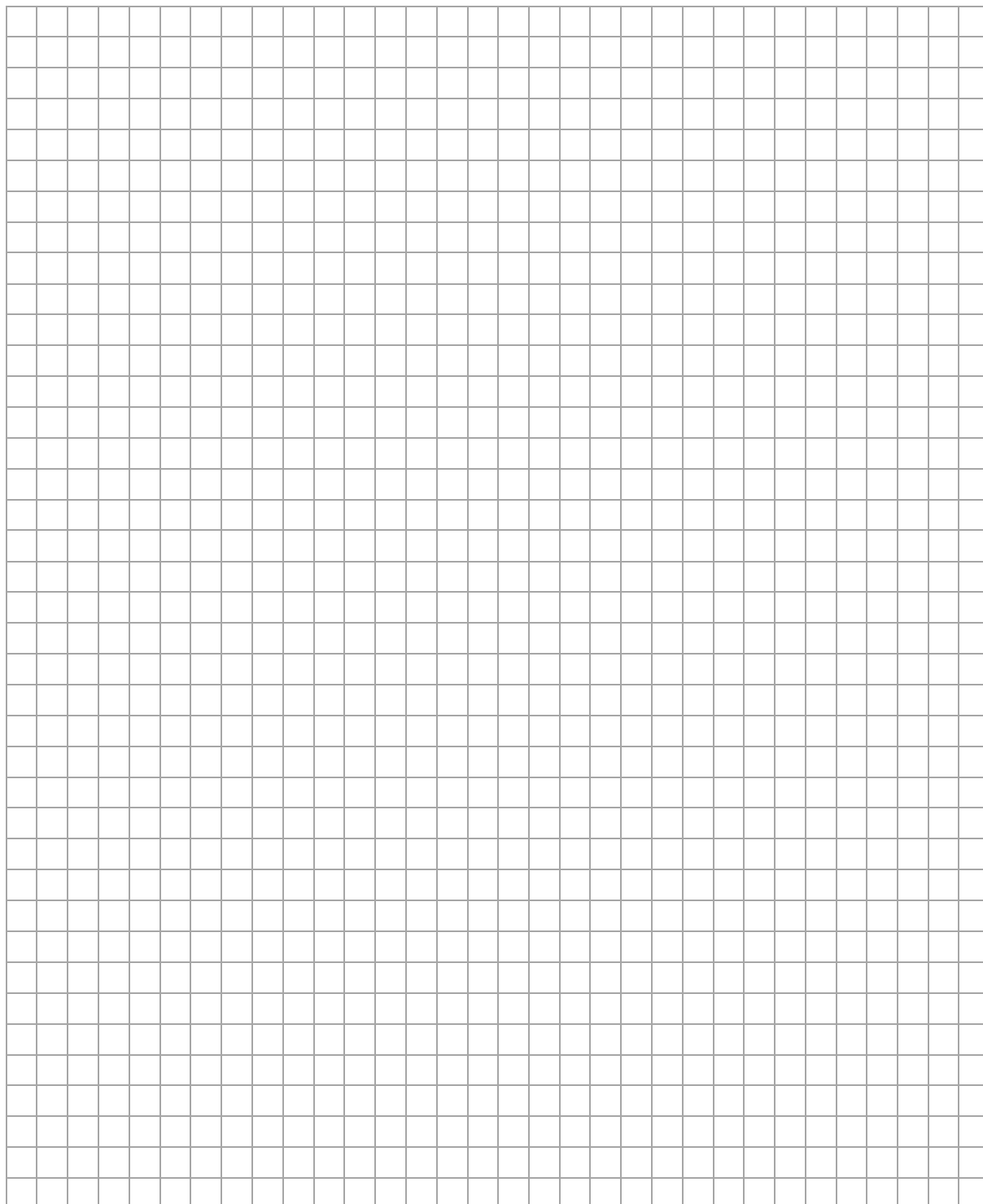


Zadanie 27. (0–2)

Dane są dwa zbiory: $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ oraz $Y = \{-2, -1, 0, 1\}$.

Losujemy jedną liczbę ze zbioru X , a następnie losujemy jedną liczbę ze zbioru Y i tworzymy uporządkowaną parę liczb (x, y) , gdzie x jest liczbą wylosowaną ze zbioru X oraz y jest liczbą wylosowaną ze zbioru Y .

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że wylosujemy parę liczb (x, y) , która będzie spełniać warunek $x \cdot y \geq 0$. Zapisz obliczenia.



Zadanie 28. (0–1) **Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych parzystych, w których zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jeden raz cyfra 0, jest

A. 108**B.** 117**C.** 126**D.** 162*Brudnopis***Zadanie 29. (0–1)**

Średnia arytmetyczna trzech liczb: a , b , c , jest równa 12.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Średnia arytmetyczna sześciu liczb: $2a$, $3a$, $2b$, $3b$, $2c$, $3c$, jest równa

A. 10**B.** 12**C.** 30**D.** 60*Brudnopis*

Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wy kropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe.

Liczba punktów	0	1	2	3	4	5
Liczba uczniów, którzy otrzymali daną liczbę punktów	4	2	5	5	11	5

1. Wynik niższy od średniej arytmetycznej liczby punktów otrzymanych przez tych uczniów za rozwiązanie tego zadania uzyskało dokładnie uczniów tej klasy.
2. Mediana liczby punktów otrzymanych przez tych uczniów za rozwiązanie tego zadania jest równa
3. Dominanta liczby punktów otrzymanych przez tych uczniów za rozwiązanie tego zadania jest równa

[illegible]

$$Z(x) = (500 + 50x)(16 - x)$$

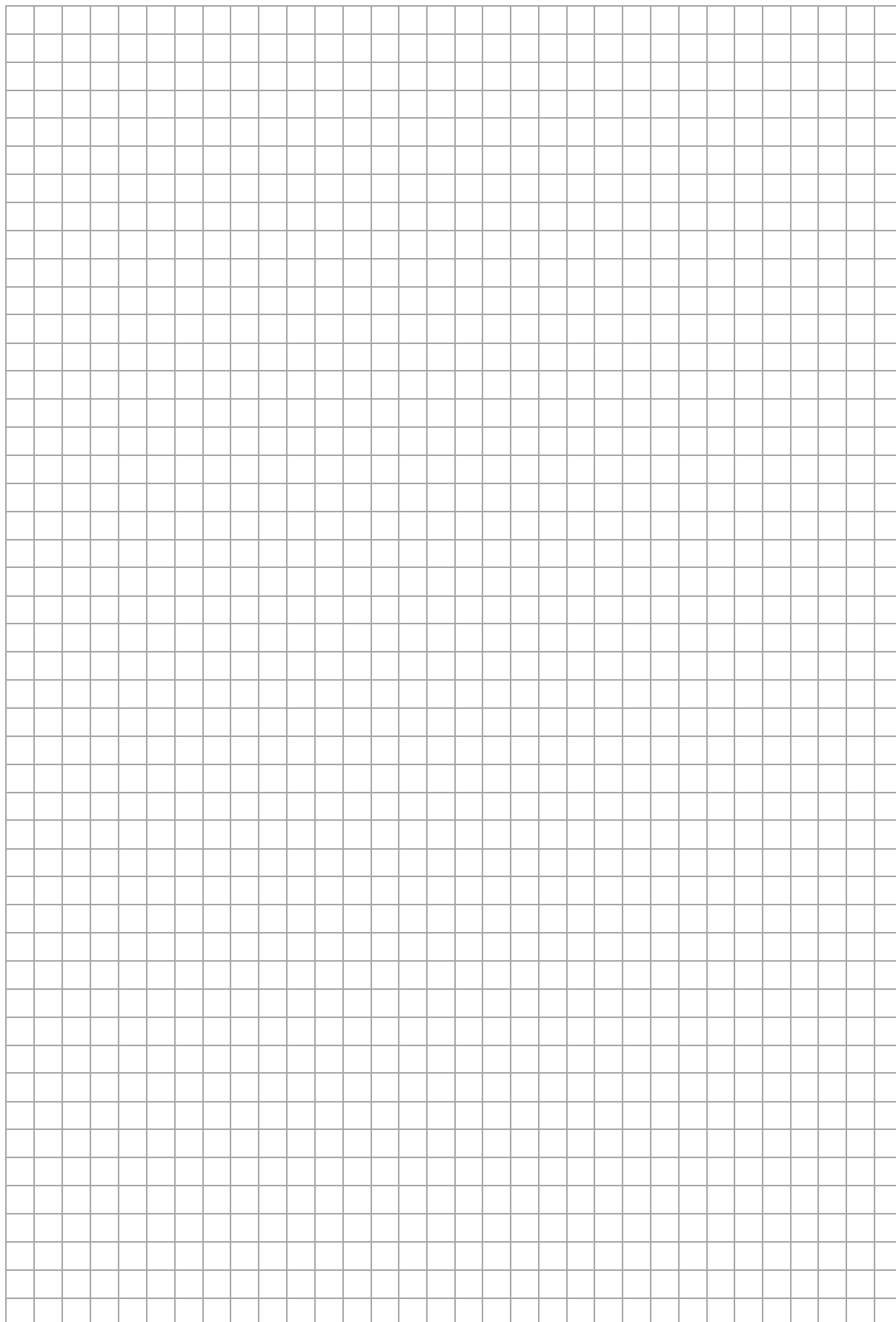
Z – roczny zysk ze sprzedaży latarek L25 (wyrażony w złotych), liczony od momentu obniżenia ceny.

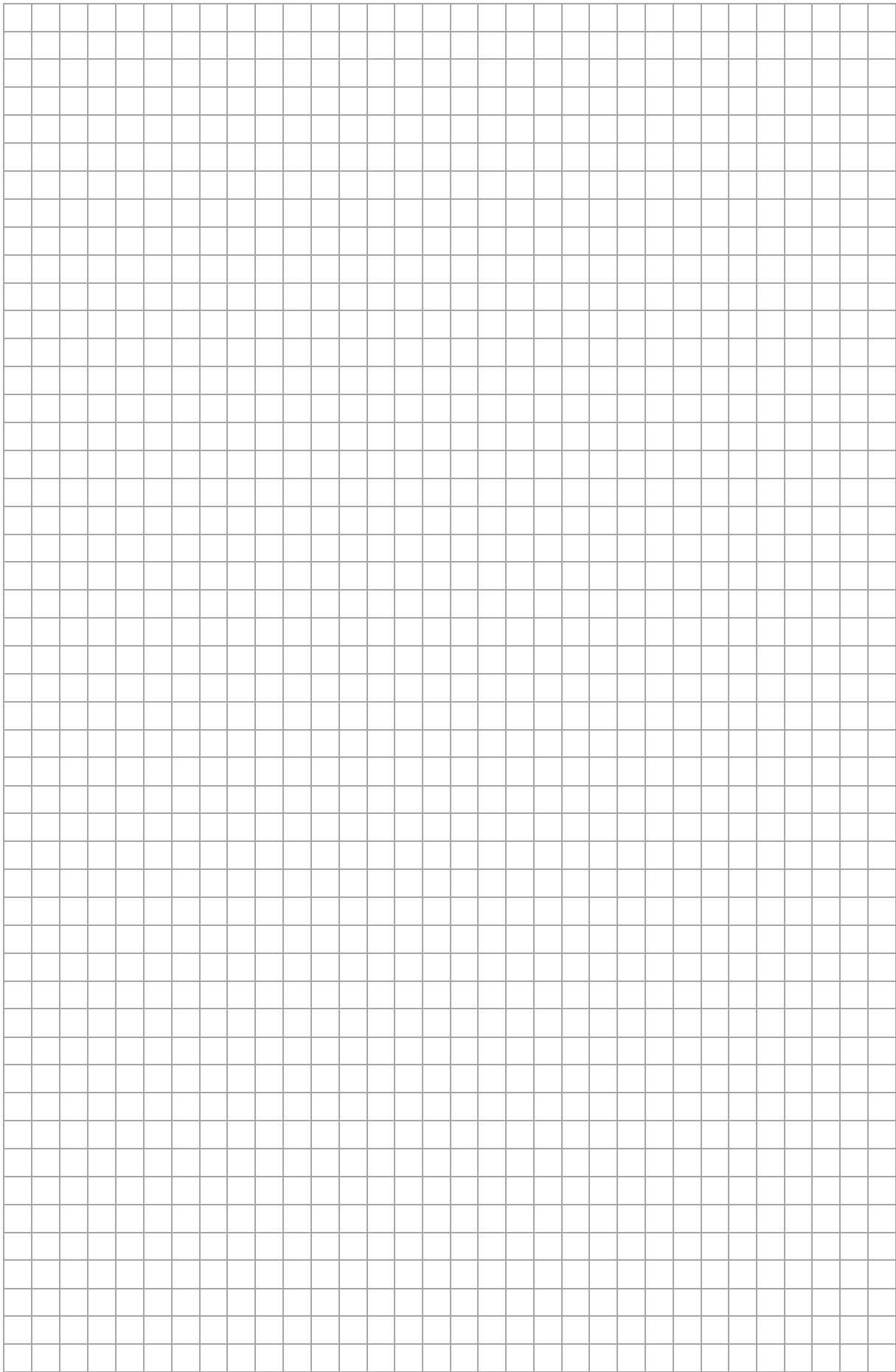
Roczny zysk Z ze sprzedaży latarek L25 będzie największy dla x równego

- A.** 3 **B.** 4 **C.** 7 **D.** 14

[illegible]

BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)





MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Formuła 2023



MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Formuła 2023



MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Formuła 2023



<i>Rodzaj dokumentu:</i>	Zasady oceniania rozwiązań zadań
<i>Egzamin:</i>	Egzamin maturalny
<i>Przedmiot:</i>	Matematyka
<i>Poziom:</i>	Poziom podstawowy
<i>Formy arkusza:</i>	MMAU-P0-100, MMAU-P0-200, MMAU-P0-300, MMAU-P0-700, MMAU-P0-Q00, MMAU-P0-K00, MMAU-P0-100
<i>Termin egzaminu:</i>	4 czerwca 2025 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże zadanie i otrzyma poprawny wynik, lecz w końcowym zapisie przekształca ten wynik i popełnia przy tym błąd, to może uzyskać maksymalną liczbę punktów.
3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania określone w podstawie programowej ¹	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania typu: $ x + 4 = 5$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

¹ Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz.U. z 2024 r. poz. 1019).

Zadanie 2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: I.4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 3. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu [...] i logarytm potęgi.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

PF

Zadanie 4. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$. I.3) stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia, w tym pierwiastków stopnia nieparzystego z liczb ujemnych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 5. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: I.2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia [...].

Zasady oceniania

3 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – zapisanie liczb a oraz b w postaciach: $a = 5k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, oraz $b = 5l + 4$, gdzie $l \in \mathbb{Z}$, **oraz** zapisanie różnicy $a^2 - b^2$ w postaci

$$25k^2 + 10k + 1 - 25l^2 - 40l - 16$$

ALBO

– zapisanie liczb a oraz b w postaciach: $a = 5k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, oraz $b = 5l + 4$, gdzie $l \in \mathbb{Z}$, **oraz** zapisanie różnicy $a^2 - b^2$ w postaci

$$(5k + 1 - 5l - 4)(5k + 1 + 5l + 4),$$

ALBO

– zapisanie, że suma $a + b$ jest podzielna przez 5,

ALBO

– zapisanie, że jeśli liczba całkowita daje przy dzieleniu przez 5 resztę 1, to jej kwadrat przy dzieleniu przez 5 też daje resztę 1, **oraz** zapisanie, że jeśli liczba

całkowita daje przy dzieleniu przez 5 resztę 4, to jej kwadrat przy dzieleniu przez 5 daje resztę 1.

1 pkt – zapisanie liczby a w postaci $a = 5k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

ALBO

– zapisanie liczby b w postaci $b = 5l + 4$, gdzie $l \in \mathbb{Z}$,

ALBO

– zapisanie, że jeśli liczba całkowita daje przy dzieleniu przez 5 resztę 1, to jej kwadrat przy dzieleniu przez 5 też daje resztę 1,

ALBO

– zapisanie, że jeśli liczba całkowita daje przy dzieleniu przez 5 resztę 4, to jej kwadrat przy dzieleniu przez 5 daje resztę 1.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość tezy tylko dla wybranych wartości a i b , to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający zapisze liczby a i b w postaciach: $a = 5k + 1$ i $b = 5k + 4$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Ponieważ liczba całkowita a przy dzieleniu przez 5 daje resztę 1, natomiast liczba całkowita b przy dzieleniu przez 5 daje resztę 4, więc liczby a i b możemy zapisać w postaci: $a = 5k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, oraz $b = 5l + 4$, gdzie $l \in \mathbb{Z}$.

Wtedy

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (5k + 1)^2 - (5l + 4)^2 = 25k^2 + 10k + 1 - 25l^2 - 40l - 16 = \\ &= 25k^2 + 10k - 25l^2 - 40l - 15 = 5 \cdot (5k^2 + 2k - 5l^2 - 8l - 3) \end{aligned}$$

Liczba $5k^2 + 2k - 5l^2 - 8l - 3$ jest całkowita, co oznacza, że liczba $a^2 - b^2$ jest podzielna przez 5.

To należało wykazać.

Sposób II

Ponieważ liczba całkowita a przy dzieleniu przez 5 daje resztę 1, natomiast liczba całkowita b przy dzieleniu przez 5 daje resztę 4, więc liczby a i b możemy zapisać w postaci: $a = 5k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, oraz $b = 5l + 4$, gdzie $l \in \mathbb{Z}$.

Wtedy

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) = (5k + 1 - 5l - 4)(5k + 1 + 5l + 4) = \\ &= (5k - 5l - 3)(5k + 5l + 5) = 5 \cdot (5k - 5l - 3)(k + l + 1) \end{aligned}$$

Liczba $(5k - 5l - 3)(k + l + 1)$ jest całkowita, co oznacza, że liczba $a^2 - b^2$ jest podzielna przez 5.

To należało wykazać.

Sposób III

Ponieważ liczba całkowita a przy dzieleniu przez 5 daje resztę 1, natomiast liczba całkowita b przy dzieleniu przez 5 daje resztę 4, więc suma $a + b$ jest podzielna przez 5 (ponieważ suma reszt z dzielenia przez 5 liczb a oraz b jest podzielna przez 5). Zatem liczba $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ jest podzielna przez 5.

To należało wykazać.

Sposób IV

Liczba całkowita a przy dzieleniu przez 5 daje resztę 1, więc liczba a^2 przy dzieleniu przez 5 również daje resztę 1. Liczba całkowita b przy dzieleniu przez 5 daje resztę 4, więc liczba b^2 przy dzieleniu przez 5 daje resztę 1.

Zatem liczby a^2 i b^2 możemy zapisać w postaci: $a^2 = 5k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, oraz $b^2 = 5l + 1$, gdzie $l \in \mathbb{Z}$.

Wtedy

$$a^2 - b^2 = 5k + 1 - 5l - 1 = 5k - 5l = 5 \cdot (k - l)$$

Liczba $k - l$ jest całkowita, co oznacza, że liczba $a^2 - b^2$ jest podzielna przez 5.

To należało wykazać.

Zadanie 6. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 7. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.5) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej. II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: [...] $a^2 - b^2$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 8. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: IV.2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 850.

1 pkt – zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć liczby drzew posadzonych w pierwszym i drugim sadzie, np.

$$x + y = 1410 \quad \text{oraz} \quad 0,85y = 0,70 \cdot 0,80x,$$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą pozwalającego obliczyć liczbę drzew posadzonych w pierwszym sadzie, np.

$$0,85 \cdot (1410 - x) = 0,70 \cdot 0,80x,$$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą pozwalającego obliczyć liczbę drzew posadzonych w drugim sadzie, np.

$$0,85y = 0,70 \cdot 0,80 \cdot (1410 - y).$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający sprawdza warunki zadania dla wybranych par liczb x oraz y i wskaże właściwą odpowiedź, ale nie uzasadni, że jest to jedyne rozwiązanie zadania, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający w rozwiązaniu używa wartości przybliżonych i otrzymuje wynik różny od 850, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Oznaczmy:

x – liczba drzew posadzonych w pierwszym sadzie,

y – liczba drzew posadzonych w drugim sadzie.

Po uwzględnieniu warunków zadania otrzymujemy:

$$x + y = 1410 \quad \text{oraz} \quad 0,85y = 0,70 \cdot 0,80x$$

Z pierwszego z tych równań wyznaczamy $y = 1410 - x$ i podstawiamy w miejsce y do drugiego z równań, dzięki czemu otrzymujemy:

$$0,85 \cdot (1410 - x) = 0,70 \cdot 0,80x$$

$$1198,5 - 0,85x = 0,56x$$

$$1,41x = 1198,5$$

$$x = 850$$

W maju 2024 roku w pierwszym sadzie posadzono 850 drzew.

Zadanie 9. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.4) rozwiązuje [...] nierówności kwadratowe.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i zapisanie zbioru rozwiązań nierówności:

$$x \in (-2, -1)$$

ALBO

– zastosowanie poprawnej metody i przedstawienie zbioru rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziału, np.



1 pkt – obliczenie/zapisanie pierwiastków trójmianu kwadratowego $x^2 + 3x + 2$:

$$x_1 = -2 \text{ oraz } x_2 = -1.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający, obliczając pierwiastki trójmianu $x^2 + 3x + 2$, popełni błędy (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionych błędów zapisze zbiór rozwiązań nierówności, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego, w przypadku gdy błędnie obliczony przez zdającego wyróżnik Δ jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający rozpatruje inny niż podany w zadaniu trójmian kwadratowy, który nie wynika z błędu przekształcenia (np. $x(x + 4)$), i w konsekwencji rozpatruje inną nierówność (np. $x(x + 4) < 0$), to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający poda zbiór rozwiązań w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziału i jednocześnie zapisze niewłaściwy przedział jako zbiór rozwiązań (np. $x \in [-2, -1]$), to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający spełni kryterium za 1 punkt, a następnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $(-1, -2)$, to otrzymuje **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zapisujemy nierówność w postaci $x^2 + 3x + 2 < 0$ i obliczamy miejsca zerowe funkcji $y = x^2 + 3x + 2$.

Obliczamy wyróżnik trójmianu $x^2 + 3x + 2$:

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$$

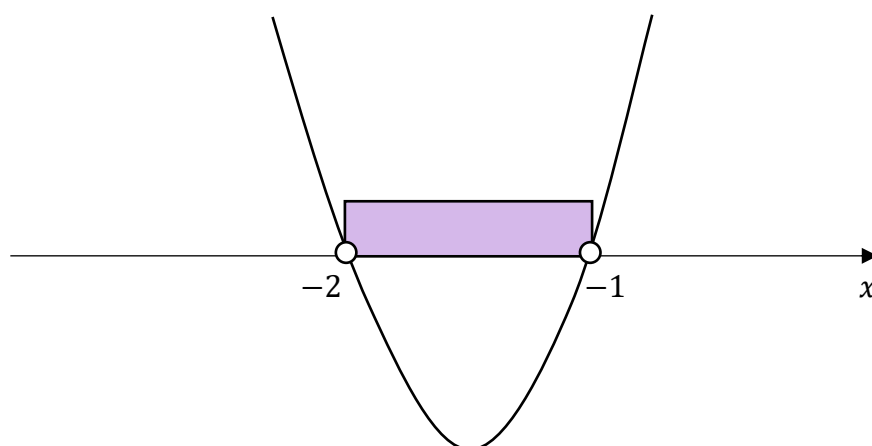
Stąd

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = -2$$

$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = -1$$

Szkicujemy wykres funkcji $y = x^2 + 3x + 2$.

Odczytujemy argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne.



Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(-2, -1)$.

Zadanie 10. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, [...] przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby [...]. I.6) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego [...].

Zasady oceniania

- 4 pkt – poprawne uzupełnienie czterech zdań.
 3 pkt – poprawne uzupełnienie trzech zdań.
 2 pkt – poprawne uzupełnienie dwóch zdań.
 1 pkt – poprawne uzupełnienie jednego zdania.
 0 pkt – brak spełnienia powyższych kryteriów.

Rozwiązanie

1. $(-5, 3]$
2. $[0, 3]$
3. $[-2, 1]$
4. $(-3, 1]$

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej przy zachowaniu poprawnych krańców przedziału, np. zapisze, że dziedziną funkcji f jest przedział $[3, -5)$, to otrzymuje **1 punkt** za tak uzupełnione zdanie.

Zadanie 11. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 12. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie lub o jej własnościach.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 13. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: V.9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $f(x) = 3(x + 1)^2 - 12$.

2 pkt – obliczenie współczynnika a : $a = 3$

ALBO

– obliczenie współczynnika q : $q = -12$.

1 pkt – zapisanie wzoru funkcji f w postaci $f(x) = a(x + 1)^2 + q$

ALBO

– zapisanie wzoru funkcji f w postaci $f(x) = a(x - 1)(x + 3)$,

ALBO

– zapisanie układu trzech niezależnych równań z trzema niewiadomymi a , b , c prowadzącego do obliczenia wartości współczynników a , b oraz c , np.:

$$4a + 2b + c = 15 \text{ oraz } \frac{-b}{2a} = -1 \text{ oraz } a + b + c = 0.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania**Sposób I**

Wykres funkcji f jest symetryczny względem prostej o równaniu $x = -1$, zatem drugie miejsce zerowe funkcji f jest równe $x_2 = -3$.

Korzystamy ze wzoru na postać iloczynową funkcji kwadratowej i zapisujemy:

$$f(x) = a(x - 1)(x + 3), \text{ gdzie } a \neq 0$$

Punkt $(2, 15)$ leży na wykresie funkcji f , zatem dla argumentu 2 funkcja f przyjmuje wartość 15. Stąd otrzymujemy:

$$f(2) = 15$$

$$a(2 - 1)(2 + 3) = 15$$

$$5a = 15$$

$$a = 3$$

Zapisujemy wzór funkcji f w postaci iloczynowej:

$$f(x) = 3(x - 1)(x + 3)$$

Przekształcamy wzór funkcji f do postaci kanonicznej:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x - 1)(x + 3) = 3(x^2 + 2x - 3) = 3(x^2 + 2x + 1 - 4) = \\ &= 3[(x + 1)^2 - 4] = 3(x + 1)^2 - 12 \end{aligned}$$

Uwaga.

Postać kanoniczną funkcji f możemy też uzyskać, obliczając współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji. Ponieważ osią symetrii tej paraboli jest prosta o równaniu $x = -1$, więc pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli jest równa $p = -1$. Druga współrzędna wierzchołka paraboli jest równa

$$q = f(-1) = 3(-1 - 1)(-1 + 3) = -12$$

Stąd otrzymujemy postać kanoniczną funkcji f : $f(x) = 3(x + 1)^2 - 12$.

Sposób II

Ponieważ osią symetrii wykresu funkcji f jest prosta o równaniu $x = -1$, więc pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli, która jest wykresem tej funkcji, jest $p = -1$.

Korzystamy ze wzoru na postać kanoniczną funkcji kwadratowej i zapisujemy:

$$f(x) = a(x + 1)^2 + q, \text{ gdzie } a \neq 0$$

Miejszem zerowym funkcji f jest liczba 1, zatem punkt $(1, 0)$ leży na wykresie tej funkcji. Stąd i z tego, że wykres funkcji f przechodzi przez punkt $(2, 15)$, otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(2) = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} a(1 + 1)^2 + q = 0 \\ a(2 + 1)^2 + q = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} 4a + q = 0 \\ 9a + q = 15 \end{cases}$$

Odejmujemy równania stronami i otrzymujemy:

$$-5a = -15$$

$$a = 3$$

Stąd:

$$q = -4a = -12$$

Zatem $f(x) = 3(x + 1)^2 - 12$.

Sposób III

Korzystamy ze wzoru na postać ogólną funkcji kwadratowej i zapisujemy:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ gdzie } a \neq 0$$

Ponieważ osią symetrii wykresu funkcji f jest prosta o równaniu $x = -1$, więc pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli, która jest wykresem tej funkcji, jest $p = -1$.

Stąd:

$$\begin{aligned} \frac{-b}{2a} &= -1 \\ b &= 2a \end{aligned}$$

Miejscem zerowym funkcji f jest liczba 1, zatem:

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 \\ a + b + c &= 0 \end{aligned}$$

Podstawiamy do równania w miejsce b wyrażenie $2a$ i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} a + 2a + c &= 0 \\ c &= -3a \end{aligned}$$

Punkt $(2, 15)$ leży na wykresie funkcji f , zatem dla argumentu 2 funkcja f przyjmuje wartość 15. Stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f(2) &= 15 \\ 4a + 2b + c &= 15 \end{aligned}$$

Podstawiamy do równania w miejsce b wyrażenie $2a$, natomiast w miejsce c podstawiamy wyrażenie $(-3a)$ i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 4a + 2 \cdot (2a) - 3a &= 15 \\ 5a &= 15 \\ a &= 3 \end{aligned}$$

Zatem:

$$b = 2a = 6 \text{ oraz } c = -3a = -9$$

Zapisujemy wzór funkcji f w postaci ogólnej:

$$f(x) = 3x^2 + 6x - 9$$

Przekształcamy wzór funkcji f do postaci kanonicznej:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3) = 3(x^2 + 2x + 1 - 4) = \\ &= 3[(x + 1)^2 - 4] = 3(x + 1)^2 - 12 \end{aligned}$$

Zadanie 14.1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 14.2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VI.4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny [...]. I.2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

FP

Zadanie 15.1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.5) stosuje wzór na n -ty wyraz [...] ciągu arytmetycznego.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 15.2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.5) stosuje wzór na [...] sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 16. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.7) wykorzystuje własności ciągów [...] geometrycznych, do rozwiązywania zadań [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 17. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.2) korzysta z wzorów $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 18. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.1) wykorzystuje definicje funkcji sinus, cosinus [...] dla kątów od 0° do 180° [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

FP

Zadanie 19.1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VIII.10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt [...]; VIII.1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 19.2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.	Zdający: VIII.10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: [...] środek okręgu opisanego na trójkącie [...]; VIII.1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 20. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VIII.5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 21. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.	Zdający: VIII.9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 22. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IX.2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie [...].

Zasady oceniania2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $p = \frac{6}{5}$.1 pkt – zapisanie równania prostej l : $y = 5x - 4$

ALBO

– zapisanie równania z niewiadomą p , np.:

$$\frac{2+4}{p-0} = 5, \quad \frac{|5 \cdot p - 2 + 7|}{\sqrt{5^2 + (-1)^2}} = \frac{|5 \cdot 0 - (-4) + 7|}{\sqrt{5^2 + (-1)^2}},$$

ALBO

– zapisanie układu dwóch równań liniowych prowadzącego do obliczenia p , np.

$$-4 = 5 \cdot 0 + b \quad \text{oraz} \quad 2 = 5 \cdot p + b.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania*Sposób I*

Prosta l jest równoległa do prostej k , zatem współczynnik kierunkowy prostej l jest równy 5. Ponadto prosta l przecina oś Oy w punkcie $(0, -4)$, zatem równanie prostej l ma postać: $y = 5x - 4$.

Punkt o współrzędnych $(p, 2)$ należy do prostej l , stąd:

$$\begin{aligned} 2 &= 5p - 4 \\ p &= \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Sposób II

Prosta l jest równoległa do prostej k , zatem współczynnik kierunkowy prostej l jest równy 5. Ponadto prosta l przechodzi przez punkty $(0, -4)$ oraz $(p, 2)$. Zatem ze wzoru na współczynnik kierunkowy prostej otrzymujemy równanie:

$$\frac{2 + 4}{p - 0} = 5$$

Stąd:

$$\begin{aligned} 5p &= 6 \\ p &= \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Zadanie 23. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.4) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$; IX.5) wyznacza obrazy okręgów [...] w symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 24. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: X.5) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów [...]. VI.7) wykorzystuje własności ciągów [...] geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $V = 27$.

3 pkt – obliczenie długości (lub kwadratu długości) jednej z krawędzi prostopadłościanu, np.

$$a = \frac{3}{4} \text{ (lub } a^2 = \frac{9}{16}).$$

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą a , np.

$$94,5 = 2 \cdot (a \cdot 4a + a \cdot 16a + 4a \cdot 16a)$$

ALBO

– zapisanie objętości prostopadłościanu w zależności od jednej zmiennej, np. $V = 64a^3$.

1 pkt – zapisanie długości krawędzi prostopadłościanu wychodzących z jednego wierzchołka w zależności od jednej zmiennej, np. a , $4a$, $16a$.

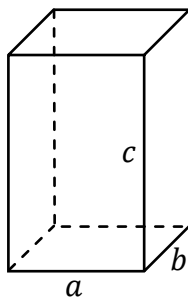
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

- Jeżeli zdający myli ciąg geometryczny z arytmetycznym (przyjmuje, że długości krawędzi prostopadłościanu są równe a , $a + 4$, $a + 8$), to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za – konsekwentnie do popełnionego błędu – obliczenie długości jednej z krawędzi prostopadłościanu i za obliczenie objętości prostopadłościanu).
- Jeżeli zdający rozwiązuje równanie $94,5 = a \cdot 4a + a \cdot 16a + 4a \cdot 16a$ (tzn. pomija czynnik 2 we wzorze na pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu), to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za zapisanie długości krawędzi prostopadłościanu wychodzących z jednego wierzchołka w zależności od jednej zmiennej oraz za – konsekwentnie do popełnionego błędu – obliczenie objętości prostopadłościanu).
- Jeżeli zdający odgadnie długości krawędzi prostopadłościanu wychodzących z tego samego wierzchołka: $\frac{3}{4}$, 3, 12, oraz sprawdzi rachunkiem, że spełniają one warunki zadania, a następnie obliczy objętość ostrosłupa $V = 27$, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku, przy czym niech $a < b < c$.



Z warunków zadania otrzymujemy: $b = 4a$, $c = 16a$. Stąd i z tego, że pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jest równe 94,5, otrzymujemy równanie:

$$2 \cdot (a \cdot 4a + a \cdot 16a + 4a \cdot 16a) = 94,5$$

$$2 \cdot (4a^2 + 16a^2 + 64a^2) = 94,5$$

$$168a^2 = 94,5$$

$$a^2 = 0,5625$$

$$a = 0,75 = \frac{3}{4}$$

Obliczamy objętość prostopadłościanu:

$$V = abc = a \cdot 4a \cdot 16a = 64a^3 = 64 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 64 \cdot \frac{27}{64} = 27$$

Zadanie 25. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: X.5) oblicza [...] pola powierzchni [...] ostrosłupów [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 26. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: X.4) rozpoznaje [...] w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą) [...]; X.5) oblicza objętości [...] stożka [...], również z wykorzystaniem trygonometrii.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 27. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $P(A) = \frac{17}{24}$.

1 pkt – wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych *LUB* obliczenie/podanie liczby tych zdarzeń: $|\Omega| = 6 \cdot 4$, *LUB* sporządzenie tabeli o 24 polach odpowiadających zdarzeniom elementarnym, *LUB* sporządzenie pełnego drzewa stochastycznego *ALBO*

– wypisanie (lub zaznaczenie w tabeli) wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu *A* i niewypisanie żadnego niewłaściwego, *ALBO*

– podanie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu *A*: $|A| = 17$, o ile nie zostały zliczone błędne pary, *ALBO*

– sporządzenie fragmentu drzewa stochastycznego, który zawiera wszystkie gałęzie sprzyjające zdarzeniu *A*, **oraz** zapisanie prawdopodobieństwa na co najmniej jednym odcinku każdego z etapów doświadczenia, *ALBO*

– podanie prawdopodobieństwa jednoelementowego zdarzenia (elementarnego): $\frac{1}{24}$,

ALBO

– zapisanie tylko $P(A) = \frac{17}{24}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający zapisuje tylko liczby 17 lub 24 i z rozwiązania nie wynika znaczenie tych liczb, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie uporządkowane pary liczb (x, y) , gdzie $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ oraz $y \in \{-2, -1, 0, 1\}$.

Liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych obliczamy z wykorzystaniem reguły mnożenia.

Moc zbioru Ω jest równa $6 \cdot 4 = 24$.

Zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:

$(-3, -2), (-3, -1), (-3, 0), (-2, -2), (-2, -1), (-2, 0), (-1, -2), (-1, -1), (-1, 0),$
 $(0, -2), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1),$

więc moc zbioru A jest równa 17.

Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe $\frac{17}{24}$.

Sposób II

W tabeli literą $\mathcal{A}$ zaznaczamy zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A .

$X \backslash Y$	-2	-1	0	1
-3	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	
-2	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	
-1	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	
0	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$
1			$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$
2			$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$

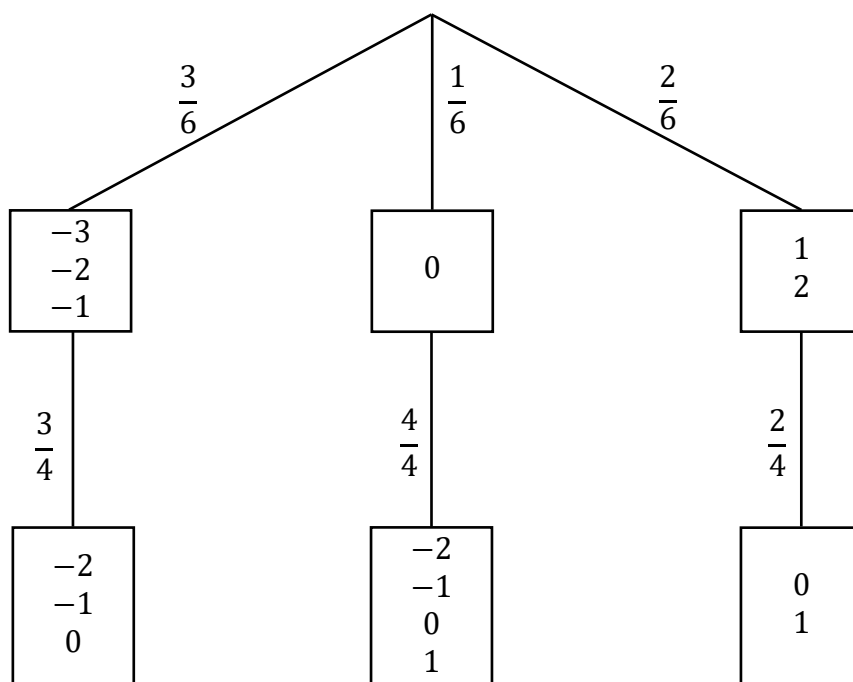
Moc zbioru Ω jest równa 24.

Zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A jest 17.

Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe $\frac{17}{24}$.

Sposób III (drzewo stochastyczne)

Rysujemy fragment drzewa stochastycznego rozważanego doświadczenia, z uwzględnieniem wszystkich istotnych gałęzi.



Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe:

$$P(A) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{4} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{4} = \frac{17}{24}$$

Zadanie 28. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XI.2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 29. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: XII.2) oblicza średnią arytmetyczną [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 30. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: XII.2) oblicza średnią arytmetyczną [...], znajduje medianę i dominantę.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawne uzupełnienie trzech zdań.

2 pkt – poprawne uzupełnienie dwóch zdań.

1 pkt – poprawne uzupełnienie jednego zdania.

0 pkt – brak spełnienia powyższych kryteriów.

Uwaga:

Nie akceptuje się zaokrągleń otrzymanych wyników.

Rozwiązanie

1. 11

2. 3,5

3. 4

Zadanie 31. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: XIII) rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Ocena prac osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Obowiązują zasady oceniania stosowane przy sprawdzaniu prac zdających bez stwierdzonej dyskalkulii z dodatkowym uwzględnieniem:

- I. **ogólnych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią (punkty 1.–12.);
- II. dodatkowych **szczegółowych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią – egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, termin dodatkowy 2025.

I. Ogólne zasady oceniania zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

1. Nie należy traktować jako błędy merytoryczne pomyłek, wynikających z:
 - błędnego przepisania
 - przestawienia cyfr
 - zapisania innej cyfry, ale o podobnym wyglądzie
 - przestawienia położenia przecinka
 - przestawienia położenia znaku liczby.
2. W przypadku błędów, wynikających ze zmiany znaku liczby, należy w każdym zadaniu oddzielnie przeanalizować, czy zdający opanował inne umiejętności, poza umiejętnościami rachunkowymi, oceniane w zadaniu. W przypadku opanowania badanych umiejętności zdający powinien otrzymać przynajmniej 1 punkt.
3. We wszystkich zadaniach otwartych, w których wskazano poprawną metodę rozwiązania, części lub całości zadania, zdającemu należy przyznać przynajmniej 1 punkt, zgodnie z kryteriami do poszczególnych zadań.
4. Jeśli zdający przedstawia nieprecyzyjne zapisy, na przykład pomija nawiasy lub zapisuje nawiasy w niewłaściwych miejscach, ale przeprowadza poprawne rozumowanie lub stosuje właściwą strategię, to może otrzymać przynajmniej 1 punkt za rozwiązanie zadania.
5. W przypadku zadania wymagającego wyznaczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi poprawną metodę wyznaczania pierwiastków trójmianu kwadratowego, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
6. W przypadku zadania wymagającego rozwiązania nierówności kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli stosuje poprawny algorytm rozwiązywania nierówności kwadratowej, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
7. W przypadku zadania wymagającego stosowania własności funkcji kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt za wykorzystanie konkretnych własności funkcji kwadratowej, istotnych przy poszukiwaniu rozwiązania.

8. W przypadku zadania wymagającego zastosowania własności ciągów arytmetycznych lub geometrycznych zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi wykorzystanie takiej własności ciągu, która umożliwi znalezienie rozwiązania zadania.
9. W przypadku zadania wymagającego analizowania figur geometrycznych na płaszczyźnie kartezjańskiej zdający może otrzymać punkty, jeżeli przy poszukiwaniu rozwiązania przedstawi poprawne rozumowanie, wykorzystujące własności figur geometrycznych lub zapisze zależności, pozwalające rozwiązać zadanie.
10. W przypadku zadania z rachunku prawdopodobieństwa zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeśli przy wyznaczaniu liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających rozważanemu zdarzeniu przyjmuje określoną regularność lub podaje prawidłową metodę wyznaczenia tej liczby zdarzeń elementarnych.
11. W przypadku zadania z geometrii zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeżeli podaje poprawną metodę wyznaczenia długości odcinka potrzebnej do znalezienia rozwiązania.
12. W przypadku zadania wymagającego przeprowadzenia dowodu (z zakresu algebry lub geometrii), jeśli w przedstawionym rozwiązaniu zdający powoła się na własność, która wyznacza istotny postęp, prowadzący do przeprowadzenia dowodu, to może otrzymać 1 punkt.

II. Dodatkowe **szczegółowe zasady oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Zadanie 5.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 8.

1 pkt – zapisanie równania $85\% \cdot y = 70\% \cdot 80\% \cdot x$.

Zadanie 9.

1 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego $x^2 + 3x + 2$, tzn. zastosowanie wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego i obliczenie tych pierwiastków

ALBO

– konsekwentne (do otrzymanego w wyniku popełnienia błędów o charakterze dyskalkulicznym ujemnego wyróżnika) narysowanie paraboli,

ALBO

– poprawne rozwiązanie nierówności $x(x + 4) < 0$ (tzn. stosuje się punkt 6. ogólnych zasad oceniania),

ALBO

– konsekwentne (do wyznaczonych przez siebie pierwiastków oraz rozpatrywanego trójmianu i nierówności) wyznaczenie zbioru rozwiązań nierówności.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający, rozwiązując nierówność, pomyli porządek liczb na osi liczbowej i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $(-1, -2)$, to może otrzymać **2 punkty** za całe rozwiązanie.
2. Nie stosuje się uwag 2. i 3. z zasad oceniania arkusza standardowego.
3. Akceptowane jest zapisanie pierwiastków trójmianu w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi.

Zadanie 10.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 13.

- 1 pkt – zapisanie wzoru funkcji f w postaci $f(x) = a(x - p)^2 + q$ **oraz** zapisanie $p = -1$
ALBO
– wyznaczenie drugiego miejsca zerowego funkcji f : $x_1 = -3$.

Zadanie 22.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 24.

- 3 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą a , np.
 $94,5 = 2 \cdot (a \cdot 4a + a \cdot 16a + 4a \cdot 16a)$ **oraz**
zapisanie objętości prostopadłościanu w postaci $V = 64a^3$.

Zadanie 27.

- 1 pkt – zapisanie jedynie liczby 24 (należy traktować to jako wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych).

Uwagi:

1. W ocenie rozwiązania tego zadania (dla zdających z dyskalkulią) nie stosuje się uwagi ze standardowych zasad oceniania.
2. Jeżeli zdający poprawnie wypisze/zaznaczy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A , lecz popełni błąd w ich zliczeniu (np. $|A| = 16$) i konsekwentnie zapisze wynik (np. $\frac{16}{24}$), to otrzymuje **2 punkty**

Zadanie 30.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

PESEL

Miejsce na naklejkę.

Sprawdź, czy kod na naklejce to
E-100.

Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny

Formuła 2015

MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Symbol arkusza

EMAP-P0-**100**-2506

DATA: **4 czerwca 2025 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **170 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

☐ Uprawnienie zdającego do
dostosowania w związku z dyskalkulią.

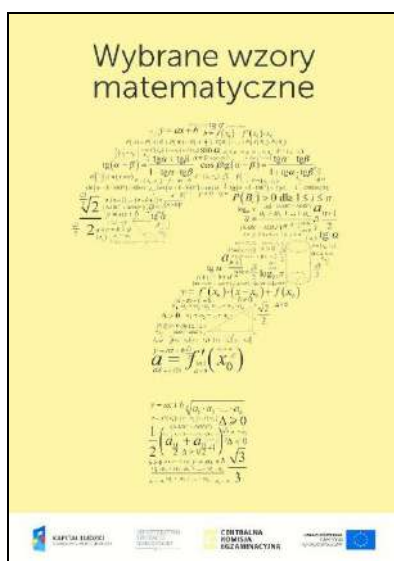
Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**,
tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi.
Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu
takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.



Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 31 stron (zadania 1–34).
Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Odpowiedzi do zadań zamkniętych (1–25) zaznacz na karcie odpowiedzi w części karty przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj  pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem  i zaznacz właściwe.
4. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego (26–34) może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
5. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
6. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
7. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
8. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
9. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
10. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla i linijki oraz z kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



**Zadania egzaminacyjne są wydrukowane
na następnych stronach.**

W każdym z zadań od 1. do 25. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Liczba 0,1 jest jednym z przybliżeń liczby $\frac{1}{8}$.

Błąd względny tego przybliżenia, wyrażony w procentach, jest równy

- A. 0,2% B. 0,25% C. 20% D. 25%

Zadanie 2. (0–1)

Liczba $256 \cdot \sqrt[3]{8^2}$ jest równa

- A. 2^8 B. 2^{10} C. 2^{16} D. 2^{36}

Zadanie 3. (0–1)

Liczba $(\sqrt{3} + 1)^2 - \sqrt{12}$ jest równa

- A. $4 - 4\sqrt{3}$ B. $4 - 2\sqrt{3}$ C. 2 D. 4

Zadanie 4. (0–1)

Liczba $2 + \log_3 5$ jest równa

- A. $\log_3 7$ B. $\log_3 10$ C. $\log_3 25$ D. $\log_3 45$

Zadanie 5. (0–1)

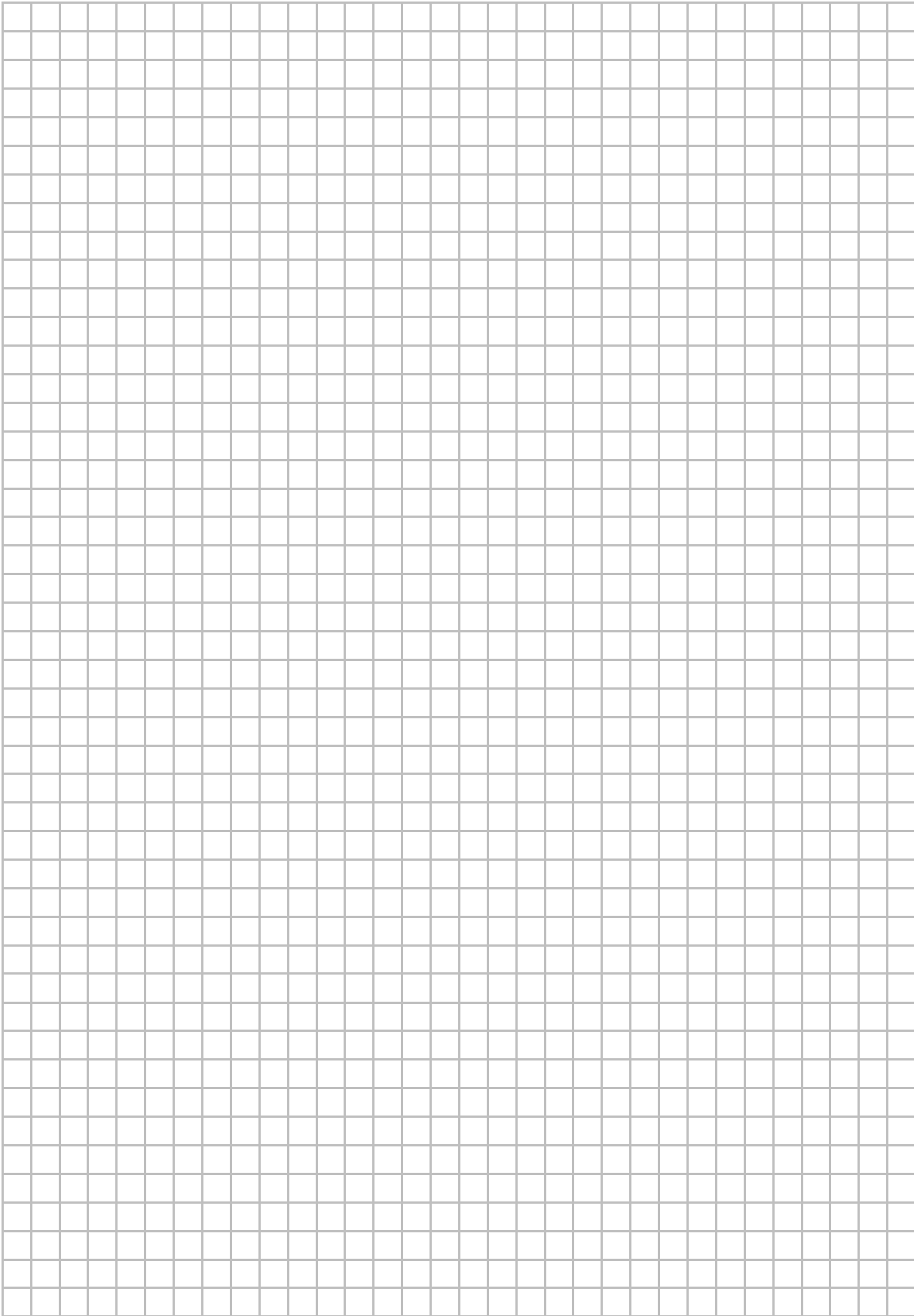
Dana jest nierówność

$$8 - \frac{1 - 2x}{2} \geq 3x$$

Największą liczbą całkowitą, która spełnia tę nierówność, jest

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)



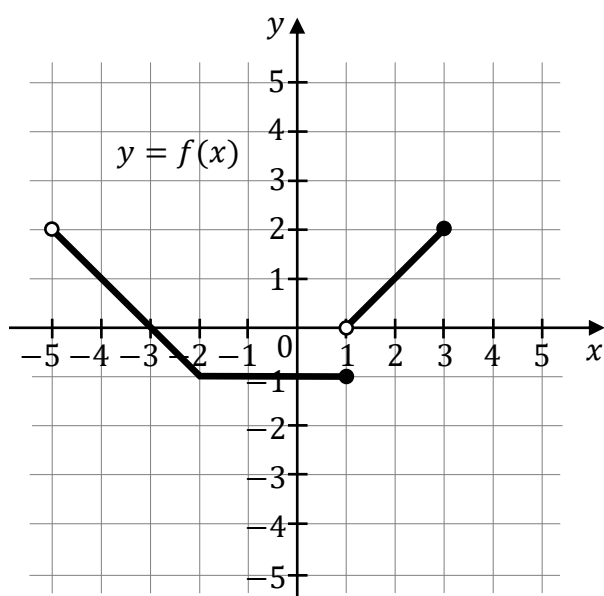
Zadanie 6. (0–1)

Równanie $4(x-1)^2(x^2-25)=0$ w zbiorze liczb rzeczywistych ma dokładnie

- A. dwa rozwiązania.
- B. trzy rozwiązania.
- C. cztery rozwiązania.
- D. pięć rozwiązań.

Informacja do zadań 7.–8.

Na rysunku, w układzie współrzędnych (x, y) , przedstawiono wykres funkcji f .

**Zadanie 7. (0–1)**

Dziedziną funkcji f jest przedział

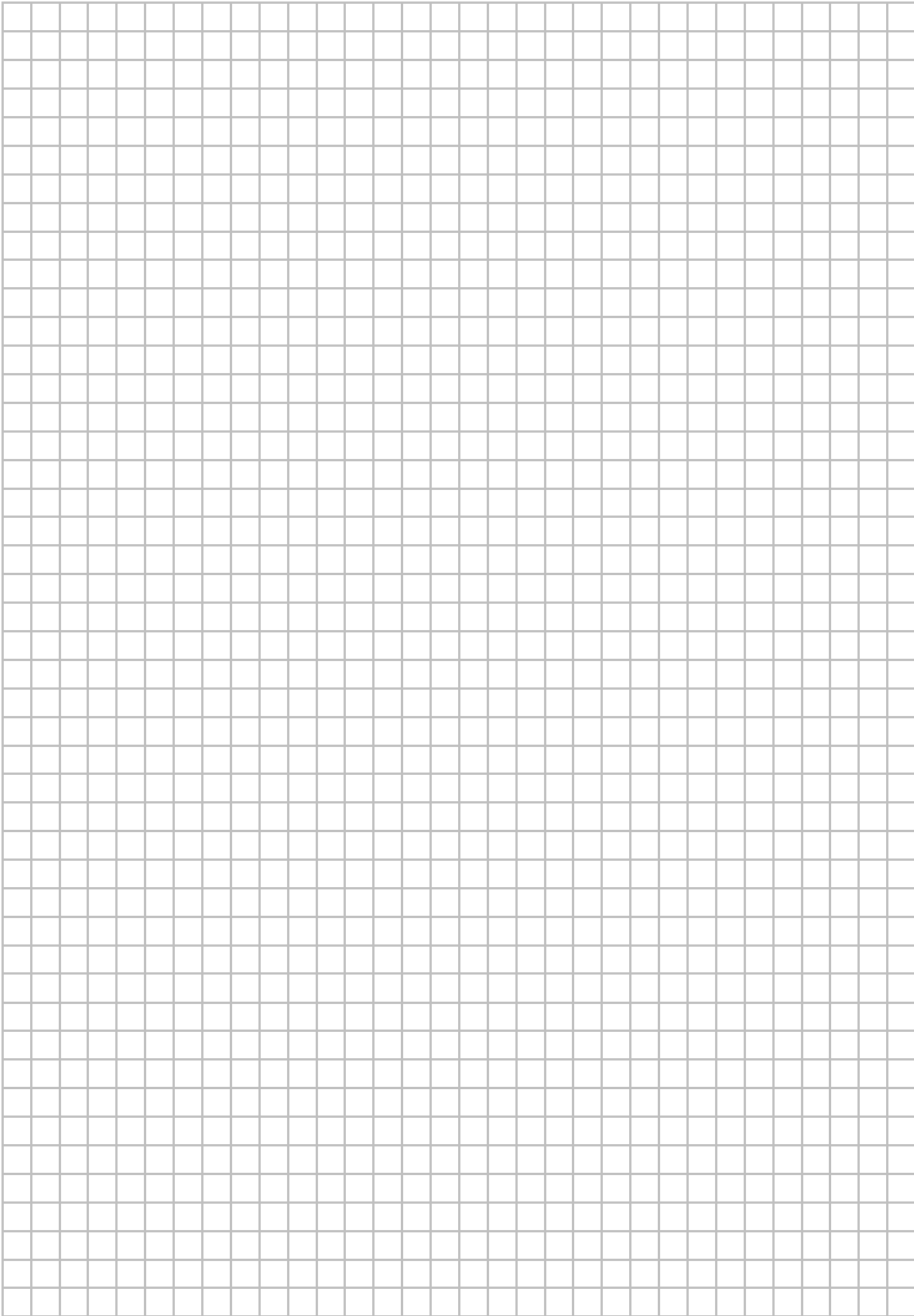
- A. $(-5, 3)$ B. $\langle -5, 3 \rangle$ C. $\langle -1, 2 \rangle$ D. $(-1, 2)$

Zadanie 8. (0–1)

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $f(x) < f(-3)$ jest przedział

- A. $(-5, -3)$ B. $(-5, -3]$ C. $\langle -3, 1 \rangle$ D. $(-3, 1)$

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)



Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl

Zadanie 9. (0–1)

Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x - k$, gdzie k jest liczbą rzeczywistą. Miejsce zerowe funkcji f jest liczbą większą od 2.

Liczba k należy do przedziału

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(-1, 0)$ C. $(0, 1)$ D. $(1, +\infty)$

Zadanie 10. (0–1)

Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = 5x$. W układzie współrzędnych (x, y) wykres funkcji f przesunięto o jedną jednostkę w prawo wzdłuż osi Ox i w wyniku tego przesunięcia otrzymano wykres funkcji liniowej g .

Funkcja g jest określona wzorem

- A. $g(x) = 5x - 5$ B. $g(x) = 5x - 1$
C. $g(x) = 5x + 1$ D. $g(x) = 5x + 5$

Zadanie 11. (0–1)

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = (500 + 50x)(16 - x)$.

Największa wartość funkcji f w przedziale $\langle 0, 14 \rangle$ jest równa

- A. $f(3)$ B. $f(4)$ C. $f(7)$ D. $f(14)$

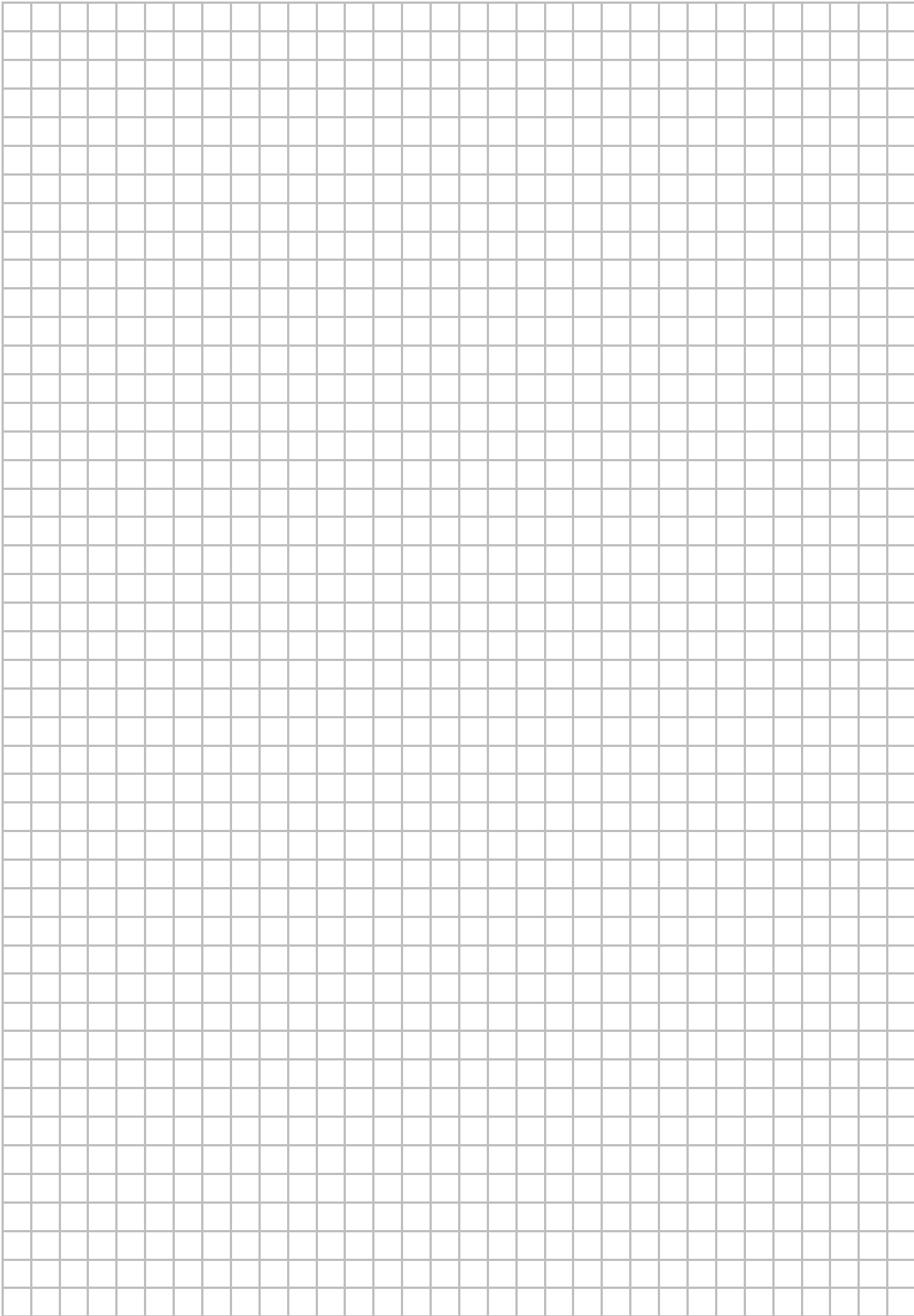
Zadanie 12. (0–1)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 64^x$ dla każdej liczby rzeczywistej x .

Liczba $f\left(-\frac{2}{3}\right)$ jest równa

- A. $\frac{1}{512}$ B. $\frac{1}{16}$ C. 16 D. 512

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)



Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl

Zadanie 13. (0–1)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 3n^2 - 3n$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Suma S_3 trzech początkowych kolejnych wyrazów ciągu (a_n) jest równa

- A. 18 B. 24 C. 60 D. 90

Zadanie 14. (0–1)

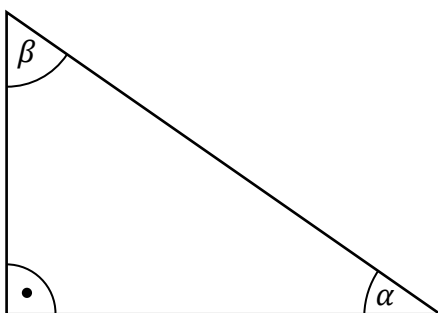
Trzywyrazowy ciąg $(4, m, m - 1)$ jest geometryczny, gdy liczba m jest równa

- A. (-3) B. (-2) C. 2 D. 3

Zadanie 15. (0–1)

Dany jest trójkąt prostokątny o kątach ostrych α oraz β (zobacz rysunek).

Sinus kąta α jest równy $\frac{4}{7}$.



Cosinus kąta β jest równy

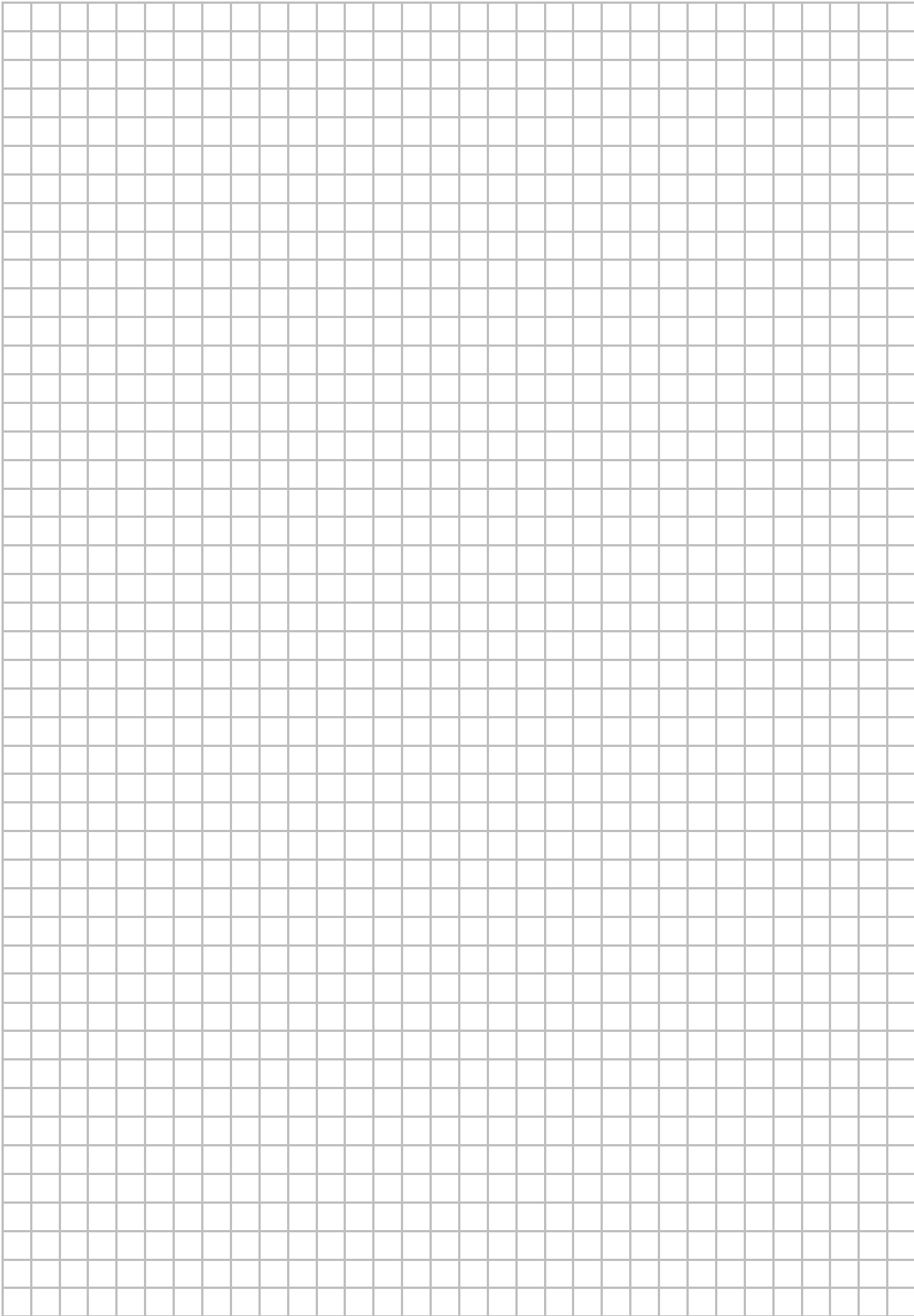
- A. $\frac{3}{7}$ B. $\frac{4}{7}$ C. $\frac{\sqrt{33}}{7}$ D. $\frac{4}{\sqrt{33}}$

Zadanie 16. (0–1)

Liczba $\frac{\sin^3 25^\circ + \sin 25^\circ \cdot \cos^2 25^\circ}{\cos 25^\circ}$ jest równa

- A. $\sin 25^\circ$ B. $\cos 25^\circ$ C. $\operatorname{tg} 25^\circ$ D. 1

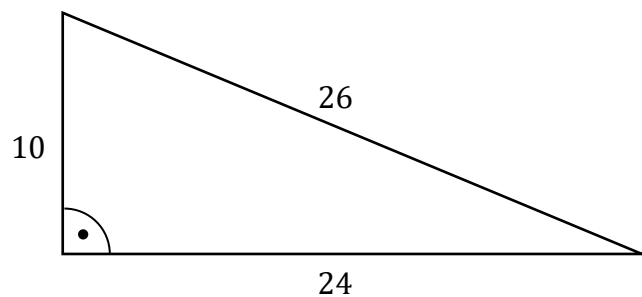
BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)



Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl

Informacja do zadań 17.–18.

Dany jest trójkąt prostokątny o bokach długości 10, 24, 26 (zobacz rysunek).

**Zadanie 17. (0–1)**

Długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równa

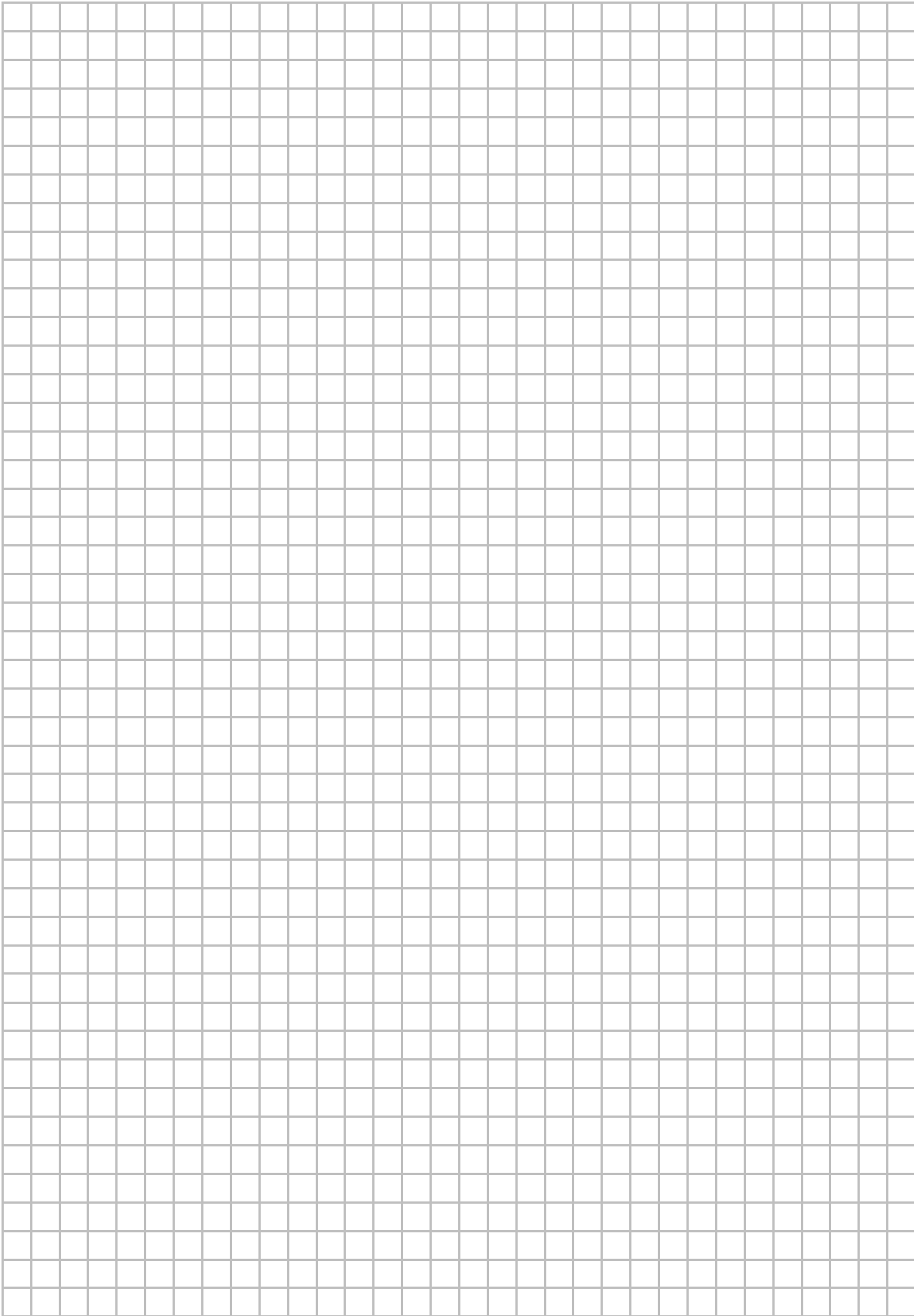
- A. $\frac{10}{3}$ B. 4 C. 5 D. $\frac{80}{13}$

Zadanie 18. (0–1)

Długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest równa

- A. $\frac{80}{13}$ B. $\frac{20}{3}$ C. 12 D. 13

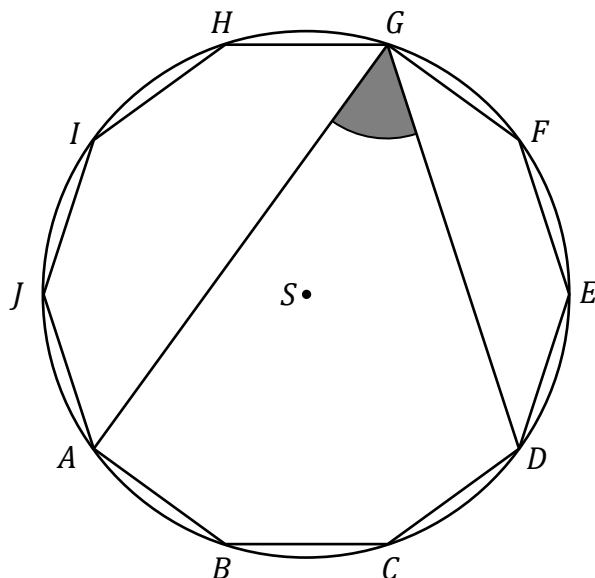
BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)



Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl

Zadanie 19. (0–1)

Na dziesięciokącie foremnym $ABCDEFGHIJ$ opisano okrąg o środku w punkcie S (zobacz rysunek).

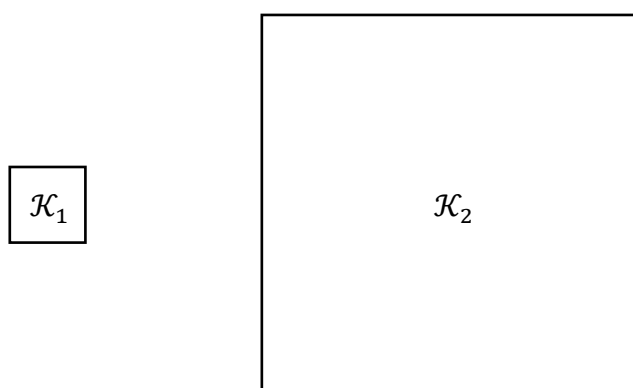


Miara kąta wpisanego AGD jest równa

- A. 18° B. 36° C. 54° D. 60°

Zadanie 20. (0–1)

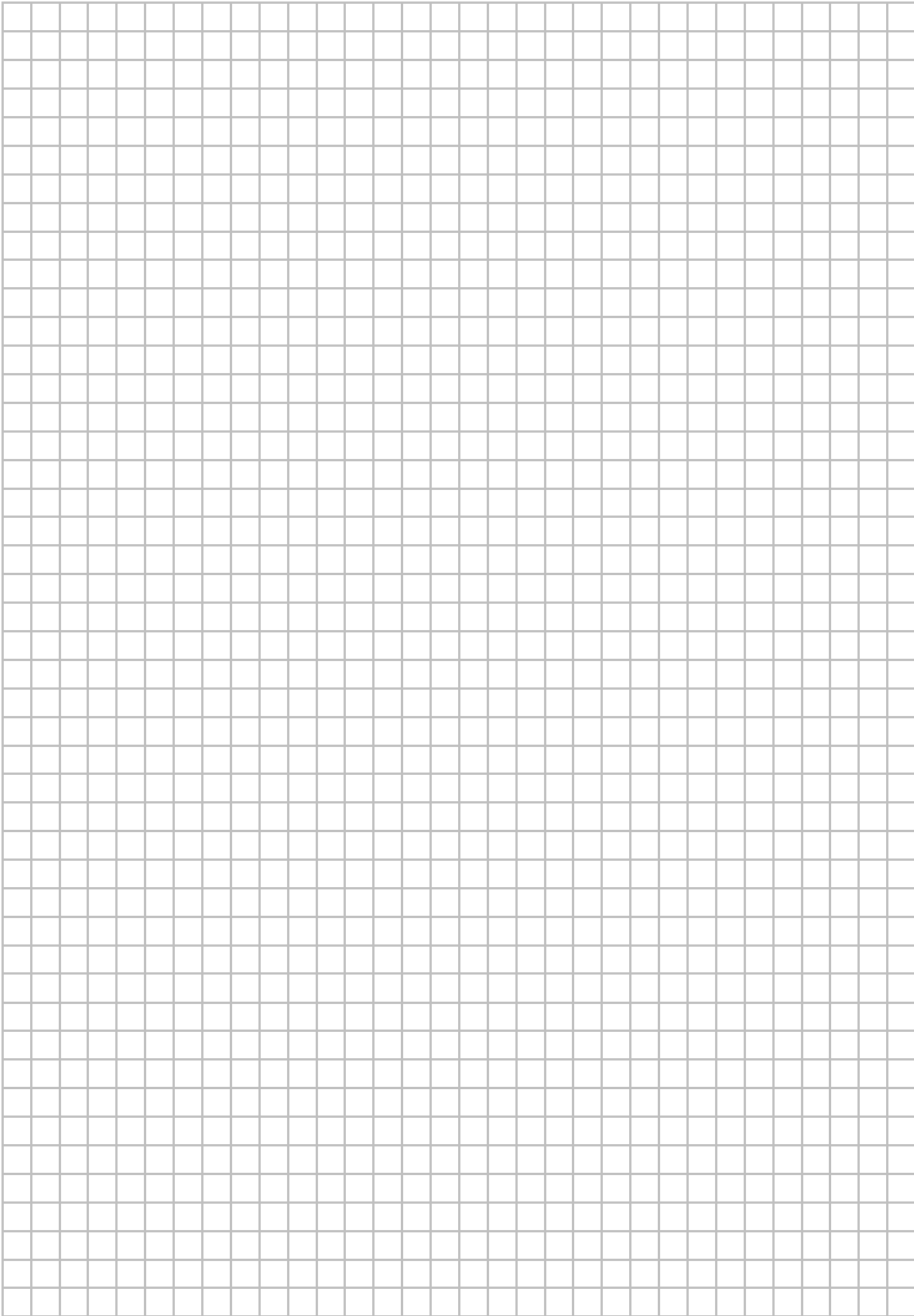
Kwadrat $\mathcal{K}_2$ jest podobny do kwadratu $\mathcal{K}_1$ w skali 5 (zobacz rysunek).
Suma pól tych kwadratów jest równa 78.



Długość boku kwadratu $\mathcal{K}_1$ jest równa

- A. $\sqrt{3}$ B. 3 C. $\sqrt{13}$ D. 13

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)



Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl

Zadanie 21. (0–1)

W układzie współrzędnych (x, y) dana jest prosta k o równaniu $y = x - 4$.
Prosta l jest obrazem prostej k w symetrii osiowej względem osi Oy układu współrzędnych.

Prosta l jest określona równaniem

A. $y = x - 4$

B. $y = x + 4$

C. $y = -x - 4$

D. $y = -x + 4$

Zadanie 22. (0–1)

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 20.
Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest cztery razy większe od pola jego podstawy.

Długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa jest równa

A. 2

B. $\sqrt{5}$

C. $\sqrt{10}$

D. 4

Zadanie 23. (0–1)

Tworząca stożka ma długość 6. Kąt rozwarcia tego stożka ma miarę 60° .

Wysokość tego stożka jest równa

A. 3

B. $2\sqrt{3}$

C. $3\sqrt{3}$

D. $3\sqrt{5}$

Zadanie 24. (0–1)

Wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych parzystych, w których zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jeden raz cyfra 0, jest

A. 108

B. 117

C. 126

D. 162

Zadanie 25. (0–1)

Średnia arytmetyczna trzech liczb: a , b , c , jest równa 12.

Średnia arytmetyczna sześciu liczb: $2a$, $3a$, $2b$, $3b$, $2c$, $3c$, jest równa

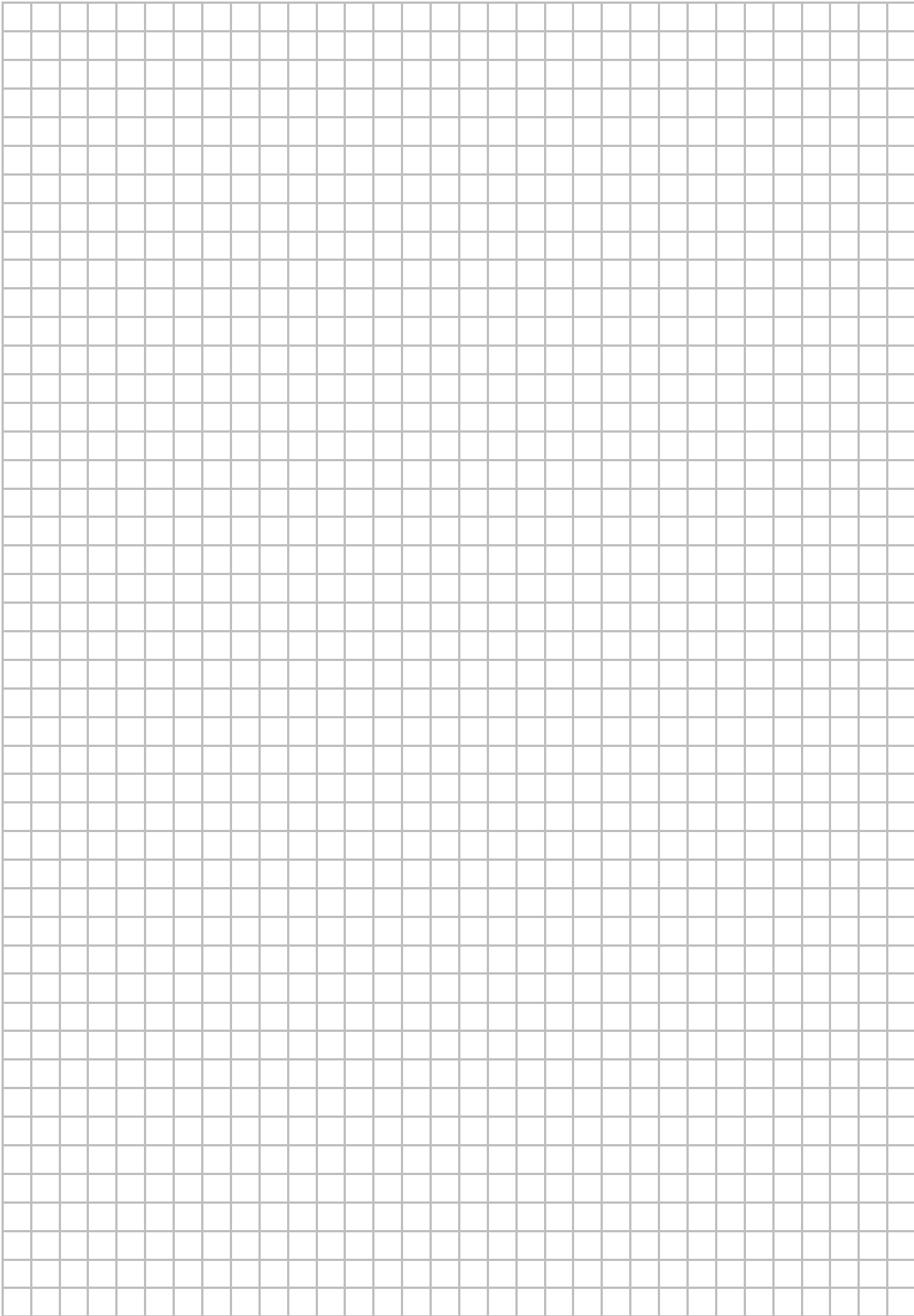
A. 10

B. 12

C. 30

D. 60

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

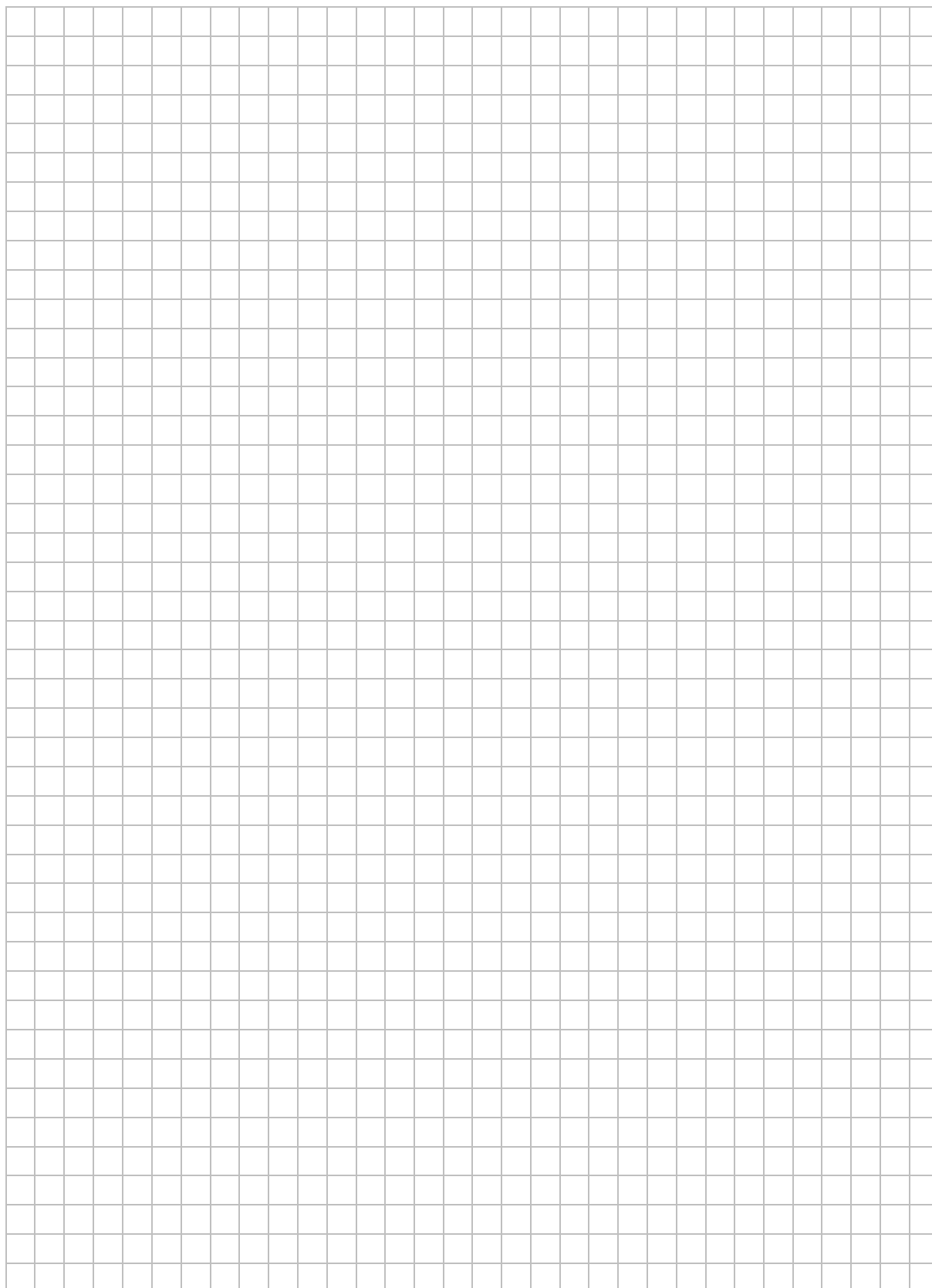


Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność

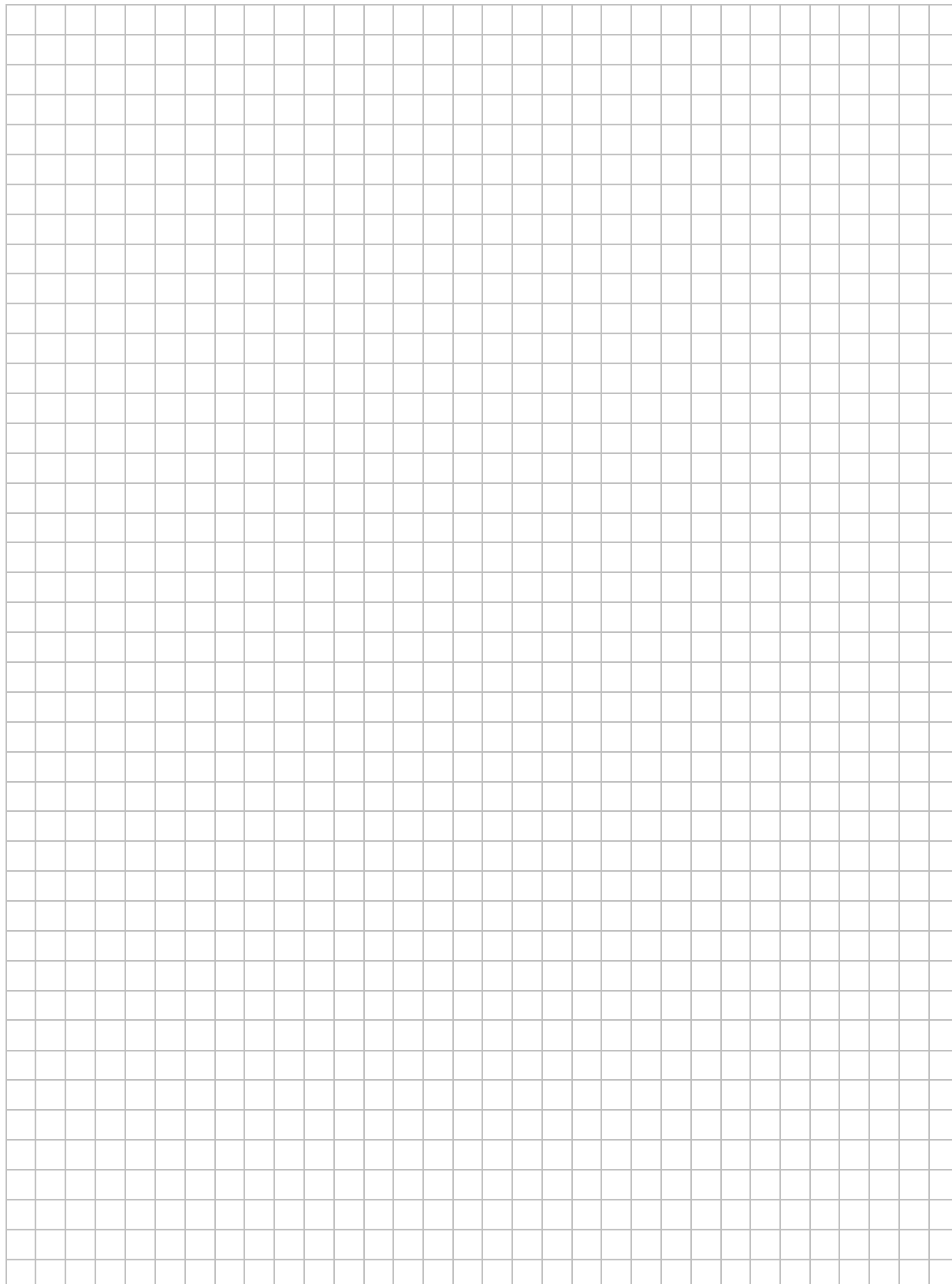
$$x(x + 4) < x - 2$$



Zadanie 27. (0–2)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 2$ i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność

$$x^2 + y^2 > 4(x + y - 2)$$



Zadanie 28. (0–2)

W maju 2024 roku założono dwa sady: posadzono w nich łącznie 1410 drzew.

Po roku stwierdzono, że uszło 20% drzew w pierwszym sadzie i 15% drzew w drugim sadzie. Uschnięte drzewa usunięto, a nowych nie dosadzano.

Liczba drzew, które pozostały w drugim sadzie, stanowiła 70% liczby drzew, które pozostały w pierwszym sadzie.

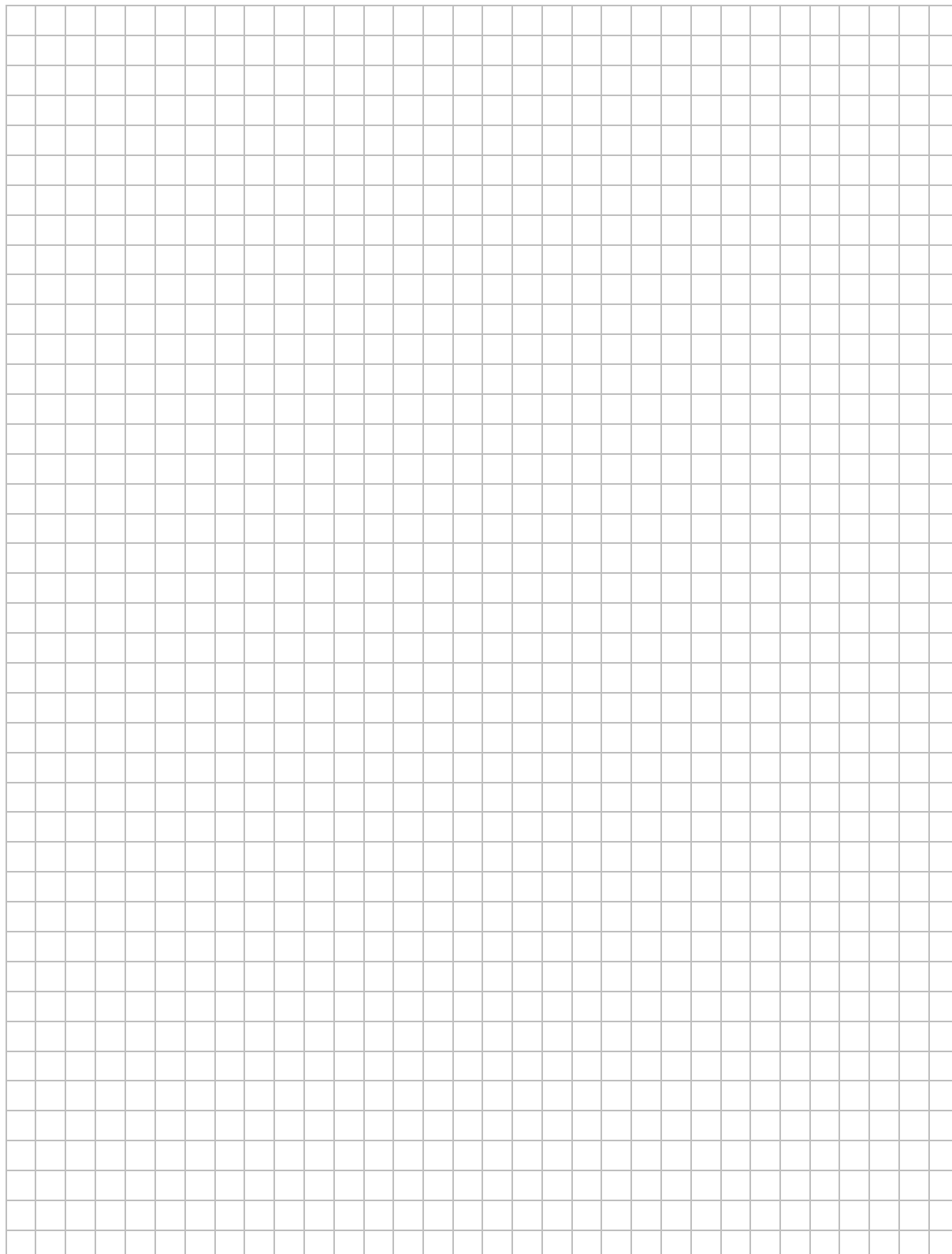
Oblicz, ile drzew posadzono w pierwszym sadzie w maju 2024 roku.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Zadanie 29. (0–2)

Ciąg arytmetyczny ma dwadzieścia pięć wyrazów, a suma wszystkich jego wyrazów jest równa 2025. Ostatni wyraz tego ciągu jest 17 razy większy od pierwszego wyrazu tego ciągu.

Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

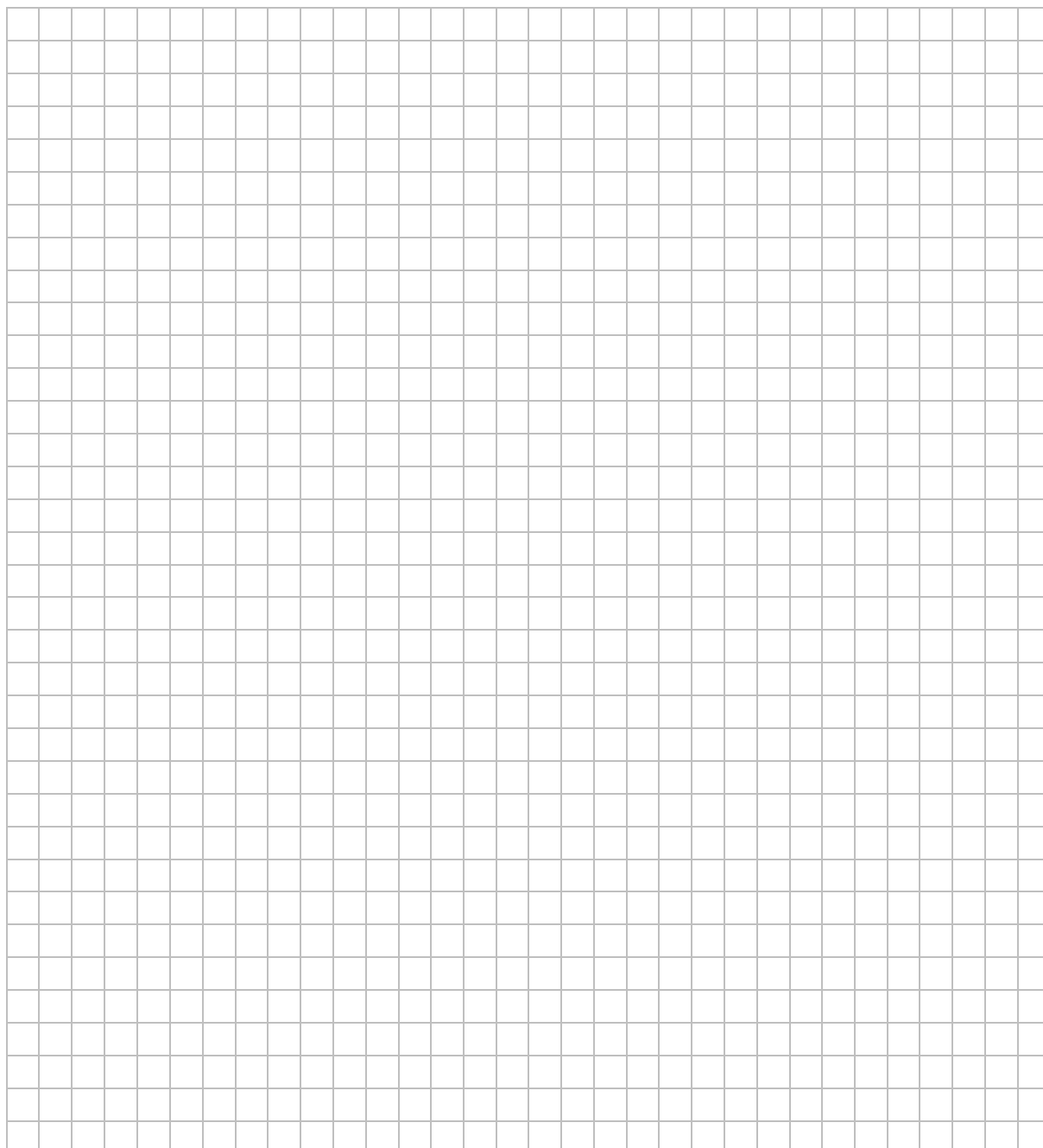


Zadanie 30. (0–2)

W tabeli zestawiono liczbę punktów uzyskanych przez 32 uczniów pewnej klasy za rozwiązanie jednego z zadań ze sprawdzianu z matematyki.

Liczba punktów	0	1	2	3	4	5
Liczba uczniów, którzy otrzymali daną liczbę punktów	4	2	5	5	11	5

Oblicz średnią arytmetyczną oraz medianę liczby punktów otrzymanych przez tych uczniów za rozwiązanie tego zadania.

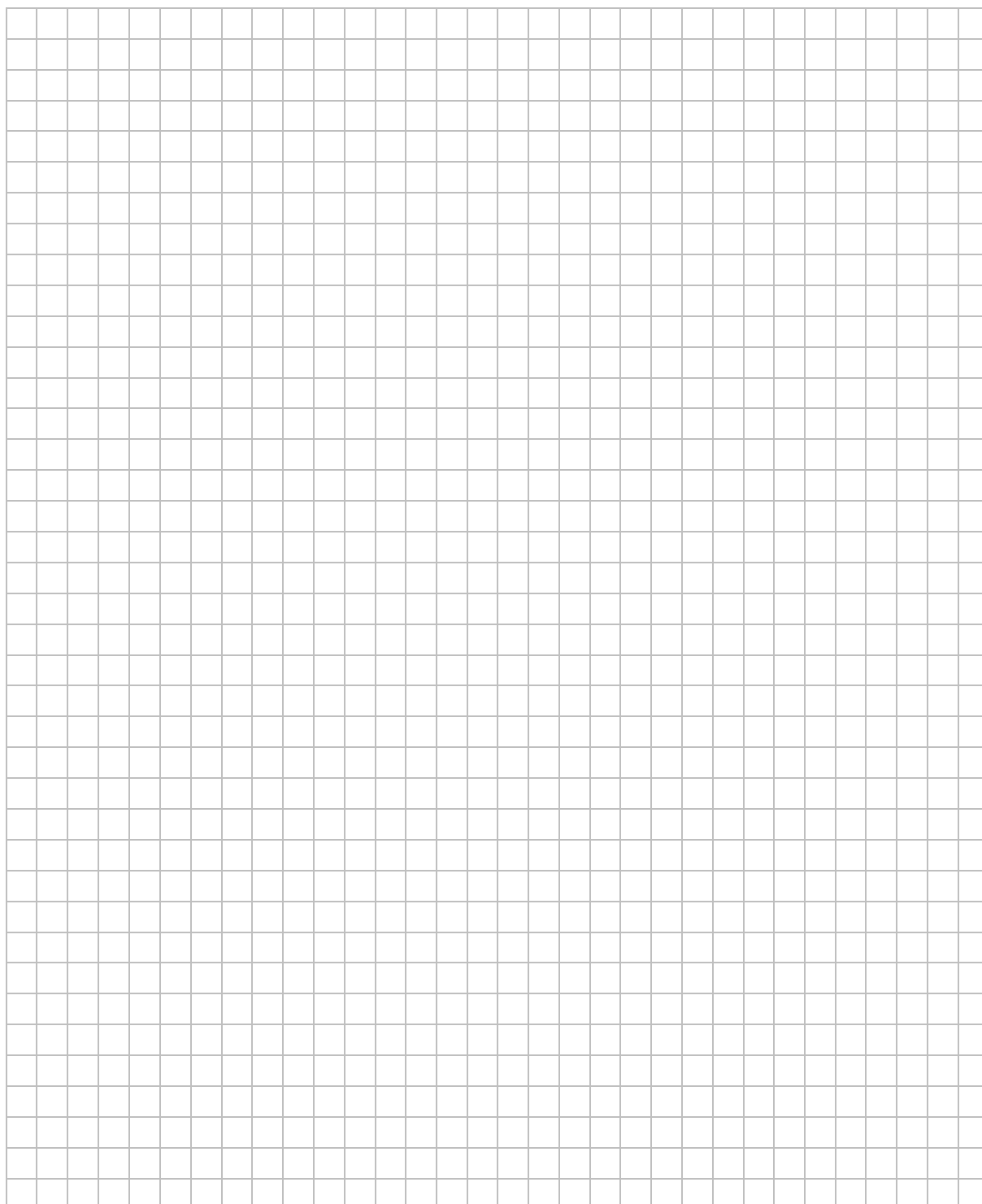


Zadanie 31. (0–2)

Dane są dwa zbiory: $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ oraz $Y = \{-2, -1, 0, 1\}$.

Losujemy jedną liczbę ze zbioru X , a następnie losujemy jedną liczbę ze zbioru Y i tworzymy uporządkowaną parę liczb (x, y) , gdzie x jest liczbą wylosowaną ze zbioru X oraz y jest liczbą wylosowaną ze zbioru Y .

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że wylosujemy parę liczb (x, y) , która będzie spełniać warunek $x \cdot y \geq 0$.

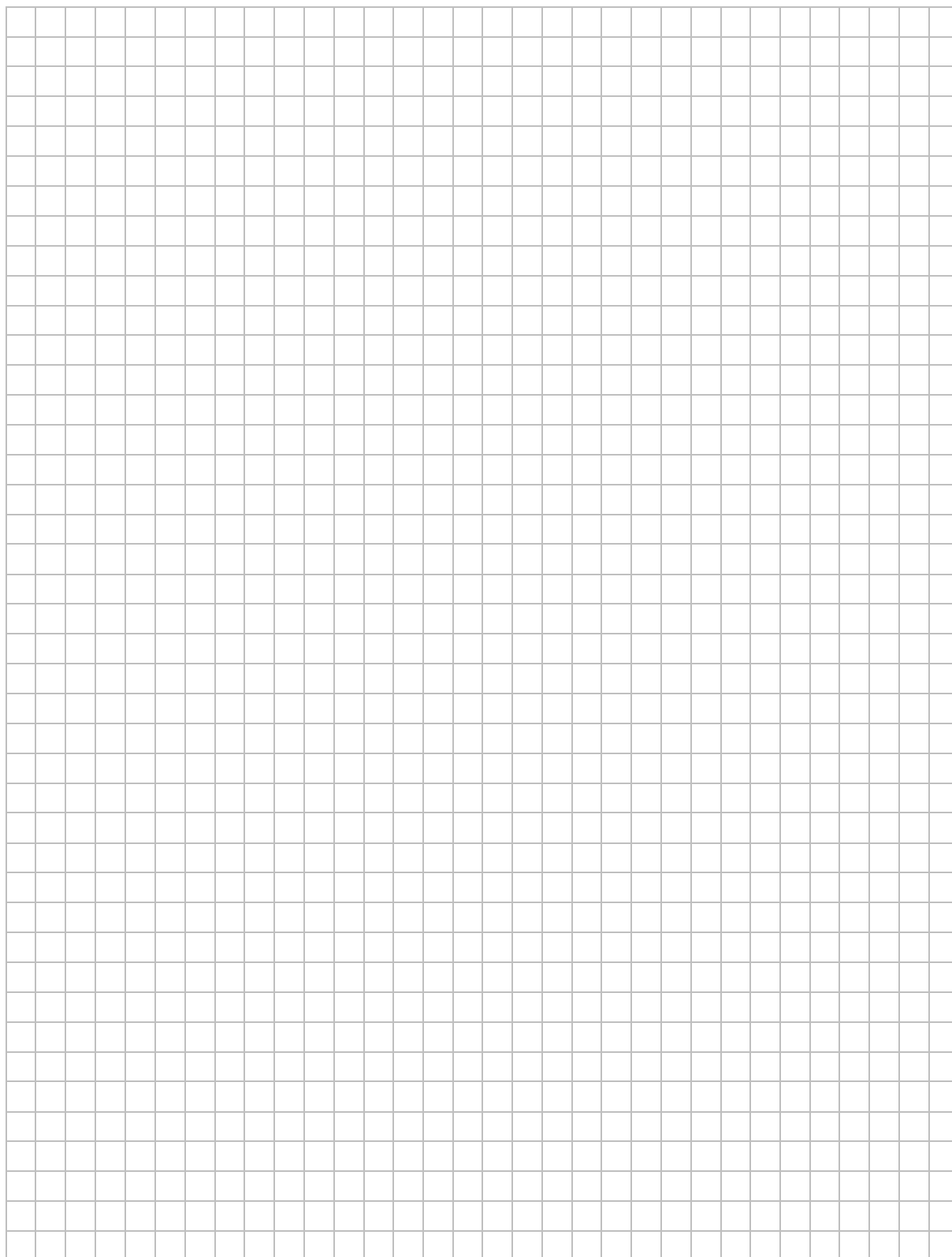


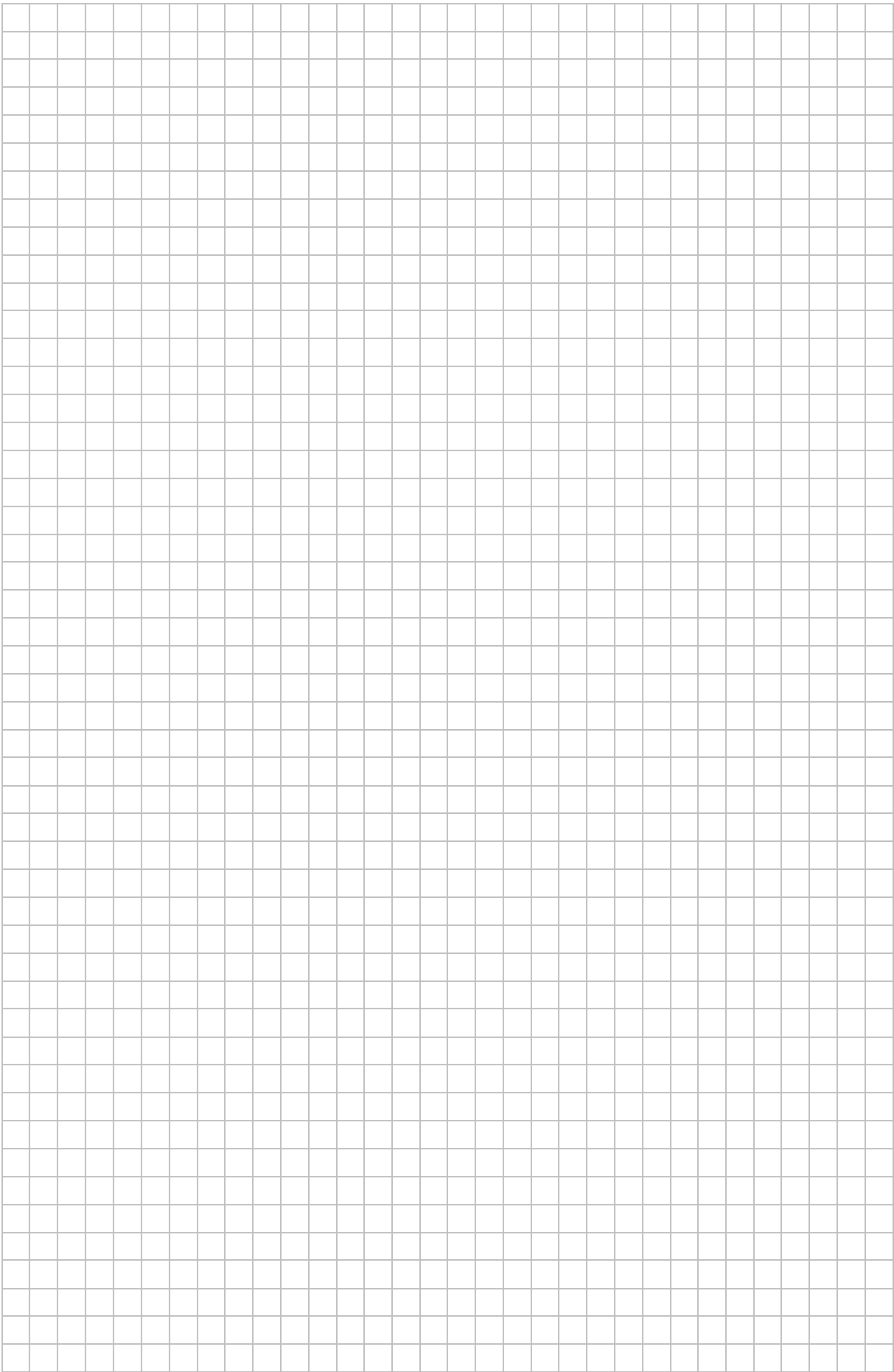
Zadanie 32. (0–4)

W układzie współrzędnych (x, y) wykres funkcji kwadratowej f przechodzi przez punkt $(2, 15)$. Oś symetrii tego wykresu jest prosta o równaniu $x = -1$.

Jednym z miejsc zerowych funkcji f jest liczba 1 .

Wyznacz wzór funkcji f w postaci kanonicznej oraz zbiór wartości funkcji f .



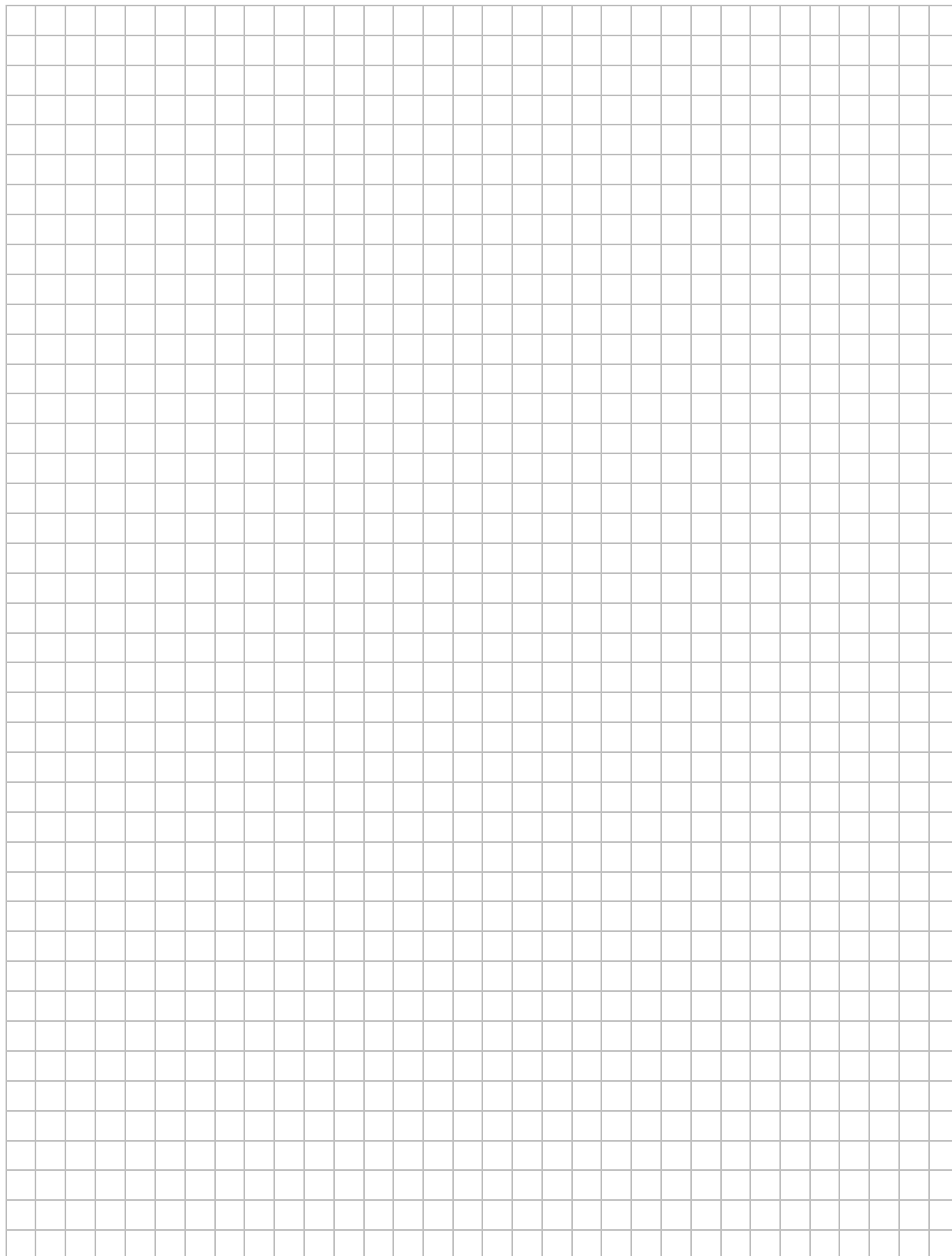


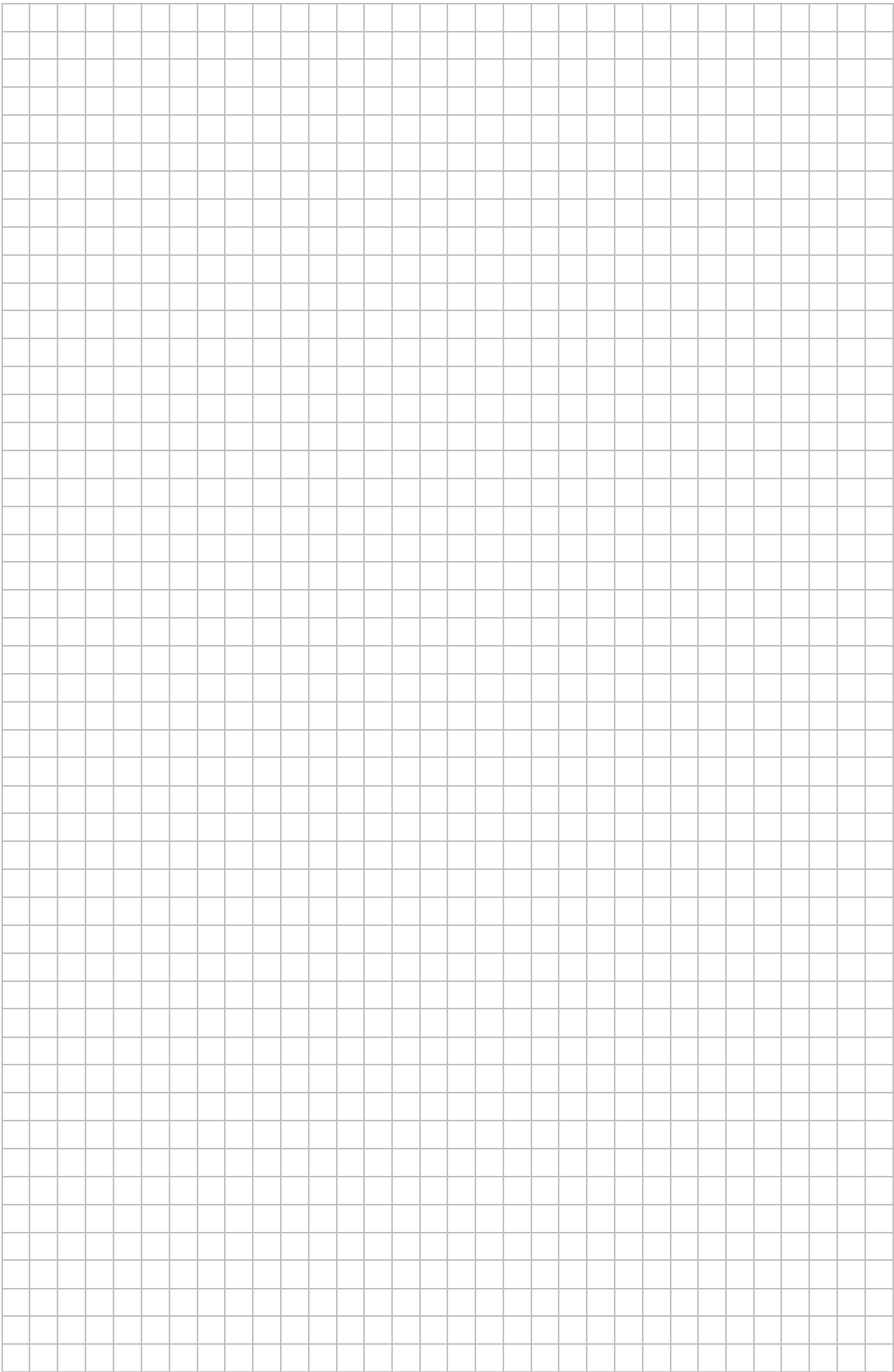
Zadanie 33. (0–4)

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jest równe 94,5.

Długości trzech krawędzi wychodzących z tego samego wierzchołka prostopadłościanu tworzą ciąg geometryczny o ilorazie równym 4.

Oblicz objętość tego prostopadłościanu.

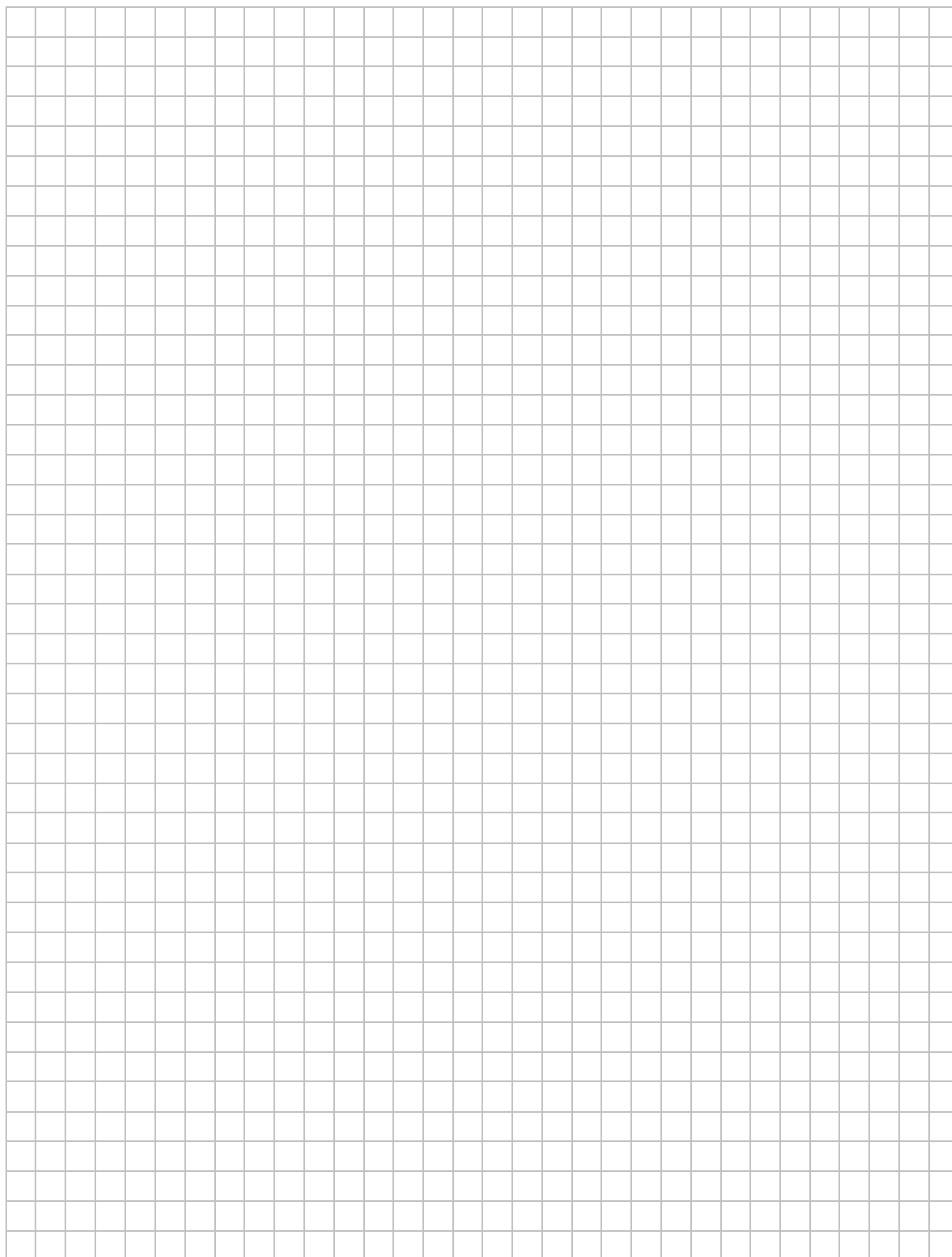


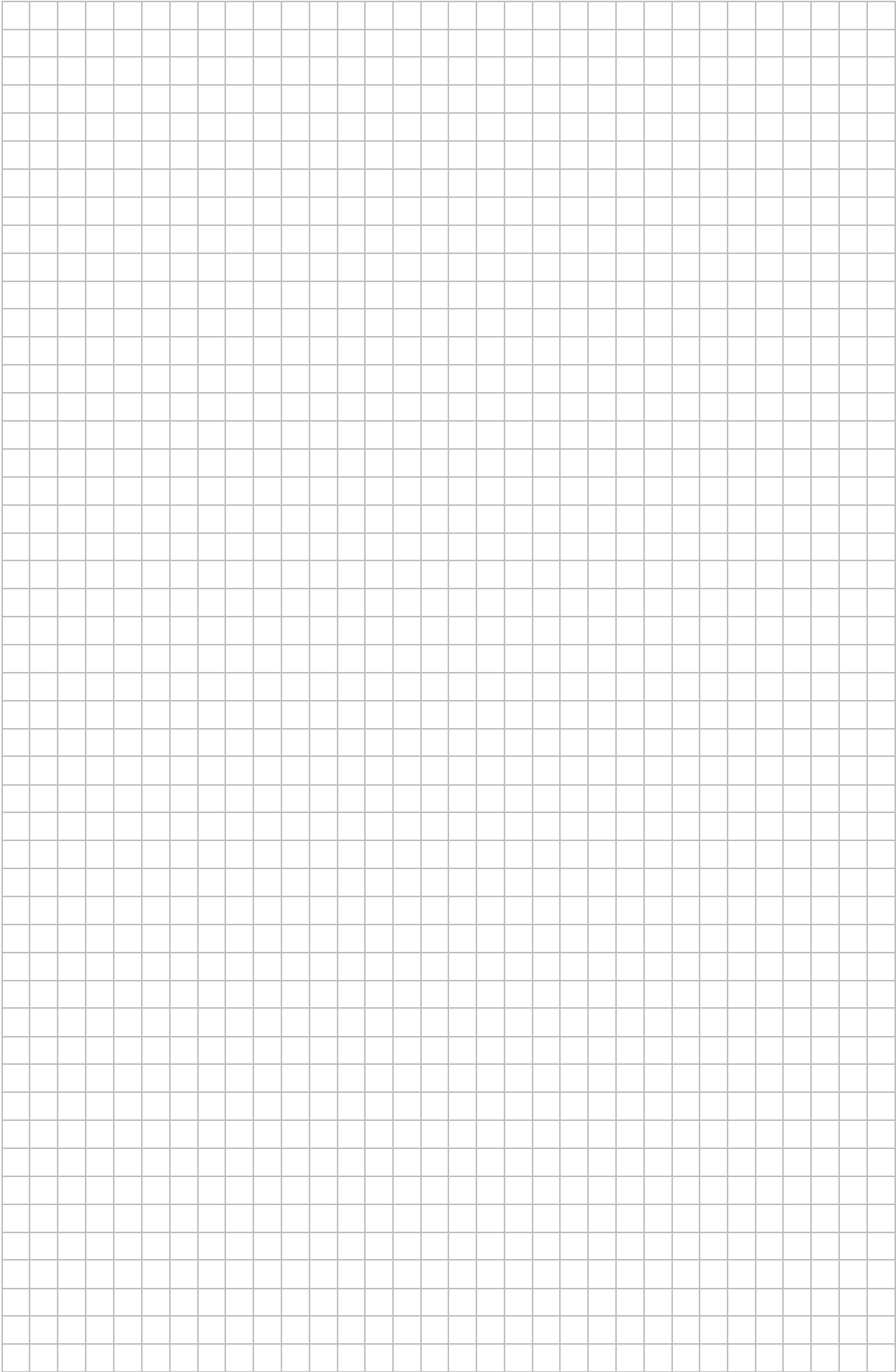


Zadanie 34. (0–5)

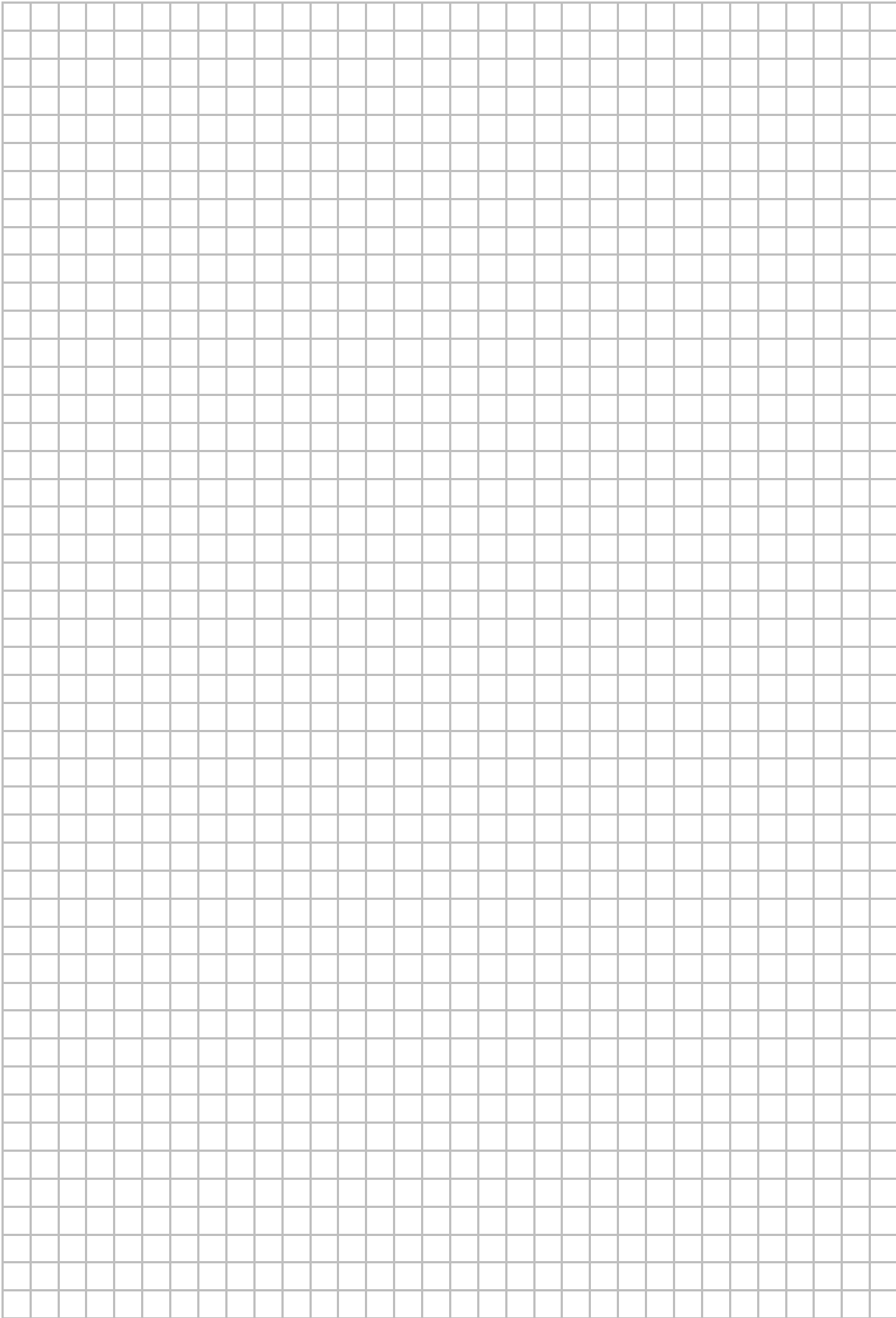
W układzie współrzędnych (x, y) punkty $A = (0, 1)$ oraz $C = (6, 4)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Prosta k o równaniu $y = ax + b$ przechodzi przez wierzchołki B oraz D tego kwadratu.

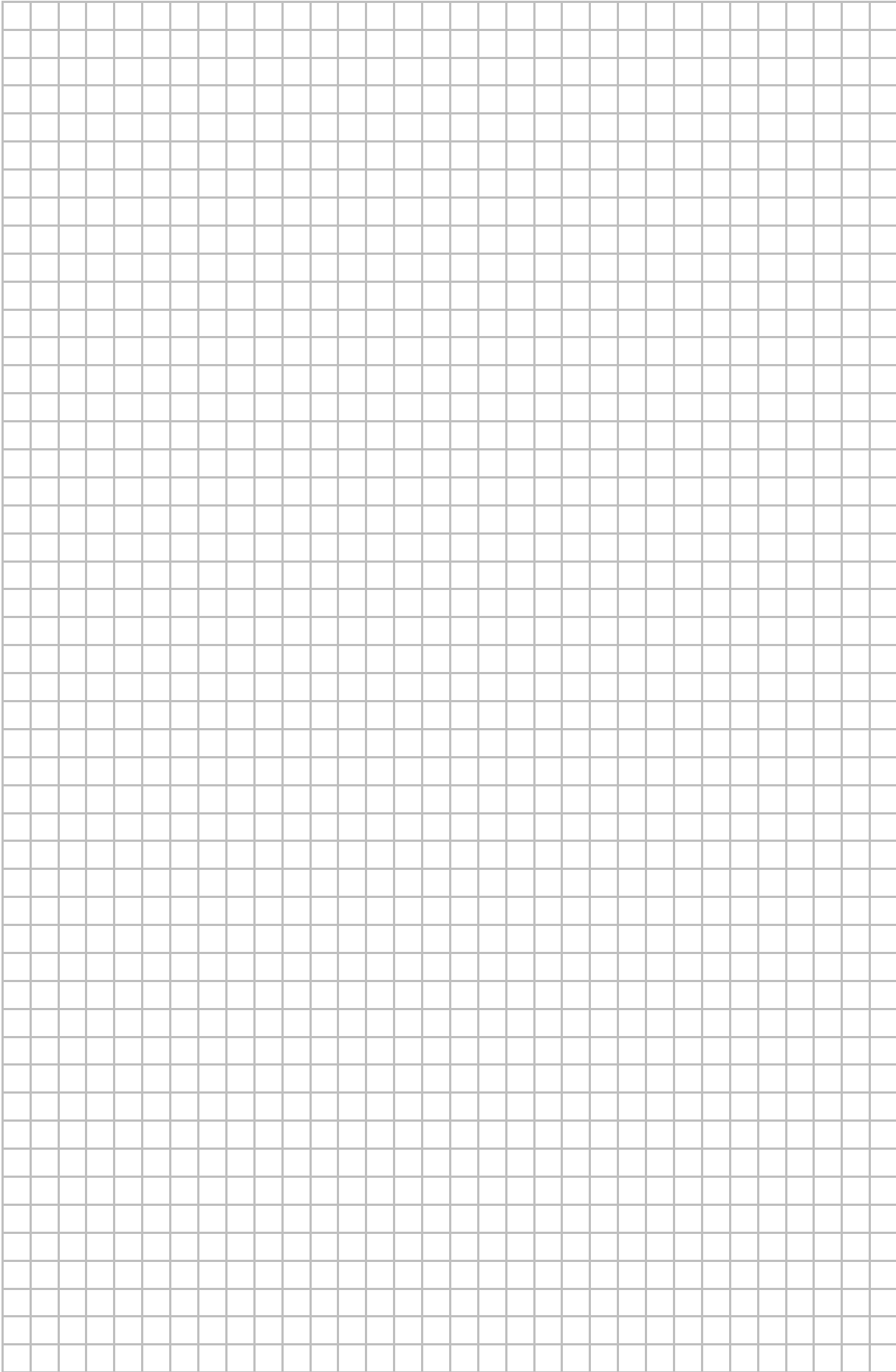
Oblicz pole tego kwadratu oraz wyznacz współczynniki a oraz b w równaniu prostej k .





BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)





MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Formuła 2015

MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Formuła 2015

MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Formuła 2015

<i>Rodzaj dokumentu:</i>	Zasady oceniania rozwiązań zadań
<i>Egzamin:</i>	Egzamin maturalny
<i>Przedmiot:</i>	Matematyka
<i>Poziom:</i>	Poziom podstawowy
<i>Formy arkusza:</i>	EMAP-P0-100, EMAP-P0-200
<i>Termin egzaminu:</i>	4 czerwca 2025 r.

Uwaga:

Gdy wymaganie egzaminacyjne dotyczy treści z III etapu edukacyjnego, dopisano „G”.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania określone w podstawie programowej ¹	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 1.7) oblicza [...] błąd względny przybliżenia.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.4) oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

¹ Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 27 sierpnia 2012 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół (Dz.U. z 2012 r. poz. 977, z późn. zm., tj. Dz.U. z 2014 r. poz. 803, Dz.U. z 2016 r. poz. 895).

Zadanie 3. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 2.1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$. 1.3) posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 4. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.6) wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 5. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.3) rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 6. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.7) korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x + 1)(x - 7) = 0$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 7. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 4.3) odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę [...]).

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 8. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 4.3) odczytuje z wykresu własności funkcji ([...] maksymalne przedziały, w których funkcja [...] ma stały znak [...]).

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 9. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 4.7) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 10. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 4.4) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x + a)$ [...]; 4.6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 11. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 4.11) wyznacza [...] wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 12. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 4.2) oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu [...]; 4.15) posługuje się funkcjami wykładniczymi [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 13. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 5.1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 14. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 5.4) stosuje wzór na n -ty wyraz [...] ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 15. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 6.1) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus [...] kątów o miarach od 0° do 180° ; 6.4) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: [...] $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 16. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 6.4) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 17. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: G10.21) konstruuje [...] okrąg wpisany w trójkąt; G10.3) korzysta z faktu, że styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 18. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: G10.21) konstruuje okrąg opisany na trójkącie [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 19. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 7.1) stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 20. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: G10.11) oblicza wymiary wielokąta powiększonego lub pomniejszonego w danej skali; G10.12) oblicza stosunek pól wielokątów podobnych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 21. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 8.7) znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych ([...] prostej [...]) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 22. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: G11.2) oblicza pole powierzchni [...] ostrosłupa [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 23. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 9.3) rozpoznaje [...] w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą) [...]; 9.6) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 24. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.2) [...] stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 25. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: G9.4) wyznacza średnią arytmetyczną [...] zestawu danych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

ZADANIA OTWARTE

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże zadanie i otrzyma poprawny wynik, lecz w końcowym zapisie przekształca ten wynik i popełnia przy tym błąd, to może uzyskać maksymalną liczbę punktów.
3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 26. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.5) rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.

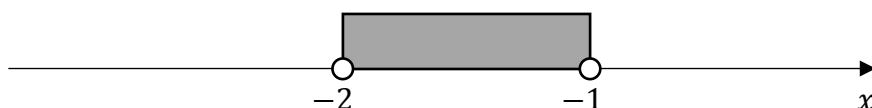
Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i zapisanie zbioru rozwiązań nierówności:

$$x \in (-2, -1)$$

ALBO

- zastosowanie poprawnej metody i przedstawienie zbioru rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziału, np.



1 pkt – obliczenie/zapisanie pierwiastków trójmianu kwadratowego $x^2 + 3x + 2$:

$$x_1 = -2 \text{ oraz } x_2 = -1.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający, obliczając pierwiastki trójmianu $x^2 + 3x + 2$, popełni błędy (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionych błędów zapisze zbiór rozwiązań nierówności, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego, w przypadku gdy błędnie obliczony przez zdającego wyróżnik Δ jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli zdający rozpatruje inny niż podany w zadaniu trójmian kwadratowy, który nie wynika z błędu przekształcenia (np. $x(x + 4)$), i w konsekwencji rozpatruje inną nierówność (np. $x(x + 4) < 0$), to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający poda zbiór rozwiązań w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziału i jednocześnie zapisze niewłaściwy przedział jako zbiór rozwiązań (np. $x \in [-2, -1]$), to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający spełni kryterium za 1 punkt, a następnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $(-1, -2)$, to otrzymuje **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zapisujemy nierówność w postaci $x^2 + 3x + 2 < 0$ i obliczamy miejsca zerowe funkcji $y = x^2 + 3x + 2$.

Obliczamy wyróżnik trójmianu $x^2 + 3x + 2$:

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$$

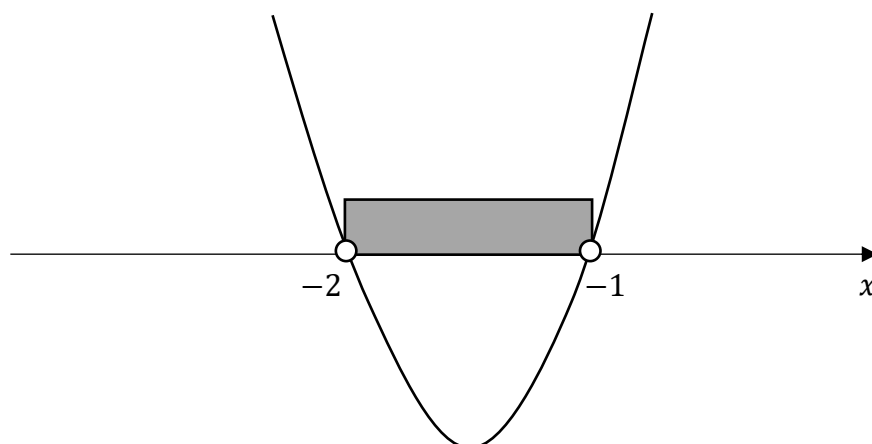
Stąd

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = -2$$

$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = -1$$

Szkicujemy wykres funkcji $y = x^2 + 3x + 2$.

Odczytujemy argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne.



Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(-2, -1)$.

Zadanie 27. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 2.1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.

Zasady oceniania

2 pkt – przekształcenie nierówności $x^2 + y^2 > 4(x + y - 2)$ do postaci

$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 > 0$ **oraz** powołanie się na założenie i stwierdzenie, że $(x - 2)^2$ jest liczbą dodatnią i suma $(x - 2)^2 + (y - 2)^2$ jest liczbą dodatnią,
ALBO

– obliczenie wyróżnika trójmianu kwadratowego $x^2 - 4x + (y^2 - 4y + 8)$

zmiennej x **oraz** uzasadnienie, że jest on niedodatni, **oraz** uzasadnienie prawdziwości nierówności $x^2 + y^2 > 4(x + y - 2)$ dla $y = 2$,

ALBO

– obliczenie wyróżnika trójmianu kwadratowego $y^2 - 4y + (x^2 - 4x + 8)$

zmiennej y **oraz** uzasadnienie, że ten wyróżnik jest ujemny dla każdego $x \neq 2$,

ALBO

– przekształcenie nierówności do postaci $f(x) > g(y)$ **oraz** poprawne uzasadnienie prawdziwości nierówności $f(x) > g(y)$ dla każdego $x \neq 2$ i $y \in \mathbb{R}$ na podstawie analizy zbiorów wartości obu funkcji.

1 pkt – przekształcenie nierówności $x^2 + y^2 > 4(x + y - 2)$ do postaci

$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 > 0$

ALBO

– obliczenie wyróżnika Δ trójmianu kwadratowego $x^2 - 4x + (y^2 - 4y + 8)$

zmiennej x **oraz** przekształcenie tego wyróżnika do postaci $\Delta = -(2y - 4)^2$ bądź $\Delta = -4(y - 2)^2$ lub (zamiast przekształcenia wyróżnika) zbadanie znaku tego wyróżnika (np. obliczenie wyróżnika trójmianu $-4y^2 + 16y - 16$),

ALBO

– obliczenie wyróżnika Δ trójmianu kwadratowego $y^2 - 4y + (x^2 - 4x + 8)$

zmiennej y **oraz** przekształcenie tego wyróżnika do postaci $\Delta = -(2x - 4)^2$ bądź $\Delta = -4(x - 2)^2$ lub (zamiast przekształcenia wyróżnika) zbadanie znaku tego wyróżnika (np. obliczenie wyróżnika trójmianu $-4x^2 + 16x - 16$),

ALBO

– przekształcenie nierówności do postaci $f(x) > g(y)$ **oraz** zbadanie zbioru wartości jednej z funkcji: f albo g .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeśli zdający sprawdza prawdziwość nierówności tylko dla wybranych wartości x i y , to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania**Sposób I**

Przekształcamy nierówność $x^2 + y^2 > 4(x + y - 2)$ w sposób równoważny:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 > 0$$

Zauważamy, że lewą stronę nierówności można zapisać w postaci sumy dwóch kwadratów

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 > 0$$

Z założenia wiadomo, że $x \neq 2$, więc $(x - 2)^2$ jest liczbą dodatnią. Liczba $(y - 2)^2$ jest nieujemna, zatem suma $(x - 2)^2 + (y - 2)^2$ jest liczbą dodatnią.

To należało wykazać.

Sposób II (trójmian kwadratowy zmiennej x z parametrem y)

Przekształcamy równoważnie nierówność $x^2 + y^2 > 4(x + y - 2)$ i otrzymujemy

$$x^2 - 4x + y^2 - 4y + 8 > 0.$$

Wyrażenie $x^2 - 4x + (y^2 - 4y + 8)$ traktujemy jako trójmian kwadratowy zmiennej x .

Obliczamy wyróżnik Δ trójmianu:

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot (y^2 - 4y + 8)$$

$$\Delta = 16 - 4y^2 + 16y - 32$$

$$\Delta = -4y^2 + 16y - 16$$

$$\Delta = -4(y^2 - 4y + 4)$$

$$\Delta = -4(y - 2)^2$$

Gdy $y \neq 2$, to $\Delta < 0$ i funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 - 4x + (y^2 - 4y + 8)$ zmiennej x nie ma miejsc zerowych, a ponieważ współczynnik przy drugiej potęgze zmiennej jest dodatni, więc wykres funkcji f leży powyżej osi odciętych. Zatem funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie.

Gdy $y = 2$, to $\Delta = 0$ i funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe: $x = 2$. Ponieważ współczynnik przy drugiej potęgze zmiennej jest dodatni, więc żaden fragment wykresu funkcji f nie leży poniżej osi odciętych. Zatem funkcja f przyjmuje wartości dodatnie dla każdego $x \neq 2$.

Oznacza to, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 2$ i dla każdej liczby rzeczywistej y nierówność $x^2 - 4x + y^2 - 4y + 8 > 0$ jest prawdziwa.

Zatem nierówność $x^2 + y^2 > 4(x + y - 2)$ również jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 2$ i dla każdej liczby rzeczywistej y . To należało wykazać.

Sposób III (poprzez analizę zbiorów wartości dwóch funkcji)

Przekształcamy równoważnie nierówność $x^2 + y^2 > 4(x + y - 2)$ do postaci $f(x) > g(y)$, następnie analizujemy zbiory wartości funkcji f (określonej dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 2$) oraz funkcji g (określonej dla każdej liczby rzeczywistej y). Takie przekształcenie równoważne nierówności można wykonać na różne sposoby, np. tak:

$$x^2 - 4x + 4 > -y^2 + 4y - 4 \quad \text{oraz} \quad x \neq 2 \text{ i } y \in \mathbb{R}$$

Otrzymaną postać nierówności przekształcamy do postaci

$$(x - 2)^2 > -(y - 2)^2 \quad \text{oraz} \quad x \neq 2 \text{ i } y \in \mathbb{R}$$

Rozważamy funkcje f i g takie, że

$$f(x) = (x - 2)^2 \quad \text{dla} \quad x \neq 2 \quad \text{oraz} \quad g(y) = -(y - 2)^2 \quad \text{dla} \quad y \in \mathbb{R}$$

Zbiorami wartości tych funkcji są przedziały: $ZW_f = (0, +\infty)$ oraz $ZW_g = (-\infty, 0)$.

Zauważmy, że każda wartość funkcji f jest większa od każdej wartości funkcji g .

To oznacza, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 2$ oraz dla każdej liczby rzeczywistej y zachodzi nierówność $f(x) > g(y)$.

Zatem nierówność $x^2 + y^2 > 4(x + y - 2)$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 2$ i dla każdej liczby rzeczywistej y . To należało wykazać.

Zadanie 28. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: G7.7) za pomocą równań lub układów równań opisuje i rozwiązuje zadania osadzone w kontekście praktycznym.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 850.

1 pkt – zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć liczby drzew posadzonych w pierwszym i drugim sadzie, np.

$$x + y = 1410 \quad \text{oraz} \quad 0,85y = 0,70 \cdot 0,80x,$$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą pozwalającego obliczyć liczbę drzew posadzonych w pierwszym sadzie, np.

$$0,85 \cdot (1410 - x) = 0,70 \cdot 0,80x,$$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą pozwalającego obliczyć liczbę drzew posadzonych w drugim sadzie, np.

$$0,85y = 0,70 \cdot 0,80 \cdot (1410 - y).$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający sprawdza warunki zadania dla wybranych par liczb x oraz y i wskaże właściwą odpowiedź, ale nie uzasadni, że jest to jedyne rozwiązanie zadania, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający w rozwiązaniu używa wartości przybliżonych i otrzymuje wynik różny od 850, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Oznaczmy:

x – liczba drzew posadzonych w pierwszym sadzie,

y – liczba drzew posadzonych w drugim sadzie.

Po uwzględnieniu warunków zadania otrzymujemy:

$$x + y = 1410 \quad \text{oraz} \quad 0,85y = 0,70 \cdot 0,80x$$

Z pierwszego z tych równań wyznaczamy $y = 1410 - x$ i podstawiamy w miejsce y do drugiego z równań, dzięki czemu otrzymujemy

$$0,85 \cdot (1410 - x) = 0,70 \cdot 0,80x$$

$$1198,5 - 0,85x = 0,56x$$

$$1,41x = 1198,5$$

$$x = 850$$

W maju 2024 roku w pierwszym sadzie posadzono 850 drzew.

Zadanie 29. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 5.3) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $a_1 = 9$.

1 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą a_1 , np. $\frac{a_1 + 17a_1}{2} \cdot 25 = 2025$

ALBO

– zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć a_1 , np.:

$$\frac{a_1 + a_{25}}{2} \cdot 25 = 2025 \quad \text{oraz} \quad a_{25} = 17a_1,$$

$$\frac{2a_1 + 24r}{2} \cdot 25 = 2025 \quad \text{oraz} \quad 17a_1 = a_1 + 24r,$$

$$\frac{2a_1 + 24r}{2} \cdot 25 = 2025 \quad \text{oraz} \quad a_{25} = 17a_1 \quad \text{oraz} \quad a_{25} = a_1 + 24r.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający myli ciąg arytmetyczny z geometrycznym, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.
2. Jeżeli zdający błędnie interpretuje liczbę 2025 jako dwudziesty piąty wyraz ciągu, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający zapisze tylko $a_1 = 9$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający zapisze wszystkie wyrazy ciągu (a_n) , to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Oznaczmy pierwszy wyraz rozważanego ciągu przez a_1 , natomiast ostatni wyraz – przez a_{25} . Ostatni wyraz rozważanego ciągu jest 17 razy większy od pierwszego wyrazu tego ciągu, więc

$$a_{25} = 17a_1$$

Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i otrzymujemy:

$$\frac{a_1 + a_{25}}{2} \cdot 25 = 2025$$

$$\frac{a_1 + 17a_1}{2} \cdot 25 = 2025$$

$$225a_1 = 2025$$

$$a_1 = 9$$

Sposób II

Oznaczmy:

a_1 – pierwszy wyraz rozważanego ciągu,

r – różnica rozważanego ciągu,

a_{25} – ostatni wyraz rozważanego ciągu.

Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i otrzymujemy:

$$\frac{2a_1 + 24r}{2} \cdot 25 = 2025$$

stąd

$$a_1 + 12r = 81$$

Ostatni wyraz rozważanego ciągu jest 17 razy większy od pierwszego wyrazu tego ciągu, więc

stąd

$$a_{25} = 17a_1$$

$$a_1 + 24r = 17a_1$$

$$12r = 8a_1$$

Z uzyskanych równań obliczamy a_1 :

$$a_1 + 12r = 81$$

$$a_1 + 8a_1 = 81$$

$$9a_1 = 81$$

$$a_1 = 9$$

Zadanie 30. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: G9.4) wyznacza średnią arytmetyczną i medianę zestawu danych.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawne wyniki: $\bar{x} = 3$ oraz $Me = 3,5$.

1 pkt – obliczenie średniej arytmetycznej liczby otrzymanych punktów: $\bar{x} = 3$

ALBO

– obliczenie mediany liczby otrzymanych punktów: $Me = 3,5$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy średnią arytmetyczną liczby otrzymanych punktów:

$$\bar{x} = \frac{4 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 11 \cdot 4 + 5 \cdot 5}{32} = \frac{96}{32} = 3$$

Medianą ciągu 32 liczb uporządkowanych niemalejąco jest średnia arytmetyczna dwóch środkowych wyrazów tego ciągu (tzn. średnia arytmetyczna wyrazów szesnastego i siedemnastego). Zatem

$$Me = \frac{3 + 4}{2} = 3,5$$

Zadanie 31. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.3) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $P(A) = \frac{17}{24}$.

1 pkt – wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych *LUB* obliczenie/podanie liczby tych zdarzeń: $|\Omega| = 6 \cdot 4$, *LUB* sporządzenie tabeli o 24 polach odpowiadających zdarzeniom elementarnym, *LUB* sporządzenie pełnego drzewa stochastycznego
ALBO

– wypisanie (lub zaznaczenie w tabeli) wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i niewypisanie żadnego niewłaściwego,
ALBO

– podanie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A :
 $|A| = 17$, o ile nie zostały zliczone błędne pary,
ALBO

– sporządzenie fragmentu drzewa stochastycznego, który zawiera wszystkie gałęzie sprzyjające zdarzeniu A , **oraz** zapisanie prawdopodobieństwa na co najmniej jednym odcinku każdego z etapów doświadczenia,
ALBO

– podanie prawdopodobieństwa jednoelementowego zdarzenia (elementarnego): $\frac{1}{24}$,
ALBO

– zapisanie tylko $P(A) = \frac{17}{24}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający zapisuje tylko liczby 17 lub 24 i z rozwiązania nie wynika znaczenie tych liczb, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązaniaSposób I

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie uporządkowane pary liczb (x, y) , gdzie $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ oraz $y \in \{-2, -1, 0, 1\}$.

Liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych obliczamy z wykorzystaniem reguły mnożenia.

Moc zbioru Ω jest równa $6 \cdot 4 = 24$.

Zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:

$(-3, -2), (-3, -1), (-3, 0), (-2, -2), (-2, -1), (-2, 0), (-1, -2), (-1, -1), (-1, 0),$
 $(0, -2), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1),$

więc moc zbioru A jest równa 17.

Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe $\frac{17}{24}$.

Sposób II

W tabeli literą $\mathcal{A}$ zaznaczamy zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A .

$X \backslash Y$	-2	-1	0	1
-3	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	
-2	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	
-1	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	
0	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$
1			$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$
2			$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$

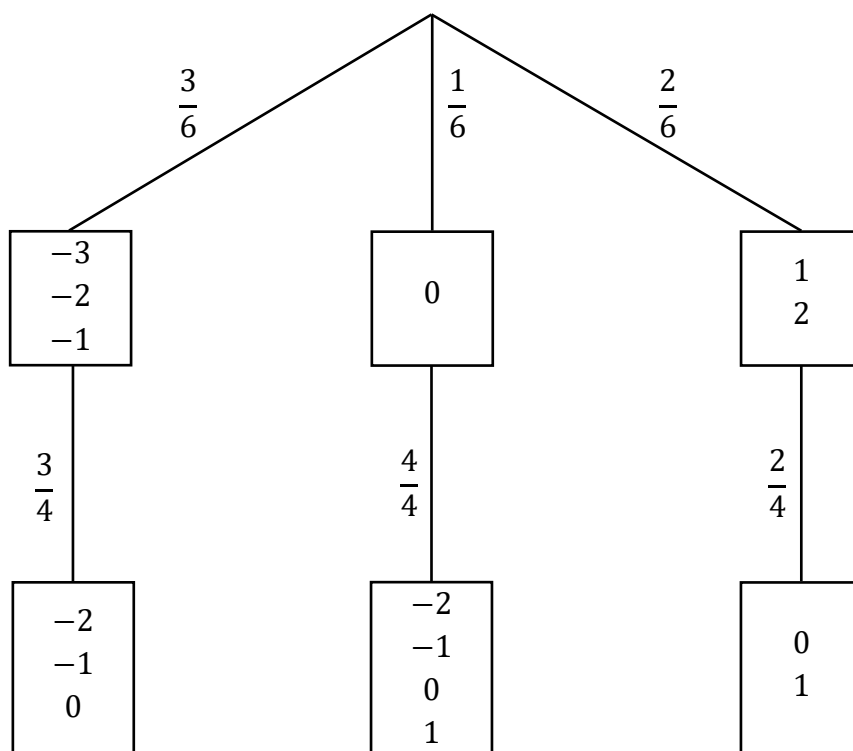
Moc zbioru Ω jest równa 24.

Zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A jest 17.

Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe $\frac{17}{24}$.

Sposób III

Rysujemy fragment drzewa stochastycznego rozważanego doświadczenia, z uwzględnieniem wszystkich istotnych gałęzi.



Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe:

$$P(A) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{4} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{4} = \frac{17}{24}$$

Zadanie 32. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 4.9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawne wyniki: $f(x) = 3(x + 1)^2 - 12$ oraz $ZW_f = \langle -12, +\infty \rangle$.

3 pkt – zapisanie wzoru funkcji f w postaci kanonicznej: $f(x) = 3(x + 1)^2 - 12$

ALBO

– obliczenie współczynnika q : $q = -12$ **oraz** zapisanie zbioru wartości funkcji f :

$ZW_f = \langle -12, +\infty \rangle$.

2 pkt – obliczenie współczynnika a : $a = 3$

ALBO

– obliczenie współczynnika q : $q = -12$.

1 pkt – zapisanie wzoru funkcji f w postaci $f(x) = a(x + 1)^2 + q$

ALBO

– zapisanie wzoru funkcji f w postaci $f(x) = a(x - 1)(x + 3)$,

ALBO

– zapisanie układu trzech niezależnych równań z trzema niewiadomymi a , b , c prowadzącego do obliczenia wartości współczynników a , b oraz c , np.

$$4a + 2b + c = 15 \text{ oraz } \frac{-b}{2a} = -1 \text{ oraz } a + b + c = 0.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Wykres funkcji f jest symetryczny względem prostej o równaniu $x = -1$, zatem drugie miejsce zerowe funkcji f jest równe $x_2 = -3$.

Korzystamy ze wzoru na postać iloczynową funkcji kwadratowej i zapisujemy:

$$f(x) = a(x - 1)(x + 3), \text{ gdzie } a \neq 0$$

Punkt $(2, 15)$ leży na wykresie funkcji f , zatem dla argumentu 2 funkcja f przyjmuje wartość 15. Stąd otrzymujemy:

$$f(2) = 15$$

$$a(2 - 1)(2 + 3) = 15$$

$$5a = 15$$

$$a = 3$$

Zapisujemy wzór funkcji f w postaci iloczynowej:

$$f(x) = 3(x - 1)(x + 3)$$

Przekształcamy wzór funkcji f do postaci kanonicznej:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x - 1)(x + 3) = 3(x^2 + 2x - 3) = 3(x^2 + 2x + 1 - 4) = \\ &= 3[(x + 1)^2 - 4] = 3(x + 1)^2 - 12 \end{aligned}$$

Wyrażenie $(x + 1)^2$ jest liczbą nieujemną dla każdej liczby rzeczywistej x . Stąd wyrażenie $3(x + 1)^2 - 12$ przyjmuje wartości nie mniejsze niż (-12) , więc zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-12, +\infty)$.

Uwaga.

Postać kanoniczną funkcji f możemy też uzyskać, obliczając współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji. Ponieważ osią symetrii tej paraboli jest prosta o równaniu $x = -1$, więc pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli jest równa $p = -1$. Druga współrzędna wierzchołka paraboli jest równa

$$q = f(-1) = 3(-1 - 1)(-1 + 3) = -12$$

Stąd otrzymujemy postać kanoniczną funkcji f : $f(x) = 3(x + 1)^2 - 12$.

Sposób II

Ponieważ osią symetrii wykresu funkcji f jest prosta o równaniu $x = -1$, więc pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli, która jest wykresem tej funkcji, jest $p = -1$.

Korzystamy ze wzoru na postać kanoniczną funkcji kwadratowej i zapisujemy:

$$f(x) = a(x + 1)^2 + q, \text{ gdzie } a \neq 0$$

Miejszem zerowym funkcji f jest liczba 1, zatem punkt $(1, 0)$ leży na wykresie tej funkcji. Stąd i z tego, że wykres funkcji f przechodzi przez punkt $(2, 15)$, otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(2) = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(1 + 1)^2 + q = 0 \\ a(2 + 1)^2 + q = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + q = 0 \\ 9a + q = 15 \end{cases}$$

Odejmujemy równania stronami i otrzymujemy:

$$-5a = -15$$

$$a = 3$$

Stąd:

$$q = -4a = -12$$

Zatem $f(x) = 3(x + 1)^2 - 12$.

Ponieważ $q = -12$ oraz współczynnik a jest liczbą dodatnią, więc zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -12, +\infty \rangle$.

Sposób III

Korzystamy ze wzoru na postać ogólną funkcji kwadratowej i zapisujemy:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ gdzie } a \neq 0$$

Ponieważ osią symetrii wykresu funkcji f jest prosta o równaniu $x = -1$, więc pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli, która jest wykresem tej funkcji, jest $p = -1$.

Stąd:

$$\frac{-b}{2a} = -1$$

$$b = 2a$$

Miejszem zerowym funkcji f jest liczba 1, zatem:

$$f(1) = 0$$

$$a + b + c = 0$$

Podstawiamy do równania w miejsce b wyrażenie $2a$ i otrzymujemy:

$$a + 2a + c = 0$$

$$c = -3a$$

Punkt $(2, 15)$ leży na wykresie funkcji f , zatem dla argumentu 2 funkcja f przyjmuje wartość 15. Stąd otrzymujemy:

$$f(2) = 15$$

$$4a + 2b + c = 15$$

Podstawiamy do równania w miejsce b wyrażenie $2a$ oraz w miejsce c wyrażenie $(-3a)$ i otrzymujemy:

$$4a + 2 \cdot (2a) - 3a = 15$$

$$5a = 15$$

$$a = 3$$

Zatem:

$$b = 2a = 6 \text{ oraz } c = -3a = -9$$

Zapisujemy wzór funkcji f w postaci ogólnej:

$$f(x) = 3x^2 + 6x - 9$$

Przekształcamy wzór funkcji f do postaci kanonicznej:

$$f(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3) = 3(x^2 + 2x + 1 - 4) =$$

$$= 3[(x + 1)^2 - 4] = 3(x + 1)^2 - 12$$

Wyrażenie $(x + 1)^2$ jest liczbą nieujemną dla każdej liczby rzeczywistej x . Stąd wyrażenie $3(x + 1)^2 - 12$ przyjmuje wartości nie mniejsze niż (-12) , więc zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-12, +\infty)$.

Zadanie 33. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: G11.2) oblicza pole powierzchni i objętość graniastopłu prostego [...].

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $V = 27$.

3 pkt – obliczenie długości (lub kwadratu długości) jednej z krawędzi prostopadłościanu, np.

$$a = \frac{3}{4} \text{ (lub } a^2 = \frac{9}{16} \text{)}.$$

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą a , np.

$$94,5 = 2 \cdot (a \cdot 4a + a \cdot 16a + 4a \cdot 16a)$$

ALBO

– zapisanie objętości prostopadłościanu w zależności od jednej zmiennej, np. $V = 64a^3$.

1 pkt – zapisanie długości krawędzi prostopadłościanu wychodzących z jednego wierzchołka w zależności od jednej zmiennej, np. a , $4a$, $16a$.

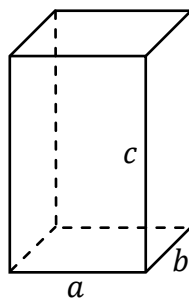
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

- Jeżeli zdający myli ciąg geometryczny z arytmetycznym (przyjmuje, że długości krawędzi prostopadłościanu są równe a , $a + 4$, $a + 8$), to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za – konsekwentnie do popełnionego błędu – obliczenie długości jednej z krawędzi prostopadłościanu i za obliczenie objętości prostopadłościanu).
- Jeżeli zdający rozwiązuje równanie $94,5 = a \cdot 4a + a \cdot 16a + 4a \cdot 16a$ (tzn. pomija czynnik 2 we wzorze na pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu), to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za zapisanie długości krawędzi prostopadłościanu wychodzących z jednego wierzchołka w zależności od jednej zmiennej oraz za – konsekwentnie do popełnionego błędu – obliczenie objętości prostopadłościanu).
- Jeżeli zdający odgadnie długości krawędzi prostopadłościanu wychodzących z tego samego wierzchołka: $\frac{3}{4}$, 3, 12, oraz sprawdzi rachunkiem, że spełniają one warunki zadania, a następnie obliczy objętość ostrosłupa $V = 27$, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku, przy czym niech $a < b < c$.



Z warunków zadania otrzymujemy: $b = 4a$, $c = 16a$. Stąd i z tego, że pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jest równe 94,5, otrzymujemy równanie:

$$2 \cdot (a \cdot 4a + a \cdot 16a + 4a \cdot 16a) = 94,5$$

$$2 \cdot (4a^2 + 16a^2 + 64a^2) = 94,5$$

$$168a^2 = 94,5$$

$$a^2 = 0,5625$$

$$a = 0,75 = \frac{3}{4}$$

Obliczamy objętość prostopadłościanu:

$$V = abc = a \cdot 4a \cdot 16a = 64a^3 = 64 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 64 \cdot \frac{27}{64} = 27$$

Zadanie 34. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 8.1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej); 8.3) wyznacza równanie prostej, która jest [...] prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt; 8.6) oblicza odległość dwóch punktów.

Zasady oceniania**Część I** (Obliczenie pola kwadratu $ABCD$)

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i obliczenie pola kwadratu $ABCD$: $P = \frac{45}{2}$.

1 pkt – obliczenie długości przekątnej AC (lub kwadratu tej długości): $|AC| = \sqrt{45}$
(lub $|AC|^2 = 45$).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Część II (Wyznaczenie współczynników a oraz b w równaniu prostej k)

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i wyznaczenie współczynników a oraz b
w równaniu prostej k : $a = -2$, $b = \frac{17}{2}$.

2 pkt – wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej k : $a = -2$,
ALBO

– zapisanie współrzędnych środka S odcinka AC : $S = \left(3, \frac{5}{2}\right)$ oraz wyznaczenie
współczynnika kierunkowego prostej AC : $a_{AC} = \frac{1}{2}$,

ALBO

– zapisanie równania prostej k w postaci ogólnej: $4x + 2y - 17 = 0$,
ALBO

– zapisanie równości: $6(x - 3) + 3\left(y - \frac{5}{2}\right) = 0$ (dla sposobu II),
ALBO

– zapisanie równości: $x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 8y + 16$
(dla sposobu III).

1 pkt – zapisanie współrzędnych środka S odcinka AC : $S = \left(3, \frac{5}{2}\right)$,
ALBO

– wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej AC : $a_{AC} = \frac{1}{2}$,
ALBO

– zapisanie równania prostej AC w postaci ogólnej: $x - 2y + 2 = 0$,
ALBO

– obliczenie współrzędnych wektora $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AC} = [6, 3]$ (dla sposobu II),
ALBO

– zapisanie równości: $\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(x - 6)^2 + (y - 4)^2}$
(dla sposobu III).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:

- a) zastosowanie niepoprawnego wzoru na współczynnik kierunkowy prostej,
- b) zastosowanie niepoprawnego związku między współczynnikami kierunkowymi prostych prostopadłych,

i rozwiązanie zostanie doprowadzone konsekwentnie do końca, to zdający może otrzymać
1 punkt za tę część rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązaniaSposób I

Przekątna AC ma długość:

$$|AC| = \sqrt{(6-0)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45}$$

Zatem pole kwadratu $ABCD$ jest równe:

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{45})^2 = \frac{45}{2}$$

Środek odcinka AC ma współrzędne $S = \left(\frac{0+6}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(3, \frac{5}{2}\right)$

Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej AC :

$$a_{AC} = \frac{4-1}{6-0} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Prosta k jest prostopadła do prostej AC , zatem współczynnik kierunkowy prostej k jest równy (-2) . Ponadto punkt $S = \left(3, \frac{5}{2}\right)$ leży na prostej k . Stąd otrzymujemy równanie kierunkowe prostej k :

$$y = -2(x-3) + \frac{5}{2}$$

$$y = -2x + \frac{17}{2}$$

Zatem współczynniki a oraz b w równaniu prostej k są równe: $a = -2$, $b = \frac{17}{2}$.

Sposób II

Przekątna AC ma długość:

$$|AC| = \sqrt{(6-0)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45}$$

Zatem pole kwadratu $ABCD$ jest równe:

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{45})^2 = \frac{45}{2}$$

Środek odcinka AC ma współrzędne $S = \left(\frac{0+6}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(3, \frac{5}{2}\right)$

Obliczamy współrzędne wektora $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AC} = [6-0, 4-1] = [6, 3]$$

Prosta k jest prostopadła do wektora $\overrightarrow{AC}$ i przechodzi przez punkt $S = \left(3, \frac{5}{2}\right)$, więc jej równanie ma postać:

$$6(x - 3) + 3\left(y - \frac{5}{2}\right) = 0$$

$$6x - 18 + 3y - \frac{15}{2} = 0$$

$$3y = -6x + \frac{51}{2}$$

$$y = -2x + \frac{17}{2}$$

Zatem współczynniki a oraz b w równaniu prostej k są równe: $a = -2$, $b = \frac{17}{2}$.

Sposób III

Przekątna AC ma długość:

$$|AC| = \sqrt{(6 - 0)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45}$$

Zatem pole kwadratu $ABCD$ jest równe:

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{45})^2 = \frac{45}{2}$$

Prosta k jest symetralną odcinka AC , więc punkt o współrzędnych $P = (x, y)$ leży na prostej k tylko wtedy, gdy $|AP| = |BP|$. Stąd i ze wzoru na odległość między dwoma punktami otrzymujemy równanie:

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(x - 6)^2 + (y - 4)^2}$$

$$(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = (x - 6)^2 + (y - 4)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 8y + 16$$

$$6y = -12x + 51$$

$$y = -2x + \frac{17}{2}$$

Zatem współczynniki a oraz b w równaniu prostej k są równe: $a = -2$, $b = \frac{17}{2}$.

Ocena prac osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Obowiązują **Zasady oceniania** stosowane przy sprawdzaniu prac zdających bez stwierdzonej dyskalkulii z dodatkowym uwzględnieniem:

- a) **ogólnych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią (punkty 1.–12.);
- b) dodatkowych **szczegółowych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią – egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, termin dodatkowy 2025.

I. **Ogólne zasady oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

1. Nie należy traktować jako błędy merytoryczne pomyłek, wynikających z:
 - błędnego przepisania
 - przestawienia cyfr
 - zapisania innej cyfry, ale o podobnym wyglądzie
 - przestawienia położenia przecinka
 - przestawienia położenia znaku liczby.
2. W przypadku błędów, wynikających ze zmiany znaku liczby, należy w każdym zadaniu oddzielnie przeanalizować, czy zdający opanował inne umiejętności, poza umiejętnościami rachunkowymi, oceniane w zadaniu. W przypadku opanowania badanych umiejętności zdający powinien otrzymać przynajmniej 1 punkt.
3. We wszystkich zadaniach otwartych, w których wskazano poprawną metodę rozwiązania, części lub całości zadania, zdającemu należy przyznać przynajmniej 1 punkt, zgodnie z kryteriami do poszczególnych zadań.
4. Jeśli zdający przedstawia nieprecyzyjne zapisy, na przykład pomija nawiasy lub zapisuje nawiasy w niewłaściwych miejscach, ale przeprowadza poprawne rozumowanie lub stosuje właściwą strategię, to może otrzymać przynajmniej 1 punkt za rozwiązanie zadania.
5. W przypadku zadania wymagającego wyznaczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi poprawną metodę wyznaczania pierwiastków trójmianu kwadratowego, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
6. W przypadku zadania wymagającego rozwiązania nierówności kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli stosuje poprawny algorytm rozwiązywania nierówności kwadratowej, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
7. W przypadku zadania wymagającego stosowania własności funkcji kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt za wykorzystanie konkretnych własności funkcji kwadratowej, istotnych przy poszukiwaniu rozwiązania.
8. W przypadku zadania wymagającego zastosowania własności ciągów arytmetycznych lub geometrycznych zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi wykorzystanie takiej własności ciągu, która umożliwia znalezienie rozwiązania zadania.

9. W przypadku zadania wymagającego analizowania figur geometrycznych na płaszczyźnie kartezjańskiej zdający może otrzymać punkty, jeżeli przy poszukiwaniu rozwiązania przedstawi poprawne rozumowanie, wykorzystujące własności figur geometrycznych lub zapisze zależności, pozwalające rozwiązać zadanie.
10. W przypadku zadania z rachunku prawdopodobieństwa zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeśli przy wyznaczaniu liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających rozważanemu zdarzeniu przyjmuje określoną regularność lub podaje prawidłową metodę wyznaczenia tej liczby zdarzeń elementarnych.
11. W przypadku zadania z geometrii zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeżeli podaje poprawną metodę wyznaczenia długości odcinka potrzebnej do znalezienia rozwiązania.
12. W przypadku zadania wymagającego przeprowadzenia dowodu (z zakresu algebry lub geometrii), jeśli w przedstawionym rozwiązaniu zdający powoła się na własność, która wyznacza istotny postępowanie, prowadzący do przeprowadzenia dowodu, to może otrzymać 1 punkt.

II. Dodatkowe **szczegółowe zasady oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Zadanie 26.

- 1 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego $x^2 + 3x + 2$, tzn. zastosowanie wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego i obliczenie tych pierwiastków
ALBO
- konsekwentne (do otrzymanego w wyniku popełnienia błędów o charakterze dyskalkulicznym ujemnego wyróżnika) narysowanie paraboli,
ALBO
 - poprawne rozwiązanie nierówności $x(x + 4) < 0$ (tzn. stosuje się punkt 6. ogólnych zasad oceniania),
ALBO
 - konsekwentne (do wyznaczonych przez siebie pierwiastków oraz rozpatrywanego trójmianu i nierówności) wyznaczenie zbioru rozwiązań nierówności.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający, rozwiązując nierówność, pomyli porządek liczb na osi liczbowej i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $(-1, -2)$, to może otrzymać **2 punkty** za całe rozwiązanie.
2. Nie stosuje się uwag 2. i 3. z zasad oceniania arkusza standardowego.
3. Akceptowane jest zapisanie pierwiastków trójmianu w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi.

Zadanie 27.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 28.

1 pkt – zapisanie równania $85\% \cdot y = 70\% \cdot 80\% \cdot x$.

Zadanie 29.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 30.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 31.

1 pkt – zapisanie jedynie liczby 24 (należy traktować to jako wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych).

Uwagi:

1. W ocenie rozwiązania tego zadania (dla zdających z dyskalkulią) nie stosuje się uwagi ze standardowych zasad oceniania.
2. Jeżeli zdający poprawnie wypisze/zaznaczy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A , lecz popełni błąd w ich zliczeniu (np. $|A| = 16$) i konsekwentnie zapisze wynik (np. $\frac{16}{24}$), to otrzymuje **2 punkty**

Zadanie 32.

1 pkt – zapisanie wzoru funkcji f w postaci $f(x) = a(x - p)^2 + q$ **oraz** zapisanie $p = -1$
ALBO
 – wyznaczenie drugiego miejsca zerowego funkcji f : $x_2 = -3$.

Zadanie 33.

3 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą a , np.
 $94,5 = 2 \cdot (a \cdot 4a + a \cdot 16a + 4a \cdot 16a)$ **oraz**
 zapisanie objętości prostopadłościanu w postaci $V = 64a^3$.

Zadanie 34.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

PESEL

Miejsce na naklejkę.

Sprawdź, czy kod na naklejce to
M-100.

Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Symbol arkusza

MMAP-P0-**100**-2508

DATA: **19 sierpnia 2025 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

☐ Uprawnienie zdającego do
dostosowania w związku z dyskalkulią.

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**,
tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym**
poziomie.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi.
Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu
takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.





Instrukcja dla zdającego

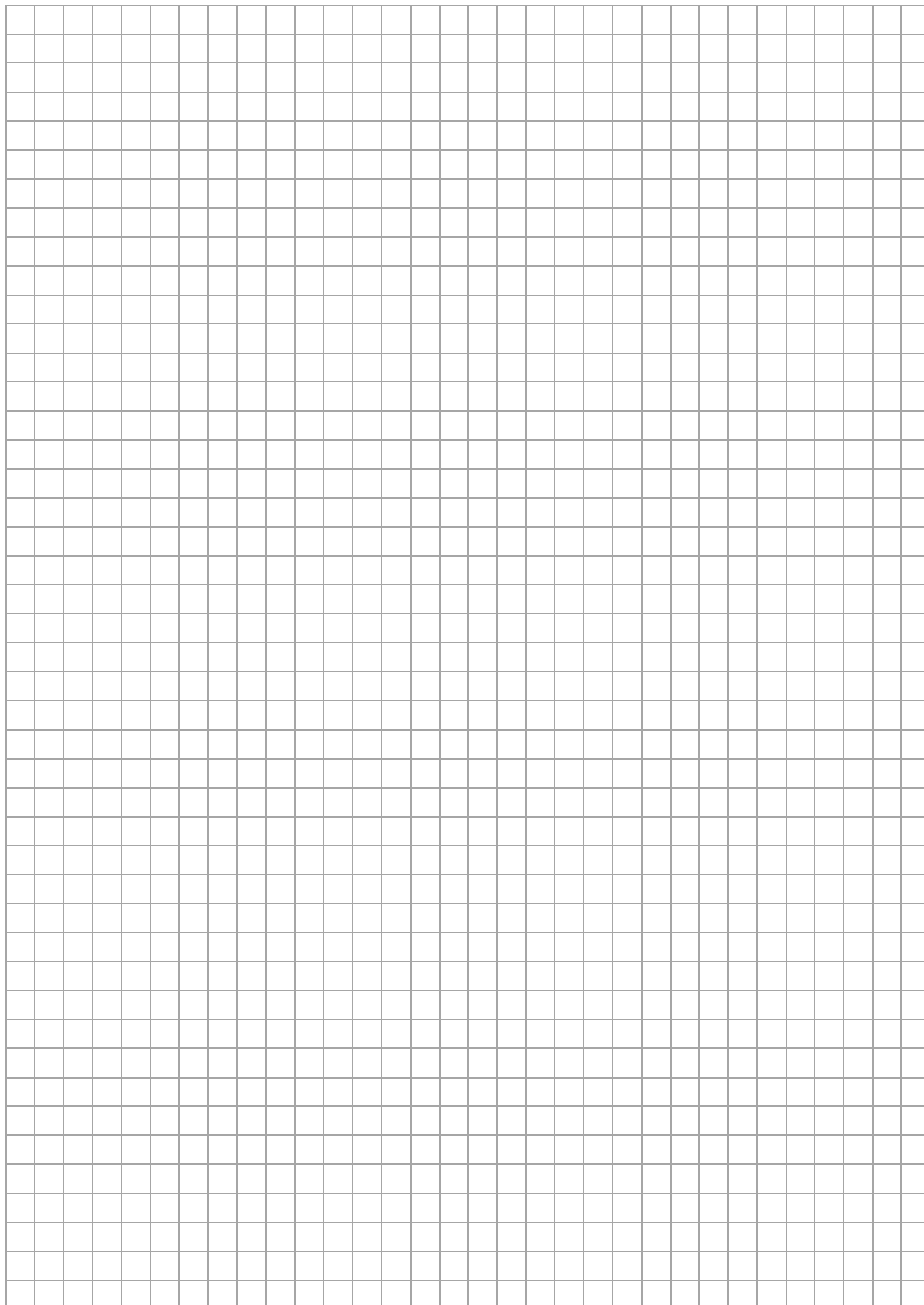
1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 31 stron (zadania 1–31).
Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Symbol  zamieszczony w nagłówku zadania oznacza, że rozwiązanie zadania zamkniętego musisz przenieść na kartę odpowiedzi. Ocenie podlegają wyłącznie odpowiedzi zaznaczone na karcie odpowiedzi.
4. Odpowiedzi do zadań zamkniętych zaznacz na karcie odpowiedzi w części przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj  pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem  i zaznacz właściwe.
5. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
6. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
7. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
8. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
9. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
10. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla i linijki oraz z kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



**Zadania egzaminacyjne są wydrukowane
na następnych stronach.**

Zadanie 5. (0–2)

Wykaż, że liczba $8^{50} - 2^{145}$ jest podzielna przez 31.



Zadanie 6. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y wartość wyrażenia $(3x + y)^2 - (3x - y)^2$ jest równa wartości wyrażenia

A. $12xy$

B. $(-12xy)$

C. $2y^2$

D. $4y^2$

Brudnopis

Zadanie 7. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności

$$3 - x \geq \frac{5x - 1}{2}$$

jest przedział

A. $(-\infty, 1]$

B. $(-\infty, \frac{7}{6}]$

C. $[1, +\infty)$

D. $[\frac{7}{6}, +\infty)$

Brudnopis

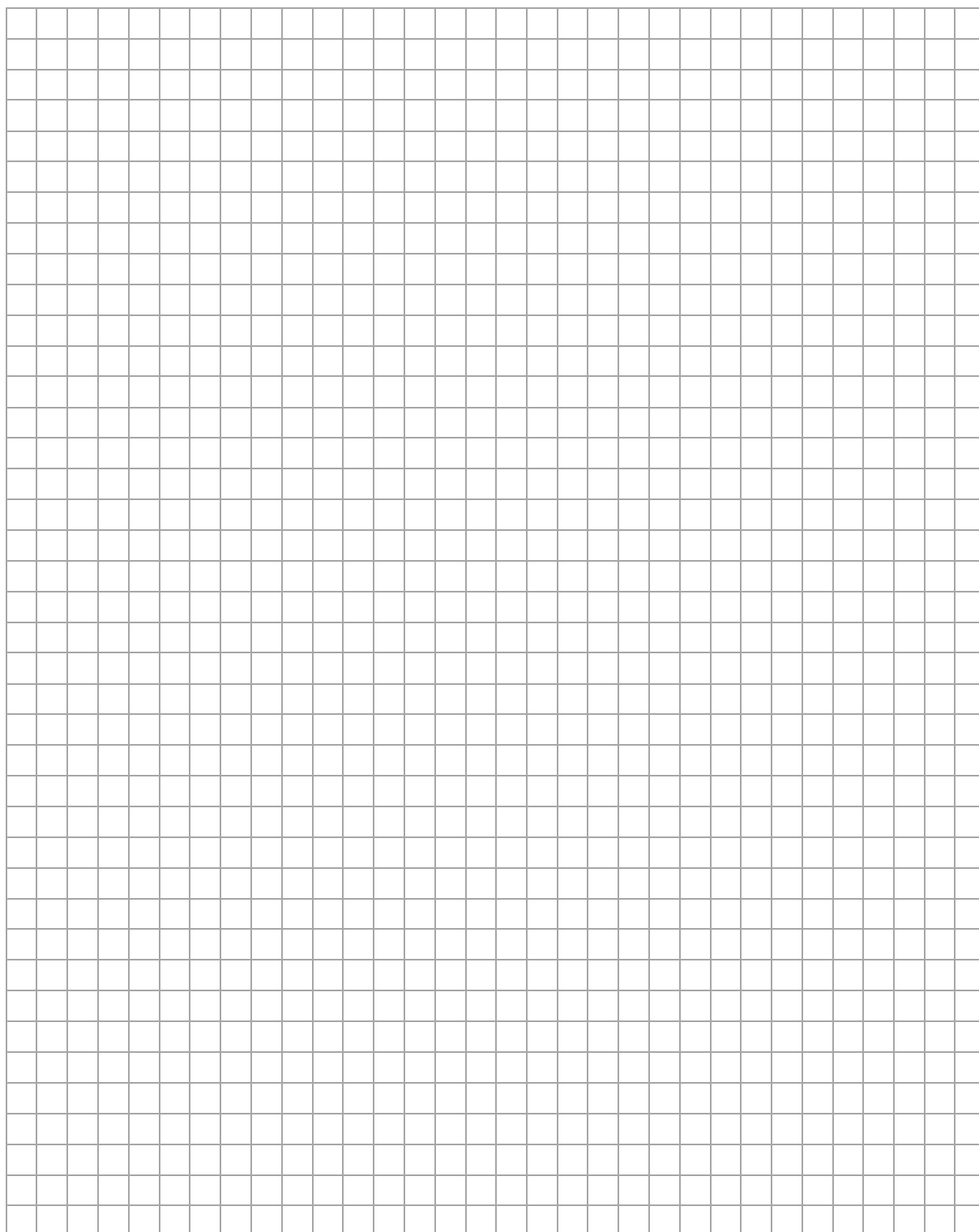
Zadanie 8. (0–3)

Dane jest równanie

$$\frac{3}{3x-7} = \frac{5x}{x-8}, \text{ gdzie } x \neq \frac{7}{3} \text{ i } x \neq 8.$$

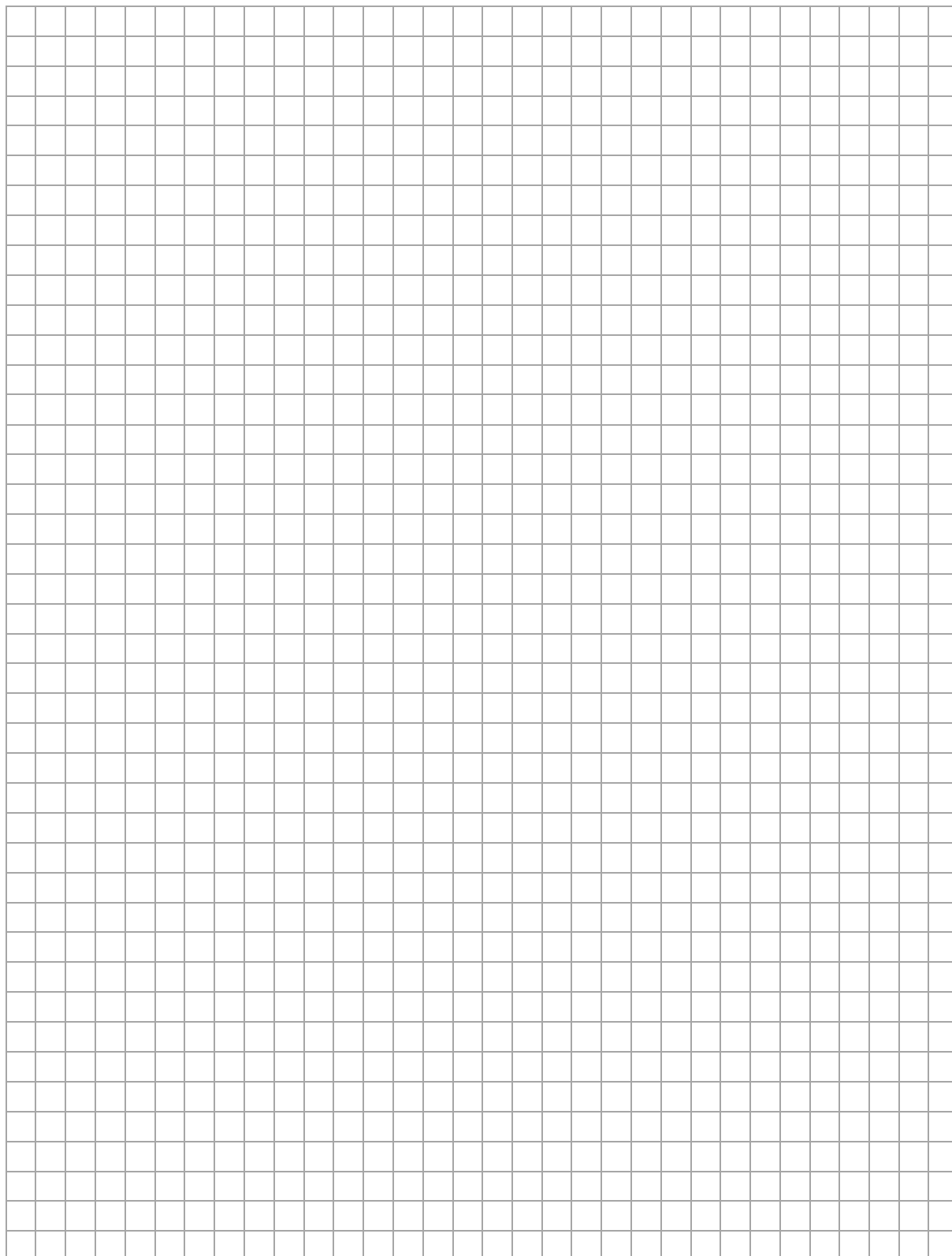
Wyznacz wszystkie rozwiązania tego równania należące do przedziału $\left(\frac{5}{4}, +\infty\right)$.

Zapisz obliczenia.



Zadanie 9. (0–2)**Rozwiąż nierówność**

$$-3x^2 > 6x - 9$$

Zapisz obliczenia.A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for the student to write their calculations.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Suma wszystkich rozwiązań równania $(3x - 12)(10 + 5x)(x - 3) = 0$ jest równa

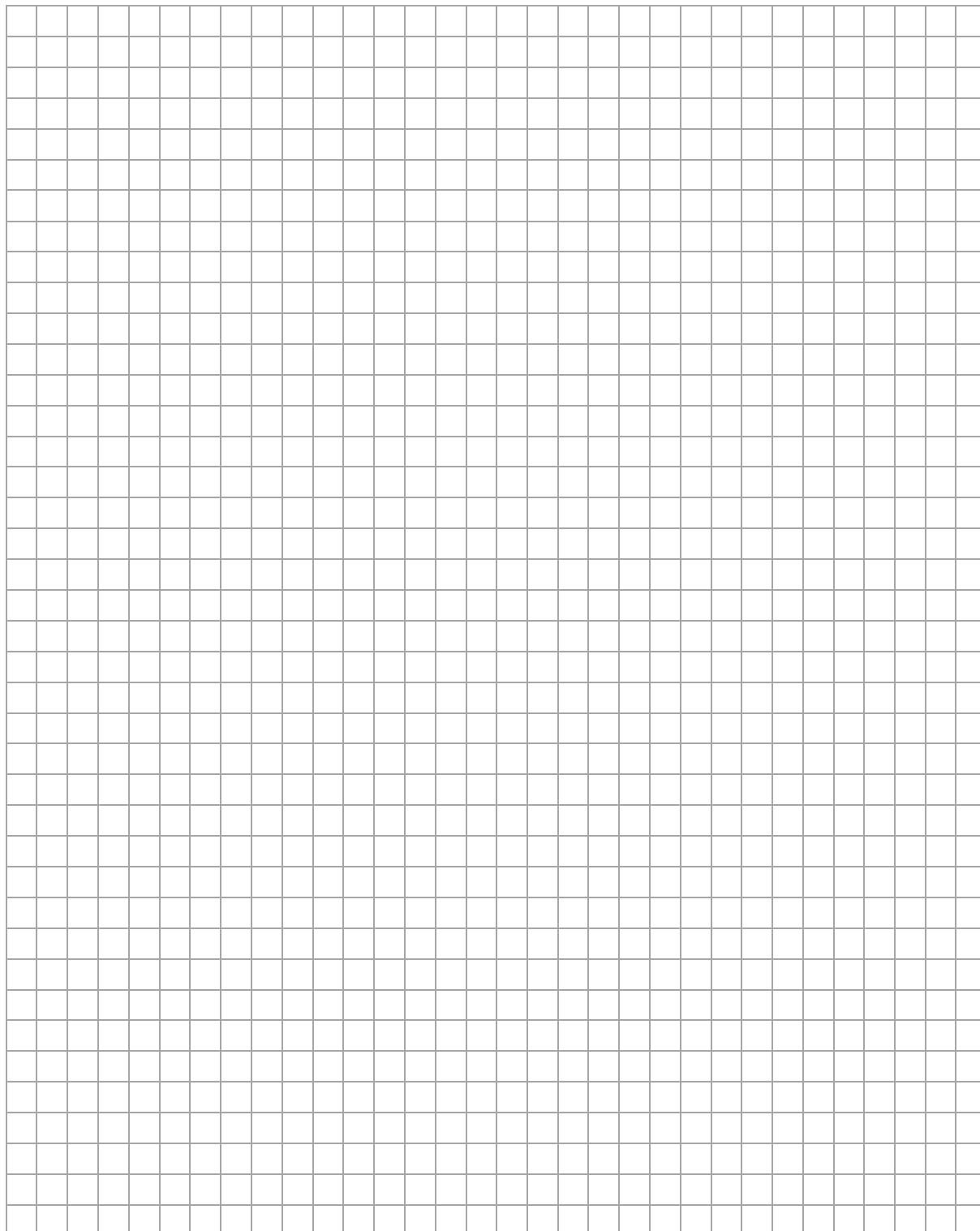
- A.** (-5) **B.** (-1) **C.** 5 **D.** 9

Brudnopis

Zadanie 11. (0–2)

Właściciel restauracji kupił 75 kilogramów pomidorów: x kg pomidorów malinowych w cenie 11 złotych za kilogram oraz y kg pomidorów cherry w cenie 7,98 złotych za kilogram. Za pomidory zapłacił łącznie 752,52 złotych.

**Oblicz, ile kilogramów pomidorów malinowych kupił właściciel restauracji.
Zapisz obliczenia.**

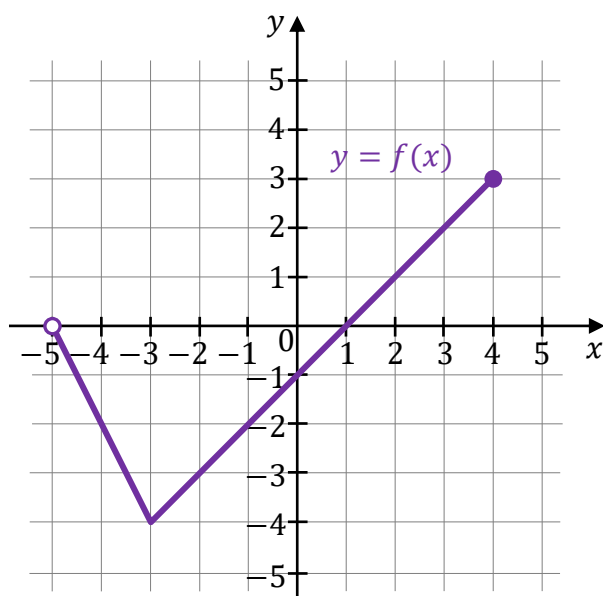


Zadanie 12.

Funkcja f jest określona następująco:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 10 & \text{dla } x \in (-5, -3] \\ x - 1 & \text{dla } x \in (-3, 4] \end{cases}$$

Wykres funkcji $y = f(x)$ przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku poniżej.



Zadanie 12.1. (0–2)

Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe.

1. Miejscem zerowym funkcji f jest liczba
2. Wartość wyrażenia $f(-2) + 3 \cdot f(2)$ jest równa

[illegible]

Zadanie 14.

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$, gdzie b oraz c są liczbami rzeczywistymi. Jednym z miejsc zerowych funkcji f jest liczba 6.

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) prosta o równaniu $x = 1$ jest osią symetrii wykresu funkcji f .

Zadanie 14.1. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja f jest określona wzorem

A. $f(x) = \frac{1}{2}(x - 4)(x - 6)$

B. $f(x) = \frac{1}{2}(x - 4)(x + 6)$

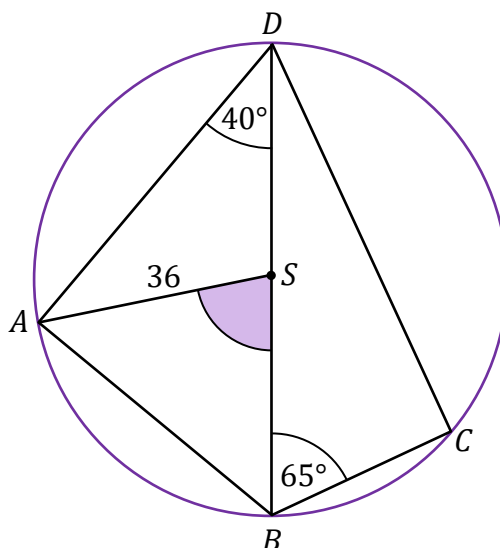
C. $f(x) = \frac{1}{2}(x + 4)(x - 6)$

D. $f(x) = \frac{1}{2}(x+4)(x+6)$

Brudnopis

Zadanie 21.

Punkty A , B , C oraz D leżą na okręgu o środku w punkcie S i o promieniu 36. Punkt S leży na odcinku BD . Kąt BDA ma miarę 40° , a kąt DBC ma miarę 65° (zobacz rysunek).



Zadanie 21.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta ostrego BSA jest równa

- A. 20° B. 40° C. 50° D. 80°

Brudnopis																			

Zadanie 21.2. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

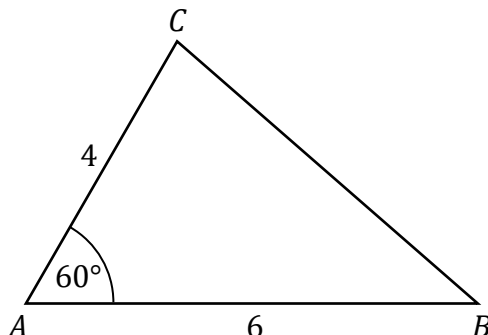
Długość łuku BC , na którym jest oparty kąt wpisany CDB , jest równa

- A. 8π B. 10π C. 13π D. 20π

Brudnopis																			

Zadanie 22.

Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AB| = 6$, $|AC| = 4$ oraz $|\sphericalangle CAB| = 60^\circ$ (zobacz rysunek).



Zadanie 22.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole trójkąta ABC jest równe

- A.** 6 **B.** $6\sqrt{3}$ **C.** 12 **D.** $12\sqrt{3}$

Brudnopis

[illegible]

Zadanie 22.2. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

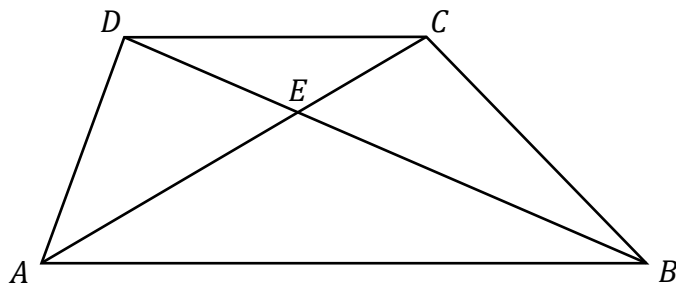
Długość boku BC trójkąta ABC jest równa

- A.** $\sqrt{28}$ **B.** $\sqrt{40}$ **C.** 8 **D.** $\sqrt{76}$

Brudnopis

[illegible]

Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD takich, że $|AB| = 2 \cdot |CD|$.
Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E (zobacz rysunek).



Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Pola trójkątów BCE oraz AED są równe.	P	F
Pole trójkąta ABE jest dwa razy większe od pola trójkąta CDE .	P	F

Brudnopis

$$l: y = (m + 3)x - 4$$

Proste k oraz l są równoległe, gdy liczba m jest równa

Brudnopis

A full page of graph paper with a uniform grid of small squares. The top-left corner contains the handwritten word "Brudnopis".

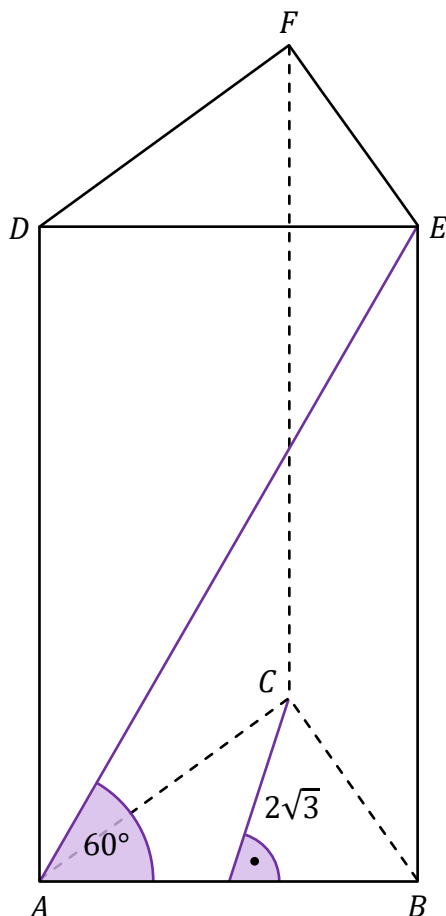
Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Okrąg $\mathcal{O}$ nie ma punktów wspólnych z osią Ox układu współrzędnych.	P	F
Okrąg $\mathcal{O}$ ma z osią Oy układu współrzędnych dokładnie dwa punkty wspólne.	P	F

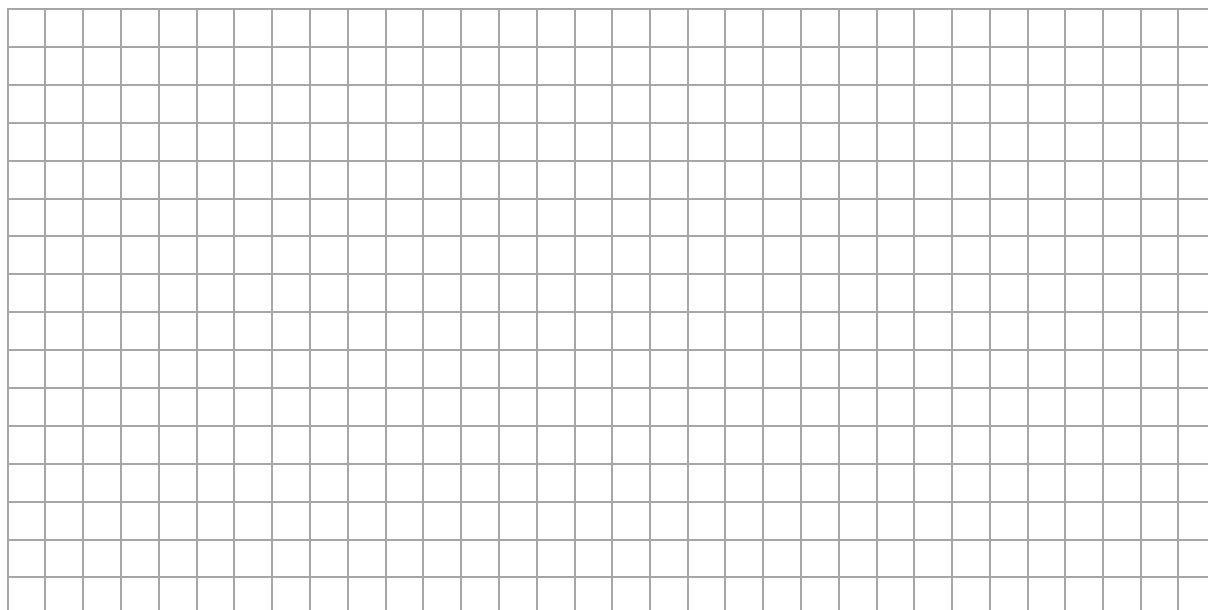
[illegible]

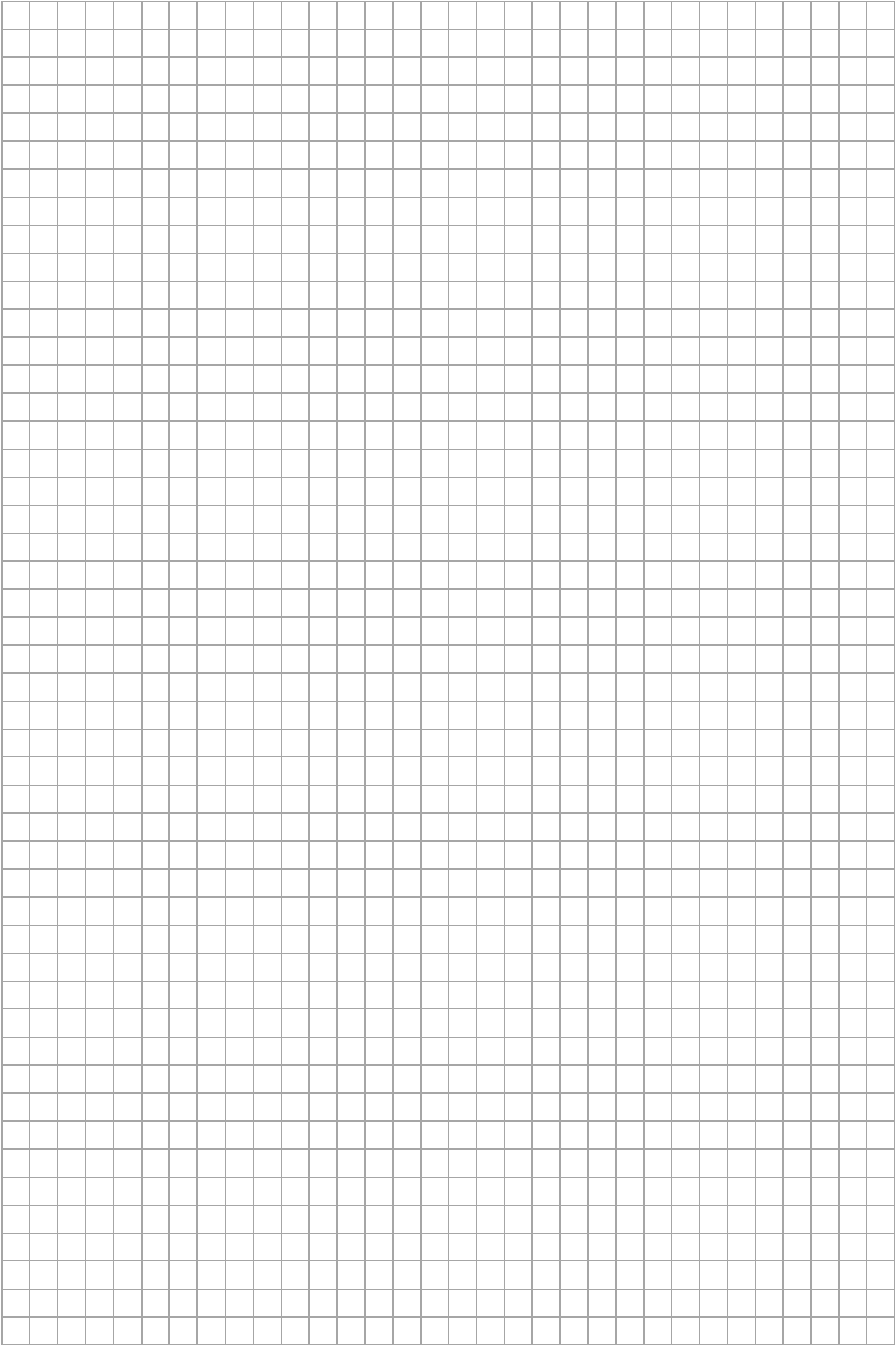
Zadanie 26. (0–4)

Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny $ABCDEF$. Wysokość podstawy ABC jest równa $2\sqrt{3}$. Przekątna AE ściany bocznej $ABED$ tworzy z krawędzią AB kąt o mierze 60° (zobacz rysunek).



Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa. Zapisz obliczenia.





Zadanie 29. (0–2)

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ścianie ma inną liczbę oczek – od jednego oczka do sześciu oczek. Zapisujemy kolejno liczby wyrzuconych oczek i w ten sposób otrzymujemy liczbę dwucyfrową, przy czym pierwsza wyrzucona liczba oczek jest cyfrą dziesiątek, a druga – cyfrą jedności tej liczby dwucyfrowej.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że otrzymana w ten sposób liczba dwucyfrowa będzie nieparzysta i podzielna przez 3. Zapisz obliczenia.

Wszystkie odnotowane wyniki przedstawiono na poniższym diagramie.

liczba usterek	liczba samochodów
1	16
2	10
3	6
4	2
5	2

1. Dominanta liczby usterek wykrytych na tej stacji podczas tych przeglądów jest równa

2. Średnia arytmetyczna liczby usterek wykrytych na tej stacji podczas tych przeglądów jest równa

3. Liczba samochodów, w których wykryto podczas tych przeglądów co najmniej dwie usterki, stanowi **procent** liczby samochodów, w których wykryto dokładnie jedną usterkę.

[illegible]

Zadanie 31. (0–2)

Hotel ma do dyspozycji gości 80 pokoi jednoosobowych.

Właściciel hotelu przeanalizował wpływ ceny za dobę hotelową na liczbę wynajętych pokoi i stwierdził, że:

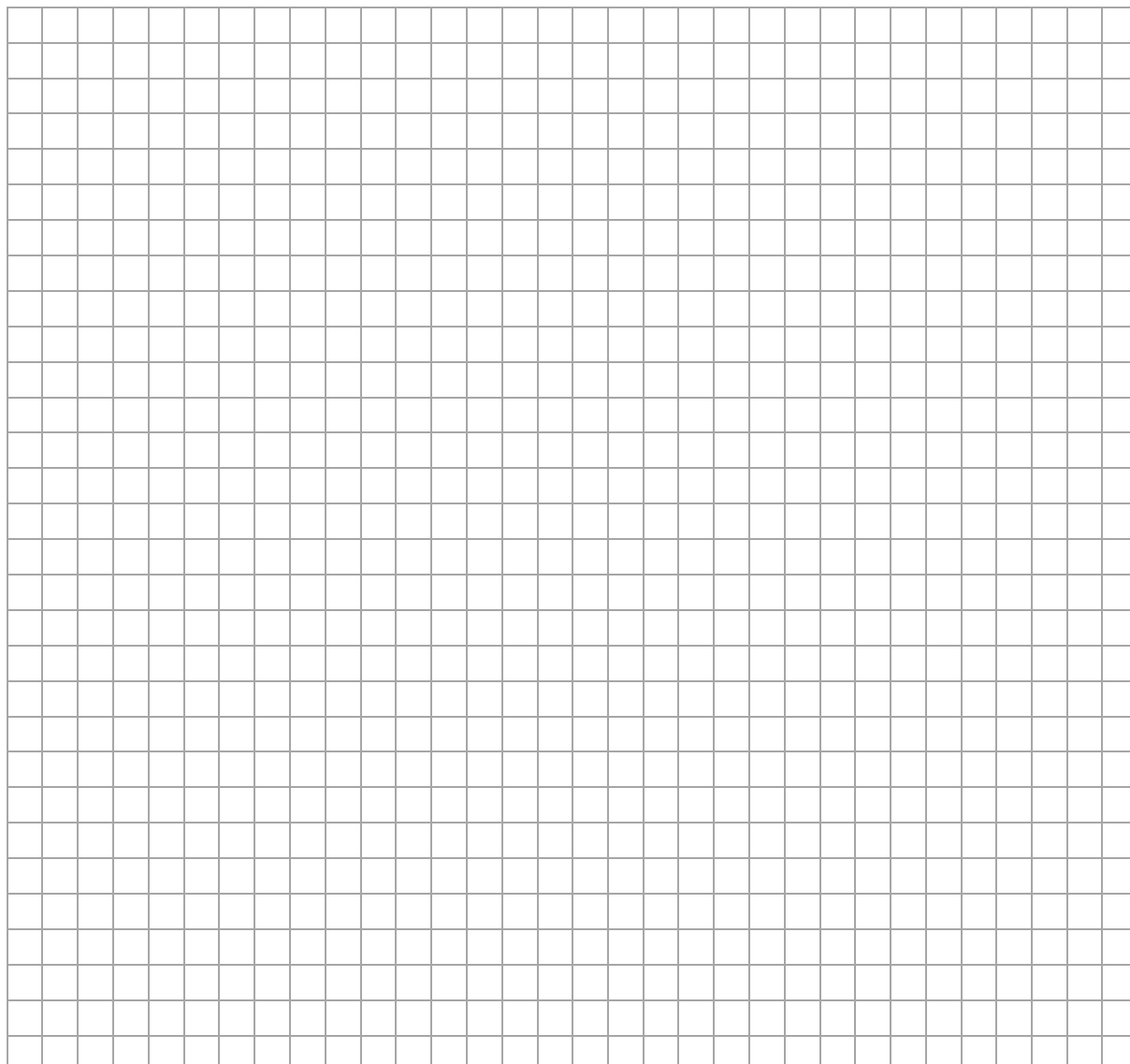
- przy wyjściowej cenie wynoszącej 120 zł za jedną dobę hotelową wszystkie pokoje są wynajęte
- każdy wzrost ceny za dobę hotelową o 5 zł skutkuje spadkiem liczby wynajmowanych pokoi o 1.

Przyjmijmy, że dobowy przychód P hotelu z wynajmowania pokoi, w zależności od podwyżki ceny wyjściowej za dobę hotelową o $5x$ złotych, opisuje funkcja

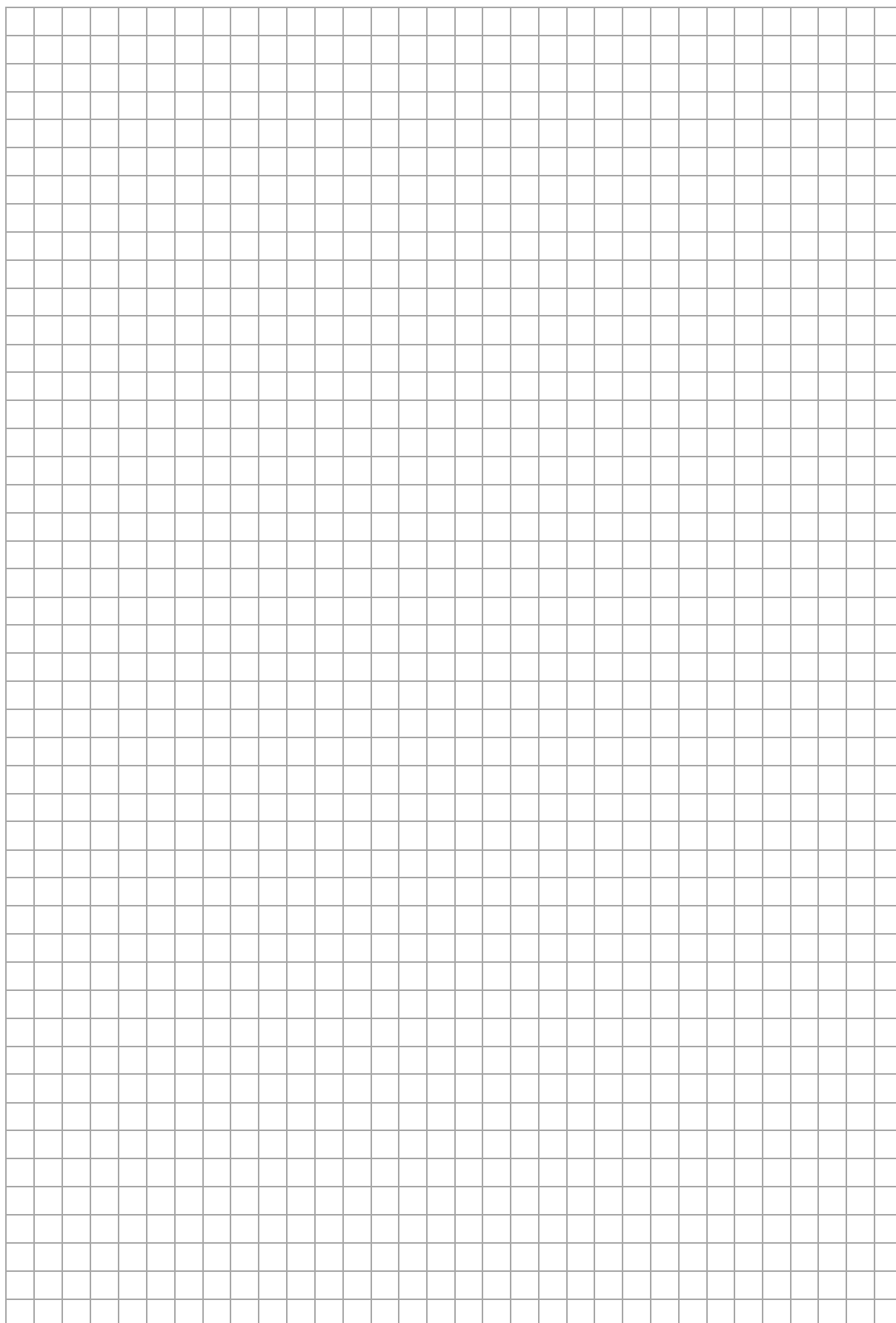
$$P(x) = (80 - x)(120 + 5x)$$

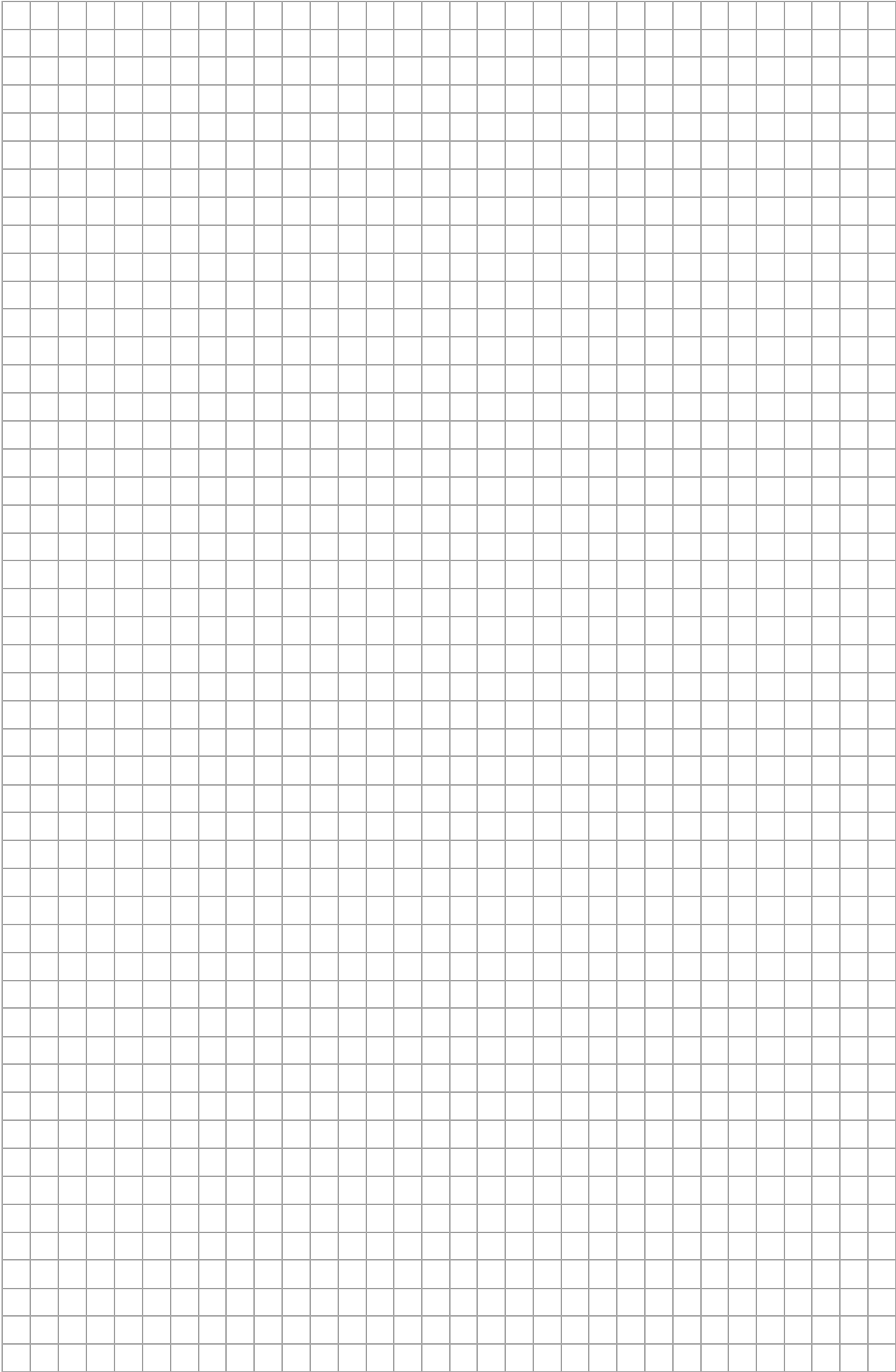
gdzie x jest liczbą całkowitą spełniającą warunki $x \geq 0$ i $x \leq 80$.

Oblicz, jaka powinna być cena wynajęcia jednoosobowego pokoju (za dobę hotelową), aby dobowy przychód hotelu z wynajmowania pokoi był największy. Zapisz obliczenia.



BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)





MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Formuła 2023



MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Formuła 2023



MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Formuła 2023



<i>Rodzaj dokumentu:</i>	Zasady oceniania rozwiązań zadań
<i>Egzamin:</i>	Egzamin maturalny
<i>Przedmiot:</i>	Matematyka
<i>Poziom:</i>	Poziom podstawowy
<i>Formy arkusza:</i>	MMA-P0-100, MMA-P0-200, MMA-P0-300, MMA-P0-400, MMA-P0-700, MMA-P0-Q00, MMA-P0-K00, MMAU-P0-100
<i>Termin egzaminu:</i>	19 sierpnia 2025 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże zadanie i otrzyma poprawny wynik, lecz w końcowym zapisie przekształca ten wynik i popełnia przy tym błąd, to może uzyskać maksymalną liczbę punktów.
3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Uwaga:

Gdy wymaganie egzaminacyjne dotyczy treści z II etapu edukacyjnego, dopisano „SP”.

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania określone w podstawie programowej ¹	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: I.7) stosuje interpretację [...] algebraiczną wartości bezwzględnej [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

¹ Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz.U. z 2024 r. poz. 1019).

Zadanie 2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.4) stosuje [...] prawa działań na potęgach [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 3. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.3) stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 4. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 5. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: I.2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia [...]; I.4) stosuje [...] prawa działań na potęgach [...].

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – przekształcenie wyrażenia $8^{50} - 2^{145}$ do postaci $2^{150} - 2^{145}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Korzystamy z własności działań na potęgach i otrzymujemy:

$$8^{50} - 2^{145} = (2^3)^{50} - 2^{145} = 2^{150} - 2^{145}$$

Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias:

$$2^{150} - 2^{145} = 2^{145} \cdot (2^5 - 1) = 2^{145} \cdot 31$$

Liczba 2^{145} jest liczbą całkowitą, zatem liczba $8^{50} - 2^{145}$ jest podzielna przez 31.

Zadanie 6. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 7. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 8. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny, w tym np. przekształca równoważnie równanie $\frac{5}{x+1} = \frac{x+3}{2x-1}$; III.4) rozwiązuje równania [...] kwadratowe. I.6) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego [...].

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i rozwiązanie równania $\frac{3}{3x-7} = \frac{5x}{x-8}$ w zbiorze liczb rzeczywistych **oraz** wskazanie tego rozwiązania równania, które należy do przedziału $\left(\frac{5}{4}, +\infty\right)$: $x = \frac{4}{3}$.

2 pkt – rozwiązanie równania $\frac{3}{3x-7} = \frac{5x}{x-8}$ w zbiorze liczb rzeczywistych:
 $x = \frac{6}{5}$ oraz $x = \frac{4}{3}$.

1 pkt – przekształcenie równania $\frac{3}{3x-7} = \frac{5x}{x-8}$ do równania kwadratowego, np.
 $3(x-8) = 5x(3x-7)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

- Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe przy przekształcaniu równania i otrzyma równanie kwadratowe postaci $ax^2 + bx + c = 0$, które ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.
- Jeżeli zdający nie spełni kryterium za 1 punkt, a przy przekształcaniu równania popełnia błędy i otrzyma równanie kwadratowe postaci $ax^2 + bx + c = 0$, które nie ma rozwiązań rzeczywistych, albo otrzyma równanie, które nie jest kwadratowe, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
- Jeżeli zdający, przekształcając równanie wymierne do równania kwadratowego, zastosuje błędną metodę - np. zapisze $15x = (3x-7)(x-8)$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy równanie:

$$\frac{3}{3x-7} = \frac{5x}{x-8}$$

$$3(x-8) = 5x(3x-7)$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe:

$$3x - 24 = 15x^2 - 35x$$

$$15x^2 - 38x + 24 = 0$$

Obliczamy wyróżnik Δ trójmianu kwadratowego $15x^2 - 38x + 24$:

$$\Delta = (-38)^2 - 4 \cdot 15 \cdot 24 = 1444 - 1440 = 4$$

Stąd:

$$x_1 = \frac{-(-38) - \sqrt{4}}{2 \cdot 15} = \frac{6}{5} \notin \left(\frac{5}{4}, +\infty\right)$$

$$x_2 = \frac{-(-38) + \sqrt{4}}{2 \cdot 15} = \frac{4}{3} \in \left(\frac{5}{4}, +\infty\right)$$

Ponadto $\frac{4}{3} \neq \frac{7}{3}$ oraz $\frac{4}{3} \neq 8$. Zatem jedynym rozwiązaniem równania $\frac{3}{3x-7} = \frac{5x}{x-8}$ w zbiorze $\left(\frac{5}{4}, +\infty\right)$ jest liczba $\frac{4}{3}$.

Zadanie 9. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.4) rozwiązuje [...] nierówności kwadratowe.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i zapisanie zbioru rozwiązań nierówności:

$$x \in (-3, 1)$$

ALBO

– zastosowanie poprawnej metody i przedstawienie zbioru rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziału, np.



1 pkt – obliczenie/zapisanie pierwiastków trójmianu kwadratowego $-3x^2 - 6x + 9$:

$$x_1 = -3 \text{ oraz } x_2 = 1.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

- Jeżeli zdający, obliczając pierwiastki trójmianu $-3x^2 - 6x + 9$, popełni błędy (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionych błędów zapisze zbiór rozwiązań nierówności, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
- Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego, w przypadku gdy błędnie obliczony przez zdającego wyróżnik Δ jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
- Jeżeli zdający rozpatruje inny niż podany w zadaniu trójmian kwadratowy, który nie wynika z błędu przekształcenia (np. $-3x^2 - 6x$), i w konsekwencji rozpatruje inną nierówność (np. $-3x^2 - 6x > 0$), to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
- Jeżeli zdający poda zbiór rozwiązań w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziału i jednocześnie zapisze niewłaściwy przedział jako zbiór rozwiązań (np. $x \in [-3, 1]$), to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $(1, -3)$, to otrzymuje **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy nierówność:

$$-3x^2 > 6x - 9$$

$$-3x^2 - 6x + 9 > 0 \quad /: (-3)$$

$$x^2 + 2x - 3 < 0$$

Obliczamy miejsca zerowe funkcji $y = x^2 + 2x - 3$.

Obliczamy wyróżnik trójmianu $x^2 + 2x - 3$:

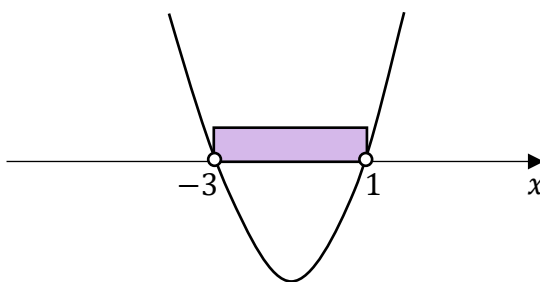
$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$$

Stąd:

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = -3 \quad \text{oraz} \quad x_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = 1$$

Szkicujemy wykres funkcji $y = x^2 + 2x - 3$.

Odczytujemy argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne.



Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(-3, 1)$.

Zadanie 10. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.5) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 11. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: IV.2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 51 kg.

1 pkt – zapisanie układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi pozwalającego obliczyć x oraz y , np.

$$x + y = 75 \quad \text{oraz} \quad 11x + 7,98y = 752,52$$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą pozwalającego obliczyć x , np.

$$11x + 7,98 \cdot (75 - x) = 752,52,$$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą pozwalającego obliczyć y , np.

$$11 \cdot (75 - y) + 7,98y = 752,52,$$

ALBO

– zapisanie różnicy $752,52 - 75 \cdot 7,98$ **oraz** zapisanie różnicy $11 - 7,98$,

ALBO

– zapisanie różnicy $75 \cdot 11 - 752,52$ **oraz** zapisanie różnicy $11 - 7,98$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający sprawdza warunki zadania dla wybranych par liczb x oraz y i wskaże właściwą odpowiedź, ale nie uzasadni, że jest to jedyne rozwiązanie zadania, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający w rozwiązaniu używa wartości przybliżonych i otrzymuje wynik różny od 51, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Po uwzględnieniu warunków zadania otrzymujemy:

$$x + y = 75 \quad \text{oraz} \quad 11x + 7,98y = 752,52$$

Z pierwszego z tych równań wyznaczamy $y = 75 - x$ i podstawiamy w miejsce y do drugiego z równań, w wyniku czego otrzymujemy:

$$11x + 7,98 \cdot (75 - x) = 752,52$$

$$11x + 598,5 - 7,98x = 752,52$$

$$3,02x = 154,02$$

$$x = 51$$

Właściciel restauracji kupił 51 kilogramów pomidorów malinowych.

Sposób II

Gdyby właściciel restauracji kupił tylko pomidory cherry, to zapłaciłby za nie

$75 \cdot 7,98 = 598,50$ złotych, a więc o $752,52 - 598,50 = 154,02$ złotych mniej niż zapłacił w rzeczywistości.

Jeden kilogram pomidorów malinowych kosztuje o $11 - 7,98 = 3,02$ złotych więcej niż jeden kilogram pomidorów cherry.

Zatem właściciel restauracji kupił $154,02 : 3,02 = 51$ kilogramów pomidorów malinowych.

Zadanie 12.1. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą [...] wykresów, wzorów [...]; V.4) odczytuje z wykresu funkcji: [...] miejsca zerowe [...].

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne uzupełnienie dwóch zdań.

1 pkt – poprawne uzupełnienie jednego zdania.

0 pkt – brak spełnienia powyższych kryteriów.

Rozwiązanie

- Miejscem zerowym funkcji f jest liczba 1.
- Wartość wyrażenia $f(-2) + 3 \cdot f(2)$ jest równa 0.

Zadanie 12.2. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: [...] zbiór wartości, [...] przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości [...] mniejsze [...] od danej liczby [...].

Zasady oceniania

- 2 pkt – poprawne uzupełnienie dwóch zdań.
1 pkt – poprawne uzupełnienie jednego zdania.
0 pkt – brak spełnienia powyższych kryteriów.

Rozwiązanie

- Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $[-4, 3]$.
- Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $f(x) < -2$ jest przedział $(-4, -1)$.

Uwaga:

Odpowiedź zdającego uznajemy za poprawną tylko wtedy, gdy można w sposób jednoznaczny ustalić, czy zapisany przez zdającego przedział jest otwarty czy domknięty.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej przy zachowaniu poprawnych krańców przedziału, np. zapisze, że zbiorem wartości funkcji f jest przedział $[3, -4]$, to otrzymuje **1 punkt** za tak uzupełnione zdanie.

Zadanie 13. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie lub o jej własnościach.

Zasady oceniania

- 1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 14.1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 14.2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje).

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

FF

Zadanie 14.3. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 15. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 16. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.5) stosuje wzór na n -ty wyraz [...] ciągu arytmetycznego.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 17. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.6) stosuje wzór na n -ty wyraz [...] ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 18. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 19. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.2) korzysta z wzorów $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 20. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus [...] dla kątów od 0° do 180° , w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° , 60° .

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 21.1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 21.2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.6) stosuje wzory na [...] długość łuku okręgu.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 22.1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.3) stosuje [...] wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma.$

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 22.2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.3) stosuje twierdzenie cosinusów [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 23. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.4) korzysta z własności [...] przekątnych w [...] trapezach; VIII.8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów; VIII.9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

PF

Zadanie 24. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej [...], w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich, jak np. [...] równoległość do innej prostej).

Zasady oceniania

1 pkt – poprawne uzupełnienie zdania.

0 pkt – brak spełnienia powyższego kryterium.

Rozwiązanie

Proste k oraz l są równoległe, gdy liczba m jest równa 0.

Zadanie 25. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.4) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

PP

Zadanie 26. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: X.5) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów [...], również z wykorzystaniem trygonometrii.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda obliczenia objętości i pola powierzchni całkowitej graniastosłupa **oraz** poprawne wyniki: $V = 48$ i $P_c = 56\sqrt{3}$.

3 pkt – obliczenie objętości graniastosłupa: $V = 48$,
ALBO

– obliczenie pola powierzchni całkowitej graniastosłupa: $P_c = 56\sqrt{3}$.

2 pkt – obliczenie długości krawędzi podstawy: $a = 4$ **oraz** obliczenie wysokości graniastosłupa: $H = 4\sqrt{3}$,
ALBO

– zapisanie wzoru na objętość graniastosłupa w zależności od jednej zmiennej, np.

$$V = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{3}, \text{ **oraz** zapisanie wzoru na pole powierzchni całkowitej}$$

$$\text{graniastosłupa w zależności od jednej zmiennej, np. } P_c = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot a \cdot a\sqrt{3}.$$

1 pkt – obliczenie długości krawędzi podstawy: $a = 4$,
ALBO

– zapisanie zależności pomiędzy długością krawędzi podstawy a wysokością graniastosłupa, np.: $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{H}{a}$, $H = a\sqrt{3}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:

- zastosowanie niepoprawnej definicji jednej funkcji trygonometrycznej,
- błędne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa,
- błędne zastosowanie twierdzenia cosinusów,
- zastosowanie niepoprawnej tożsamości $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$,
lub
- błędne zastosowanie własności trójkąta o kątach 30° , 60° , 90° ,

i rozwiązanie zostanie doprowadzone konsekwentnie do końca, to zdający może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za konsekwentne obliczenie objętości i pola powierzchni całkowitej graniastosłupa).

Jeżeli zdający popełni więcej niż jeden z wymienionych błędów a)–e), to otrzymuje

0 punktów za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.

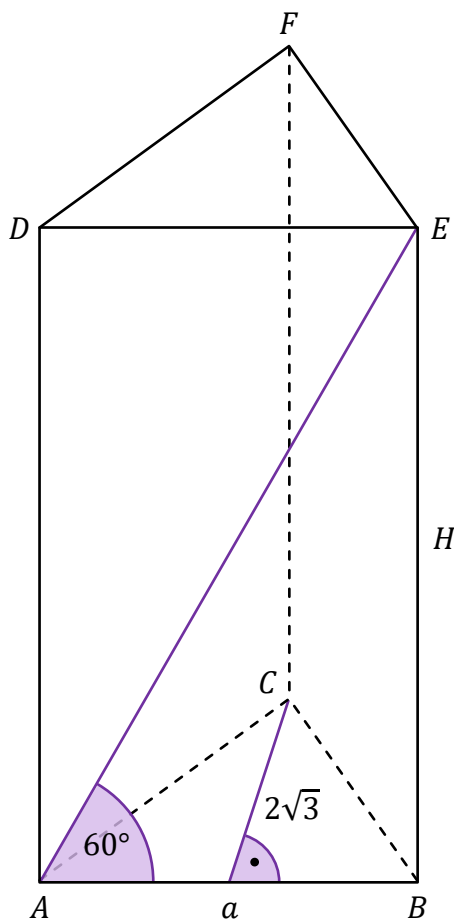
2. Jeżeli zdający popełni błąd, który nie jest błędem rachunkowym, ale otrzyma długość krawędzi podstawy większą od $2\sqrt{3}$, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za konsekwentne obliczenie objętości i pola powierzchni całkowitej graniastosłupa).

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku:

a – długość krawędzi podstawy,

H – wysokość graniastosłupa.



Zauważamy, że $a > 0$ i $H > 0$.

Podstawą graniastosłupa jest trójkąt równoboczny, stąd:

$$2\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Zatem:

$$a = 4$$

Obliczamy wysokość H graniastosłupa:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{H}{a} = \frac{H}{4}$$

Stąd:

$$H = 4 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 4\sqrt{3}$$

Obliczamy objętość V graniastopuła:

$$V = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 48$$

Obliczamy pole powierzchni całkowitej P_c graniastopuła:

$$P_c = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot a \cdot H = 2 \cdot \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3} + 48\sqrt{3} = 56\sqrt{3}$$

Zadanie 27. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: X.5) oblicza objętości [...] walca [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 28. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XI.2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 29. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia A

i uzyskanie poprawnego wyniku: $P(A) = \frac{6}{36}$.

1 pkt – wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych *LUB* obliczenie/podanie liczby tych zdarzeń: $|\Omega| = 6 \cdot 6$, *LUB* sporządzenie tabeli o 36 polach odpowiadających zdarzeniom elementarnym, *LUB* sporządzenie pełnego drzewa stochastycznego *ALBO*

– wypisanie (lub zaznaczenie w tabeli) wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i niewypisanie żadnego niewłaściwego, *ALBO*

– podanie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A : $|A| = 6$, o ile nie zostały zliczone błędne pary, *ALBO*

– sporządzenie fragmentu drzewa stochastycznego, który zawiera wszystkie gałęzie sprzyjające zdarzeniu A , **oraz** zapisanie prawdopodobieństwa na co najmniej jednym odcinku każdego z etapów doświadczenia, *ALBO*

– podanie prawdopodobieństwa jednoelementowego zdarzenia (elementarnego): $\frac{1}{36}$, *ALBO*

– zapisanie tylko $P(A) = \frac{1}{6}$, *ALBO*

– zapisanie tylko $P(A) = \frac{6}{36}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający zapisuje tylko liczby 1 i 6 (lub 6 i 36) i z rozwiązania nie wynika znaczenie tych liczb, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie uporządkowane pary liczb (x, y) , gdzie $x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

W tabeli literą $\mathcal{A}$ zaznaczamy zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A .

		II rzut					
I rzut		1	2	3	4	5	6
	1					$\mathcal{A}$	
	2	$\mathcal{A}$					
	3			$\mathcal{A}$			
	4					$\mathcal{A}$	
	5	$\mathcal{A}$					
	6			$\mathcal{A}$			

Moc zbioru Ω jest równa 36. Zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A jest 6.

Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Zadanie 30. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: XII.2) oblicza średnią arytmetyczną [...], znajduje [...] dominantę. SP V. Obliczenia procentowe. 5) stosuje obliczenia procentowe do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym [...].

Zasady oceniania

3 pkt – poprawne uzupełnienie trzech zdań.

2 pkt – poprawne uzupełnienie dwóch zdań.

1 pkt – poprawne uzupełnienie jednego zdania.

0 pkt – brak spełnienia powyższych kryteriów.

Uwaga:

Nie akceptuje się zaokrągleń otrzymanych wyników.

Rozwiązanie

1. Dominanta liczby usterek wykrytych na tej stacji podczas tych przeglądów jest równa 1.
2. Średnia arytmetyczna liczby usterek wykrytych na tej stacji podczas tych przeglądów jest równa 2.
3. Liczba samochodów, w których wykryto podczas tych przeglądów co najmniej dwie usterki, stanowi 125 **procent** liczby samochodów, w których wykryto dokładnie jedną usterkę.

Zadanie 31. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: XIII) rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 260 zł.

- 1 pkt – obliczenie liczby x podwyżek, przy których dobowy przychód hotelu z wynajmowania pokoi będzie największy: 28,
ALBO
– obliczenie pierwszej współrzędnej p wierzchołka paraboli z własności $P(k_1) = P(k_2)$, gdzie k_1, k_2 są różnymi liczbami takimi, że $|p - k_1| = |p - k_2|$:
$$p = \frac{k_1 + k_2}{2} = 28.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający błędnie oblicza pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli, i konsekwentnie do popełnionego błędu oblicza cenę wynajęcia pokoju, dla której przychód hotelu będzie największy, to może otrzymać **1 punkt** za całe rozwiązanie (o ile pierwsza współrzędna jest liczbą należącą do dziedziny).
2. Jeżeli zdający nie zapisze, że 28 należy do dziedziny funkcji P , to może otrzymać **2 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający zapisze tylko 28 i 260 zł, to otrzymuje **1 punkt**.

4. Jeżeli zdający oblicza największą wartość funkcji P z wykorzystaniem rachunku różniczkowego i nie zapisze przedziałów monotoniczności funkcji, to może otrzymać **2 punkty** za całe rozwiązanie (gdy wyznaczy pochodną funkcji kwadratowej $f(x) = (80 - x)(120 + 5x)$, obliczy miejsca zerowe pochodnej funkcji $f(x)$ i wskaże cenę wynajęcia pokoju, dla której przychód hotelu będzie największy).
5. Jeżeli zdający oblicza $P(28 - k)$ oraz $P(28 + k)$, gdzie $k \neq 0$, i wskaże cenę wynajęcia pokoju: 260 zł, dla której przychód hotelu będzie największy, to może otrzymać **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Wykresem funkcji $P(x) = (80 - x)(120 + 5x)$, gdzie x jest liczbą całkowitą z przedziału $[0, 80]$, jest zbiór punktów leżących na paraboli o wierzchołku w punkcie $W = (p, q)$ i ramionach skierowanych w dół.

Obliczamy miejsca zerowe funkcji kwadratowej $f(x) = (80 - x)(120 + 5x)$:

$$(80 - x)(120 + 5x) = 0$$

$$x_1 = 80 \quad \text{lub} \quad x_2 = -24$$

Stąd:

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{80 + (-24)}{2} = 28 \in \{0, 1, 2, \dots, 80\}$$

To oznacza, że dobowy przychód hotelu będzie największy, gdy $x = 28$.

Obliczamy cenę wynajęcia pokoju, dla której przychód hotelu będzie największy:

$$120 + 5x = 120 + 5 \cdot 28 = 260 \text{ zł}$$

Sposób II

Wykresem funkcji $P(x) = (80 - x)(120 + 5x)$, gdzie x jest liczbą całkowitą z przedziału $[0, 80]$, jest zbiór punktów leżących na paraboli o wierzchołku w punkcie $W = (p, q)$ i ramionach skierowanych w dół.

Przekształcamy wzór funkcji P do postaci ogólnej:

$$P(x) = 9600 + 400x - 120x - 5x^2 = -5x^2 + 280x + 9600$$

Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli:

$$p = \frac{-280}{2 \cdot (-5)} = 28 \in \{0, 1, 2, \dots, 80\}$$

To oznacza, że dobowy przychód hotelu będzie największy przy podwyżce ceny za dobę hotelową o $5 \cdot 28 = 140$ złotych.

Wtedy cena wynajęcia pokoju jest równa $120 + 140 = 260$ złotych.

Ocena prac osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Obowiązują zasady oceniania stosowane przy sprawdzaniu prac zdających bez stwierdzonej dyskalkulii z dodatkowym uwzględnieniem:

- I. **ogólnych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią (punkty 1.–12.);
- II. dodatkowych **szczegółowych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią – egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, termin poprawkowy 2025.

I. Ogólne zasady oceniania zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

1. Nie należy traktować jako błędy merytoryczne pomyłek, wynikających z:
 - błędnego przepisania
 - przestawienia cyfr
 - zapisania innej cyfry, ale o podobnym wyglądzie
 - przestawienia położenia przecinka
 - przestawienia położenia znaku liczby.
2. W przypadku błędów, wynikających ze zmiany znaku liczby, należy w każdym zadaniu oddzielnie przeanalizować, czy zdający opanował inne umiejętności, poza umiejętnościami rachunkowymi, oceniane w zadaniu. W przypadku opanowania badanych umiejętności zdający powinien otrzymać przynajmniej 1 punkt.
3. We wszystkich zadaniach otwartych, w których wskazano poprawną metodę rozwiązania, części lub całości zadania, zdającemu należy przyznać przynajmniej 1 punkt, zgodnie z kryteriami do poszczególnych zadań.
4. Jeśli zdający przedstawia nieprecyzyjne zapisy, na przykład pomija nawiasy lub zapisuje nawiasy w niewłaściwych miejscach, ale przeprowadza poprawne rozumowanie lub stosuje właściwą strategię, to może otrzymać przynajmniej 1 punkt za rozwiązanie zadania.
5. W przypadku zadania wymagającego wyznaczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi poprawną metodę wyznaczania pierwiastków trójmianu kwadratowego, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
6. W przypadku zadania wymagającego rozwiązania nierówności kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli stosuje poprawny algorytm rozwiązywania nierówności kwadratowej, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
7. W przypadku zadania wymagającego stosowania własności funkcji kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt za wykorzystanie konkretnych własności funkcji kwadratowej, istotnych przy poszukiwaniu rozwiązania.

8. W przypadku zadania wymagającego zastosowania własności ciągów arytmetycznych lub geometrycznych zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi wykorzystanie takiej własności ciągu, która umożliwi znalezienie rozwiązania zadania.
9. W przypadku zadania wymagającego analizowania figur geometrycznych na płaszczyźnie kartezjańskiej zdający może otrzymać punkty, jeżeli przy poszukiwaniu rozwiązania przedstawi poprawne rozumowanie, wykorzystujące własności figur geometrycznych lub zapisze zależności, pozwalające rozwiązać zadanie.
10. W przypadku zadania z rachunku prawdopodobieństwa zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeśli przy wyznaczaniu liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających rozważanemu zdarzeniu przyjmuje określoną regularność lub podaje prawidłową metodę wyznaczenia tej liczby zdarzeń elementarnych.
11. W przypadku zadania z geometrii zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeżeli podaje poprawną metodę wyznaczenia długości odcinka potrzebnej do znalezienia rozwiązania.
12. W przypadku zadania wymagającego przeprowadzenia dowodu (z zakresu algebry lub geometrii), jeśli w przedstawionym rozwiązaniu zdający powoła się na własność, która wyznacza istotny postęp, prowadzący do przeprowadzenia dowodu, to może otrzymać 1 punkt.

II. Dodatkowe **szczegółowe zasady oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Zadanie 5.

1 pkt – przekształcenie wyrażenia $8^{50} - 2^{145}$ do postaci $(2^3)^{50} - 2^{145}$.

Zadanie 8.

Uwaga:

Jeżeli zdający popełnia błąd przy przekształceniu równania $\frac{3}{3x-7} = \frac{5x}{x-8}$ do postaci równania kwadratowego, lecz dalej stosuje poprawną metodę rozwiązania otrzymanego równania kwadratowego i konsekwentnie oblicza pierwiastki tego równania, to może otrzymać **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Zadanie 9.

- 1 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego $-3x^2 - 6x + 9$, tzn. zastosowanie wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego i obliczenie tych pierwiastków
ALBO
 – konsekwentne (do otrzymanego w wyniku popełnienia błędów o charakterze dyskalkulicznym ujemnego wyróżnika) narysowanie paraboli,
ALBO

- poprawne rozwiązanie nierówności $-3x^2 - 6x > 0$ (tzn. stosuje się punkt 6. ogólnych zasad oceniania),
ALBO
- konsekwentne (do wyznaczonych przez siebie pierwiastków oraz rozpatrywanego trójmianu i nierówności) wyznaczenie zbioru rozwiązań nierówności.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający, rozwiązując nierówność, pomyli porządek liczb na osi liczbowej i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $(1, -3)$, to może otrzymać **2 punkty** za całe rozwiązanie.
2. Nie stosuje się uwag 2. i 3. z zasad oceniania arkusza standardowego.
3. Akceptowane jest zapisanie pierwiastków trójmianu w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi.

Zadanie 11.

1 pkt – zapisanie równania $11x + 7,98y = 752,52$.

Zadanie 12.1.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 12.2.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 24.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 26.

2 pkt – zapisanie wzoru na objętość graniastostupa w zależności od jednej zmiennej, np.

$$V = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{3}, \text{ LUB } \text{zapisanie wzoru na pole powierzchni całkowitej}$$

$$\text{graniastostupa w zależności od jednej zmiennej, np. } P_c = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot a \cdot a\sqrt{3}.$$

Zadanie 29.

1 pkt – zapisanie jedynie liczby 36 (należy traktować to jako wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych).

Uwagi:

1. W ocenie rozwiązania tego zadania (dla zdających z dyskalkulią) nie stosuje się uwagi ze standardowych zasad oceniania.

2. Jeżeli zdający poprawnie wypisze/zaznaczy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A , lecz popełni błąd w ich zliczeniu (np. $|A| = 5$) i konsekwentnie zapisze wynik (np. $\frac{5}{36}$), to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 30.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 31.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

PESEL

Miejsce na naklejkę.

Sprawdź, czy kod na naklejce to
E-100.

Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny

Formuła 2015

MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Symbol arkusza

EMAP-P0-**100**-2508

DATA: **19 sierpnia 2025 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **170 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

☐ Uprawnienie zdającego do
dostosowania w związku z dyskalkulią.

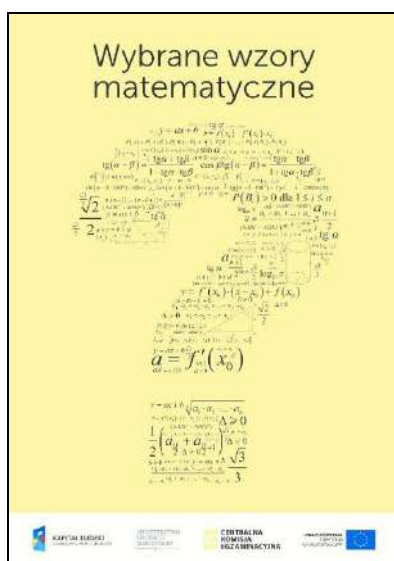
Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**,
tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi.
Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu
takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.



Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 35 stron (zadania 1–34).
Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Odpowiedzi do zadań zamkniętych (1–25) zaznacz na karcie odpowiedzi w części karty przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj  pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem  i zaznacz właściwe.
4. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego (26–34) może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
5. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
6. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
7. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
8. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
9. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
10. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla i linijki oraz z kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



**Zadania egzaminacyjne są wydrukowane
na następnych stronach.**

W każdym z zadań od 1. do 25. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Liczba $\frac{25^{-2}}{125^{-4}}$ jest równa

- A. 5^{-16} B. 5^{-2} C. 5^4 D. 5^8

Zadanie 2. (0–1)

Liczba $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{192}$ jest równa

- A. 6 B. $3\sqrt[3]{6}$ C. $6\sqrt[3]{3}$ D. $6\sqrt[3]{6}$

Zadanie 3. (0–1)

Liczba $\log_3 2 - \log_3 18$ jest równa

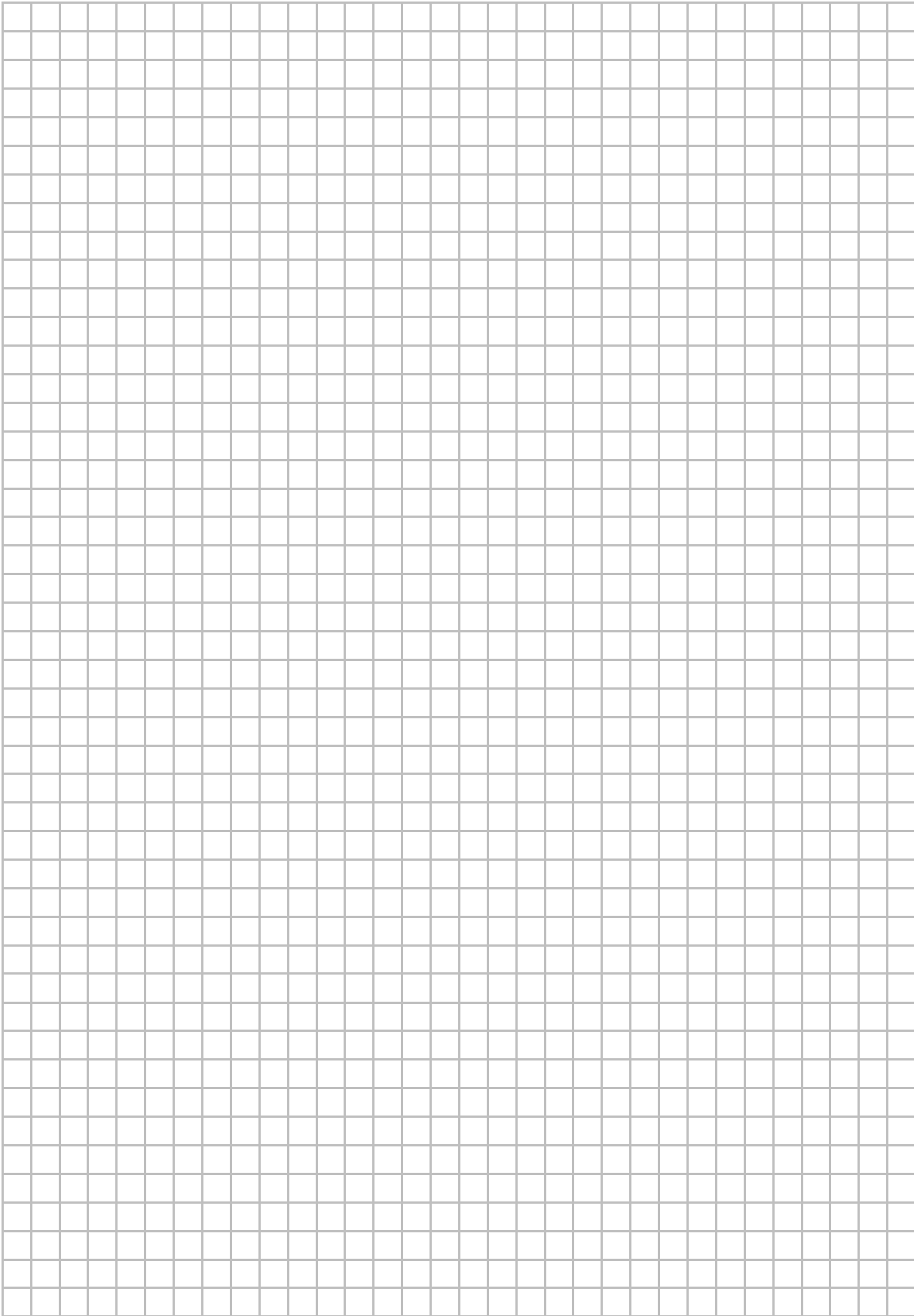
- A. (-2) B. $\left(-\frac{1}{2}\right)$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2

Zadanie 4. (0–1)

Dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y wartość wyrażenia $(3x + y)^2 - (3x - y)^2$ jest równa wartości wyrażenia

- A. $12xy$ B. $(-12xy)$ C. $2y^2$ D. $4y^2$

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)



Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl

Zadanie 5. (0–1)

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności

$$3 - x > \frac{5x - 1}{2}$$

jest przedział

- A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, \frac{7}{6})$ C. $(1, +\infty)$ D. $(\frac{7}{6}, +\infty)$

Zadanie 6. (0–1)

Suma wszystkich rozwiązań równania $(3x - 12)(10 + 5x)(x - 3) = 0$ jest równa

- A. (-5) B. (-1) C. 5 D. 9

Zadanie 7. (0–1)

Miejscem zerowym funkcji liniowej g jest liczba (-3) .

Dla argumentu 0 funkcja g przyjmuje wartość $(-\frac{3}{2})$.

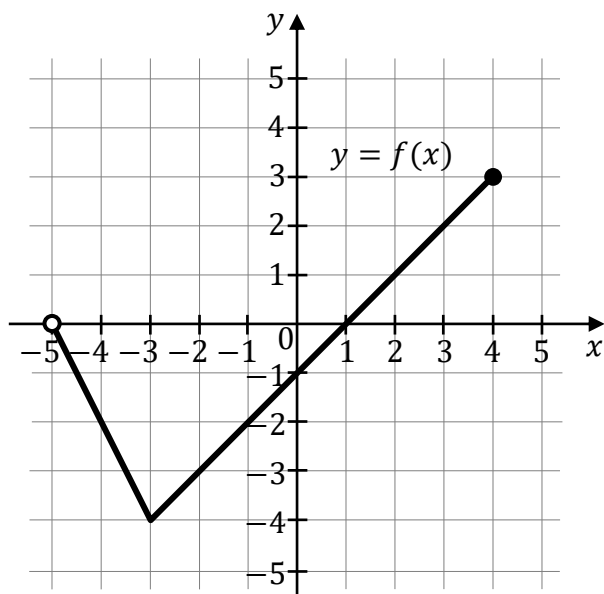
Funkcja g jest określona wzorem

- A. $g(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$
B. $g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
C. $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$
D. $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Informacja do zadań 8.–9.

Na rysunku, w układzie współrzędnych (x, y) , przedstawiono wykres funkcji f .

**Zadanie 8. (0–1)**

Wartość wyrażenia $f(-2) + 3 \cdot f(2)$ jest równa

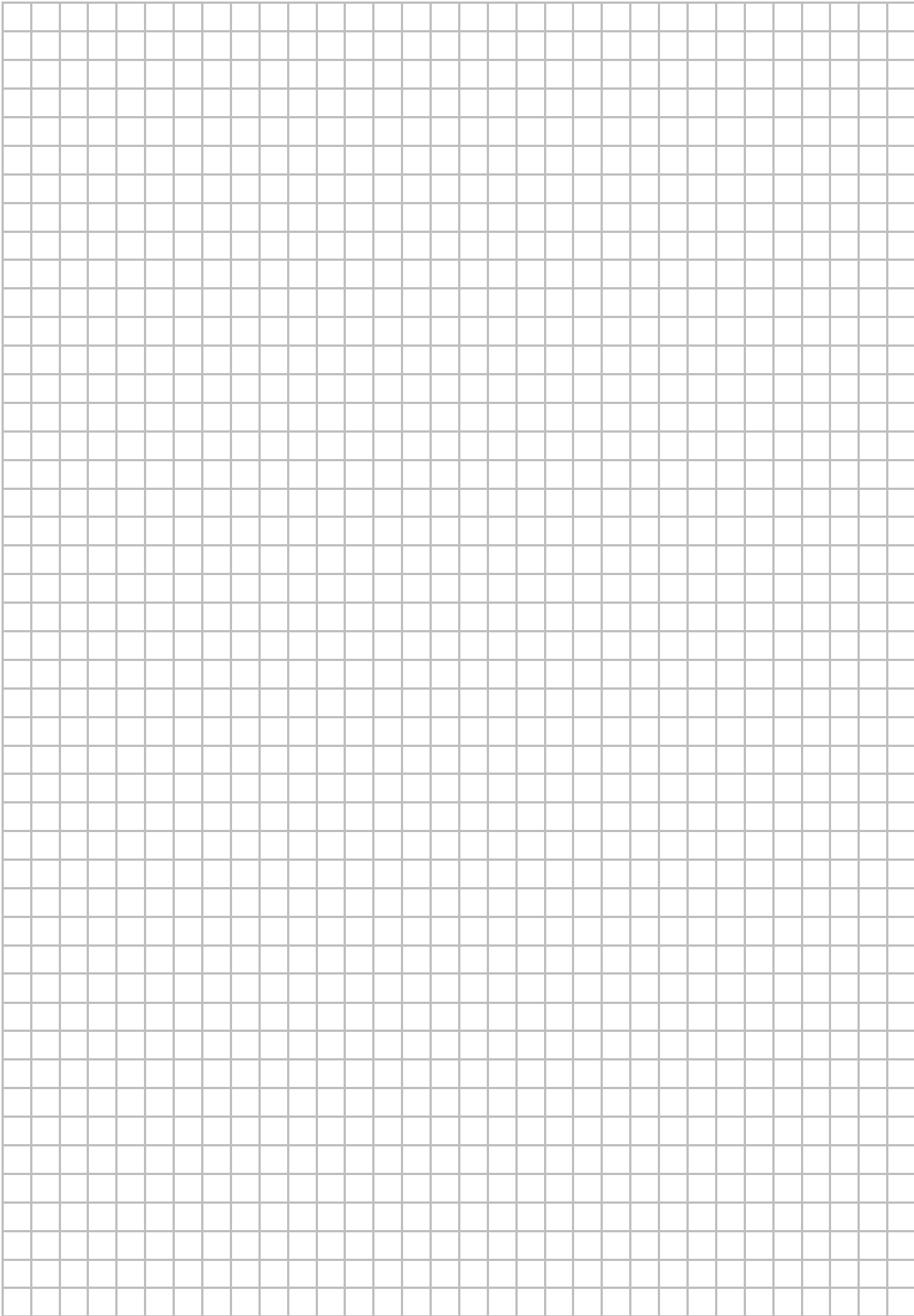
- A. (-3) B. 0 C. 3 D. 4

Zadanie 9. (0–1)

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział

- A. $(-5, 4)$ B. $(-4, 3)$ C. $\langle -4, 3 \rangle$ D. $(0, 3)$

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)



Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl

Informacja do zadań 10.–12.

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$, gdzie b oraz c są liczbami rzeczywistymi. Jednym z miejsc zerowych funkcji f jest liczba 6.

W układzie współrzędnych (x, y) prosta o równaniu $x = 1$ jest osią symetrii wykresu funkcji f .

Zadanie 10. (0–1)

Współczynnik b jest równy

- A. (-2) B. (-1) C. $(-\frac{1}{2})$ D. 2

Zadanie 11. (0–1)

Funkcja f jest określona wzorem

- A. $f(x) = \frac{1}{2}(x - 4)(x - 6)$
B. $f(x) = \frac{1}{2}(x - 4)(x + 6)$
C. $f(x) = \frac{1}{2}(x + 4)(x - 6)$
D. $f(x) = \frac{1}{2}(x + 4)(x + 6)$

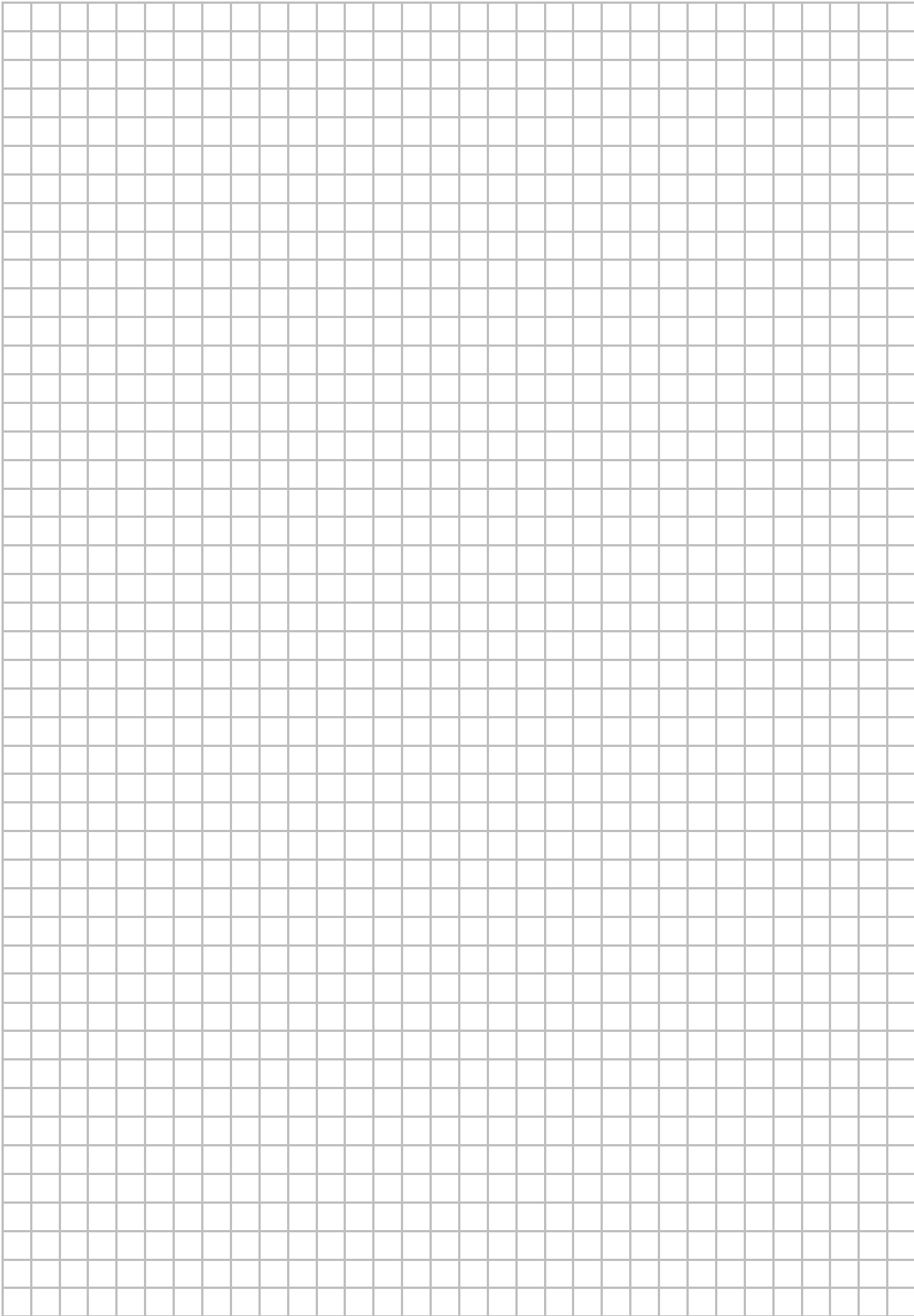
Zadanie 12. (0–1)

Funkcja g jest określona dla każdej liczby rzeczywistej x wzorem $g(x) = f(x - 3)$.

Ośią symetrii wykresu funkcji g jest prosta o równaniu

- A. $x = -2$ B. $x = 1$ C. $x = 3$ D. $x = 4$

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)



Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl

Zadanie 13. (0–1)

Ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Różnica tego ciągu jest równa (-4) oraz $a_{10} = -24$.

Szósty wyraz ciągu (a_n) jest równy

- A. (-12) B. (-8) C. (-4) D. 0

Zadanie 14. (0–1)

Ciąg geometryczny (a_n) , o wszystkich wyrazach rzeczywistych różnych od 0, jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Wyrazy tego ciągu spełniają warunek $a_3 = -8 \cdot a_6$.

Iloraz ciągu (a_n) jest równy

- A. (-2) B. $(-\frac{1}{2})$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2

Zadanie 15. (0–1)

Kąt α jest ostry oraz $\cos \alpha = \frac{5}{13}$.

Tangens kąta α jest równy

- A. $\frac{5}{12}$ B. $\frac{12}{13}$ C. $\frac{13}{12}$ D. $\frac{12}{5}$

Zadanie 16. (0–1)

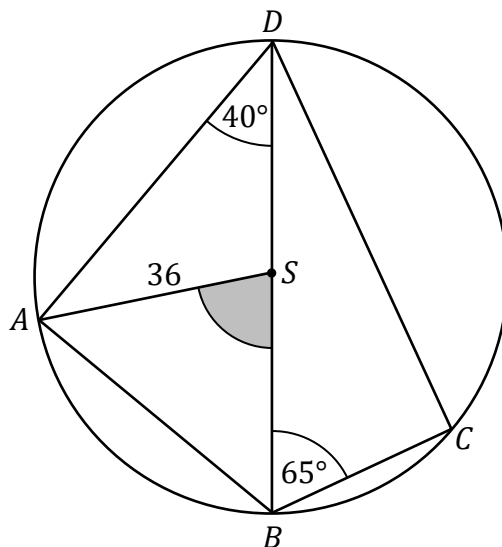
Liczba $\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ$ jest równa

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Informacja do zadań 17.–18.

Punkty A , B , C oraz D leżą na okręgu o środku w punkcie S i o promieniu 36. Punkt S leży na odcinku BD . Kąt BDA ma miarę 40° , a kąt DBC ma miarę 65° (zobacz rysunek).

**Zadanie 17. (0–1)**

Miara kąta ostrego BSA jest równa

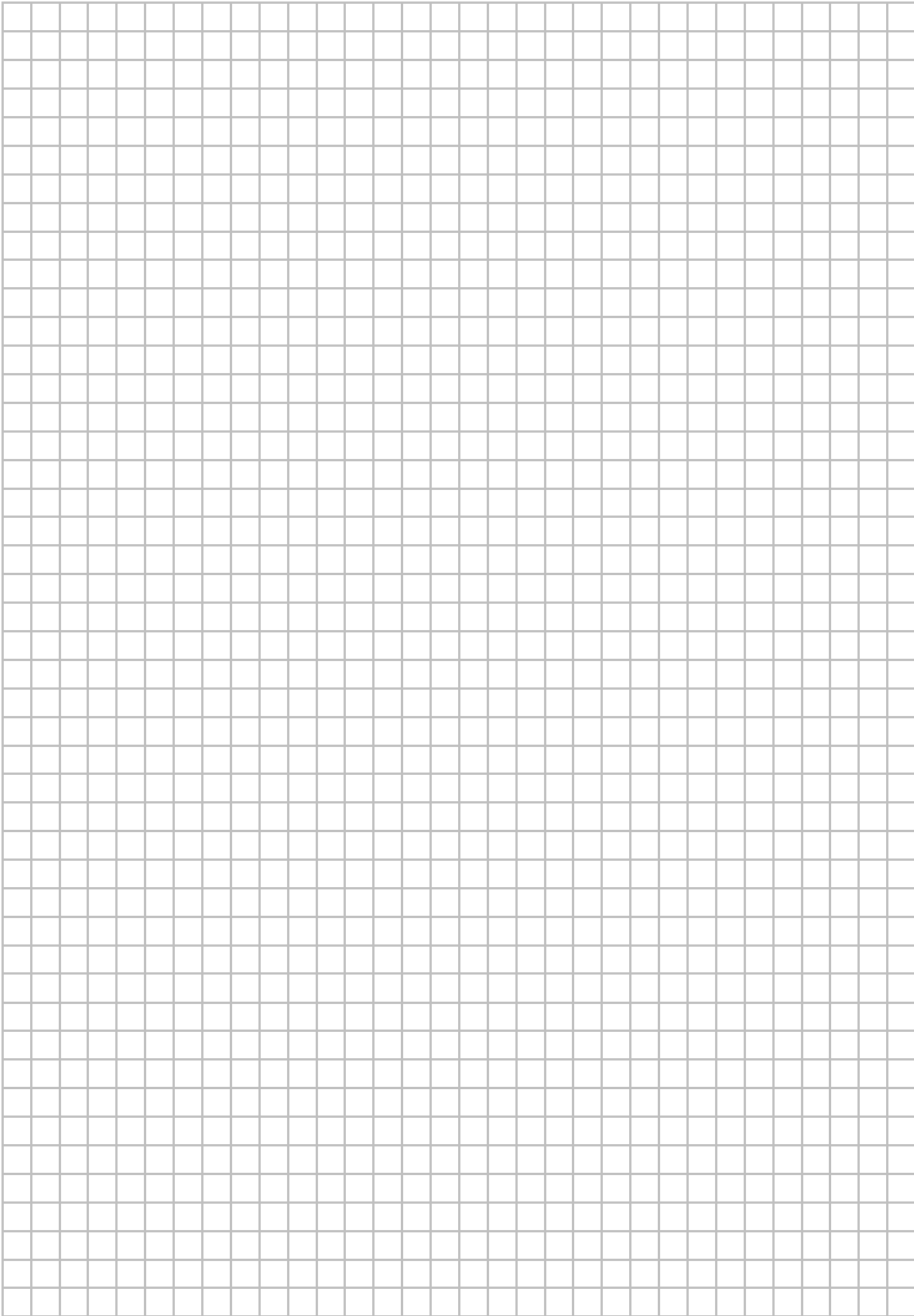
- A. 20° B. 40° C. 50° D. 80°

Zadanie 18. (0–1)

Długość łuku BC , na którym jest oparty kąt wpisany CDB , jest równa

- A. 8π B. 10π C. 13π D. 20π

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)



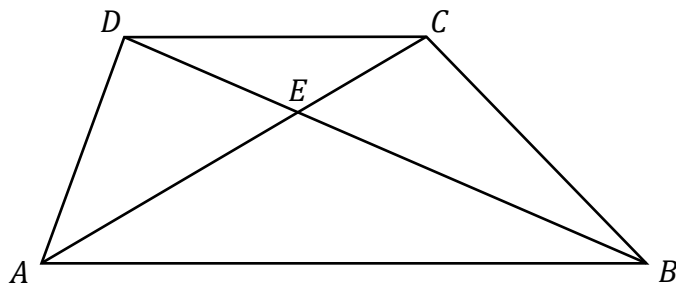
Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl

Informacja do zadań 19.–20.

Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD takich, że $|AB| = 2 \cdot |CD|$.

Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E (zobacz rysunek).

Pole trójkąta CDE jest równe 2, a pole trójkąta BCE jest równe 4.

**Zadanie 19. (0–1)**

Pole trójkąta AED jest równe

A. 2

B. 3

C. 4

D. 8

Zadanie 20. (0–1)

Pole trójkąta ABE jest równe

A. 4

B. 6

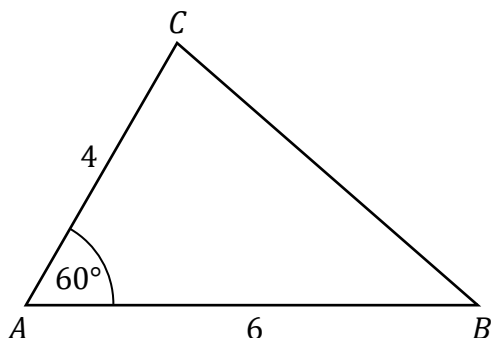
C. 8

D. 10

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Zadanie 21. (0–1)

Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AB| = 6$, $|AC| = 4$ oraz $|\angle CAB| = 60^\circ$ (zobacz rysunek).



Pole trójkąta ABC jest równe

- A. 6 B. $6\sqrt{3}$ C. 12 D. $12\sqrt{3}$

Zadanie 22. (0–1)

W układzie współrzędnych (x, y) proste k oraz l są określone równaniami

$$k: y = (3 - m)x + 5$$

$$l: y = (m + 3)x - 4$$

Proste k oraz l są równoległe, gdy liczba m jest równa

- A. (-3) B. 0 C. $\sqrt{10}$ D. 3

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Zadanie 23. (0–1)

Każda ściana boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest trójkątem równobocznym o boku długości 8.

Wysokość tego ostrosłupa jest równa

- A. 4 B. $4\sqrt{2}$ C. $4\sqrt{3}$ D. 6

Zadanie 24. (0–1)

Objętość walca o promieniu podstawy 2 jest równa $16\pi^2$.

Wysokość tego walca jest równa

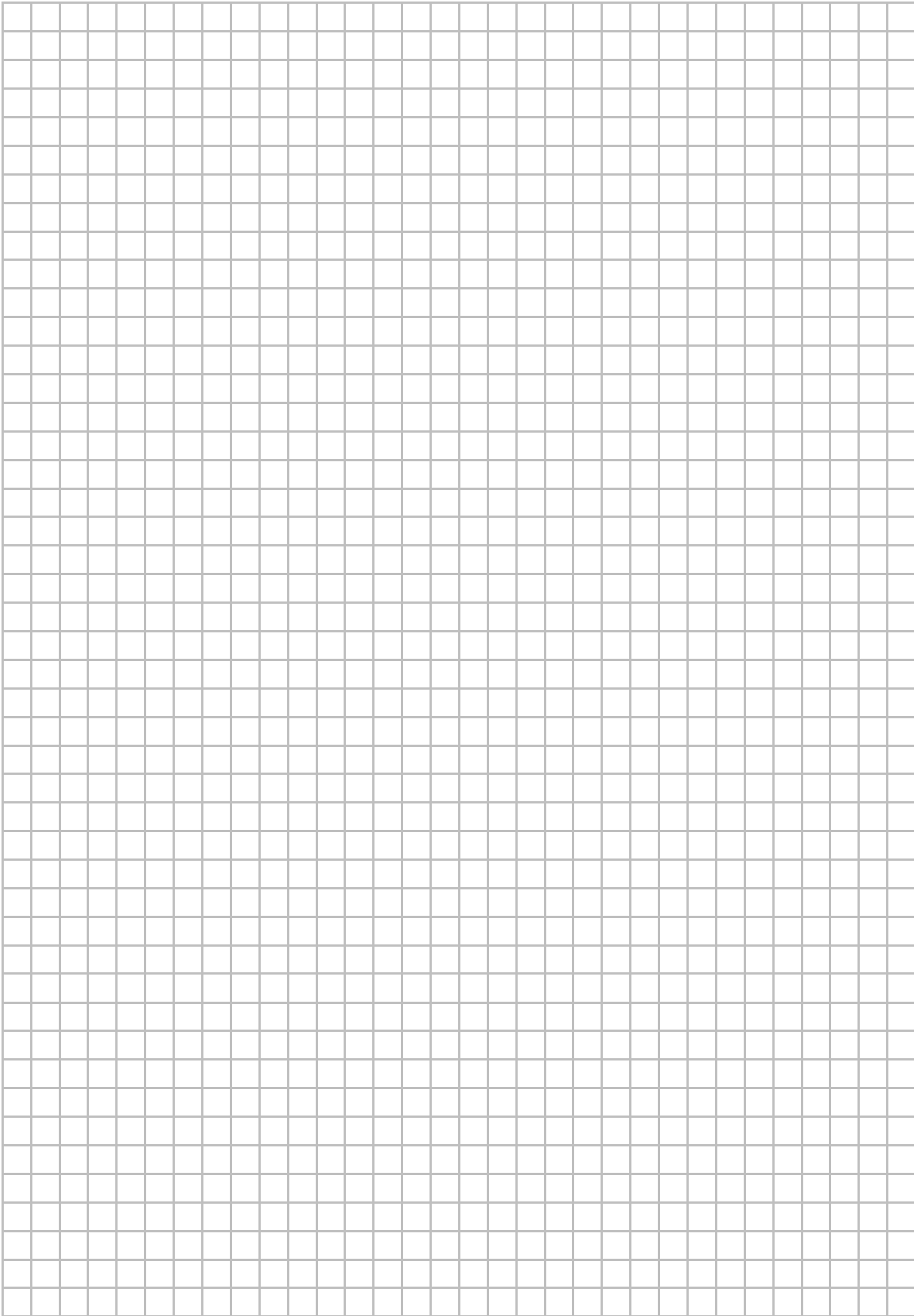
- A. 2 B. 4 C. 2π D. 4π

Zadanie 25. (0–1)

Wszystkich trzycyfrowych liczb naturalnych większych od 500, w których zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry nieparzyste, jest

- A. 13 B. 50 C. 75 D. 107

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

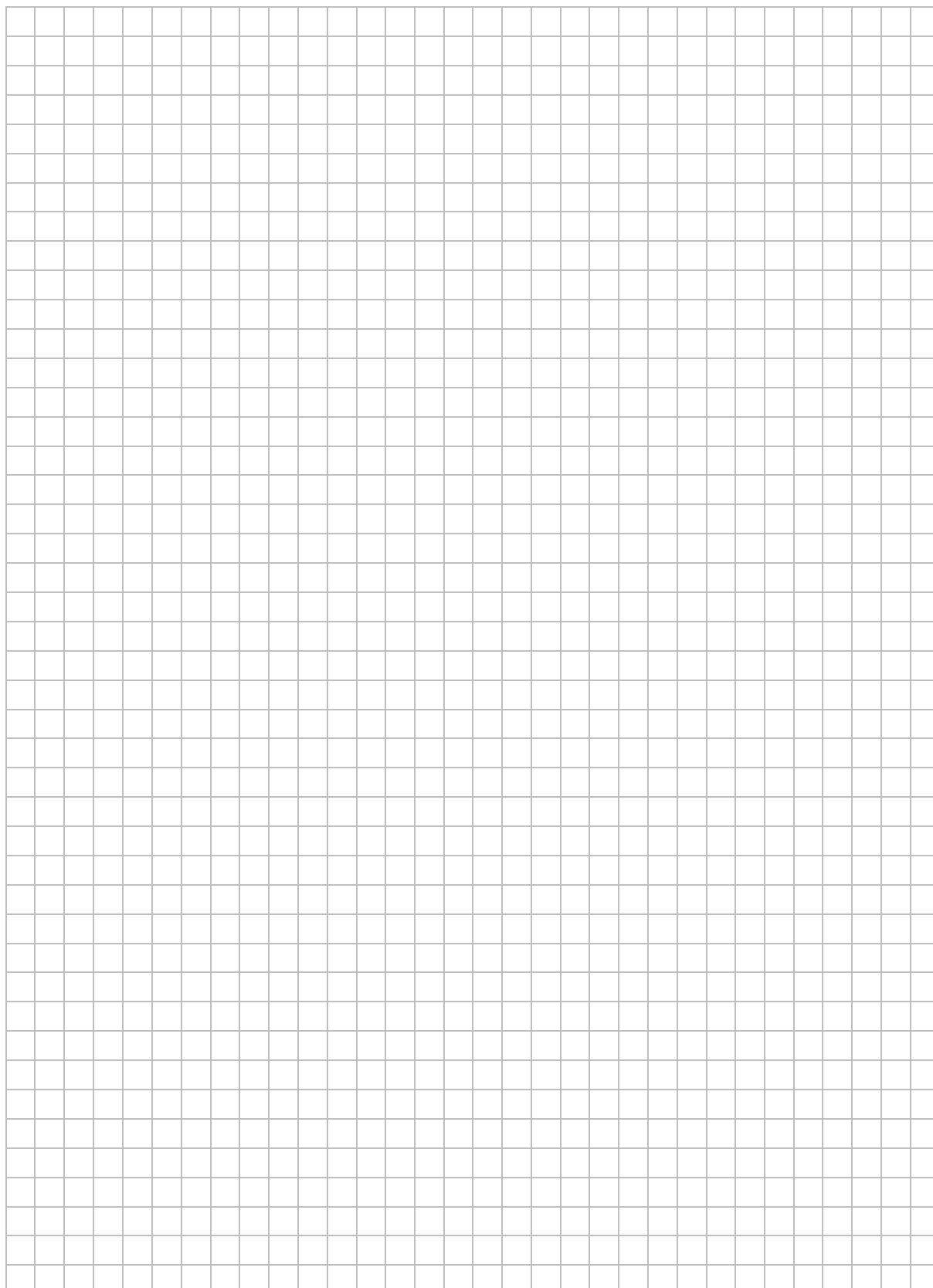


Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl

Zadanie 26. (0–2)

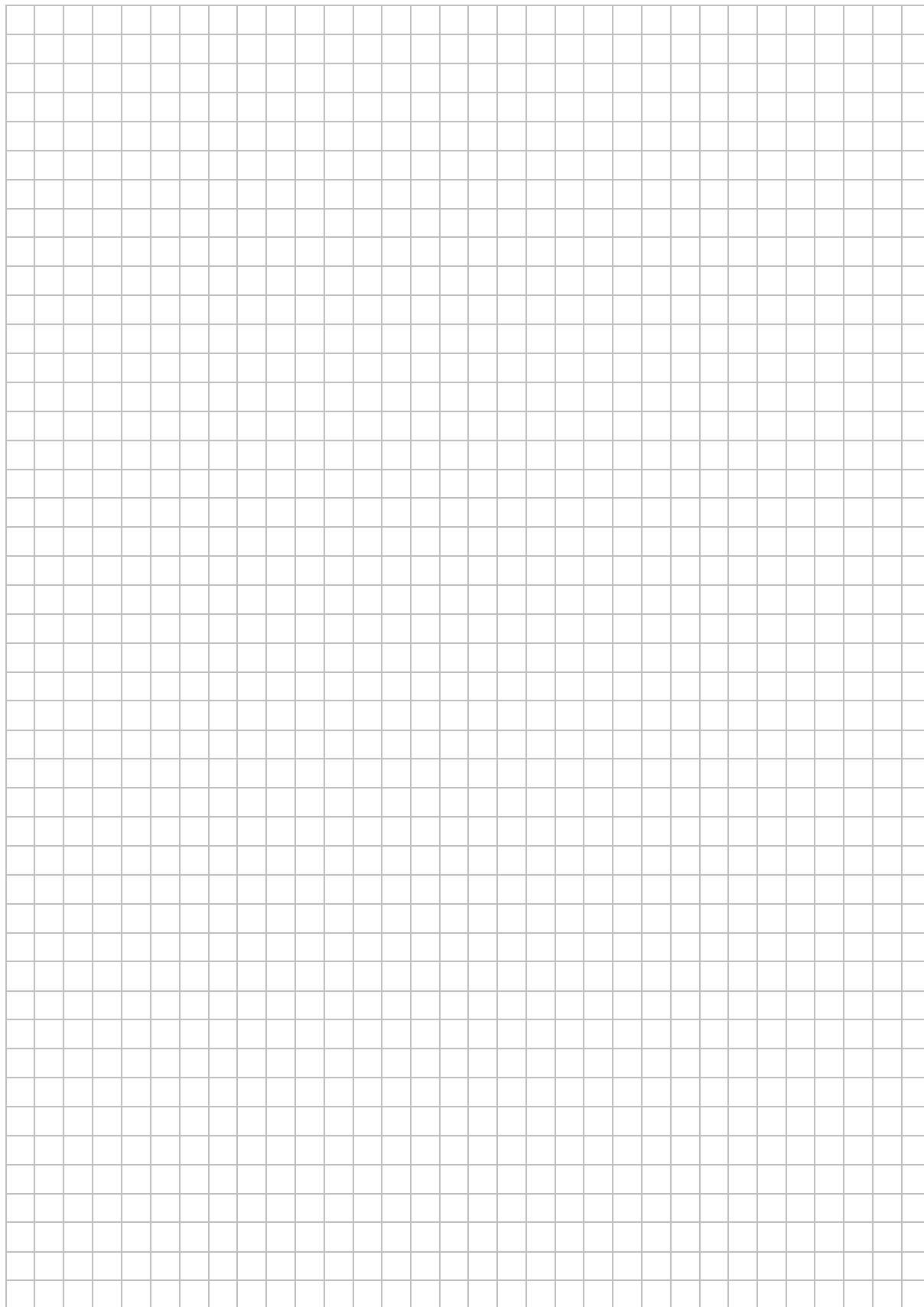
Rozwiąż nierówność

$$-3x^2 > 6x - 9$$



Zadanie 27. (0–2)

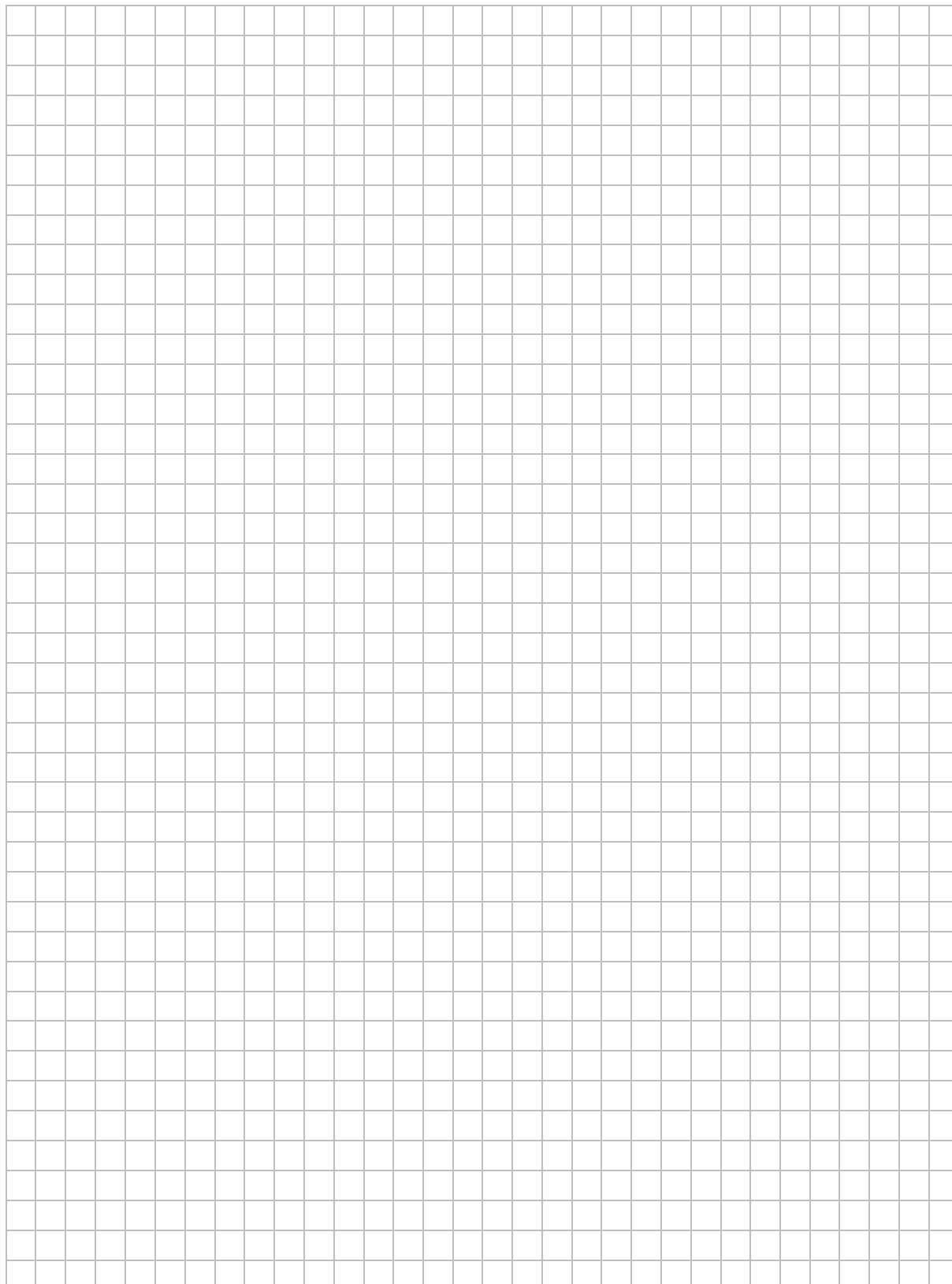
Wykaż, że liczba $8^{50} - 2^{145}$ jest podzielna przez 31.



Zadanie 28. (0–2)

Rozwiąż równanie

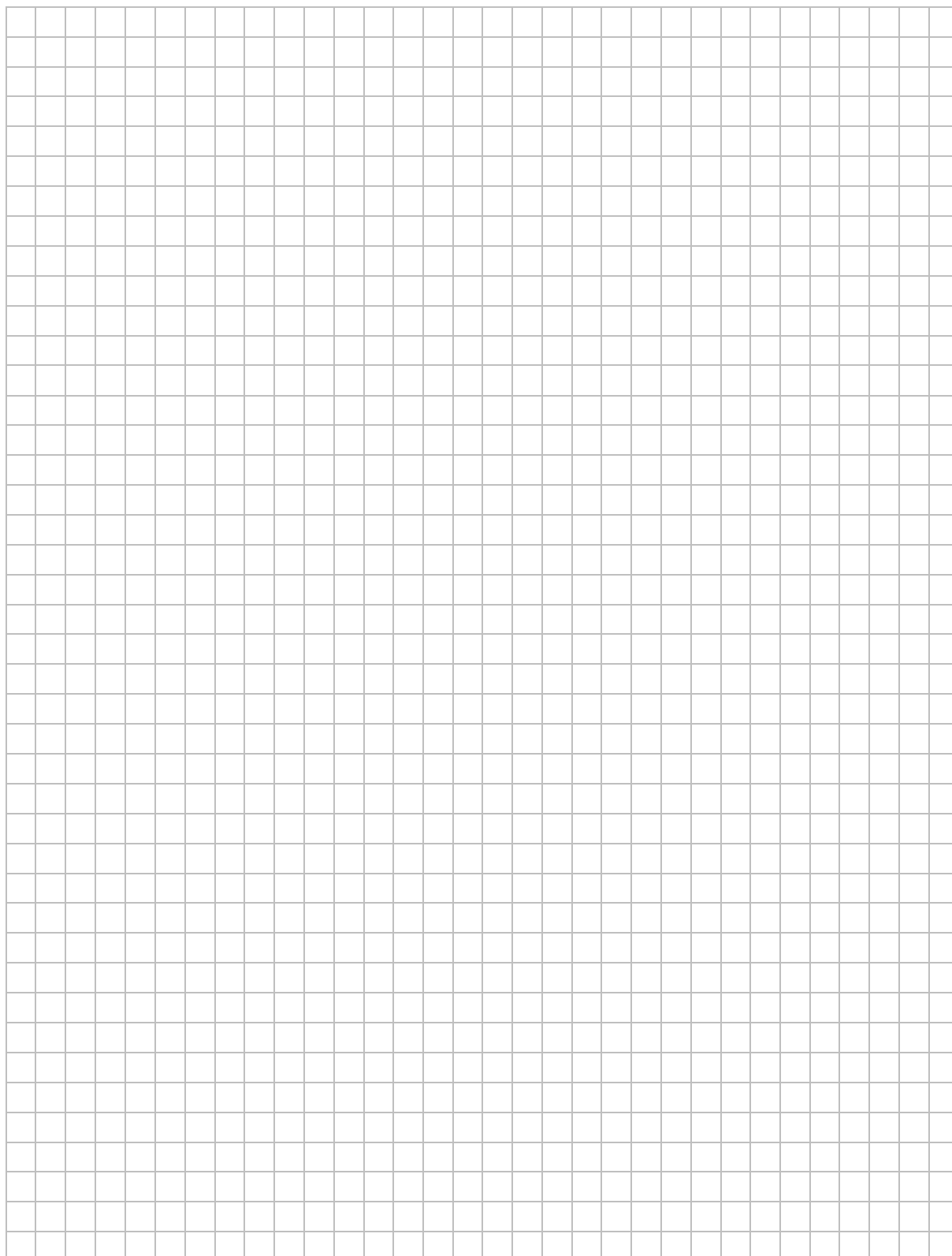
$$\frac{3}{3x-7} = \frac{5x}{x-8}, \text{ gdzie } x \neq \frac{7}{3} \text{ i } x \neq 8.$$



Zadanie 29. (0–2)

Właściciel restauracji kupił 75 kilogramów pomidorów: x kg pomidorów malinowych w cenie 11 złotych za kilogram oraz y kg pomidorów cherry w cenie 7,98 złotych za kilogram. Za pomidory zapłacił łącznie 752,52 złotych.

Oblicz, ile kilogramów pomidorów malinowych kupił właściciel restauracji.

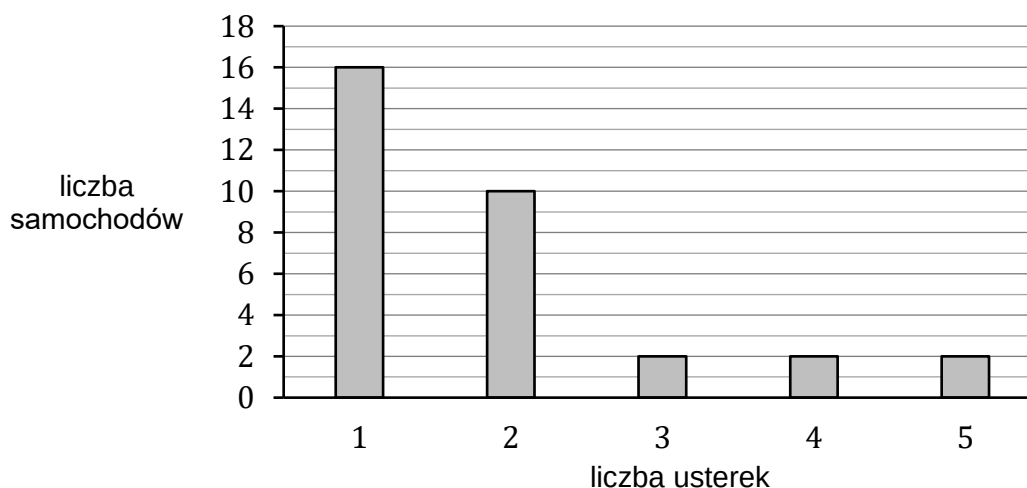


Zadanie 30. (0–2)

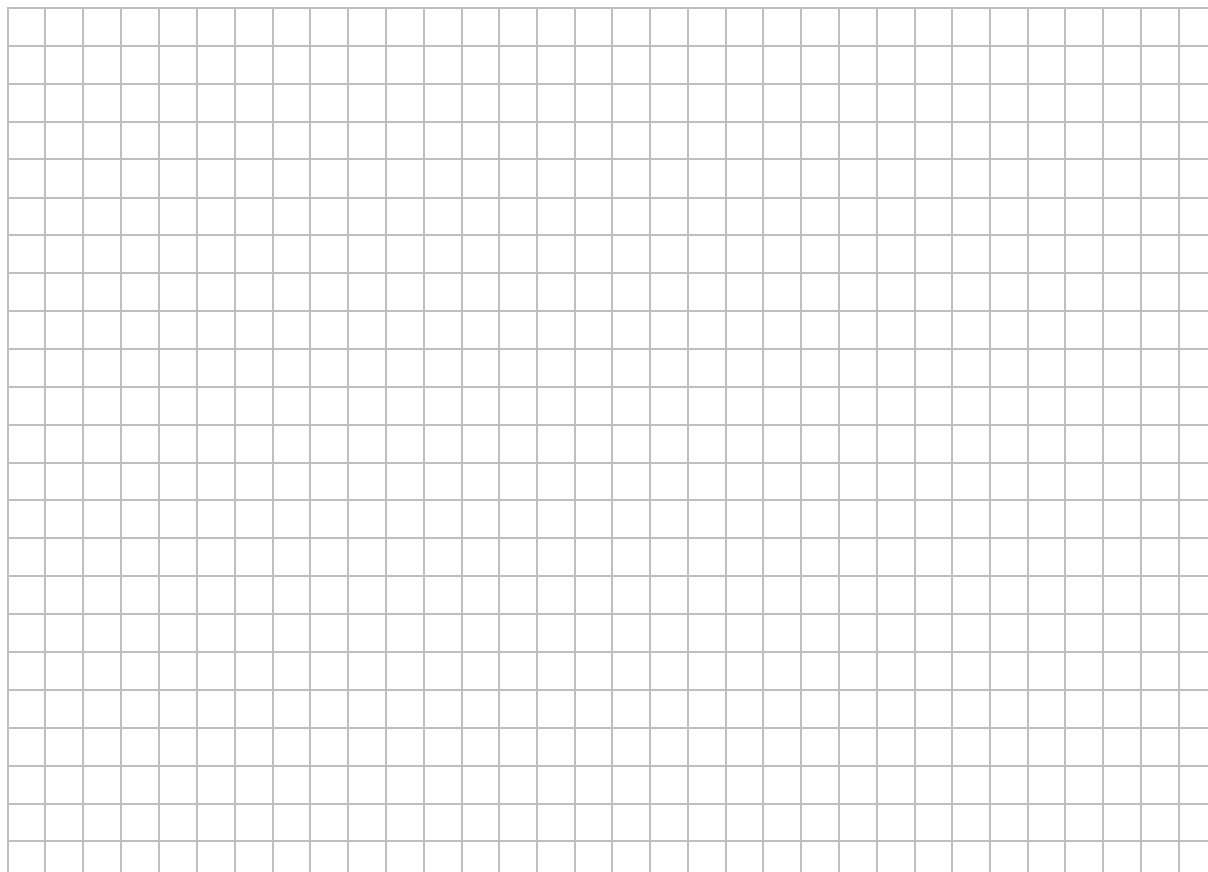
W stacji diagnostycznej odnotowywano liczby usterek wykrytych podczas przeglądów technicznych pięcioletnich samochodów w lipcu 2025 roku.

Wszystkie odnotowane wyniki przedstawiono na poniższym diagramie.

Na osi poziomej podano liczbę usterek, które zostały wykryte podczas przeglądów, a na osi pionowej podano liczbę samochodów, w których wykryto daną liczbę usterek.



Oblicz średnią arytmetyczną oraz medianę liczby usterek wykrytych na tej stacji podczas tych przeglądów.

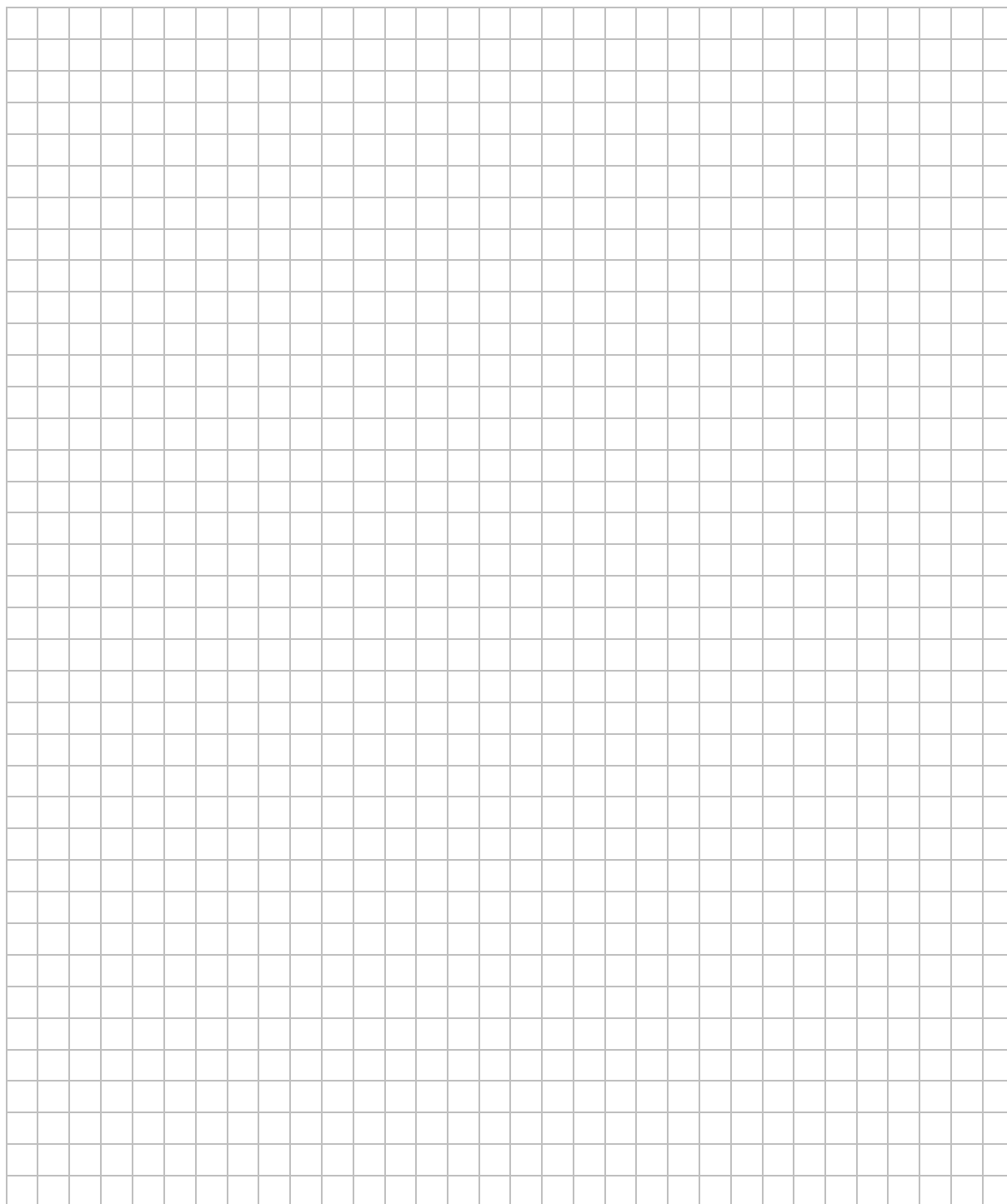


Zadanie 31. (0–2)

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ścianie ma inną liczbę oczek – od jednego oczka do sześciu oczek.

Zapisujemy kolejno liczby wyrzuconych oczek i w ten sposób otrzymujemy liczbę dwucyfrową, przy czym pierwsza wyrzucona liczba oczek jest cyfrą dziesiątek, a druga – cyfrą jedności tej liczby dwucyfrowej.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że otrzymana w ten sposób liczba dwucyfrowa będzie nieparzysta i podzielna przez 3.

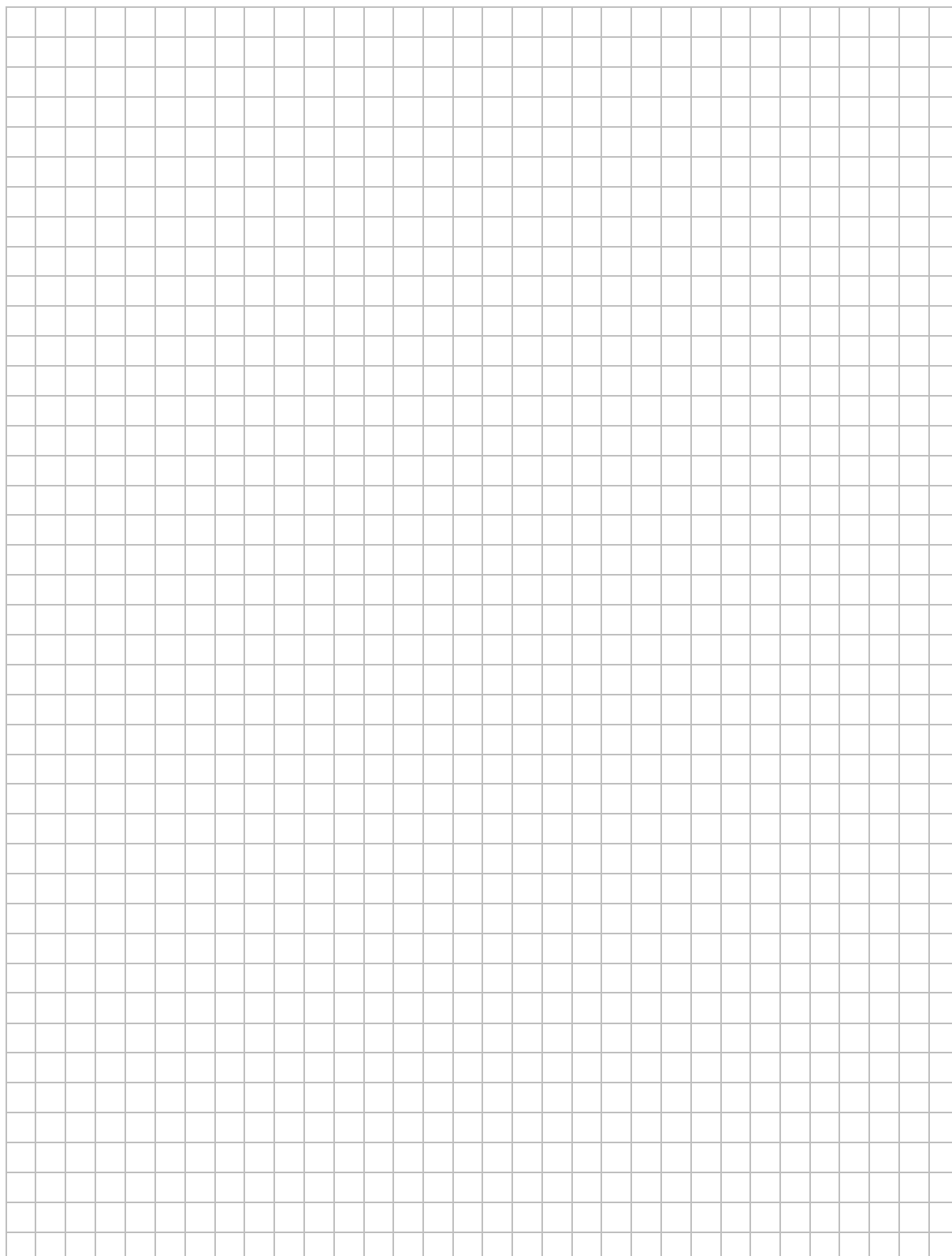


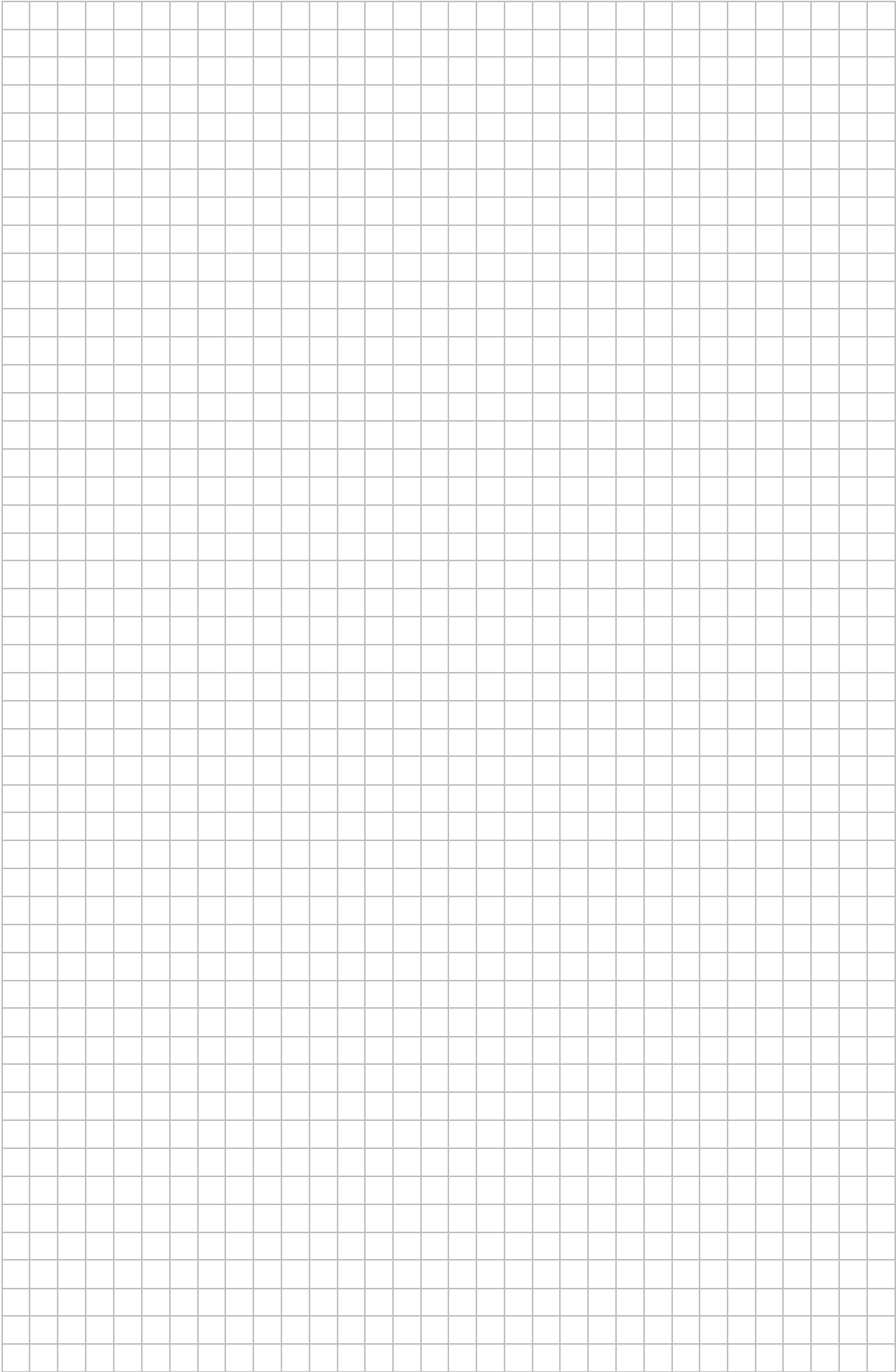
Zadanie 32. (0–4)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \frac{32 \cdot (-1)^n}{2^{n-1}}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Trzywyrazowy ciąg $(x, a_6, 2x + 10)$, gdzie x jest liczbą rzeczywistą, jest arytmetyczny.

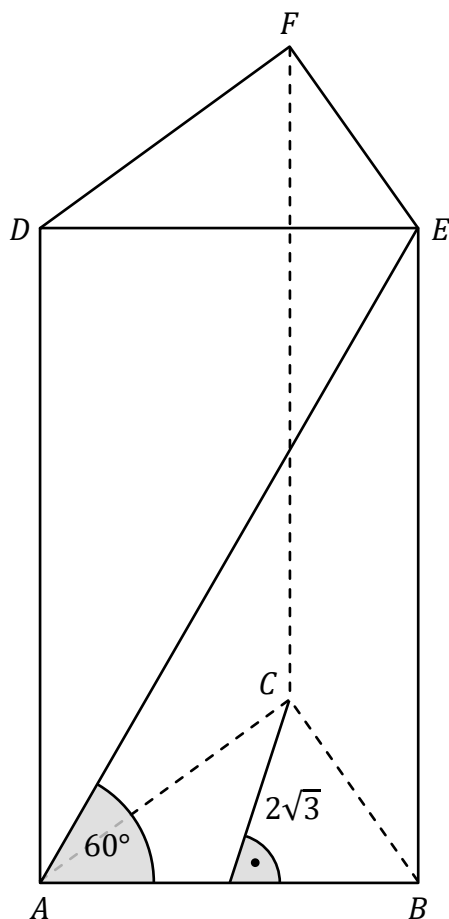
Oblicz x oraz różnicę tego ciągu arytmetycznego.



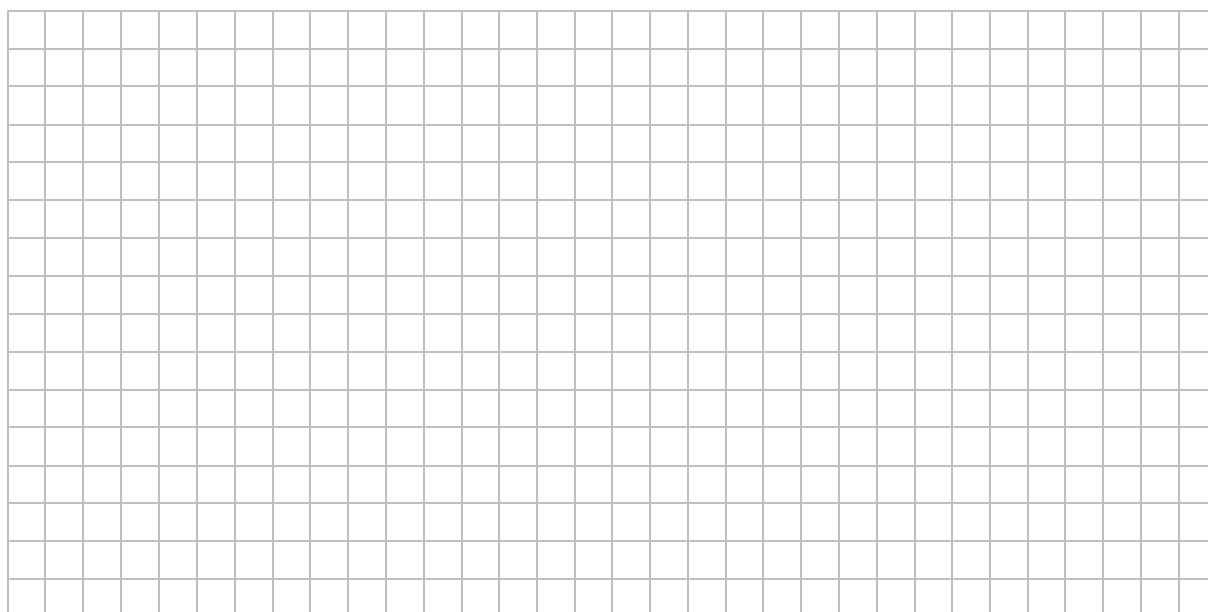


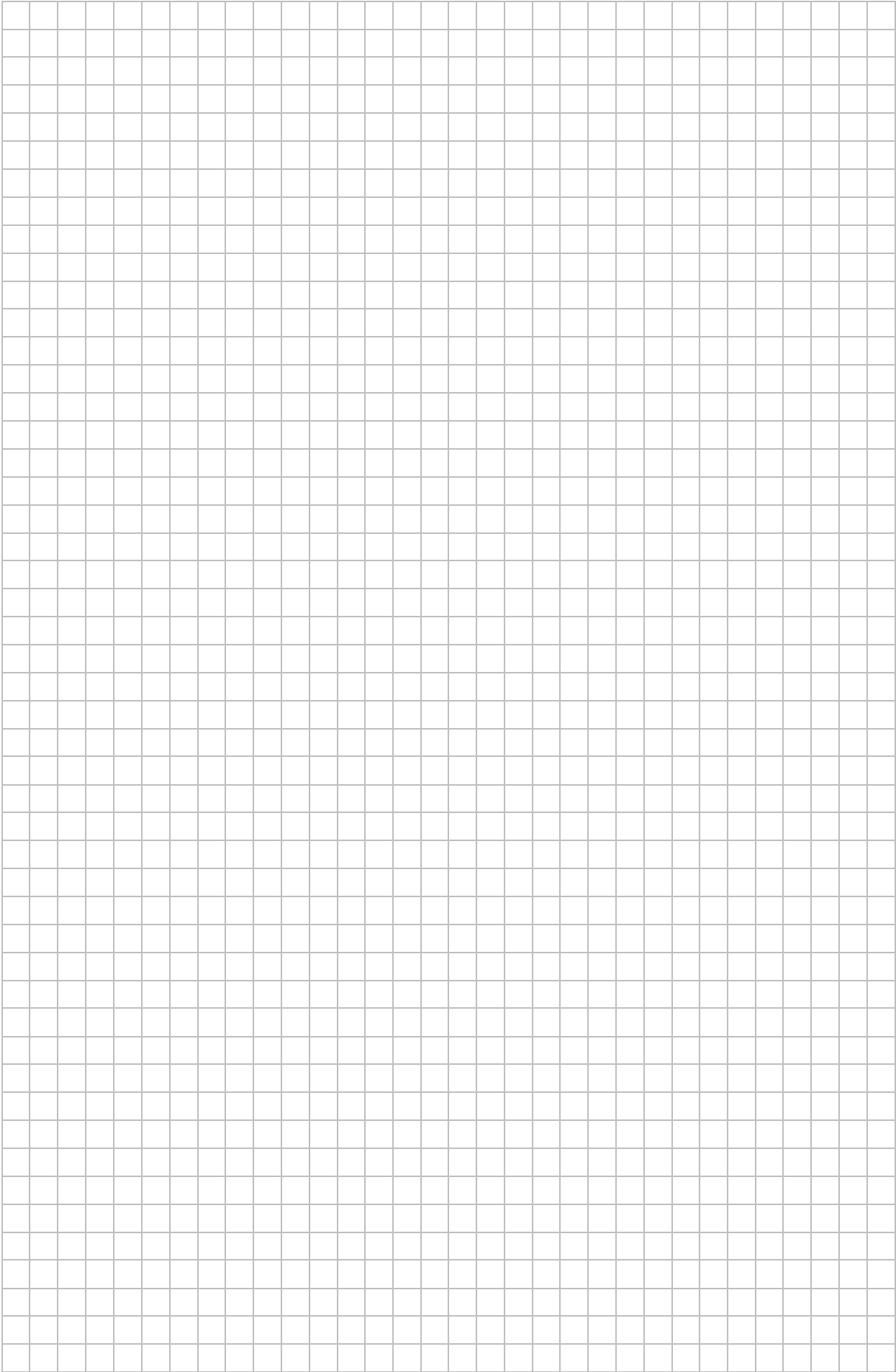
Zadanie 33. (0–4)

Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny $ABCDEF$. Wysokość podstawy ABC jest równa $2\sqrt{3}$. Przekątna AE ściany bocznej $ABED$ tworzy z krawędzią AB kąt o mierze 60° (zobacz rysunek).



Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.





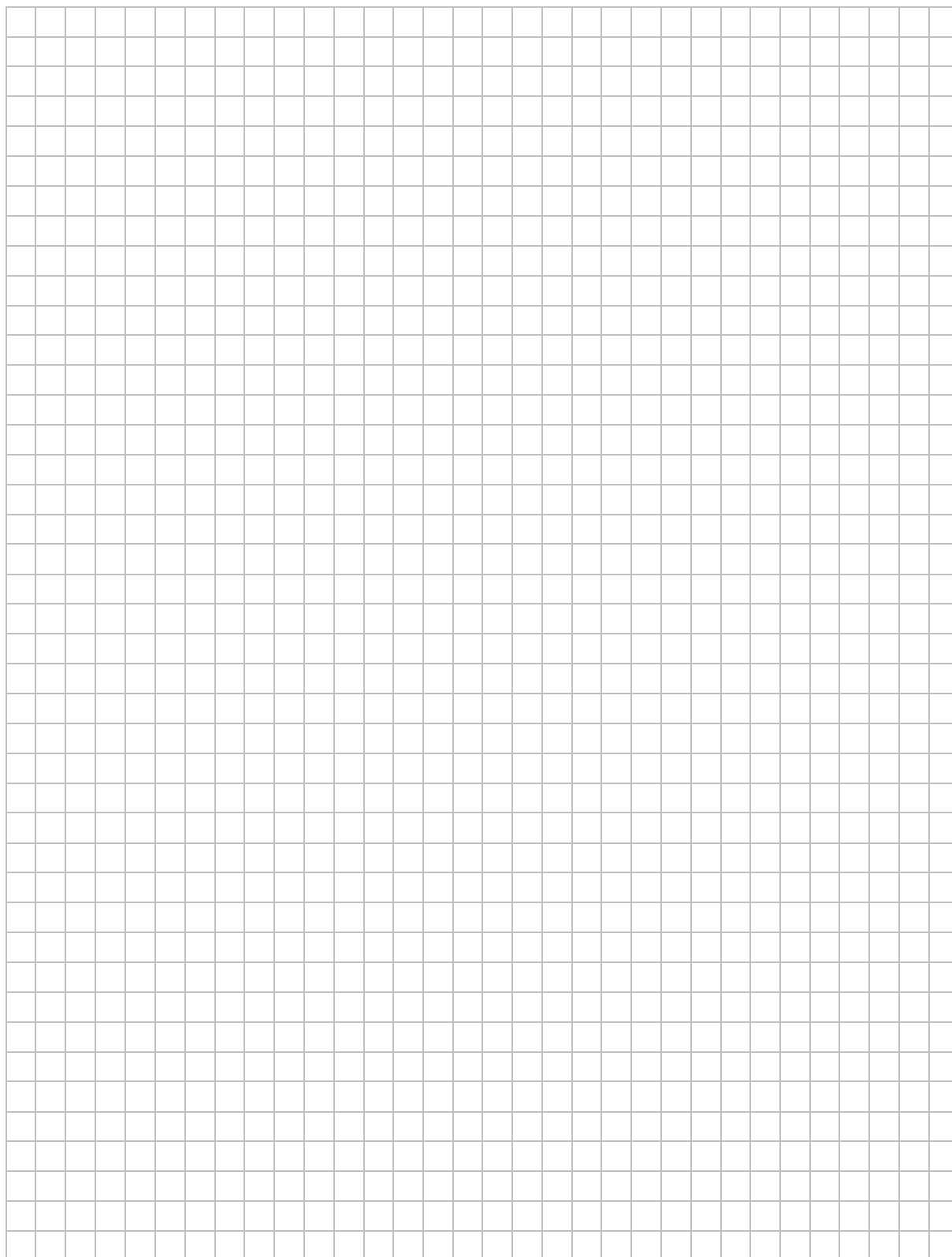
Zadanie 34. (0–5)

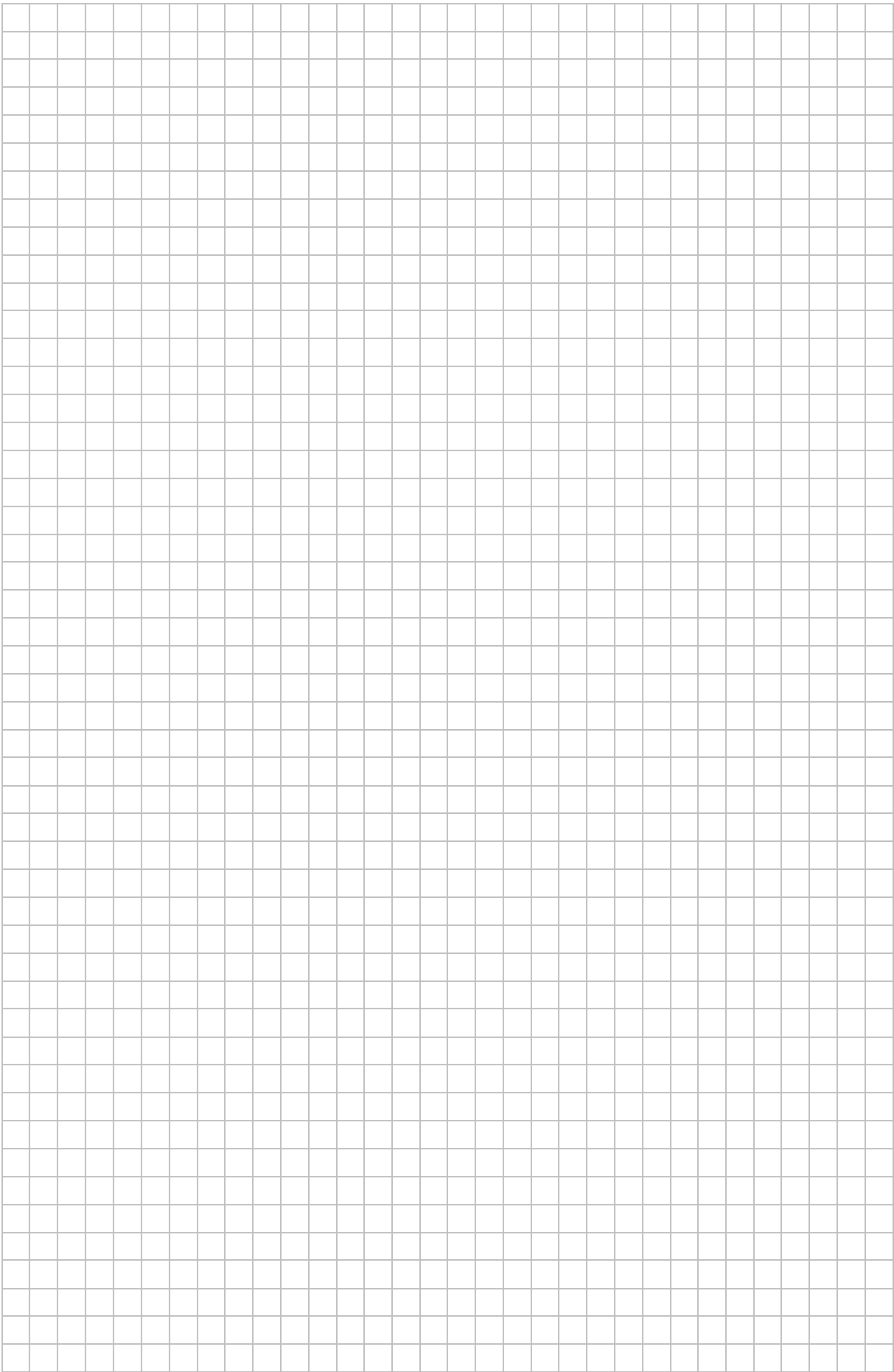
W układzie współrzędnych (x, y) dane są punkty $A = (-4, 7)$ oraz $B = (12, 3)$.

Prosta AB przecina oś Ox w punkcie C .

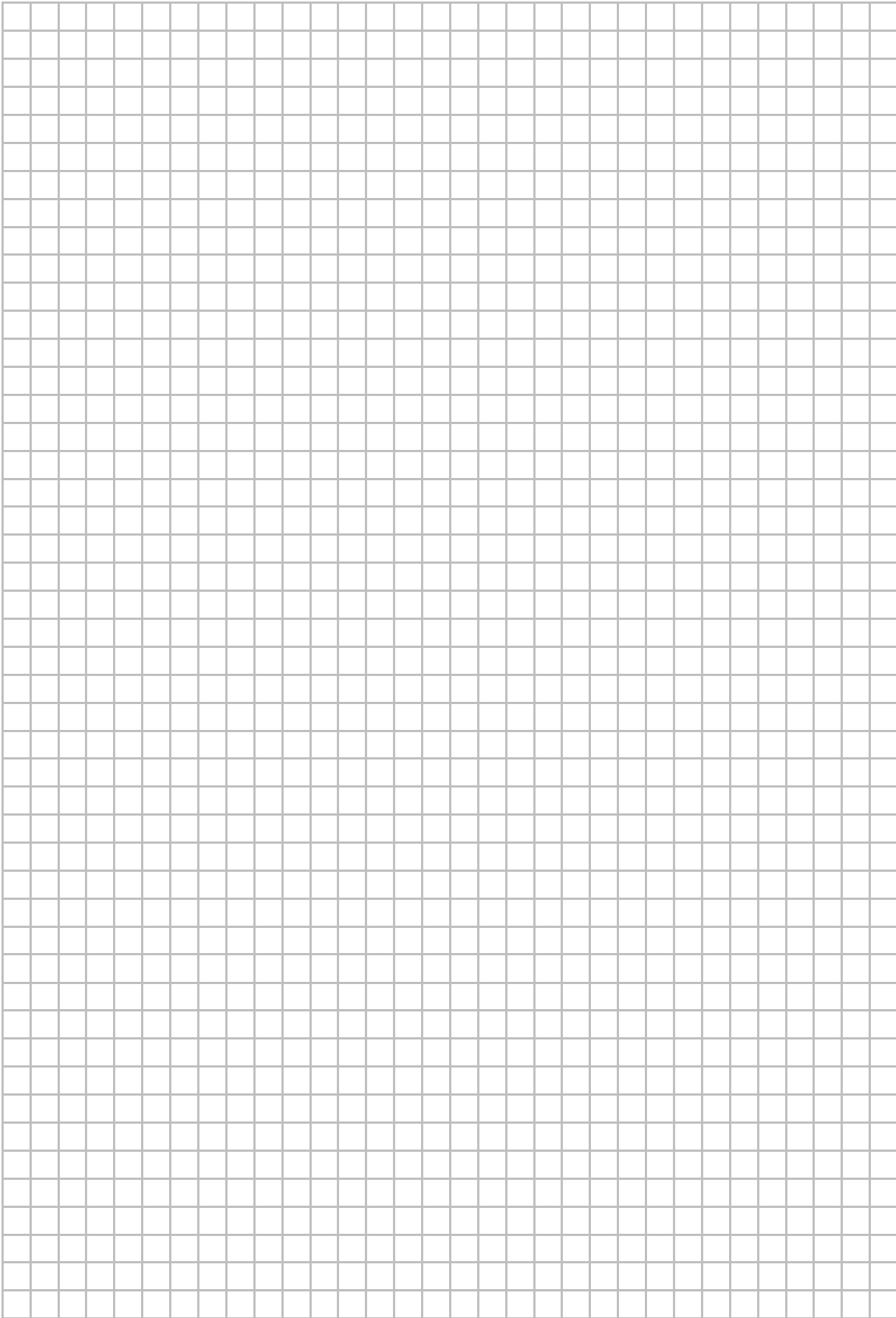
Symetralna odcinka AB przecina oś Ox w punkcie D .

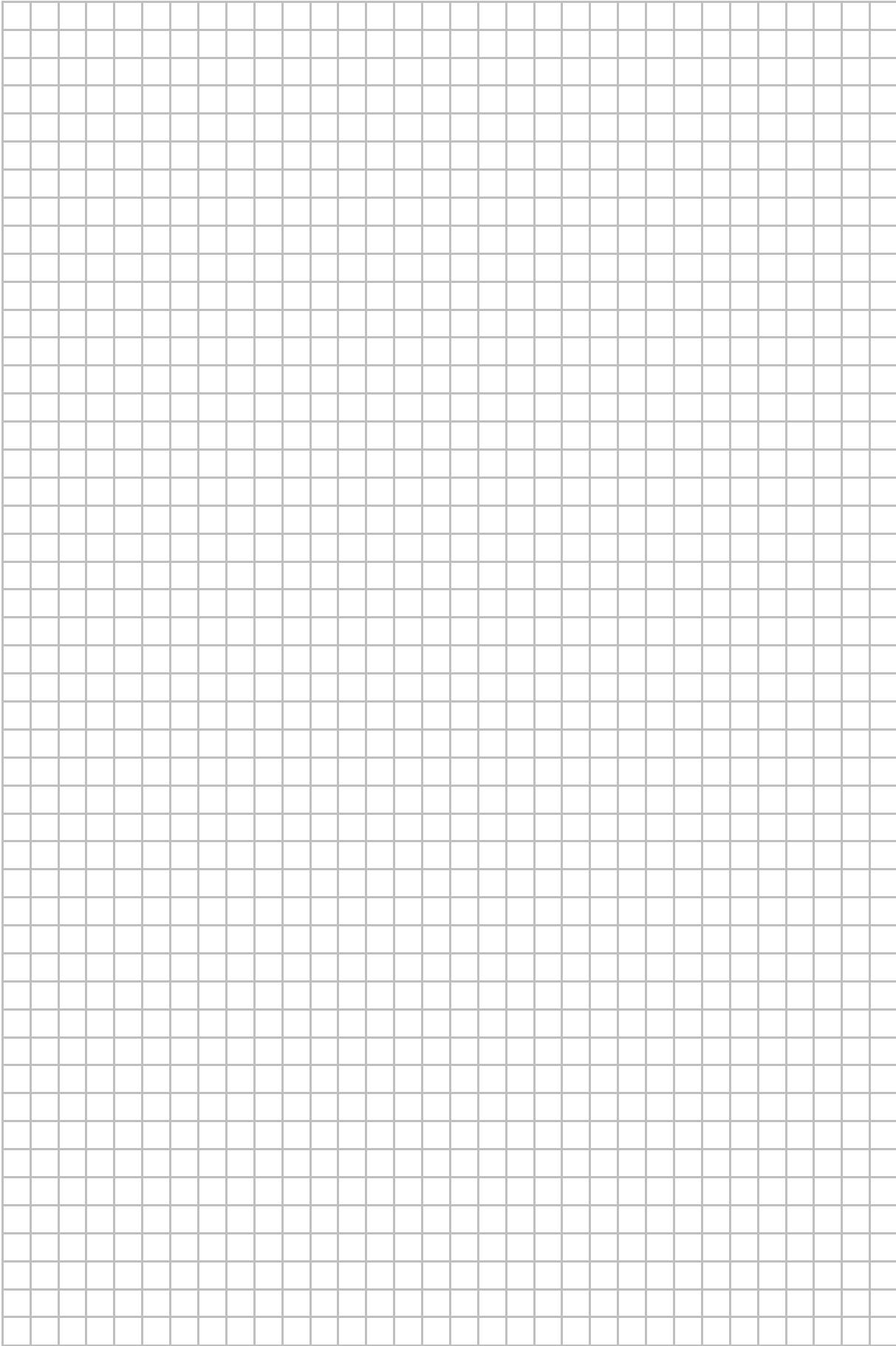
Oblicz współrzędne punktów C i D oraz pole trójkąta ACD .





BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)





MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Formuła 2015

MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Formuła 2015

MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Formuła 2015

<i>Rodzaj dokumentu:</i>	Zasady oceniania rozwiązań zadań
<i>Egzamin:</i>	Egzamin maturalny
<i>Przedmiot:</i>	Matematyka
<i>Poziom:</i>	Poziom podstawowy
<i>Formy arkusza:</i>	EMAP-P0-100, EMAP-P0-200, EMAP-P0-300, EMAP-P0-400, EMAP-P0-600, EMAP-P0-700, EMAP-P0-Q00, EMAU-P0-100
<i>Termin egzaminu:</i>	19 sierpnia 2025 r.

Uwaga:

Gdy wymaganie egzaminacyjne dotyczy treści z III etapu edukacyjnego, dopisano „G”.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania określone w podstawie programowej ¹	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.4) [...] stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.3) posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

¹ Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 27 sierpnia 2012 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół (Dz.U. z 2012 r. poz. 977, z późn. zm., tj. Dz.U. z 2014 r. poz. 803, Dz.U. z 2016 r. poz. 895).

Zadanie 3. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.6) wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na [...] logarytm ilorazu [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 4. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 2.1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 5. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.3) rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 6. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.7) korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x + 1)(x - 7) = 0$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 7. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 4.6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 8. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: G8.3) odczytuje z wykresu funkcji: wartość funkcji dla danego argumentu [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 9. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 4.3) odczytuje z wykresu własności funkcji [...] zbiór wartości [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 10. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 4.10) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej [...] w postaci ogólnej [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 11. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 4.9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 12. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 4.12) wykorzystuje własności funkcji [...] kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 13. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 5.3) stosuje wzór na n -ty wyraz [...] ciągu arytmetycznego.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 14. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 5.4) stosuje wzór na n -ty wyraz [...] ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 15. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 6.5) znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 16. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 6.1) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus [...] kątów o miarach od 0° do 180° .

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 17. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 7.1) stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 18. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: G10.5) oblicza długość [...] łuku okręgu.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 19. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: G10.8) korzysta z własności [...] przekątnych [...] w trapezach; G10.9) oblicza pola [...] trójkątów [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 20. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 7.3) rozpoznaje trójkąty podobne [...]. G10.12) oblicza stosunek pól wielokątów podobnych; G10.9) oblicza pola [...] trójkątów [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 21. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 7.4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 22. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 8.2) bada równoległość [...] prostych na podstawie ich równań kierunkowych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 23. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: G11.2) oblicza [...] objętość [...] ostrosłupa.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 24. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: G11.2) oblicza [...] objętość [...] walca [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 25. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 10.2) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

ZADANIA OTWARTE

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże zadanie i otrzyma poprawny wynik, lecz w końcowym zapisie przekształca ten wynik i popełnia przy tym błąd, to może uzyskać maksymalną liczbę punktów.
3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 26. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.5) rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i zapisanie zbioru rozwiązań nierówności:

$$x \in (-3, 1)$$

ALBO

- zastosowanie poprawnej metody i przedstawienie zbioru rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziału, np.



1 pkt – obliczenie/zapisanie pierwiastków trójmianu kwadratowego $-3x^2 - 6x + 9$:

$$x_1 = -3 \text{ oraz } x_2 = 1.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający, obliczając pierwiastki trójmianu $-3x^2 - 6x + 9$, popełni błędy (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionych błędów zapisze zbiór rozwiązań nierówności, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego, w przypadku gdy błędnie obliczony przez zdającego wyróżnik Δ jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli zdający rozpatruje inny niż podany w zadaniu trójmian kwadratowy, który nie wynika z błędu przekształcenia (np. $-3x^2 - 6x$), i w konsekwencji rozpatruje inną nierówność (np. $-3x^2 - 6x > 0$), to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający poda zbiór rozwiązań w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziału i jednocześnie zapisze niewłaściwy przedział jako zbiór rozwiązań (np. $x \in [-3, 1]$), to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $(1, -3)$, to otrzymuje **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy nierówność:

$$-3x^2 > 6x - 9$$

$$-3x^2 - 6x + 9 > 0 \quad /: (-3)$$

$$x^2 + 2x - 3 < 0$$

Obliczamy miejsca zerowe funkcji $y = x^2 + 2x - 3$.

Obliczamy wyróżnik trójmianu $x^2 + 2x - 3$:

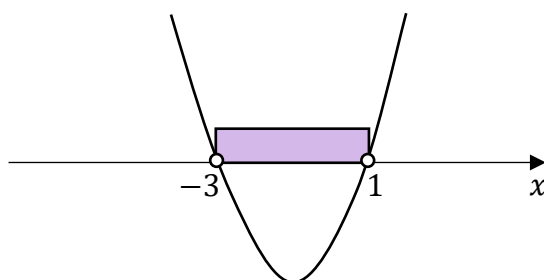
$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$$

Stąd:

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = -3 \quad \text{oraz} \quad x_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = 1$$

Szkicujemy wykres funkcji $y = x^2 + 2x - 3$.

Odczytujemy argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne.



Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(-3, 1)$.

Zadanie 27. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 1.5) wykorzystuje podstawowe własności potęg [...]; 1.4) [...] stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – przekształcenie wyrażenia $8^{50} - 2^{145}$ do postaci $2^{150} - 2^{145}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Korzystamy z własności działań na potęgach i otrzymujemy:

$$8^{50} - 2^{145} = (2^3)^{50} - 2^{145} = 2^{150} - 2^{145}$$

Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias:

$$2^{150} - 2^{145} = 2^{145} \cdot (2^5 - 1) = 2^{145} \cdot 31$$

Liczba 2^{145} jest liczbą całkowitą, zatem liczba $8^{50} - 2^{145}$ jest podzielna przez 31.

Zadanie 28. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.8) rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych [...].

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i uzyskanie poprawnych rozwiązań równania:

$$x = \frac{6}{5} \text{ oraz } x = \frac{4}{3}.$$

1 pkt – przekształcenie równania $\frac{3}{3x-7} = \frac{5x}{x-8}$ do równania kwadratowego, np.
 $3(x-8) = 5x(3x-7).$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe przy przekształcaniu równania, otrzyma równanie kwadratowe, które ma dwa rozwiązania i konsekwentnie je rozwiąże do końca, to może otrzymać **1 punkt** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający, przekształcając równanie wymierne do równania kwadratowego, zastosuje błędną metodę i zapisze np. $15x = (3x - 7)(x - 8)$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający poprawnie przekształci równanie do równania kwadratowego, uzyska poprawne wartości pierwiastków, lecz traktuje równanie jako nierówność (rysuje parabolę i podaje przedziały jako rozwiązanie), to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie. Podobnie, jeżeli zdający poprawnie przekształci równanie do równania kwadratowego, uzyska poprawne wartości pierwiastków, lecz poda odpowiedź w postaci przedziału/sumy przedziałów, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy równanie:

$$\frac{3}{3x-7} = \frac{5x}{x-8}$$
$$3(x-8) = 5x(3x-7)$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe:

$$3x - 24 = 15x^2 - 35x$$
$$15x^2 - 38x + 24 = 0$$

Obliczamy wyróżnik Δ trójmianu kwadratowego $15x^2 - 38x + 24$:

$$\Delta = (-38)^2 - 4 \cdot 15 \cdot 24 = 1444 - 1440 = 4$$

Stąd

$$x_1 = \frac{-(-38) - \sqrt{4}}{2 \cdot 15} = \frac{6}{5}$$

$$x_2 = \frac{-(-38) + \sqrt{4}}{2 \cdot 15} = \frac{4}{3}$$

Otrzymane pierwiastki są różne od liczby $\frac{7}{3}$ i różne od liczby 8, więc są rozwiązaniami danego równania.

Zadanie 29. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: G7.7) za pomocą równań lub układów równań opisuje i rozwiązuje zadania osadzone w kontekście praktycznym.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 51 kg.

1 pkt – zapisanie układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi pozwalającego obliczyć x oraz y , np.

$$x + y = 75 \quad \text{oraz} \quad 11x + 7,98y = 752,52$$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą pozwalającego obliczyć x , np.

$$11x + 7,98 \cdot (75 - x) = 752,52,$$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą pozwalającego obliczyć y , np.

$$11 \cdot (75 - y) + 7,98y = 752,52,$$

ALBO

– zapisanie różnicy $752,52 - 75 \cdot 7,98$ **oraz** zapisanie różnicy $11 - 7,98$,

ALBO

– zapisanie różnicy $75 \cdot 11 - 752,52$ **oraz** zapisanie różnicy $11 - 7,98$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający sprawdza warunki zadania dla wybranych par liczb x oraz y i wskaże właściwą odpowiedź, ale nie uzasadni, że jest to jedyne rozwiązanie zadania, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający w rozwiązaniu używa wartości przybliżonych i otrzymuje wynik różny od 51, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązaniaSposób I

Po uwzględnieniu warunków zadania otrzymujemy:

$$x + y = 75 \quad \text{oraz} \quad 11x + 7,98y = 752,52$$

Z pierwszego z tych równań wyznaczamy $y = 75 - x$ i podstawiamy w miejsce y do drugiego z równań, w wyniku czego otrzymujemy:

$$11x + 7,98 \cdot (75 - x) = 752,52$$

$$11x + 598,5 - 7,98x = 752,52$$

$$3,02x = 154,02$$

$$x = 51$$

Właściciel restauracji kupił 51 kilogramów pomidorów malinowych.

Sposób II

Gdyby właściciel restauracji kupił tylko pomidory cherry, to zapłaciłby za nie

$75 \cdot 7,98 = 598,50$ złotych, a więc o $752,52 - 598,50 = 154,02$ złotych mniej niż zapłacił w rzeczywistości.

Jeden kilogram pomidorów malinowych kosztuje o $11 - 7,98 = 3,02$ złotych więcej niż jeden kilogram pomidorów cherry.

Zatem właściciel restauracji kupił $154,02 : 3,02 = 51$ kilogramów pomidorów malinowych.

Zadanie 30. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: G9.4) wyznacza średnią arytmetyczną i medianę zestawu danych.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawne wyniki: $\bar{x} = 1,875$ oraz $Me = 1,5$.

1 pkt – obliczenie średniej arytmetycznej liczby usterek: $\bar{x} = 1,875$,

ALBO

– obliczenie mediany liczby usterek: $Me = 1,5$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy średnią arytmetyczną liczby usterek:

$$\bar{x} = \frac{16 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{16 + 10 + 2 + 2 + 2} = \frac{60}{32} = 1,875$$

Medianą uporządkowanego niemalejąco ciągu 32 liczb jest średnia arytmetyczna dwóch środkowych wyrazów tego ciągu (tzn. średnia arytmetyczna wyrazów szesnastego i siedemnastego). Zatem

$$Me = \frac{1 + 2}{2} = 1,5$$

Zadanie 31. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.3) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia A

i uzyskanie poprawnego wyniku: $P(A) = \frac{6}{36}$.

1 pkt – wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych *LUB* obliczenie/podanie liczby tych zdarzeń: $|\Omega| = 6 \cdot 6$, *LUB* sporządzenie tabeli o 36 polach odpowiadających zdarzeniom elementarnym, *LUB* sporządzenie pełnego drzewa stochastycznego *ALBO*

– wypisanie (lub zaznaczenie w tabeli) wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i niewypisanie żadnego niewłaściwego, *ALBO*

– podanie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A : $|A| = 6$, o ile nie zostały zliczone błędne pary, *ALBO*

– sporządzenie fragmentu drzewa stochastycznego, który zawiera wszystkie gałęzie sprzyjające zdarzeniu A , **oraz** zapisanie prawdopodobieństwa na co najmniej jednym odcinku każdego z etapów doświadczenia, *ALBO*

– podanie prawdopodobieństwa jednoelementowego zdarzenia (elementarnego): $\frac{1}{36}$, *ALBO*

– zapisanie tylko $P(A) = \frac{1}{6}$, *ALBO*

– zapisanie tylko $P(A) = \frac{6}{36}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający zapisuje tylko liczby 1 i 6 (lub 6 i 36) i z rozwiązania nie wynika znaczenie tych liczb, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie uporządkowane pary liczb (x, y) , gdzie $x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

W tabeli literą $\mathcal{A}$ zaznaczamy zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A .

		II rzut					
I rzut		1	2	3	4	5	6
	1					$\mathcal{A}$	
	2	$\mathcal{A}$					
	3			$\mathcal{A}$			
	4					$\mathcal{A}$	
	5	$\mathcal{A}$					
	6			$\mathcal{A}$			

Moc zbioru Ω jest równa 36. Zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A jest 6.

Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Zadanie 32. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 5.1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym; 5.3) stosuje wzór na n -ty wyraz [...] ciągu arytmetycznego.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawne wyniki: $x = -\frac{8}{3}$ oraz $r = \frac{11}{3}$.

3 pkt – obliczenie wartości x , dla której ciąg $(x, 1, 2x + 10)$ jest arytmetyczny: $x = -\frac{8}{3}$,
ALBO

– obliczenie wartości r , dla której ciąg $(x, 1, 2x + 10)$ jest arytmetyczny: $r = \frac{11}{3}$.

2 pkt – obliczenie szóstego wyrazu ciągu (a_n) : $a_6 = 1$ **oraz** zapisanie równania z dwiema niewiadomymi x oraz a_6 , np.:

$$\frac{x + 2x + 10}{2} = a_6,$$

$$2x + 10 - a_6 = a_6 - x,$$

ALBO

– obliczenie szóstego wyrazu ciągu (a_n) : $a_6 = 1$ **oraz** zapisanie układu dwóch niezależnych równań z niewiadomymi x , r oraz a_6 , np.

$$x + r = a_6 \quad \text{oraz} \quad x + 2r = 2x + 10.$$

1 pkt – obliczenie szóstego wyrazu ciągu (a_n) : $a_6 = 1$,

ALBO

– zapisanie równania z dwiema niewiadomymi x oraz a_6 , np.:

$$\frac{x + 2x + 10}{2} = a_6,$$

$$2x + 10 - a_6 = a_6 - x,$$

ALBO

– zapisanie układu dwóch niezależnych równań z niewiadomymi x , r oraz a_6 , np.

$$x + r = a_6 \quad \text{oraz} \quad x + 2r = 2x + 10.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Obliczamy szósty wyraz ciągu (a_n) :

$$a_6 = \frac{32 \cdot (-1)^6}{2^{6-1}} = 1$$

Z warunków zadania wynika, że liczby x , 1 , $2x + 10$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy:

$$\frac{x + 2x + 10}{2} = 1$$

$$3x + 10 = 2$$

$$x = -\frac{8}{3}$$

Różnica r tego ciągu arytmetycznego jest równa

$$r = 1 - \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{11}{3}$$

Sposób II

Obliczamy szósty wyraz ciągu (a_n) :

$$a_6 = \frac{32 \cdot (-1)^6}{2^{6-1}} = 1$$

Z warunków zadania wynika, że liczby x , 1 , $2x + 10$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Z własności ciągu arytmetycznego, otrzymujemy:

$$\begin{cases} 1 = x + r \\ 2x + 10 = 1 + r \end{cases}$$

gdzie r jest różnicą ciągu arytmetycznego.

Z pierwszego z tych równań wyznaczamy $x = 1 - r$ i podstawiamy w miejsce x do drugiego z równań, dzięki czemu otrzymujemy:

$$2(1 - r) + 10 = 1 + r$$

$$12 - 2r = 1 + r$$

$$3r = 11$$

$$r = \frac{11}{3}$$

Wtedy

$$x = 1 - \frac{11}{3} = -\frac{8}{3}$$

Zadanie 33. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 9.6) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda obliczenia objętości i pola powierzchni całkowitej graniastopy oraz poprawne wyniki: $V = 48$ i $P_c = 56\sqrt{3}$.

3 pkt – obliczenie objętości graniastopy: $V = 48$,
ALBO

– obliczenie pola powierzchni całkowitej graniastopy: $P_c = 56\sqrt{3}$.

2 pkt – obliczenie długości krawędzi podstawy: $a = 4$ oraz obliczenie wysokości graniastopy: $H = 4\sqrt{3}$,
ALBO

– zapisanie wzoru na objętość graniastosłupa w zależności od jednej zmiennej, np.

$$V = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{3}, \text{ oraz zapisanie wzoru na pole powierzchni całkowitej}$$

$$\text{graniastosłupa w zależności od jednej zmiennej, np. } P_c = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot a \cdot a\sqrt{3}.$$

1 pkt – obliczenie długości krawędzi podstawy: $a = 4$,

ALBO

– zapisanie zależności pomiędzy długością krawędzi podstawy a wysokością

$$\text{graniastosłupa, np.: } \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{H}{a}, \quad H = a\sqrt{3}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:

- a) zastosowanie niepoprawnej definicji jednej funkcji trygonometrycznej,
- b) błędne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa,
- c) błędne zastosowanie twierdzenia cosinusów,
- d) zastosowanie niepoprawnej tożsamości $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$,
lub

e) błędne zastosowanie własności trójkąta o kątach 30° , 60° , 90° ,
i rozwiązanie zostanie doprowadzone konsekwentnie do końca, to zdający może otrzymać
co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za konsekwentne obliczenie objętości i pola
powierzchni całkowitej graniastosłupa).

Jeżeli zdający popełni więcej niż jeden z wymienionych błędów a)–e), to otrzymuje
0 punktów za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.

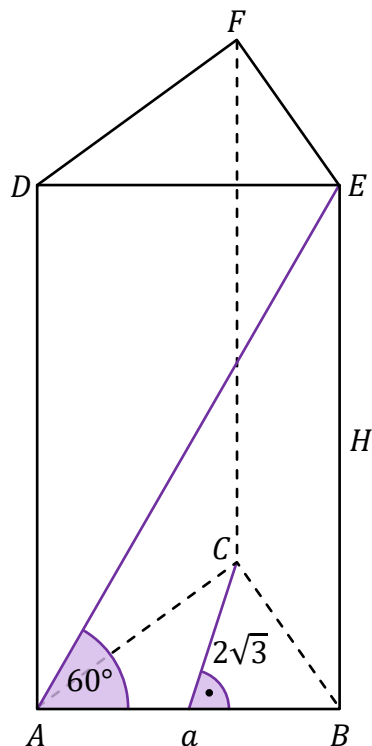
2. Jeżeli zdający popełni błąd, który nie jest błędem rachunkowym, ale otrzyma długość
krawędzi podstawy większą od $2\sqrt{3}$, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe
rozwiązanie (za konsekwentne obliczenie objętości i pola powierzchni całkowitej
graniastosłupa).

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku:

a – długość krawędzi podstawy,

H – wysokość graniastosłupa.



Zauważamy, że $a > 0$ i $H > 0$.

Podstawą graniastosłupa jest trójkąt równoboczny, stąd:

$$2\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Zatem:

$$a = 4$$

Obliczamy wysokość H graniastosłupa:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{H}{a} = \frac{H}{4}$$

Stąd:

$$H = 4 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 4\sqrt{3}$$

Obliczamy objętość V graniastosłupa:

$$V = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 48$$

Obliczamy pole powierzchni całkowitej P_c graniastosłupa:

$$P_c = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot a \cdot H = 2 \cdot \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3} + 48\sqrt{3} = 56\sqrt{3}$$

Zadanie 34. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 8.1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej); 8.3) wyznacza równanie prostej, która jest [...] prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt; 8.4) oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych; 8.6) oblicza odległość dwóch punktów.

Zasady oceniania

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawne wyniki: $C = (24, 0)$ oraz $D = \left(\frac{11}{4}, 0\right)$,
 oraz $P_{ACD} = \frac{595}{8}$.

4 pkt – obliczenie współrzędnych punktów C oraz D : $C = (24, 0)$, oraz $D = \left(\frac{11}{4}, 0\right)$.

3 pkt – wyznaczenie współrzędnych punktu C : $C = (24, 0)$, **oraz** spełnienie jednego z poniższych warunków:

- 1) wyznaczenie równania symetralnej odcinka AB : $y = 4x - 11$
- 2) zapisanie równania, w którym niewiadomą jest pierwsza współrzędna punktu D , np.

$$\sqrt{(x_D + 4)^2 + (0 - 7)^2} = \sqrt{(x_D - 12)^2 + (0 - 3)^2},$$

ALBO

– obliczenie współrzędnych punktu D : $D = \left(\frac{11}{4}, 0\right)$.

2 pkt – wyznaczenie współrzędnych punktu C : $C = (24, 0)$, **oraz** spełnienie jednego z poniższych warunków:

- 1) zapisanie współrzędnych środka M odcinka AB : $M = (4, 5)$,
- 2) wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej AB : $a_{AB} = -\frac{1}{4}$ (lub zapisanie równania prostej AB w postaci ogólnej: $x + 4y - 24 = 0$),
- 3) zapisanie równania z dwiema niewiadomymi (współzależnymi punktu D)
 np. $\sqrt{(x_D + 4)^2 + (y_D - 7)^2} = \sqrt{(x_D - 12)^2 + (y_D - 3)^2},$

ALBO

– wyznaczenie równania symetralnej odcinka AB : $y = 4x - 11$,

ALBO

– zapisanie równania, w którym niewiadomą jest pierwsza współrzędna punktu D , np.

$$\sqrt{(x_D + 4)^2 + (0 - 7)^2} = \sqrt{(x_D - 12)^2 + (0 - 3)^2}.$$

1 pkt – wyznaczenie współrzędnych punktu C : $C = (24, 0)$,

ALBO

– zapisanie współrzędnych punktów C oraz D w postaci $C = (x_C, 0)$, oraz

$$D = (x_D, 0),$$

ALBO

– zapisanie współrzędnych środka M odcinka AB : $M = (4, 5)$,

ALBO

– obliczenie współczynnika kierunkowego prostej AB : $a_{AB} = -\frac{1}{4}$ (lub zapisanie równania prostej AB w postaci ogólnej: $x + 4y - 24 = 0$),

ALBO

– zapisanie równania z dwiema niewiadomymi (współzależnymi punktów D) np.

$$\sqrt{(x_D + 4)^2 + (y_D - 7)^2} = \sqrt{(x_D - 12)^2 + (y_D - 3)^2}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:

- zastosowanie niepoprawnego wzoru na współczynnik kierunkowy prostej,
- zastosowanie niepoprawnego związku między współczynnikami kierunkowymi prostych prostopadłych,
- umieszczenie punktów C oraz D na osi Oy (zamiast na osi Ox),

i rozwiązanie zostanie doprowadzone konsekwentnie do końca, to zdający może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Jeżeli zdający popełni więcej niż jeden z wymienionych błędów a)–c), to otrzymuje

0 punktów za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Wyznaczamy równanie prostej AB :

$$(y - 7)(12 + 4) - (3 - 7)(x + 4) = 0$$

$$16y - 112 + 4x + 16 = 0$$

$$16y = -4x + 96$$

$$y = -\frac{1}{4}x + 6$$

Oznaczmy przez k symetralną odcinka AB . Współczynnik kierunkowy prostej AB jest równy $\left(-\frac{1}{4}\right)$, zatem współczynnik kierunkowy symetralnej k jest równy 4 .

Symetralna k przechodzi przez środek M odcinka AB . Obliczamy współrzędne punktu M :

$$M = \left(\frac{-4 + 12}{2}, \frac{7 + 3}{2}\right) = (4, 5)$$

Zatem prosta k ma równanie postaci:

$$y = 4(x - 4) + 5$$

$$y = 4x - 11$$

Punkt C jest punktem przecięcia prostej AB z osią Ox , więc współrzędne punktu $C = (x_C, y_C)$ spełniają równania:

$$y_C = -\frac{1}{4}x_C + 6 \quad \text{oraz} \quad y_C = 0$$

Stąd otrzymujemy $C = (24, 0)$.

Punkt D jest punktem przecięcia prostej k z osią Ox , więc współrzędne punktu $D = (x_D, y_D)$ spełniają równania:

$$y_D = 4x_D - 11 \quad \text{oraz} \quad y_D = 0$$

Stąd otrzymujemy $D = \left(\frac{11}{4}, 0\right)$.

Obliczamy długość podstawy CD trójkąta ACD :

$$|CD| = 24 - \frac{11}{4} = \frac{85}{4}$$

Wysokością h trójkąta ACD opuszczoną na podstawę CD jest odcinek, którego długość jest równa rzędnej punktu A , zatem $h = 7$.

Obliczamy pole trójkąta ACD :

$$P_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{85}{4} \cdot 7 = \frac{595}{8}$$

Sposób II

Ponieważ punkty C oraz D leżą na osi Ox , więc ich współrzędne są równe $C = (x_C, 0)$ oraz $D = (x_D, 0)$.

Punkt C leży na prostej AB . Stąd i ze wzoru na równanie prostej w postaci ogólnej otrzymujemy:

$$(0 - 7)(12 + 4) - (3 - 7)(x_C + 4) = 0$$

$$-112 + 4x_C + 16 = 0$$

$$4x_C = 96$$

$$x_C = 24$$

Zatem $C = (24, 0)$

Ponieważ punkt D leży na symetralnej odcinka AB , więc $|AD| = |BD|$.

Stąd i ze wzoru na odległość między dwoma punktami otrzymujemy równanie

$$\sqrt{(x_D + 4)^2 + (0 - 7)^2} = \sqrt{(x_D - 12)^2 + (0 - 3)^2}$$

$$(x_D + 4)^2 + (0 - 7)^2 = (x_D - 12)^2 + (0 - 3)^2$$

$$x_D^2 + 8x_D + 16 + 49 = x_D^2 - 24x_D + 144 + 9$$

$$32x_D = 88$$

$$x_D = \frac{11}{4}$$

Zatem $D = \left(\frac{11}{4}, 0\right)$.

Obliczamy długość podstawy CD trójkąta ACD :

$$|CD| = 24 - \frac{11}{4} = \frac{85}{4}$$

Wysokością h trójkąta ACD opuszczoną na podstawę CD jest odcinek, którego długość jest równa rzędnej punktu A , zatem $h = 7$.

Obliczamy pole trójkąta ACD :

$$P_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{85}{4} \cdot 7 = \frac{595}{8}$$

Ocena prac osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Obowiązują **Zasady oceniania** stosowane przy sprawdzaniu prac zdających bez stwierdzonej dyskalkulii z dodatkowym uwzględnieniem:

- a) **ogólnych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią (punkty 1.–12.);
- b) dodatkowych **szczegółowych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią – egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, termin poprawkowy 2025.

I. **Ogólne zasady oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

1. Nie należy traktować jako błędy merytoryczne pomyłek, wynikających z:
 - błędnego przepisania
 - przestawienia cyfr
 - zapisania innej cyfry, ale o podobnym wyglądzie
 - przestawienia położenia przecinka
 - przestawienia położenia znaku liczby.
2. W przypadku błędów, wynikających ze zmiany znaku liczby, należy w każdym zadaniu oddzielnie przeanalizować, czy zdający opanował inne umiejętności, poza umiejętnościami rachunkowymi, oceniane w zadaniu. W przypadku opanowania badanych umiejętności zdający powinien otrzymać przynajmniej 1 punkt.
3. We wszystkich zadaniach otwartych, w których wskazano poprawną metodę rozwiązania, części lub całości zadania, zdającemu należy przyznać przynajmniej 1 punkt, zgodnie z kryteriami do poszczególnych zadań.
4. Jeśli zdający przedstawia nieprecyzyjne zapisy, na przykład pomija nawiasy lub zapisuje nawiasy w niewłaściwych miejscach, ale przeprowadza poprawne rozumowanie lub stosuje właściwą strategię, to może otrzymać przynajmniej 1 punkt za rozwiązanie zadania.
5. W przypadku zadania wymagającego wyznaczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi poprawną metodę wyznaczania pierwiastków trójmianu kwadratowego, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
6. W przypadku zadania wymagającego rozwiązania nierówności kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli stosuje poprawny algorytm rozwiązywania nierówności kwadratowej, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
7. W przypadku zadania wymagającego stosowania własności funkcji kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt za wykorzystanie konkretnych własności funkcji kwadratowej, istotnych przy poszukiwaniu rozwiązania.
8. W przypadku zadania wymagającego zastosowania własności ciągów arytmetycznych lub geometrycznych zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi wykorzystanie takiej własności ciągu, która umożliwia znalezienie rozwiązania zadania.

9. W przypadku zadania wymagającego analizowania figur geometrycznych na płaszczyźnie kartezjańskiej zdający może otrzymać punkty, jeżeli przy poszukiwaniu rozwiązania przedstawi poprawne rozumowanie, wykorzystujące własności figur geometrycznych lub zapisze zależności, pozwalające rozwiązać zadanie.
10. W przypadku zadania z rachunku prawdopodobieństwa zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeśli przy wyznaczaniu liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających rozważanemu zdarzeniu przyjmuje określoną regularność lub podaje prawidłową metodę wyznaczenia tej liczby zdarzeń elementarnych.
11. W przypadku zadania z geometrii zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeżeli podaje poprawną metodę wyznaczenia długości odcinka potrzebnej do znalezienia rozwiązania.
12. W przypadku zadania wymagającego przeprowadzenia dowodu (z zakresu algebry lub geometrii), jeśli w przedstawionym rozwiązaniu zdający powoła się na własność, która wyznacza istotny postępowanie, prowadzący do przeprowadzenia dowodu, to może otrzymać 1 punkt.

II. Dodatkowe **szczegółowe zasady oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Zadanie 26.

- 1 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego $-3x^2 - 6x + 9$, tzn. zastosowanie wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego i obliczenie tych pierwiastków
ALBO
- konsekwentne (do otrzymanego w wyniku popełnienia błędów o charakterze dyskalkulicznym ujemnego wyróżnika) narysowanie paraboli,
ALBO
 - poprawne rozwiązanie nierówności $-3x^2 - 6x > 0$ (tzn. stosuje się punkt 6. ogólnych zasad oceniania),
ALBO
 - konsekwentne (do wyznaczonych przez siebie pierwiastków oraz rozpatrywanego trójmianu i nierówności) wyznaczenie zbioru rozwiązań nierówności.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający, rozwiązując nierówność, pomyli porządek liczb na osi liczbowej i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $(1, -3)$, to może otrzymać **2 punkty** za całe rozwiązanie.
2. Nie stosuje się uwag 2. i 3. z zasad oceniania arkusza standardowego.
3. Akceptowane jest zapisanie pierwiastków trójmianu w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi.

Zadanie 27.

- 1 pkt – przekształcenie wyrażenia $8^{50} - 2^{145}$ do postaci $(2^3)^{50} - 2^{145}$.

Zadanie 28.**Uwaga:**

Jeżeli zdający popełnia błąd przy przekształceniu równania $\frac{3}{3x-7} = \frac{5x}{x-8}$ do postaci równania kwadratowego, lecz dalej stosuje poprawną metodę rozwiązania otrzymanego równania kwadratowego i konsekwentnie oblicza pierwiastki tego równania, to może otrzymać **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Zadanie 29.

1 pkt – zapisanie równania $11x + 7,98y = 752,52$.

Zadanie 30.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 31.

1 pkt – zapisanie jedynie liczby 36 (należy traktować to jako wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych).

Uwagi:

1. W ocenie rozwiązania tego zadania (dla zdających z dyskalkulią) nie stosuje się uwagi ze standardowych zasad oceniania.
2. Jeżeli zdający poprawnie wypisze/zaznaczy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A , lecz popełni błąd w ich zliczeniu (np. $|A| = 5$) i konsekwentnie zapisze wynik (np. $\frac{5}{36}$), to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 32.

2 pkt – obliczenie szóstego wyrazu ciągu (a_n) : $a_6 = 1$ **oraz** zapisanie równania z niewiadomymi x , r oraz a_6 , np. $x + r = a_6$.

1 pkt – zapisanie równania z niewiadomymi x , r oraz a_6 , np. $x + r = a_6$.

Zadanie 33.

2 pkt – zapisanie wzoru na objętość graniastosłupa w zależności od jednej zmiennej, np.

$$V = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{3}, \text{ LUB zapisanie wzoru na pole powierzchni całkowitej}$$

$$\text{graniastosłupa w zależności od jednej zmiennej, np. } P_c = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot a \cdot a\sqrt{3}.$$

Zadanie 34.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

PESEL

Egzamin maturalny

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Próbna Matura z Operonem 2024/2025

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:

☐ dostosowania zasad oceniania

DATA: **20 listopada 2024 r.**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 15 stron (zadania 1.–11.). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza wpisz swój numer PESEL i kod.
3. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
4. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
5. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.

0-1
2-3

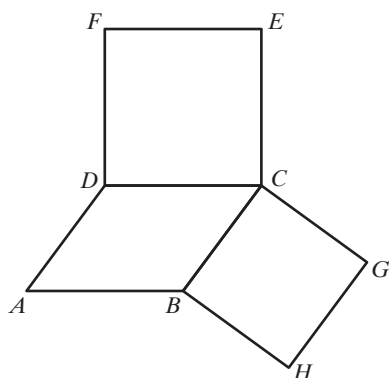
Wykaż, że $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$ jest liczbą naturalną. Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Zadanie 2. (0–3)

Na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$ zbudowano kwadraty $CDEF$ i $BCGH$ (zobacz rysunek).

Udowodnij, że $|AC| = |EG|$. Zapisz obliczenia.



2.

0–1

2–3



3.

0-1-2
3-4

Zadanie 3. (0–4)

Wielokąt wypukły ma n wierzchołków, z których losujemy jednocześnie 2.

Oblicz liczbę n wierzchołków, wiedząc, że prawdopodobieństwo zdarzenia A – wylosowane wierzchołki utworzą przekątną tego wielokąta – jest równe 0,9. Zapisz obliczenia.



Zadanie 4. (0–6)

Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Punkt P , o pierwszej współrzędnej równej (-2) , należy do wykresu funkcji f . Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie P .

Oblicz współczynniki a oraz b w równaniu tej stycznej oraz podaj ekstrema funkcji, o ile istnieją. Zapisz obliczenia.

4.

0–1–2

3–4

5–6



0-1-2
3-4

Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli pierwszą liczbę zmniejszymy o 1, drugą liczbę zwiększymy o 15, a trzecią zwiększymy o 37, to otrzymamy ciąg geometryczny.

Wyznacz te liczby, jeśli wiadomo, że ich suma jest równa 63. Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

6.

0-1-2
3-4

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

7.

0-1-2
3-4-5

Zadanie 7. (0–5)

Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w których krótsza podstawa i każde z ramion ma długość 5 cm.

Oblicz długość dłuższej podstawy dla trapezu o największym polu i oblicz to pole. Zapisz obliczenia.

Zadanie 8. (0–5)

Punkt $A(-4; -1)$ jest wierzchołkiem kwadratu opisanego na okręgu o równaniu $x^2 + y^2 + 6y - 1 = 0$.

Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego kwadratu. Zapisz obliczenia.

8.
0–1–2
3–4–5



9.

0-1-2
3-4

Zadanie 9. (0-4)

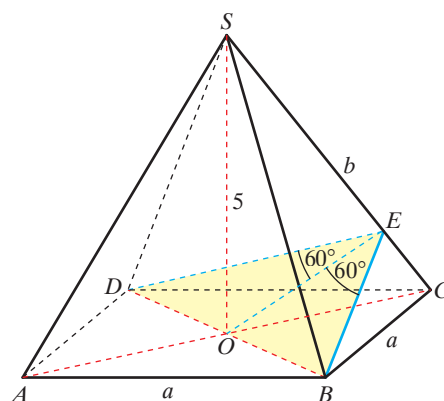
Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 + 2(m+1)x + 6m + 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 tego samego znaku, spełniające warunek $x_1 - x_2 < 3$. Zapisz obliczenia.



Zadanie 10. (0–6)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCD S$ o podstawie $ABCD$ (patrz rysunek) wysokość jest równa 5, a kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa ma miarę 120° .

Oblicz objętość bryły. Zapisz obliczenia.



10.

0–1–2

3–4

5–6





Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl

11.	0-1-2	3-4	5-6

Które ze zdarzeń jest bardziej prawdopodobne: wyciągnięcie kul o różnych kolorach czy wyciągnięcie kul tego samego koloru? Ile należy dołożyć do urny kul białych, aby zdarzenia te były jednakowo prawdopodobne? Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Wiecej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl

ISBN 978-83-8197-509-4



9 788381 975094

Rodzaj dokumentu:	Zasady oceniania rozwiązań zadań
Egzamin:	Egzamin maturalny
Przedmiot:	Matematyka
Poziom:	Poziom rozszerzony

Zasady oceniania są zgodne z podstawą programową kształcenia ogólnego dla szkoły ponadpodstawowej z 2024 r., <https://isap.sejm.gov.pl/isap.nsf/download.xsp/WDU20240001019/O/D20241019.pdf> (dostęp: 20.09.2024).

Uwagi:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający, rozwiązując zadanie otwarte, popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilku-etapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi oraz zamiany podstawy logarytmu.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawne rozwiązanie: $\log_2 8 = 3, 3 \in \mathbb{N}$

2 pkt – przekształcenie wyrażenia do postaci: $\log_2 3 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 6}{\log_2 5} \cdot \frac{\log_2 7}{\log_2 6} \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 7}$

1 pkt – poprawne zastosowanie wzoru na zamianę podstawy logarytmu

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Stosując wzór na zamianę podstawy logarytmu, przekształcamy wyrażenie:

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$$

$$\text{do postaci: } \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 6}{\log_2 5} \cdot \frac{\log_2 7}{\log_2 6} \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 7}$$

$$\text{Po wykonaniu skracania ułamków: } \cancel{\log_2 3} \cdot \frac{\cancel{\log_2 4}}{\cancel{\log_2 3}} \cdot \frac{\cancel{\log_2 5}}{\cancel{\log_2 4}} \cdot \frac{\cancel{\log_2 6}}{\cancel{\log_2 5}} \cdot \frac{\cancel{\log_2 7}}{\cancel{\log_2 6}} \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 7}$$

otrzymujemy: $\log_2 8 = 3, 3 \in \mathbb{N}$

Co należało wykazać.

Zadanie 2. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów; VIII.11) przeprowadza dowody geometryczne.

Zasady oceniania

3 pkt – na podstawie cechy przystawania trójkątów stwierdzenie, że $|AC| = |EG|$

2 pkt – wykazanie, że $|\angle ABC| = |\angle ECG|$

1 pkt – stwierdzenie, że $|AB| = |CD| = |CE|$ oraz $|AD| = |BC| = |CG|$

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu, albo brak rozwiązania

Przykładowe rozwiązanie

Odcinki $|AB| = |CD| = |CE|$;

$|AD| = |BC| = |CG|$

Ponieważ równoległobok jest trapezem, to suma kątów przy jednym z ramion jest równa 180° :

$$|\angle ABC| + |\angle BCD| = 180^\circ$$

$$|\angle DCE| = |\angle BCG| = 90^\circ$$

$$|\angle BCG| + |\angle BCD| + |\angle DCE| + |\angle ECG| = 360^\circ$$

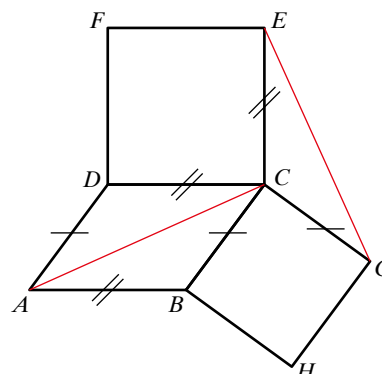
$$\text{zatem } |\angle BCD| + |\angle ECG| = 180^\circ$$

$$|\angle ABC| + |\angle BCD| = |\angle BCD| + |\angle ECG|$$

$$|\angle ABC| = |\angle ECG|$$

Na podstawie cechy przystawania trójkątów *bkb* stwierdzamy, że $\triangle ABC \equiv \triangle CEG$, zatem na podstawie cechy *bbb* także $|AC| = |EG|$.

Co należało wykazać.



Zadanie 3. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XI.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych; XI.R1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji; XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania

4 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania i podanie rozwiązania $n = 21$

3 pkt – wyznaczenie liczby wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego:

$$|\Omega| = \frac{(n-1) \cdot n}{2},$$

wyznaczenie liczby wszystkich możliwych wyników zdarzenia A : $|A| = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$, gdzie $n > 3$, za-

stosowanie klasycznej definicji prawdopodobieństwa $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{n-3}{n-1}$

oraz utworzenie równania wynikającego z treści zadania: $0,9 = \frac{n-3}{n-1}$

2 pkt – wyznaczenie liczby wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego:

$$|\Omega| = C_2^n = \frac{(n-1) \cdot n}{2},$$

wyznaczenie liczby wszystkich możliwych wyników zdarzenia A (wzór na liczbę przekątnych wielokąta): $|A| = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$, gdzie $n > 3$, oraz zastosowanie klasycznej definicji prawdopodobieństwa

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\cancel{n} \cdot (n-3)}{(n-1) \cdot \cancel{n}} = \frac{n-3}{n-1}$$

1 pkt – wyznaczenie liczby wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego:

$$|\Omega| = C_2^n = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{\cancel{(n-2)!} \cdot (n-1) \cdot n}{2 \cdot \cancel{(n-2)!}} = \frac{(n-1) \cdot n}{2} \text{ oraz wyznaczenie liczby wszystkich}$$

możliwych wyników zdarzenia A (wzór na liczbę przekątnych wielokąta): $|A| = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$, gdzie $n > 3$

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczenie liczby wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego:

$$|\Omega| = C_2^n = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{\cancel{(n-2)!} \cdot (n-1) \cdot n}{2 \cdot \cancel{(n-2)!}} = \frac{(n-1) \cdot n}{2}$$

Wyznaczenie liczby wszystkich możliwych wyników zdarzenia A (wzór na liczbę przekątnych wielokąta):

$$|A| = \frac{n \cdot (n-3)}{2}, \text{ gdzie } n > 3$$

Wyznaczenie, ze wzoru klasycznej definicji prawdopodobieństwa, prawdopodobieństwa zdarzenia A :

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\cancel{n} \cdot (n-3)}{(n-1) \cdot \cancel{n}} = \frac{n-3}{n-1}$$

Utworzenie równania wynikającego z treści zadania:

$$0,9 = \frac{n-3}{n-1}$$

Rozwiązanie równania:

$$\frac{9}{10} = \frac{n-3}{n-1}$$

$$9(n-1) = 10(n-3)$$

$$9n - 9 = 10n - 30$$

$$n = 21$$

Odpowiedź: Poszukiwany wielokąt ma 21 wierzchołków.

Zadanie 4. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi; XIII.R3) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną pochodnej; XIII.R4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej.

Zasady oceniania

6 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania, podanie wartości współczynników a i b oraz wyznaczenie współrzędnych punktów ekstremalnych

5 pkt – wykonanie czynności za 4 punkty oraz sprawdzenie, czy zachodzi warunek konieczny istnienia ekstremum $f'(x) = 0$

4 pkt – obliczenie drugiej współrzędnej punktu P : $y = -10$ i wyznaczenie pochodnej funkcji f :
 $f'(x) = \frac{x^2 - 6}{x^2}$, obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej do wykresu funkcji f w punkcie

P : $a = f'(-2) = -\frac{1}{2}$ oraz napisanie równania stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P :

$y = -\frac{1}{2}x - 11$ i wskazanie wartości współczynnika $b = -11$

3 pkt – obliczenie drugiej współrzędnej punktu P : $y = -10$ i wyznaczenie pochodnej funkcji f :
 $f(x)' = \frac{x^2 - 6}{x^2}$ oraz obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej do wykresu funkcji f

w punkcie P : $a = f'(-2) = -\frac{1}{2}$

2 pkt – obliczenie drugiej współrzędnej punktu P : $y = -10$ oraz wyznaczenie pochodnej funkcji f :
 $f(x)' = \frac{x^2 - 6}{x^2}$

1 pkt – obliczenie drugiej współrzędnej punktu P : $y = -10$ lub wyznaczenie pochodnej $f(x)' = \frac{x^2 - 6}{x^2}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy drugą współrzędną punktu P : $f(-2) = \frac{(-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 6}{-2} = \frac{4 + 10 + 6}{-2} = \frac{20}{-2} = -10$

$P = (-2; -10)$

Wyznaczamy pochodną funkcji f :

$$f'(x) = \frac{(2x - 5) \cdot x - (x^2 - 5x + 6) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - 5x - x^2 + 5x - 6}{x^2} = \frac{x^2 - 6}{x^2}, x \neq 0$$

Równanie stycznej do funkcji w punkcie $P(x_0; f(x_0))$ ma postać: $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Obliczamy: $f'(-2) = \frac{(-2)^2 - 6}{(-2)^2} = \frac{4 - 6}{4} = -\frac{1}{2}$, $f(x_0) = -10$

Zapisujemy równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P : $y - (-10) = -\frac{1}{2} \cdot (x - (-2))$

$$y + 10 = -\frac{1}{2} \cdot (x + 2)$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 1 - 10$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 11$$

Odczytujemy wartości współczynników: $a = -\frac{1}{2}$, $b = -11$

Sprawdzamy warunek konieczny istnienia ekstremum $f'(x) = 0$:

$$\frac{x^2 - 6}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\sqrt{6} \text{ i } x_2 = \sqrt{6}$$

Badamy znak pochodnej w otoczeniu punktów podejrzanych o ekstremum (sprawdzamy warunek dostateczny istnienia ekstremum):

dla $x < -\sqrt{6}$ $f'(x) > 0$, a dla $0 > x > -\sqrt{6}$ $f'(x) < 0$, czyli w punkcie $x = -\sqrt{6}$ funkcja ma maksimum

$$\text{lokalne wynoszące: } f(-\sqrt{6}) = \frac{(-\sqrt{6})^2 - 5 \cdot (-\sqrt{6}) + 6}{-\sqrt{6}} = \frac{6 + 5\sqrt{6} + 6}{-\sqrt{6}} = \frac{-30 - 12\sqrt{6}}{6} = -5 - 2\sqrt{6}$$

dla $0 < x < \sqrt{6}$ $f'(x) < 0$, a dla $x > \sqrt{6}$ $f'(x) > 0$, czyli w punkcie $x = \sqrt{6}$ funkcja ma minimum lokalne

$$\text{wynoszące: } f(\sqrt{6}) = \frac{(\sqrt{6})^2 - 5 \cdot \sqrt{6} + 6}{\sqrt{6}} = \frac{6 - 5\sqrt{6} + 6}{\sqrt{6}} = \frac{-30 + 12\sqrt{6}}{6} = -5 + 2\sqrt{6}$$

Współczynniki stycznej: $a = -\frac{1}{2}$, $b = -11$. Funkcja ma dwa ekstrema:

– maksimum w punkcie $x_1 = -\sqrt{6}$ wynoszące: $f(-\sqrt{6}) = -5 - 2\sqrt{6}$

– minimum w punkcie $x_2 = \sqrt{6}$ wynoszące: $f(\sqrt{6}) = -5 + 2\sqrt{6}$

Zadanie 5. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel. III. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IV.R) rozwiązuje układy równań liniowych i kwadratowych z dwiema niewiadomymi, które można sprowadzić do równania kwadratowego [...]; VI.4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny; VI.5) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; VI.6) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania

4 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania i udzielenie poprawnej odpowiedzi uwzględniającej dwa przypadki, pierwszy: $(55, 21, -13)$, drugi: $(25, 21, 17)$

3 pkt – doprowadzenie do równania kwadratowego: $r^2 + 38r + 136 = 0$ i obliczenie: $r_1 = -34$, $r_2 = -4$ oraz $x_1 = 55$, $x_2 = 25$

2 pkt – utworzenie układu równań:
$$\begin{cases} x + x + r + x + 2r = 63 \\ (x + r + 15)^2 = (x - 1) \cdot (x + 2r + 37) \end{cases}$$

1 pkt – wyznaczenie zależności wynikających z treści zadania

x , $x + r$, $x + 2r$ – ciąg arytmetyczny

$x - 1$, $x + r + 15$, $x + 2r + 37$ – ciąg geometryczny

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Oznaczamy x pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego, r różnica tego ciągu i zapisujemy zależności wynikające z treści zadania:

$x, x+r, x+2r$ – ciąg arytmetyczny

$x-1, x+r+15, x+2r+37$ – ciąg geometryczny

Tworzymy układ równań:

$$\begin{cases} x+x+r+x+2r=63 \\ (x+r+15)^2=(x-1)\cdot(x+2r+37) \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 3x+3r=63 \quad |:3 \\ x^2+2rx+30x+30r+r^2+225=x^2+2rx+36x-2r-37 \\ x+r=21 \\ r^2-6x+32r=-262 \\ x=21-r \\ r^2-6(21-r)+32r=-262 \\ x=21-r \\ r^2+38r+136=0 \end{cases}$$

rozwiązujemy równanie kwadratowe $r^2+38r+136=0$

$$\Delta=900 \quad \sqrt{\Delta}=30$$

$$r_1=\frac{-38-30}{2}=-34 \quad r_2=\frac{-38+30}{2}=-4$$

$$\text{zatem: } x_1=21+34=55 \quad x_2=21+4=25$$

Otrzymaliśmy dwie trójki liczb spełniających warunki zadania: $(55, 21, -13)$ i $(25, 21, 17)$

Zadanie 6. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.R2) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych; VII.R3) wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych; VII.R6) rozwiązuje równania trygonometryczne.

Zasady oceniania

4 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania i podanie rozwiązania: $x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}\right)$

3 pkt – rozwiązanie nierówności $2 \cos x - \sqrt{3} < 0$

2 pkt – poprawne zapisanie dziedziny wyrażenia: $D = \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ oraz zauważenie, że $\cos^2 x > 0$, zatem $2 \cos x - \sqrt{3} < 0$

1 pkt – poprawne zapisanie dziedziny wyrażenia: $D = \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczamy dziedzinę wyrażenia wymiernego $\frac{2 \cos x - \sqrt{3}}{\cos^2 x}$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$:

$$\cos x = 0 \text{ dla } x = \frac{\pi}{2} \text{ i } x = \frac{3\pi}{2}, \text{ zatem } D = \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$$

Zauważamy, że $\cos^2 x > 0$, zatem $\frac{2 \cos x - \sqrt{3}}{\cos^2 x} < 0$, gdy $2 \cos x - \sqrt{3} < 0$.

Rozwiązujemy nierówność $2 \cos x - \sqrt{3} < 0$:

$$2 \cos x < \sqrt{3}$$

$$\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$$

Otrzymujemy rozwiązanie danej nierówności:

$$x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}\right)$$

Zadanie 7. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VIII.9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych; XIII.R4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej; XIII.R6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

5 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania; wyznaczenie maksymalnego pola trapezu:

$$P\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{75\sqrt{3}}{4}$$

Uwaga: przy braku dziedziny maksymalnie 4 pkt.

4 pkt – wyznaczenie miejsc zerowych pochodnej z ich interpretacją: $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = -5 \notin D$;

dla $x_1 = \frac{5}{2}$ funkcja osiąga maksimum

3 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji: $P'(x) = \frac{-2x^2 - 5x + 25}{\sqrt{25 - x^2}}$, $x \in \langle 0; 5 \rangle$

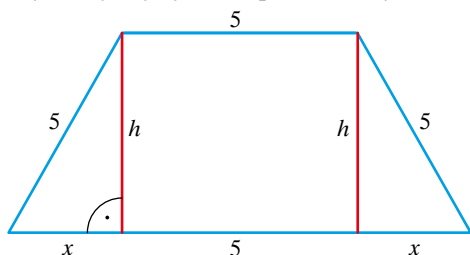
2 pkt – wyznaczenie pola trapezu jako funkcji zmiennej x : $P(x) = (x + 5) \cdot \sqrt{25 - x^2}$, $x \in \langle 0; 5 \rangle$

1 pkt – wykonanie rysunku pomocniczego z pełnymi oznaczeniami i wyznaczenie długości wysokości trapezu $h = \sqrt{25 - x^2}$, $x \in \langle 0; 5 \rangle$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wykonujemy rysunek pomocniczy:



Wyznaczamy zakres zmiennej x : $x \in \langle 0; 5 \rangle$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, wyznaczamy wysokość trapezu:

$$h^2 + x^2 = 5^2$$

$$h^2 = 25 - x^2$$

$$h = \sqrt{25 - x^2}$$

Wyznaczamy wzór na pole trapezu jako funkcję zmiennej x :

$$P(x) = \frac{(5 + 2x + 5) \cdot \sqrt{25 - x^2}}{2} = \frac{2(x + 5) \cdot \sqrt{25 - x^2}}{2} = (x + 5) \cdot \sqrt{25 - x^2}, x \in \langle 0; 5 \rangle$$

Wyznaczamy pochodną funkcji $P(x)$: $P'(x) = (x + 5)' \cdot \sqrt{25 - x^2} + (x + 5) \cdot (\sqrt{25 - x^2})'$

$$P'(x) = \sqrt{25 - x^2} + (x + 5) \cdot \frac{1}{2\sqrt{25 - x^2}} \cdot (-2x) = \sqrt{25 - x^2} - \frac{x^2 - 5x}{\sqrt{25 - x^2}} = \frac{-2x^2 - 5x + 25}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Dziedzina pochodnej: $x \in \langle 0; 5 \rangle$

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej: $P'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 - 5x + 25 = 0$

$$2x^2 + 5x - 25 = 0$$

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-25) = 225$$

$$\sqrt{\Delta} = 15$$

$$x_1 = \frac{-5 + 15}{2 \cdot 2} = \frac{5}{2}$$

$$x_2 = \frac{-5 - 15}{2 \cdot 2} = -5 \notin D$$

Dla $x_1 = \frac{5}{2}$ funkcja osiąga maksimum.

$$\text{Obliczamy pole trapezu dla } x_1 = \frac{5}{2}: P\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2} + 5\right) \cdot \sqrt{25 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{15}{2} \cdot \sqrt{25 - \frac{25}{4}} = \frac{15}{2} \cdot \sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{75\sqrt{3}}{4}$$

Zadanie 8. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IX.3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych; IX.4) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$; IX.R1) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu.

Zasady oceniania

5 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania; wyznaczenie współrzędnych wierzchołków $B(-2; -7)$ oraz $D(2; 1)$

4 pkt – wyznaczenie równania okręgu opisanego na kwadracie: $x^2 + (y + 3)^2 = 20$

- 3 pkt – wyznaczenie równania prostej AC : $y = -\frac{1}{2}x - 3$ oraz równania prostej BD : $y = 2x - 3$
2 pkt – wyznaczenie współrzędnych środka okręgu $S(0; -3)$ oraz współrzędnych wierzchołka $C(4; -5)$
1 pkt – zapisanie równania okręgu w postaci kanonicznej: $x^2 + (y + 3)^2 = 10$
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy równanie okręgu do postaci kanonicznej i odczytujemy współrzędne środka okręgu:

$$x^2 + y^2 + 6y + 9 - 9 - 1 = 0$$

$$x^2 + (y + 3)^2 = 10$$

$$S(0; -3)$$

Po przeciwnej stronie środka okręgu, który jest równocześnie środkiem kwadratu, od punktu $A(-4; -1)$

leży punkt $C(x; y)$, zatem: $\frac{-4 + x}{2} = 0$ oraz $\frac{-1 + y}{2} = -3$

$$x = 4, y = -5, \text{ czyli } C(4; -5)$$

Wyznaczamy równanie prostej AC : $y = ax + b$

$$a = \frac{-5 + 1}{4 + 4} = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + b$$

$$-5 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + b$$

$$b = -3$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 3$$

Wyznaczamy równanie prostej BD prostopadłej do prostej AC :

$$-\frac{1}{2} \cdot a_2 = -1$$

$$a_2 = 2$$

$$y = 2x + b$$

$$-3 = 2 \cdot 0 + b$$

$$b = -3$$

$$y = 2x - 3$$

Wyznaczamy równanie okręgu opisanego na kwadracie:

$$r^2 = |SA|^2 = (-4)^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$$

$$x^2 + (y + 3)^2 = 20$$

Wyznaczamy współrzędne punktów przecięcia prostej BD z okręgiem opisanym na kwadracie:

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ x^2 + (y + 3)^2 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + (y + 3)^2 = 20 \end{cases}$$

$$x^2 + (2x - 3 + 3)^2 = 20$$

$$5x^2 = 20$$

$$x^2 = 4$$

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = -7 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = -7 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = -7 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

$$B(-2; -7)$$

$$D(2; 1)$$

Wyznaczone współrzędne wierzchołków kwadratu wynoszą: $B(-2; -7)$ oraz $D(2; 1)$.

Zadanie 9. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilku-etapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: III.3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą; III.4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe; III.R3) stosuje wzory Viete’a dla równań kwadratowych; III.R5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności: wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają określone znaki bądź należą do określonego przedziału, wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

Zasady oceniania

4 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania; podanie odpowiedzi: $m \in \left(-\frac{1}{6}; 0\right) \cup \left(4; \frac{9}{2}\right)$

3 pkt – poprawne wyznaczenie przedziałów spełniających trzy warunki

2 pkt – poprawne wyznaczenie przedziałów spełniających dwa warunki

1 pkt – poprawne wyznaczenie przedziału spełniającego jeden z warunków: $\Delta > 0$, $x_1 \cdot x_2 > 0$, $x_1 - x_2 < 3$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Aby równanie kwadratowe miało dwa różne rozwiązania tego samego znaku, muszą być spełnione warunki:

1. $\Delta > 0$

2. $x_1 \cdot x_2 > 0$

3. $x_1 - x_2 < 3$

Ad. 1 $\Delta > 0$

$$[2(m+1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (6m+1) > 0$$

$$4(m^2 + 2m + 1) - 24m - 4 > 0$$

$$4m^2 + 8m - 4 - 24m - 4 > 0$$

$$4m^2 - 16m > 0$$

$$m^2 - 4m > 0$$

$$m(m-4) > 0$$

$$m \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$$

Ad. 2 $x_1 \cdot x_2 > 0$

$$\frac{6m+1}{1} > 0$$

$$6m+1 > 0$$

$$6m > -1$$

$$m > -\frac{1}{6}$$

$$m \in \left(-\frac{1}{6}; \infty\right)$$

Ad. 3 $x_1 - x_2 < 3$

$$x_1 - x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta} + b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\sqrt{\Delta}}{2a} = -\sqrt{\Delta} = -\sqrt{4m^2 - 16m}$$

$$-\sqrt{4m^2 - 16m} < 3$$

$$4m^2 - 16m < 9$$

$$4m^2 - 16m - 9 < 0$$

$$\Delta = (-16)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-9) = 400$$

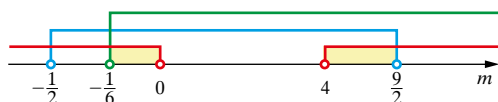
$$\sqrt{\Delta} = 20$$

$$m_1 = \frac{16 - 20}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$m_2 = \frac{16 + 20}{8} = \frac{9}{2}$$

$$m \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$$

Zatem:



$$m \in \left(-\frac{1}{6}; 0\right) \cup \left(4; \frac{9}{2}\right)$$

Zadanie 10. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel. IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VIII.9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych; X.R2) wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

Zasady oceniania

6 pkt – obliczenie objętości ostrosłupa: $V = \frac{500}{3}$

5 pkt – obliczenie długości krawędzi podstawy a : $a = 10$

4 pkt – wykazanie podobieństwa trójkątów SOC i OCE

3 pkt – wyznaczenie długości odcinka $|EC|$ z trójkąta OCE : $|EC| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

2 pkt – wyznaczenie długości odcinka $|OE|$ z trójkąta EOB : $|OE| = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

1 pkt – wyznaczenie długości odcinków $|OB| = |OC| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

W kwadracie będącym podstawą ostrosłupa oznaczamy $|OB| = |OC| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ jako połowę długości przekątnej.

Z trójkąta EOB wyznaczamy długość odcinka $|OE|$:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{|OE|}{|OB|}$$

$$|OE| = |OB| \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$$

$$|OE| = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$|OE| = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Z trójkąta OCE wyznaczamy długość odcinka $|EC|$:

$$|EC|^2 = |OC|^2 - |OE|^2$$

$$|EC|^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2$$

$$|EC|^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6}$$

$$|EC|^2 = \frac{3a^2}{6} - \frac{a^2}{6}$$

$$|EC|^2 = \frac{a^2}{3}$$

$$|EC| = \sqrt{\frac{a^2}{3}}$$

$$|EC| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Na podstawie cechy podobieństwa kkk stwierdzamy, że $\triangle SOC \sim \triangle OEC$, zatem $\frac{|OS|}{|OE|} = \frac{|OC|}{|EC|}$.
Obliczamy długość krawędzi podstawy:

$$\frac{5}{\frac{a\sqrt{6}}{6}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{3}}$$

$$\frac{30}{a\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

$$30\sqrt{12} = 60\sqrt{3}$$

$$a = \frac{60\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}$$

$$a = 10$$

Obliczamy objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot 5$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 5$$

$$V = \frac{500}{3}$$

Zadanie 11. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XI.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych; XI.R1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji; XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania

6 pkt – obliczenie liczby dołożonych kul białych: $n = 1$ lub $n = 8$

5 pkt – określenie prawdopodobieństwa zdarzenia „wylosowano kule o różnych kolorach”,

$$P(A) = \frac{12n + 24}{n^2 + 15n + 56}$$

4 pkt – narysowanie drzewka po dodaniu n kul białych

3 pkt – obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia „wylosowano kule o tych samych kolorach”, $P(B) = \frac{4}{7}$ i stwierdzenie, że $P(B) > P(A)$

2 pkt – obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia „wylosowano kule o różnych kolorach”, $P(A) = \frac{3}{7}$

1 pkt – narysowanie drzewka doświadczenia losowego

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

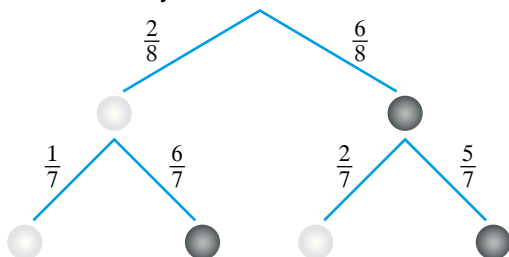
Przykładowe pełne rozwiązanie

Rysujemy drzewko doświadczenia losowego:

2 – liczba kul białych b

6 – liczba kul czarnych c

8 – liczba wszystkich kul



Oznaczamy jako A – wylosowanie kul o różnych kolorach.

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A :

$$P(A) = \frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7} + \frac{6}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{12}{56} + \frac{12}{56} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$$

Oznaczamy jako B – wylosowanie kul o tych samych kolorach.

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia B :

$$P(B) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2}{56} + \frac{30}{56} = \frac{32}{56} = \frac{4}{7}$$

$$P(B) > P(A)$$

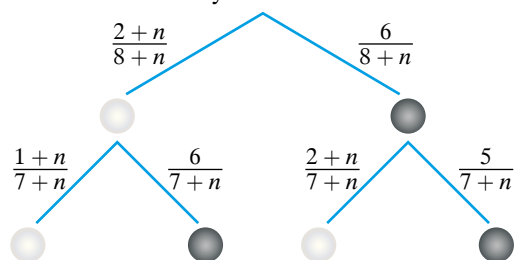
Oznaczamy jako n – liczbę dodanych kul białych.

Rysujemy drzewko doświadczenia losowego po dołożeniu kul białych:

$2 + n$ – liczba kul białych b

6 – liczba kul czarnych c

$8 + n$ – liczba wszystkich kul



Ponieważ zdarzenia A i B mają być jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo każdego z nich wynosi $\frac{1}{2}$.

$$P(A) = \frac{2+n}{8+n} \cdot \frac{6}{7+n} + \frac{6}{8+n} \cdot \frac{2+n}{7+n} = \frac{12+6n}{n^2+15n+56} + \frac{12+6n}{n^2+15n+56} = \frac{24+12n}{n^2+15n+56} = \frac{1}{2}$$

$$n^2+15n+56 = 24n+48$$

$$n^2-9n+8=0$$

$$\Delta = 81-32=49$$

$$\sqrt{\Delta} = 7$$

$$n_1 = \frac{9-7}{2} = 1$$

$$n_2 = \frac{9+7}{2} = 8$$

Należy dołożyć 1 kulę białą lub 8 kul białych.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

PESEL

Miejsce na naklejkę.

Sprawdź, czy kod na naklejce to
M-100.

Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

TEST DIAGNOSTYCZNY

Symbol arkusza

MMA-P-R0-**100**-2412

DATA: **12 grudnia 2024 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:

☐ dostosowania zasad oceniania.

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

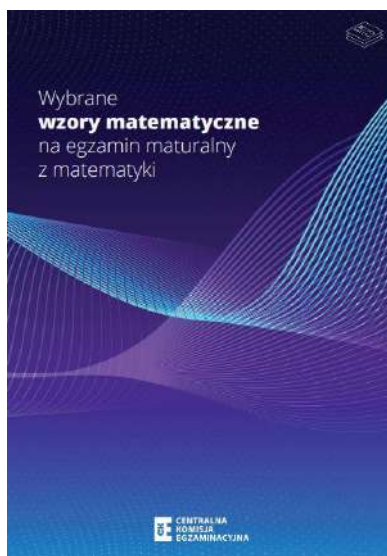
1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**,
tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi.
Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu
takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.





Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 30 stron (zadania 1–13). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
5. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Nie wpisuj żadnych znaków w tabelkach przeznaczonych dla egzaminatora. Tabelki umieszczone są na marginesie przy każdym zadaniu.
8. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
9. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla i linijki oraz z kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



**Zadania egzaminacyjne są wydrukowane
na następnych stronach.**

Zadanie 1. (0–2)

Ładunek elektryczny zgromadzony w kondensatorze można opisać zależnością

$$Q(t) = Q_0 \cdot \beta^{-t} \quad \text{dla } t \geq 0$$

gdzie:

Q_0 – ładunek elektryczny zgromadzony w kondensatorze w chwili początkowej ($t = 0$)
wyrażony w milikulombach

Q – ładunek elektryczny zgromadzony w kondensatorze w chwili t (licząc od chwili
początkowej) wyrażony w milikulombach

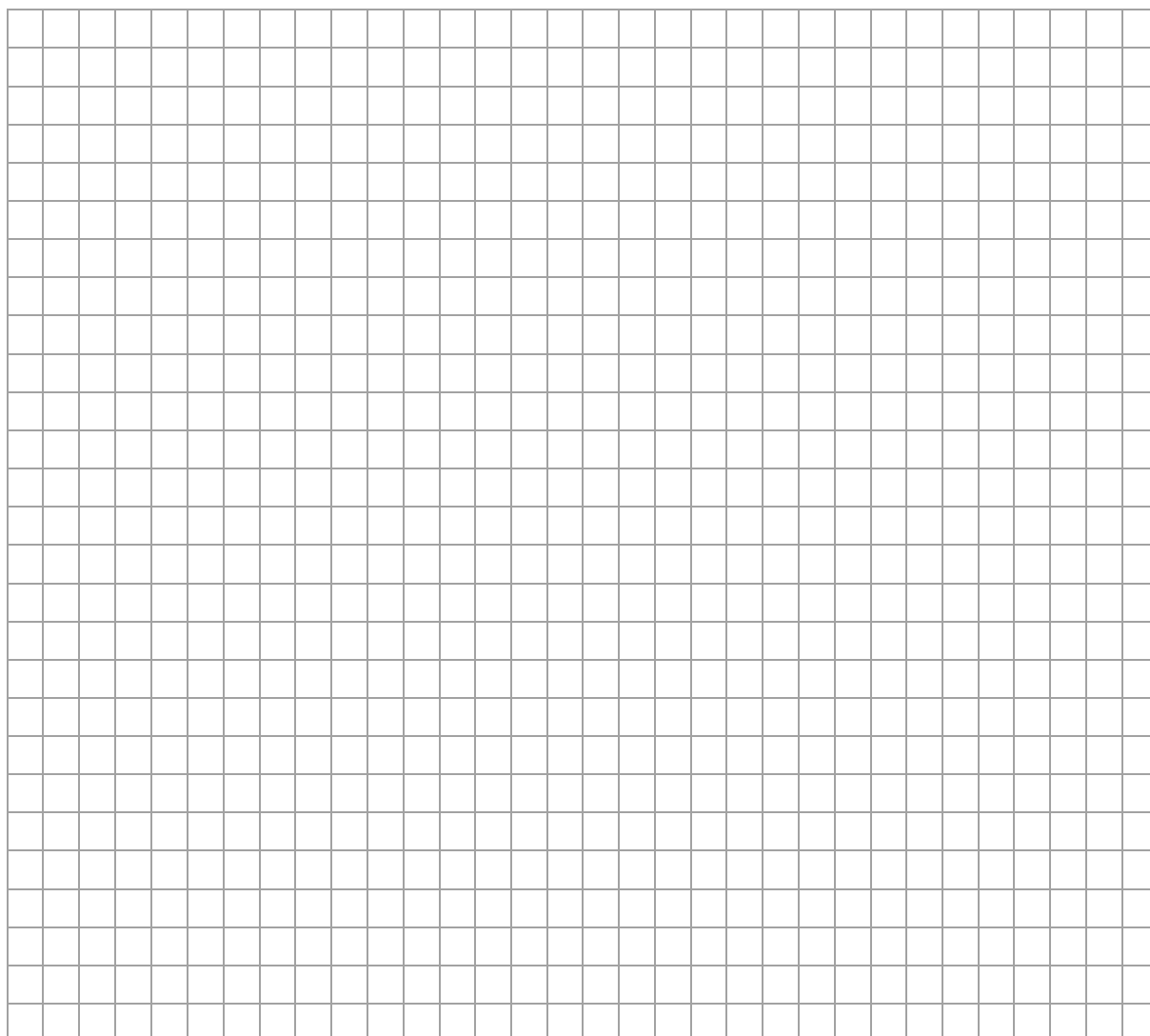
β – stała dodatnia

t – czas wyrażony w sekundach.

Wiadomo, że w chwili $t = 4$ s w kondensatorze był zgromadzony ładunek 2 milikulombów,
a w chwili $t = 6$ s – ładunek 18 milikulombów.

**Oblicz, ile milikulombów ładunku było zgromadzone w tym kondensatorze w chwili
 $t = 5$ s. Zapisz obliczenia.**

1.
0–1–2



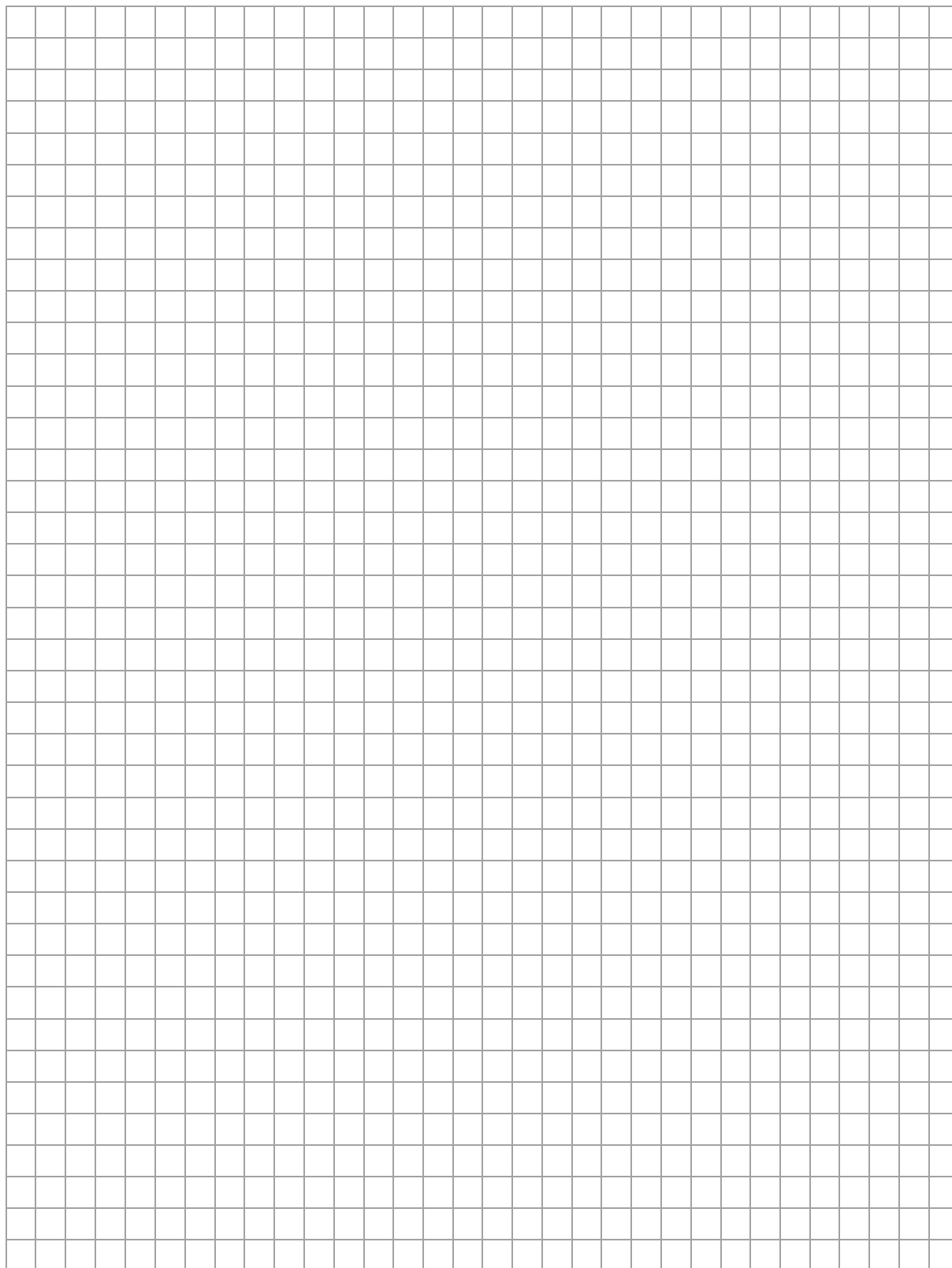
Zadanie 2. (0–2)

Okrąg $\mathcal{O}$ jest styczny do boków AC i BC trójkąta ABC oraz przecina bok AB tego trójkąta w punktach M oraz N , przy czym $0 < |AM| < |AN| < |AB|$.

Wykaż, że jeśli $|AM| = |BN|$, to trójkąt ABC jest równoramienny.

2.

0–1–2



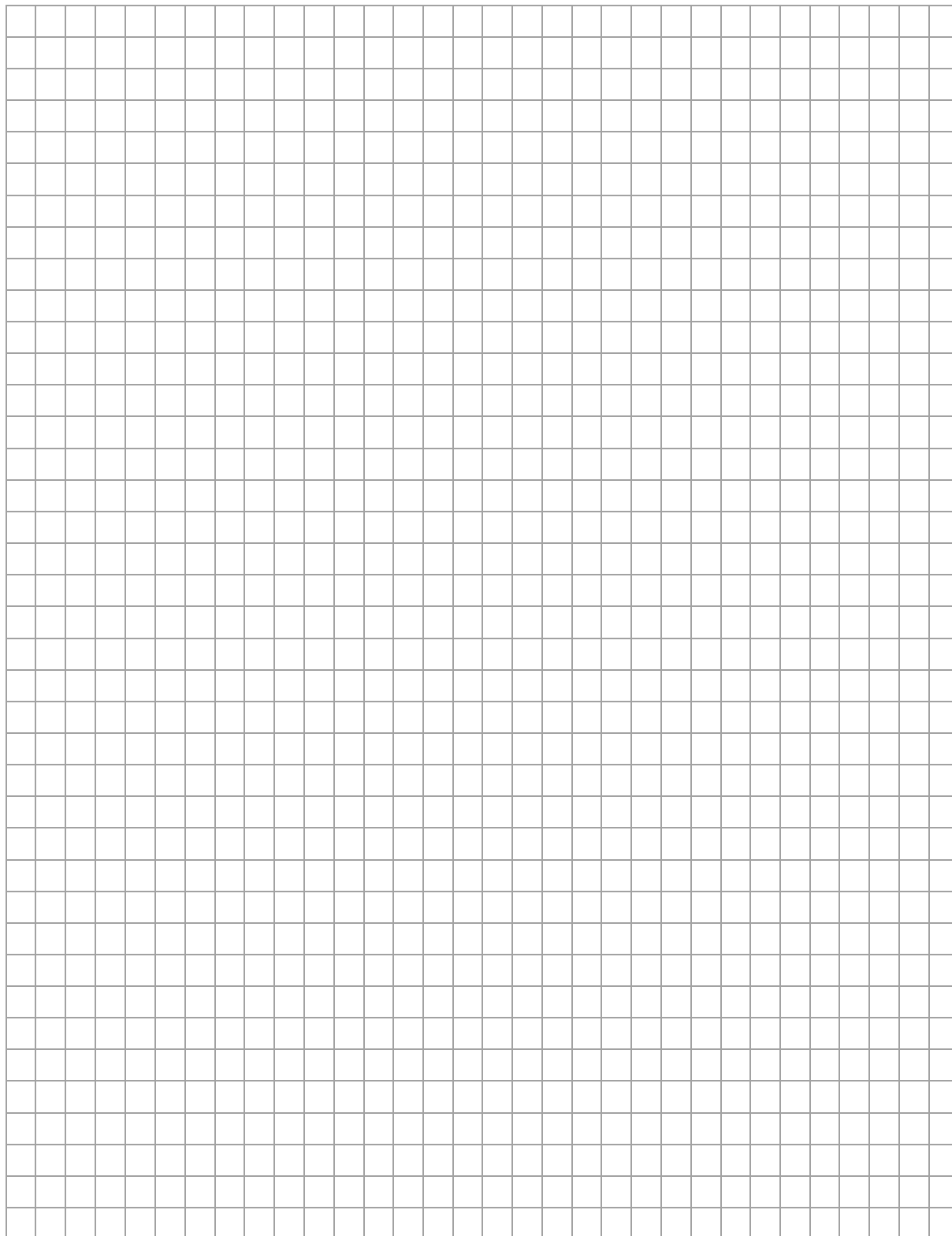
Zadanie 3. (0–3)

Iloczyn długości średnicy podstawy walca i wysokości walca jest równy $12\sqrt{3}$.

Pole powierzchni całkowitej tego walca jest równe $12\pi(\sqrt{3} + 1)$.

Oblicz objętość tego walca. Zapisz obliczenia.

3.
0–1–
2–3

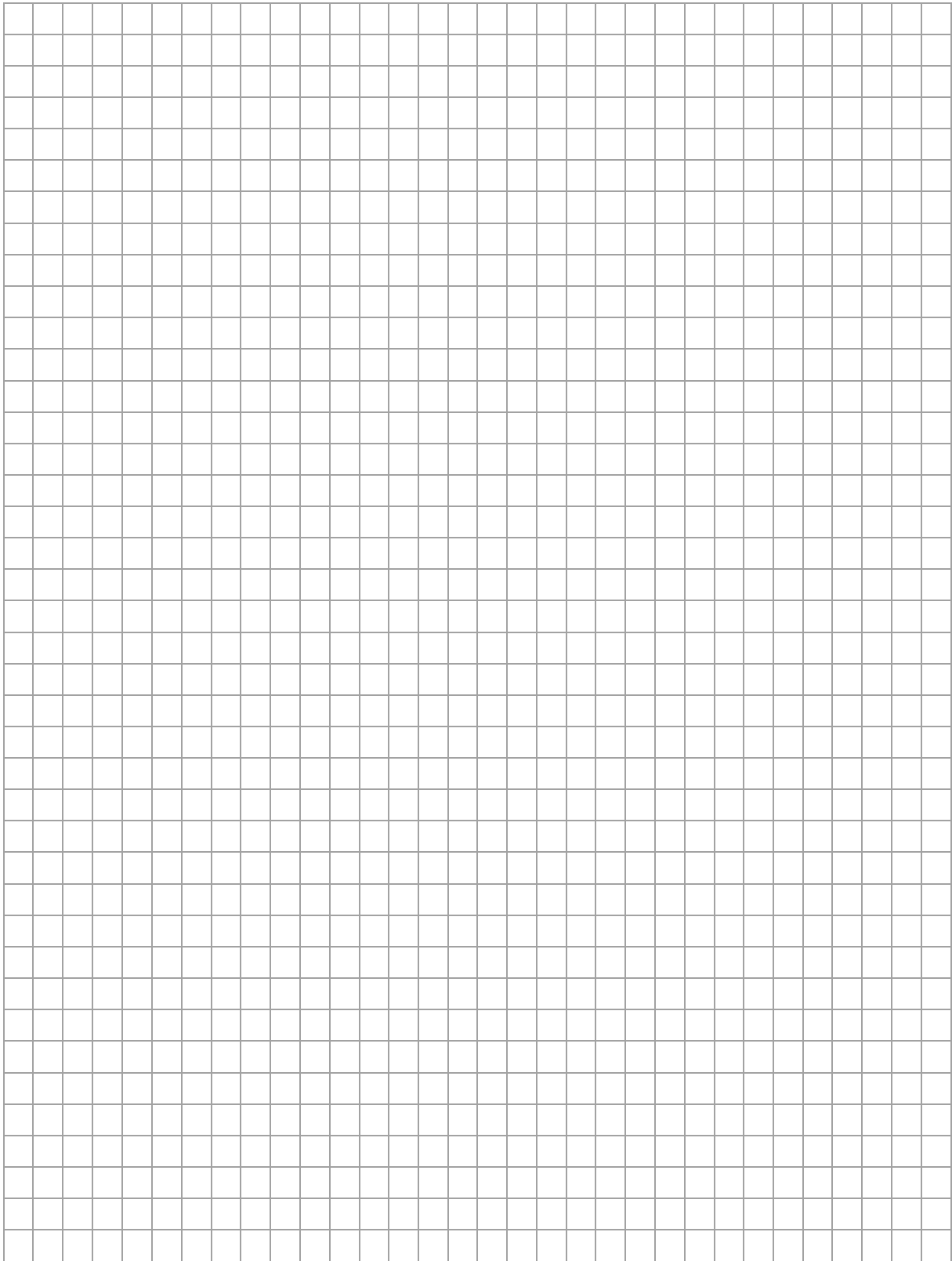


Zadanie 4. (0–3)

Wykaż, że

$$\frac{1}{\log_2 35 + 1} + \frac{1}{\log_7 140 - \log_7 2} + \frac{1}{\log_5 7 + \log_5 2 + 1} = 1$$

4.
0–1– 2–3



Zadanie 5. (0–3)

W pewnej lokalnej społeczności 35% osób ma wyższe wykształcenie. W tej społeczności językiem niemieckim dobrze włada 70% osób mających wyższe wykształcenie i 40% osób bez wyższego wykształcenia.

Spośród członków tej społeczności wybieramy losowo jedną osobę.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wybierzemy osobę z wyższym wykształceniem, jeżeli wiadomo, że ta osoba dobrze włada językiem niemieckim. Wynik zapisz w postaci ułamka dziesiętnego w zaokrągleniu do części setnych. Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The background is a very light gray, and it is covered by a precise grid of thin, medium-gray lines. The grid consists of small, identical squares that extend across the entire visible area of the page, providing a standard template for technical drawing or mathematics.

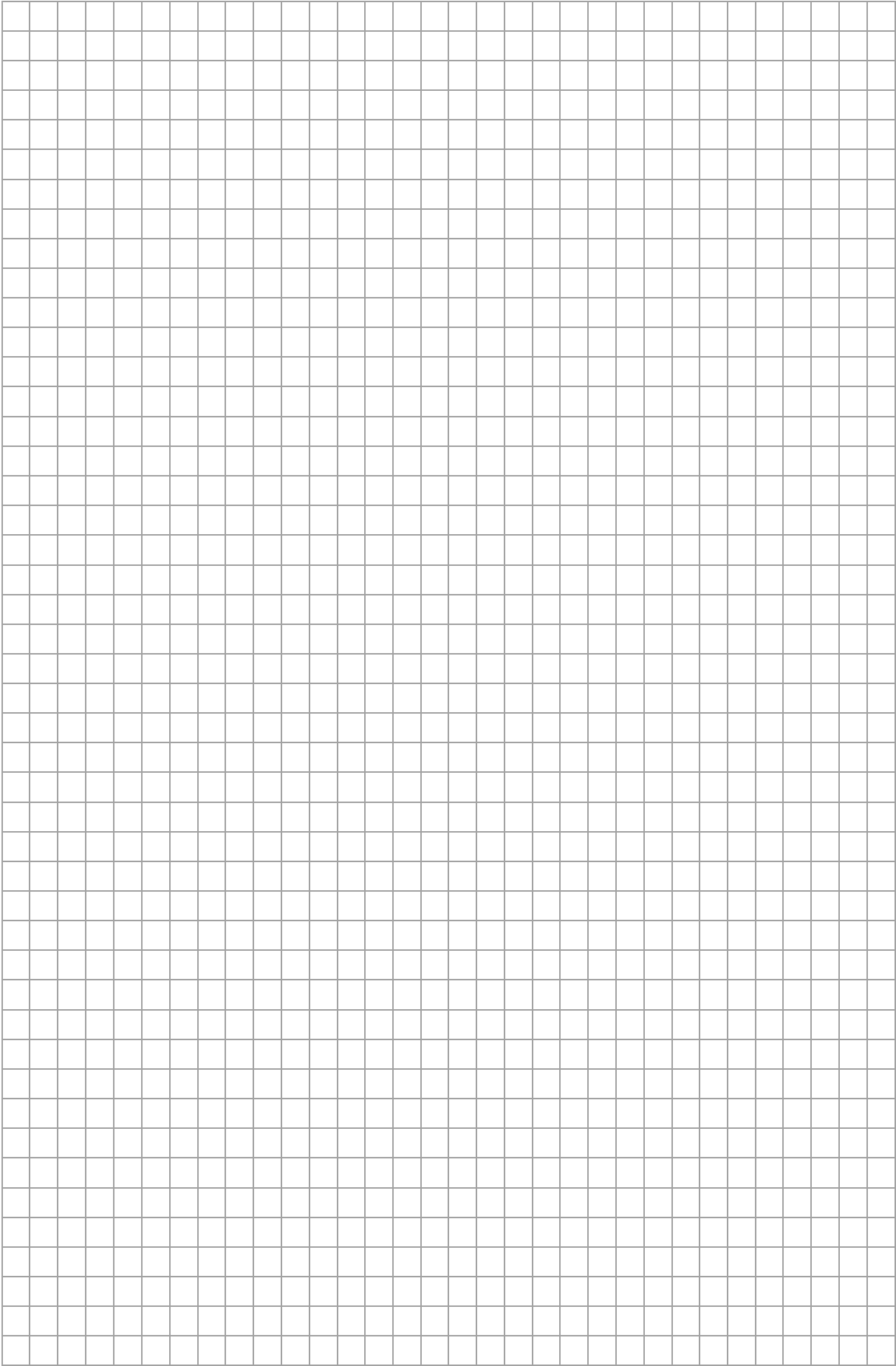
**Kolejne zadania egzaminacyjne są wydrukowane
na następnych stronach.**

Zadanie 6. (0–4)

Rozwiąż równanie

$$|4x - 8| + |x - 2| = |2 - x| + |x + 2| + 4$$

Zapisz obliczenia.

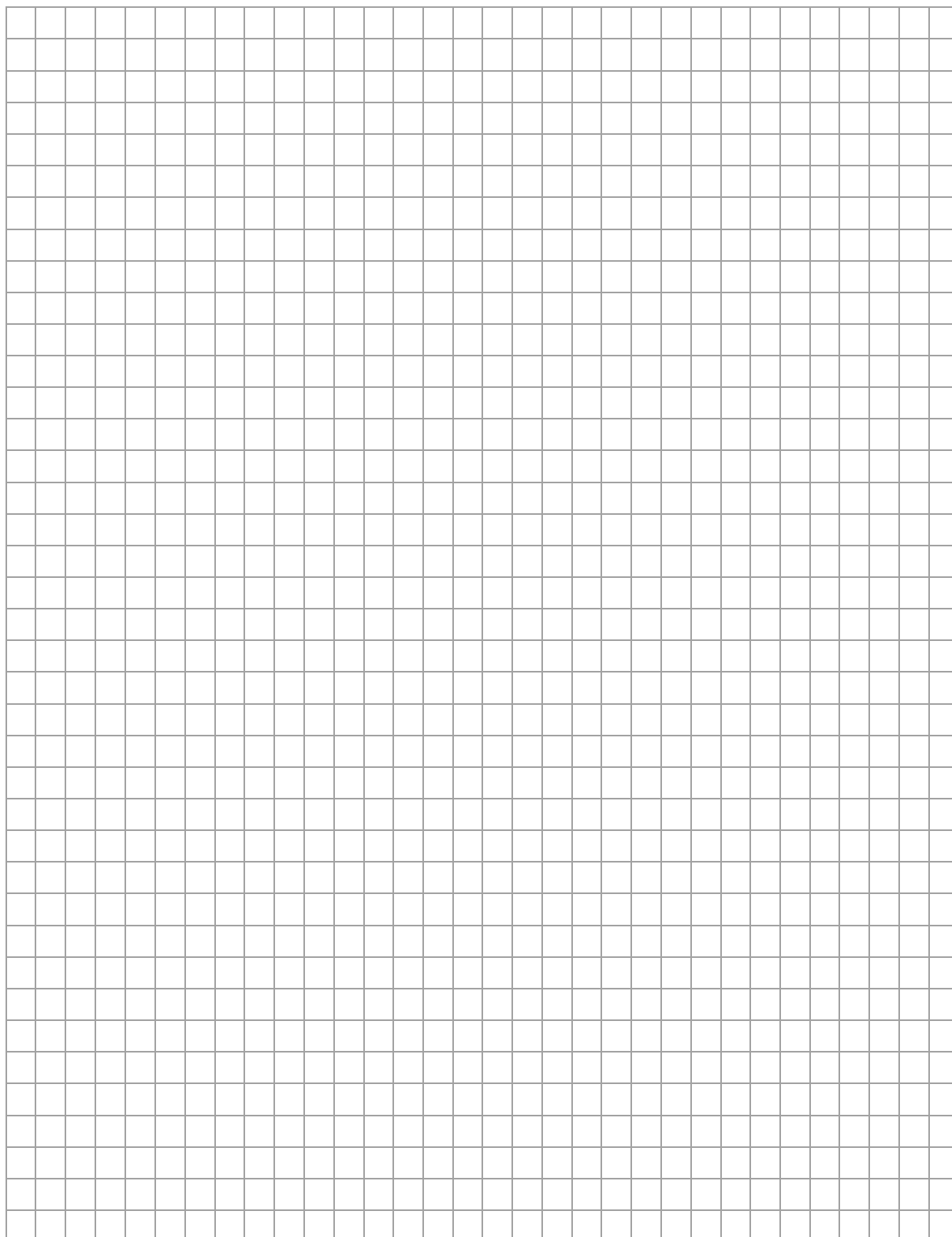


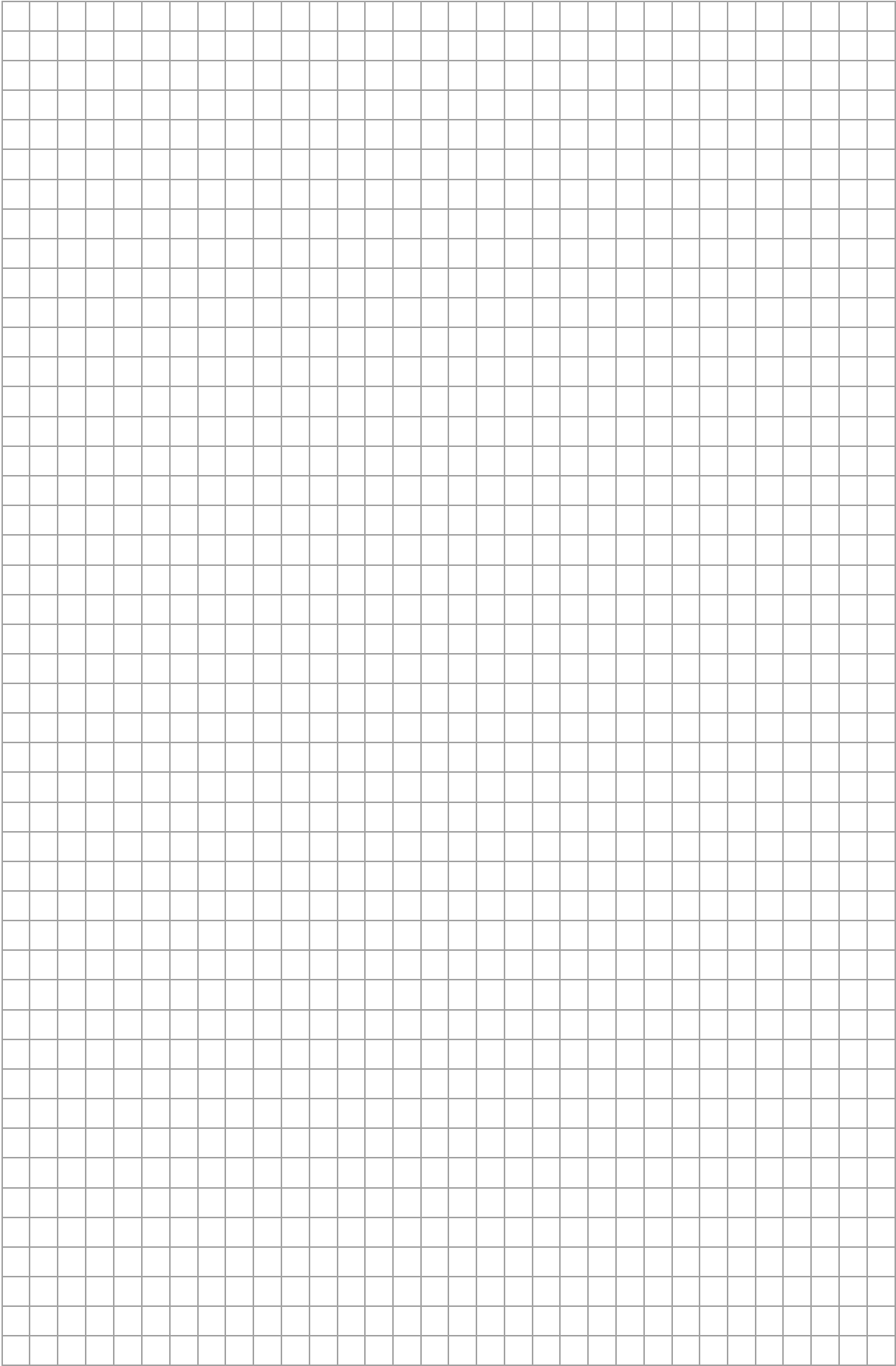
Zadanie 7. (0–4)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są:

okrąg o równaniu $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 50$ i punkty $A = (6, 4)$ oraz $B = (-6, 8)$.

Punkt C leży na tym okręgu i $|AC| = |BC|$.

7.0–1–
2–3–4**Oblicz współrzędne punktu C . Rozważ wszystkie przypadki. Zapisz obliczenia.**



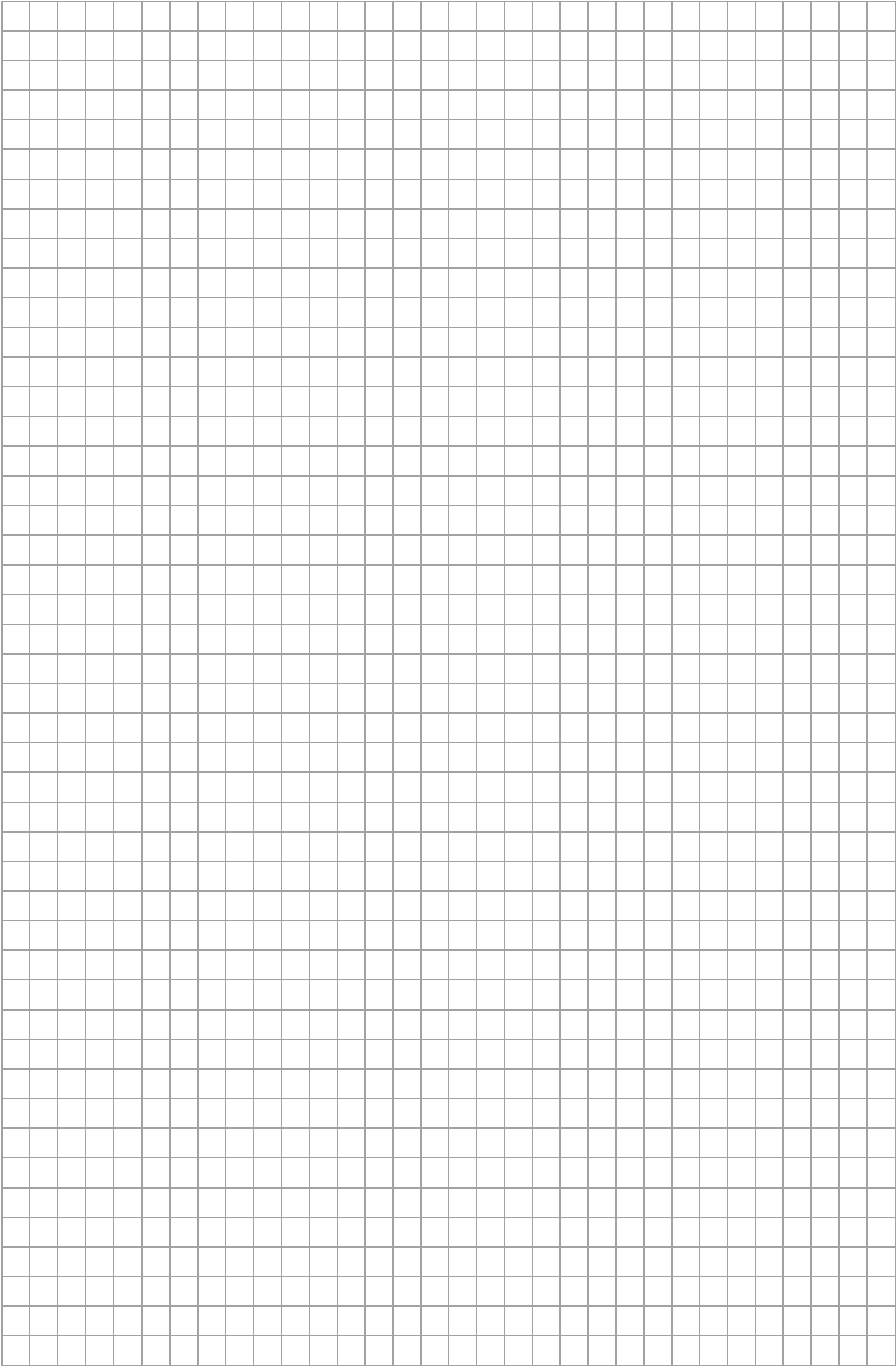
Zadanie 8. (0–4)

Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1)}{\binom{n}{2}}$$

gdzie $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1)$ jest sumą kolejnych liczb naturalnych nieparzystych. Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

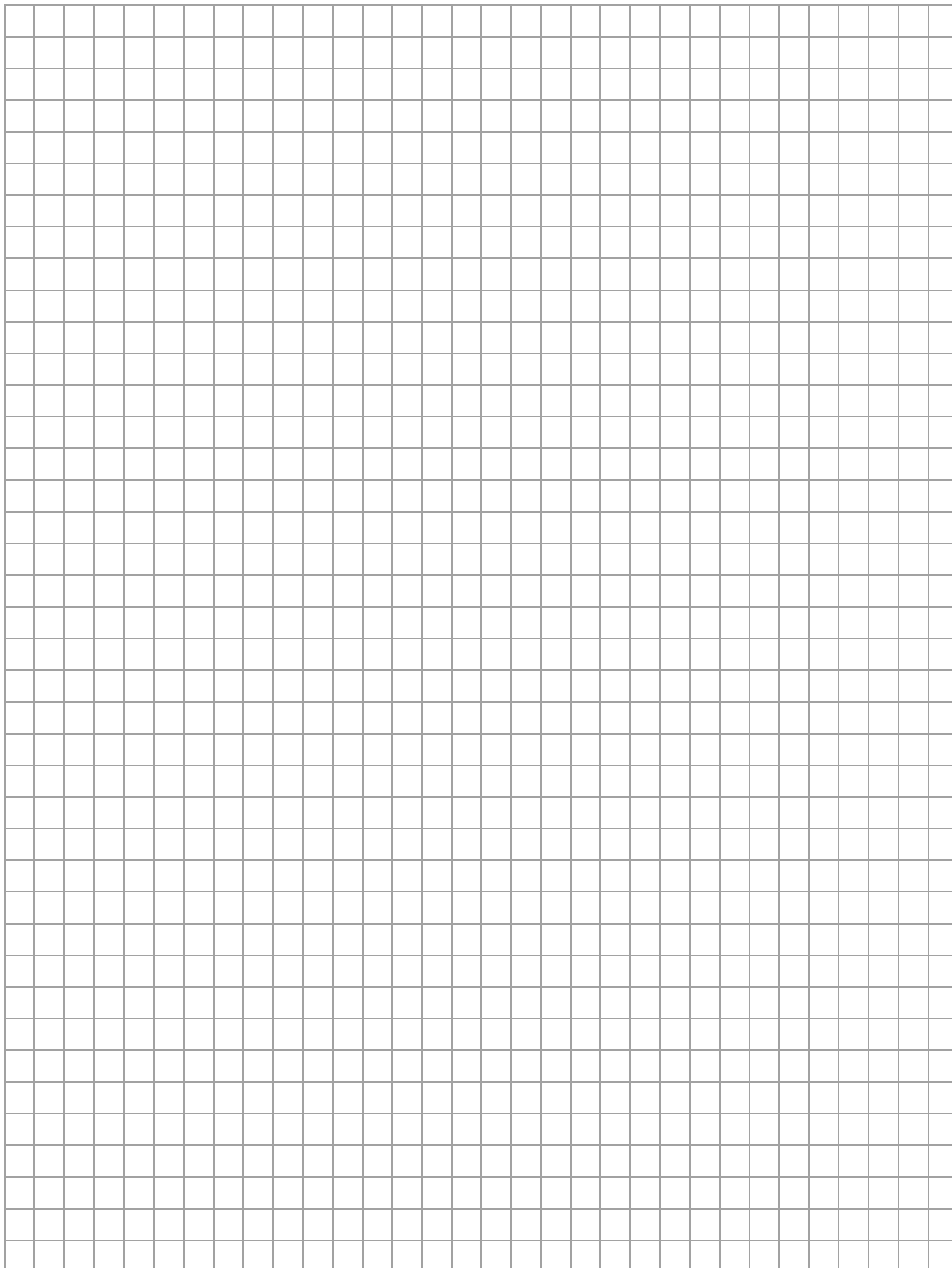


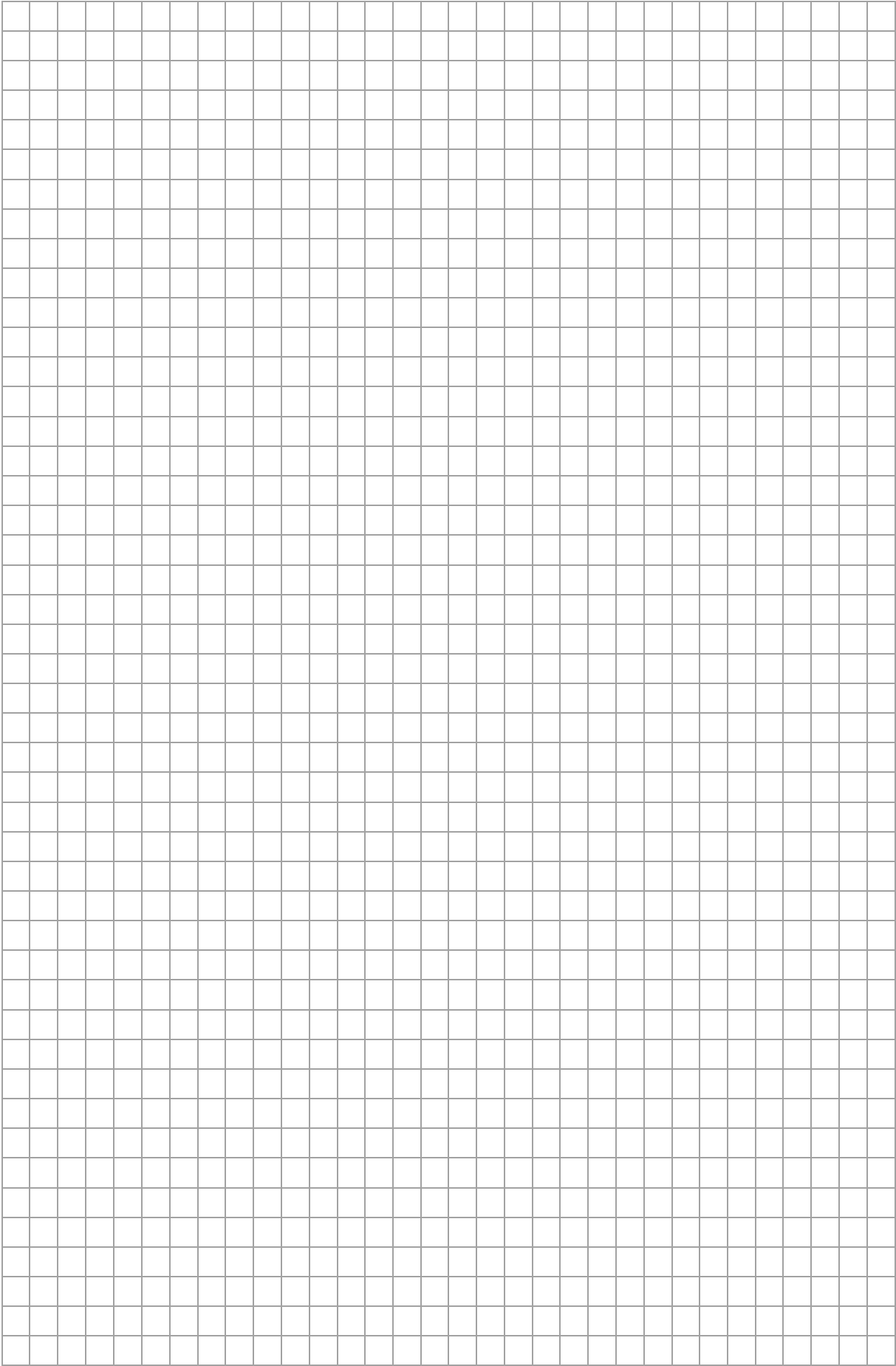
Zadanie 9. (0–4)

Rozwiąż równanie

$$\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$$

w zbiorze $[-\pi, 2\pi]$. Zapisz obliczenia.





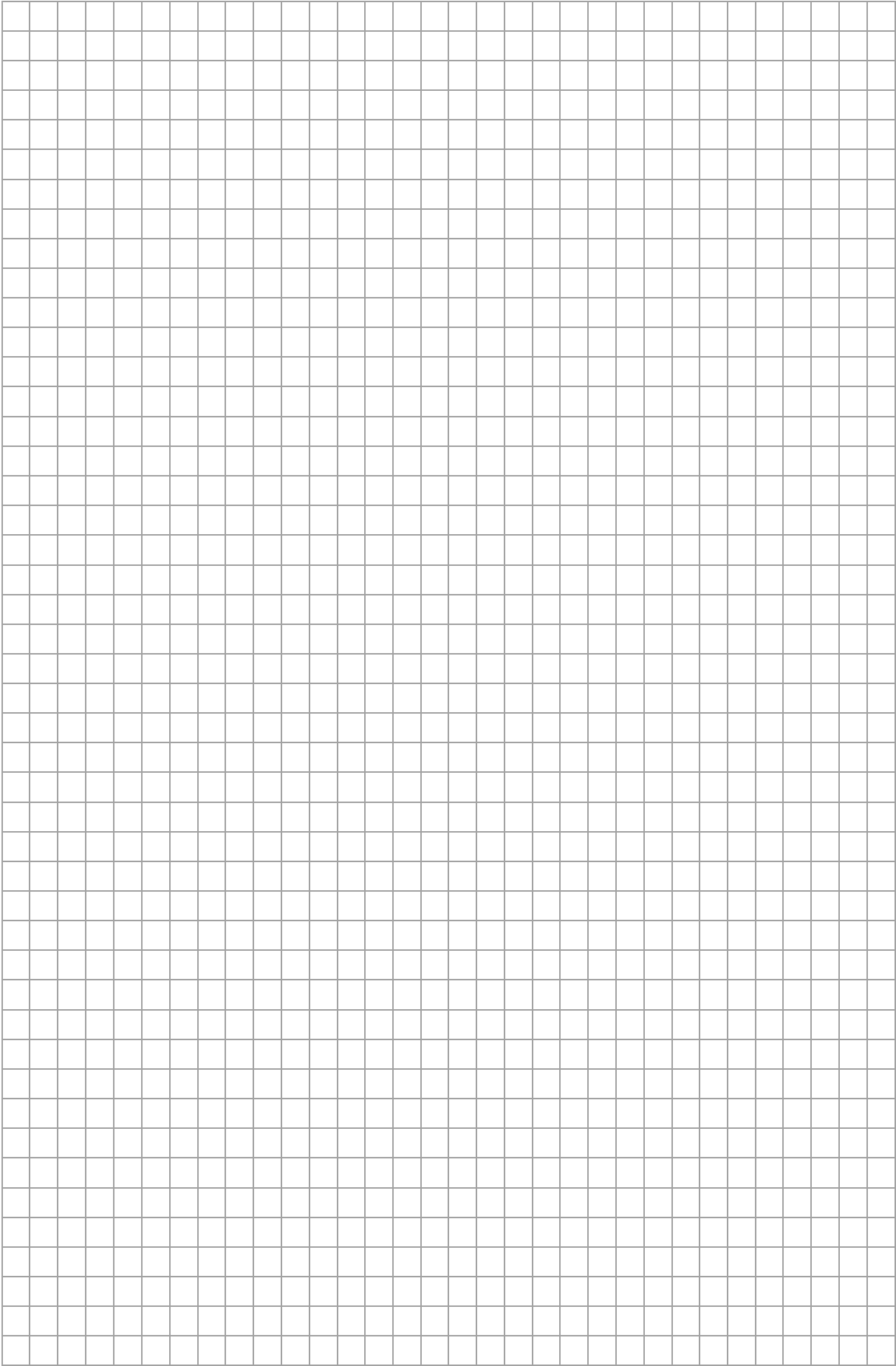
Zadanie 10. (0–5)

Trzeci i piąty wyraz malejącego ciągu arytmetycznego (a_n) , określonego dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, spełniają warunek $a_3 + a_5 = 10$.

Trzywyrazowy ciąg $(2a_1 + 4, a_4 - 1, -\frac{1}{8}a_7)$ jest geometryczny.

Oblicz wyrazy tego ciągu geometrycznego. Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.



Zadanie 11. (0–5)

Funkcja kwadratowa f zmiennej rzeczywistej x jest określona wzorem

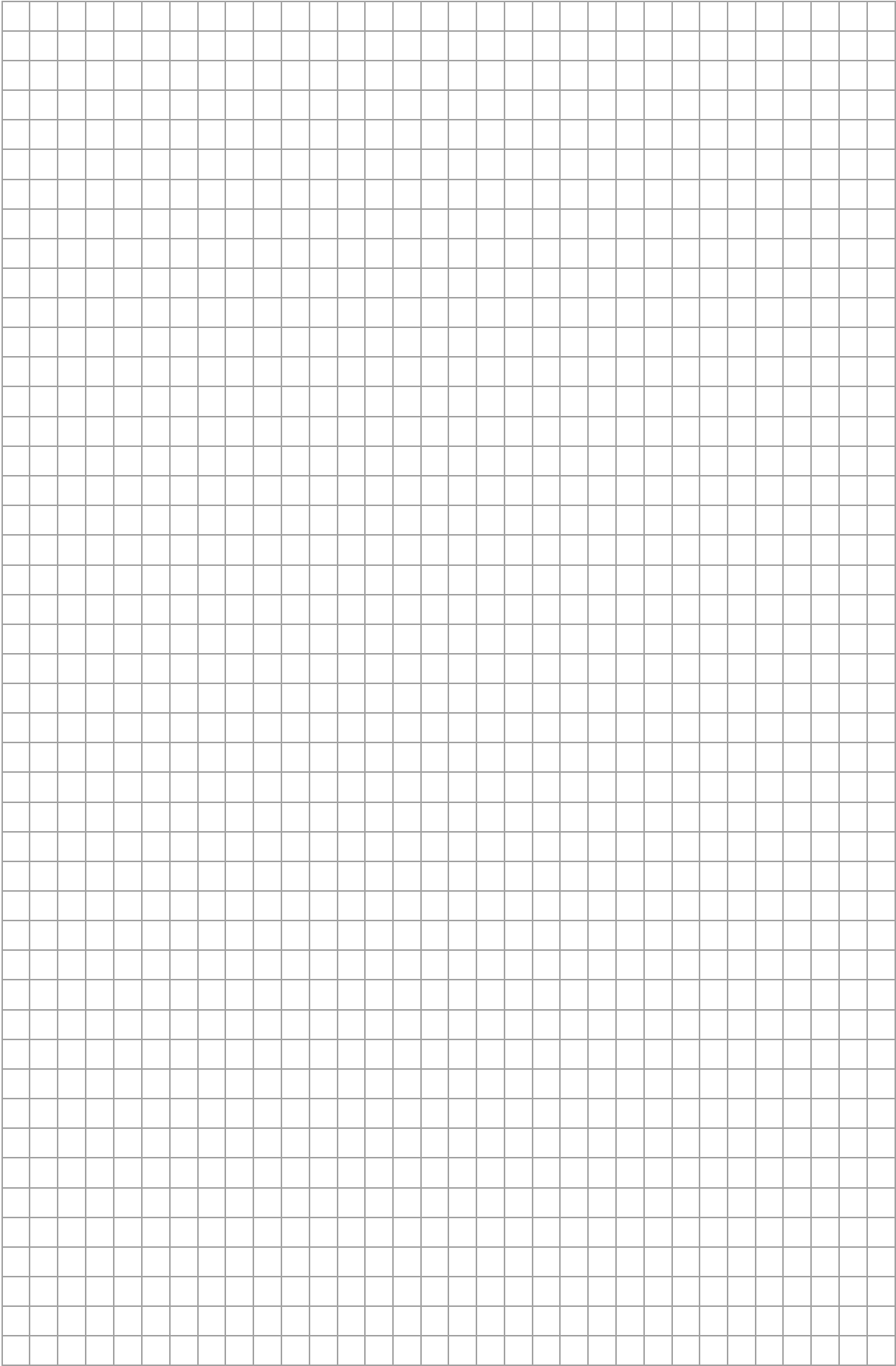
$$f(x) = x^2 - 3x - m^2 + m + 3$$

11.
0-1-
2-3-
4-5

11.
0-1-
2-3-
4-5

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe x_1, x_2 spełniające warunek $|x_1^2 - x_2^2| \leq 12$. Zapisz obliczenia.

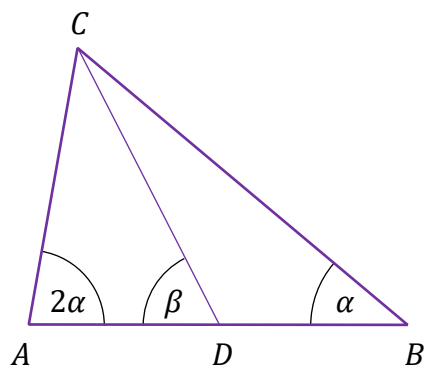
This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, equal-sized squares formed by thin gray lines. There are 20 columns and 20 rows of squares, creating a total of 400 square units. The grid covers the entire area of the page, leaving no margins or other markings.



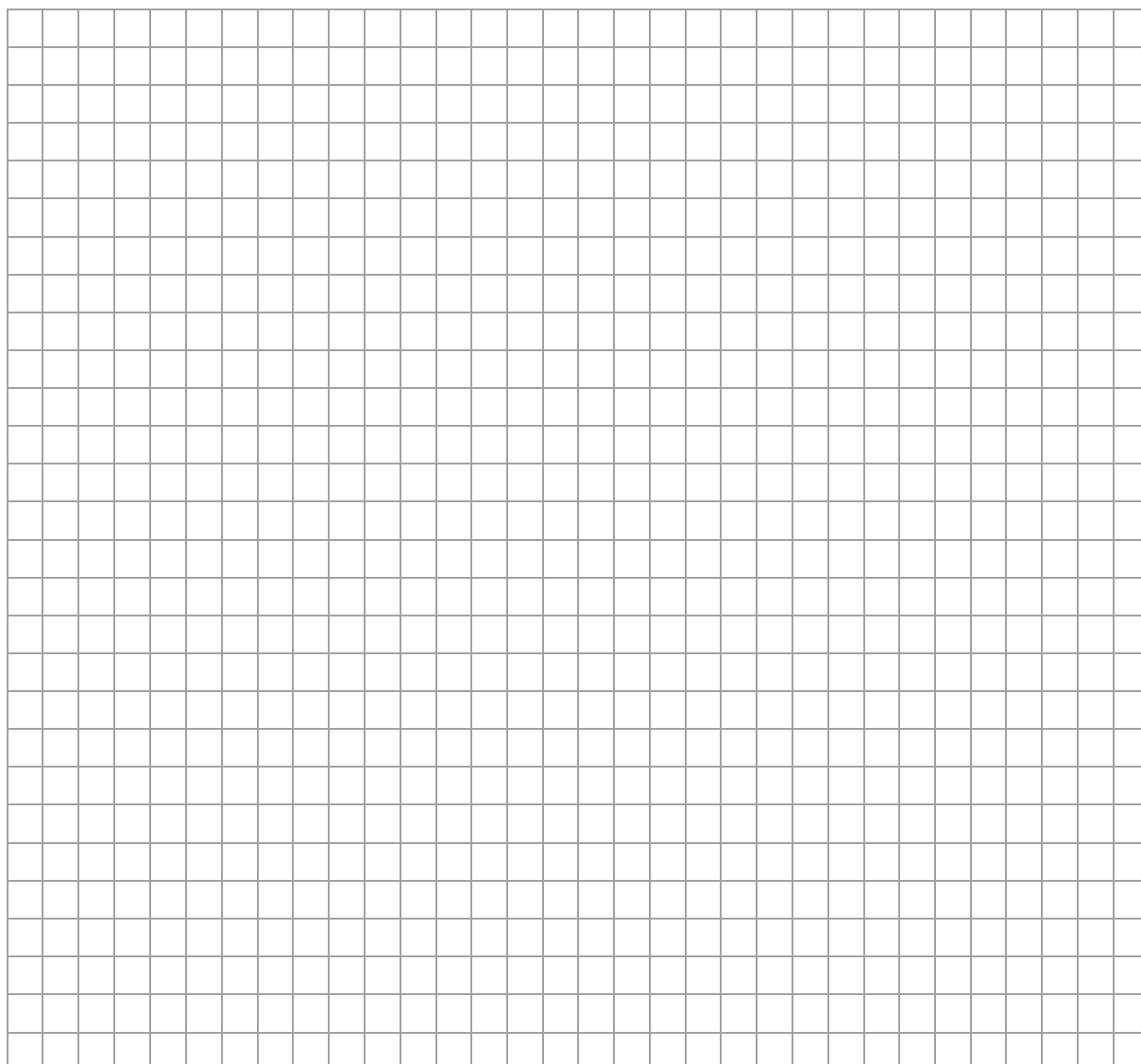
12.
0-1-
2-3-
4-5

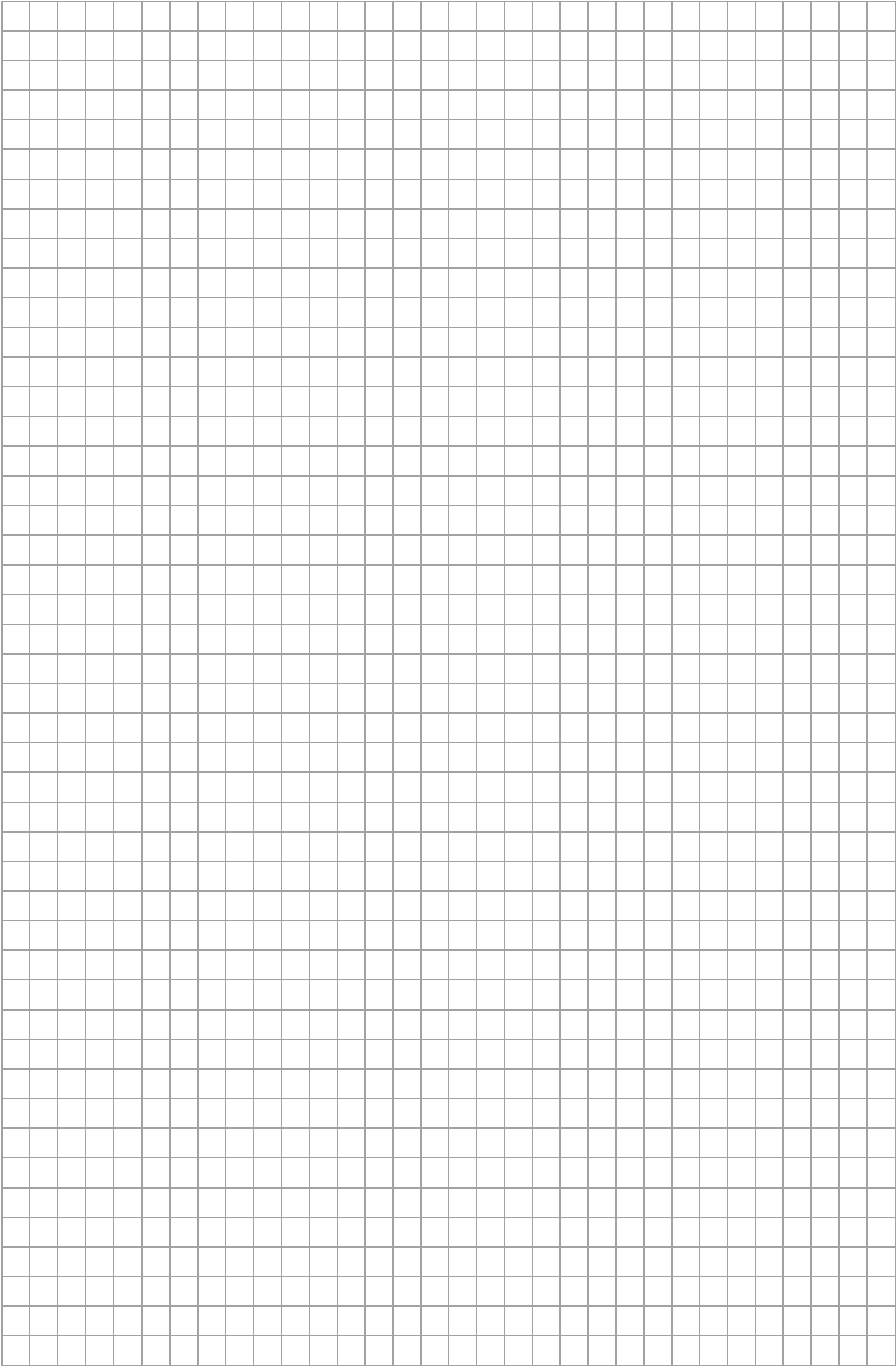
Zadanie 12. (0–5)

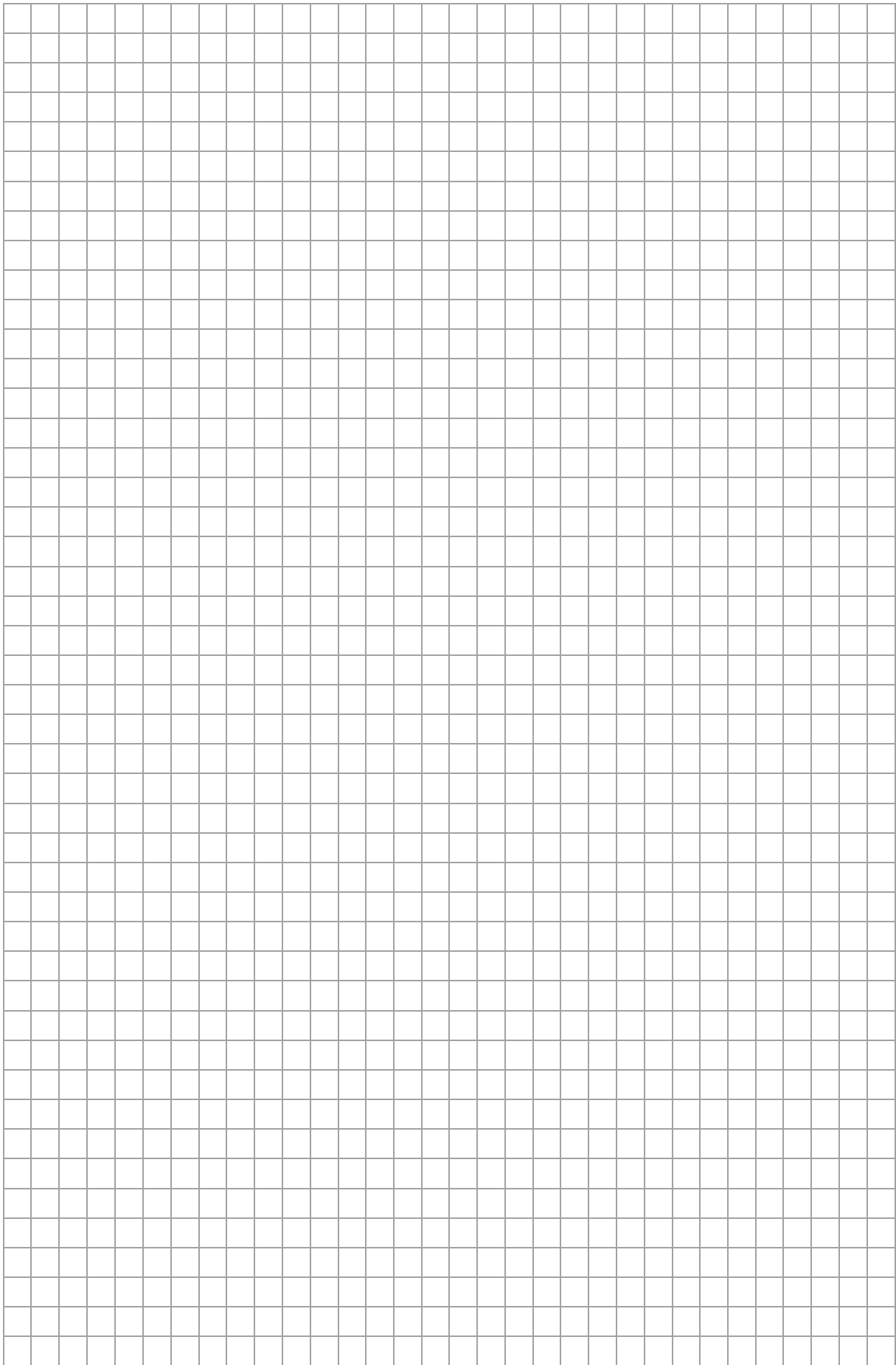
W trójkącie ostrokątnym ABC miara kąta BAC jest dwa razy większa od miary kąta ABC . Punkt D jest środkiem boku AB . Niech α oznacza miarę kąta ABC , natomiast β – miarę kąta ADC (zobacz rysunek).



Oblicz $\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\alpha)}$. Zapisz obliczenia.







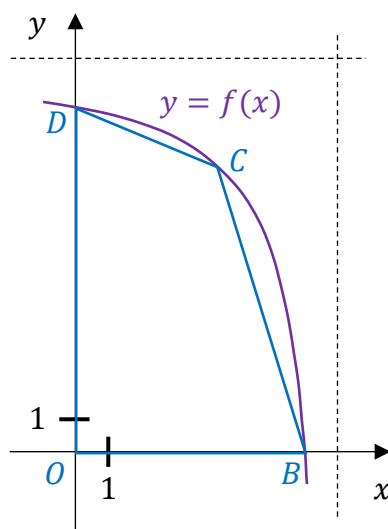
Zadanie 13.

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{12x-84}{x-8}$ dla każdego $x \in (-\infty, 8)$.

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) rozważamy wszystkie czworokąty $OBCD$, w których:

- wierzchołek O ma współrzędne $(0, 0)$
- wierzchołki B oraz D są punktami przecięcia wykresu funkcji f z osią – odpowiednio – Ox i Oy
- wierzchołek C ma obie współrzędne dodatnie i leży na wykresie funkcji f

(zobacz rysunek).

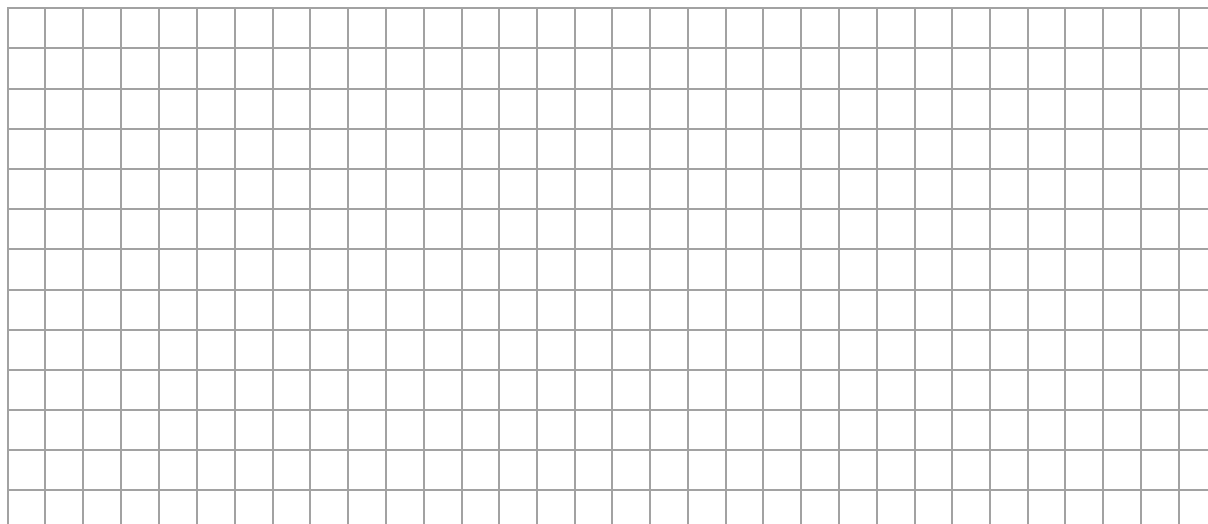
**Zadanie 13.1. (0–2)**

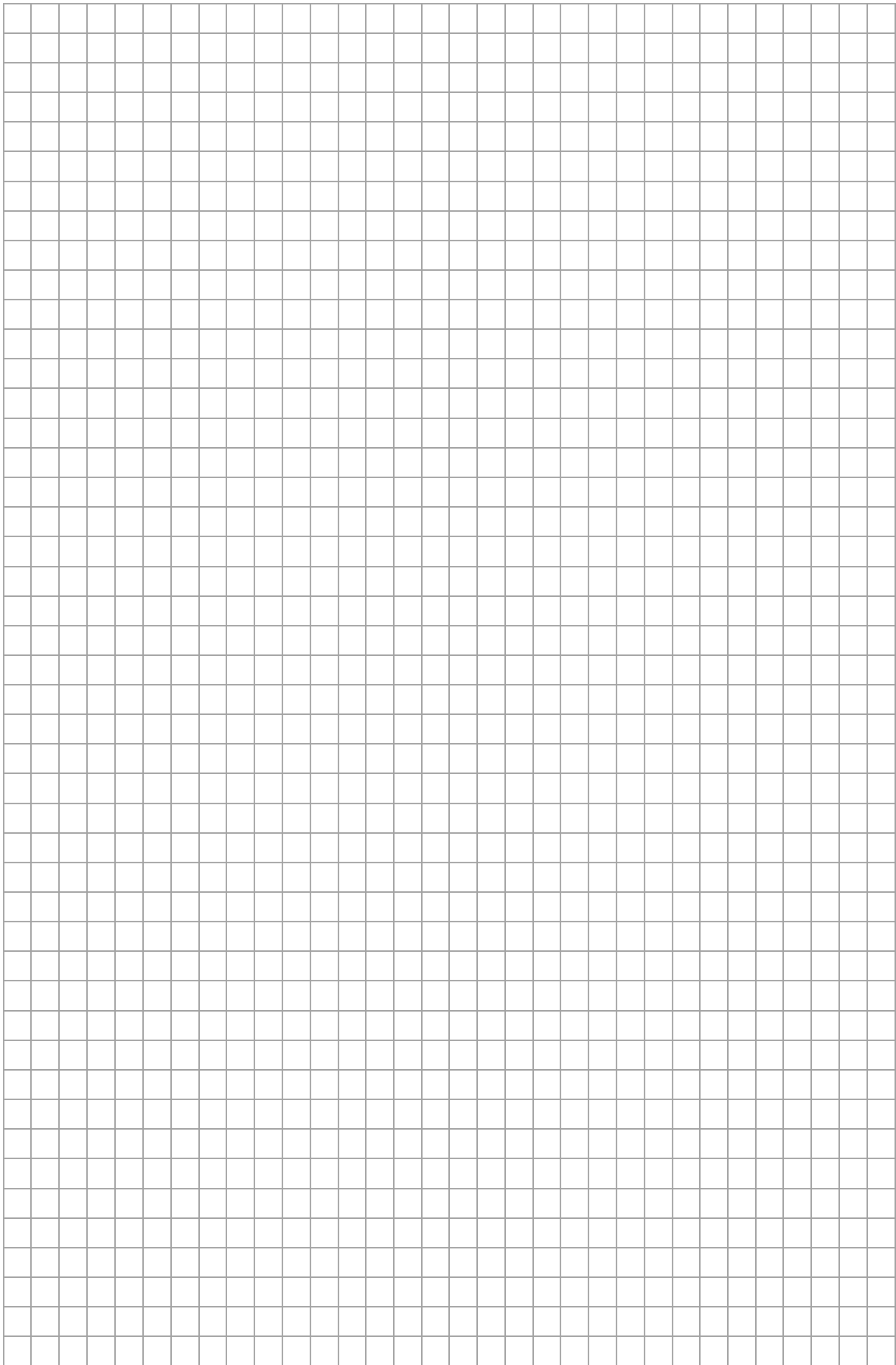
Wykaż, że pole P czworokąta $OBCD$ w zależności od pierwszej współrzędnej x punktu C jest określone wzorem

$$P(x) = \frac{21}{4} \cdot \frac{x^2 - 56}{x - 8}$$

13.1.

0–1–2





Zadanie 13.2. (0–4)

Pole P czworokąta $OB CD$ w zależności od pierwszej współrzędnej x punktu C jest określone wzorem

$$P(x) = \frac{21}{4} \cdot \frac{x^2 - 56}{x - 8}$$

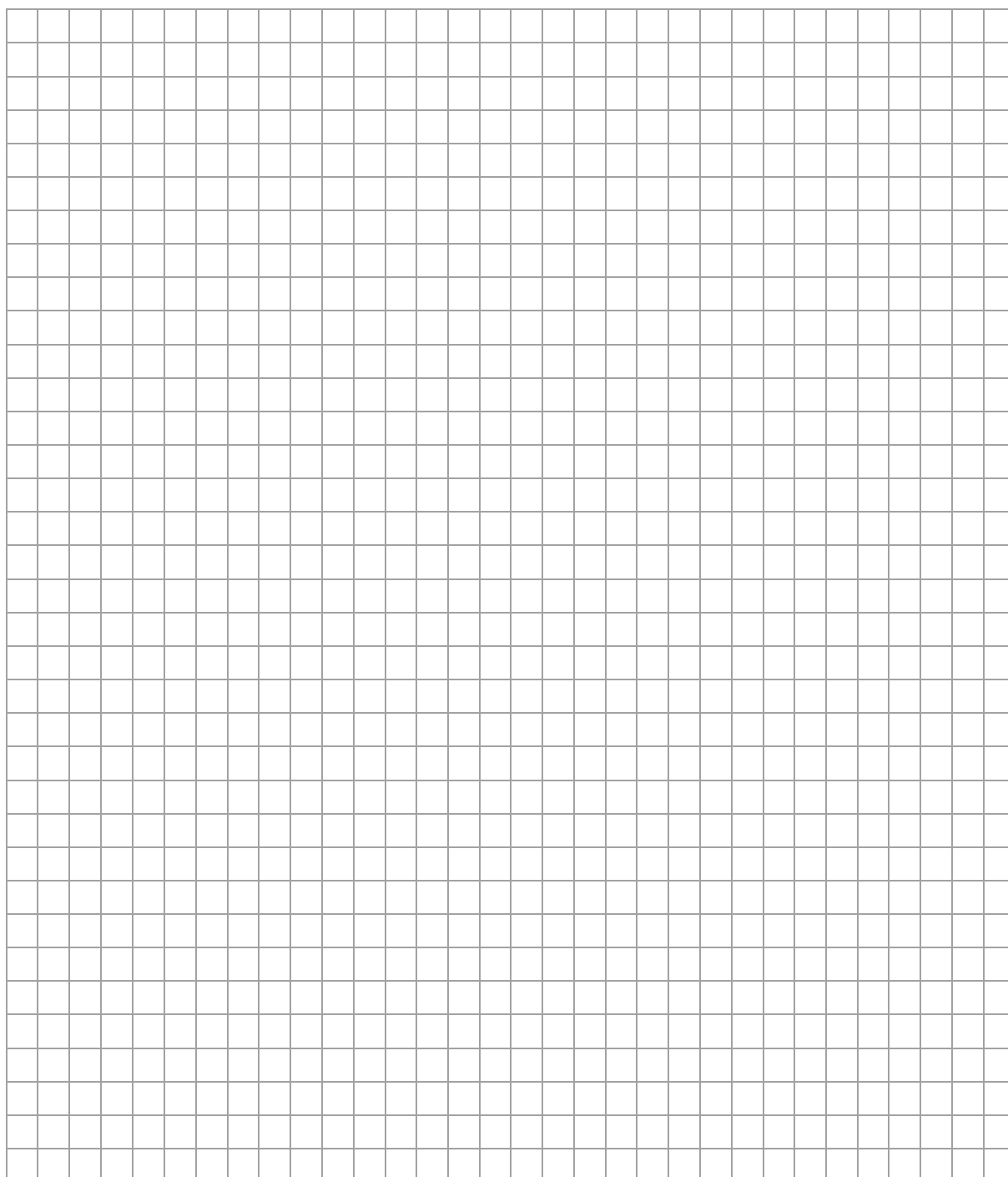
dla $x \in (0, 7)$.

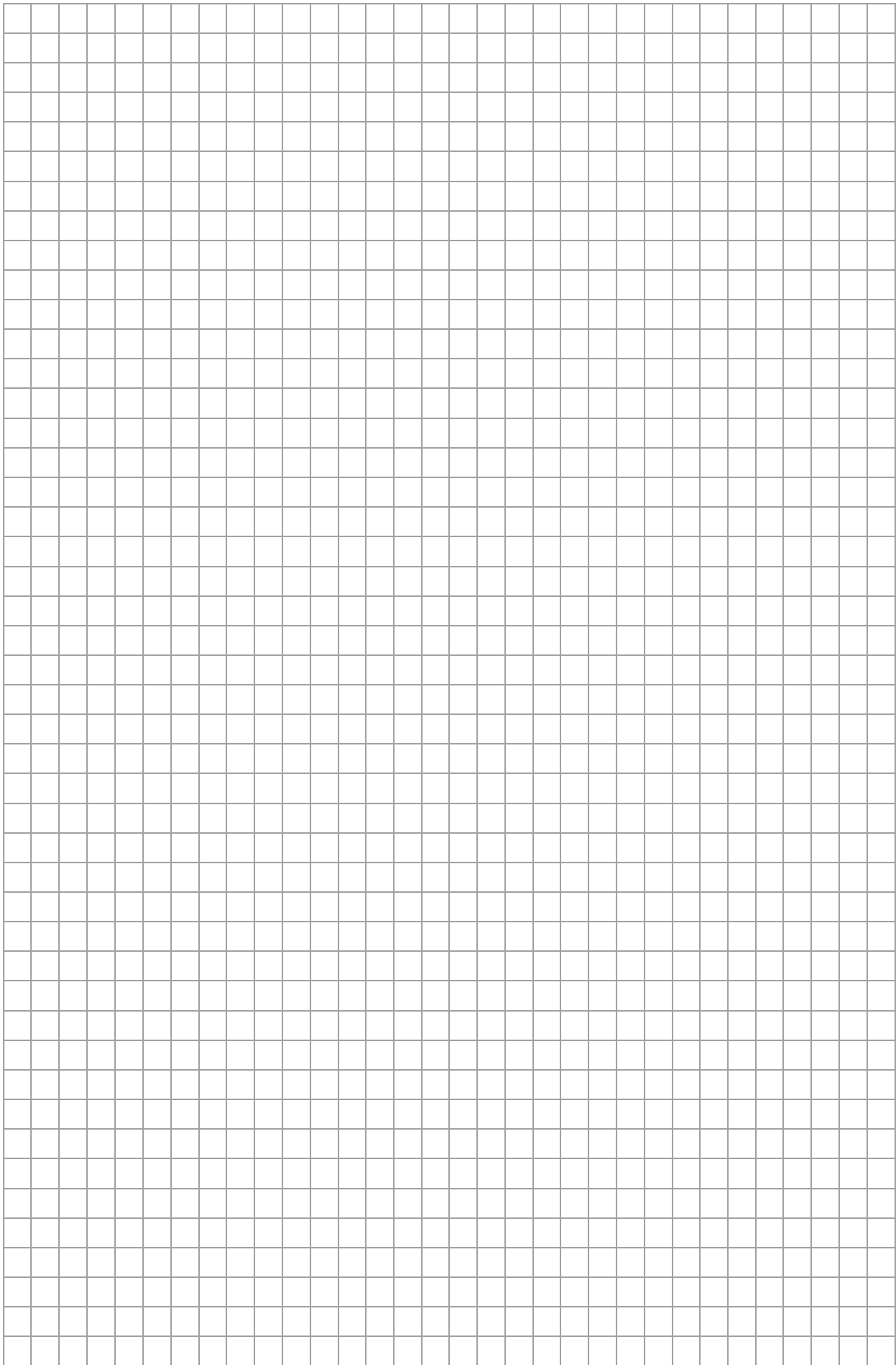
Oblicz współrzędne wierzchołka C , dla których pole czworokąta $OB CD$ jest największe. Zapisz obliczenia.

13.2.

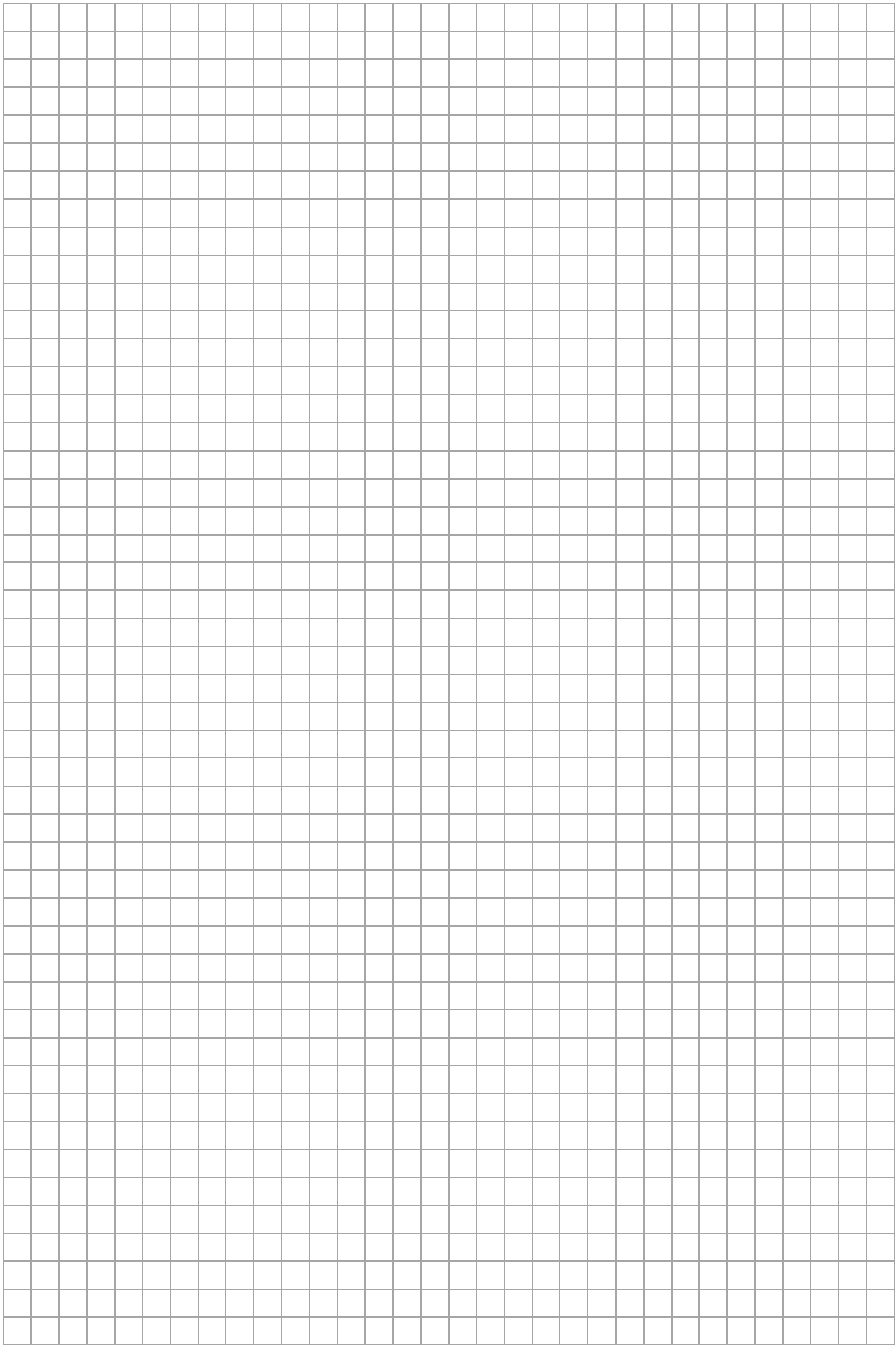
0–1–

2–3–4





This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.



MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023



MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023



MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023



<i>Rodzaj dokumentu:</i>	Zasady oceniania rozwiązań zadań
<i>Egzamin:</i>	Egzamin maturalny TEST DIAGNOSTYCZNY
<i>Przedmiot:</i>	Matematyka
<i>Poziom:</i>	Poziom rozszerzony
<i>Formy arkusza:</i>	MMAP-R0-100, MMAP-R0-200, MMAP-R0-300, MMAP-R0-400, MMAP-R0-660, MMAP-R0-700, MMAP-R0-K00, MMAP-R0-Q00
<i>Termin egzaminu:</i>	12 grudnia 2024 r.
<i>Data publikacji dokumentu:</i>	13 grudnia 2024 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–2)

Wymagania określone w podstawie programowej ¹	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym [...].	Zdający: V.14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną [...] do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 6 (mikukulombów).

1 pkt – obliczenie $Q_0 : \frac{2}{81}$

ALBO

– obliczenie $\beta : \frac{1}{3}$,

ALBO

– zapisanie związku $[Q(5)]^2 = Q(4) \cdot Q(6)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Z warunków $Q(4) = 2$ oraz $Q(6) = 18$ otrzymujemy związki $2 = Q_0 \cdot \beta^{-4}$ oraz

$18 = Q_0 \cdot \beta^{-6}$. Stąd

$$\frac{2}{18} = \frac{Q_0 \cdot \beta^{-4}}{Q_0 \cdot \beta^{-6}}$$

$$\frac{1}{9} = \beta^2$$

$$\beta = \frac{1}{3}$$

¹ Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz.U. z 2024 r. poz. 1019).

Zatem $2 = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$, więc $Q_0 = \frac{2}{81}$.

Obliczamy $Q(5)$:

$$Q(5) = \frac{2}{81} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-5} = \frac{2}{81} \cdot 3^5 = 6$$

Sposób II

Zauważamy, że ciąg wartości funkcji Q dla kolejnych liczb naturalnych, tj. $Q(1)$, $Q(2)$, $Q(3)$, ..., jest geometryczny, ma wszystkie wyrazy dodatnie, pierwszy wyraz równy Q_0 oraz iloraz $\frac{1}{\beta}$.

Z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy

$$[Q(5)]^2 = Q(4) \cdot Q(6)$$

$$[Q(5)]^2 = 2 \cdot 18$$

$$Q(5) = 6$$

W chwili $t = 5$ s w kondensatorze był zgromadzony ładunek 6 mikulombów.

Zadanie 2. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.11) przeprowadza dowody geometryczne.

Zasady oceniania

2 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – uzasadnienie, że $|CD| = |CE|$

ALBO

– uzasadnienie, że $|AD| = |BE|$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

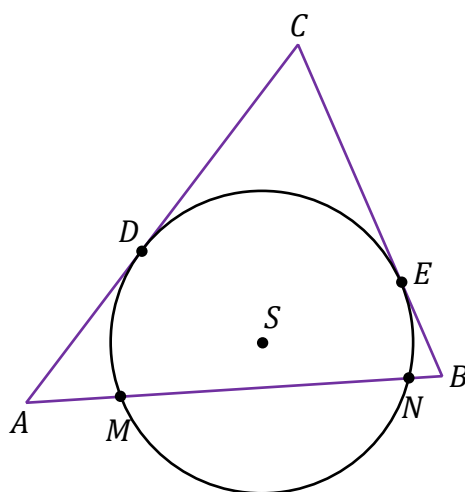
Sposób I

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

D – punkt styczności okręgu $\mathcal{O}$ do boku AC trójkąta,

E – punkt styczności okręgu $\mathcal{O}$ do boku BC trójkąta,

S – środek okręgu $\mathcal{O}$ (zobacz rysunek).



Z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika, że $|CD| = |CE|$.

Ponieważ $|MS| = |NS|$, więc trójkąt MNS jest równoramienny i $|\sphericalangle SMN| = |\sphericalangle SNM|$.

Zatem $|\sphericalangle SMA| = |\sphericalangle SNB|$.

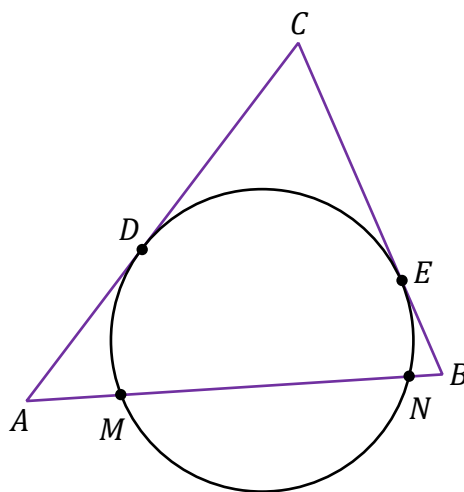
Jeżeli $|AM| = |NB|$, to wówczas trójkąty AMS i BNS będą przystające (na podstawie cechy bkb przystawiania trójkątów), czyli $|AS| = |BS|$. Z równości $|AS| = |BS|$ oraz $|DS| = |ES|$, po zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa, otrzymamy $|AD| = |BE|$. Stąd

$$|AC| = |AD| + |DC| = |CE| + |EB| = |BC|$$

To należało wykazać.

Sposób II

Oznaczmy przez D punkt styczności okręgu $\mathcal{O}$ do boku AC trójkąta. Niech E będzie punktem styczności okręgu $\mathcal{O}$ do boku BC trójkąta (zobacz rysunek).



Z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika, że $|CD| = |CE|$.

Jeżeli $|AM| = |NB|$, to z twierdzenia o odcinkach siecznej i stycznej otrzymujemy

$$|AD|^2 = |AM| \cdot |AN| = |AM| \cdot (|AM| + |MN|) = |AM| \cdot (|BN| + |MN|) = |AM| \cdot |BM|$$

oraz

$$|BE|^2 = |BN| \cdot |BM| = |AM| \cdot |BM|$$

Zatem $|AD| = |BE|$ i dlatego $|AC| = |AD| + |DC| = |BE| + |CE| = |BC|$.

To należało wykazać.

Zadanie 3. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: X.5) oblicza objętości i pola powierzchni [...] walca [...].

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $18\pi\sqrt{2}$.

2 pkt – obliczenie promienia walca i wysokości walca: $r = \sqrt{6}$ i $h = 3\sqrt{2}$.

1 pkt – zapisanie dwóch równań: $2r \cdot h = 12\sqrt{3}$ i $2\pi r^2 + 2\pi rh = 12\pi(\sqrt{3} + 1)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech r będzie promieniem podstawy walca, natomiast h – wysokością walca.

Z warunków zadania otrzymujemy $2r \cdot h = 12\sqrt{3}$ oraz $2\pi r^2 + 2\pi rh = 12\pi(\sqrt{3} + 1)$.

Z pierwszego z tych równań wyznaczamy $h = \frac{6\sqrt{3}}{r}$ i podstawiamy w miejsce h do drugiego z równań, otrzymując

$$2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{6\sqrt{3}}{r} = 12\pi(\sqrt{3} + 1)$$

$$2\pi r^2 + 12\sqrt{3}\pi = 12\pi(\sqrt{3} + 1)$$

$$r^2 = 6$$

Zatem $r = \sqrt{6}$ oraz $h = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = 3\sqrt{2}$.

Obliczamy objętość V walca:

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 6 \cdot 3\sqrt{2} = 18\pi\sqrt{2}$$

Zadanie 4. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: I.R) stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Zasady oceniania

3 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – przekształcenie wyrażenia $\frac{1}{\log_2 35 + 1} + \frac{1}{\log_7 140 - \log_7 2} + \frac{1}{\log_5 7 + \log_5 2 + 1}$ do postaci $\log_{70} 2 + \log_{70} 7 + \log_{70} 5$.

1 pkt – przekształcenie wyrażenia $\frac{1}{\log_2 35 + 1} + \frac{1}{\log_7 140 - \log_7 2} + \frac{1}{\log_5 7 + \log_5 2 + 1}$ do postaci $\frac{1}{\log_2 70} + \frac{1}{\log_7 70} + \frac{1}{\log_5 70}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Stosujemy definicję logarytmu oraz wzory na sumę logarytmów oraz na różnicę logarytmów i otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\log_2 35 + 1} + \frac{1}{\log_7 140 - \log_7 2} + \frac{1}{\log_5 7 + \log_5 2 + 1} = \\
 & = \frac{1}{\log_2 35 + \log_2 2} + \frac{1}{\log_7 70} + \frac{1}{\log_5 7 + \log_5 2 + \log_5 5} = \\
 & = \frac{1}{\log_2 70} + \frac{1}{\log_7 70} + \frac{1}{\log_5 70}
 \end{aligned}$$

Stąd, po zastosowaniu wzoru na zamianę podstawy logarytmu oraz na logarytm sumy, dostajemy

$$\frac{1}{\log_2 70} + \frac{1}{\log_7 70} + \frac{1}{\log_5 70} = \log_{70} 2 + \log_{70} 7 + \log_{70} 5 = \log_{70} 70 = 1$$

Zatem

$$\frac{1}{\log_2 35 + 1} + \frac{1}{\log_7 140 - \log_7 2} + \frac{1}{\log_5 7 + \log_5 2 + 1} = 1$$

To należało wykazać.

Zadanie 5. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.R1) [...] stosuje wzór Bayesa, stosuje twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 0,49.

2 pkt – zastosowanie twierdzenia Bayesa i zapisanie $P(B_1|A) = \frac{0,35 \cdot 0,7}{0,7 \cdot 0,35 + 0,4 \cdot 0,65}$.

1 pkt – zapisanie prawdopodobieństw: $P(B_1) = 0,35$ i $P(A|B_1) = 0,7$ oraz $P(B_2) = 0,65$, oraz $P(A|B_2) = 0,4$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zbiór zdarzeń elementarnych Ω to zbiór osób w badanej społeczności.

Przyjmijmy następujące oznaczenia zdarzeń:

A – losowo wybrana osoba dobrze włada językiem niemieckim,

B_1 – losowo wybrana osoba ma wyższe wykształcenie,

B_2 – losowo wybrana osoba nie ma wyższego wykształcenia.

Zgodnie z warunkami zadania $B_1 \cup B_2 = \Omega$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ oraz

$$P(B_1) = 0,35$$

$$P(B_2) = 0,65$$

$$P(A) > 0$$

Niech $B_1|A$ oznacza zdarzenie: losowo wybrana osoba ma wyższe wykształcenie, pod warunkiem, że dobrze włada językiem niemieckim.

Z warunków zadania

$$P(A|B_1) = 0,7$$

$$P(A|B_2) = 0,4$$

Obliczamy $P(B_1|A)$, korzystając z twierdzenia Bayesa:

$$\begin{aligned}
 P(B_1|A) &= \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2)} = \frac{0,35 \cdot 0,7}{0,7 \cdot 0,35 + 0,4 \cdot 0,65} = \\
 &= 0,4851 \approx 0,49
 \end{aligned}$$

Zadanie 6. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.R4) rozwiązuje równania [...] z wartością bezwzględną.

Zasady oceniania

- 4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{2}{5}$ oraz $\frac{14}{3}$.
- 3 pkt – rozwiązanie równania w dwóch spośród rozważanych przedziałów/przypadków (o ile zdający rozpatruje równanie w przedziałach/przypadkach, których suma jest równa $\mathbb{R}$ /wyczerpujących zbiór $\mathbb{R}$)
ALBO
- rozwiązanie równania $4x - 8 = |x + 2| + 4$ (dla sposobu II),
ALBO
 - rozwiązanie równania $4x - 8 = -|x + 2| - 4$ (dla sposobu II).
- 2 pkt – zastosowanie definicji wartości bezwzględnej lub własności wartości bezwzględnej i zapisanie danego równania odpowiednio w trzech przedziałach: $(-\infty, -2)$, $[-2, 2)$, $[2, +\infty)$, lub w czterech przypadkach: $x + 2 < 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 2 < 0$ i $x - 2 \geq 0$, $x + 2 \geq 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 2 \geq 0$ i $x - 2 \geq 0$
ALBO
- zapisanie równania w postaci równoważnej alternatywy dwóch równań:
 $4x - 8 = |x + 2| + 4$ lub $4x - 8 = -|x + 2| - 4$ (dla sposobu II).
- 1 pkt – przekształcenie danego równania do postaci $4 \cdot |x - 2| = |x + 2| + 4$
ALBO
- przekształcenie danego równania do postaci $|4x - 8| = |x + 2| + 4$,
ALBO
 - zapisanie przedziałów: $(-\infty, -2)$, $[-2, 2)$, $[2, +\infty)$, oraz zapisanie danego równania w jednym z tych przedziałów bez użycia symbolu wartości bezwzględnej
ALBO
 - zapisanie jednego z przedziałów: $(-\infty, -2)$, $[-2, 2)$, $[2, +\infty)$, oraz rozwiązanie danego równania w tym przedziale.
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania*Sposób I*

Ponieważ $|4x - 8| = 4 \cdot |x - 2|$ oraz $|2 - x| = |x - 2|$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, więc równanie $|4x - 8| + |x - 2| = |2 - x| + |x + 2| + 4$ można przekształcić równoważnie do postaci

$$4 \cdot |x - 2| = |x + 2| + 4$$

Rozważamy trzy przypadki.

Przypadek 1. (gdy $x \in (-\infty, -2)$)

W tym przypadku równanie ma postać $-4x + 8 = -x - 2 + 4$, czyli $x = 2$.

Ponieważ $2 \notin (-\infty, -2)$, więc liczba 2 nie jest rozwiązaniem równania.

Przypadek 2. (gdy $x \in [-2, 2)$)

W tym przypadku równanie ma postać $-4x + 8 = x + 2 + 4$, czyli $x = \frac{2}{5}$.

Ponieważ $\frac{2}{5} \in [-2, 2)$, więc liczba $\frac{2}{5}$ jest rozwiązaniem równania.

Przypadek 3. (gdy $x \in [2, +\infty)$)

W tym przypadku równanie ma postać $4x - 8 = x + 2 + 4$, czyli $x = \frac{14}{3}$.

Ponieważ $\frac{14}{3} \in [2, +\infty)$, więc liczba $\frac{14}{3}$ jest rozwiązaniem równania.

Ostatecznie rozwiązaniami danego równania są liczby $\frac{2}{5}$ oraz $\frac{14}{3}$.

Sposób II

Ponieważ $|2 - x| = |x - 2|$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, więc równanie

$|4x - 8| + |x - 2| = |2 - x| + |x + 2| + 4$ można przekształcić równoważnie do postaci

$$|4x - 8| = |x + 2| + 4$$

Ponieważ wyrażenie $|x + 2| + 4$ jest dodatnie dla każdego $x \in \mathbb{R}$, więc równanie

$|4x - 8| = |x + 2| + 4$ można zapisać równoważnie jako alternatywę równań:

$$4x - 8 = |x + 2| + 4 \quad \vee \quad 4x - 8 = -|x + 2| - 4$$

Stąd

$$|x + 2| = 4x - 12 \quad \vee \quad |x + 2| = 4 - 4x$$

Rozwiązujemy równanie $|x + 2| = 4x - 12$:

$$4x - 12 \geq 0 \quad \wedge \quad (x + 2 = 4x - 12 \quad \vee \quad x + 2 = -4x + 12)$$

$$x \geq 3 \quad \wedge \quad \left(x = \frac{14}{3} \quad \vee \quad x = 2 \right)$$

Ponieważ $\frac{14}{3} \in [3, +\infty)$ i $2 \notin [3, +\infty)$, więc rozwiązaniem równania

$|x + 2| = 4x - 12$ jest liczba $\frac{14}{3}$.

Rozwiązujemy równanie $|x + 2| = 4 - 4x$:

$$4 - 4x \geq 0 \quad \wedge \quad (x + 2 = 4 - 4x \quad \vee \quad x + 2 = -4 + 4x)$$

$$x \leq 1 \quad \wedge \quad \left(x = \frac{2}{5} \quad \vee \quad x = 2 \right)$$

Ponieważ $\frac{2}{5} \in (-\infty, 1]$ i $2 \notin (-\infty, 1]$, więc rozwiązaniem równania

$|x + 2| = 4 - 4x$ jest liczba $\frac{2}{5}$.

Rozwiązaniami równania $|4x - 8| + |x - 2| = |2 - x| + |x + 2| + 4$ są liczby $\frac{2}{5}$ oraz $\frac{14}{3}$.

Zadanie 7. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IX.R1) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu; IX.R4) wyznacza równanie prostej prostopadłej do zadanej prostej [...].

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $C = (\sqrt{5} - 1, 3\sqrt{5} + 3)$ lub $C = (-\sqrt{5} - 1, -3\sqrt{5} + 3)$.

3 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (pierwszą lub drugą współrzędną punktu C), np. $(x + 1)^2 + (3x + 6 - 3)^2 = 50$.

2 pkt – wyznaczenie równania symetralnej odcinka AB : $y = 3x + 6$.

1 pkt – obliczenie współczynnika kierunkowego prostej AB : $(-\frac{1}{3})$

ALBO

– zapisanie równości $\sqrt{(x - 6)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{(x + 6)^2 + (y - 8)^2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Z warunku $|AC| = |BC|$ wynika, że punkt C leży na symetralnej odcinka AB .

Współczynnik kierunkowy a_{AB} prostej AB jest równy $a_{AB} = \frac{8-4}{-6-6} = -\frac{1}{3}$, więc

współczynnik kierunkowy prostej, która jest symetralną odcinka AB , jest równy $a = 3$.

Obliczamy współrzędne środka M odcinka AB :

$$M = \left(\frac{6 + (-6)}{2}, \frac{4 + 8}{2} \right) = (0, 6)$$

Ponieważ ta symetralna przechodzi przez punkt M , więc ma ona równanie

$y = 3(x - 0) + 6$, czyli $y = 3x + 6$.

Obliczamy współrzędne punktu C , który jest punktem przecięcia symetralnej odcinka AB z danym okręgiem:

$$(x + 1)^2 + (3x + 6 - 3)^2 = 50$$

$$(x + 1)^2 + 9(x + 1)^2 = 50$$

$$(x + 1)^2 = 5$$

$$|x + 1| = \sqrt{5}$$

$$x = \sqrt{5} - 1 \quad \vee \quad x = -\sqrt{5} - 1$$

Gdy $x = \sqrt{5} - 1$, to $y = 3(\sqrt{5} - 1) + 6 = 3\sqrt{5} + 3$, więc wtedy $C = (\sqrt{5} - 1, 3\sqrt{5} + 3)$.

Gdy $x = -\sqrt{5} - 1$, to $y = 3(-\sqrt{5} - 1) + 6 = -3\sqrt{5} + 3$, więc wtedy
 $C = (-\sqrt{5} - 1, -3\sqrt{5} + 3)$.

Odp. $C = (\sqrt{5} - 1, 3\sqrt{5} + 3)$ lub $C = (-\sqrt{5} - 1, -3\sqrt{5} + 3)$.

Zadanie 8. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VI.R1) oblicza granice ciągów [...].

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 2.

3 pkt – wyznaczenie sumy $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1)$: $(n + 1)^2$ **oraz** zapisanie symbolu Newtona $\binom{n}{2}$ w postaci $\frac{n(n-1)}{2}$.

2 pkt – wyznaczenie liczby składników sumy $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1)$: $(n + 1)$ **oraz** zapisanie symbolu Newtona $\binom{n}{2}$ w postaci $\frac{n(n-1)}{2}$
ALBO

– wyznaczenie sumy $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1)$: $(n + 1)^2$.

1 pkt – wyznaczenie liczby składników sumy $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1)$: $(n + 1)$
ALBO

– zapisanie symbolu Newtona $\binom{n}{2}$ w postaci $\frac{n(n-1)}{2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający przyjmie, że liczba składników sumy $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1)$ jest równa n i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Kolejne składniki sumy $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1)$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ oraz różnicy $r = 2$.

Niech k oznacza liczbę składników tej sumy. Wyznaczamy k :

$$a_k = a_1 + (k - 1) \cdot r$$

$$2n + 1 = 1 + (k - 1) \cdot 2$$

$$k = n + 1$$

Zatem suma składa się z $(n + 1)$ składników.

Stosując wzór na sumę $(n + 1)$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, otrzymujemy

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1) = \frac{[1 + (2n + 1)]}{2} \cdot (n + 1) = (n + 1)^2$$

Wyznaczamy współczynnik dwumianowy:

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Obliczamy granicę

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n+1)}{\binom{n}{2}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^2}{\frac{n(n-1)}{2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 4n + 2}{n^2 - n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 - \frac{1}{n}} = 2 \end{aligned}$$

Zadanie 9. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.R6) rozwiązuje równania trygonometryczne.

Zasady oceniania (dla sposobu I)

4 pkt – zapisanie, że równanie $\sin(2x) = -2$ nie ma rozwiązań oraz rozwiązanie równania

$$\sin(2x) = 1 \text{ w zbiorze } [-\pi, 2\pi]: \left(-\frac{3}{4}\pi\right), \frac{1}{4}\pi \text{ oraz } \frac{5}{4}\pi.$$

3 pkt – rozwiązanie równania $\sin(2x) = 1$ w zbiorze liczb rzeczywistych: $x = \frac{1}{4}\pi + \pi \cdot k$,
gdzie $k \in \mathbb{Z}$

ALBO

– rozwiązanie równania $\sin(2x) = 1$ w zbiorze $[-\pi, 2\pi]: \left(-\frac{3}{4}\pi\right), \frac{1}{4}\pi$ oraz $\frac{5}{4}\pi$.

2 pkt – przekształcenie równania do alternatywy równań $\sin(2x) = -2$ lub $\sin(2x) = 1$.

1 pkt – przekształcenie równania do postaci

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \sin x \cdot \cos x$$

ALBO

– zastosowanie tożsamości $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$,

ALBO

– zastosowanie tożsamości $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2x)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla sposobu II)

4 pkt – spełnienie kryterium za 3 punkty oraz sprawdzenie rachunkiem, że liczby $\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$, $\frac{1}{4}\pi$ oraz $\frac{5}{4}\pi$ spełniają równanie $\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$.

3 pkt – rozwiązanie równania $\sin(2x) = 1$ w zbiorze liczb rzeczywistych: $x = \frac{1}{4}\pi + \pi \cdot k$,
gdzie $k \in \mathbb{Z}$

ALBO

– rozwiązanie równania $\sin(2x) = 1$ w zbiorze $[-\pi, 2\pi]: \left(-\frac{3}{4}\pi\right), \frac{1}{4}\pi$ oraz $\frac{5}{4}\pi$.

2 pkt – wykorzystanie równości $\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$ i przekształcenie

$$\text{nierówności } \sqrt{\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{2}} \geq \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2} \text{ do postaci } \sin(2x) \geq 1.$$

1 pkt – zastosowanie nierówności między średnią kwadratową a arytmetyczną i zapisanie

$$\text{nierówności } \sqrt{\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{2}} \geq \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla sposobu III)

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$, $\frac{1}{4}\pi$ oraz $\frac{5}{4}\pi$.

3 pkt – równoważne przekształcenie równania do alternatywy równań $\sin^3 x - \cos^3 x = 0$ lub $\sin x - \cos x = 0$ i rozwiązanie równań tej alternatywy w zbiorze liczb

rzeczywistych: $x = \frac{1}{4}\pi + \pi \cdot k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

2 pkt – przekształcenie równania do postaci $(\sin^3 x - \cos^3 x)(\sin x - \cos x) = 0$.

1 pkt – przekształcenie równania do postaci

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cdot \cos x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x).$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga.

Jeżeli zdający przekształci równanie do postaci $(\sin^3 x - \cos^3 x)(\sin x - \cos x) = 0$, a następnie rozwiąże poprawnie równania $\sin^3 x - \cos^3 x = 0$ oraz $\sin x - \cos x = 0$ w zbiorze $[-\pi, 2\pi]$, to otrzymuje **4 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania*Sposób I*

Przekształcamy równanie równoważnie, korzystając ze wzoru na kwadrat sumy oraz z jedynki trygonometrycznej:

$$\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cdot \cos x$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = \sin x \cdot \cos x$$

$$1 - 2(\sin x \cdot \cos x)^2 = \sin x \cdot \cos x$$

Korzystamy ze wzoru na sinus podwojonego kąta i otrzymujemy dalej

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2(2x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

$$\sin^2(2x) + \sin(2x) - 2 = 0$$

$$\sin(2x) = 1 \quad \vee \quad \sin(2x) = -2$$

Rozwiązujemy równanie $\sin(2x) = 1$ w zbiorze $\mathbb{R}$:

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k \quad \wedge \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi \cdot k \quad \wedge \quad k \in \mathbb{Z}$$

Rozwiązaniami równania $\sin(2x) = 1$ w zbiorze $[-\pi, 2\pi]$ są liczby: $\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$, $\frac{1}{4}\pi$ oraz $\frac{5}{4}\pi$.

Równanie $\sin(2x) = -2$ nie ma rozwiązań w zbiorze $\mathbb{R}$.

Zatem rozwiązaniami równania $\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$ w zbiorze $[-\pi, 2\pi]$ są liczby: $(-\frac{3}{4}\pi)$, $\frac{1}{4}\pi$ oraz $\frac{5}{4}\pi$.

Sposób II

Korzystamy z nierówności między średnią kwadratową a arytmetyczną i otrzymujemy

$$\sqrt{\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{2}} \geq \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2}$$

Stąd, po zastosowaniu tożsamości $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ i wzoru na sinus podwojonego kąta oraz związku $\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$, dostajemy kolejno:

$$\sqrt{\frac{\sin x \cdot \cos x}{2}} \geq \frac{1}{2}$$

$$\sin x \cdot \cos x \geq \frac{1}{2}$$

$$\sin(2x) \geq 1$$

Stąd i z własności funkcji sinus wynika, że $\sin(2x) = 1$.

Zatem

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k \quad \wedge \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi \cdot k \quad \wedge \quad k \in \mathbb{Z}$$

Gdy $x = -\frac{3}{4}\pi$, to wtedy

$$\sin^4\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$$

$$\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right) \cdot \cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) - \cos^4\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$$

więc liczba $(-\frac{3}{4}\pi)$ jest rozwiązaniem równania $\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$.

Gdy $x = \frac{1}{4}\pi$, to wtedy

$$\sin^4\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$$

$$\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) - \cos^4\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$$

więc liczba $\frac{1}{4}\pi$ jest rozwiązaniem równania $\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$.

Gdy $x = \frac{5}{4}\pi$, to wtedy

$$\sin^4\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$$

$$\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right) \cdot \cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) - \cos^4\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$$

więc liczba $\frac{5}{4}\pi$ jest rozwiązaniem równania $\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$.

Zatem rozwiązaniami równania $\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$ w zbiorze $[-\pi, 2\pi]$ są liczby: $\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$, $\frac{1}{4}\pi$ oraz $\frac{5}{4}\pi$.

Sposób III

Przekształcamy równanie równoważnie:

$$\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cdot \cos x$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cdot \cos x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\sin^4 x - \sin^3 x \cdot \cos x + \cos^4 x - \cos^3 x \cdot \sin x = 0$$

$$\sin^3 x (\sin x - \cos x) + \cos^3 x (\cos x - \sin x) = 0$$

$$(\sin^3 x - \cos^3 x)(\sin x - \cos x) = 0$$

$$\sin^3 x = \cos^3 x \quad \vee \quad \sin x = \cos x$$

$$\sin x = \cos x \quad \vee \quad \sin x = \cos x$$

$$\sin x = \cos x$$

Gdyby $\cos x = 0$, to wtedy $\sin x = \cos x = 0$, więc wstawiając te wartości do tożsamości trygonometrycznej $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, otrzymalibyśmy $0 + 0 = 1$. To oznacza, że $\cos x \neq 0$, więc możemy obie strony równania $\sin x = \cos x$ podzielić obustronnie przez $\cos x$ i otrzymujemy $\tan x = 1$. To równanie w zbiorze $[-\pi, 2\pi]$ ma trzy rozwiązania:

$$\left(-\frac{3}{4}\pi\right), \frac{1}{4}\pi \text{ oraz } \frac{5}{4}\pi.$$

Zatem rozwiązaniami równania $\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$ w zbiorze $[-\pi, 2\pi]$ są liczby: $\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$, $\frac{1}{4}\pi$ oraz $\frac{5}{4}\pi$.

Zadanie 10. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań [...].

Zasady oceniania

5 pkt – odrzucenie ciągu odpowiadającego $r = \frac{11}{3}$ i obliczenie wyrazów ciągu

geometrycznego: $(32, 4, \frac{1}{2})$.

4 pkt – rozwiązanie równania z jedną niewiadomą r : $r = -3$ oraz $r = \frac{11}{3}$

ALBO

– rozwiązanie równania z jedną niewiadomą a_1 : $a_1 = 14$ oraz $a_1 = -6$.

3 pkt – zapisane równania z jedną niewiadomą (a_1 lub r), np.

$$4^2 = -\frac{1}{8}(5 + 3r) \cdot (10 - 6r + 4), \quad 4^2 = -\frac{1}{8}(10 - a_1) \cdot (4 + 2a_1).$$

2 pkt – zapisanie układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi a_1 i r , np.

$$a_1 + 2r + a_1 + 4r = 10 \quad \text{i} \quad (a_1 + 3r - 1)^2 = -\frac{1}{8}(a_1 + 6r)(2a_1 + 4)$$

ALBO

– zapisanie związku $4^2 = -\frac{1}{8}a_7 \cdot (2a_1 + 4)$.

1 pkt – zastosowanie własności ciągu geometrycznego i zapisanie związku

$$(a_4 - 1)^2 = -\frac{1}{8}a_7 \cdot (2a_1 + 4)$$

ALBO

– zastosowanie wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego i zapisanie równania z dwiema niewiadomymi a_1 i r , np. $a_1 + 2r + a_1 + 4r = 10$,

ALBO

– obliczenie a_4 : $a_4 = 5$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający obliczy wyrazy ciągów geometrycznych odpowiadające wartościom $r = -3$

oraz $r = \frac{11}{3}$ i w odpowiedzi końcowej nie odrzuci ciągu $(-8, 4, -2)$, to otrzymuje **4 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech r oznacza różnicę ciągu (a_n) . Z warunków zadania oraz ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$a_3 + a_5 = 10$$

$$a_1 + 2r + a_1 + 4r = 10$$

$$a_1 = 5 - 3r$$

Z warunków zadania i z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy

$$(a_4 - 1)^2 = -\frac{1}{8} a_7 \cdot (2a_1 + 4)$$

$$(a_1 + 3r - 1)^2 = -\frac{1}{8} (a_1 + 6r)(2a_1 + 4)$$

Stąd i ze związku $a_1 = 5 - 3r$ dostajemy kolejno

$$(5 - 3r + 3r - 1)^2 = -\frac{1}{8} (5 - 3r + 6r)(10 - 6r + 4)$$

$$16 = -\frac{1}{8} (3r + 5)(14 - 6r)$$

$$18r^2 - 12r - 198 = 0$$

$$r = -3 \quad \vee \quad r = \frac{11}{3}$$

Dla $r = \frac{11}{3}$ ciąg (a_n) jest rosnący, więc warunki zadania nie są spełnione.

Dla $r = -3$ ciąg (a_n) jest malejący, $a_1 = 14$ oraz $a_3 + a_5 = 8 + 2 = 10$. Wtedy również $(2a_1 + 4, a_4 - 1, -\frac{1}{8} a_7) = (32, 4, \frac{1}{2})$. Ciąg $(32, 4, \frac{1}{2})$ jest geometryczny, więc jest jedynym rozwiązaniem zadania.

Zadanie 11. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: III.R3) stosuje wzory Viète’a dla równań kwadratowych; III.R5) analizuje równania [...] kwadratowe z parametrami [...].

Zasady oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$: $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający rozwiązuje warunek $\Delta \geq 0$, to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na wyznaczeniu tych wartości parametru m , dla których jest spełniony warunek $|x_1^2 - x_2^2| \leq 12$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **3 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

3 pkt – rozwiązanie nierówności z jedną niewiadomą m równoważnej warunkowi

$$3^2 - 4 \cdot (-m^2 + m + 3) \leq 16: m \in \left[\frac{1 - 2\sqrt{5}}{2}, \frac{1 + 2\sqrt{5}}{2}\right].$$

2 pkt – zapisanie nierówności z jedną niewiadomą m równoważnej warunkowi

$$|x_1^2 - x_2^2| \leq 12, \text{ np. } 3^2 - 4 \cdot (-m^2 + m + 3) \leq 16.$$

1 pkt – przekształcenie nierówności $|x_1^2 - x_2^2| \leq 12$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie jednokrotne zastosowanie wzorów Viète’a, np.

$$|x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2| \leq 12.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Trzeci etap polega na wyznaczeniu wszystkich wartości parametru m , które spełniają

jednocześnie dwa warunki: $\Delta > 0$ i $|x_1^2 - x_2^2| \leq 12$: $m \in \left[\frac{1 - 2\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \frac{1 + 2\sqrt{5}}{2}\right]$.

Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – poprawne wyznaczenie wszystkich wartości parametru m , które spełniają jednocześnie warunki $\Delta > 0$ i $|x_1^2 - x_2^2| \leq 12$:

$$m \in \left[\frac{1 - 2\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \frac{1 + 2\sqrt{5}}{2}\right].$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający w etapie I lub II popełni błąd, który nie jest błędem rachunkowym, to za III etap otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający w etapach I i II nie popełni błędów innych niż rachunkowe i otrzyma zbiory rozwiązań, które nie są rozłączne i żaden z nich nie jest zbiorem liczb rzeczywistych, a następnie poprawnie wyznaczy część wspólną zbiorów rozwiązań z etapów I i II, to za III etap może otrzymać **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający w II etapie rozwiązania popełni błąd – przyjmie, że $x_1 + x_2 = \pm(\pm m^2 + m + 3)$ lub $x_1 \cdot x_2 = \pm 3$, lub $x_1 + x_2 = \pm \frac{b}{2a}$, to za II etap może otrzymać co najwyżej **2 punkty** (1 punkt za przekształcenie nierówności $|x_1^2 - x_2^2| \leq 12$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie jednokrotne zastosowanie wzorów Viète'a oraz 1 punkt za konsekwentne rozwiązanie nierówności do końca), a za III etap otrzymuje **0 punktów**.
4. Jeżeli zdający w II etapie rozwiązania popełni błąd, który nie jest rachunkowy, np.:
 - pominie istotne nawiasy przy przekształcaniu nierówności $|x_1^2 - x_2^2| \leq 12$ do postaci pozwalającej na zastosowanie wzorów Viète'a
 - przyjmie, że $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)^2$
 i konsekwentnie do popełnionego błędu doprowadzi rozwiązanie II etapu zadania do końca, to może uzyskać co najwyżej **2 punkty** za II etap (1 punkt za zastosowanie wzorów Viète'a oraz 1 punkt za konsekwentne rozwiązanie nierówności do końca), a za III etap otrzymuje **0 punktów**.
5. Jeżeli w II etapie rozwiązania zdający popełni błędy i otrzyma nierówność $V(m) \leq 0$, to za podanie zbioru rozwiązań nierówności otrzymuje **1 punkt** tylko wtedy, gdy wielomian V jest stopnia co najmniej drugiego i ma co najmniej dwa różne pierwiastki rzeczywiste.
6. Jeżeli zdający wprowadza dodatkowe założenie, które nie wynika z warunków zadania (np. $x_1 + x_2 > 0$, $x_1 \cdot x_2 > 0$), to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **3 punkty** (co najwyżej 1 punkt za I etap i co najwyżej 2 punkty za II etap).

Przykładowe pełne rozwiązanie**I etap**

Funkcja kwadratowa f ma dwa różne miejsca zerowe wtedy i tylko wtedy, gdy wyróżnik Δ trójkianu kwadratowego $x^2 - 3x - m^2 + m + 3$ jest dodatni.

Rozwiązujemy warunek $\Delta > 0$:

$$(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m^2 + m + 3) > 0$$

$$4m^2 - 4m - 3 > 0$$

$$(2m - 1)^2 - 4 > 0$$

$$(2m - 1 - 2) \cdot (2m - 1 + 2) > 0$$

$$4 \left(m - \frac{3}{2} \right) \left(m + \frac{1}{2} \right) > 0$$

$$m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty \right)$$

II etap

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m , dla których jest spełniony warunek $|x_1^2 - x_2^2| \leq 12$, korzystając ze wzorów Viète'a.

$$|x_1^2 - x_2^2| \leq 12$$

$$|x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2| \leq 12$$

$$|x_1 - x_2| \cdot 3 \leq 12$$

$$|x_1 - x_2| \leq 4$$

Ponieważ obie strony nierówności $|x_1 - x_2| \leq 4$ są nieujemne, więc przekształcamy tę nierówność równoważnie do postaci $(x_1 - x_2)^2 \leq 16$. Stąd otrzymujemy

$$(x_1 + x_2)^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 \leq 16$$

$$3^2 - 4 \cdot (-m^2 + m + 3) \leq 16$$

$$4m^2 - 4m - 19 \leq 0$$

Obliczamy wyróżnik Δ_m trójkianu kwadratowego $4m^2 - 4m - 19$ i rozwiązujemy nierówność $4m^2 - 4m - 19 \leq 0$:

$$\Delta_m = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-19) = 20 \cdot 16$$

$$m = \frac{4 - 8\sqrt{5}}{8} = \frac{1 - 2\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad m = \frac{4 + 8\sqrt{5}}{8} = \frac{1 + 2\sqrt{5}}{2}$$

$$m \in \left[\frac{1 - 2\sqrt{5}}{2}, \frac{1 + 2\sqrt{5}}{2} \right]$$

III etap

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m , które jednocześnie spełniają warunki

$$m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty \right) \quad \text{oraz} \quad m \in \left[\frac{1 - 2\sqrt{5}}{2}, \frac{1 + 2\sqrt{5}}{2} \right]:$$

$$m \in \left[\frac{1 - 2\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{3}{2}, \frac{1 + 2\sqrt{5}}{2} \right].$$

Zadanie 12. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens [...]. VII.R5) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych; VII.R7) stosuje twierdzenie sinusów.

Zasady oceniania (dla sposobu I)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 2.

4 pkt – zapisanie związków $\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{|AC|}{|ED|}$ i $|ED| = \frac{1}{2} \cdot |CF|$ oraz uzasadnienie, że $|CF| = |AC|$.

3 pkt – zapisanie równości $\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{|AC|}{|ED|}$ oraz uzasadnienie, że $|CF| = |AC|$.

2 pkt – uzasadnienie, że $|CF| = |AC|$

ALBO

– zdefiniowanie punktu F jako obrazu punktu C w symetrii osiowej względem prostej k **oraz** zapisanie równości $\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{|AC|}{|ED|}$.

1 pkt – zdefiniowanie punktu F jako obrazu punktu C w symetrii osiowej względem prostej k

ALBO

– zapisanie równości $\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{|AC|}{|ED|}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla sposobu II)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 2.

4 pkt – zapisanie związku $\frac{2\sin \alpha}{\sin(3\alpha)} = \frac{\sin \beta}{\sin(2\alpha+\beta)}$ i zastosowanie wzoru na sinus sumy kątów do $\sin(3\alpha)$ oraz $\sin(2\alpha+\beta)$, np.:

$$2\sin \alpha [\sin(2\alpha)\cos \beta + \cos(2\alpha)\sin \beta] = \sin \beta [\sin(2\alpha)\cos \alpha + \cos(2\alpha)\sin \alpha].$$

3 pkt – wyeliminowanie długości odcinków z układu $\frac{b}{\sin \alpha} = \frac{2c}{\sin(180^\circ-3\alpha)}$

i $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin[180^\circ-(2\alpha+\beta)]}$, np. zapisanie związku $\frac{2\sin \alpha}{\sin(3\alpha)} = \frac{\sin \beta}{\sin(2\alpha+\beta)}$.

2 pkt – zapisanie związków $\frac{b}{\sin \alpha} = \frac{2c}{\sin(180^\circ-3\alpha)}$ i $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin[180^\circ-(2\alpha+\beta)]}$.

1 pkt – zapisanie związku $\frac{b}{\sin \alpha} = \frac{2c}{\sin(180^\circ-3\alpha)}$

ALBO

– zapisanie związku $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin[180^\circ - (2\alpha + \beta)]}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla sposobu III)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 2.

4 pkt – zapisanie równań: $\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{b}{x}$ oraz $a^2 - b^2 = 4cx$ oraz $a^2 = 2b(c + x)$.

3 pkt – spełnienie wszystkich trzech warunków określonych w zasadach oceniania za 1 punkt

ALBO

– zapisanie równań $\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{b}{x}$ oraz $a^2 - b^2 = 4cx$,

ALBO

– zapisanie równań $\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{b}{x}$ oraz $a^2 = 2b(c + x)$,

ALBO

– zapisanie równań $a^2 - b^2 = 4cx$ oraz $a^2 = 2b(c + x)$.

2 pkt – spełnienie dwóch warunków spośród 1)–3) określonych w zasadach oceniania za 1 punkt

ALBO

– zapisanie związku $a^2 = 2b(c + x)$,

ALBO

– zapisanie związku $a^2 - b^2 = 4cx$.

1 pkt – spełnienie jednego z poniższych trzech warunków:

1) zapisanie równości $\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{b}{x}$

2) zapisanie związku $\frac{b}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(2\alpha)}$

3) zapisanie równań $a^2 = h^2 + (c + x)^2$ oraz $b^2 = h^2 + (c - x)^2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla sposobu IV)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 2.

4 pkt – zapisanie związków:

$(a^2 - b^2) \cdot \operatorname{tg} \beta = 4bc \cdot \sin(2\alpha)$ i $\frac{2c}{\sin(180^\circ - 3\alpha)} = \frac{b}{\sin \alpha}$, i $\frac{b}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(2\alpha)}$ oraz

zapisanie tożsamości $\sin(3\alpha) = \sin(2\alpha) \cdot \cos \alpha + \cos(2\alpha) \cdot \sin \alpha$

(lub $\sin(3\alpha) = \sin(2\alpha) \cdot \cos \alpha + (2 \cos^2 \alpha - 1) \cdot \sin \alpha$).

3 pkt – zapisanie związków $(a^2 - b^2) \cdot \operatorname{tg} \beta = 4bc \cdot \sin(2\alpha)$ i $\frac{2c}{\sin(180^\circ - 3\alpha)} = \frac{b}{\sin \alpha}$ oraz

$\frac{b}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(2\alpha)}$.

2 pkt – zapisanie związku $(a^2 - b^2) \cdot \operatorname{tg} \beta = 4bc \cdot \sin(2\alpha)$.

1 pkt – zapisanie związku $4cd \cdot \cos \beta = a^2 - b^2$

ALBO

– zapisanie związku $d \cdot \sin \beta = b \cdot \sin(2\alpha)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

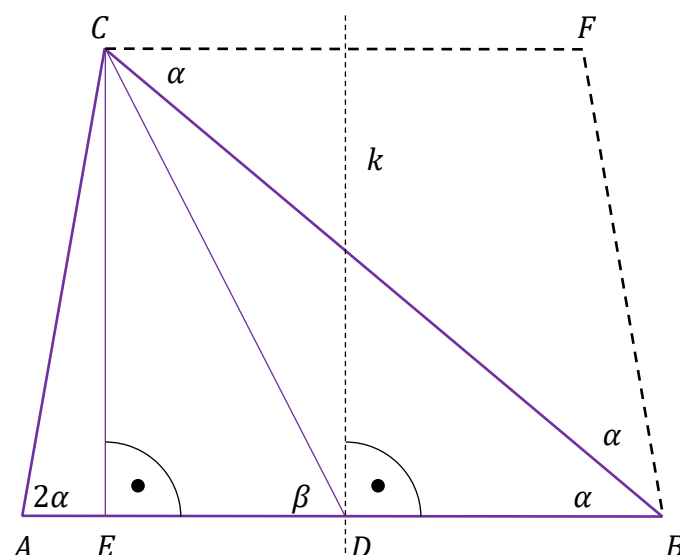
k – prosta prostopadła do AB i przechodząca przez punkt D ,

F – obraz punktu C w symetrii osiowej względem prostej k ,

E – spodek wysokości trapezu poprowadzonej z wierzchołka C na podstawę AB .

Czworokąt $ABFC$ jest trapezem równoramiennym o podstawach AB i CF oraz ramionach AC i BF . Zatem $|\angle CBF| = |\angle CAB| - |\angle CBA| = 2\alpha - \alpha = \alpha$ oraz

$|\angle BCF| = |\angle ABC| = \alpha$, więc trójkąt BCF jest równoramienny (zobacz rysunek). Stąd $|CF| = |FB| = |AC|$.



Ponieważ $\operatorname{tg} \beta = \frac{|CE|}{|ED|}$ oraz $\sin(2\alpha) = \frac{|CE|}{|AC|}$, więc

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{\frac{|CE|}{|ED|}}{\frac{|CE|}{|AC|}} = \frac{|AC|}{|ED|}$$

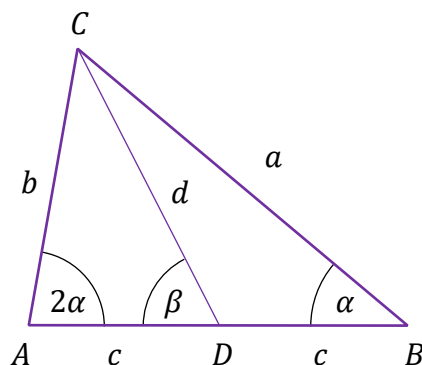
Ponieważ trapez $ABFC$ jest równoramienny i D jest środkiem podstawy AB tego trapezu, więc $|ED| = \frac{1}{2} \cdot |CF|$.

Zatem

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{|AC|}{|ED|} = \frac{|AC|}{\frac{1}{2} \cdot |CF|} = \frac{|AC|}{\frac{1}{2} \cdot |AC|} = 2$$

Sposób II

Przyjmijmy następujące oznaczenia: $|AD| = |BD| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$, $|CD| = d$ (zobacz rysunek).



Stosujemy do trójkątów ABC i ADC twierdzenie sinusów i otrzymujemy

$$\frac{b}{\sin \alpha} = \frac{2c}{\sin(180^\circ - 3\alpha)} \quad \wedge \quad \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin[180^\circ - (2\alpha + \beta)]}$$

Stąd, po zastosowaniu wzorów redukcyjnych, dostajemy

$$\frac{b}{\sin \alpha} = \frac{2c}{\sin(3\alpha)} \quad \wedge \quad \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin(2\alpha + \beta)}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{2 \sin \alpha}{\sin(3\alpha)} \quad \wedge \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin(2\alpha + \beta)}$$

$$\frac{2 \sin \alpha}{\sin(3\alpha)} = \frac{\sin \beta}{\sin(2\alpha + \beta)}$$

$$2 \sin \alpha \cdot \sin(2\alpha + \beta) = \sin \beta \cdot \sin(3\alpha)$$

Stosujemy wzór na sinus sumy kątów, otrzymując kolejno:

$$2 \sin \alpha \sin(2\alpha) \cos \beta + 2 \sin \alpha \cos(2\alpha) \sin \beta = \sin \beta \sin(2\alpha) \cos \alpha + \sin \beta \cos(2\alpha) \sin \alpha$$

$$2 \sin \alpha \sin(2\alpha) \cos \beta = \sin \beta \sin(2\alpha) \cos \alpha - \sin \beta \cos(2\alpha) \sin \alpha$$

$$2 \sin \alpha \sin(2\alpha) \cos \beta = \sin \beta [\sin(2\alpha) \cos \alpha - \cos(2\alpha) \sin \alpha]$$

Stosujemy wzór na sinus różnicy kątów i dostajemy

$$2 \sin \alpha \sin(2\alpha) \cos \beta = \sin \beta \sin \alpha$$

Stąd

$$\sin \alpha = 0 \quad \vee \quad 2 \sin(2\alpha) \cos \beta = \sin \beta$$

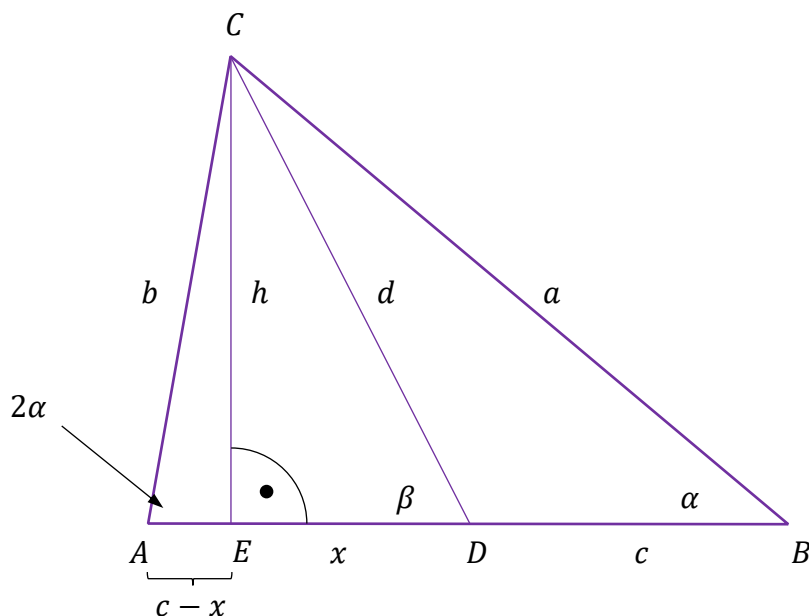
Trójkąt ABC jest ostrokątny, więc $\sin \alpha = 0$ jest wykluczone przez warunki zadania.

Zatem $2 \sin(2\alpha) \cos \beta = \sin \beta$, czyli

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\alpha)} = 2$$

Sposób III

Przyjmijmy następujące oznaczenia: $|AD| = |BD| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$, $|CD| = d$,
 E – spodek wysokości trójkąta ADC poprowadzonej z wierzchołka C na bok AD ,
 h – wysokość trójkąta ADC poprowadzona z wierzchołka C ,
 x – długość odcinka DE (zobacz rysunek).



Przy przyjętych oznaczeniach mamy

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{\frac{h}{x}}{\frac{h}{b}} = \frac{b}{x}$$

Po zastosowaniu do trójkąta ABC twierdzenia sinusów oraz wzoru na sinus podwojonego kąta otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{b}{\sin \alpha} &= \frac{a}{\sin(2\alpha)} \\ \frac{b}{\sin \alpha} &= \frac{a}{2 \sin \alpha \cos \alpha} \\ \cos \alpha &= \frac{a}{2b} \end{aligned}$$

Z definicji cosinusa zastosowanej do trójkąta prostokątnego EBC mamy $\cos \alpha = \frac{c+x}{a}$,
 więc po uwzględnieniu związku $\cos \alpha = \frac{a}{2b}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{a}{2b} &= \frac{c+x}{a} \\ a^2 &= 2b(c+x) \end{aligned}$$

Po zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa do trójkątów AEC i EBC otrzymujemy

$$b^2 = h^2 + (c - x)^2 \quad \wedge \quad a^2 = h^2 + (c + x)^2$$

Stąd

$$a^2 - b^2 = h^2 + (c + x)^2 - h^2 - (c - x)^2$$

czyli

$$a^2 - b^2 = 4cx$$

Stąd i z zależności $a^2 = 2b(c + x)$ otrzymujemy kolejno

$$a^2 = 2b(c + x) \quad \wedge \quad a^2 - b^2 = 4cx$$

$$2b(c + x) - b^2 = 4cx$$

$$2bc + 2bx - b^2 = 4cx$$

$$2bc - b^2 = 4cx - 2bx$$

$$b(2c - b) = 2x(2c - b)$$

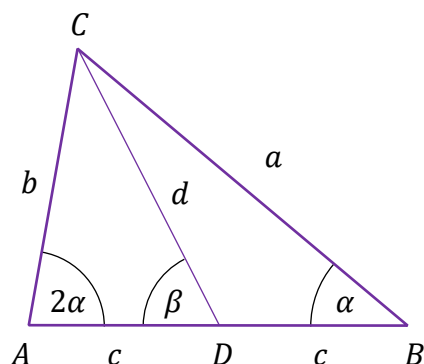
$$b = 2x \quad \vee \quad b = 2c$$

Gdy $b = 2c$, to trójkąt ABC jest równoramienny i $|\angle ABC| = |\angle BCA|$, czyli $\alpha = 180 - 3\alpha$, tj. $\alpha = 45^\circ$. Wtedy $|\angle BAC| = 2\alpha = 90^\circ$ i trójkąt ABC nie jest ostrokątny. Zatem $b = 2x$ i ostatecznie

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{b}{x} = \frac{2x}{x} = 2$$

Sposób IV

Przyjmijmy następujące oznaczenia: $|AD| = |BD| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$, $|CD| = d$ (zobacz rysunek).



Stosujemy do trójkątów BCD i ADC twierdzenie cosinusów i otrzymujemy:

$$a^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos(180^\circ - \beta)$$

$$b^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos \beta$$

Stąd, po zastosowaniu wzorów redukcyjnych, dostajemy

$$a^2 - b^2 = 4cd \cdot \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 - b^2}{4cd}$$

Stosujemy do trójkąta ADC twierdzenie sinusów i otrzymujemy:

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{d}{\sin(2\alpha)}$$

$$\sin \beta = b \cdot \frac{\sin(2\alpha)}{d}$$

Zatem

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b \cdot \frac{\sin(2\alpha)}{d}}{\frac{a^2 - b^2}{4cd}} = \frac{4bc \cdot \sin(2\alpha)}{a^2 - b^2}$$

Stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie sinusów i otrzymujemy

$$\frac{2c}{\sin(180^\circ - 3\alpha)} = \frac{b}{\sin \alpha} \quad \wedge \quad \frac{b}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(2\alpha)}$$

Stąd, po zastosowaniu wzorów redukcyjnych oraz wzoru na sinus podwojonego kąta, otrzymujemy

$$\sin(3\alpha) = 2c \cdot \frac{\sin \alpha}{b} \quad \wedge \quad \sin(2\alpha) = a \cdot \frac{\sin \alpha}{b}$$

$$\sin(3\alpha) = 2c \cdot \frac{\sin \alpha}{b} \quad \wedge \quad \cos \alpha = \frac{a}{2b}$$

Stąd i ze wzoru na sinus sumy kątów oraz cosinus podwojonego kąta uzyskujemy kolejno:

$$\sin(3\alpha) = \sin(2\alpha) \cdot \cos \alpha + \cos(2\alpha) \cdot \sin \alpha$$

$$2c \cdot \frac{\sin \alpha}{b} = a \cdot \frac{\sin \alpha}{b} \cdot \frac{a}{2b} + \left[2 \cdot \left(\frac{a}{2b} \right)^2 - 1 \right] \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{2c}{b} = \frac{a^2}{2b^2} + \frac{a^2}{2b^2} - 1$$

$$2bc = a^2 - b^2$$

Stąd i z zależności $\operatorname{tg} \beta = \frac{4bc \cdot \sin(2\alpha)}{a^2 - b^2}$ otrzymujemy

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{4bc}{a^2 - b^2} = \frac{4bc}{2bc} = 2$$

Zadanie 13.1. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: V.3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą [...] wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie.

Zasady oceniania

2 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – obliczenie współrzędnych punktów B i D oraz zapisanie drugiej współrzędnej punktu C w zależności od x : $B = (7, 0)$ i $D = \left(0, \frac{21}{2}\right)$ oraz $C = \left(x, \frac{12x-84}{x-8}\right)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy współrzędne punktu B :

$$\frac{12x - 84}{x - 8} = 0$$

$$12x - 84 = 0$$

$$x = 7 \in (-\infty, 8)$$

Zatem $B = (7, 0)$.

Obliczamy współrzędne punktu D : $f(0) = \frac{12 \cdot 0 - 84}{0 - 8} = \frac{21}{2}$

Zatem $D = \left(0, \frac{21}{2}\right)$.

Ponieważ C leży na wykresie funkcji f i ma obie współrzędne dodatnie, więc

$C = \left(x, \frac{12x-84}{x-8}\right)$, gdzie $0 < x < 7$.

Pole P czworokąta $OBCE$ jest sumą pól trójkątów OCD i OBC , więc

$$P = P_{OCD} + P_{OBC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{21}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \frac{12x - 84}{x - 8} = \frac{21}{4} \cdot \frac{x^2 - 8x + 8x - 56}{x - 8} = \frac{21}{4} \cdot \frac{x^2 - 56}{x - 8}$$

gdzie $x \in (0, 7)$.

Zadanie 13.2. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XIII.R4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu; XIII.R5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji; XIII.R6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

- 4 pkt – uzasadnienie, że funkcja P przyjmuje wartość największą dla $x = 8 - 2\sqrt{2}$ i obliczenie współrzędnych punktu C , dla których pole czworokąta $OBCD$ jest największe: $C = (8 - 2\sqrt{2}, 12 - 3\sqrt{2})$.
- 3 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja P przyjmuje wartość największą dla $x = 8 - 2\sqrt{2}$.
- 2 pkt – obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji P : $x = 8 - 2\sqrt{2}$.
- 1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji P , np. $P'(x) = \frac{21}{4} \cdot \frac{2x(x-8) - (x^2-56) \cdot 1}{(x-8)^2}$.
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja posiada wartość największą dla wyznaczonej wartości x , przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej oraz:
 - opisuje (słownie lub graficznie - np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji P LUB
 - zapisuje, że dla wyznaczonej wartości x funkcja P ma maksimum lokalne i jest to jednocześnie jej największa wartość LUB
 - zapisuje, że dla wyznaczonej wartości x funkcja P ma maksimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.
 Jeżeli zdający nie przedstawi poprawnego uzasadnienia, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
2. Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku, np. znakami „+” i „-” znak pochodnej.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczamy pochodną funkcji P :

$$P'(x) = \frac{21}{4} \cdot \frac{2x(x-8) - (x^2-56) \cdot 1}{(x-8)^2} = \frac{21}{4} \cdot \frac{x^2 - 16x + 56}{(x-8)^2}$$

dla $x \in (0, 7)$.

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji P :

$$P'(x) = 0$$

$$\frac{21}{4} \cdot \frac{x^2 - 16x + 56}{(x-8)^2} = 0$$

$$x^2 - 16x + 56 = 0$$

$$x = \frac{16 - \sqrt{32}}{2} = 8 - 2\sqrt{2} \in (0, 7) \quad \vee \quad x = \frac{16 + \sqrt{32}}{2} \notin (0, 7)$$

Badamy znak pochodnej:

$$P'(x) > 0$$

$$\frac{21}{4} \cdot \frac{x^2 - 16x + 56}{(x-8)^2} > 0$$

$$x^2 - 16x + 56 > 0$$

$$x \in (0, 8 - 2\sqrt{2})$$

Zatem funkcja P jest rosnąca w przedziale $(0, 8 - 2\sqrt{2}]$ i funkcja P jest malejąca w przedziale $[8 - 2\sqrt{2}, 7)$.

Stąd dla $x = 8 - 2\sqrt{2}$ funkcja P osiąga wartość największą.

Gdy pierwsza współrzędna punktu C jest równa $x_C = 8 - 2\sqrt{2}$, to wtedy druga współrzędna y_C tego punktu jest równa:

$$y_C = \frac{12 \cdot (8 - 2\sqrt{2}) - 84}{8 - 2\sqrt{2} - 8} = \frac{12 - 24\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = \frac{12}{-2\sqrt{2}} + 12 = 12 - 3\sqrt{2}$$

Pole czworokąta $OBCE$ jest największe, gdy $C = (8 - 2\sqrt{2}, 12 - 3\sqrt{2})$.

Matura próbna 2025

test diagnostyczny przed sesją maj 2025

Arkusze zawiera informacje prawnie chronione
do momentu rozpoczęcia egzaminu.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

PESEL

Miejsce na naklejkę.

Sprawdź, czy kod na naklejce to

M-100.

Jeżeli tak – przyklej naklejkę.

Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Symbol arkusza

MMAP-R0-**100**-2503

DATA: **6 marca 2025 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:

☐ dostosowania zasad oceniania

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

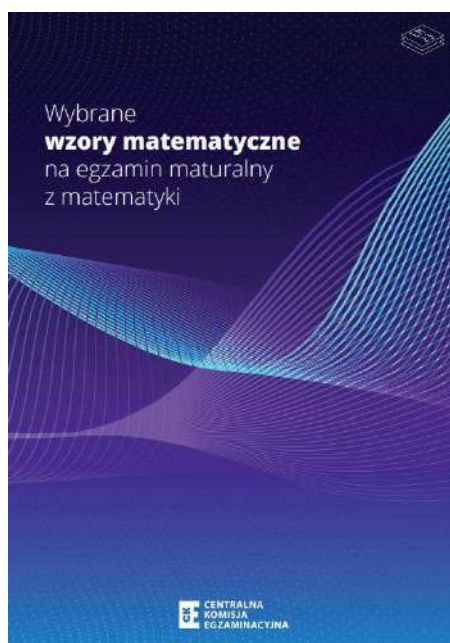
1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.





Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 29 stron (zadania 1–13). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
5. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Nie wpisuj żadnych znaków w tabelkach przeznaczonych dla egzaminatora. Tabelki umieszczone są na marginesie przy każdym zadaniu.
8. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
9. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



**Zadania egzaminacyjne są wydrukowane
na następnych stronach.**

Oblicz środkowy wyraz rozwinięcia $\left(x - \frac{2}{3}\right)^{16}$. Wynik przedstaw w postaci $a \cdot x^n$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Zapisz obliczenia.

[illegible]

Zadanie 2. (0-2)

Dana jest dodatnia liczba a i dodatnia liczba b :

$$a = 36^{(\log_4 2\sqrt{5} \cdot \log_6 16 - 2 \cdot \log_6 2)}$$

$$b = 8 \cdot \log_4 2\sqrt{2} - \log_4 9 \cdot \log_3 4$$

Oblicz $\sqrt{\frac{a}{b}}$. Zapisz obliczenia.

2.
0-1-2

0-1-2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{12^n + 13^n + 14^n}$$

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, equal-sized squares formed by thin gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.



Zadanie 4. (0–3)

Wśród pewnej społeczności kobiet i mężczyzn przeprowadzono ankietę w której zadano pytanie: „Czy jest Pan/Pani za legalizacją eutanazji w Polsce?”. W tej grupie osób 60% ankietowanych stanowią mężczyźni, z których 2% opowiedziało się za legalizacją oraz 93% kobiet jest jej przeciwna. Spośród wszystkich ankietowanych wybrano losowo jedną osobę oraz okazało się, że osoba ta jest zwolennikiem legalizacji eutanazji.

Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowana osoba jest mężczyzną.

Wynik zapisz w postaci procentu. Zapisz obliczenia.

4.	0-1- 2-3

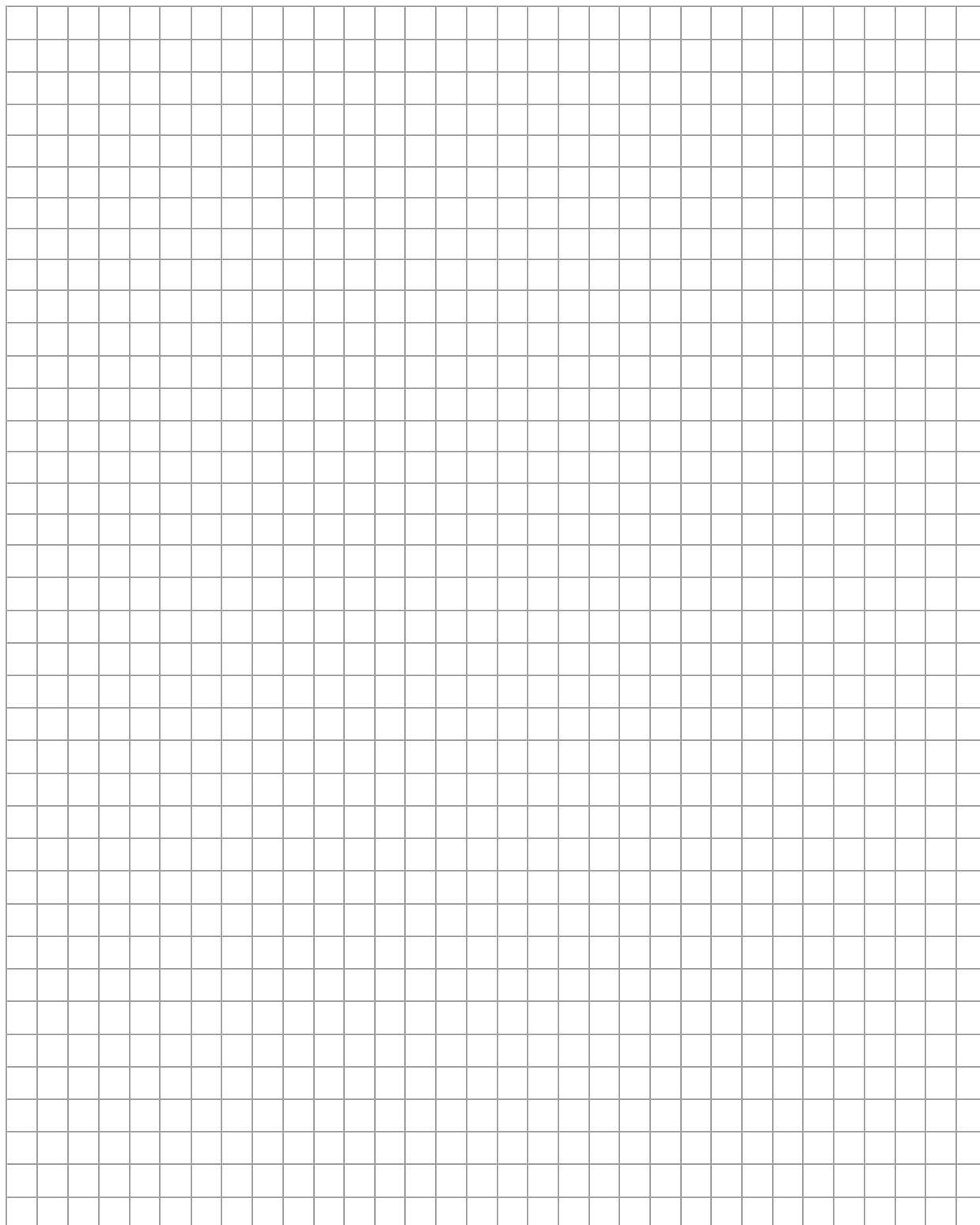
Wiecej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl

Zadanie 5. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = x^8 - 5x^6 + 4x^3 - 2x + 4$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

5.0–1–
2–3

Wykaż, że funkcja f ma w zbiorze liczb rzeczywistych co najmniej dwa miejsca zerowe takie, że jedno jest dodatnie a jedno ujemne.



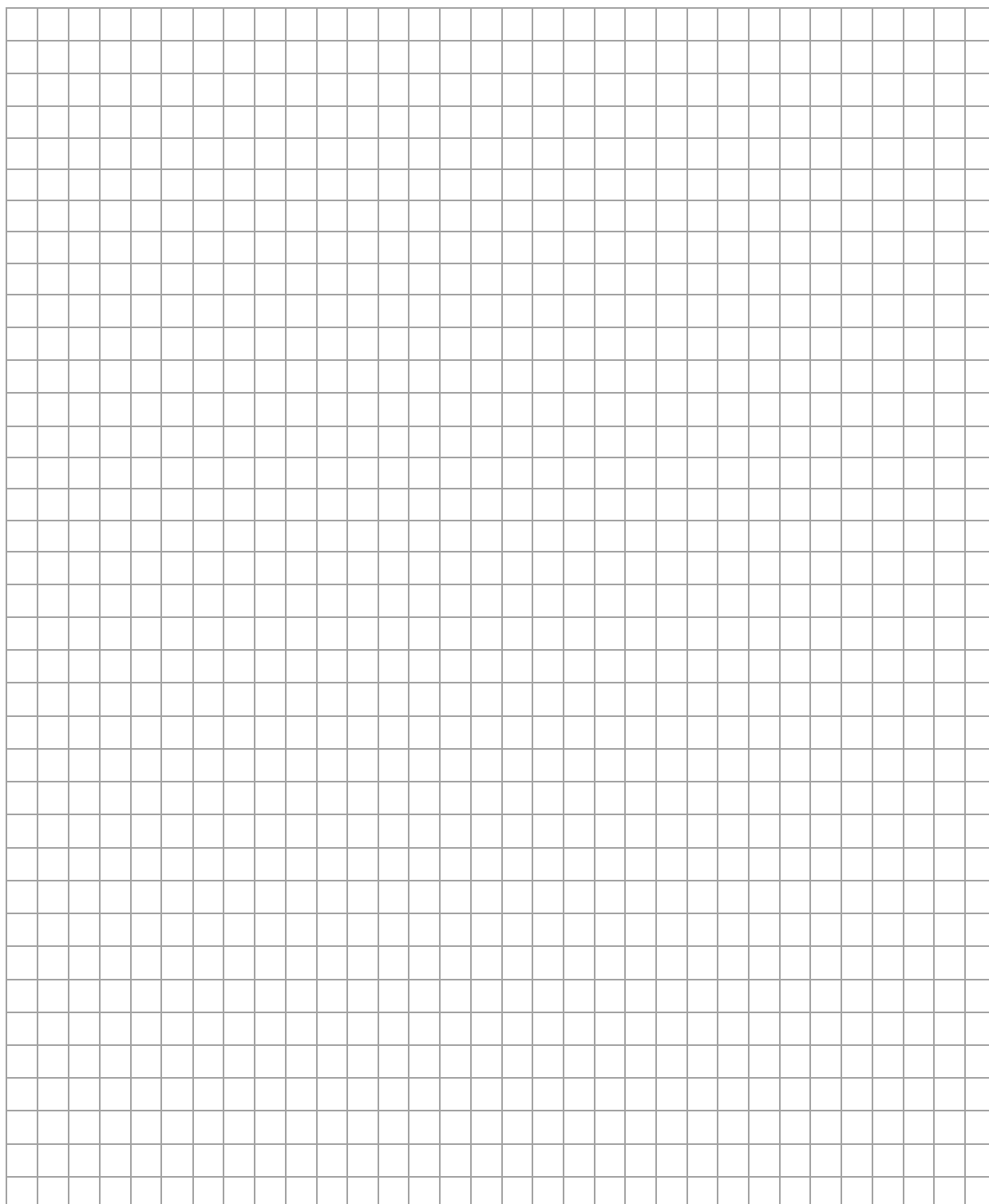
Zadanie 6. (0–3)

Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{9x + 16}$ określona dla każdej liczby rzeczywistej $x \in \left[-\frac{16}{9}; +\infty\right)$.

Punkt $P = (x_0, 5)$ należy do wykresu funkcji f .

Oblicz x_0 oraz wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P .

Zapisz obliczenia.

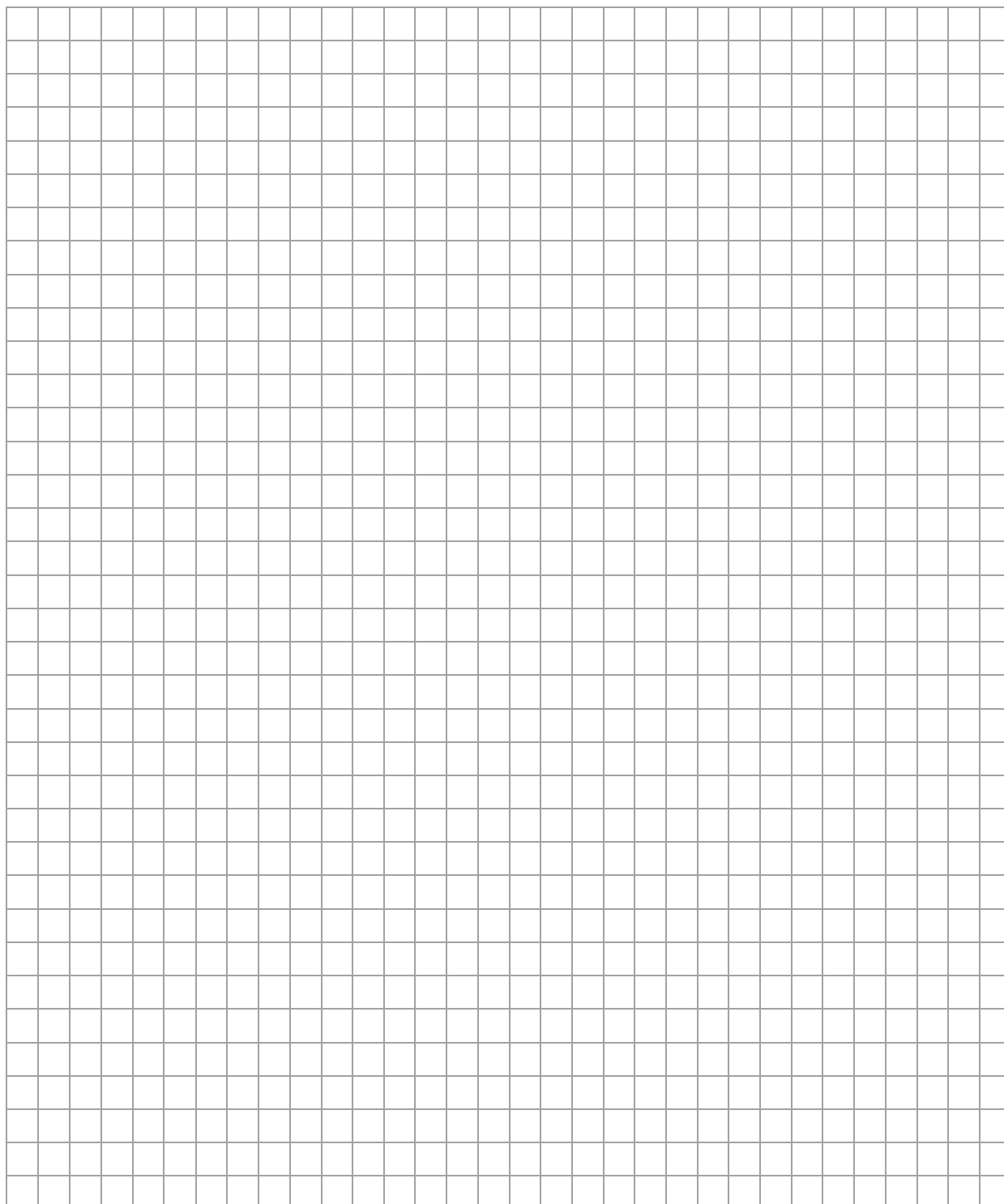
6.**0–1–
2–3**

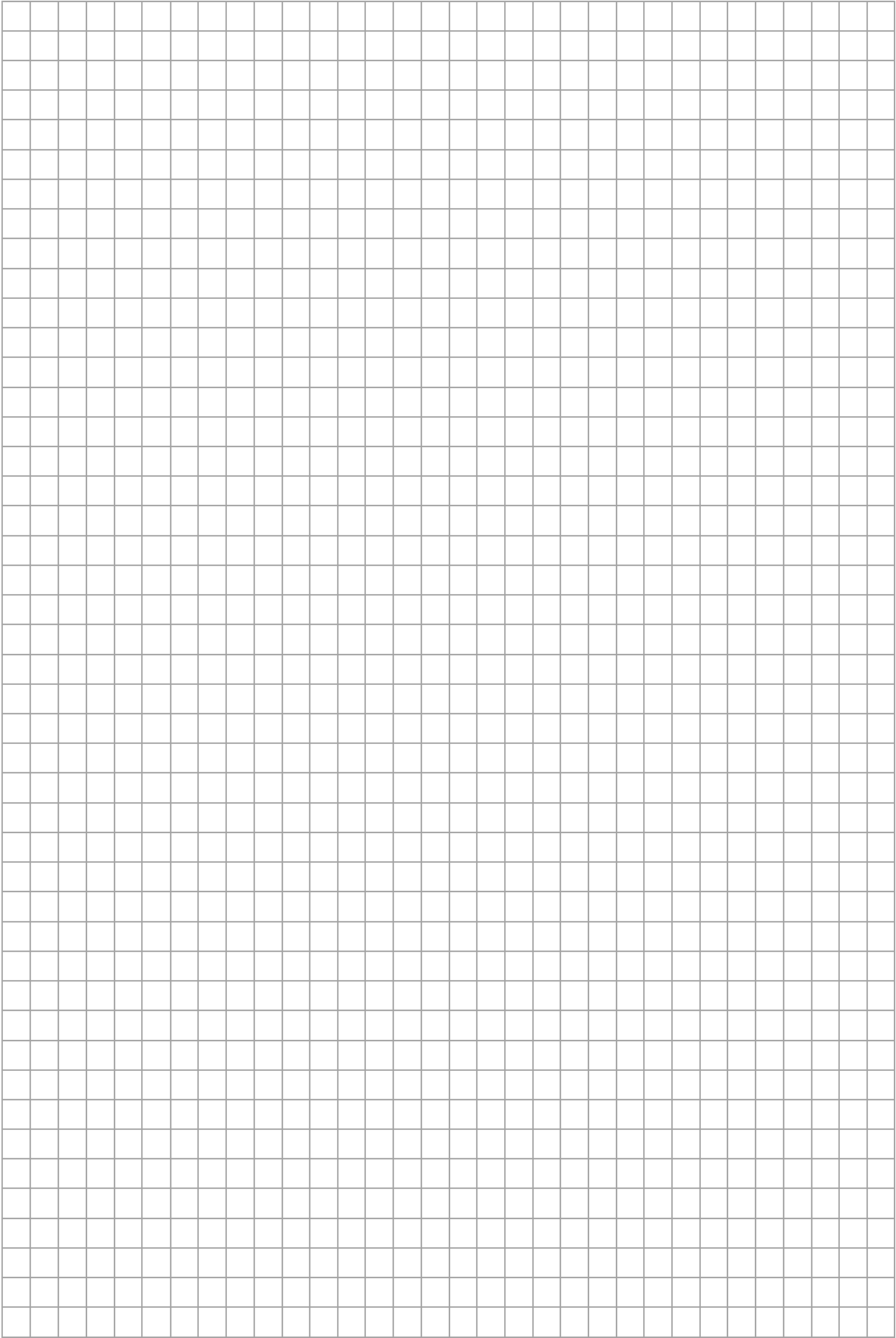
Zadanie 7. (0–4)**Rozwiąż nierówność**

$$2x^2 + 6x + 18 + \dots > 9$$

gdzie lewa strona nierówności istnieje, oraz jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego. Zapisz obliczenia.

7.

0–1–
2–3–4



Zadanie 8. (0–4)

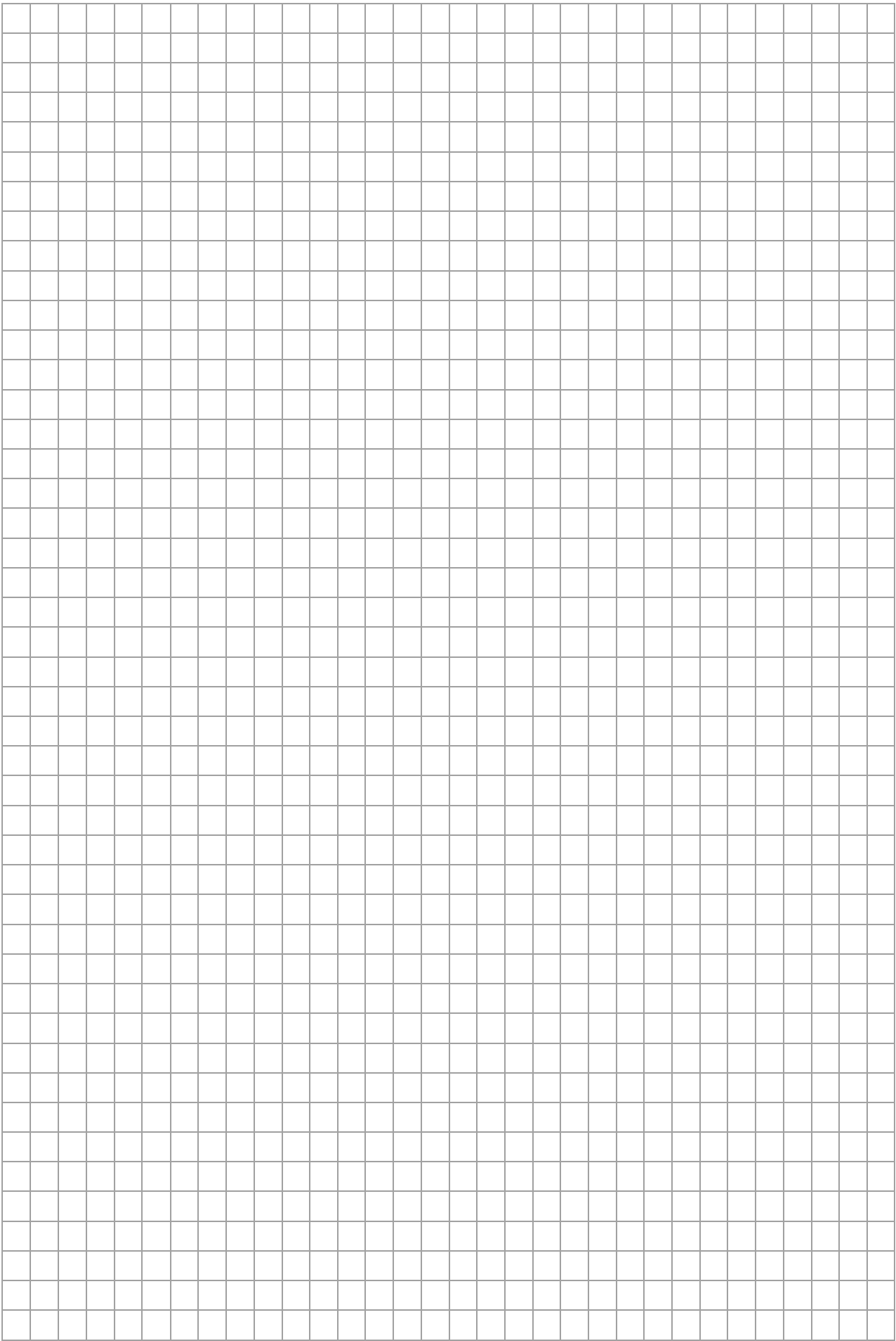
Rozważamy wszystkie liczby naturalne ośmiocyfrowe, w których zapisie dziesiętnym występuje dokładnie dwa razy cyfra 2 i dokładnie trzy razy cyfra 3.

8.	
0-1-	
2-3-4	

8.	
0-1-	
2-3-4	

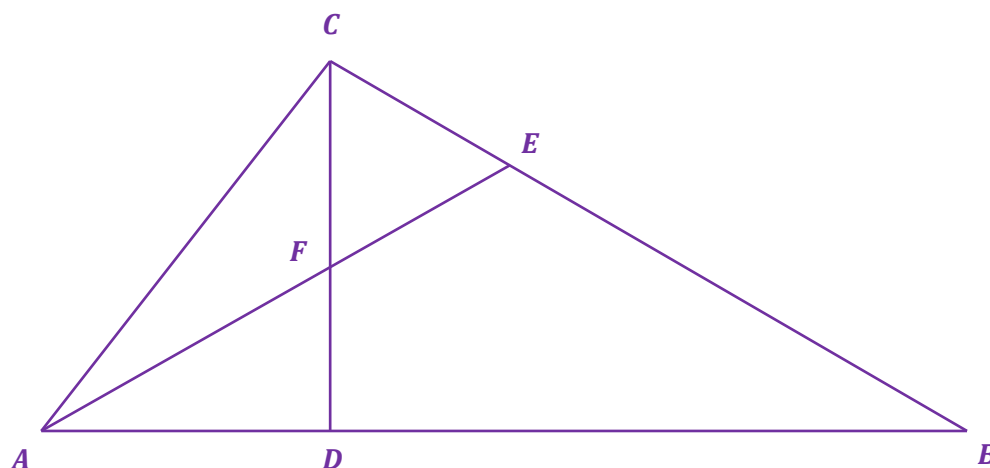
Oblicz, ile jest wszystkich takich liczb. Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, equal-sized squares formed by thin gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.



Zadanie 9. (0–4)

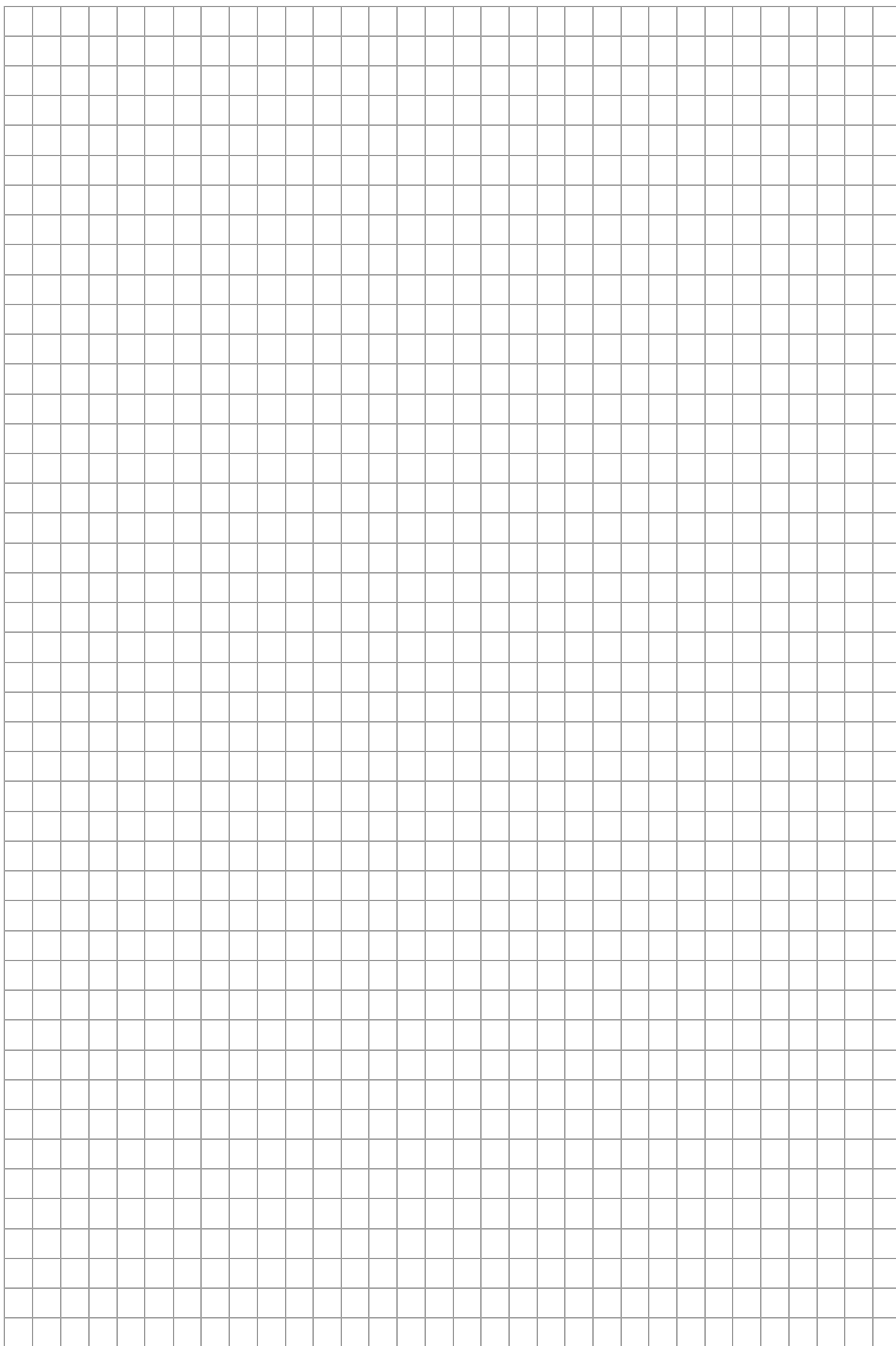
Dany jest trójkąt ABC o polu równym 8, w którym $|AB| = 4$. Z wierzchołka C poprowadzono wysokość $|CD|$ na bok $|AB|$ trójkąta ABC . Z kąta $\sphericalangle CAB$ poprowadzono odcinek który przecina bok $|BC|$ w punkcie E takim, że punkt E leży na symetralnej odcinka $|AB|$ oraz $|BE| = \sqrt{13}$. Odcinek $|AE|$ przecina wysokość $|CD|$ w punkcie F i tworzy czworokąt $DBEF$ (zobacz rysunek).



Oblicz długość boku $|AC|$ tego trójkąta. Zapisz obliczenia.

9.	
0–1–	
2–3–4	



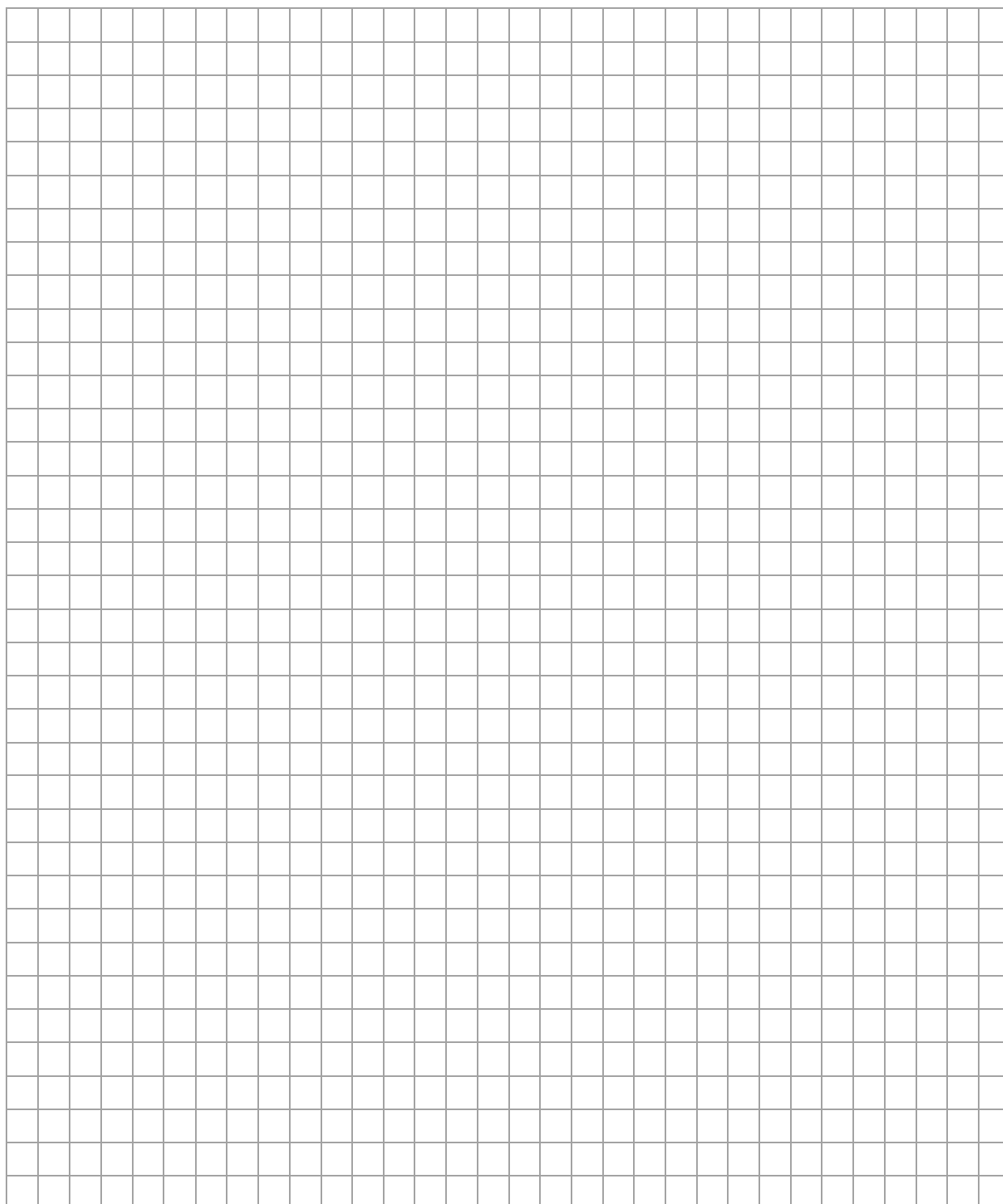


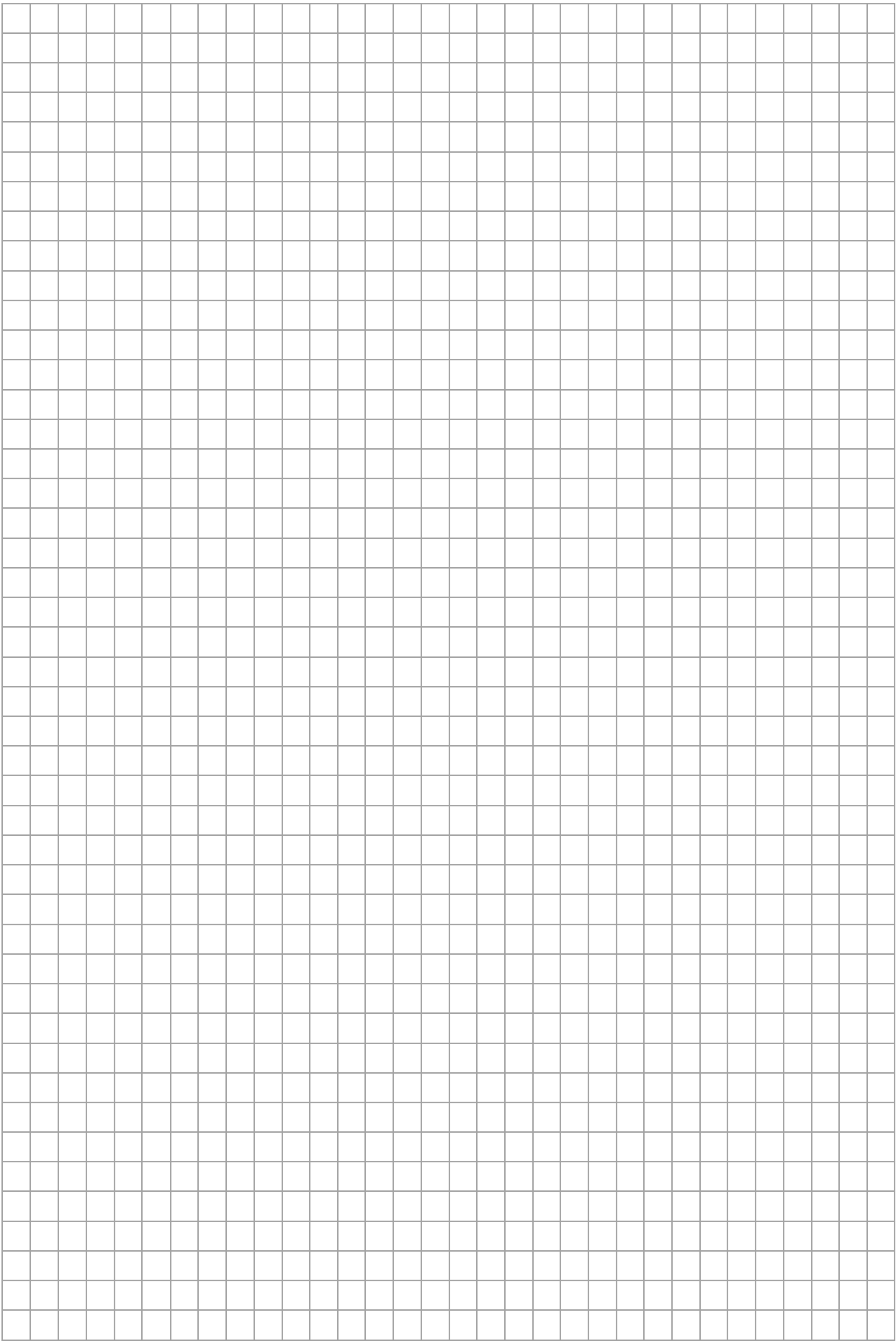
Zadanie 10. (0–5)

Parabola $y = -x^2 + 4x + 2$ przecina okrąg o równaniu $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$ w punktach o współrzędnych (x, y) . Punktem kratowym nazywamy taki punkt, który w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) ma obie współrzędne x i y będące liczbami całkowitymi.

10.0–1–
2–3–
4–5

Oblicz pole trójkąta ograniczonego punktami kratowymi przecięcia paraboli z okręgiem oraz początkiem kartezjańskiego układu współrzędnych. Zapisz obliczenia.



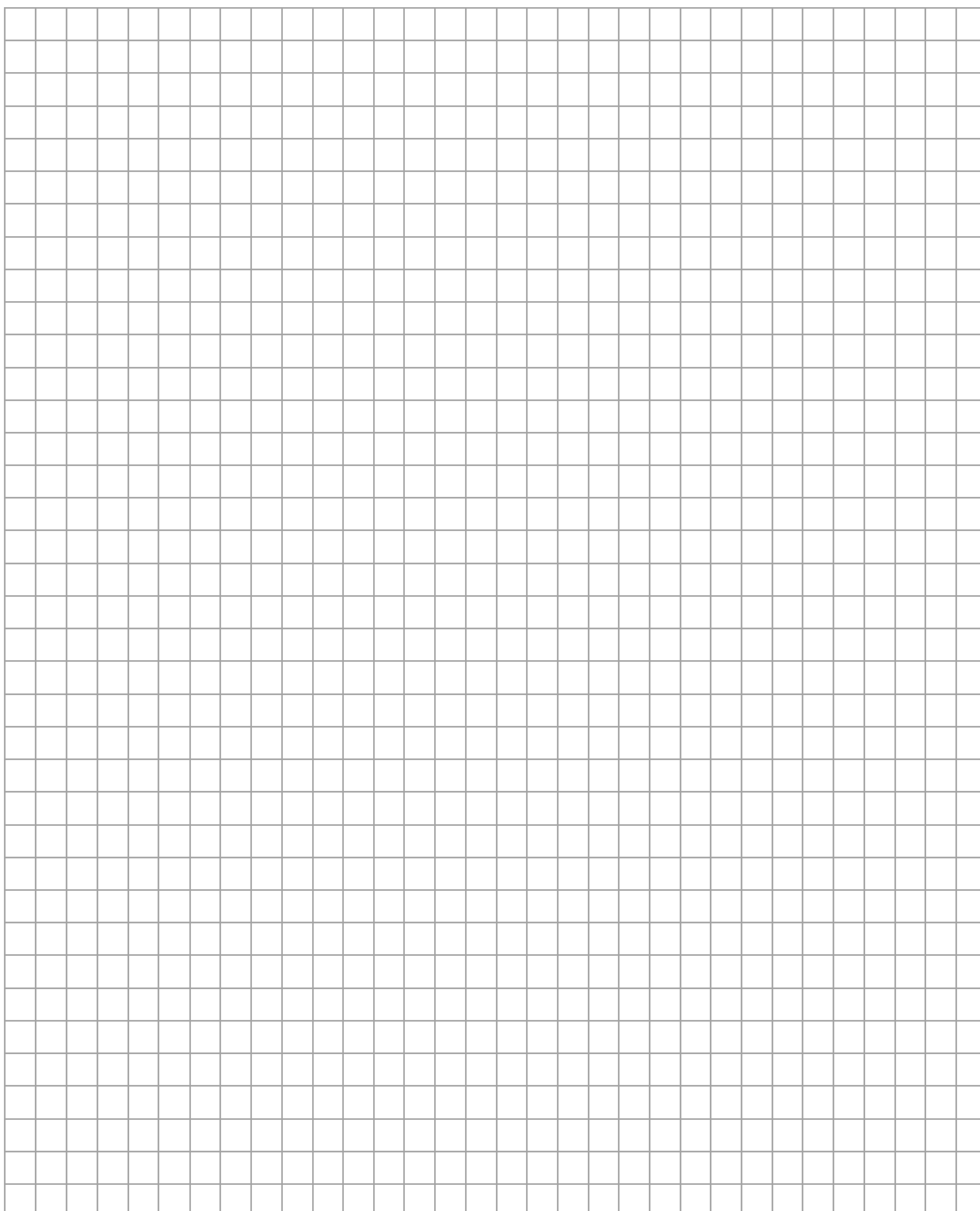


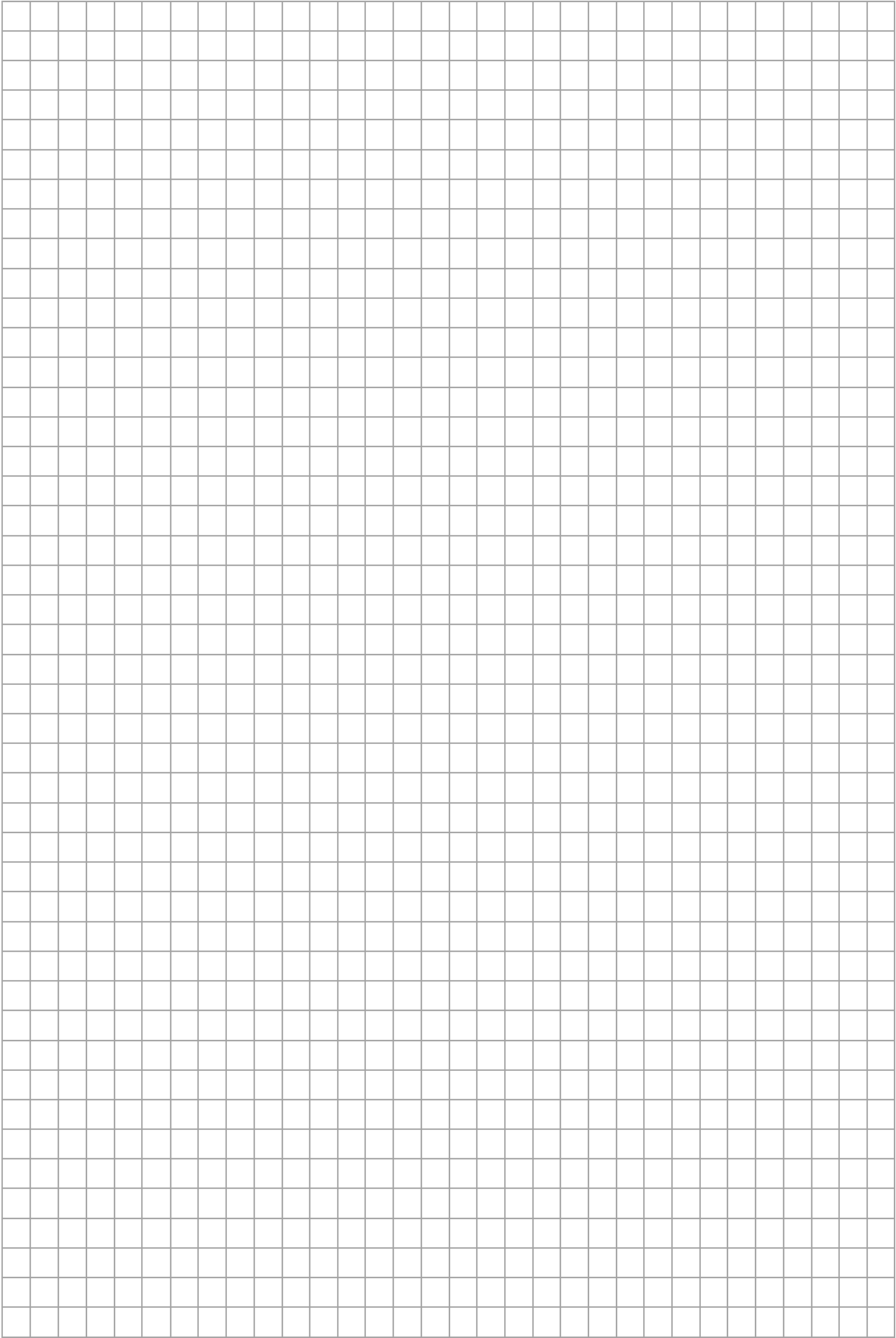
Zadanie 11. (0–6)

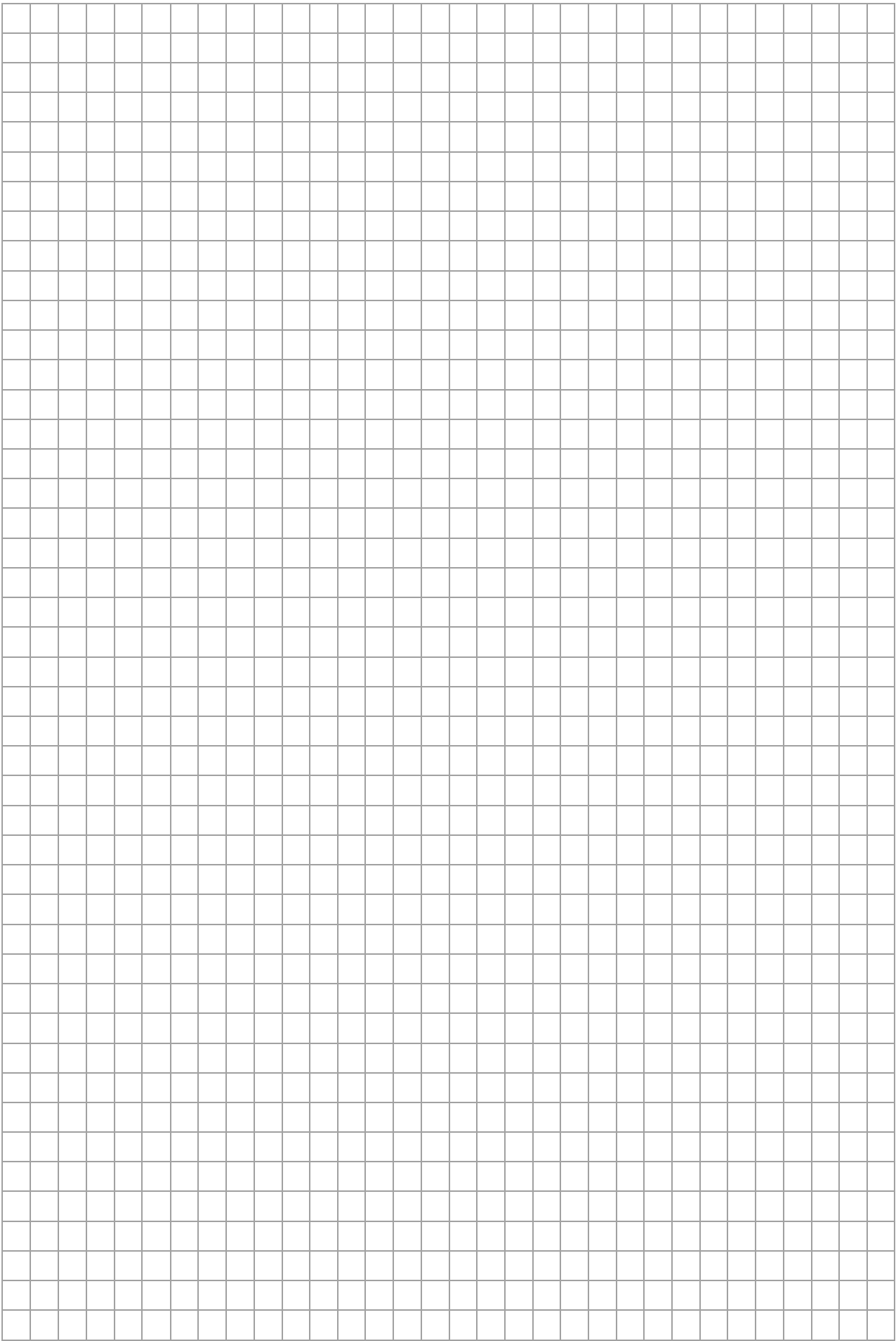
Rozwiąż równanie

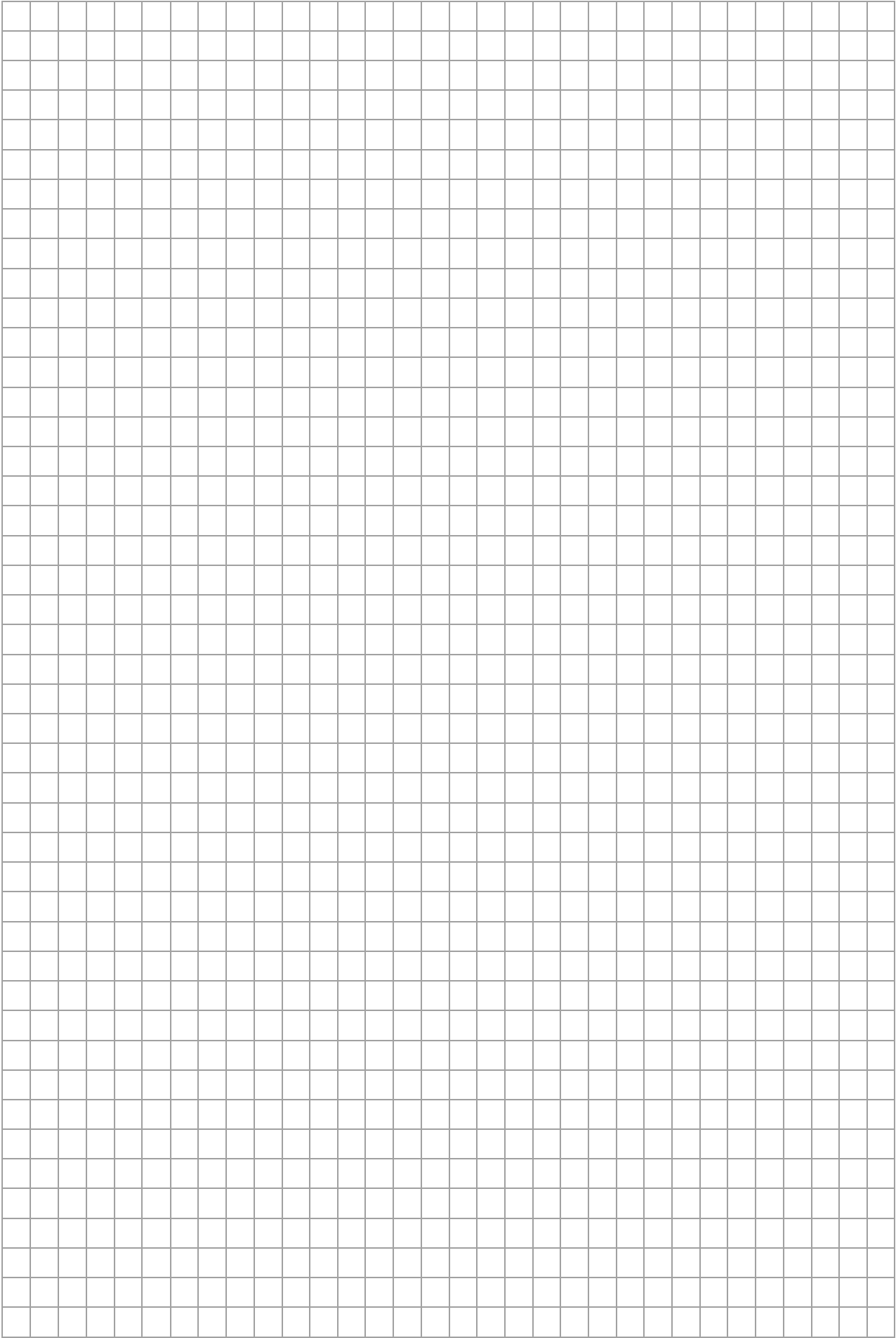
$$\sin(2x) = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$$

w zbiorze $[-2\pi, 2\pi]$. Zapisz obliczenia.









Zadanie 12. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m dla których równanie

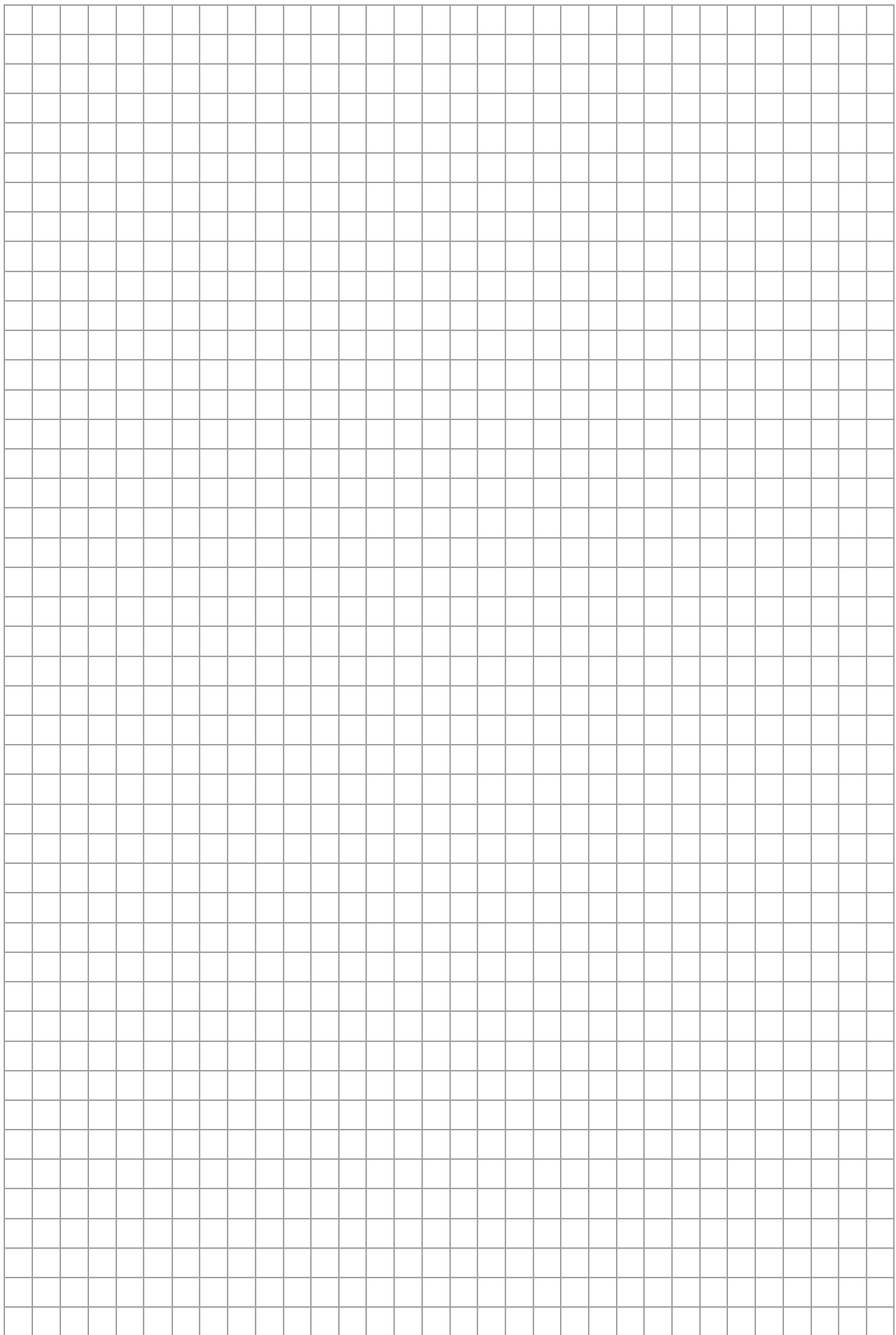
$$(m+1) \cdot x^2 + (m^2-1) \cdot x + m^2 + 3m + 2 = 0$$

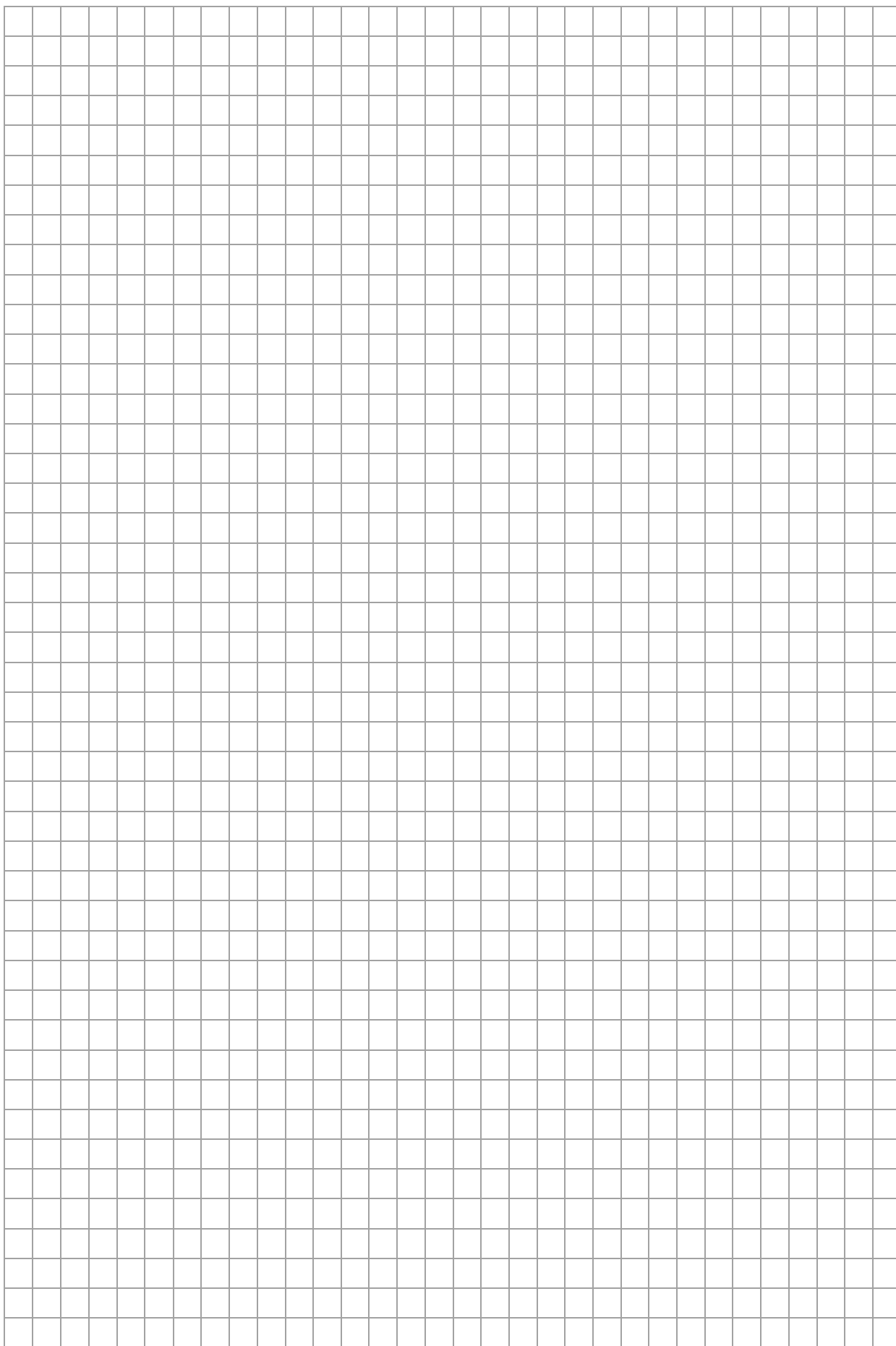
ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunki:

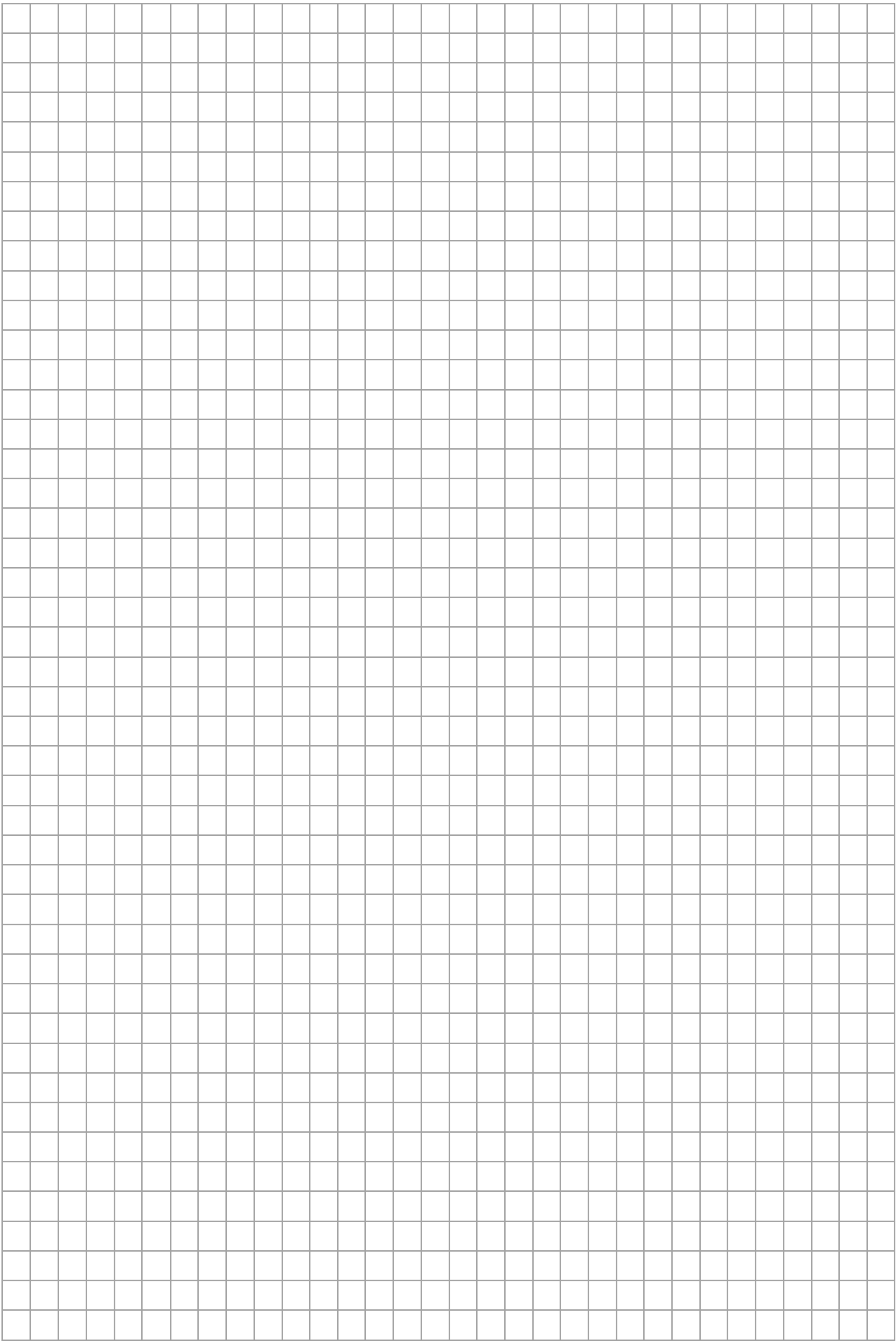
$$x_1 \neq 0, \quad x_2 \neq 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} \geq -10$$

Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.







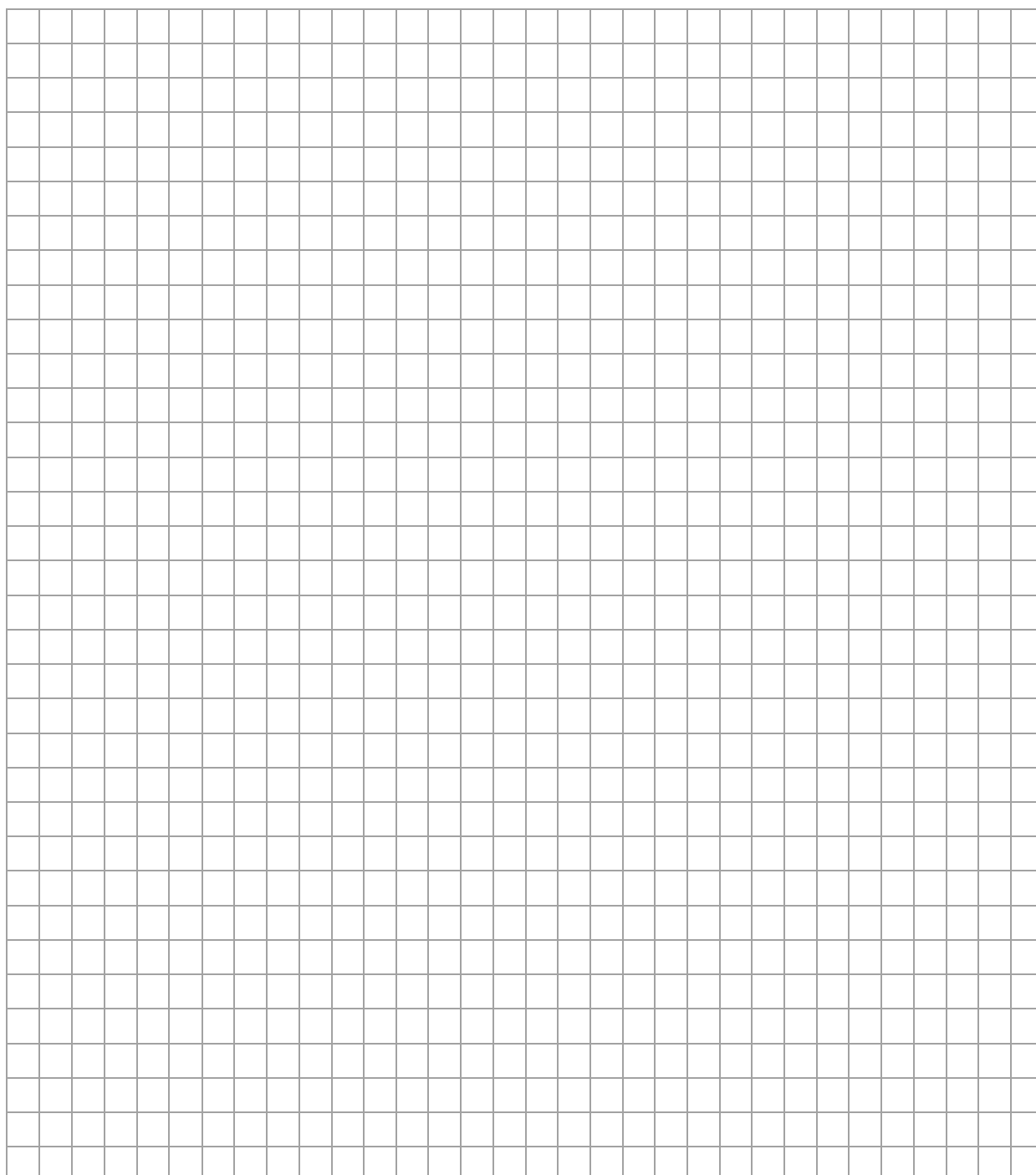
Zadanie 13.

Rozważamy wszystkie stożki o polu powierzchni bocznej $9\sqrt{3}\pi$, których promień podstawy ma długość nie większą niż $2\sqrt{3}$.

Zadanie 13.1. (0–2)

Wykaż, że objętość V każdego z takich stożków w zależności od długości r promienia podstawy jest określona wzorem

$$V(r) = \frac{\pi}{3} \sqrt{243r^2 - r^6}$$



Zadanie 13.2. (0–4)

Objętość V stożka w zależności od długości r promienia podstawy jest określona wzorem

$$V(r) = \frac{\pi}{3} \sqrt{243r^2 - r^6}$$

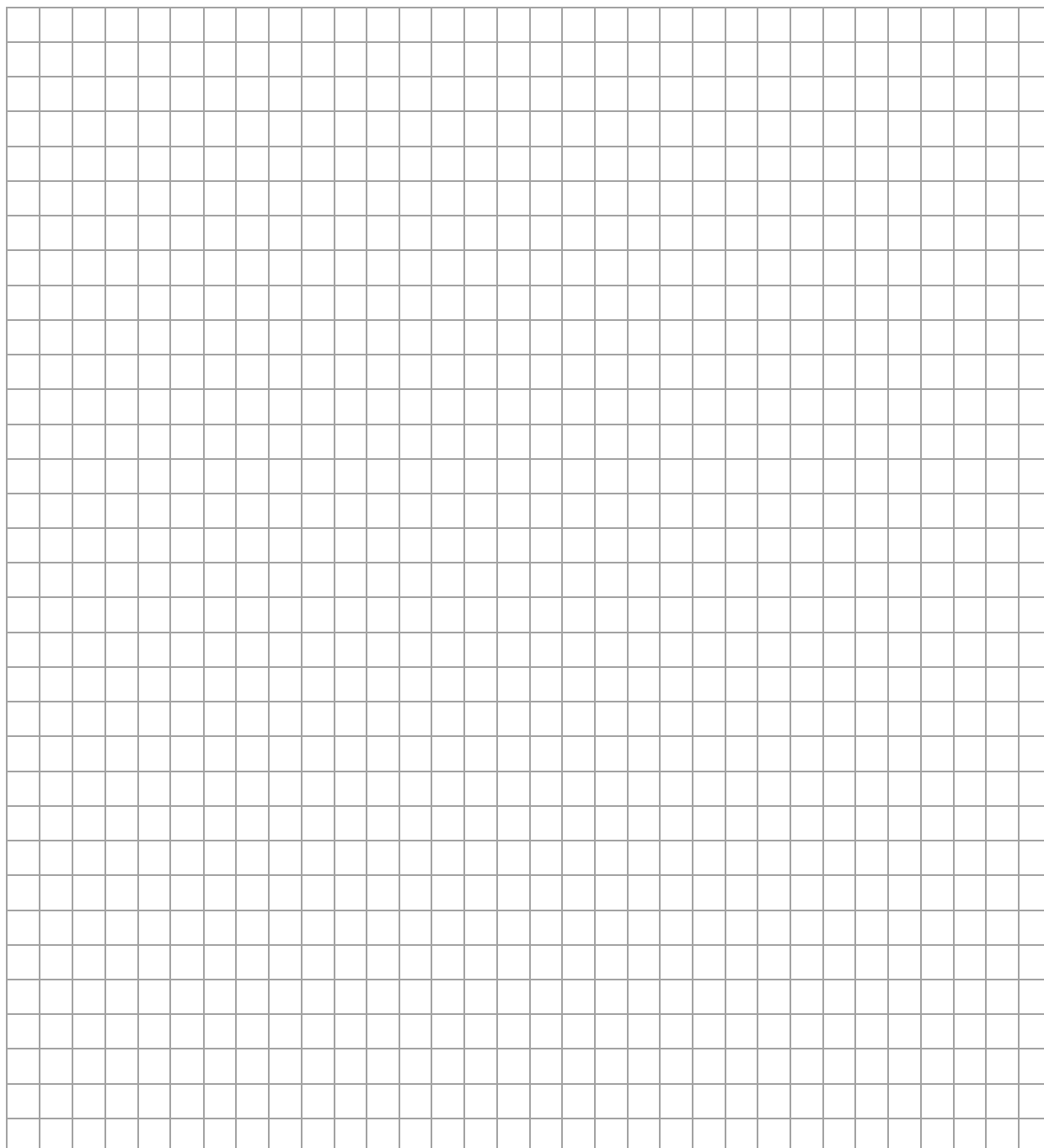
dla $r \in (0, 2\sqrt{3}]$.

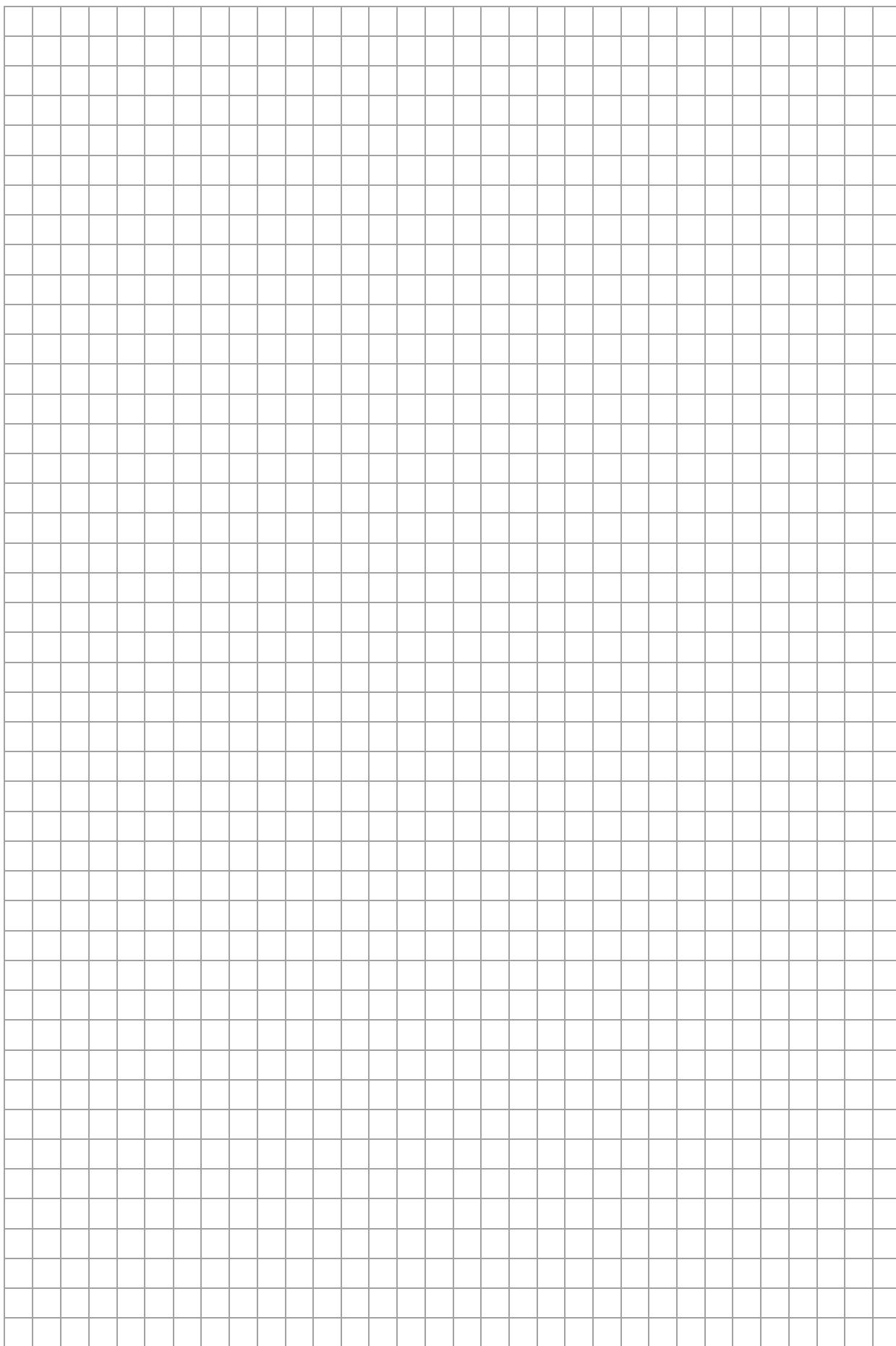
Wyznacz długość r promienia podstawy tego z rozważanych stożków, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość. Zapisz obliczenia.

13.2.

0–1–

2–3–4





This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, equal-sized squares formed by thin gray lines. There are 20 columns and 20 rows of squares, creating a total area of 400 small squares. The grid covers the entire page except for a narrow white border around the edges.

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023



MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023



MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023



Matura próbna 2025

test diagnostyczny przed sesją maj 2025

<i>Rodzaj dokumentu:</i>	Zasady oceniania rozwiązań zadań
<i>Egzamin:</i>	Egzamin maturalny
<i>Przedmiot:</i>	Matematyka
<i>Poziom:</i>	Poziom rozszerzony
<i>Formy arkusza:</i>	MMAP-R0-100
<i>Termin egzaminu:</i>	6 marca 2025 r.
<i>Data publikacji dokumentu:</i>	7 marca 2025 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–2)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: XI.R2) stosuje współczynnik dwumianowy (symbol Newtona) i jego własności przy rozwiązywaniu problemów kombinatorycznych.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz podanie poprawnej odpowiedzi: $\frac{366080}{729} \cdot x^8$

1 pkt – rozpisanie wzoru Newtona: $\binom{16}{8} \cdot x^8 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^8$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Środkowy wyraz rozwinięcia jest ósmym wyrazem. Po zastosowaniu wzoru Newtona

otrzymujemy: $\binom{16}{8} \cdot x^8 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^8$, co po przekształceniu do postaci $a \cdot x^n$ daje $\frac{366080}{729} \cdot x^8$.

Zadanie 2. (0–2)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi. I.R1) stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne zastosowanie wzorów logarytmicznych i poprawny wynik: $\frac{5}{2}$

1 pkt – obliczenie liczby a : $a = 25$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy liczbę a . Stosujemy wzór na zamianę podstawy logarytmu

$36^{\left(\frac{\log_6 2\sqrt{5}}{\log_6 4} \log_6 16 - 2\log_6 2\right)}$. Następnie przekształcamy równoważnie do postaci

$36^{\left(\frac{\log_6 2\sqrt{5}}{\log_6 4} \cdot 2\log_6 4 - \log_6 4\right)}$. Po skróceniu: $36^{(2\log_6 2\sqrt{5} - \log_6 4)}$. Otrzymujemy $36^{\log_6 5}$. Następnie przekształcamy do postaci $6^{2\log_6 5}$ i obliczamy $6^{\log_6 25}$: $a = 25$

Obliczamy liczbę b . Stosujemy podstawowe wzory logarytmiczne i wzór na zamianę podstawy logarytmu otrzymując $8 \cdot \frac{3}{2} \log_4 2 - \log_4 4 \cdot \log_3 9$, więc $8 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} - 2 = b$

co daje $b = 4$.

Obliczamy $\sqrt{\frac{a}{b}}$: $\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$

Zadanie 3. (0–2)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.R2) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{a}$ oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych, a także twierdzenia o trzech ciągach;

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia granicy oraz poprawny wynik: 14

1 pkt – ograniczenie wyrażenia $12^n + 13^n + 14^n$ dwoma wyrażeniami o wspólnej granicy:

$$14^n \leq 12^n + 13^n + 14^n \leq 3 \cdot 14^n$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Korzystamy z twierdzenia o trzech ciągach. Ograniczamy wyrażenie $12^n + 13^n + 14^n$:

$$14^n \leq 12^n + 13^n + 14^n \leq 3 \cdot 14^n$$

Wtedy:

$$14 \leq \sqrt[n]{12^n + 13^n + 14^n} \leq \sqrt[n]{3} \cdot 14$$

Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 14 = 14$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} \cdot 14 = 1 \cdot 14 = 14$$

a także granice tych funkcji są sobie równe, to na mocy twierdzenia o trzech ciągach

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{12^n + 13^n + 14^n} = 14$$

Zadanie 4. (0–3)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: XII.R1) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe i stosuje wzór Bayesa, stosuje twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym;

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 30%

2 pkt – poprawne zastosowanie wzoru Bayesa: $P(M|E) = \frac{0,6 \cdot 0,02}{0,6 \cdot 0,02 + 0,4 \cdot 0,07}$

1 pkt – poprawne obliczenie prawdopodobieństw warunkowych: $P(E|M)$ oraz $P(K|E)$:

$$P(E|M) = 0,02 \text{ oraz } P(K|E) = 0,07$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający poprawnie oblicza prawdopodobieństwo, natomiast wynik przedstawia w postaci innej niż procentu, to za zadanie otrzymuje **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązania

Przyjmujemy oznaczenia:

M – zdarzenie polegające na tym, że wybrana osoba jest mężczyzną

K – zdarzenie polegające na tym, że wybrana osoba jest kobietą

E – zdarzenie polegające na tym, że wybrana osoba jest zwolennikiem eutanazji

Z polecenia:

$$P(M) = 0,6$$

$$P(K) = 0,4$$

$$P(E|M) = 0,02$$

$$P(K|E) = 0,07$$

Korzystamy ze wzoru Bayesa:

$$P(M|E) = \frac{0,6 \cdot 0,02}{0,6 \cdot 0,02 + 0,4 \cdot 0,07} = 0,3 = 30\%$$

Zadanie 5. (0–3)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: XIII.R2) stosuje własność Darboux do uzasadniania istnienia miejsca zerowego funkcji;

Zasady oceniania

- 3 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania, tj. wykazanie, że funkcja $f(x)$ posiada co najmniej dwa miejsca zerowe takie, że jedno jest ujemne a drugie dodatnie
- 2 pkt – uzasadnienie zmiany znaku funkcji f dla dowolnych dodatnich i ujemnych argumentów, np. że $f(1) > 0$ i $f(2) < 0$ oraz $f(0) > 0$ i $f(-1) < 0$.
- 1 pkt – uzasadnienie, że funkcja $f(x)$ jest ciągła
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Funkcja f jest ciągła w zbiorze liczb rzeczywistych, ponieważ jest to funkcja wielomianowa. Zatem posiada własność Darboux.

Zauważmy, że $f(1) > 0$ oraz $f(2) < 0$. Zatem funkcja f przyjmuje wszystkie wartości pośrednie z przedziału $(f(1), f(2))$, więc istnieje taki dodatni argument x , dla którego $y = 0$. Analogicznie, $f(0) > 0$ oraz $f(-1) < 0$. Zatem funkcja f przyjmuje wszystkie wartości pośrednie z przedziału $(f(-1), f(0))$, więc istnieje taki ujemny argument x , dla którego $y = 0$.

Zatem na mocy twierdzenia Darboux funkcja posiada co najmniej dwa miejsca zerowe w przedziale $[-1, 2]$, z czego jedno jest ujemne a jedno dodatnie. ■

Zadanie 6. (0–3)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: XIII.R2) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną pochodnej; XIII.R3) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej V.R2) posługuje się złożeniami funkcji;.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz podanie poprawnej odpowiedzi: $y = \frac{9}{10}x + \frac{41}{10}$

2 pkt – wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej: $a = \frac{9}{10}$

1 pkt – obliczenie $x_0 = 1$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy x_0 :

$$5 = \sqrt{9x_0 + 16}$$

Obie strony równania są nieujemne, z tego wynika, że

$$25 = 9x_0 + 16$$

$$x_0 = 1$$

Zatem punkt $P = (1, 5)$ należy do wykresu tej funkcji. Wyznaczamy pochodną funkcji korzystając z pochodnej funkcji złożonej:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{9x+16}} \cdot 9 = \frac{9}{2\sqrt{9x+16}}$$

Obliczamy współczynnik kierunkowy stycznej:

$$a = f'(1) = \frac{9}{10}$$

Obliczamy punkt przecięcia stycznej z osią OY wykorzystując współrzędne punktu P .

Zatem równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P to $y = \frac{9}{10}x + \frac{41}{10}$.

Zadanie 7. (0–4)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.R2) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

Zasady oceniania

- 4 pkt – poprawne wyznaczenie wszystkich wartości zmiennej x , dla których suma szeregu istnieje oraz poprawne wyznaczenie wszystkich wartości zmiennej x , dla których suma jest większa od 9: $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$
- 3 pkt – poprawne wyznaczenie wszystkich wartości zmiennej x , dla których suma jest większa od 9: $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$
- 2 pkt – zapisanie sumy szeregu: $S = \frac{2x^3}{x-3}$ dla $x \neq 3$
- 1 pkt – wyznaczenie zbioru wszystkich wartości zmiennej x , dla których istnieje skończona suma szeregu: $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający nie wyznaczy wszystkich wartości zmiennej x dla której nieskończona suma szeregu istnieje i rozwiązuje nierówność to otrzymuje maksymalnie **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Ponieważ $a_1 = 2x^2$ oraz $q = \frac{3}{x}$ wyznaczamy zbiór wartości x , dla których istnieje skończona suma szeregu: $|q| < 1$: $\left|\frac{3}{x}\right| < 1$ oraz $x \neq 0$. Otrzymujemy $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.

Zapisujemy sumę szeregu geometrycznego: $S = \frac{2x^3}{x-3}$. Następnie wyznaczamy wszystkie

wartości zmiennej x , dla których suma jest większa od 9: $\frac{2x^3}{x-3} > 9$. Otrzymujemy wtedy

$(x-3)(2x^3 - 9x + 27) > 0$. Na mocy twierdzenia Bézouta stwierdzamy całkowity pierwiastek wielomianu $2x^3 - 9x + 27$: (-3) . Dzielimy wielomian przy użyciu schematu Hornera i zapisujemy w postaci wielomianowej:

	2	0	-9	27
-3	2	-6	9	0

$(2x^2 - 6x + 9)(x + 3)(x - 3) > 0$. Rozwiązaniem nierówności jest przedział $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$. Po uwzględnieniu dziedziny: $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ (zbioru wartości zmiennej x dla których suma istnieje) otrzymujemy: $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.

Zadanie 8. (0–4)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XI.R1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji;

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawny wynik: 273 280

3 pkt – poprawne rozpatrzenie dwóch przypadków i obliczenie ile liczb spełnia podane

założenia (dla *sposobu I*)

ALBO

– obliczenie wszystkich liczb, w których cyfra 2 występuje dokładnie dwa razy, a liczba 3 trzy razy (dla *sposobu II*)

2 pkt – poprawne rozpatrzenie jednego przypadku i obliczenie ile liczb spełnia podane

założenia (dla *sposobu I*)

ALBO

– obliczenie wszystkich takich liczb, które zaczynają się od zera (dla *sposobu II*)

1 pkt – zapisanie, że rozpatrujemy trzy przypadki w zależności jaka cyfra stoi na pierwszym miejscu (dla *sposobu I*)

ALBO

– zapisanie, że rozpatrujemy osobno przypadek z pominięciem występowania cyfry 0 na początku oraz przypadek z jej występowaniem (dla *sposobu II*)

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Niech x oznacza cyfrę różną od 2 i 3 a A zbiór elementów wszystkich takich x .

Wtedy $A = \{0,1,4,5,6,7,8,9\}$ oraz $|A| = 8$.

Rozpatrujemy trzy przypadki:

1° – pierwszą cyfrą jest 2

2° – pierwszą cyfrą jest 3

3° – pierwszą cyfrą jest x

Przypadek 1 – pierwszą cyfrą jest 2:

$$1 \cdot \binom{7}{1} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} \cdot 8^3 = 71680$$

Przypadek 2 – pierwszą cyfrą jest 3:

$$1 \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3} \cdot 8^3 = 107520$$

Przypadek 3 – pierwszą cyfrą jest x :

Na pierwszym miejscu nie może stać cyfra 0 więc $x \neq 0$:

$$7 \cdot \binom{7}{2} \cdot 8^2 \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3} = 94080$$

Sumujemy wszystkie przypadki i otrzymujemy wynik:

$$71680 + 107520 + 94080 = 273280$$

Sposób II

Obliczymy wszystkie liczby, w których cyfra 2 występuje dokładnie dwa razy, a liczba 3 trzy razy.

$$\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot 8^3 = 286720$$

Takich liczb, zaczynających się od cyfry 0 jest wtedy

$$1 \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot 8^2 = 13440$$

Zatem wszystkich liczb spełniających podane warunki jest

$$286720 - 13440 = 273280$$

Zadanie 9. (0–4)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VIII.8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów; VIII.2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów); [...]

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $|AC| = \frac{4\sqrt{10}}{3}$

3 pkt – obliczenie długości odcinka $|AD|$: $|AD| = \frac{4}{3}$

2 pkt – uzasadnienie, że trójkąty GBE oraz CDB są podobne **ORAZ** wyznaczenie skali podobieństwa: $k = \frac{3}{4}$

(lub $k = \frac{4}{3}$ przy uzasadnieniu podobieństwa trójkąta CDB do trójkąta GBE)

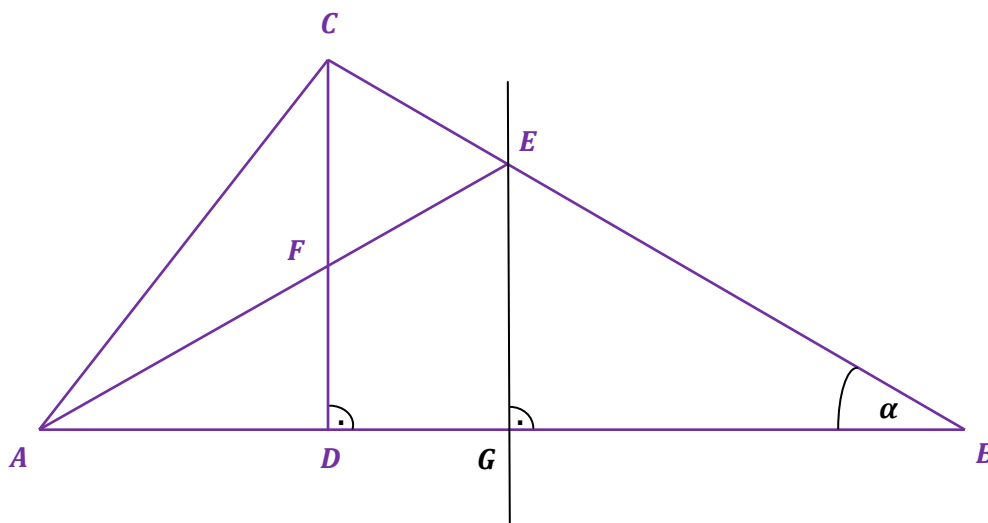
1 pkt – obliczenie wysokości $|EG|$: $|EG| = 3$

ALBO

– uzasadnienie, że trójkąty EGB oraz AGE są przystające

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie



Prowadzimy symetralną odcinka $|AB|$ przez punkt E oraz G .

Następnie obliczamy wysokość trójkąta ABC z jego pola: $\frac{4 \cdot |CD|}{2} = 8$ więc $|CD| = 4$.

Z symetralnej wynika, że $|AG| = |GB| = 2$

Obliczamy długość odcinka $|EG|$ korzystając z twierdzenia Pitagorasa: $|EG|^2 + 2^2 = (\sqrt{13})^2$ stąd $|EG| = 3$.

Trójkąty GBE oraz CDB są podobne, co stwierdzamy na cesze kąt-kąt-kąt: każdy z nich ma kąt prosty, kąt α oraz kąt $90^\circ - \alpha$.

Określamy skalę k tego podobieństwa: $k = \frac{3}{4}$.

Dlatego też układamy zależność: $\frac{2}{|DG|+2} = \frac{3}{4}$ oraz z tego otrzymujemy $|DG| = \frac{2}{3}$.

Wtedy $|AD| = 4 - 2 - \frac{2}{3}$ co daje $|AD| = \frac{4}{3}$.

Następnie obliczamy długość boku $|AC|$ z twierdzenia Pitagorasa: $\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4^2 = |AC|^2$ co

końcowo daje nam $|AC| = \frac{4\sqrt{10}}{3}$.

Zadanie 10. (0–5)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IV.R1) rozwiązuje układy równań liniowych i kwadratowych z dwiema niewiadomymi, które można sprowadzić do równania kwadratowego lub liniowego, a które nie są trudniejsze niż $\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by = c \\ x^2 + y^2 + dx + ey = f \end{cases}$

Zasady oceniania

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i obliczenie pola trójkąta: 10

4 pkt – obliczenie współrzędnych punktów przecięcia paraboli z okręgiem **oraz** odrzucenie współrzędnych punktów, które nie są kratowe: $A = (2,6)$ oraz $B = (4,2)$

3 pkt – obliczenie współrzędnych punktów przecięcia paraboli z okręgiem: $A = (2,6)$,
 $B = (4,2)$, $C = (1 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2})$ i $D = (1 - \sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2})$

2 pkt – obliczenie dwóch spośród czterech pierwszych współrzędnych punktów przecięcia,
 np. $x = 2$ i $x = 4$ albo $x = 1 - \sqrt{2}$ i $x = 1 - \sqrt{2}$

1 pkt – obliczenie jednej spośród czterech pierwszych współrzędnych punktów przecięcia,
 np. $x = 2$, $x = 4$, $x = 1 - \sqrt{2}$ albo $x = 1 - \sqrt{2}$
ALBO

– podanie współrzędnych punktu S (początku kartezjańskiego układu współrzędnych):
 $S = (0,0)$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Szukamy współrzędnych przecięcia paraboli z okręgiem. Zatem

$$(x - 1)^2 + (-x^2 + 4x + 2 - 3)^2 = 10$$

Po rozwinięciu otrzymujemy:

$$x^4 - 8x^3 + 19x^2 - 10x - 8 = 0$$

Na mocy twierdzenia Bézouta stwierdzamy całkowity pierwiastek wielomianu: 2.

Po podzieleniu przez dwumian $(x - 2)$ otrzymujemy:

$$(x - 2)(x^3 - 6x^2 + 7x + 4) = 0$$

Ponownie, na mocy twierdzenia Bézouta stwierdzamy całkowity pierwiastek wielomianu: 4.

Po podzieleniu przez dwumian $(x - 4)$ otrzymujemy:

$$(x - 2)(x - 4)(x^2 - 2x - 1) = 0$$

Zatem $x = 2$ lub $x = 4$ lub $x = 1 - \sqrt{2}$ lub $x = 1 + \sqrt{2}$

Obliczamy drugie współrzędne punktów i otrzymujemy:

$$A = (2, 6), \quad B = (4, 2), \quad C = (1 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}) \quad \text{i} \quad D = (1 - \sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2})$$

Jedynie punkty A i B spełniają warunek punktu kratowego. Punkt S – początek kartezjańskiego układu współrzędnych ma współrzędne $S = (0, 0)$. Obliczamy pole trójkąta ABS :

$$P = \frac{1}{2} \cdot |(4 - 2)(0 - 6) - (2 - 6)(0 - 2)| = 10$$

Zadanie 11. (0–6)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 2. Używanie języka matematycznego do tworzenia tekstów matematycznych, w tym do opisu prowadzonych rozumowań i uzasadniania wniosków, a także do przedstawiania danych. IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych..	Zdający: VII.R6) rozwiązuje równania trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładzie $4 \cos 2x \cos 5x = 2 \cos 7x + 1$.

Zasady oceniania

6 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:

$$x \in \{-2\pi, -\frac{7\pi}{4}, -\pi, -\frac{3\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, 2\pi\}$$

5 pkt – rozwiązanie równania w zbiorze liczb rzeczywistych: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ oraz $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

z uwzględnieniem dziedziny $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ i $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$

4 pkt – przekształcenie równania do postaci $\sin x = 0$ lub $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (*sposób I*)

ALBO

– zapisanie, że $t = 0$ lub $t = 1$ (*sposób II*)

3 pkt – zapisanie równania w postaci $\sin x = 0$ lub $\cos 2x + \sin 2x = 1$ (*sposób I*)

ALBO

– zastosowanie zmiennej pomocniczej $t = \tan x$ **oraz** zapisanie równania w postaci

$$\frac{2t}{1+t} = \frac{2t}{1+t^2} \quad (\text{sposób II})$$

2 pkt – zapisanie równania w postaci $2 \sin x \cos x = \frac{2 \sin x}{\cos x + \sin x}$ (*sposób I*)

ALBO

– zapisanie, że $\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$ (*sposób II*)

1 pkt – zapisanie koniecznych założeń i wyznaczenie dziedziny: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$,

$k \in \mathbb{Z}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający nie zapisuje założeń, to za całe rozwiązanie otrzymuje maksymalnie **3 punkty**.
 Jeżeli zdający zapisze poprawne założenia natomiast niepoprawnie rozwiązuje je, to za całe rozwiązanie otrzymuje maksymalnie **5 punktów**.

Przykładowe pełne rozwiązanie*Sposób I*

Zapisujemy konieczne założenia spełniające sens liczbowy: $\operatorname{tg} x \neq 0$ oraz $\operatorname{tg} x + 1 \neq 0$.

Po rozwiązaniu ich otrzymujemy dziedzinę równania: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Zamienimy $\operatorname{tg} x$ na funkcję sinus i cosinus przy użyciu wzoru $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ oraz rozpiszemy $\sin 2x$ ze wzoru na podwojony sinus. Po uproszczeniu:

$$\sin(2x) = \frac{2 \cdot \frac{\sin x}{\cos x}}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$2 \sin x \cos x = \frac{2 \sin x}{\cos x + \sin x}$$

Wyciągamy $2\sin x$ przed nawias

$$2 \sin x \cos x - \frac{2 \sin x}{\cos x + \sin x} = 0$$

$$2 \sin x \left(\cos x - \frac{1}{\cos x + \sin x} \right) = 0$$

Otrzymujemy

$$\sin x = 0 \quad \text{lub} \quad \cos x - \frac{1}{\cos x + \sin x} = 0$$

Przekształcamy drugie równanie do prostszej postaci. Sprowadzamy wyrażenie do wspólnego mianownika

$$\frac{\cos x (\cos x + \sin x) - 1}{\cos x + \sin x} = 0$$

Stąd

$$\cos x (\cos x + \sin x) - 1 = 0$$

$$\cos^2 x + \sin x \cos x - 1 = 0$$

Mnożymy równanie obustronnie przez 2 otrzymując

$$2\cos^2 x - 1 + 2\sin x \cos x = 1$$

Korzystając ze wzoru na podwojony sinus i cosinus otrzymujemy

$$\cos 2x + \sin 2x = 1$$

Zamieniamy $\sin 2x$ ze wzoru redukcyjnego

$$\cos 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 1$$

Korzystamy ze wzoru na sumę cosinusów

$$2 \cos \frac{2x + \frac{\pi}{2} - 2x}{2} \cdot \cos \frac{2x - \frac{\pi}{2} + 2x}{2} = 1$$

Po uproszczeniu

$$2 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Dzielimy obustronnie przez 2 otrzymując

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

Po podzieleniu obustronnie przez $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Rozwiązujemy równanie:

$$2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad 2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{lub} \quad x = k\pi$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Zapisujemy rozwiązania należące do przedziału $[-2\pi, 2\pi]$:

$$x \in \left\{-2\pi, -\frac{7\pi}{4}, -\pi, -\frac{3\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, 2\pi\right\}$$

Sposób II

Zapisujemy konieczne założenia spełniające sens liczbowy: $\operatorname{tg} x \neq 0$ oraz $\operatorname{tg} x + 1 \neq 0$.

Po rozwiązaniu ich otrzymujemy dziedzinę równania: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Do przekształcenia równania zastosujemy wzór na podwojony sinus:

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$$

Niech $t = \operatorname{tg} x$.

$$\frac{2t}{1+t} = \frac{2t}{1+t^2}$$

Rozwiązujemy równanie:

$$2t(1+t^2) = 2t(1+t)$$

$$2t(1+t^2) - 2t(1+t) = 0$$

$$2t(1 + t^2 - 1 - t) = 0$$

$$2t(t^2 - t) = 0$$

$$2t^2(t - 1) = 0$$

$$t = 0 \quad \text{lub} \quad t = 1$$

Zatem

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{oraz} \quad x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Zapisujemy rozwiązania należące do przedziału $[-2\pi, 2\pi]$:

$$x \in \left\{-2\pi, -\frac{7\pi}{4}, -\pi, -\frac{3\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, 2\pi\right\}$$

Komentarz do zadania

Równanie to posiada wiele różnych sposobów rozwiązania wykorzystujących podstawowe wzory i przekształcenia wyrażeń trygonometrycznych, natomiast w kluczu odpowiedzi uwzględniono najprostsze oraz najszybsze sposoby rozwiązania. Ze względu na długą drogę prowadzącą do rozwiązania oraz skomplikowane obliczenia, zadanie punktowane jest najwyższą możliwą liczbą punktów oraz posiada dużo miejsca do rozwiązania w arkuszu, co sprawia, że zdający może zapisywać wszystkie rozważania oraz podejmować wiele prób rozwiązania problemu.

Zadanie 12. (0–6)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu	Zdający: III.R3) stosuje wzory Viète’a dla równań kwadratowych; III.R5) analizuje równania [...] kwadratowe z parametrami [...].

Zasady oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap polega na rozwiązaniu warunku $a \neq 0$ oraz nierówności $\Delta > 0$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – poprawne rozwiązanie warunku $a \neq 0$ oraz poprawne rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$: $m \in (-\infty, -1) \cup (7, +\infty)$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający rozwiązuje warunek $\Delta \geq 0$ to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

Jeżeli zdający rozważa opcje dla której $a = 0$ lub nie rozważy warunku $a \neq 0$ to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na wyznaczeniu tych wartości parametru m , dla których jest spełniony

warunek: $x_1 \neq 0$ oraz $x_2 \neq 0$ oraz $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} \geq -10$. Za poprawne wykonanie tego

etapu zdający otrzymuje **4 punkty**. Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

4 pkt – rozwiązanie warunku i poprawna odpowiedź: $m \in (-\infty, -5] \cup (-2, -1) \cup (-1, +\infty)$

3 pkt – przekształcenie nierówności do postaci $\frac{(1-m)(m^2-5m-5)}{(m+2)^3} \geq -10$ **ORAZ** rozwiązanie

warunku $W(0) \neq 0$ bądź $x_1 x_2 \neq 0$: $m \neq -2 \wedge m \neq -1$

2 pkt – zapisanie nierówności $\frac{(1-m)((1-m)^2-3(m+2))}{(m+2)^3} \geq -10$ **ORAZ** zapisanie warunku

$W(0) \neq 0$ **ALBO** zapisanie warunku $x_1 x_2 \neq 0$

1 pkt – przekształcenie warunku do postaci pozwalającej na bezpośrednie jednokrotne

zastosowanie wzorów Viète'a, np. $\frac{(x_1+x_2)((x_1+x_2)^2-3x_1x_2)}{x_1^3x_2^3} \geq -10$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający nie rozwiązuje założeń $x_1 \neq 0$ i $x_2 \neq 0$ ale rozwiązuje pozostałą część etapu to za tę część rozwiązania otrzymuje maksymalnie **2 punkty**.

Trzeci etap polega na wyznaczeniu wszystkich wartości parametru m , które spełniają

jednocześnie warunki: $\Delta > 0$ i $x_1 \neq 0$ i $x_2 \neq 0$ i $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} \geq -10$.

Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – poprawne wyznaczenie wszystkich wartości parametru m , które spełniają

jednocześnie warunki: $\Delta > 0$ i $x_1 \neq 0$ i $x_2 \neq 0$ i $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} \geq -10$:

$$m \in (-\infty, -5] \cup (-2, -1) \cup (7, +\infty)$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Uwagi:

Jeżeli zdający w etapie I lub II popełni błąd, który nie jest błędem rachunkowym, to za III etap otrzymuje **0 punktów**.

Jeżeli zdający w etapach I i II nie popełni błędów innych niż rachunkowe i otrzyma zbiory rozwiązań, które nie są rozłączne i żaden z nich nie jest zbiorem liczb rzeczywistych, a następnie poprawnie wyznaczy część wspólną zbiorów rozwiązań z etapów I i II, to za III etap może otrzymać **1 punkt**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

I etap

Aby równanie $(m+1) \cdot x^2 + (m^2-1) \cdot x + m^2 + 3m + 2 = 0$ miało dwa różne rozwiązania rzeczywiste, to funkcja zmiennej rzeczywistej x musi być kwadratowa. Zatem współczynnik $a \neq 0$:

$$m+1 \neq 0$$

Otrzymujemy:

$$m \neq -1$$

Sposób I

Funkcja kwadratowa f ma dwa różne miejsca zerowe wtedy i tylko wtedy, gdy wyróżnik Δ trójmianu kwadratowego $(m+1) \cdot x^2 + (m^2-1) \cdot x + m^2+3m+2 = 0$ jest dodatni.

Rozwiązujemy warunek $\Delta > 0$:

$$(m^2-1)^2 - 4(m+1)(m^2+3m+2) > 0$$

$$(m-1)^2(m+1)^2 - 4(m+1)^2(m+2) > 0$$

$$(m+1)^2[(m-1)^2 - 4(m+2)] > 0$$

$$(m+1)^3(m-7) > 0$$

$$m \in (-\infty, -1) \cup (7, +\infty)$$

Sposób II

Zauważamy, że równanie $(m+1) \cdot x^2 + (m^2-1) \cdot x + m^2+3m+2 = 0$ można zapisać w postaci $(m+1) \cdot x^2 + (m+1)(m-1) \cdot x + (m+1)(m+2) = 0$. Z założenia $m \neq -1$ więc dzielimy równanie obustronnie przez $(m+1)$ otrzymując:

$$x^2 + (m-1) \cdot x + m+2 = 0$$

Funkcja kwadratowa f ma dwa różne miejsca zerowe wtedy i tylko wtedy, gdy wyróżnik Δ trójmianu kwadratowego $x^2 + (m-1) \cdot x + m+2 = 0$ jest dodatni. Rozwiązujemy warunek $\Delta > 0$:

$$(m-1)^2 - 4(m+2) > 0$$

$$(m+1)(m-7) > 0$$

$$m \in (-\infty, -1) \cup (7, +\infty)$$

Zatem z obu warunków wynika:

$$m \in (-\infty, -1) \cup (7, +\infty) \quad \wedge \quad m \neq -1$$

Stąd

$$m \in (-\infty, -1) \cup (7, +\infty)$$

II etap

Zapisujemy wzory Viète'a przy użyciu parametrów we współczynnikach:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(m+1)(m-1)}{m+1} = 1-m$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{(m+1)(m+2)}{m+1} = m+2$$

Rozwiązujemy warunki: $x_1 \neq 0$ i $x_2 \neq 0$.

Sposób I

Zapisujemy, że $W(0) \neq 0$. Wtedy $m^2 + 3m + 2 \neq 0$. Z tego wynika, że

$$m \neq -2 \quad \wedge \quad m \neq -1$$

Sposób II

Zapisujemy, że $x_1 \cdot x_2 \neq 0$. Wtedy $m^2 + 3m + 2 \neq 0$. Z tego wynika, że

$$m \neq -2 \quad \wedge \quad m \neq -1$$

Przekształcamy warunek $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} \geq -10$ do postaci, w której możemy zastosować wzory

Viète'a. Zatem

$$\frac{(x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2)}{x_1^3x_2^3} \geq -10$$

Następnie wstawiamy wzory Viète'a:

$$\frac{(1-m)((1-m)^2 - 3(m+2))}{(m+2)^3} \geq -10$$

Nierówność doprowadzamy do postaci

$$\frac{-m^3 + 6m^2 - 5}{(m+2)^3} \geq -10$$

Po czym sprowadzamy do wspólnego mianownika i postaci iloczynowej

$$3(m+2)^3(3m^3 + 22m^2 + 40m + 25) \geq 0$$

Korzystając z twierdzenia Bézouta stwierdzamy możliwe całkowite pierwiastki wielomianu

$3m^3 + 22m^2 + 40m + 25$. Jako, iż jest on zapisany jako suma czterech składników, zatem jedynie ujemne liczby mogą stanowić jego pierwiastki. Zapisujemy zbiór: $\mathbb{M} = \{-1, -5, -25\}$.

Sprawdzamy, która liczba zeruje wielomian i otrzymujemy $W(-5) = 0$. Dzielimy zatem

wielomian $3m^3 + 22m^2 + 40m + 25$ przez dwumian $(m + 5)$ przy użyciu schematu Hornera.

	3	22	40	25
-5	3	7	5	0

Zapisujemy w postaci iloczynowej

$$3(m + 2)^3(m + 5)(3m^2 + 7m + 5) \geq 0$$

Trójmian $3m^2 + 7m + 5$ nie posiada pierwiastków. Dlatego rozwiązaniem nierówności jest przedział

$$m \in (-\infty, -5] \cup (-2, +\infty)$$

Zatem z obu warunków wynika:

$$m \in (-\infty, -5] \cup (-2, +\infty) \quad \wedge \quad m \neq -2 \quad \wedge \quad m \neq -1$$

Stąd

$$m \in (-\infty, -5] \cup (-2, -1) \cup (-1, +\infty)$$

Etap III

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m , które spełniają oba warunki:

$m \in (-\infty, -1) \cup (7, +\infty)$ oraz $m \in (-\infty, -5] \cup (-2, -1) \cup (-1, +\infty)$. Stąd też odpowiedź:

$$m \in (-\infty, -5] \cup (-2, -1) \cup (7, +\infty)$$

Zadanie 13.1. (0–2)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: V.3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą [...] wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie.

Zasady oceniania

2 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – uzależnienie tworzącej stożka od jego promienia **ORAZ** wysokości od jego tworzącej

$$\text{i promienia: } l = \frac{9\sqrt{3}}{r} \quad \text{i} \quad h = \sqrt{l^2 - r^2}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Ze wzoru na pole powierzchni bocznej stożka:

$$9\sqrt{3}\pi = \pi r \cdot l$$

$$l = \frac{9\sqrt{3}}{r}$$

Z twierdzenia Pitagorasa:

$$h^2 + r^2 = l^2$$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2}$$

$$h = \sqrt{\left(\frac{9\sqrt{3}}{r}\right)^2 - r^2}$$

$$h = \sqrt{\frac{243 - r^4}{r^2}}$$

$$h = \frac{\sqrt{243 - r^4}}{r}$$

Ze wzoru na objętość stożka:

$$V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{\sqrt{243 - r^4}}{r} = \frac{\pi}{3}\sqrt{243r^2 - r^6} \quad \blacksquare$$

Zadanie 13.2. (0–4)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XIII.R4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej XIII.R5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji; XIII.R6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej. V.R2) posługuje się złożeniami funkcji

Zasady oceniania

4 pkt – uzasadnienie, że funkcja V przyjmuje wartość największą dla $r = 3$ i obliczenie tej największej objętości: $9\sqrt{2}\pi$

3 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja V przyjmuje wartość największą dla $r = 3$

2 pkt – obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji: $r = 3$

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji złożonej V , np.: $V'(r) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{486r - 6r^5}{2\sqrt{243r^2 - r^6}}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja posiada wartość największą dla wyznaczonej wartości r , przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej oraz:
 - opisuje (słownie lub graficznie - np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji V LUB
 - zapisuje, że dla wyznaczonej wartości r funkcja V ma maksimum lokalne i jest to jednocześnie jej największa wartość LUB
 - zapisuje, że dla wyznaczonej wartości r funkcja V ma maksimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.
2. Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku, np. znakami „+” i „-” znak pochodnej.

3. Jeżeli zdający nie sprawdzi czy dla $r = 2\sqrt{3}$ objętość stożka jest największa to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy pochodną funkcji V . Skorzystamy ze wzoru na pochodną funkcji złożonej:

$$V'(r) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{243r^2 - r^6}} \cdot (486r - 6r^5)$$

Obliczamy miejsca zerowe funkcji pochodnej:

$$\frac{\pi}{3} \cdot \frac{486r - 6r^5}{2\sqrt{243r^2 - r^6}} = 0$$

$$486r - 6r^5 = 0$$

$$6r(81 - r^4) = 0$$

$$r = 0 \quad \text{lub} \quad r^4 = 81$$

$$r = 0 \notin (0, 2\sqrt{3}] \quad \vee \quad r = 3 \quad \vee \quad r = -3 \notin (0, 2\sqrt{3}]$$

Badamy znak pochodnej:

r	$(0, 3)$	3	$(3, 2\sqrt{3})$	$2\sqrt{3}$
$V'(r)$	$+$	0	$-$	
$V(r)$	$\nearrow$	$y_{\max} = 9\sqrt{2}\pi$	$\searrow$	$2\sqrt{33}\pi$

Zatem dla $r = 3$ objętość tego stożka jest największa i wynosi $9\sqrt{2}\pi$.

Matura próbna 2025

test diagnostyczny przed sesją maj 2025

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione
do momentu rozpoczęcia egzaminu.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

PESEL

Miejsce na naklejkę.

Sprawdź, czy kod na naklejce to

M-100.

Jeżeli tak – przyklej naklejkę.

Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Symbol arkusza

MMAP-R0-**100**-2504

DATA: **15 kwietnia 2025 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:

☐ dostosowania zasad oceniania

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

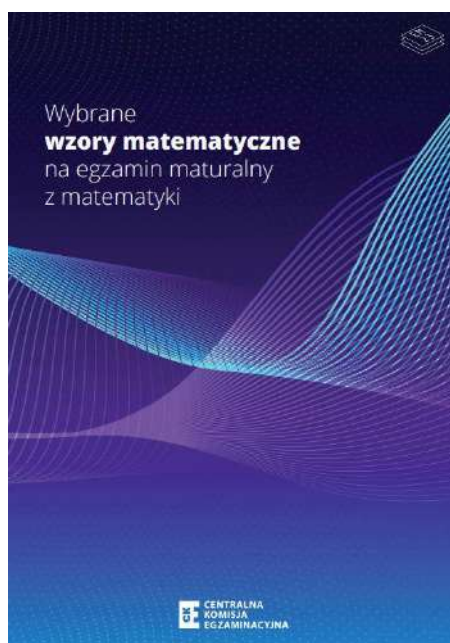
1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.





Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 29 stron (zadania 1–14). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
5. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Nie wpisuj żadnych znaków w tabelkach przeznaczonych dla egzaminatora. Tabelki umieszczone są na marginesie przy każdym zadaniu.
8. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
9. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



**Zadania egzaminacyjne są wydrukowane
na następnych stronach.**

Rozwiąż nierówność

1.

0-1-2

$$x^7 - x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \leq 0$$

Wyznacz wszystkie liczby naturalne spełniające daną nierówność. Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, equal-sized squares formed by thin gray lines. There are 20 columns and 20 rows of squares, creating a total of 400 square units. The grid covers the entire area of the page, leaving no margins or other markings.

Piąty wyraz rozwinięcia $(x - b)^{10}$ jest równy $53760x^6$.

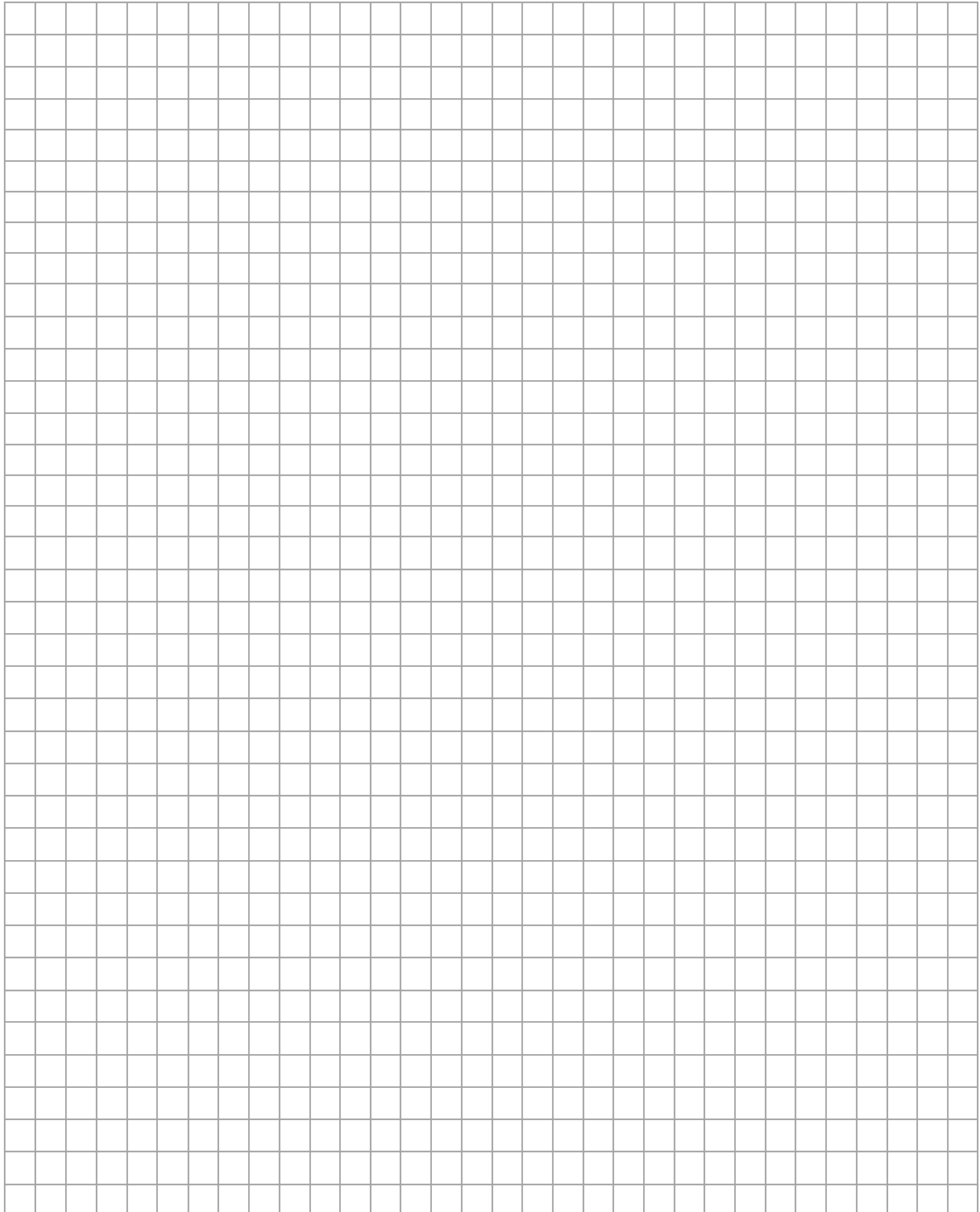
Oblicz b . Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + \cos(3n - 5)}{2n^2 + 1}$$

Zapisz obliczenia.



W 2024 roku spośród wszystkich kandydatów na kierowców, 37% wybrało ośrodek A, 43% kandydatów wybrało ośrodek B natomiast reszta zapisała się do ośrodka C. Każdy z kursantów ukończył kurs i zdał prawo jazdy. Dokładnie 12% kursantów z ośrodka A zdało egzamin praktyczny za pierwszym podejściem. W ośrodku B, egzamin praktyczny za drugim lub kolejnym razem zdało 91% kursantów, natomiast w ośrodku C było to 93% wszystkich zdających. Po zakończeniu wszystkich zdanych egzaminów wylosowano jedną osobę oraz okazało się, że zdała ona egzamin praktyczny za pierwszym podejściem.

4.

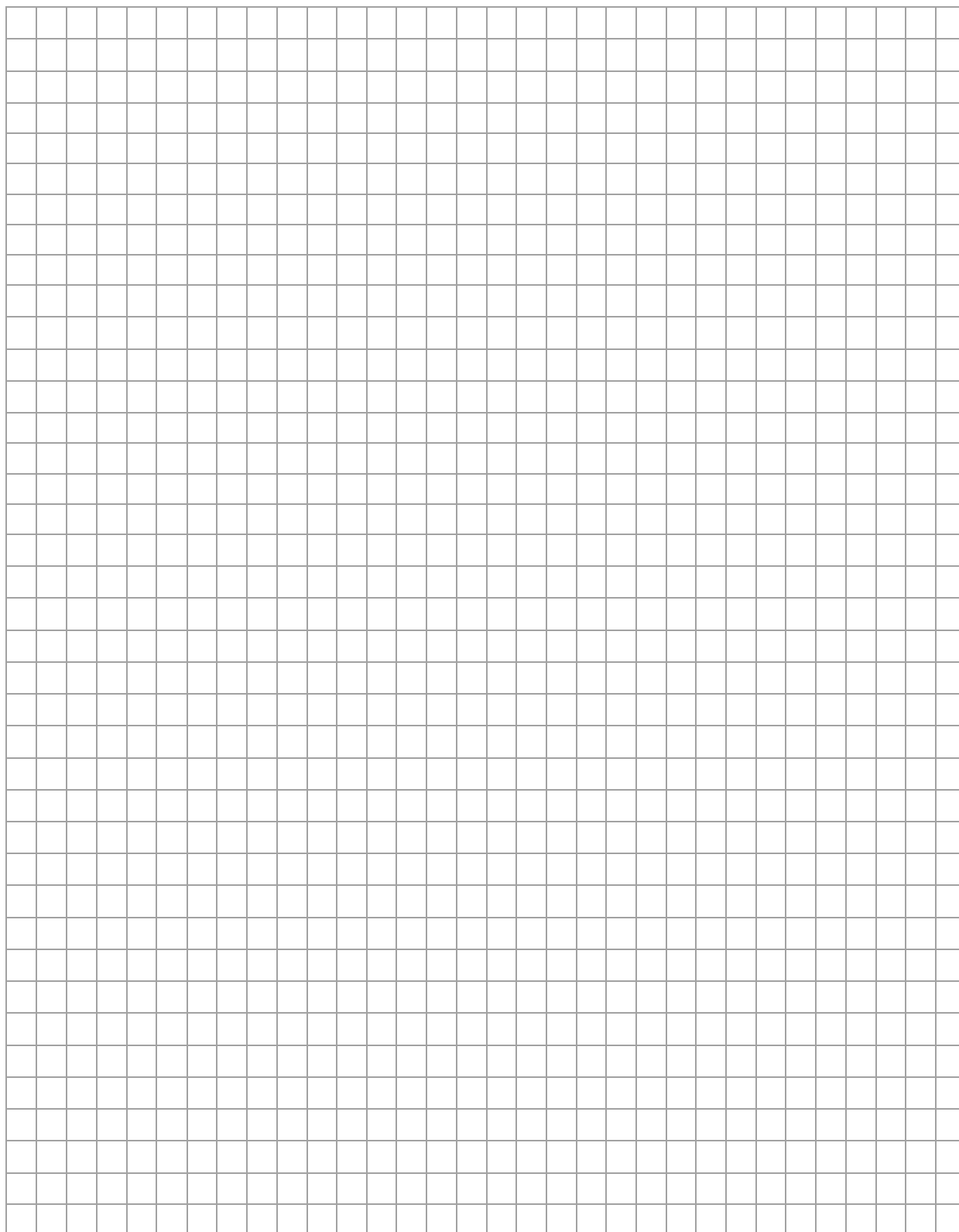
0-1-
2-3

Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Zadanie 5. (0–3)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{1-5x}{2x+6}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \in (-3, +\infty)$.

5.0–1–
2–3**Wykaż, że funkcja f jest funkcją malejącą.**

Zadanie 6. (0–3)

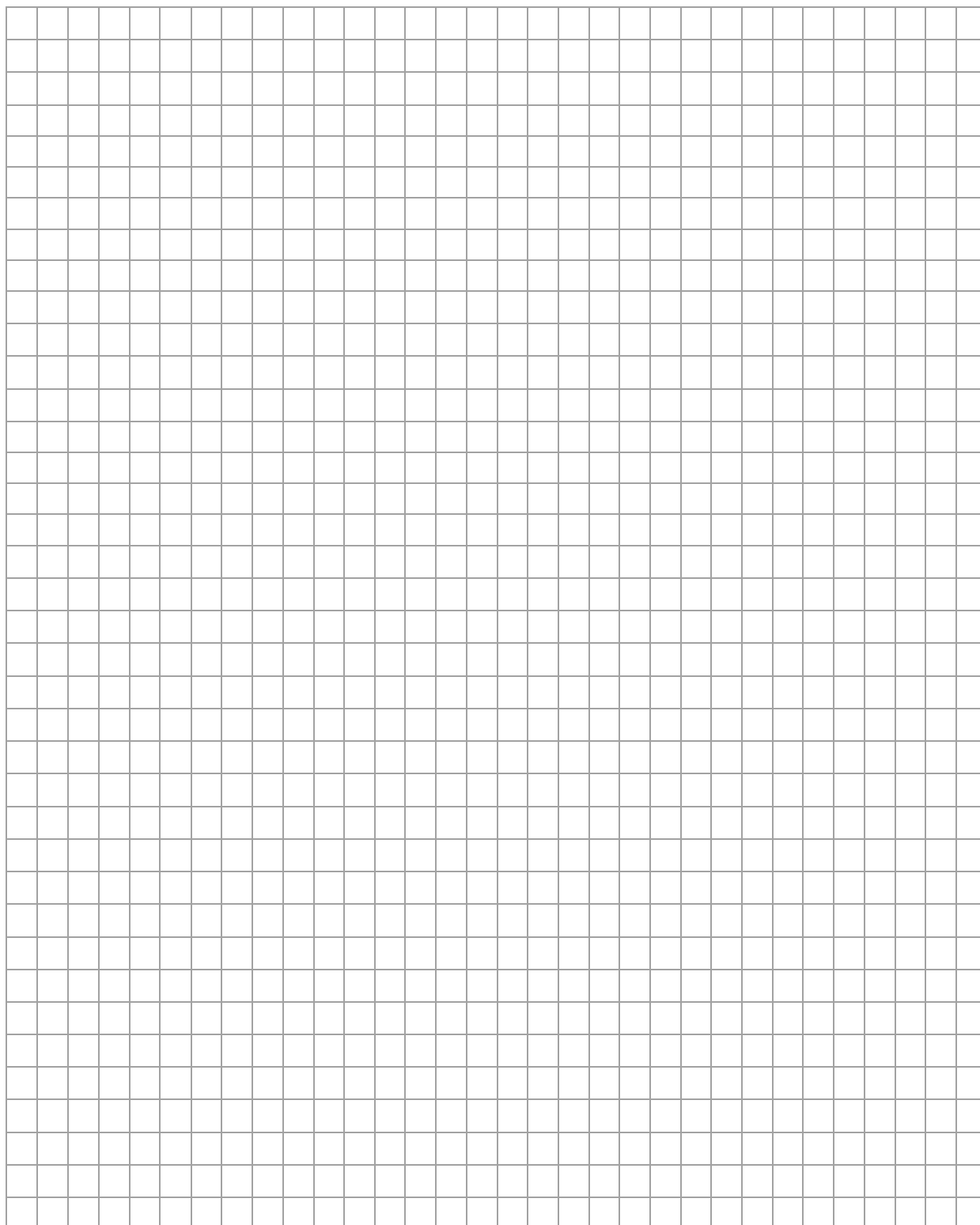
Dana jest funkcja $g(x) = (16x + 2)^8$ określona dla każdej liczby rzeczywistej x .

Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji g nachylonej do osi x pod kątem 225° .
Zapisz obliczenia.

6.

0–1–

2–3



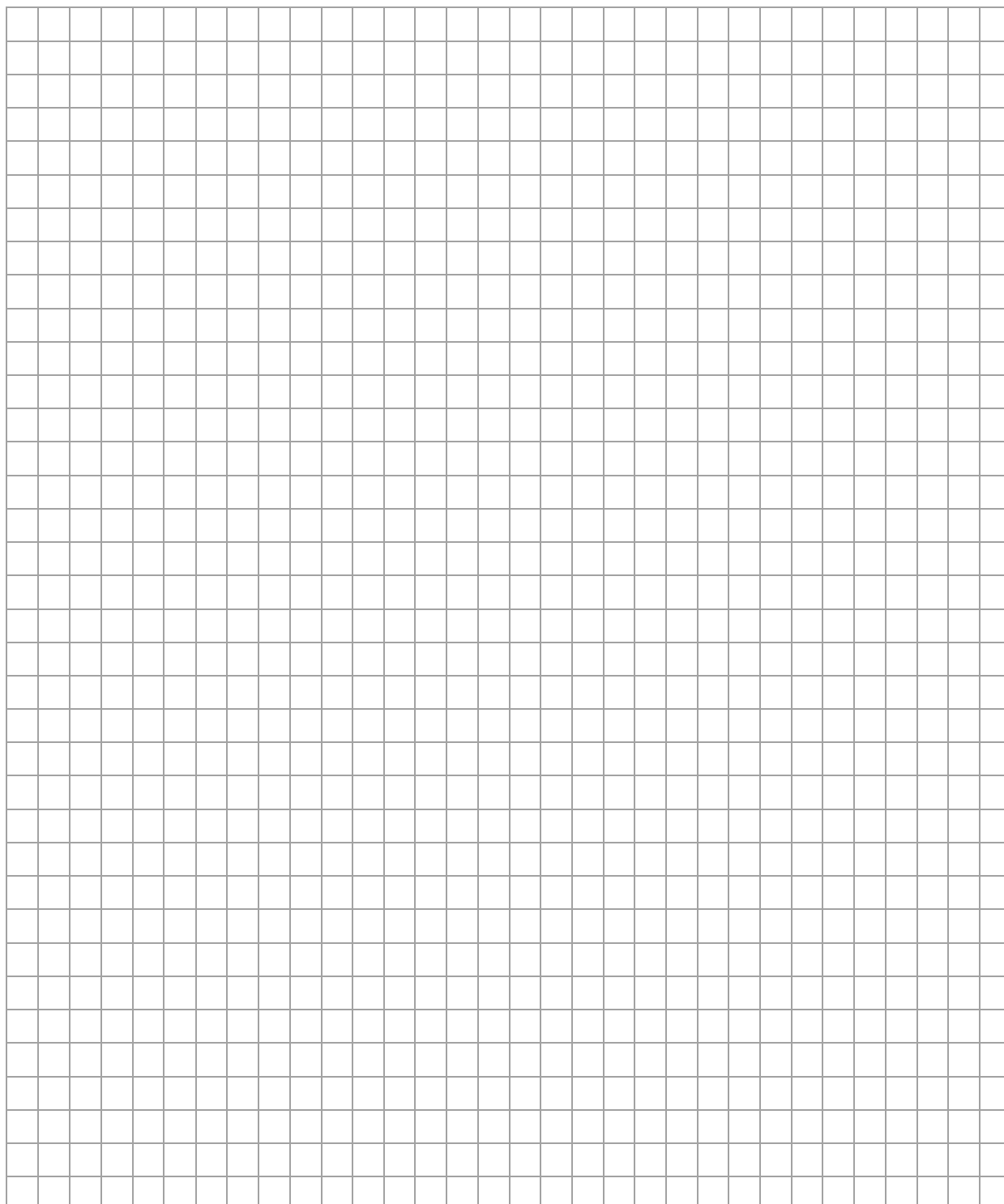
Zadanie 7. (0–3)

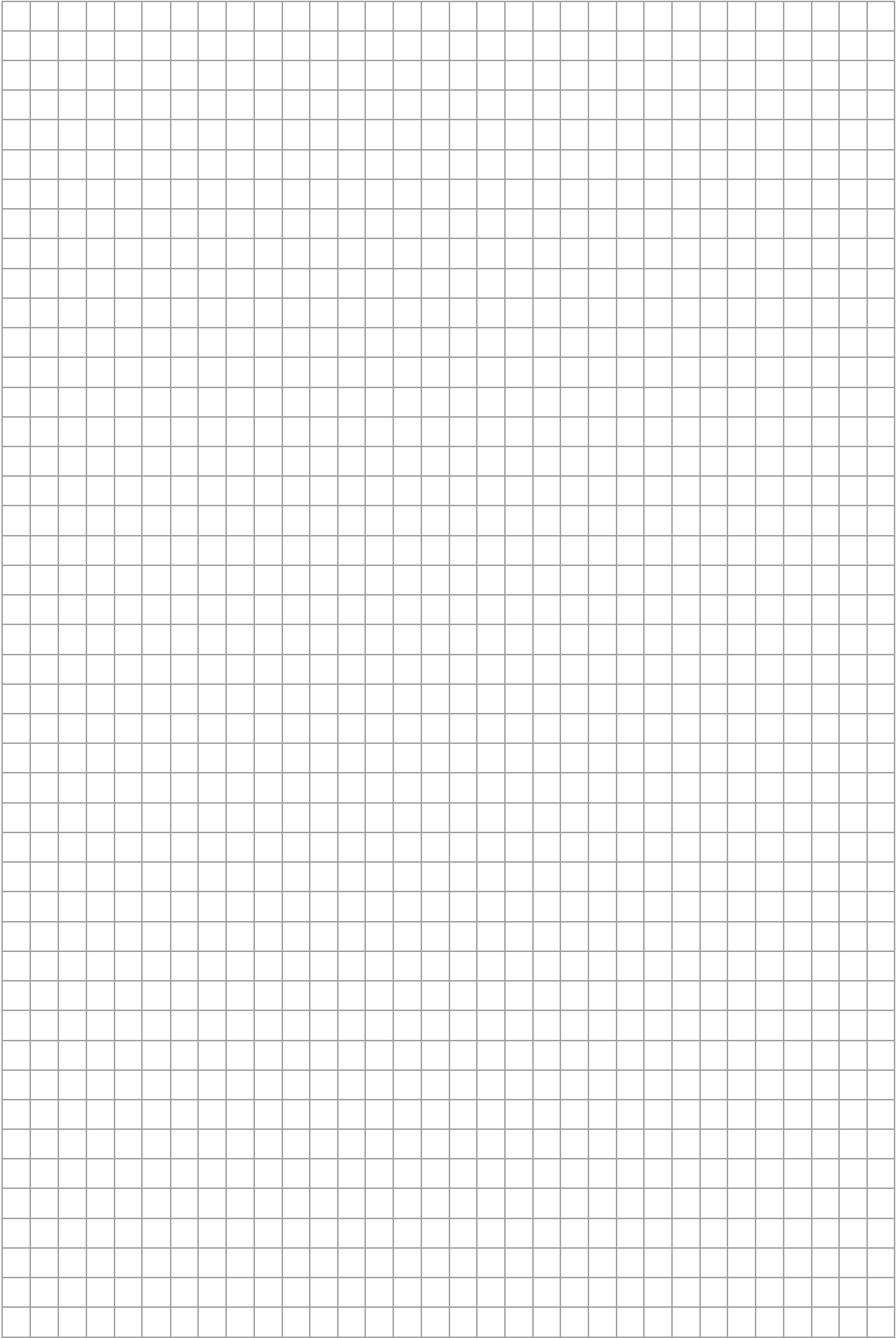
Dany jest czworokąt $ABCD$ na którym opisano okrąg. Boki tego czworokąta są równe $|AB| = |BC| = a$ oraz $|CD| = |DA| = b$. Ponadto, przekątne $|AC|$ i $|BD|$ tego czworokąta są sobie równe.

7.

0–1–

2–3

Wykaż, że $a = b$.

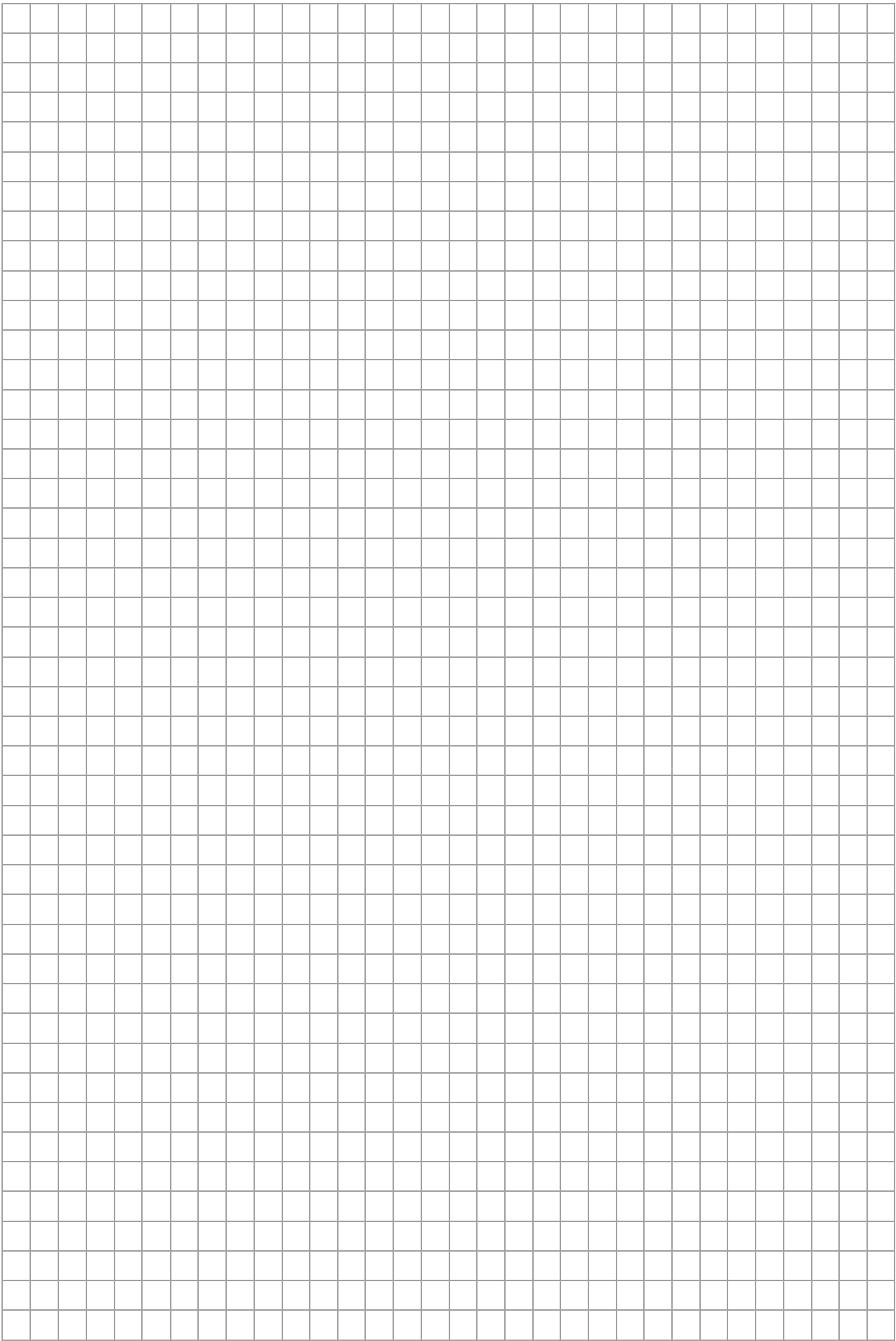


Zadanie 8. (0–4)

Trzy liczby tworzą w danej kolejności ciąg geometryczny (a_n) o wszystkich wyrazach dodatnich. Jeżeli do pierwszej z tych liczb dodamy 1 oraz od trzeciej z nich odejmiemy 12 to również otrzymamy ciąg geometryczny. Ponadto liczby te w podanej kolejności są odpowiednio: pierwszym, drugim oraz szóstym wyrazem ciągu arytmetycznego (b_n) .

Wyznacz te liczby oraz podaj iloraz ciągu geometrycznego (a_n) . Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

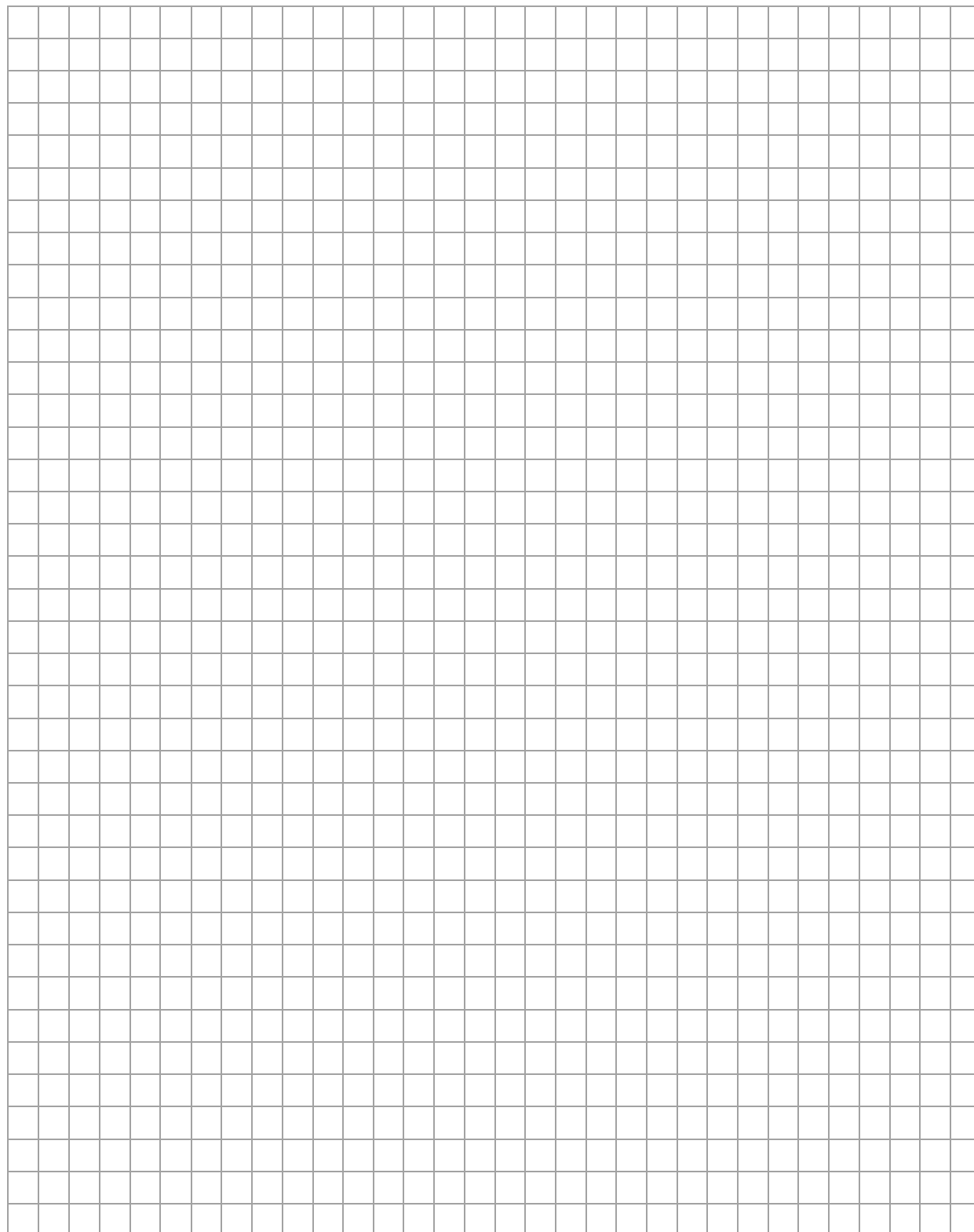


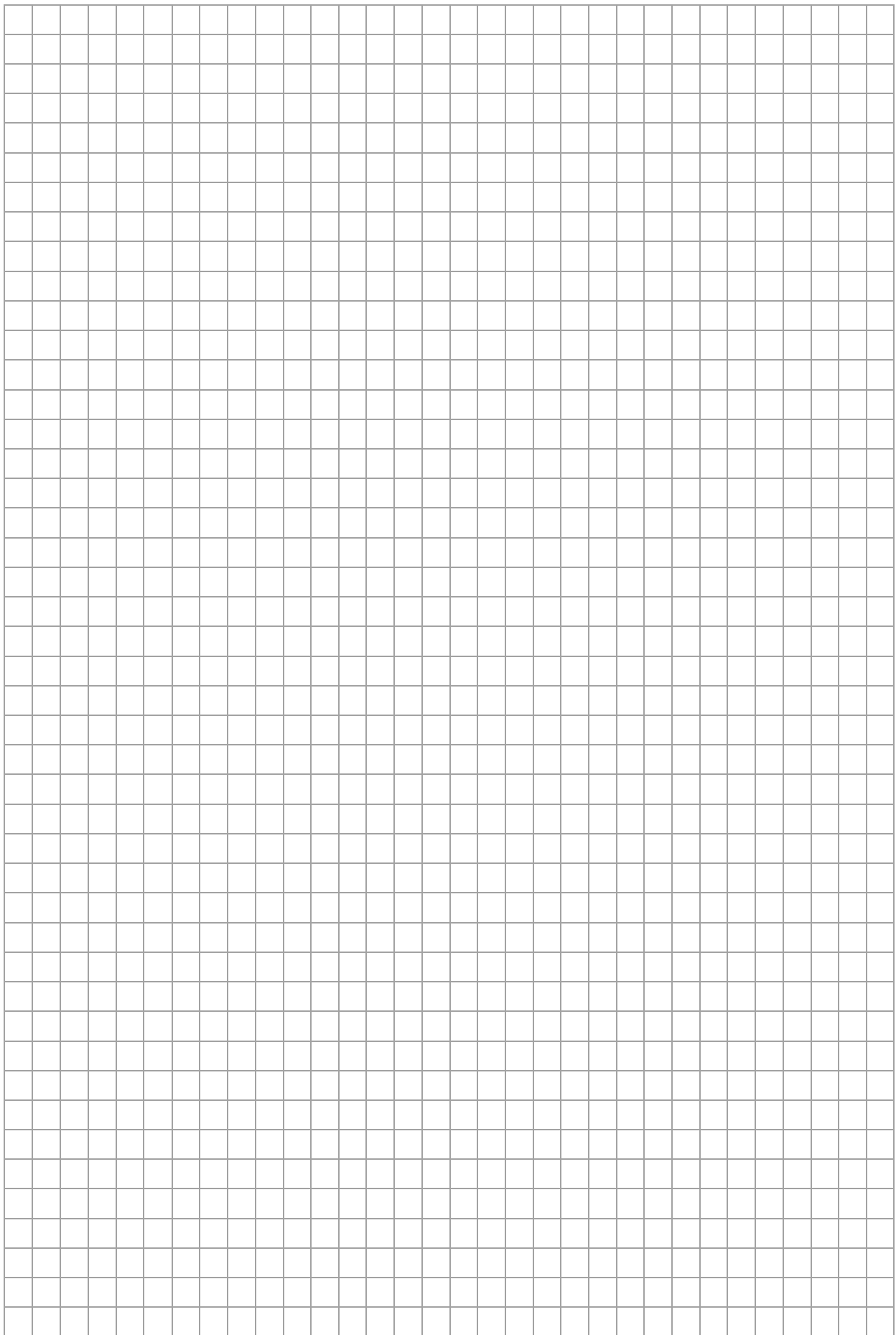
9.

0-1-
2-3-4

$$\sqrt{4x^2 + 4x + 1} + 9x^2 < 4 - \sqrt{x^4 - 4x^2 + 4}$$

Zapisz obliczenia.





Zadanie 10. (0-4)

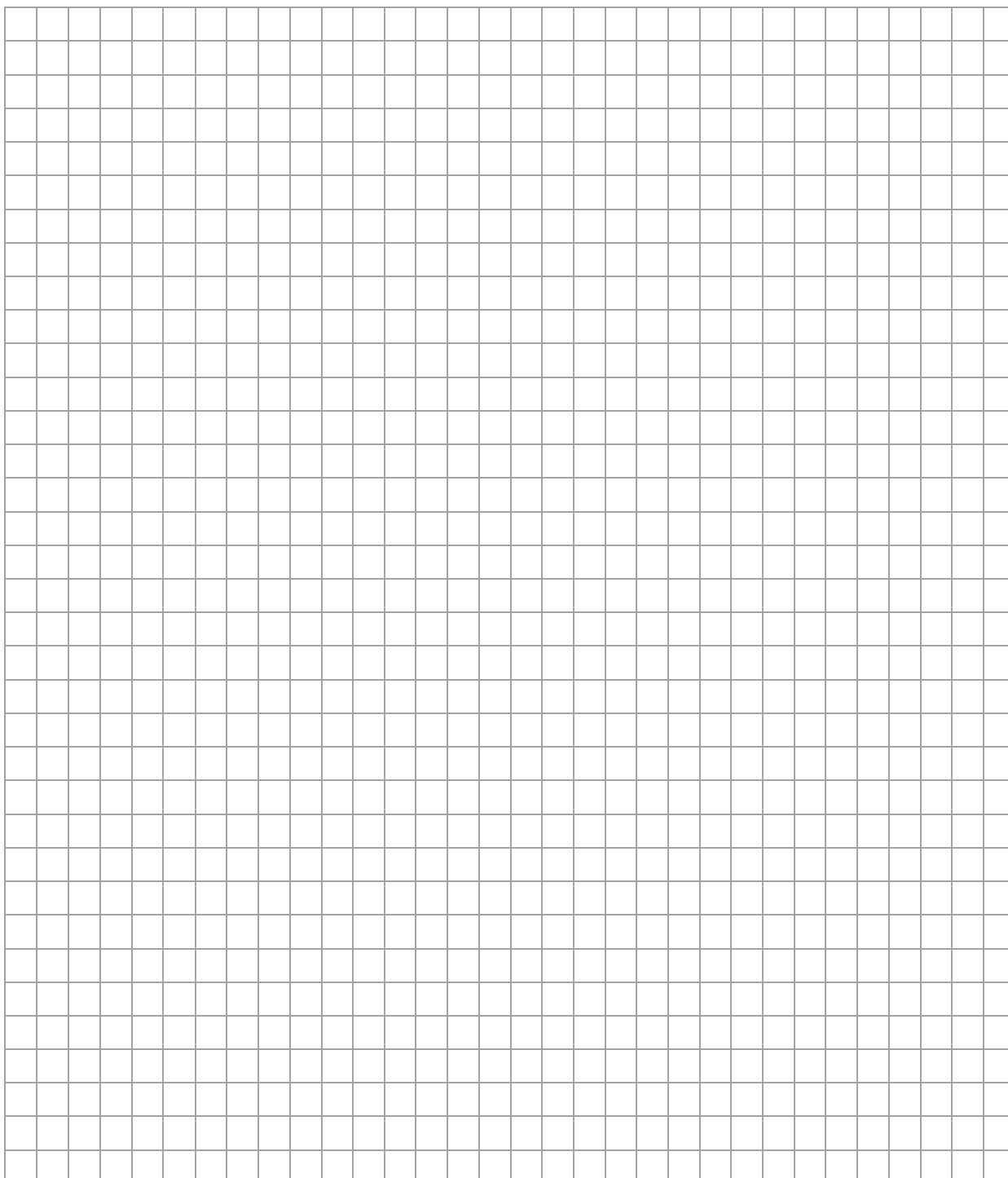
Wyznacz wszystkie wartości parametru m dla których równanie

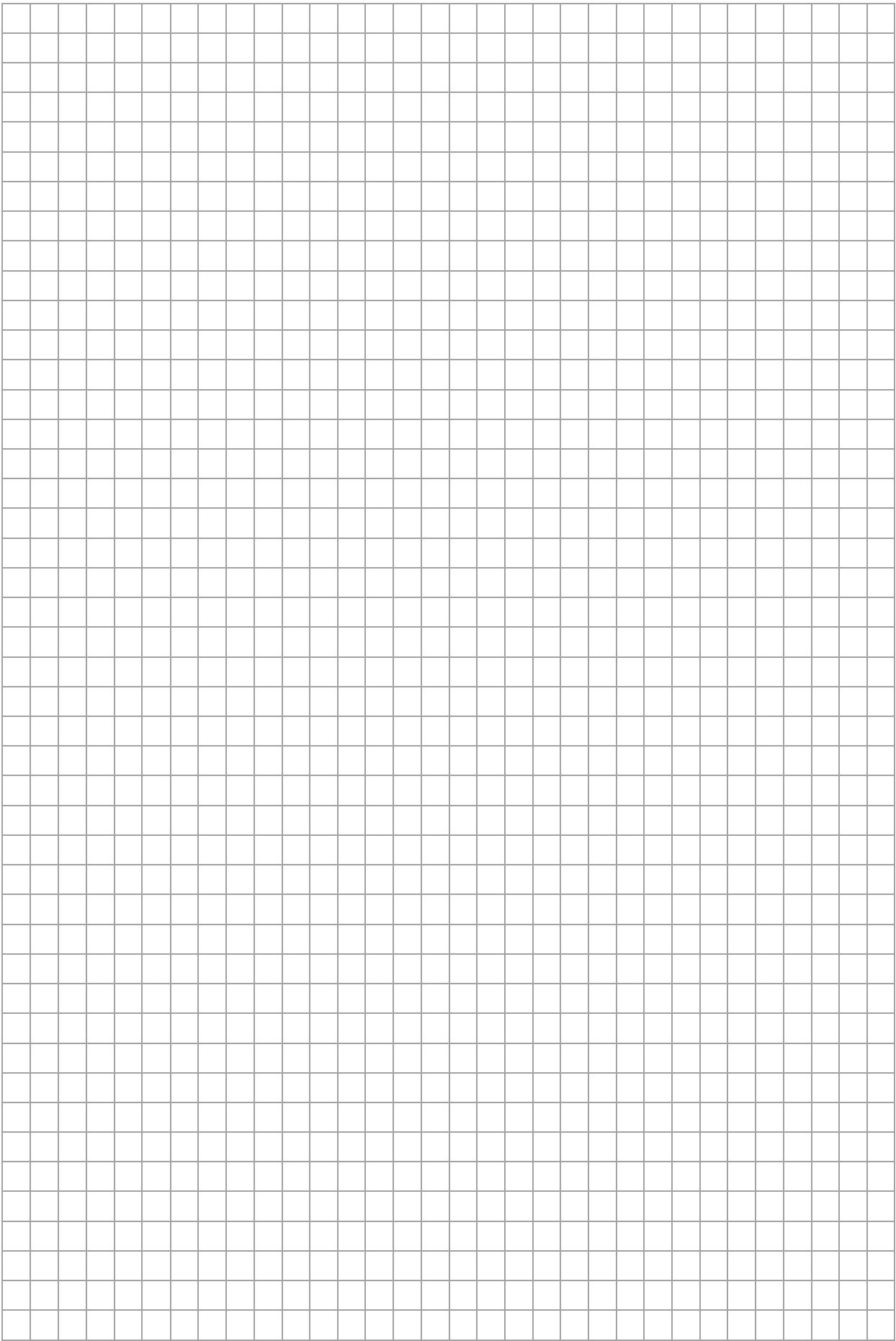
$$x^2 + m^2x + 4 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek

$$x_1^3 + x_2^3 + x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2 > 65x_1 - x_1^2 \cdot x_2 - 2x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_2^2 + 65x_2$$

Zapisz obliczenia.





Zadanie 11. (0–4)

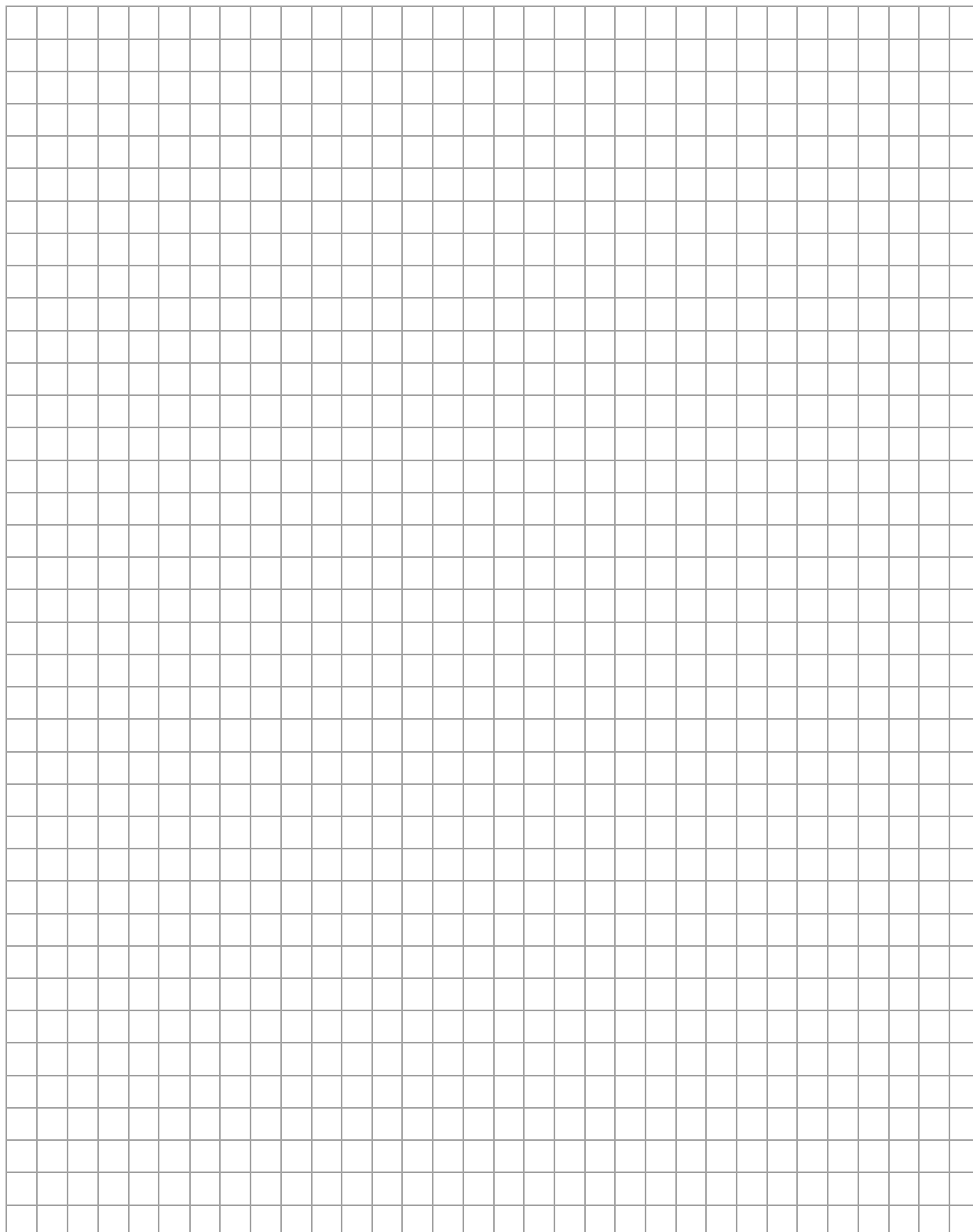
Styczna k do okręgu $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$ jest prostopadła do prostej $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$.

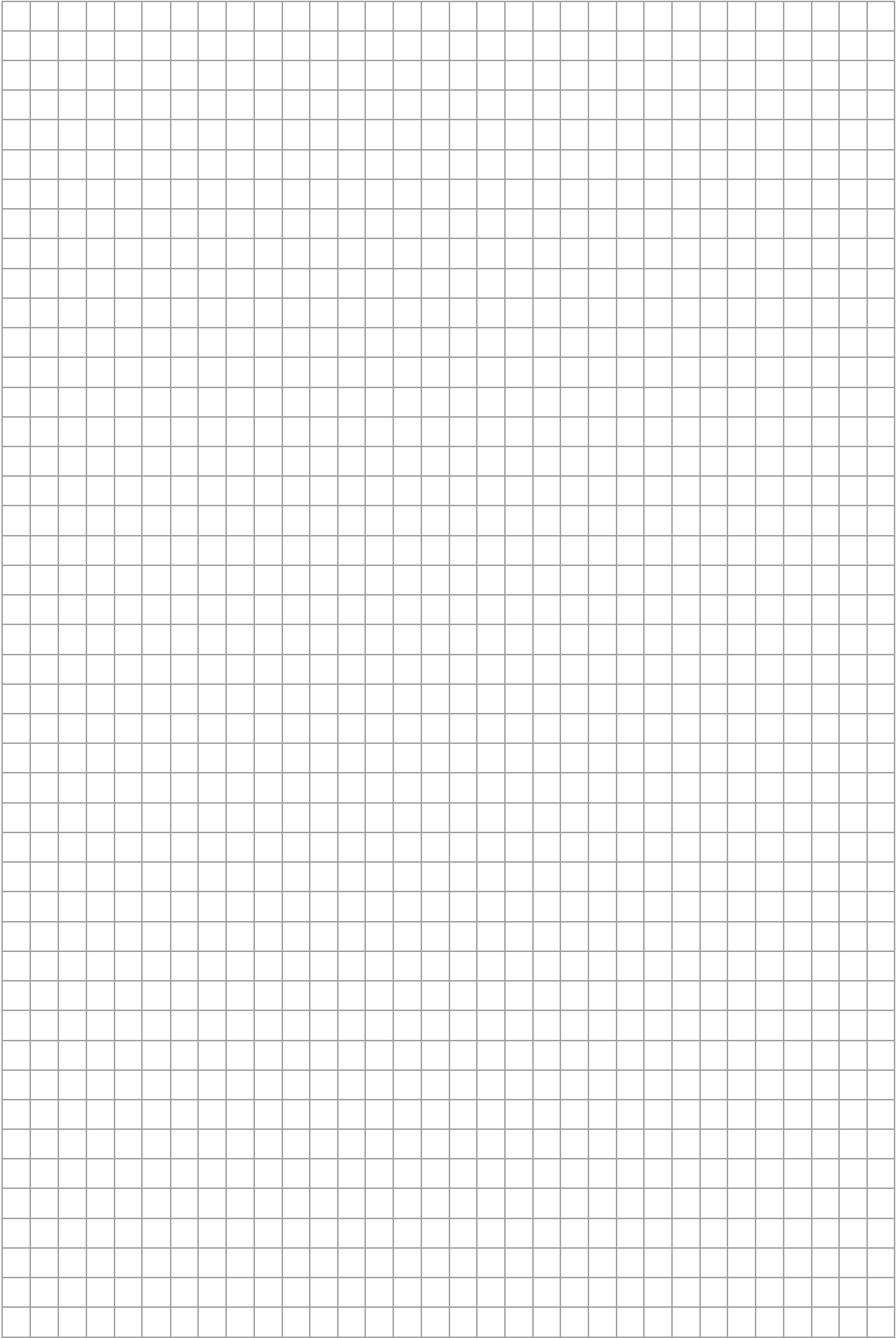
11.

0–1–

2–3–4

Oblicz pole trójkąta ograniczonego styczną k i obiema osiami układu współrzędnych.
Rozważ wszystkie przypadki. Zapisz obliczenia.





Zadanie 12. (0–5)

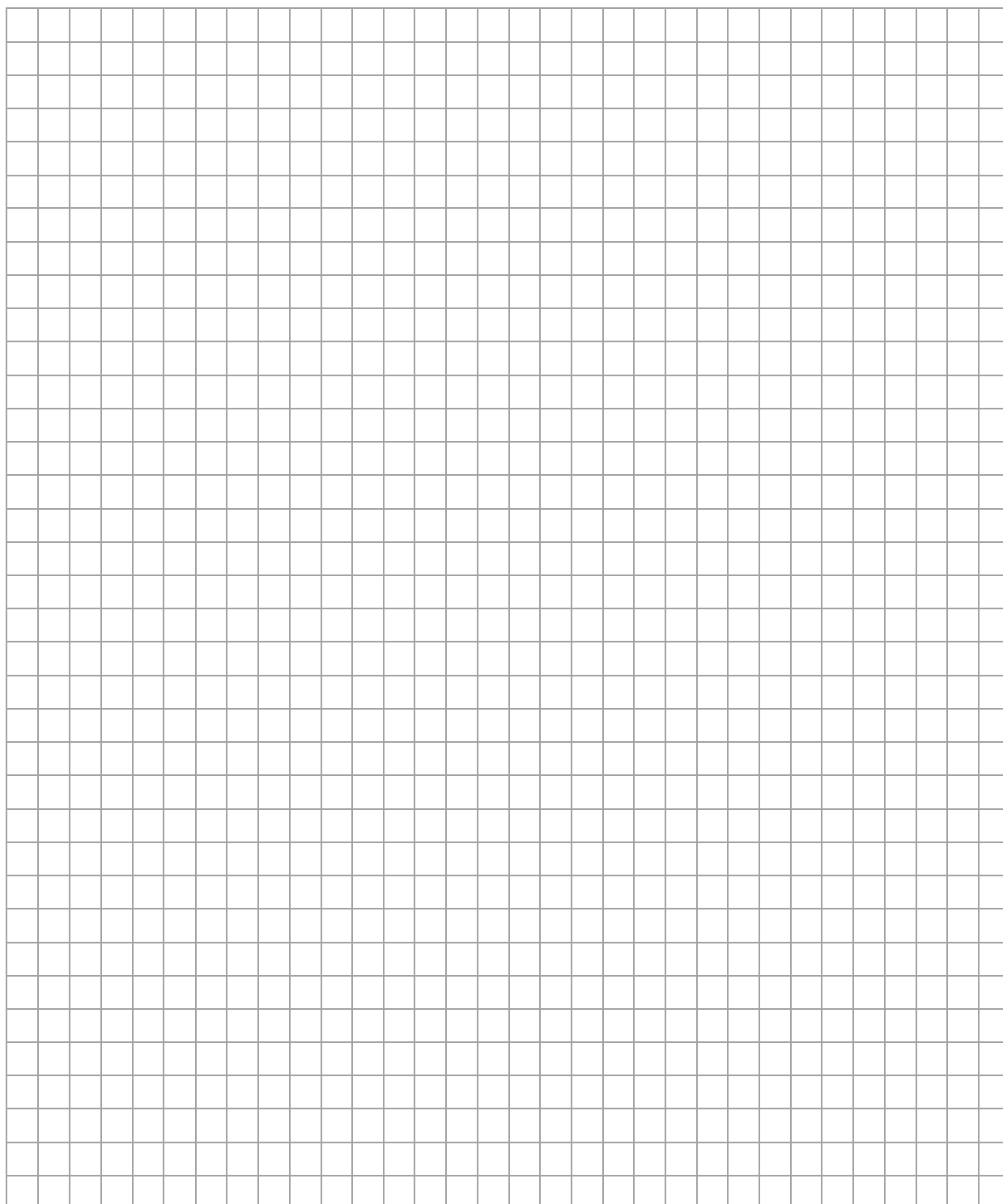
Dany jest trapez prostokątny $ABCD$, w którym $|\sphericalangle ABC| = 60^\circ$ oraz $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle ADC| = 90^\circ$.
Ramię $|BC|$ trapezu ma długość $2\sqrt{3}$ a także pole trapezu $ABCD$ wynosi $\frac{21\sqrt{3}}{2}$. Wykonujemy obrót trapezu wokół jego krótszego ramienia oraz otrzymujemy nowo powstałą bryłę.

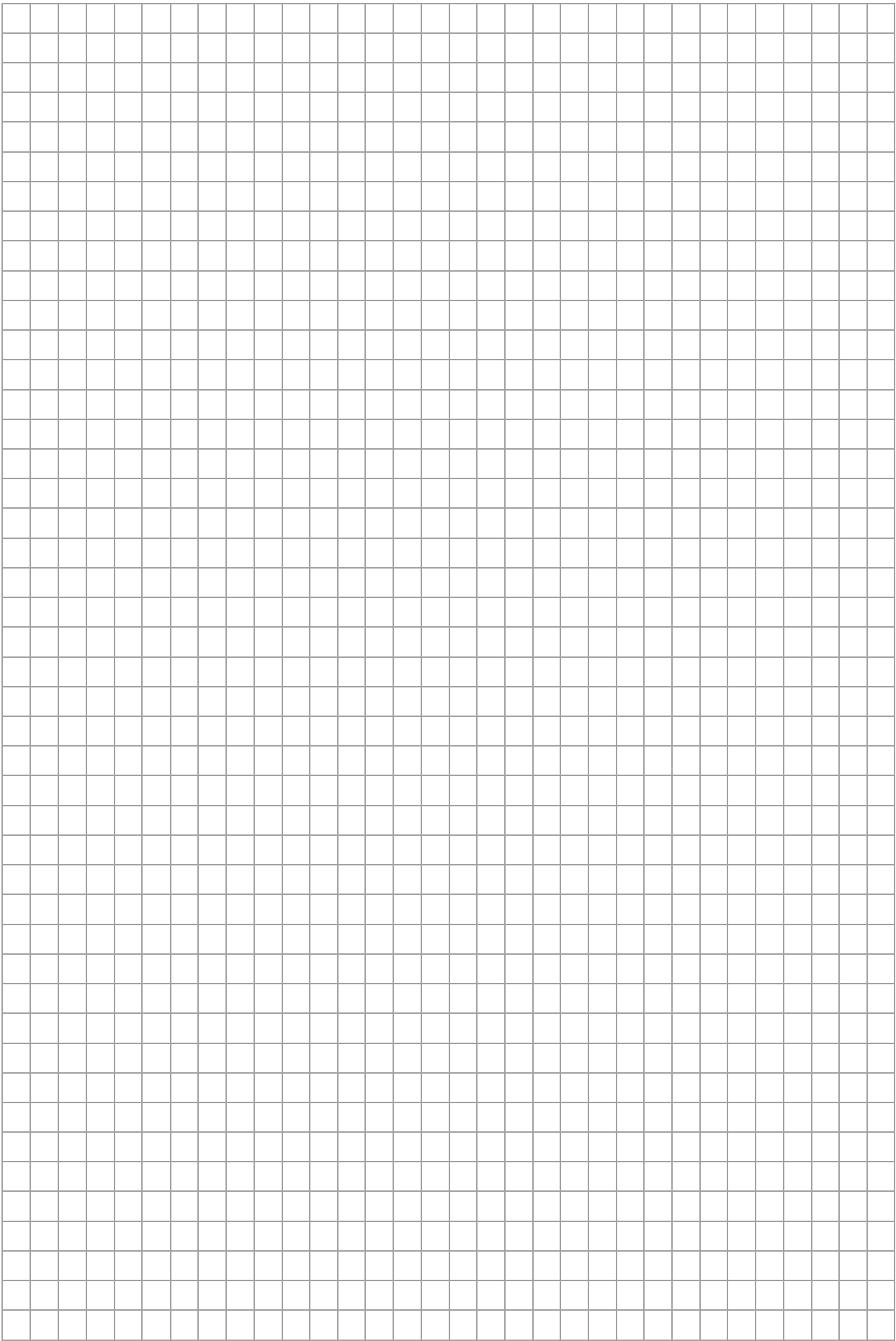
12.

0–1–

2–3–

4–5

Oblicz objętość powstałej bryły. Zapisz obliczenia.



13.
0-1-
2-3-
4-5-6

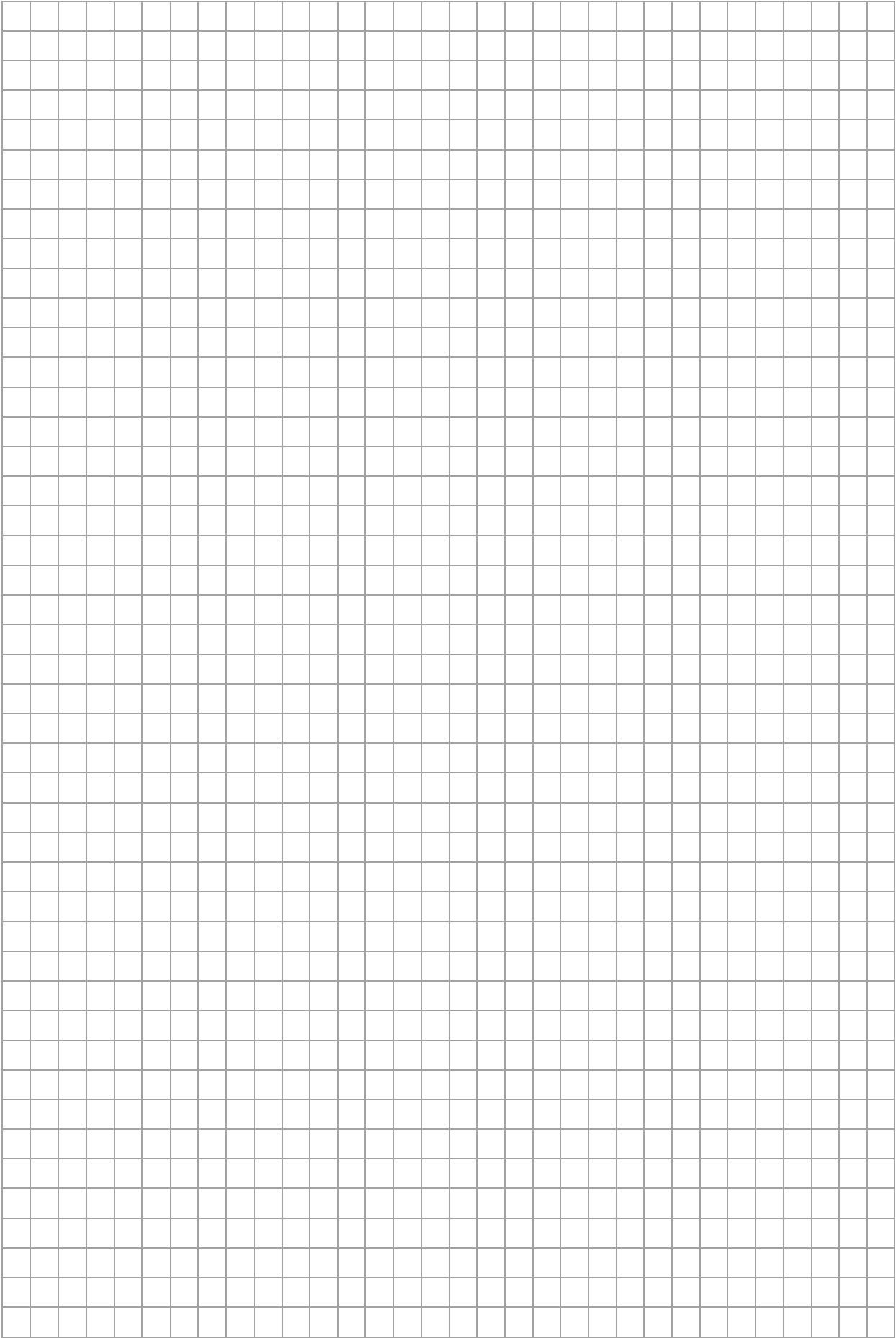
Zadanie 13. (0–6)

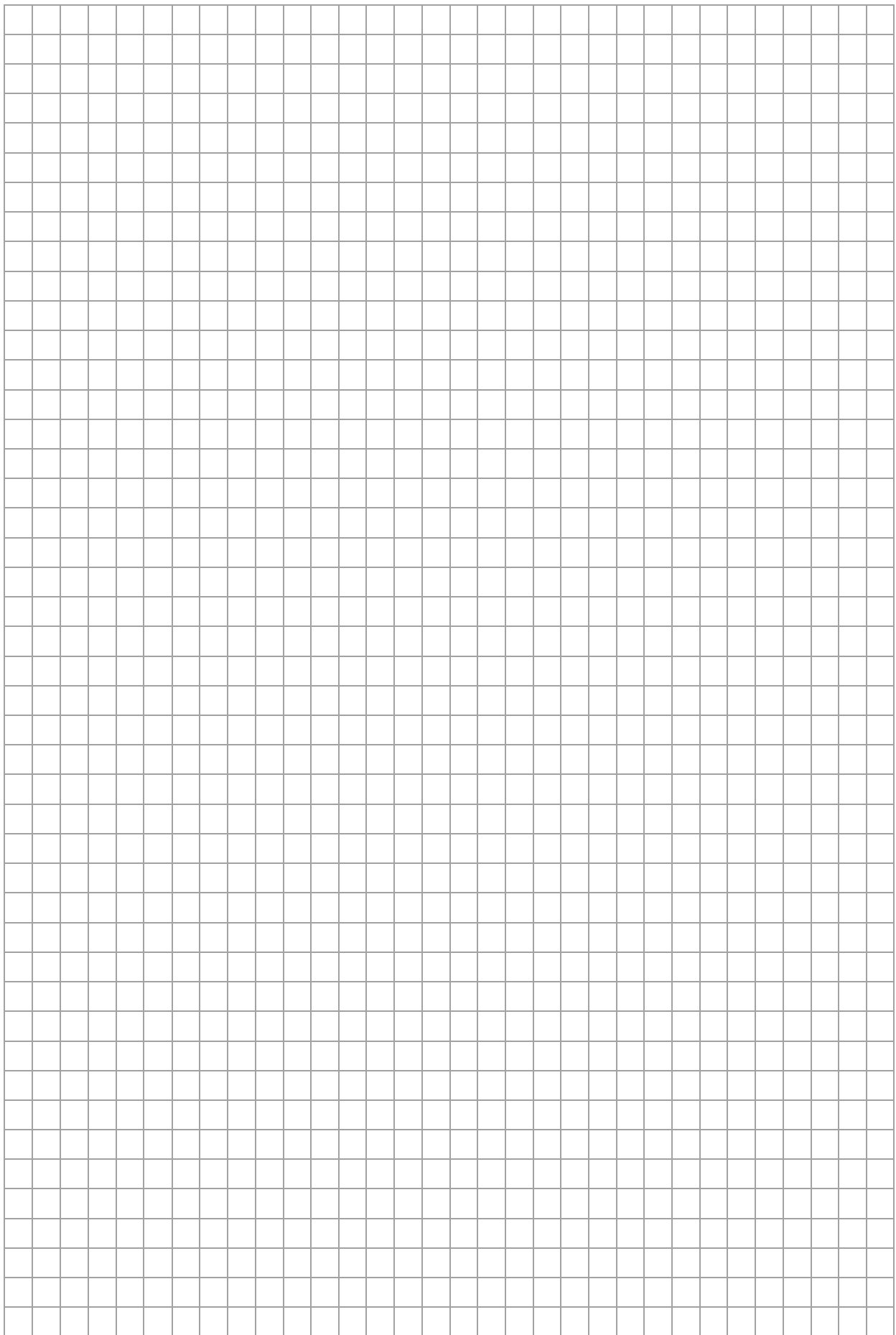
Rozwiąż równanie

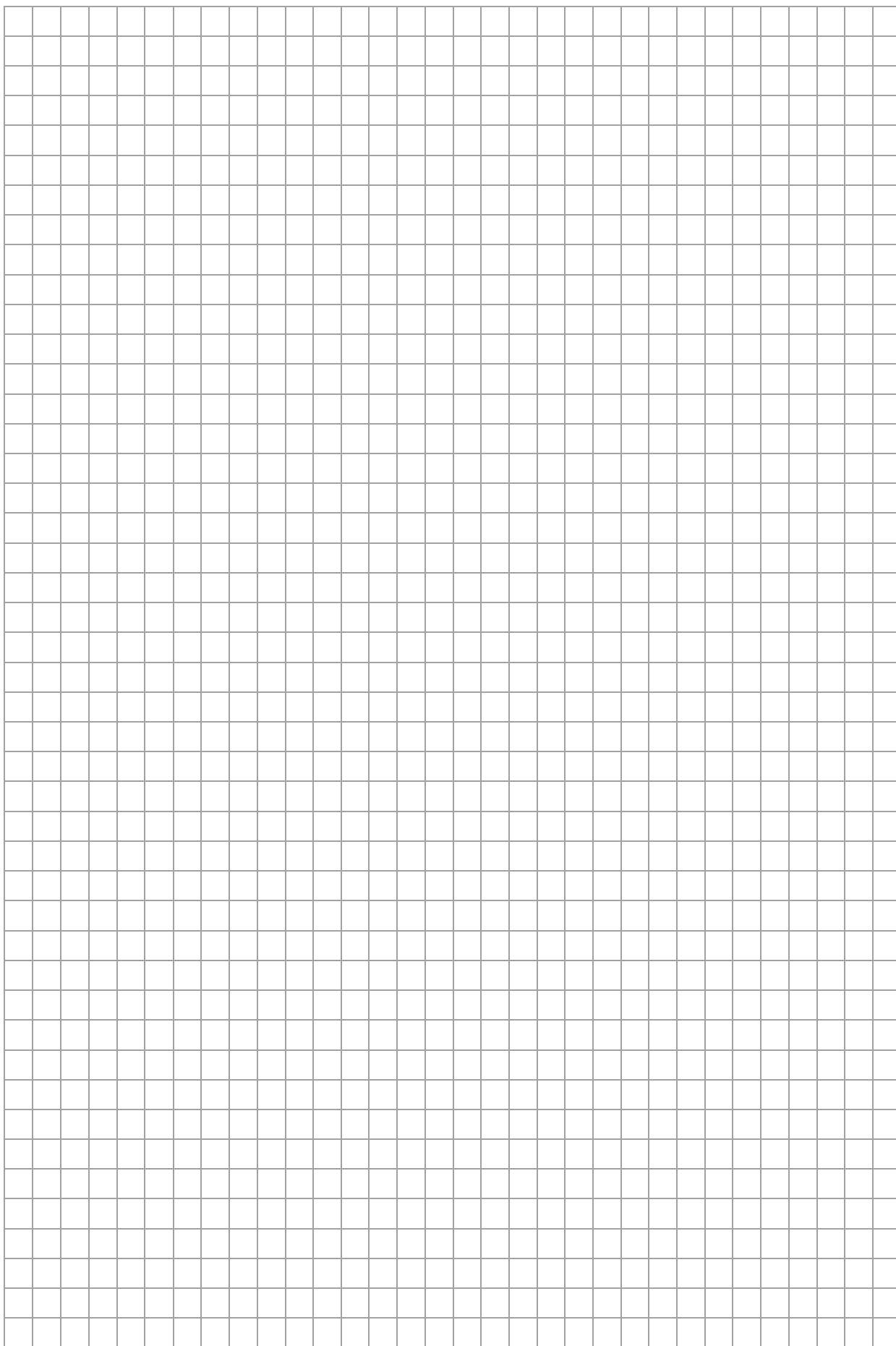
$$\cos(2x) = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$$

w zbiorze $[-3\pi, \pi]$. Zapisz obliczenia.









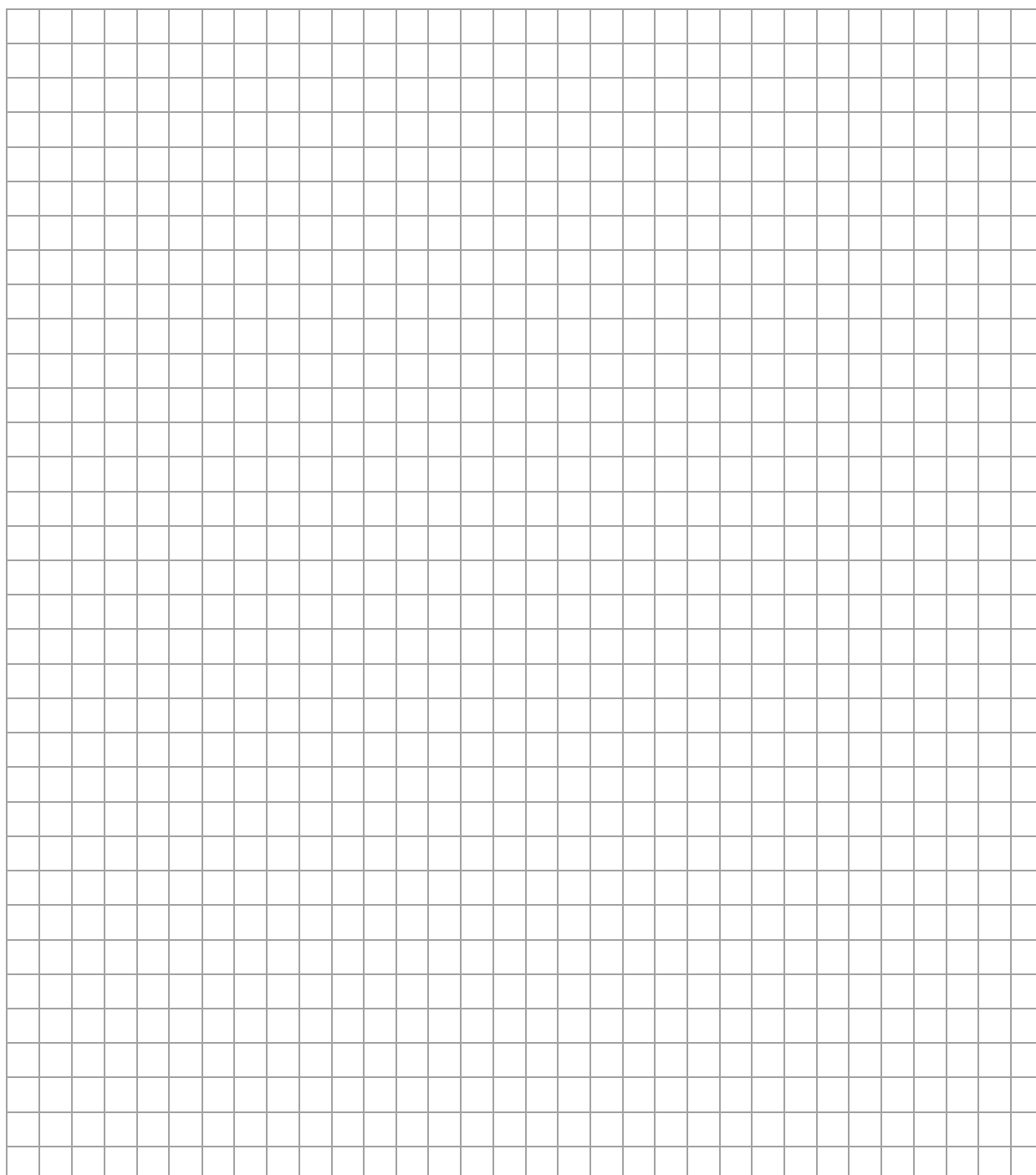
Zadanie 14.

Rozważamy wszystkie walce o polu powierzchni całkowitej 96π i promieniu podstawy mniejszym niż 6.

Zadanie 14.1. (0–2)

Wykaż, że objętość V każdego z takich walców w zależności od długości r promienia podstawy jest określona wzorem

$$V(r) = \pi(48r - r^3)$$



Zadanie 14.2. (0–3)

Objętość V walca w zależności od długości r promienia podstawy jest określona wzorem

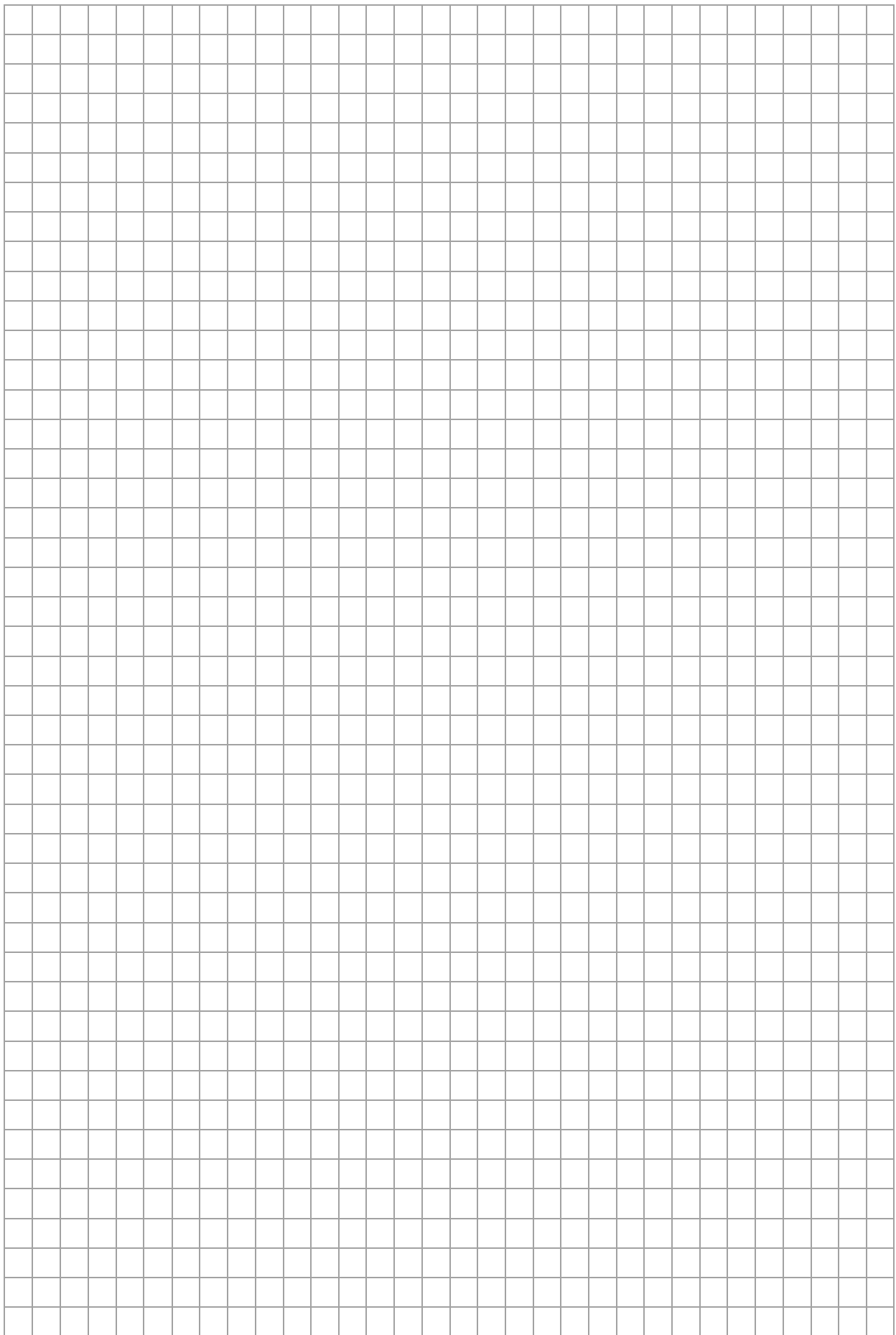
$$V(r) = \pi(48r - r^3)$$

dla $r \in (0,6)$.

Wyznacz długość r promienia podstawy tego z rozważanych walców, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość. Zapisz obliczenia.

14.2.
0-1-
2-3

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl



This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, equal-sized squares formed by thin gray lines. There are 20 columns and 20 rows of squares, creating a total of 400 square units. The background is white, and the grid lines are evenly spaced across the entire area.

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023



MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023



MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023



Matura próbna 2025

test diagnostyczny przed sesją maj 2025

<i>Rodzaj dokumentu:</i>	Zasady oceniania rozwiązań zadań
<i>Egzamin:</i>	Egzamin maturalny
<i>Przedmiot:</i>	Matematyka
<i>Poziom:</i>	Poziom rozszerzony
<i>Formy arkusza:</i>	MMAP-R0-100
<i>Termin egzaminu:</i>	15 kwietnia 2025 r.
<i>Data publikacji dokumentu:</i>	16 kwietnia 2025 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–2)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: III.R1) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ oraz nierówności wielomianowe typu: $W(x) > 0$, $W(x) \geq 0$, $W(x) < 0$, $W(x) \leq 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania;

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz podanie poprawnej odpowiedzi:

$$x \in (-\infty, -1] \cup \{1\} \text{ oraz } 1$$

1 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności oraz wynik: $x \in (-\infty, -1] \cup \{1\}$

ALBO

– wyznaczenie wszystkich liczb naturalnych spełniających nierówność: 1

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Rozwiązujemy nierówność korzystając z metody grupowania wyrazów wielomianu:

$$x^7 - x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \leq 0$$

$$x^6(x - 1) + x^4(x - 1) - x^2(x - 1) - (x - 1) \leq 0$$

$$(x - 1)(x^6 + x^4 - x^2 - 1) \leq 0$$

$$(x - 1)(x^4(x^2 + 1) - (x^2 + 1)) \leq 0$$

$$(x - 1)(x^2 + 1)(x^4 - 1) \leq 0$$

$$(x - 1)(x^2 + 1)(x^2 - 1)(x^2 + 1) \leq 0$$

$$(x - 1)^2(x + 1)(x^2 + 1)^2 \leq 0$$

Liczba 1 jest pierwiastkiem dwukrotnym, natomiast (-1) jednokrotnym, zatem odczytując z wykresu funkcji otrzymujemy zbiór rozwiązań: $x \in (-\infty, -1] \cup \{1\}$. Tylko jedna liczba naturalna spełnia podaną nierówność – jest nią $1 \in \mathbb{N}$.

Zadanie 2. (0–2)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: XI.R2) stosuje współczynnik dwumianowy (symbol Newtona) i jego własności przy rozwiązywaniu problemów kombinatorycznych.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawny wynik: $b \in \{-4, 4\}$

1 pkt – wyznaczenie piątego wyrazu rozwinięcia: $\binom{10}{4} \cdot x^6 \cdot b^4$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający zastosuje poprawną metodę oraz zapisuje, że $b = 4$ (z pominięciem drugiego rozwiązania $b = -4$) to za całe rozwiązanie otrzymuje **1 punkt**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Rozpisujemy piąty wyraz rozwinięcia $(x - b)^{10}$ przy użyciu dwumianu Newtona: $\binom{10}{4} \cdot x^6 \cdot b^4$, co po rozwinięciu daje $210x^6 \cdot b^4$. Przyrównując równania otrzymujemy:

$$210x^6 \cdot b^4 = 53760x^6$$

$$b^4 = 256$$

$$b = 4 \quad \vee \quad b = -4$$

Zatem $b \in \{-4, 4\}$.

Zadanie 3. (0–2)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.R2) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{a}$ oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych, a także twierdzenia o trzech ciągach;

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia granicy oraz poprawny wynik: 2

1 pkt – ograniczenie wyrażenia $\frac{4n^2 + \cos(3n-5)}{2n^2+1}$ dwoma wyrażeniami o wspólnej granicy:

$$\frac{4n^2-1}{2n^2+1} \leq \frac{4n^2 + \cos(3n-5)}{2n^2+1} \leq \frac{4n^2+1}{2n^2+1}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Korzystamy z twierdzenia o trzech ciągach. Ograniczamy wyrażenie $\cos(3n - 5)$ wykorzystując zbiór wartości funkcji trygonometrycznej cosinus:

$$-1 \leq \cos(3n - 5) \leq 1$$

Wtedy:

$$\frac{4n^2 - 1}{2n^2 + 1} \leq \frac{4n^2 + \cos(3n - 5)}{2n^2 + 1} \leq \frac{4n^2 + 1}{2n^2 + 1}$$

Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 1}{2n^2 + 1} = 2$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 1}{2n^2 + 1} = 2$$

a także granice tych funkcji są sobie równe, to na mocy twierdzenia o trzech ciągach

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + \cos(3n - 5)}{2n^2 + 1} = 2$$

Zadanie 4. (0–3)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: XII.R1) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe i stosuje wzór Bayesa, stosuje twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym;

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 0,14

2 pkt – poprawne zastosowanie wzoru Bayesa: $P(C|P) = \frac{0,2 \cdot 0,07}{0,37 \cdot 0,12 + 0,43 \cdot 0,09 + 0,2 \cdot 0,07}$

1 pkt – poprawne obliczenie prawdopodobieństw warunkowych $P(P|B)$, $P(P|C)$ oraz $P(C)$:

$$P(P|B) = 0,09 \text{ oraz } P(P|C) = 0,07 \text{ oraz } P(C) = 0,2$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Przyjmujemy oznaczenia:

A – zdarzenie polegające na tym, że wybrana osoba uczęszczała do ośrodka A

B – zdarzenie polegające na tym, że wybrana osoba uczęszczała do ośrodka B

C – zdarzenie polegające na tym, że wybrana osoba uczęszczała do ośrodka C

P – zdarzenie polegające na tym, że wybrana osoba zdała egzamin praktyczny za pierwszym razem

K – zdarzenie polegające na tym, że wybrana osoba zdała egzamin praktyczny za drugim lub kolejnym razem

Z polecenia:

$$P(A) = 0,37$$

$$P(B) = 0,43$$

$$P(C) = 0,2$$

$$P(P|A) = 0,12$$

$$P(P|B) = 0,09$$

$$P(P|C) = 0,07$$

Korzystamy ze wzoru Bayesa:

$$P(C|P) = \frac{0,2 \cdot 0,07}{0,37 \cdot 0,12 + 0,43 \cdot 0,09 + 0,2 \cdot 0,07} \approx 0,14$$

Prawdopodobieństwo, że wylosowana osoba zapisała się do ośrodka C w przybliżeniu do części setnych wynosi 0,14.

Zadanie 5. (0–3)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: V.3R) dowodzi monotoniczności funkcji zadanej wzorem XIII. 5R) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji.

Zasady oceniania

3 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu

2 pkt – obliczenie różnicy $f(x_1) - f(x_2) = \frac{-8(x_1 - x_2)}{(x_1 + 3)(x_2 + 3)}$ (*sposób I*)

ALBO

– poprawne określenie znaku pochodnej funkcji f w przedziale $(-3, +\infty)$:

$$f'(x) < 0 \quad (\textit{sposób II})$$

1 pkt – poprawne zapisanie założeń $x_1, x_2 \in (-3, +\infty)$ i $x_1 < x_2$

ALBO

– zapisanie założenia $x \in (-3, +\infty)$ oraz wyznaczenie pochodnej funkcji f :

$$f'(x) = \frac{-32}{(2x+6)^2} \quad (\textit{sposób II})$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Sposób I

Korzystamy z definicji oraz zapisujemy założenia:

$$x_1 < x_2 \quad \text{oraz} \quad x_1 \in (-3, +\infty) \quad \text{oraz} \quad x_2 \in (-3, +\infty)$$

Stąd po przekształceniu założeń: $x_1 - x_2 < 0$ oraz $x_1 + 3 > 0$ oraz $x_2 + 3 > 0$

$$\text{Teza: } f(x_1) > f(x_2)$$

$$\text{po przekształceniu } f(x_1) - f(x_2) > 0$$

Dowód:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1-5x_1}{2x_1+6} - \frac{1-5x_2}{2x_2+6} = \frac{-8(x_1-x_2)}{(x_1+3)(x_2+3)}$$

Z założenia $x_1 - x_2 < 0$ zatem licznik jest liczbą dodatnią.

Z założenia $x_1 + 3 > 0$ oraz $x_2 + 3 > 0$ zatem mianownik jest liczbą dodatnią.

Zatem całe wyrażenie $f(x_1) - f(x_2)$ jest liczbą dodatnią, co jest równoważne z tezą. ■

Sposób II

Niech $x \in (-3, +\infty)$. Obliczamy pochodną funkcji f korzystając z pochodnej ilorazu:

$$f'(x) = \frac{-32}{(2x+6)^2}$$

Funkcja f jest różniczkowalna w przedziale $(-3, +\infty)$, a jej pochodna jest w każdym punkcie tego przedziału ujemna. Zatem funkcja f jest w tym przedziale malejąca. ■

Zadanie 6. (0–3)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: XIII.R2) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną pochodnej; XIII.R3) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej V.R2) posługuje się złożeniami funkcji; XII.R4) stosuje wzory redukcyjne dla funkcji trygonometrycznych;

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz podanie poprawnej odpowiedzi: $y = x + \frac{25}{256}$

2 pkt – obliczenie współrzędnych punktu styczności: $P = \left(-\frac{3}{32}, \frac{1}{256}\right)$

1 pkt – wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej: $a = 1$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Równanie stycznej to równanie prostej w postaci liniowej $y = ax + b$.

Współczynnik kierunkowy prostej to tangens kąta nachylenia prostej do osi x . Zatem

$$a = \operatorname{tg} 225^\circ = \operatorname{tg}(270^\circ - 45^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

Równanie stycznej wyraża się wzorem: $y = x + b$.

Aby policzyć współrzędne punktu P styczności wykorzystujemy własność $a = f'(x_0)$.

Obliczamy pochodną funkcji f . Korzystamy z pochodnej funkcji złożonej:

$$f'(x) = 8(16x + 2)^7 \cdot 16 = 128(16x + 2)^7. \text{ Zatem:}$$

$$128(16x_0 + 2)^7 = 1$$

$$16x_0 + 2 = \frac{1}{2}$$

$$x_0 = -\frac{3}{32}$$

Wtedy $y_0 = \frac{1}{256}$. Zatem współrzędne punktu styczności to $P = \left(-\frac{3}{32}, \frac{1}{256}\right)$. Wstawiamy do równania stycznej oraz obliczamy b :

$$\frac{1}{256} = -\frac{3}{32} + b$$
$$b = \frac{25}{256}$$

Równanie stycznej nachylonej do osi x pod kątem 225° to $y = x + \frac{25}{256}$.

Zadanie 7. (0–3)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu	Zdający: VIII.11) przeprowadza dowody geometryczne

Zasady oceniania

3 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania

2 pkt – zapisanie związku $d^2 = \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$ (sposób I)

ALBO

– uzasadnienie, że $\cos |\sphericalangle BAD| = 0$ (sposób II)

ALBO

– uzasadnienie, że $|\sphericalangle BAD| = 90^\circ$ (sposób III)

1 pkt – zapisanie, że $d^2 = 2ab$ (sposób I i II)

ALBO

– skorzystanie z własności okręgu opisanego na czworokącie oraz zapisanie w formie równoważnej zależności: $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA| = 180^\circ$ albo $|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle BCD| = 180^\circ$ (sposób I i II i III)

ALBO

– zapisanie, że trójkąty ABC i CDA są równoramienne

ALBO

– zapisanie, że trójkąty BAD oraz DCB są przystające (lub podobne w skali $k = 1$)

ALBO

– zapisanie, że trójkąty BAD oraz DCB mają jednakowe pola

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

Jeżeli zdający zakłada, że czworokąt $ABCD$ jest kwadratem, z czego wynika równość $a = b$ i na tym zaprzestaje dowodzenie, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

Jeżeli zdający zakłada, że czworokąt $ABCD$ jest prostokątem, oraz równość $a = b$ wynika z równoległości boków prostokąta, i na tym zaprzestaje dowodzenie, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

Przykładowe pełne rozwiązanie*Sposób I*

Przekątne $|AC|$ i $|BD|$ oznaczmy jako d oraz kąt $|\sphericalangle ABC| = \alpha$. Korzystamy z twierdzenia Ptolemeusza – własności między przekątnymi czworokąta a jego bokami dzięki okręgowi opisanemu na danym czworokącie otrzymując:

$$d \cdot d = a \cdot b + a \cdot b$$

$$d^2 = 2ab$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkątów ABC i CDA :

$$d^2 = b^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot b \cdot \cos \alpha$$

$$d^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

Stąd

$$d^2 = 2b^2(1 - \cos \alpha)$$

$$d^2 = 2a^2(1 + \cos \alpha)$$

Wyznaczając cosinus z pierwszego równania otrzymujemy:

$$\cos \alpha = 1 - \frac{d^2}{2b^2}$$

Wstawiając do drugiego równania otrzymujemy:

$$d^2 = 2a^2 \left(2 - \frac{d^2}{2b^2} \right)$$

Przekształcając:

$$\frac{d^2}{2a^2} = \frac{4b^2 - d^2}{2b^2}$$

$$2a^2d^2 + 2b^2d^2 = 8a^2b^2$$

$$a^2d^2 + b^2d^2 = 4a^2b^2$$

$$d^2(a^2 + b^2) = 4a^2b^2$$

$$d^2 = \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

Po przyrównaniu z $d^2 = 2ab$

$$2ab = \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

$$1 = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

$$a^2 + b^2 = 2ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 0$$

$$(a - b)^2 = 0$$

$$a - b = 0$$

$$a = b \quad \blacksquare$$

Sposób II

Przekątne $|AC|$ i $|BD|$ oznaczmy jako d oraz kąt $|\sphericalangle BAD| = \beta$. Korzystamy z twierdzenia Ptolemeusza otrzymując:

$$d^2 = 2ab$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkątów BAD i DCB :

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \beta$$

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(180^\circ - \beta)$$

Po uproszczeniu

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \beta$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \beta$$

Po obu stronnym odjęciu równań otrzymujemy

$$-4ab \cdot \cos \beta = 0$$

Z tego wynika, że:

$$a = 0 \quad \text{lub} \quad b = 0 \quad \text{lub} \quad \cos \beta = 0$$

Jako, iż a i b to długości boków, to muszą być one dodatnie ($a, b > 0$). Z tego wniosek, że

$$\cos \beta = 0$$

Zatem z twierdzenia cosinusów:

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot 0$$

$$d^2 = a^2 + b^2$$

Po przyrównaniu z $d^2 = 2ab$

$$a^2 + b^2 = 2ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 0$$

$$(a - b)^2 = 0$$

$$a - b = 0$$

$$a = b \quad \blacksquare$$

Sposób III

Z własności okręgu opisanego na czworokącie wynika: $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA| = 180^\circ$ oraz $|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle BCD| = 180^\circ$.

Trójkąty ABC oraz CDA są równoramienne ($|AB| = |BC| = a$ oraz $|CD| = |DA| = b$), zatem miary kątów przy ich podstawach (przekątnych czworokąta) są sobie równe:

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BCA| \quad \text{oraz} \quad |\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle DCA|.$$

$$\text{Ponadto, } |\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle DAC| \quad \text{oraz} \quad |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle DCA|.$$

$$\text{Zatem } |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle DAC| + |\sphericalangle DCA| = 180^\circ$$

$$\text{Z tego wynika, że } |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle DAC| + |\sphericalangle DAC| = 180^\circ$$

$$\text{Wtedy } 2(|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle DAC|) = 180^\circ$$

oraz $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle BAD|$

więc $2|\sphericalangle BAD| = 180^\circ$

z czego $|\sphericalangle BAD| = 90^\circ$.

Ponieważ $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BCD| = 90^\circ$ oraz przekątne $|AC|$ i $|BD|$ są sobie równe, to czworokąt $ABCD$ jest prostokątem, a w prostokącie przeciwległe boki są równe, więc $a = b$. ■

Komentarz do zadania

Choć zadana teza jest klarowna oraz warunki zadania sugerują jej prawdziwość, tak trudnością zadania jest jej udowodnienie. Może odbyć się to poprzez użycie wzrów i twierdzeń z planimetrii czy trygonometrii, bądź poprzez przedstawienie słownego toku rozumowania, natomiast zakładanie długości pewnych boków czy też miar kątów jest uznawane za niepoprawne.

Zadanie 8. (0–4)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.6) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań [...].

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawny wynik: (3,12,48) **oraz** $q = 4$

3 pkt – wyznaczenie liczb tworzących ciąg geometryczny: (3,12,48)

2 pkt – wyznaczenie różnicy ciągu arytmetycznego w zależności od pierwszego wyrazu oraz uzależnienie wszystkich wyrazów ciągu od pierwszego wyrazu ciągu

$$\text{arytmetycznego: } r = 3b_1 \text{ i } a_1 = b_1, a_2 = 4b_1, a_3 = 16b_1$$

1 pkt – uzależnienie wszystkich wyrazów ciągu od pierwszego wyrazu ciągu arytmetycznego oraz różnicy: $a_1 = b_1, a_2 = b_1 + r, a_3 = b_1 + 5r$

ALBO

– zapisanie związków na trzy kolejne wyrazy ciągu (geometrycznego):

$$a_2^2 = a_1 a_3 \text{ oraz } a_2^2 = (a_1 + 1)(a_3 - 12)$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Wyrażamy wyrazy ciągu (a_n) w zależności od wyrazów ciągu (b_n) :

$$a_1 = b_1$$

$$a_2 = b_2 = b_1 + r$$

$$a_3 = b_6 = b_1 + 5r$$

Korzystamy z zależności $a_2^2 = a_1 a_3$:

$$(b_1 + r)^2 = b_1 \cdot (b_1 + 5r)$$

Z tego otrzymujemy $r = 0$ lub $r = 3b_1$. Odrzucamy $r = 0$ gdyż ciąg arytmetyczny (b_n) nie jest stały. Wtedy:

$$a_1 = b_1$$

$$a_2 = b_1 + 3b_1 = 4b_1$$

$$a_3 = b_1 + 15b_1 = 16b_1$$

Korzystamy z zależności $a_2^2 = (a_1 + 1)(a_3 - 12)$:

$$(4b_1)^2 = (b_1 + 1)(16b_1 - 12)$$

otrzymując $b_1 = 3$. Zatem:

$$a_1 = b_1 = 3$$

$$a_2 = 4b_1 = 12$$

$$a_3 = 16b_1 = 48$$

Wyznaczamy iloraz ciągu (a_n) :

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{3} = 4$$

Ciąg geometryczny (a_n) to $(3, 12, 48)$ a jego iloraz równa się $q = 4$.

Zadanie 9. (0–4)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2 . III.R4) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o stopniu trudności nie większym niż: $2 x+3 +3 x-1 =13$, $ x+2 +2 x-3 <11$

Zasady oceniania

- 4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$
 3 pkt – poprawne rozwiązanie trzech z czterech rozważanych przypadków
 2 pkt – poprawne rozwiązanie dwóch z czterech rozważanych przypadków
 1 pkt – poprawne rozwiązanie jednego z czterech rozważanych przypadków
 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zauważamy wzory skróconego mnożenia pod pierwiastkami oraz przekształcamy nierówność przy użyciu własności $\sqrt{a^2} = |a|$:

$$\begin{aligned}\sqrt{4x^2+4x+1}+9x^2 &< 4-\sqrt{x^4-4x^2+4} \\ \sqrt{(2x+1)^2}+9x^2 &< 4-\sqrt{(x^2-2)^2} \\ |2x+1|+9x^2 &< 4-|x^2-2|\end{aligned}$$

Rozpisujemy nierówność na cztery przypadki oraz rozwiązujemy cztery nierówności kwadratowe:

$$\begin{array}{ll}1^\circ & -(2x+1)+9x^2+x^2-2 < 4 \quad \text{oraz} \quad x \in (-\infty; -\sqrt{2}] \\2^\circ & -(2x+1)+9x^2-(x^2-2) < 4 \quad \text{oraz} \quad x \in \left(-\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\right) \\3^\circ & 2x+1+9x^2-(x^2-2) < 4 \quad \text{oraz} \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right) \\4^\circ & 2x+1+9x^2+x^2-2 < 4 \quad \text{oraz} \quad x \in [\sqrt{2}, +\infty)\end{array}$$

Po rozwiązaniu otrzymujemy

$$\begin{array}{ll}1^\circ & x \in \left(\frac{1-\sqrt{71}}{10}, \frac{1+\sqrt{71}}{10}\right) \quad \text{oraz} \quad x \in (-\infty; -\sqrt{2}] \\2^\circ & x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \quad \text{oraz} \quad x \in \left(-\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\right) \\3^\circ & x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \quad \text{oraz} \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)\end{array}$$

$$4^{\circ} \quad x \in \left(\frac{-1-\sqrt{51}}{10}, \frac{-1+\sqrt{51}}{10} \right) \quad \text{oraz} \quad x \in [\sqrt{2}, +\infty)$$

Łączymy wszystkie warunki ze sobą otrzymując

$$1^{\circ} \quad x \in \emptyset$$

$$2^{\circ} \quad x \in \emptyset$$

$$3^{\circ} \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right)$$

$$4^{\circ} \quad x \in \emptyset$$

Rozwiązaniem nierówności jest suma wszystkich warunków:

$$x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right)$$

Zadanie 10. (0–4)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: III.R3) stosuje wzory Viète’a dla równań kwadratowych; III.R5) 5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności: wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają określone znaki bądź należą do określonego przedziału, wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów; III.R6) rozwiązuje równania wielomianowe, które dają się doprowadzić do równania kwadratowego, w szczególności równania dwukwadratowe;

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawny wynik: $m \in (-3, -2) \cup (2, 3)$

3 pkt – zastosowanie wzorów Viète’a i przekształcenie nierówności do postaci iloczynowej czynników możliwie najniższego stopnia: $m^2(m^2 + 8)(m - 3)(m + 3) < 0$ **ORAZ** rozwiązanie warunku $\Delta > 0$: $m \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

2 pkt – przedstawienie nierówności w postaci, w której możemy zastosować wzory Viète’a, np. $(x_1 + x_2)^3 + (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2(x_1 + x_2) - 64(x_1 + x_2)$ **ORAZ** rozwiązanie warunku $\Delta > 0$: $m \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

1 pkt – zapisanie sumy i iloczynu miejsc zerowych przy użyciu wzorów Viète’a:

$$x_1 + x_2 = -m^2 \quad \text{ i } \quad x_1 \cdot x_2 = 4 \quad \text{ ORAZ } \quad \text{rozwiązanie warunku } \Delta > 0:$$

$$m \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający nie rozwiązuje warunku $\Delta > 0$ albo rozwiązuje go błędnie, natomiast poprawnie rozwiązuje pozostałą część zadania i otrzymuje prawidłowy wynik tej części zadania, to za całe rozwiązanie może otrzymać maksymalnie **2 punkty**.

Nie przyznaje się punktów za rozwiązanie jedynie warunku $\Delta > 0$.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Aby równanie miało dwa różne rozwiązania rzeczywiste, to wyróżnik kwadratowy musi być dodatni $\Delta > 0$:

$$m^4 - 16 > 0$$

Po rozwiązaniu otrzymujemy

$$m \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

Przekształcamy nierówność

$$x_1^3 + x_2^3 + x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2 > 65x_1 - x_1^2 \cdot x_2 - 2x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_2^2 + 65x_2$$

do postaci, w której możemy zastosować wzory Viète'a:

$$(x_1 + x_2)^3 + (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2(x_1 + x_2) - 64(x_1 + x_2) > 0$$

Zapisujemy wzory przy użyciu parametru m :

$$x_1 + x_2 = -m^2$$

$$x_1 \cdot x_2 = 4$$

Wstawiamy do nierówności. Po uporządkowaniu wyrazów otrzymujemy

$$-m^6 + m^4 + 72m^2 > 0$$

$$-m^2(m^4 - m^2 - 72) > 0$$

Rozwiązujemy nierówność przy użyciu zmiennej dwukwadratowej. W końcowym etapie nierówność przyjmuje postać iloczynową:

$$m^2(m^2 + 8)(m - 3)(m + 3) < 0$$

Rozwiązaniem nierówności jest przedział $m \in (-3, 3) \setminus \{0\}$.

Ostateczną odpowiedzią jest część wspólna zbiorów

$$m \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \text{ i } m \in (-3, 3) \setminus \{0\}:$$

$$m \in (-3, -2) \cup (2, 3)$$

Zadanie 11. (0–4)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IX.R4) wyznacza równanie prostej prostopadłej do zadanej prostej i prostej stycznej doadanego okręgu.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawny wynik: $P_1 = \frac{8}{3}$ lub $P_2 = \frac{147}{2}$

3 pkt – poprawne rozpatrzenie i rozwiązanie jednego przypadku: $P = \frac{8}{3}$ albo $P = \frac{147}{2}$

2 pkt – wyznaczenie równań stycznej do okręgu: $y = \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$ oraz $y = \frac{4}{3}x - 14$

1 pkt – wyznaczenie współczynnika kierunkowego stycznej do okręgu: $a = \frac{4}{3}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Równanie stycznej to równanie prostej liniowej w postaci $y = ax + b$. Styczna k jest prostopadła do prostej $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$, zatem $a = \frac{4}{3}$. Styczna k wyraża się równaniem:

$y = \frac{4}{3}x + b$. Po przekształceniu do postaci ogólnej prostej: $4x - 3y + 3b = 0$. Obliczamy współczynnik b . Styczna ma jeden punkt wspólny z okręgiem, oraz jest nim odległość promienia okręgu od jego środka do stycznej, więc zapisujemy:

$$5 = \frac{|8 + 9 + 3b|}{\sqrt{16 + 9}}$$

$$5 = \frac{|3b + 17|}{5}$$

$$|3b + 17| = 25$$

$$3b + 17 = 25 \quad \text{lub} \quad 3b + 17 = -25$$

Stąd

$$b = \frac{8}{3} \quad \text{lub} \quad b = -14$$

Równania stycznych wyrażają się wzorami: $y = \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$ oraz $y = \frac{4}{3}x - 14$. Obliczamy długości boków a, b trójkątów ograniczanych przez styczne oraz osie układu współrzędnych. Są nimi odległości miejsc zerowych stycznych od początku układu współrzędnych oraz odległości od punktów przecięcia stycznych z osią OY . Trójkąty są trójkątami prostokątnymi:

Gdy $y = \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$:

$$\frac{4}{3}x_0 + \frac{8}{3} = 0$$

$$x_0 = -2$$

$$f(0) = \frac{8}{3}$$

$$a = |-2| = 2$$

$$b = \left| \frac{8}{3} \right|$$

$$P_1 = \frac{2 \cdot \frac{8}{3}}{2} = \frac{8}{3}$$

Gdy $y = \frac{4}{3}x - 14$:

$$\frac{4}{3}x_0 - 14 = 0$$

$$x_0 = \frac{21}{2}$$

$$f(0) = -14$$

$$a = \left| \frac{21}{2} \right| = \frac{21}{2}$$

$$b = |-14| = 14$$

$$P_2 = \frac{\frac{21}{2} \cdot 14}{2} = \frac{147}{2}$$

Zatem pola P trójkątów ograniczonych stycznymi oraz osiami układu współrzędnych wynoszą odpowiednio: $P = \frac{8}{3}$ lub $P = \frac{147}{2}$.

Zadanie 12. (0–5)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: 5) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii;

Zasady oceniania

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawny wynik: $V = 111\pi$

4 pkt – obliczenie długości wysokości stożka: $h = 12$

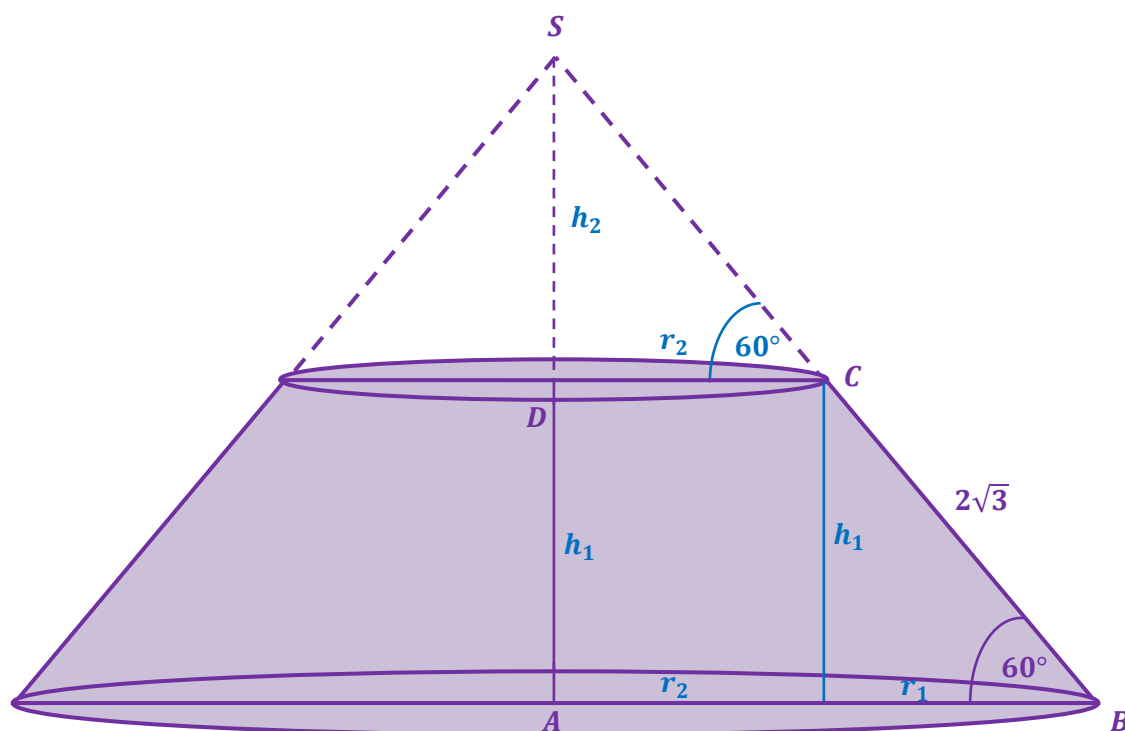
3 pkt – obliczenie długości promienia okręgu u podstawy stożka: $r = 4\sqrt{3}$

2 pkt – obliczenie długości promienia górnego okręgu w stożku ściętym: $r_2 = 3\sqrt{3}$

1 pkt – obliczenie długości wysokości stożka ściętego: $h_1 = 3$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie



Obliczamy objętość bryły zacieniowanej na fioletowo. Jest nią stożek ścięty.

Przyjmujemy oznaczenia takie jak na rysunku. Obliczamy h_1 przy użyciu trygonometrii, np.

$$\sin 60^\circ = \frac{h_1}{2\sqrt{3}}$$

$$h_1 = 3$$

Obliczamy r_1 korzystając z trygonometrii, albo twierdzenia Pitagorasa, np.

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{3}{r_1}$$

$$r_1 = \sqrt{3}$$

Wykorzystując pole trapezu $ABCD$ obliczamy długość r_2 :

$$\frac{21\sqrt{3}}{2} = \frac{(r_2 + r_1 + \sqrt{3}) \cdot 3}{2}$$

Stąd

$$r_2 = 3\sqrt{3}$$

Zauważamy, że kąt $|\sphericalangle DCS| = 60^\circ$, gdyż jest to kąt odpowiadający $|\sphericalangle ABC|$. Obliczamy h_2 :

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h_2}{3\sqrt{3}}$$

$$h_2 = 9$$

Wysokość stożka ma zatem długość 12, natomiast promień jego podstawy $4\sqrt{3}$.

Aby obliczyć objętość powstałej bryły – stożka ściętego, musimy od objętości całego stożka odjąć objętość mniejszego stożka (zaznaczonego przerywaną linią).

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot (4\sqrt{3})^2 \cdot 12 = 192\pi$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot (3\sqrt{3})^2 \cdot 9 = 81\pi$$

Więc

$$V = V_1 - V_2 = 192\pi - 81\pi = 111\pi$$

Objętość powstałej bryły wynosi 111π .

Zadanie 13. (0–6)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 2. Używanie języka matematycznego do tworzenia tekstów matematycznych, w tym do opisu prowadzonych rozumowań i uzasadniania wniosków, a także do przedstawiania danych. IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych..	Zdający: VII.R6) rozwiązuje równania trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładzie $4 \cos 2x \cos 5x = 2 \cos 7x + 1$.

Zasady oceniania

6 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:

$$x \in \{-3\pi, -\frac{11\pi}{4}, -2\pi, -\frac{7\pi}{4}, -\pi, -\frac{3\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \pi\}$$

5 pkt – rozwiązanie równania w zbiorze liczb rzeczywistych: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ oraz $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

z uwzględnieniem dziedziny $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ i $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$

4 pkt – zapisanie, że $t = 0$ lub $t = 1$

ALBO

– przekształcenie równania do postaci $\operatorname{tg} x = 0$ lub $\operatorname{tg} x = 1$

3 pkt – zastosowanie zmiennej pomocniczej $t = \operatorname{tg} x$ **oraz** zapisanie równania w postaci

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-t}{1+t}$$

ALBO

– zapisanie równania w postaci $\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}$

2 pkt – zapisanie, że $\cos 2x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$

1 pkt – zapisanie koniecznych założeń i wyznaczenie dziedziny: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający nie zapisuje założeń, to za całe rozwiązanie otrzymuje maksymalnie **3 punkty**.

Jeżeli zdający zapisze poprawne założenia natomiast niepoprawnie rozwiązuje je, to za całe rozwiązanie otrzymuje maksymalnie **5 punktów**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zapisujemy konieczne założenia spełniające sens liczbowy: $\operatorname{tg} x \neq 0$ oraz $\operatorname{tg} x + 1 \neq 0$.

Po rozwiązaniu ich otrzymujemy dziedzinę równania: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Do przekształcenia równania zastosujemy wzór na podwojony cosinus:

$$\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

Równanie ma postać:

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$$

Niech $t = \operatorname{tg} x$.

$$\frac{1 - t^2}{1 + t^2} = \frac{1 - t}{1 + t}$$

Rozwiązujemy równanie:

$$\begin{aligned}(1 - t^2)(1 + t) &= (1 + t^2)(1 - t) \\ (1 - t)(1 + t)^2 - (1 + t^2)(1 - t) &= 0 \\ (1 - t)((1 + t)^2 - (1 + t^2)) &= 0 \\ (1 - t)(1 + 2t + t^2 - 1 - t^2) &= 0 \\ 2t(1 - t) &= 0 \\ t = 0 \quad \text{lub} \quad t = 1\end{aligned}$$

Zatem

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{oraz} \quad x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Zapisujemy rozwiązania należące do przedziału $[-3\pi, \pi]$:

$$x \in \left\{-3\pi, -\frac{11\pi}{4}, -2\pi, -\frac{7\pi}{4}, -\pi, -\frac{3\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \pi\right\}$$

Komentarz do zadania

Równanie to posiada wiele różnych sposobów rozwiązania wykorzystujących podstawowe wzory i przekształcenia wyrażeń trygonometrycznych, natomiast w kluczu odpowiedzi uwzględniono najprostszy oraz najszybszy sposób rozwiązania. Ze względu na długą drogę prowadzącą do rozwiązania oraz skomplikowane obliczenia, zadanie punktowane jest najwyższą możliwą liczbą punktów oraz posiada dużo miejsca do rozwiązania w arkuszu, co sprawia, że zdający może zapisywać wszystkie rozważania oraz podejmować wiele prób rozwiązania problemu.

Zadanie 14.1. (0–2)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: 5) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii;

Zasady oceniania

2 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania

1 pkt – uzależnienie wysokości walca od promienia jego podstawy: $h = \frac{48-r^2}{r}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczamy wysokość walca od jego promienia podstawy:

$$96\pi = 2\pi r(r + h)$$

$$48 = r(r + h)$$

$$\frac{48}{r} = r + h$$

$$h = \frac{48 - r^2}{r}$$

Ze wzoru na objętość walca:

$$V = \pi r^2 h$$

otrzymujemy:

$$V(r) = \pi r^2 \cdot \frac{48-r^2}{r} = \pi(48r - r^3) \quad \blacksquare$$

Zadanie 14.2. (0–3)

Podstawa programowa 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XIII.R4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej XIII.R5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji; XIII.R6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

- 3 pkt – uzasadnienie, że funkcja V przyjmuje wartość największą dla $r = 4$ i obliczenie tej największej objętości: 128π
- 2 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja V przyjmuje wartość największą dla $r = 4$
- 1 pkt – obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji: $r = 4$
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja posiada wartość największą dla wyznaczonej wartości r , przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej oraz:
 - opisuje (słownie lub graficznie - np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji V LUB
 - zapisuje, że dla wyznaczonej wartości r funkcja V ma maksimum lokalne i jest to jednocześnie jej największa wartość LUB
 - zapisuje, że dla wyznaczonej wartości r funkcja V ma maksimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.
2. Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku, np. znakami „+” i „-” znak pochodnej.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy pochodną funkcji V :

$$V'(r) = \pi(48 - 3r^2)$$

Obliczamy miejsca zerowe funkcji pochodnej:

$$\pi(48 - 3r^2) = 0$$

$$48 - 3r^2 = 0$$

$$r^2 = 16$$

$$r = 4 \quad \vee \quad r = -4 \notin (0,6)$$

Badamy znak pochodnej:

r	$(0,4)$	4	$(4,6)$
$V'(r)$	$+$	0	$-$
$V(r)$	$\nearrow$	$y_{\max} = 128\pi$	$\searrow$

Zatem dla $r = 4$ objętość tego stożka jest największa i wynosi 128π .

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

PESEL

Miejsce na naklejkę.

Sprawdź, czy kod na naklejce to

M-100.

Jeżeli tak – przyklej naklejkę.

Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Symbol arkusza

MMAP-R0-**100**-2505

DATA: **12 maja 2025 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

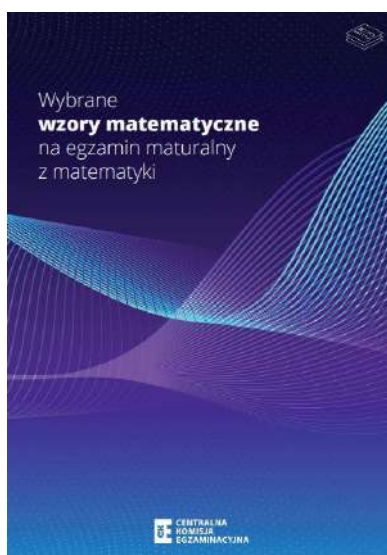
1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.





Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 29 stron (zadania 1–12). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
5. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Nie wpisuj żadnych znaków w tabelkach przeznaczonych dla egzaminatora. Tabelki są umieszczone na marginesie przy każdym zadaniu.
8. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
9. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, z cyrkla i linijki oraz z kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



**Zadania egzaminacyjne są wydrukowane
na następnych stronach.**

Zadanie 1. (0–2)

W warunkach laboratoryjnych obserwowano dynamikę wzrostu liczebności populacji pewnego gatunku bakterii. Liczebność N populacji bakterii zmienia się w czasie zgodnie z zależnością wykładniczą

$$N(t) = N_0 \cdot k^t \quad \text{dla} \quad t \geq 0$$

gdzie:

N_0 – liczebność populacji w chwili $t = 0$ rozpoczęcia obserwacji,

k – stała dodatnia, charakterystyczna dla danego gatunku bakterii i dla warunków przeprowadzenia obserwacji,

t – czas wyrażony w godzinach, liczony od chwili $t = 0$ rozpoczęcia obserwacji.

W chwili rozpoczęcia obserwacji liczebność populacji była równa 10 000, a po dwóch godzinach była równa 15 625.

Oblicz, o ile procent wzrastała liczebność populacji tej bakterii w ciągu każdej godziny. Zapisz obliczenia.

1.
0–1–2



Zadanie 2. (0–3)

Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej a i dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej b takich, że $b \neq \frac{1}{2}a$, prawdziwa jest nierówność

$$(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$$

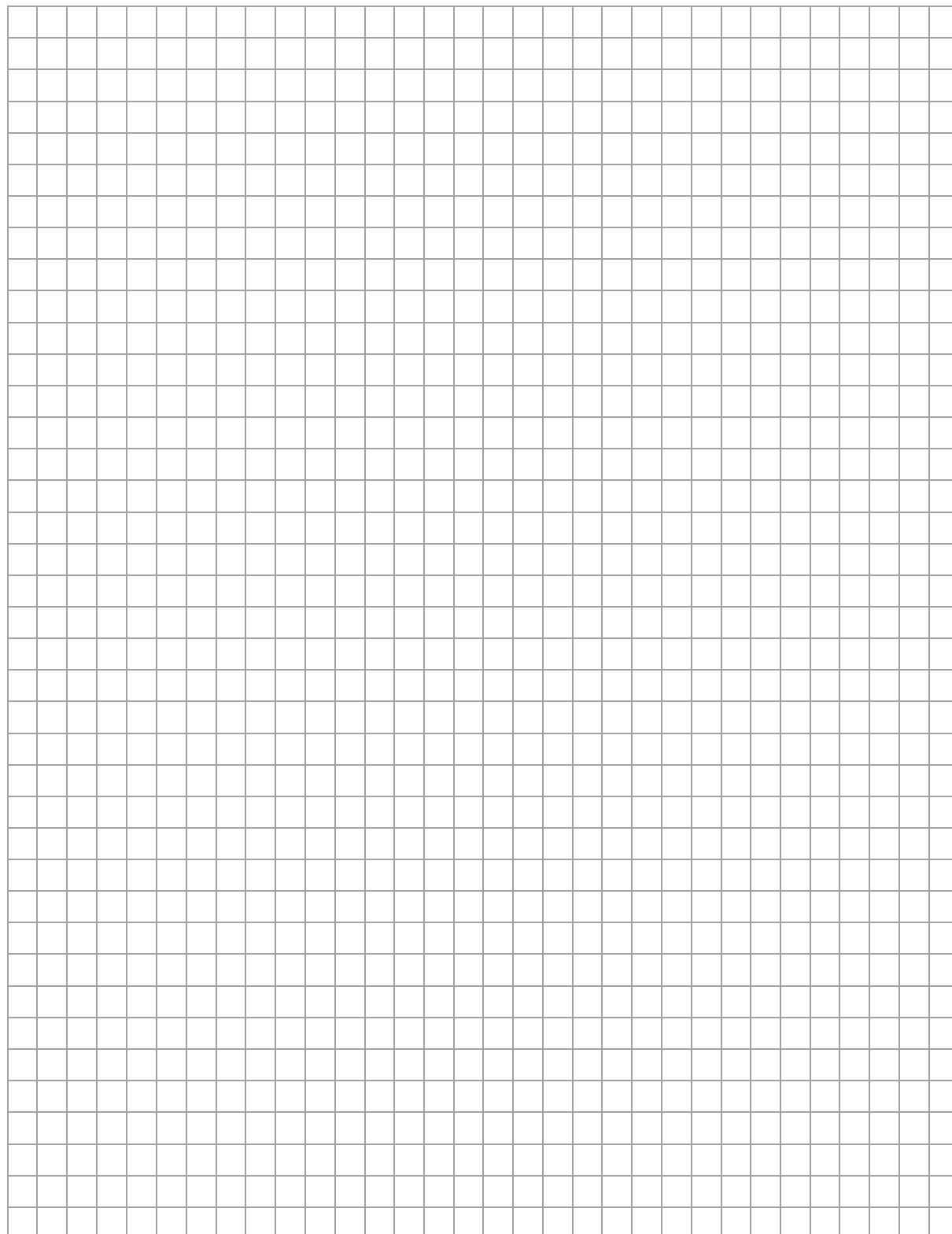
2.

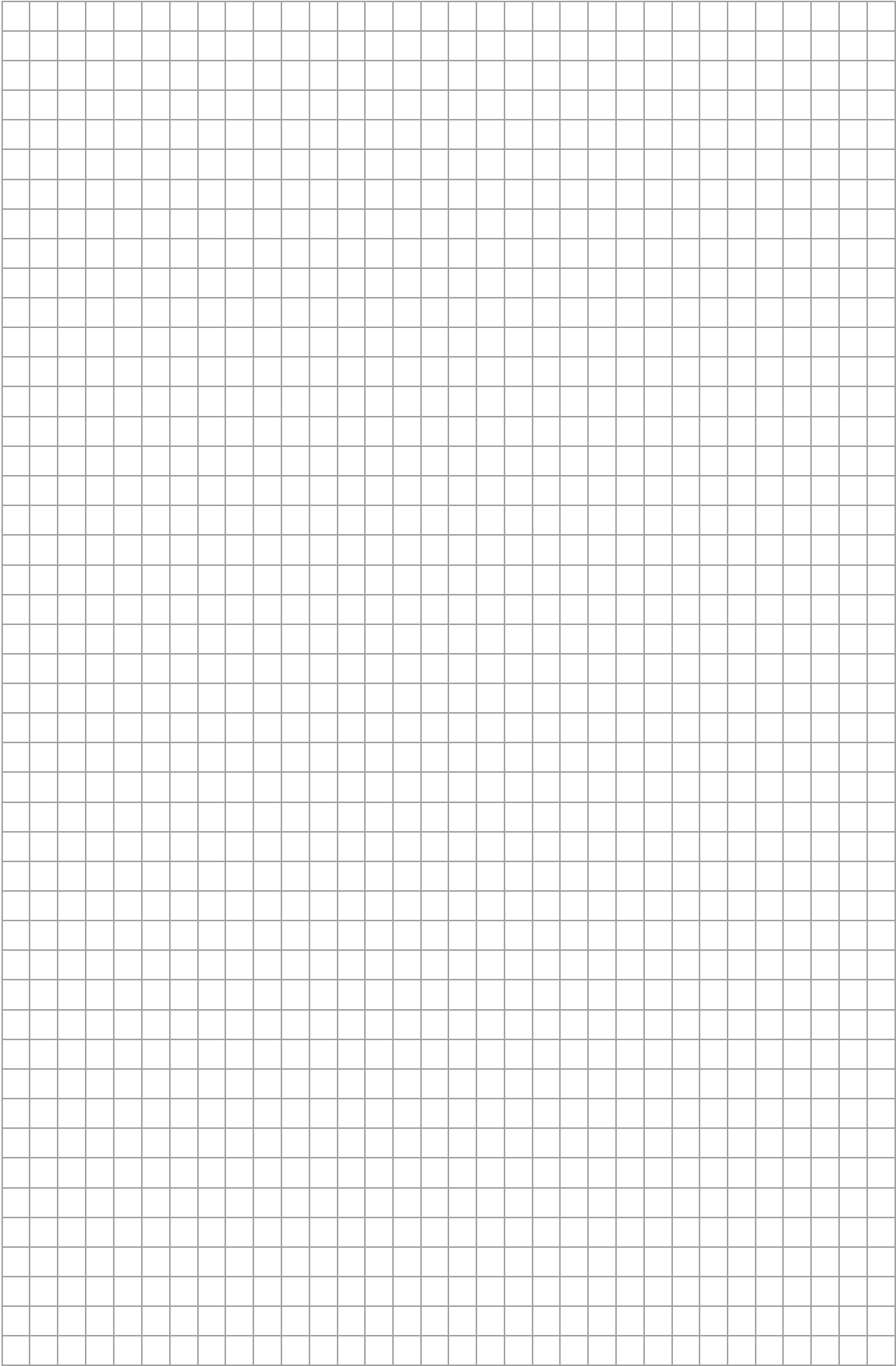
0–1–
2–3

Zadanie 3. (0–3)

W trójkącie równobocznym ABC punkt D leży na boku BC . Stosunek pola trójkąta ABD do pola trójkąta ADC jest równy $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Oblicz miarę kąta DAC . Zapisz obliczenia.

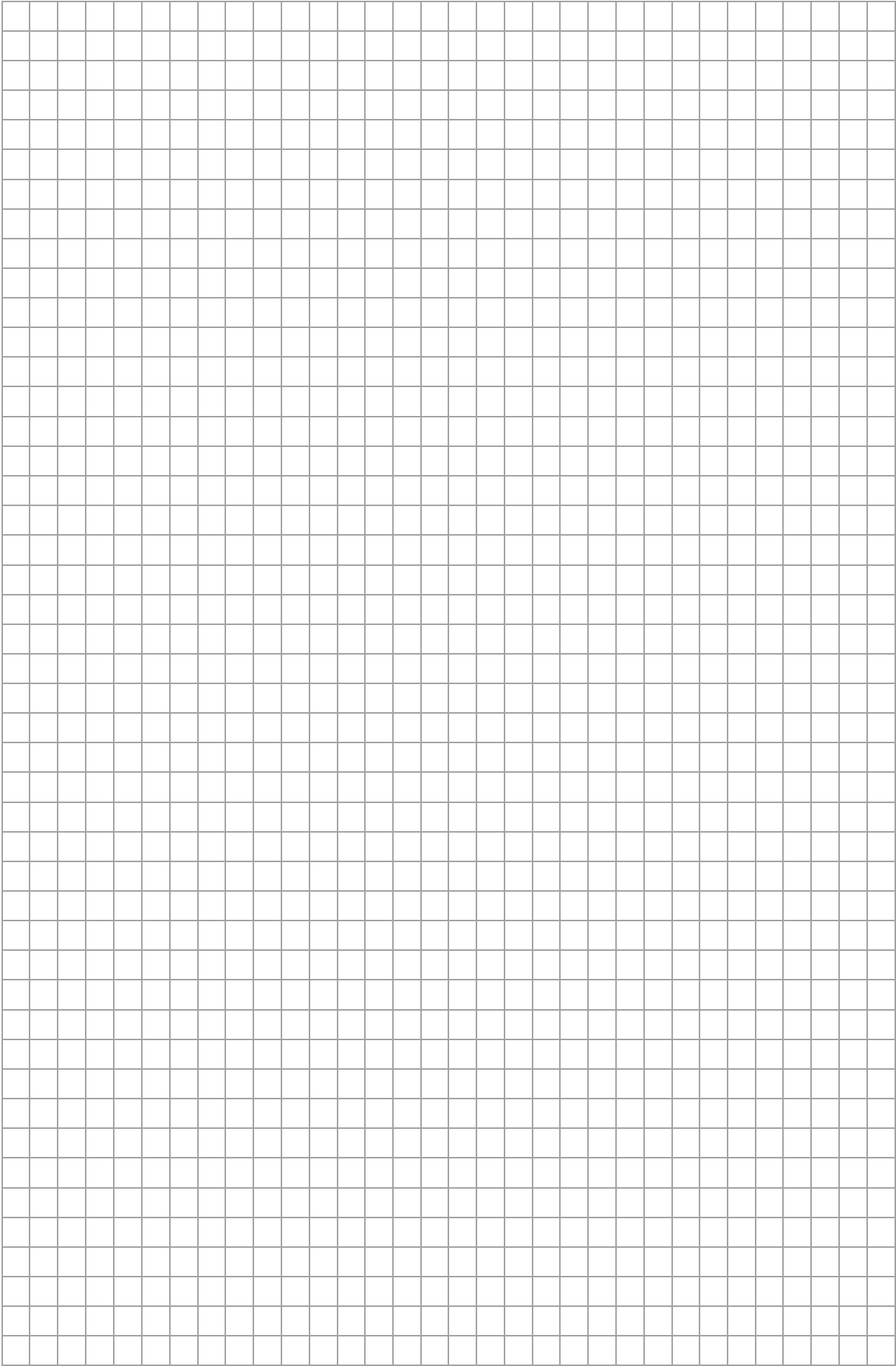




Doświadczenie losowe polega na czterokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ścianie ma inną liczbę oczek – od jednego oczka do sześciu oczek.

4.	0-1- 2-3

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.



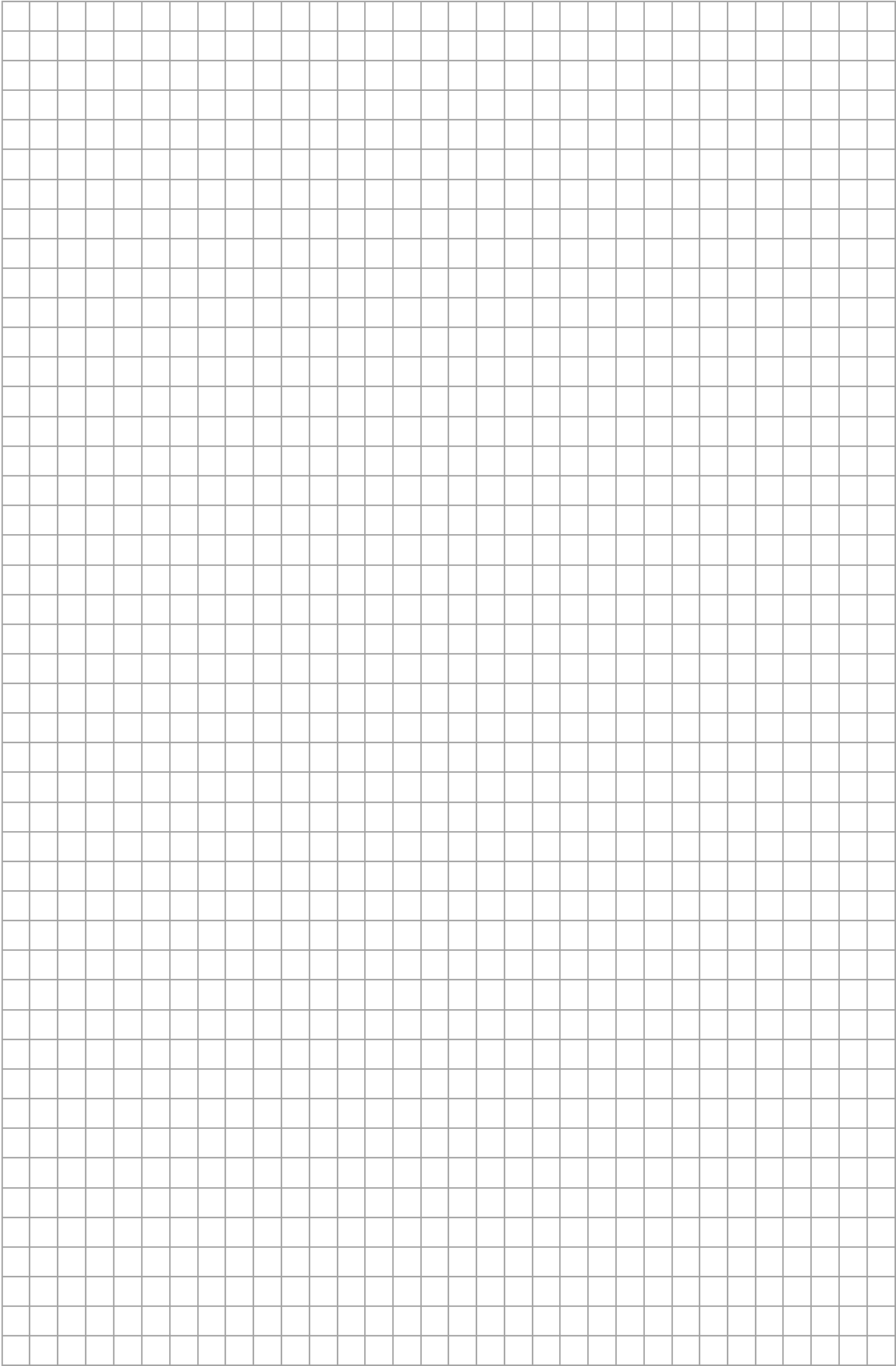
0-1-
2-3-4

Rozwiąż nierówność

$$|x - 2| - 2 \cdot |x + 3| < -2$$

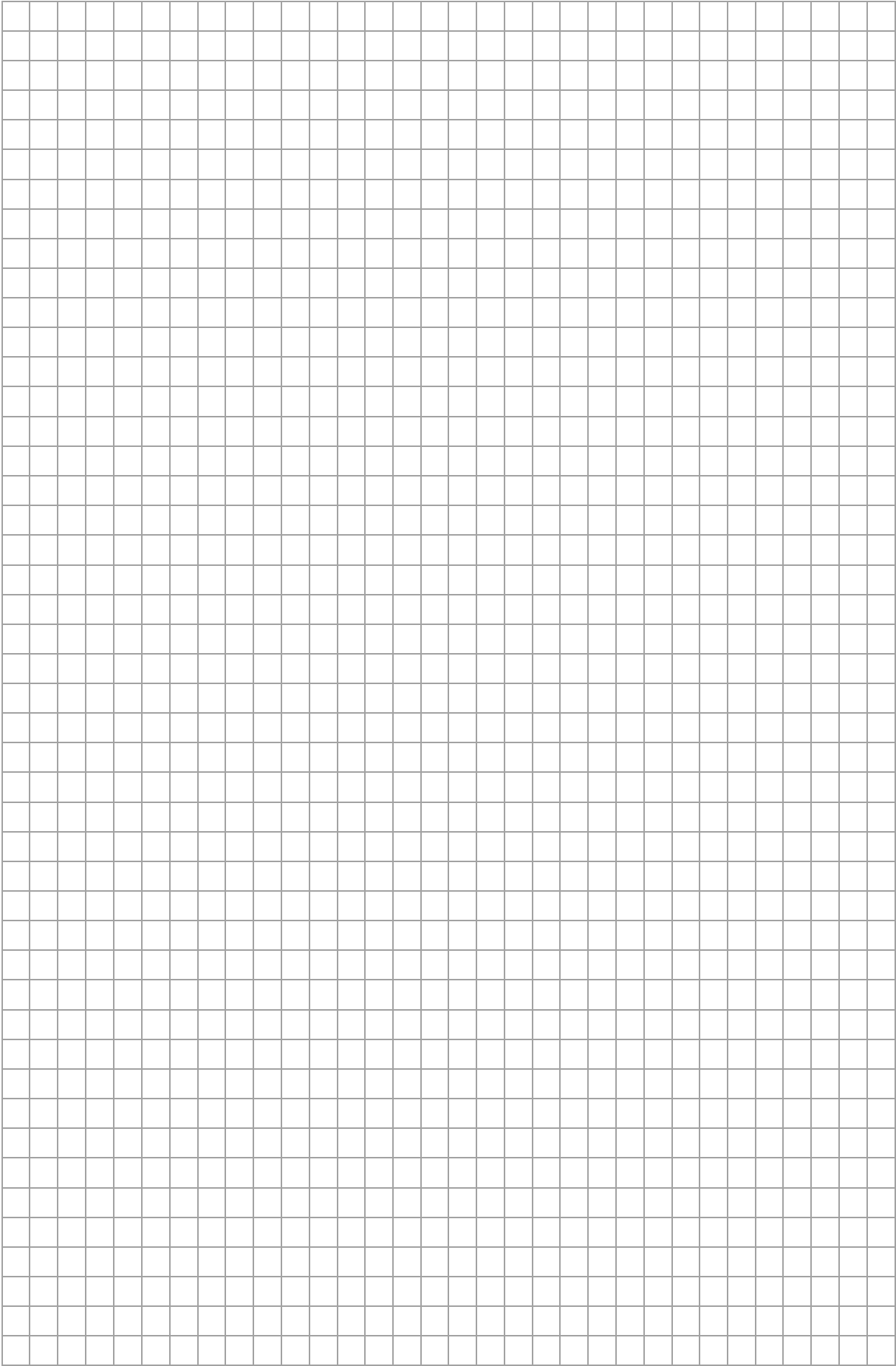
Zapisz obliczenia.





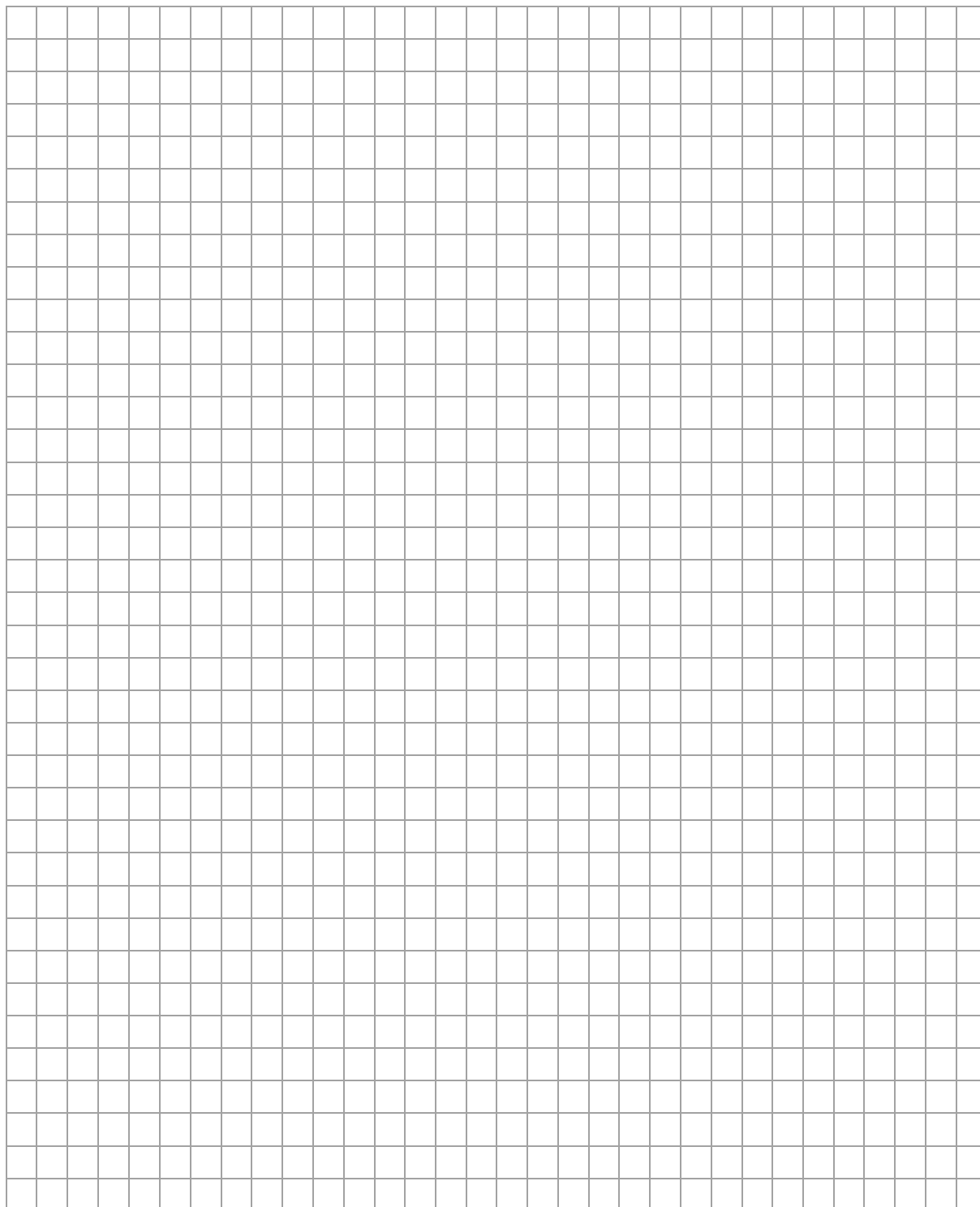
6.	0-1- 2-3-4

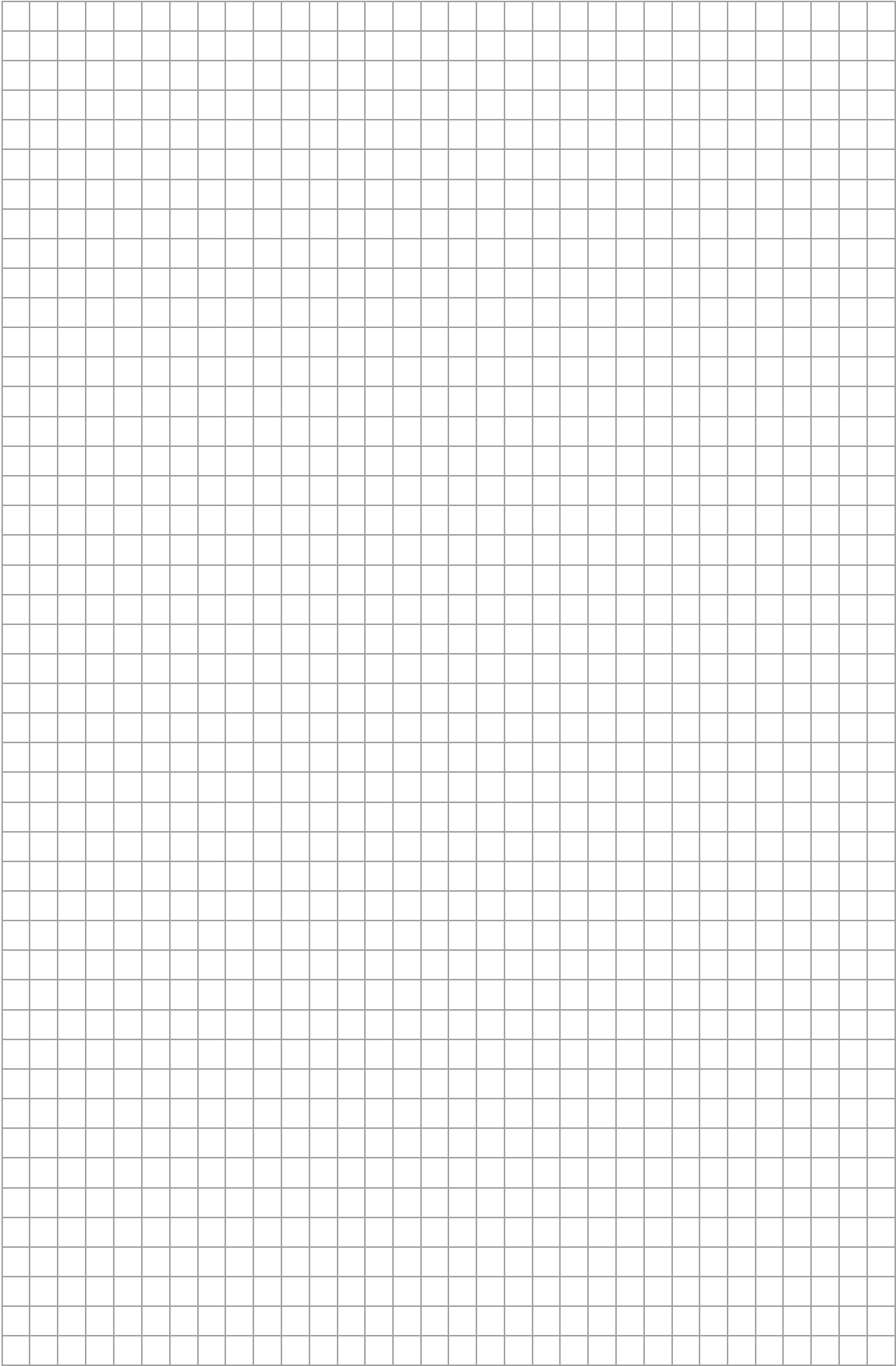
This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.



Zadanie 7. (0–4)

W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD punkt E jest środkiem ramienia AD , a punkt F jest środkiem ramienia BC trapezu. Stosunek pola trapezu $EFCD$ do pola trapezu $ABFE$ jest równy $\frac{1}{2}$.

7.0–1–
2–3–4**Wykaż, że $\frac{|CD|}{|AB|} = \frac{1}{5}$.**

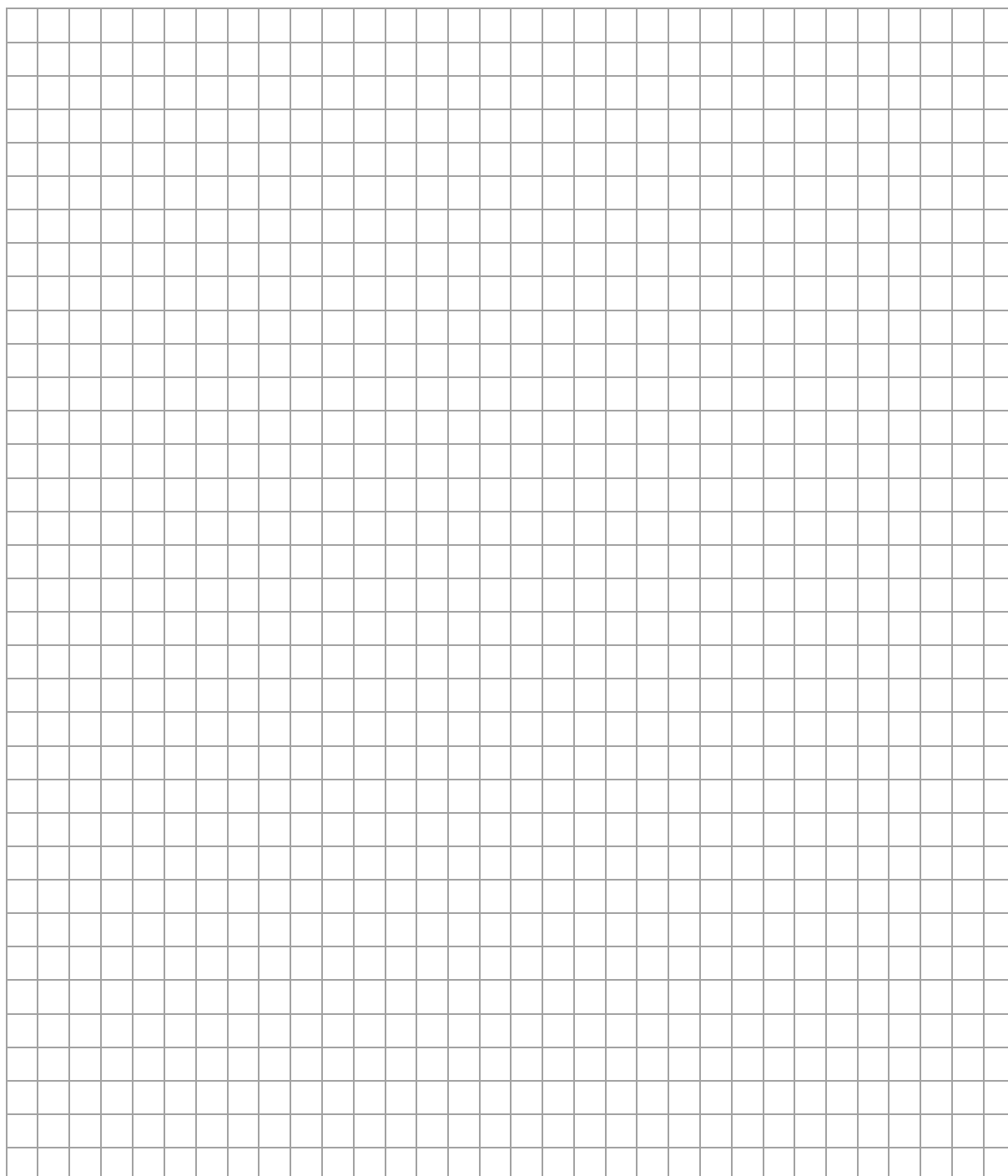


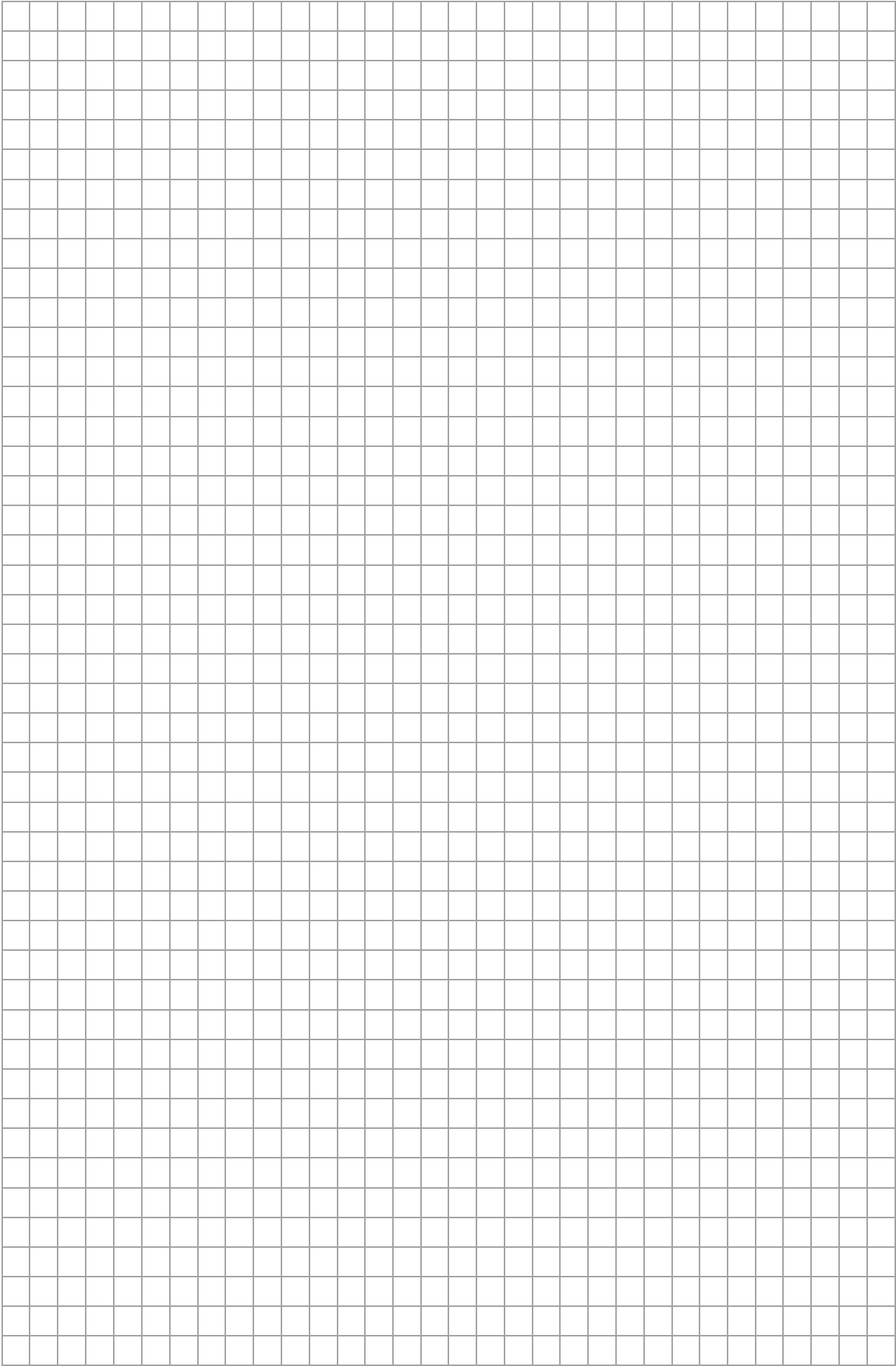
Zadanie 8. (0–5)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są okręgi O_1 oraz O_2 o równaniach:

- $O_1: (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 5$
- $O_2: (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 45$.

Te okręgi przecinają się w punktach A oraz B . Punkt A ma pierwszą współrzędną dodatnią. Punkt M spełnia warunek $\overrightarrow{AM} = -2 \cdot \overrightarrow{BM}$.

8.0–1–
2–3–
4–5**Oblicz współrzędne punktów A , B oraz M . Zapisz obliczenia.**



9.
0-1-
2-3-
4-5

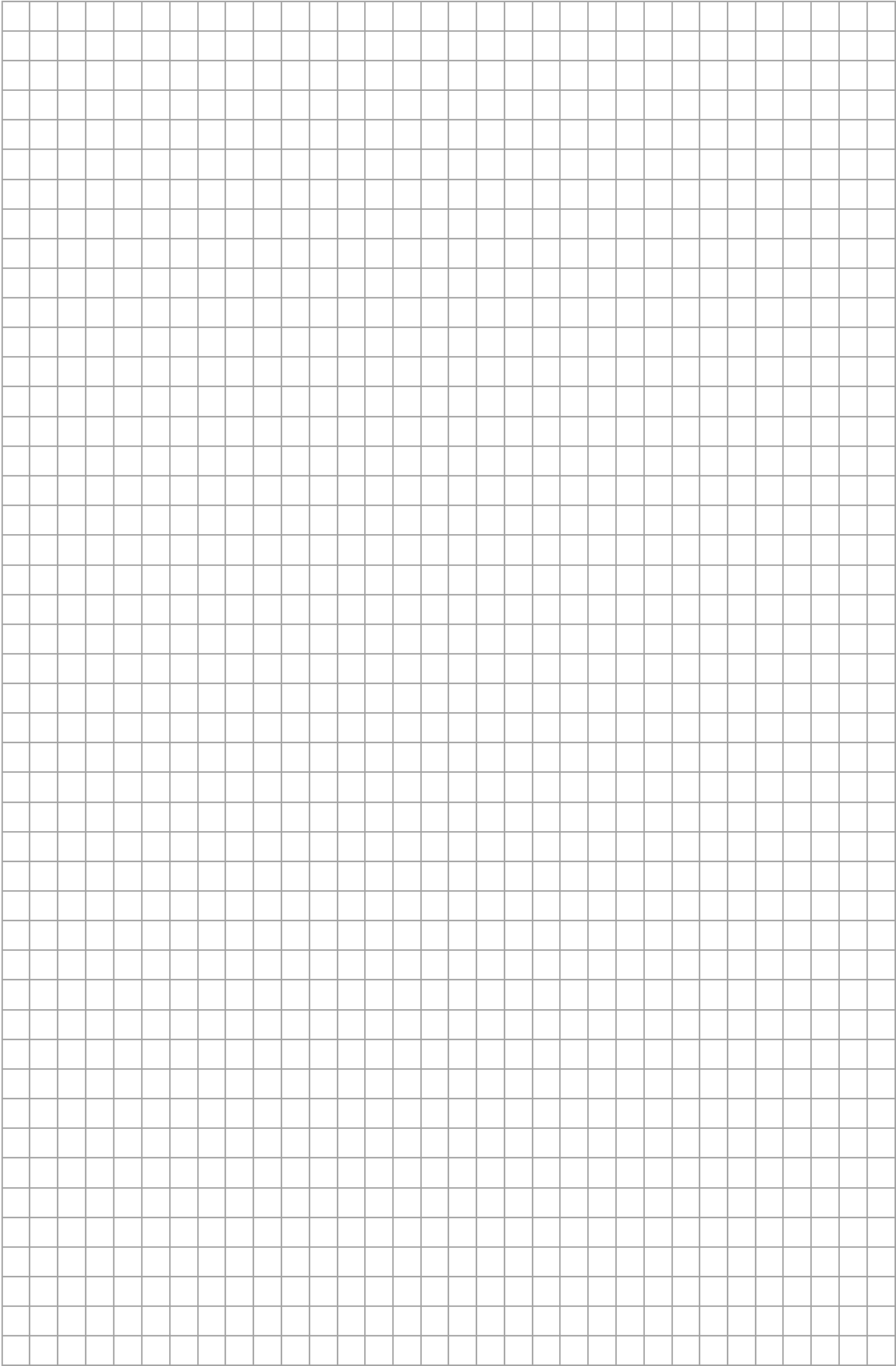
Zadanie 9. (0–5)

Rozwiąż równanie

$$3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$$

w przedziale $[-\pi, \pi]$. Zapisz obliczenia.

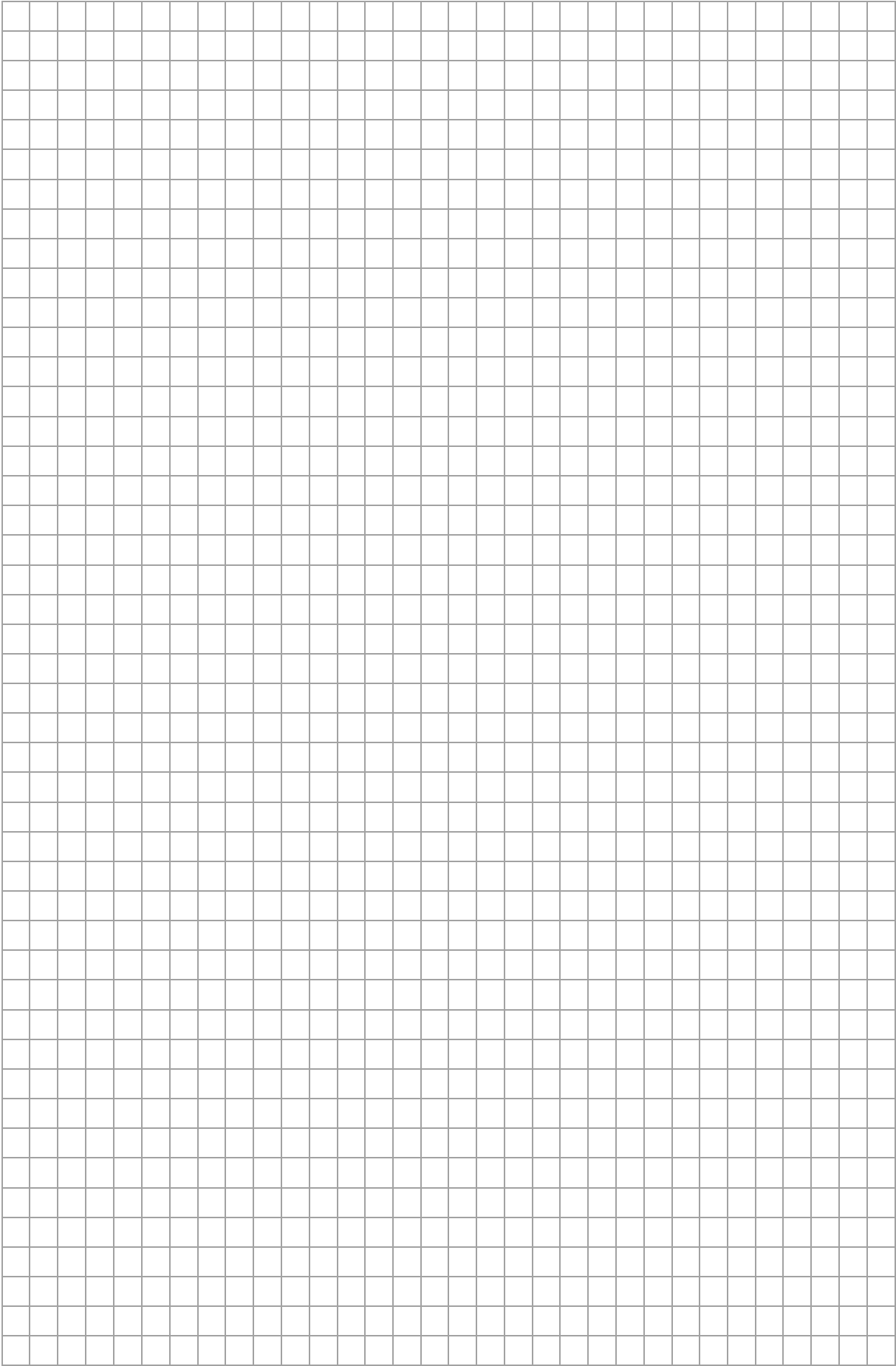




Zadanie 10. (0–5)

Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest kwadrat $ABCD$. Krawędź boczna SA jest wysokością ostrosłupa, natomiast krawędź podstawy ma długość $3\sqrt{34}$. Cosinus kąta β między ścianami bocznymi CDS i BCS tego ostrosłupa jest równy $\left(-\frac{9}{25}\right)$.

10.0–1–
2–3–
4–5**Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.**



Zadanie 11. (0–6)

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = (2 - m)x^2 - 2(2m + 1)x + m + 8$$

dla każdej liczby rzeczywistej x , gdzie m jest liczbą rzeczywistą różną od 2.

11.

0–1–

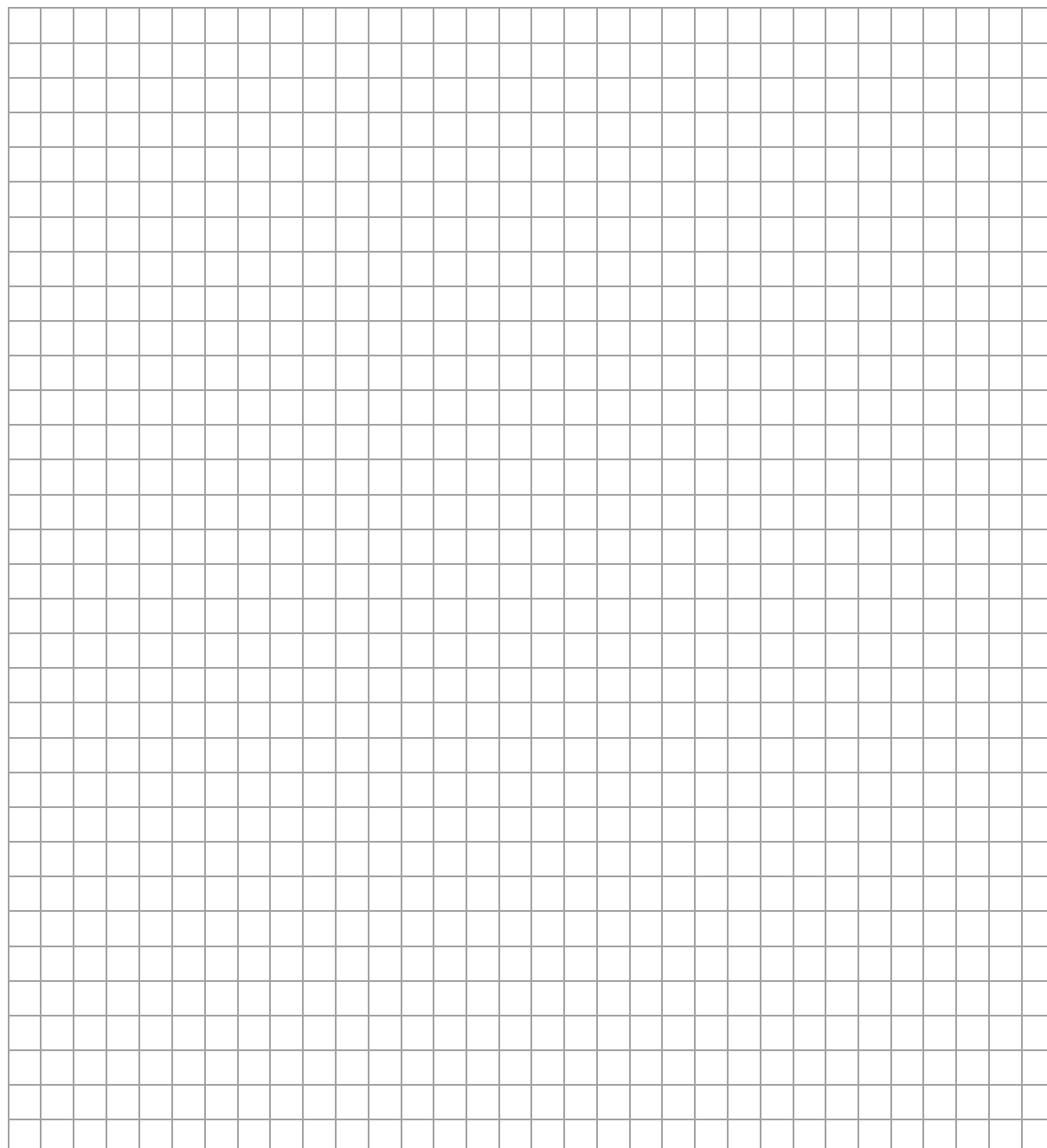
2–3–

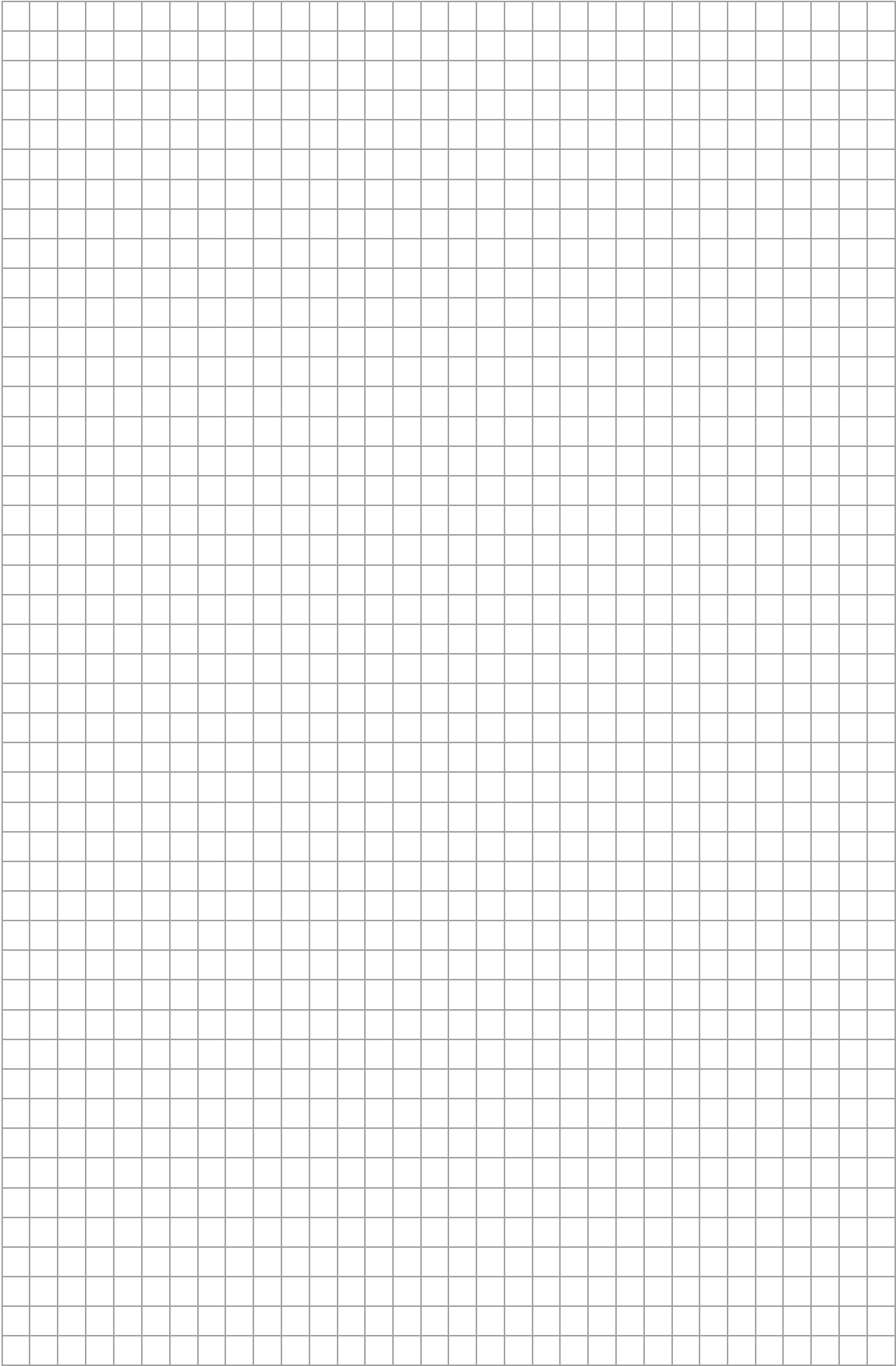
4–5–6

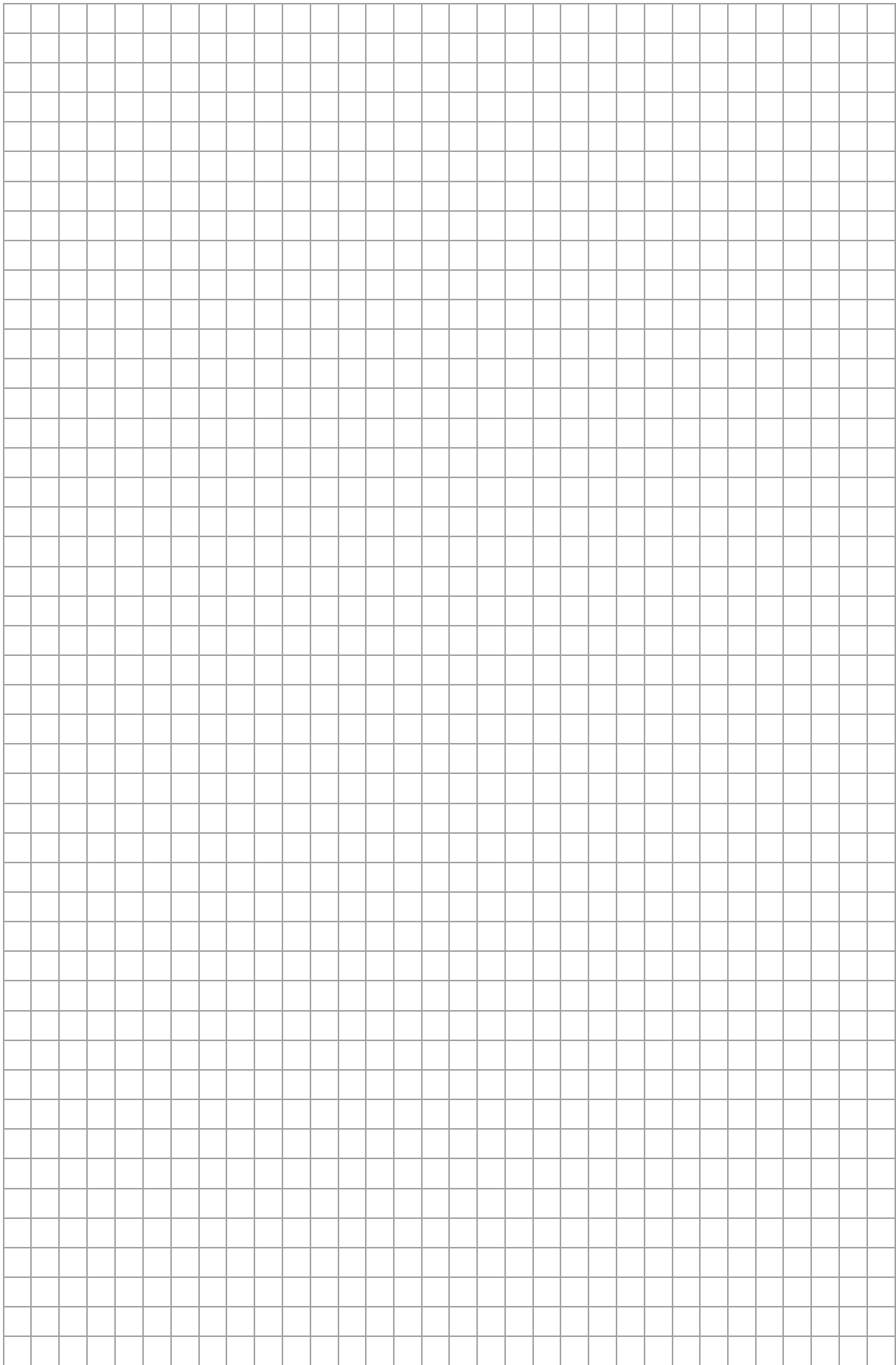
Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe x_1 oraz x_2 tego samego znaku, które spełniają warunek

$$(x_1 - x_2)^2 \leq 180$$

Zapisz obliczenia.







Zadanie 12.

Rozważamy wszystkie stożki, których wysokość jest większa od 5, a odległość środka podstawy od tworzącej jest równa 5.

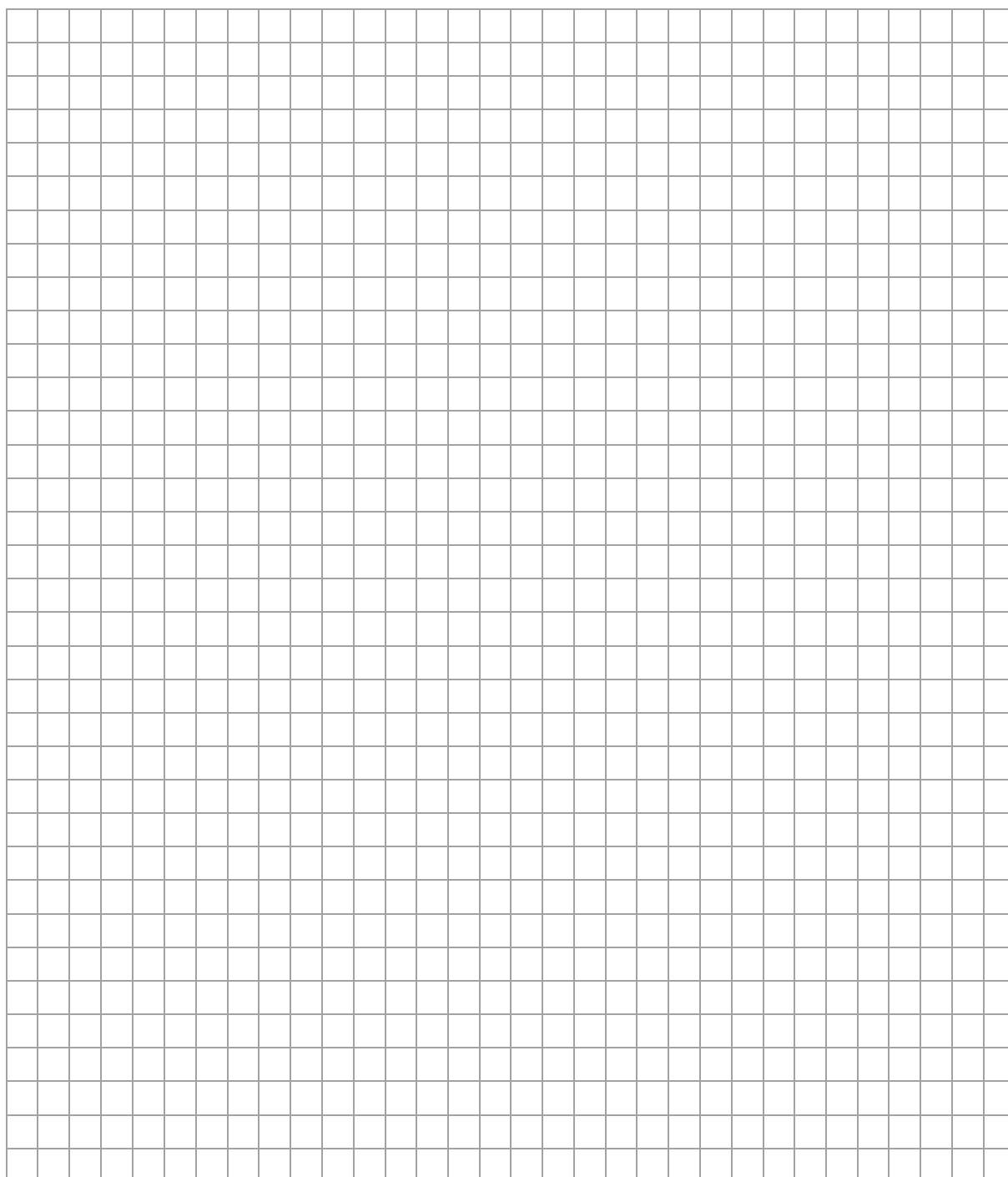
Zadanie 12.1. (0–2)

Wykaż, że objętość V stożka, jako funkcja wysokości h stożka, wyraża się wzorem

$$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$$

12.1.

0–1–2



Zadanie 12.2. (0–4)

Objętość V stożka, jako funkcja wysokości h stożka, wyraża się wzorem

$$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$$

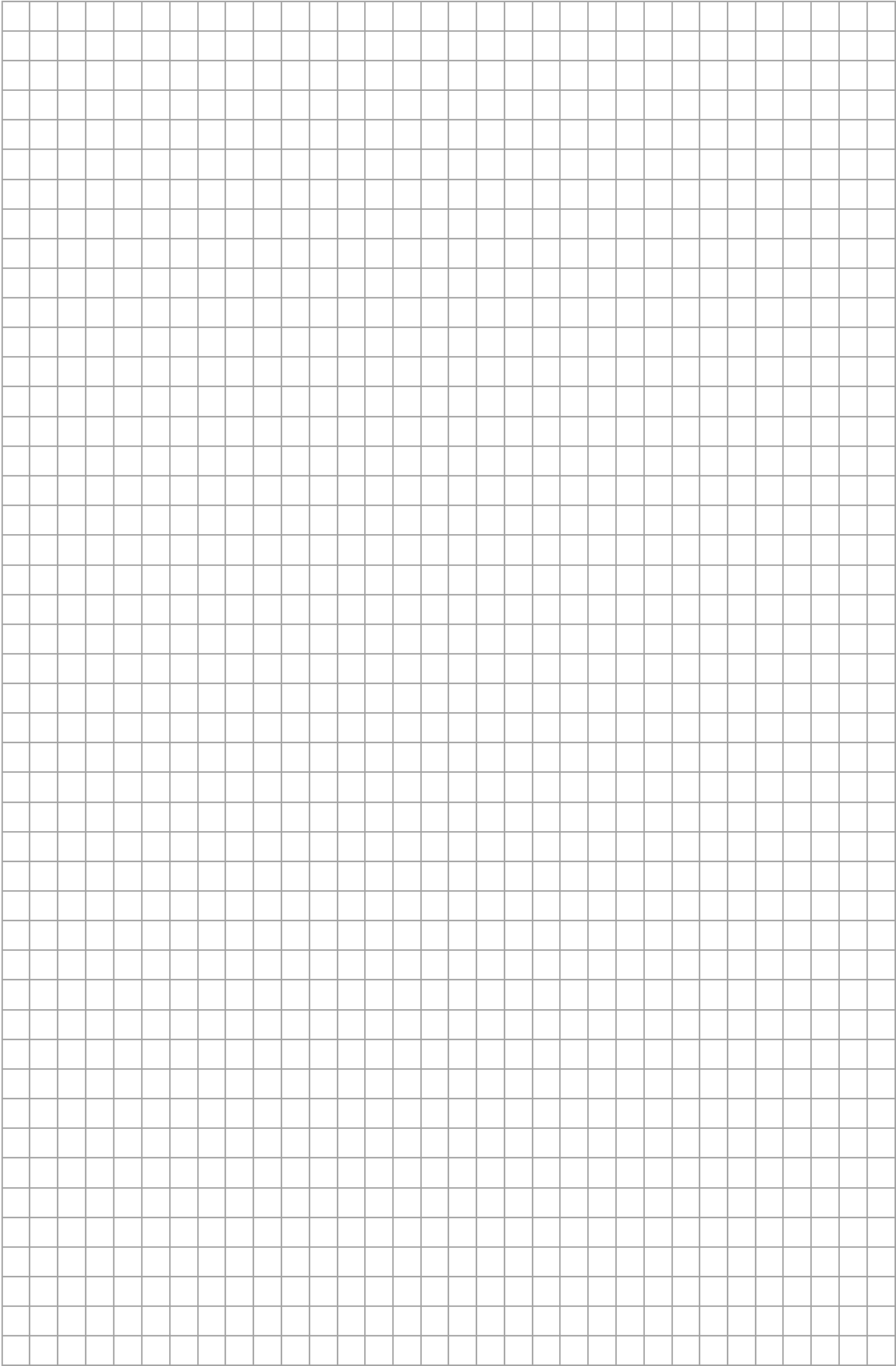
dla $h \in (5, +\infty)$.

12.2.

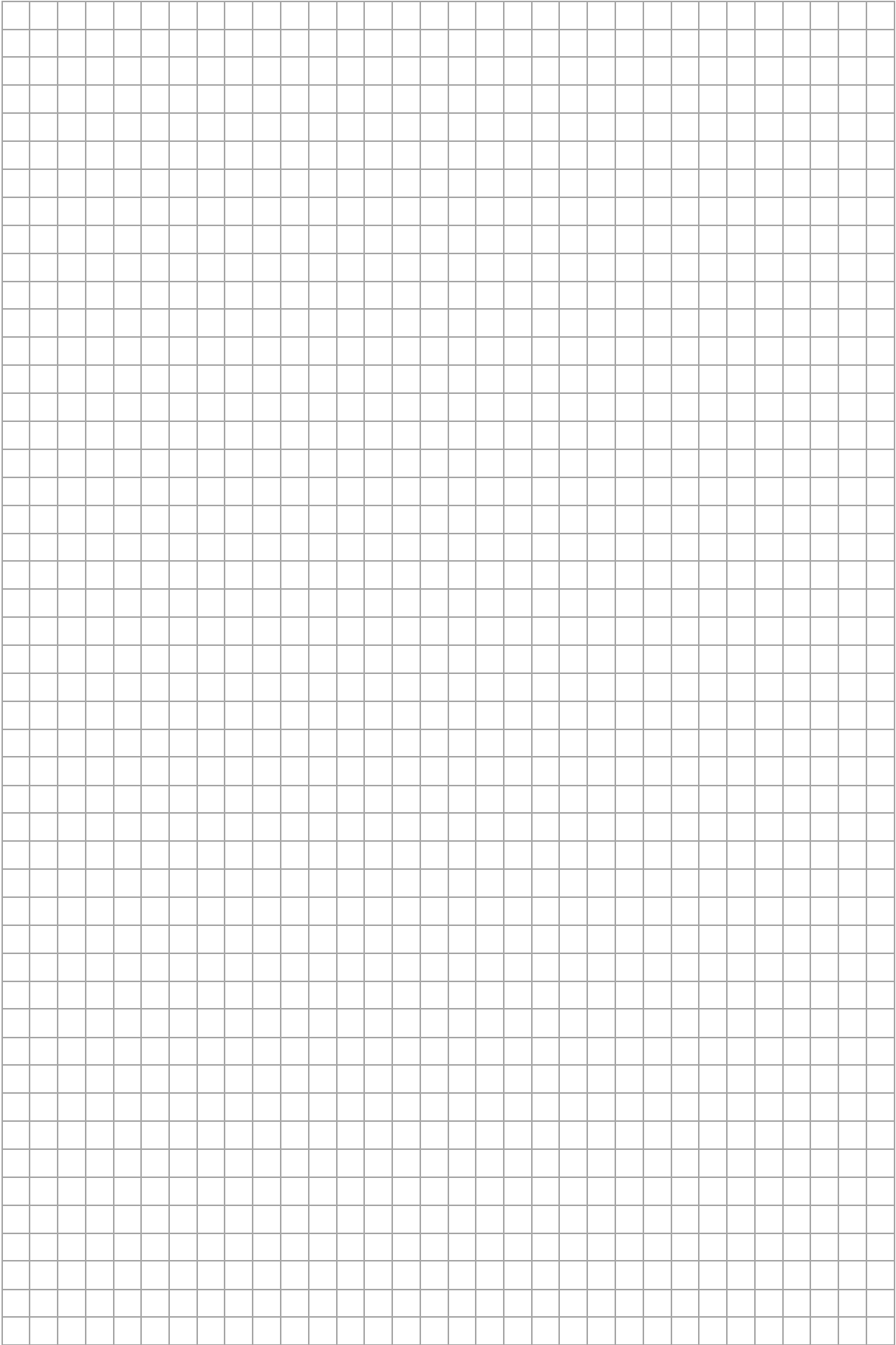
0-1-
2-3-4

Wyznacz wysokość tego z rozważanych stożków, którego objętość jest najmniejsza. Oblicz tę najmniejszą objętość. Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.



This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.



MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023



MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023



MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023



<i>Rodzaj dokumentu:</i>	Zasady oceniania rozwiązań zadań
<i>Egzamin:</i>	Egzamin maturalny
<i>Przedmiot:</i>	Matematyka
<i>Poziom:</i>	Poziom rozszerzony
<i>Formy arkusza:</i>	MMAU-R0-100, MMAU-R0-200, MMAU-R0-300, MMAU-R0-400, MMAU-R0-700, MMAU-R0-K00, MMAU-R0-Q00, MMAU-R0-100
<i>Termin egzaminu:</i>	12 maja 2025 r.
<i>Data publikacji dokumentu:</i>	27 czerwca 2025 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–2)

Wymagania określone w podstawie programowej ¹	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną [...] do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 25%.

1 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą k , np. $15\,625 = 10\,000 \cdot k^2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga.

Jeżeli zdający odgadnie wynik i sprawdzi, że wartość 25% spełnia warunki zadania oraz uzasadni, że jest to jedyne rozwiązanie (np. powołując się na to, że funkcja wykładnicza jest rosnąca), to otrzymuje **2 punkty**; natomiast jeżeli takiego uzasadnienia nie przedstawi, to otrzymuje **1 punkt**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Z warunków zadania $N(0) = 10\,000$, więc $10\,000 = N_0 \cdot k^0$ i stąd $N_0 = 10\,000$.

Ponieważ $N(2) = 15\,625$, więc $15\,625 = 10\,000 \cdot k^2$ i stąd $k = 1,25$. Zatem

$$\frac{N(t+1)}{N(t)} = \frac{N_0 \cdot k^{t+1}}{N_0 \cdot k^t} = k = 1,25$$

dla każdego $t \geq 0$. To oznacza, że w ciągu każdej godziny liczebność populacji zwiększała się o 25%.

¹Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz.U. z 2024 r. poz. 1019).

Zadanie 2. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: II.R5) korzysta ze wzorów na: [...] $(a + b)^n$ [...].

Zasady oceniania

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania (tj. spełnienie kryterium za 2 punkty **oraz** zapisanie, że $a + 2b > 0$ **oraz** uzasadnienie, że dla liczb spełniających warunek $b \neq \frac{1}{2}a$ zachodzi $(a - 2b)^2 > 0$).

2 pkt – przekształcenie nierówności do postaci $(a - 2b)^2(a + 2b) > 0$
ALBO

– przekształcenie nierówności do postaci $(a - 2b)^2 > 0$,
ALBO

– uzasadnienie, że funkcja f osiąga wartość najmniejszą dla $a = 2b$.

1 pkt – zastosowanie wzoru na sześcian sumy i przekształcenie nierówności do postaci $a^2(a - 2b) - 4b^2(a - 2b) > 0$
ALBO

– przekształcenie nierówności do postaci $(a + 2b)[(a + 2b)^2 - 8ab] > 0$,
ALBO

– przekształcenie nierówności do postaci $(a + 2b)^2 > 8ab$,
ALBO

– rozważenie funkcji $f(a) = a^3 - 2ba^2 - 4b^2a + 8b^3$ określonej dla $a > 0$ oraz obliczenie pochodnej tej funkcji i miejsca zerowego tej pochodnej:
 $f'(a) = 3a^2 - 4ba - 4b^2$ oraz $a = 2b$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga.

Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość nierówności jedynie dla wybranych wartości a i b , to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania*Sposób I*

Przekształcamy równoważnie nierówność, korzystając ze wzoru na sześcian sumy:

$$(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$$

$$a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3 - 8a^2b - 16ab^2 > 0$$

$$a^3 - 2a^2b - 4ab^2 + 8b^3 > 0$$

$$a^2(a - 2b) - 4b^2(a - 2b) > 0$$

$$(a - 2b)(a^2 - 4b^2) > 0$$

$$(a - 2b)^2(a + 2b) > 0$$

Z założenia $a > 0$ i $b > 0$, więc $a + 2b > 0$.

Ponieważ $b \neq \frac{1}{2}a$, więc $a - 2b \neq 0$ i wtedy $(a - 2b)^2 > 0$ jako kwadrat liczby rzeczywistej różnej od zera.

Zatem $(a - 2b)^2(a + 2b)$ jest dodatnie jako iloczyn liczb dodatnich, więc nierówność $(a - 2b)^2(a + 2b) > 0$ jest prawdziwa dla każdej liczby dodatniej a i każdej liczby

dodatniej b takich, że $b \neq \frac{1}{2}a$. To oznacza, że również nierówność

$(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$ jest prawdziwa dla każdej dla każdej liczby dodatniej a

i każdej liczby dodatniej b takich, że $b \neq \frac{1}{2}a$. To należało wykazać.

Sposób II

Przekształcamy równoważnie nierówność, korzystając ze wzorów na kwadrat sumy i różnicy:

$$(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$$

$$(a + 2b)^3 > 8ab(a + 2b)$$

$$(a + 2b)^3 - 8ab(a + 2b) > 0$$

$$(a + 2b)[(a + 2b)^2 - 8ab] > 0$$

$$(a + 2b)(a^2 - 4ab + 4b^2) > 0$$

$$(a - 2b)^2(a + 2b) > 0$$

Z założenia $a > 0$ i $b > 0$, więc $a + 2b > 0$.

Ponieważ $b \neq \frac{1}{2}a$, więc $a - 2b \neq 0$ i wtedy $(a - 2b)^2 > 0$ jako kwadrat liczby rzeczywistej różnej od zera.

Zatem $(a - 2b)^2(a + 2b)$ jest dodatnie jako iloczyn liczb dodatnich, więc nierówność $(a - 2b)^2(a + 2b) > 0$ jest prawdziwa dla każdej liczby dodatniej a i każdej liczby

dodatniej b takich, że $b \neq \frac{1}{2}a$. To oznacza, że również nierówność

$(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$ jest prawdziwa dla każdej dla każdej liczby dodatniej a

i każdej liczby dodatniej b takich, że $b \neq \frac{1}{2}a$. To należało wykazać.

Sposób III

Niech f będzie funkcją określoną wzorem $f(a) = (a + 2b)^3 - 8a^2b - 16ab^2$ dla każdego $a \in (0, +\infty)$.

Obliczamy pochodną funkcji f oraz jej miejsca zerowe:

$$f'(a) = 3(a + 2b)^2 - 16ba - 16b^2$$

$$3a^2 + 12ab + 12b^2 - 16ba - 16b^2 = 0 \quad \wedge \quad a > 0$$

$$3a^2 - 4ba - 4b^2 = 0 \quad \wedge \quad a > 0$$

$$\left(a = -\frac{2}{3}b \quad \vee \quad a = 2b\right) \quad \wedge \quad a > 0$$

Gdy $b > 0$, to $f'(a) > 0$ dla $a \in (2b, +\infty)$ oraz $f'(a) < 0$ dla $a \in (0, 2b)$. Zatem przy b dodatnim funkcja f jest malejąca w przedziale $(0, 2b]$ oraz rosnąca w przedziale $[2b, +\infty)$, czyli funkcja f osiąga wartość najmniejszą dla argumentu dodatniego $a = 2b$. Ta najmniejsza wartość jest równa $f(2b) = (2b + 2b)^3 - 8 \cdot (2b)^2 \cdot b - 16 \cdot 2b \cdot b^2 = 0$. Zatem dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej a i dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej b takich, że $a \neq 2b$, prawdziwa jest nierówność

$$(a + 2b)^3 - 8a^2b - 16ab^2 > 0$$

To należało wykazać.

Zadanie 3. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.R8) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty).

Zasady oceniania (dla *sposobów I* oraz *VI*)

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 45° .

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą – jednym z kątów: CAD , BAD , CDA , ADB , w którym wszystkie funkcje trygonometryczne są tego samego argumentu, np.

$$\frac{\sin 60^\circ \cdot \cos \alpha - \cos 60^\circ \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \text{ gdzie } \alpha = |\angle CAD|,$$

ALBO

– obliczenie współczynnika kierunkowego prostej AD : $2 - \sqrt{3}$.

1 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą – jednym z kątów: CAD , BAD , CDA , ADB ,

$$\text{np. } \frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \text{ gdzie } \alpha = |\angle CAD|,$$

ALBO

– zapisanie związku $\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla *sposobu II*)

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 45° .

2 pkt – wyznaczenie długości czterech spośród pięciu odcinków: BD , CD , CE , DE , AE ,
w zależności od jednej zmiennej, np. $|CD| = x$ i $|BD| = \frac{\sqrt{3}-1}{2}x$ i $|CE| = \frac{1}{2}x$
i $|AE| = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

ALBO

– wyznaczenie długości odcinków: BD , CD , CE , w zależności od długości odcinka AE
i tangensa kąta DAC , np. $|CE| = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot |AE| \cdot \operatorname{tg} \alpha$ i $|CD| = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot |AE| \cdot \operatorname{tg} \alpha$
i $|BD| = |AE| - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot |AE| \cdot \operatorname{tg} \alpha$, gdzie α jest kątem DAC .

1 pkt – zapisanie związku $\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$,

ALBO

– wyznaczenie długości dwóch odcinków spośród BD , BC i CD w zależności od
jednej zmiennej, np. $|CD| = x$ i $|BD| = \frac{\sqrt{3}-1}{2}x$,

ALBO

– wyznaczenie długości boków trójkąta CED w zależności od jednej zmiennej, np.
 $|CD| = x$, $|CE| = \frac{1}{2}x$, $|DE| = \frac{\sqrt{3}}{2}x$,

ALBO

– wyznaczenie długości odcinka CE (albo CD) w zależności od długości odcinka AE
i tangensa kąta DAC : $|CE| = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot |AE| \cdot \operatorname{tg} \alpha$ (albo $|CD| = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot |AE| \cdot \operatorname{tg} \alpha$), gdzie
 α jest kątem DAC .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla sposobów III–V)

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 45° .

2 pkt – obliczenie $\frac{|BD|}{|DF|}$ oraz $\frac{|AB|}{|AF|} : \frac{|BD|}{|DF|} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ oraz $\frac{|AB|}{|AF|} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

ALBO

– wyznaczenie długości odcinków AD oraz CD w zależności od jednej zmiennej, np.
 $|AD| = \sqrt{6}m$ oraz $|CD| = 2m$.

1 pkt – wyznaczenie długości odcinków BD i CD w zależności od jednej zmiennej, np.
 $|CD| = 2m$ i $|BD| = (\sqrt{3}-1)m$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

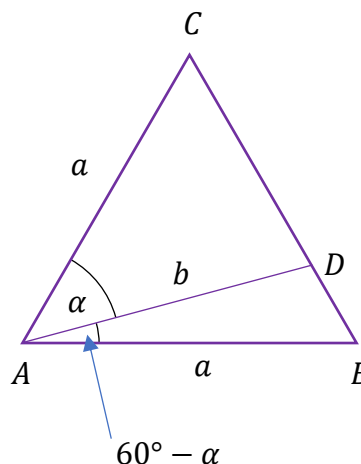
Przyjmijmy następujące oznaczenia:

a – długość boku trójkąta ABC ,

b – długość odcinka AD ,

α – miara kąta DAC

(zobacz rysunek).



Korzystając ze wzoru na pole trójkąta oraz uwzględniając warunki zadania, otrzymujemy:

$$\frac{P_{ABD}}{P_{ADC}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(60^\circ - \alpha)}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

Stąd i ze wzoru na sinus różnicy kątów otrzymujemy kolejno:

$$\frac{\sin 60^\circ \cdot \cos \alpha - \cos 60^\circ \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\sin 60^\circ \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 1$$

$$\alpha = 45^\circ$$

Zatem kąt DAC ma miarę 45° .

Sposób II

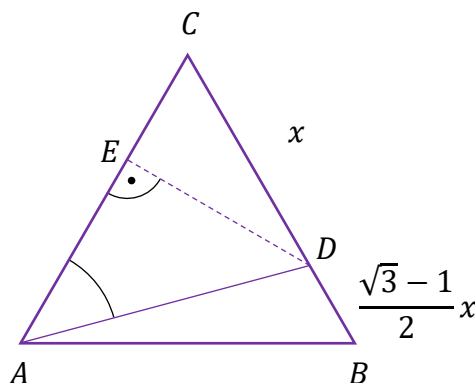
Trójkąty ABD i ACD mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka A , więc

$$\frac{P_{ABD}}{P_{ADC}} = \frac{|BD|}{|CD|}$$

zatem

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

Oznaczmy $x = |CD|$. Wtedy $|BD| = \frac{\sqrt{3}-1}{2}x$. Niech E będzie spodkiem wysokości trójkąta ADC poprowadzonej z wierzchołka D (zobacz rysunek).



Z własności trójkąta o kątach 30° , 60° , 90° otrzymujemy $|DE| = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ oraz $|EC| = \frac{1}{2}x$.

Ponieważ $|AE| + |EC| = |CD| + |DB|$, więc

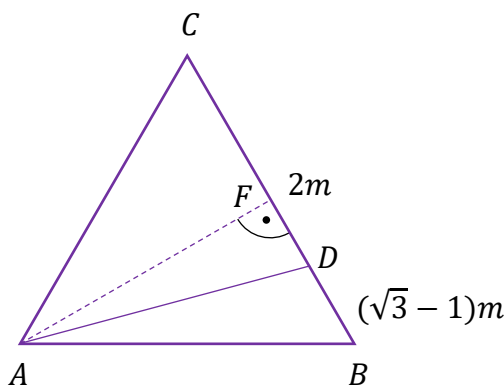
$$|AE| + \frac{1}{2}x = x + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}x$$

$$|AE| = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Zatem $|AE| = |DE|$. To oznacza, że trójkąt prostokątny DEA jest równoramienny i kąt DAC ma miarę 45° .

Sposób III (z twierdzenia o dwusiecznej)

Niech F będzie spodkiem wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka A . Trójkąty ABD i ADC mają wspólną wysokość AF , więc stosunek pól tych trójkątów jest równy stosunkowi długości odpowiednich podstaw. Zatem $|BD| = (\sqrt{3} - 1)m$ oraz $|CD| = 2m$, przy pewnym $m > 0$ (zobacz rysunek).



Wtedy $|AB| = |BC| = (\sqrt{3} + 1)m$, $|AF| = \frac{(\sqrt{3} + 1) \cdot \sqrt{3}}{2}m$ oraz

$|BF| = \frac{1}{2} \cdot |AB| = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}m$. Stąd

$$|DF| = |BF| - |BD| = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}m - (\sqrt{3} - 1)m = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}m$$

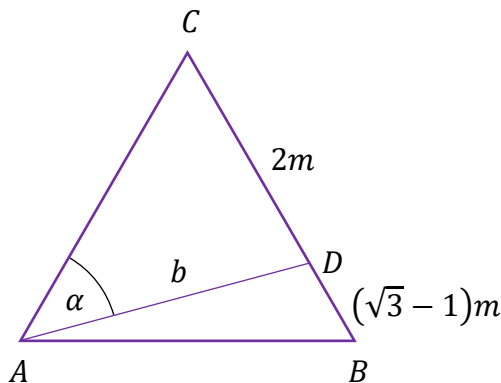
Ponieważ $\frac{|BD|}{|DF|} = \frac{(\sqrt{3} - 1)m}{\frac{(3 - \sqrt{3})m}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ oraz $\frac{|AB|}{|AF|} = \frac{(\sqrt{3} + 1)m}{\frac{(\sqrt{3} + 1) \cdot \sqrt{3}m}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, więc półprosta AD

jest dwusieczną kąta BAF . To oznacza, że

$$|\angle DAF| = \frac{1}{2} \cdot |\angle BAF| = \frac{1}{2} \cdot 30^\circ = 15^\circ \text{ oraz } |\angle DAC| = 30^\circ + |\angle DAF| = 45^\circ.$$

Sposób IV (z twierdzenia cosinusów i sinusów / dwukrotnie z twierdzenia cosinusów)

Oznaczmy kąt CAD przez α , natomiast długość odcinka AD oznaczmy przez b . Trójkąty ABD i ADC mają wspólną wysokość poprowadzoną z wierzchołka A na prostą BC , więc stosunek pól tych trójkątów jest równy stosunkowi długości odpowiednich podstaw. Zatem $|BD| = (\sqrt{3} - 1)m$ oraz $|CD| = 2m$, przy pewnym $m > 0$ (zobacz rysunek).



Wtedy $|AB| = |BC| = |CA| = (\sqrt{3} + 1)m$.

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta ADC :

$$\begin{aligned} b^2 &= |AC|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |CD| \cdot \cos 60^\circ \\ b^2 &= [(\sqrt{3} + 1)m]^2 + (2m)^2 - 2 \cdot (\sqrt{3} + 1)m \cdot 2m \cdot \frac{1}{2} \\ b^2 &= (4 + 2\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3} - 2) \cdot m^2 \\ b &= \sqrt{6}m \end{aligned}$$

Stosujemy twierdzenie sinusów do trójkąta ADC i otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{b}{\sin 60^\circ} &= \frac{2m}{\sin \alpha} \\ \frac{\sqrt{6}m}{\sin 60^\circ} &= \frac{2m}{\sin \alpha} \\ \sin \alpha &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Zatem $|\angle DAC| = 45^\circ$.

Uwaga.

Zamiast $\sin \alpha$ możemy też obliczyć $\cos \alpha$, korzystając po raz drugi z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ADC :

$$\begin{aligned} |CD|^2 &= |AC|^2 + b^2 - 2 \cdot |AC| \cdot b \cdot \cos \alpha \\ (2m)^2 &= [(\sqrt{3} + 1)m]^2 + (\sqrt{6}m)^2 - 2 \cdot (\sqrt{3} + 1)m \cdot \sqrt{6}m \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

$$2 \cdot (\sqrt{3} + 1)m \cdot \sqrt{6}m \cdot \cos \alpha = [(\sqrt{3} + 1)m]^2 + (\sqrt{6}m)^2 - (2m)^2$$

$$\cos \alpha = \frac{(3 + 2\sqrt{3} + 1) + 6 - 4}{2\sqrt{6} \cdot (\sqrt{3} + 1)} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{6} \cdot (\sqrt{3} + 1)} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{2\sqrt{6} \cdot (\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zatem $|\angle DAC| = 45^\circ$.

Sposób V (z twierdzenia Stewarta)

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

a – długość boku trójkąta ABC ,

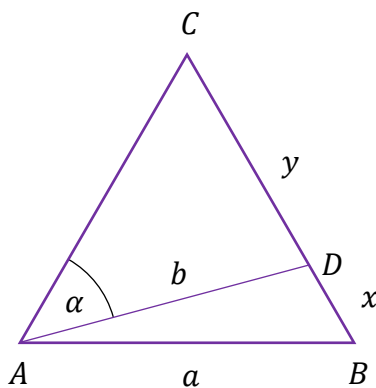
b – długość odcinka AD ,

x – długość odcinka BD ,

y – długość odcinka CD ,

α – miara kąta DAC

(zobacz rysunek).



Trójkąty ABD i ADC mają wspólną wysokość poprowadzoną z wierzchołka A na prostą BC , więc stosunek pól tych trójkątów jest równy stosunkowi długości odpowiednich podstaw. Zatem $x = (\sqrt{3} - 1)m$ oraz $y = 2m$, przy pewnym $m > 0$.

Wtedy $a = (\sqrt{3} + 1)m$.

Stosujemy twierdzenie Stewarta

$$a^2 \cdot x + a^2 \cdot y = (x + y)(b^2 + xy)$$

$$a^2 = b^2 + xy$$

$$[(\sqrt{3} + 1)m]^2 = b^2 + (\sqrt{3} - 1)m \cdot 2m$$

$$b = \sqrt{6}m$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta ADC i otrzymujemy:

$$y^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos \alpha$$

$$(2m)^2 = (\sqrt{6}m)^2 + [(\sqrt{3} + 1)m]^2 - 2 \cdot (\sqrt{3} + 1)m \cdot \sqrt{6}m \cdot \cos \alpha$$

$$4m^2 = 6m^2 + (4 + 2\sqrt{3})m^2 - 2(3\sqrt{2} + \sqrt{6}) \cdot m^2 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{(6 + 2\sqrt{3})}{2(3\sqrt{2} + \sqrt{6})}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}(3\sqrt{2} + \sqrt{6})}{2(3\sqrt{2} + \sqrt{6})}$$

Zatem $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\alpha = 45^\circ$.

Sposób VI (analitycznie)

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

a – długość boku trójkąta ABC ,

α – miara kąta DAC ,

β – miara kąta BAD .

Umieszczamy trójkąt ABC w układzie współrzędnych tak, żeby $A = (0, 0)$, $B = (a, 0)$ i C

leżał w I ćwiartce układu współrzędnych. Wtedy $C = \left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

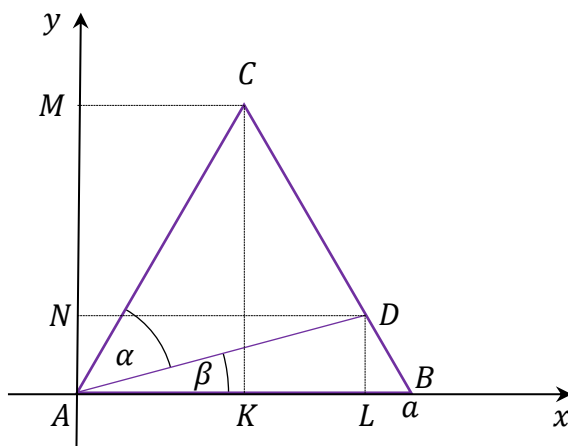
Trójkąty ABD i ACD mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka A , więc

$$\frac{P_{ABD}}{P_{ADC}} = \frac{|BD|}{|CD|}$$

zatem

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

Oznaczmy teraz rzuty prostokątne punktów C i D na oś odciętych przez – odpowiednio – K oraz L , a rzuty prostokątne punktów C i D na oś rzędnych przez – odpowiednio – M oraz N (zobacz rysunek).



Z twierdzenia Talesa otrzymujemy

$$\frac{|KL|}{|KB|} = \frac{|CD|}{|BC|} = \frac{2}{2 + \sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} - 1 \text{ oraz } \frac{|AN|}{|AM|} = \frac{|BD|}{|BC|} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2 + \sqrt{3} - 1} = 2 - \sqrt{3}$$

zatem

$$|KL| = (\sqrt{3} - 1) \cdot |KB| = (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{a}{2} \quad \text{oraz} \quad |AN| = (2 - \sqrt{3}) \cdot |AM| = (2 - \sqrt{3}) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Stąd

$$D = \left(\frac{a}{2} + (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{a}{2}, (2 - \sqrt{3}) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{2} \right)$$

Współczynnik kierunkowy prostej AD jest równy

$$a_{AD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = 2 - \sqrt{3}$$

Zatem

$$\operatorname{tg} \beta = a_{AD} = 2 - \sqrt{3}$$

Ze wzoru na tangens różnicy kątów otrzymujemy

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(60^\circ - \beta) = \frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{\sqrt{3} - (2 - \sqrt{3})}{1 + \sqrt{3} \cdot (2 - \sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3} - 2}{2\sqrt{3} - 2} = 1$$

Zatem $\alpha = 45^\circ$.

Zadanie 4. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.R1) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe [...].

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{9}{25}$ (lub $\frac{54}{150}$).

2 pkt – wyznaczenie mocy zdarzeń B oraz $A \cap B$, np. $|B| = \binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 5$ oraz

$$|A \cap B| = \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot 4 + \binom{4}{2}.$$

1 pkt – wyznaczenie mocy zdarzenia B , np. $|B| = \binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 5$,

ALBO

– wyznaczenie mocy zdarzenia $A \cap B$, np. $|A \cap B| = \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot 4 + \binom{4}{2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga.

Jeżeli zdający, obliczając $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (lub $\frac{|A \cap B|}{|B|}$), pominie w liczniku i mianowniku czynnik $\binom{4}{2}$ bez stosownego komentarza, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie czteroelementowe wariacje z powtórzeniami ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Niech Ω oznacza zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych.

Oznaczmy przez A zdarzenie polegające na tym, że otrzymamy co najmniej jeden raz sześć oczek, natomiast przez B – że otrzymamy dokładnie dwa razy pięć oczek.

Obliczamy moc zdarzenia B : $|B| = \binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 5 = 150$.

Obliczamy moc zdarzenia $A \cap B$: $|A \cap B| = \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot 4 + \binom{4}{2} = 54$.

Obliczamy prawdopodobieństwo warunkowe $P(A|B)$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{54}{150} = \frac{9}{25}$$

Zadanie 5. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.R4) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $x \in (-\infty, -10) \cup \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

3 pkt – zapisanie trzech przedziałów: $(-\infty, -3)$ i $[-3, 2)$ i $[2, +\infty)$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przedziałów **oraz** rozwiązanie nierówności w dwóch spośród tych przedziałów - tj. wyznaczenie części wspólnych zbiorów rozwiązań zapisanych nierówności z rozpatrywanymi przedziałami,
ALBO

– zapisanie czterech przypadków: $x + 3 < 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 < 0$ i $x - 2 \geq 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 \geq 0$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przypadków **oraz** rozwiązanie nierówności w dwóch spośród trzech następujących przypadków: $x + 3 < 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 \geq 0$ - tj. wyznaczenie części wspólnych zbiorów rozwiązań zapisanych nierówności,

ALBO

- zapisanie, że przypadek $x + 3 < 0$ i $x - 2 \geq 0$ jest sprzeczny **oraz** zapisanie trzech przypadków: $x + 3 < 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 \geq 0$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przypadków **oraz** rozwiązanie nierówności w dwóch spośród tych trzech przypadków - tj. wyznaczenie części wspólnych zbiorów rozwiązań zapisanych nierówności,

ALBO

- zapisanie nierówności w postaci równoważnej koniunkcji dwóch nierówności: $x - 2 < -2 + 2 \cdot |x + 3|$ i $x - 2 > -(-2 + 2 \cdot |x + 3|)$, a następnie w postaci równoważnej koniunkcji alternatyw nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej:

$$(x + 3 > \frac{1}{2}x \text{ lub } x + 3 < -\frac{1}{2}x) \text{ i } (x + 3 > \frac{4-x}{2} \text{ lub } x + 3 < -\frac{4-x}{2}),$$

ALBO

- odczytanie z wykresów funkcji f oraz g pierwszych współrzędnych punktów ich przecięcia: $x = -\frac{2}{3}$ oraz $x = -10$ i sprawdzenie rachunkiem poprawności odczytanych współrzędnych.

- 2 pkt – zapisanie trzech przedziałów: $(-\infty, -3)$ i $[-3, 2)$ i $[2, +\infty)$ (z dokładnością do domknięcia) oraz zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przedziałów

ALBO

- zapisanie czterech przypadków: $x + 3 < 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 < 0$ i $x - 2 \geq 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 \geq 0$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przypadków,

ALBO

- zapisanie trzech przypadków: $x + 3 < 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 \geq 0$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przypadków **oraz** zapisanie, że przypadek $x + 3 < 0$ i $x - 2 \geq 0$ jest sprzeczny,

ALBO

- zapisanie nierówności w postaci równoważnej koniunkcji dwóch nierówności: $x - 2 < -2 + 2 \cdot |x + 3|$ i $x - 2 > -(-2 + 2 \cdot |x + 3|)$,

ALBO

- narysowanie wykresów funkcji $f(x) = |x - 2|$ oraz $g(x) = 2 \cdot |x + 3| - 2$.

- 1 pkt – zapisanie trzech przedziałów: $(-\infty, -3)$ i $[-3, 2)$ i $[2, +\infty)$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie danej nierówności w jednym z tych przedziałów bez użycia symbolu wartości bezwzględnej

ALBO

- zapisanie jednego z przedziałów: $(-\infty, -3)$, $[-3, 2)$, $[2, +\infty)$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** rozwiązanie danej nierówności w tym przedziale - tj. wyznaczenie części wspólnej zbioru rozwiązań zapisanej nierówności z rozpatrywanym przedziałem,

ALBO

- zapisanie czterech przypadków: $x + 3 < 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 < 0$ i $x - 2 \geq 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 \geq 0$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie danej nierówności w jednym z tych przypadków bez użycia wartości bezwzględnej,
ALBO
 - zapisanie jednego z trzech przypadków: $x + 3 < 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 \geq 0$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** rozwiązanie danej nierówności w tym przypadku - tj. wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań zapisanych nierówności.
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający, zapisując nierówność bez użycia wartości bezwzględnej, popełni błąd, który nie jest rachunkowy, tylko w jednym z rozpatrywanych przypadków/przedziałów i rozwiąże zadanie do końca, to może uzyskać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej punktacji zgodnej z zasadami oceniania.
2. Jeżeli zdający nie rozpatruje przedziałów, które wyczerpują zbiór wszystkich liczb rzeczywistych i w których nierówność ma różne postaci (lub rozpatruje przypadki wyznaczone jedynie przez nierówności ostre, które nie wyczerpują zbioru $\mathbb{R}$), to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający przy rozwiązaniu graficznym poda zbiór rozwiązań $(-\infty, -10) \cup \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$, ale nie sprawdzi rachunkiem pierwszych współrzędnych punktów przecięcia wykresów funkcji f i g , to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania*Sposób I*

Wyznaczamy przedziały, które wyczerpują zbiór wszystkich liczb rzeczywistych i w których nierówność ma różne postaci: $(-\infty, -3)$ i $[-3, 2)$ i $[2, +\infty)$.

Rozważamy trzy przypadki.

Przypadek 1. (gdy $x \in (-\infty, -3)$)

W tym przypadku nierówność ma postać $-x + 2 + 2(x + 3) < -2$, czyli $x < -10$.

Stąd otrzymujemy $x \in (-\infty, -10)$.

Przypadek 2. (gdy $x \in [-3, 2)$)

W tym przypadku nierówność ma postać $-x + 2 - 2(x + 3) < -2$, czyli $x > -\frac{2}{3}$.

Stąd otrzymujemy $x \in \left(-\frac{2}{3}, 2\right)$.

Przypadek 3. (gdy $x \in [2, +\infty)$)

W tym przypadku nierówność ma postać $x - 2 - 2(x + 3) < -2$, czyli $x > -6$.

Stąd otrzymujemy $x \in [2, +\infty)$.

Ostatecznie rozwiązaniami nierówności $|x - 2| - 2 \cdot |x + 3| < -2$ są wszystkie liczby ze zbioru $(-\infty, -10) \cup (-\frac{2}{3}, +\infty)$.

Sposób II (poprzez koniunkcję nierówności)

Dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej a prawdziwe są równoważności:

$$(1) |x| < a \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x < a \text{ i } x > -a$$

oraz

$$(2) |x| > a \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x > a \text{ lub } x < -a.$$

Przekształcamy nierówność $|x - 2| - 2 \cdot |x + 3| < -2$, korzystając z równoważności (1):

$$x - 2 < -2 + 2 \cdot |x + 3| \quad \text{i} \quad x - 2 > -(-2 + 2 \cdot |x + 3|)$$

$$|x + 3| > \frac{1}{2}x \quad \text{i} \quad |x + 3| > \frac{4 - x}{2}$$

Rozwiązujemy każdą z otrzymanych nierówności, korzystając z równoważności (2):

$$\left(x + 3 > \frac{1}{2}x \quad \text{lub} \quad x + 3 < -\frac{1}{2}x\right) \quad \text{i} \quad \left(x + 3 > \frac{4 - x}{2} \quad \text{lub} \quad x + 3 < -\frac{4 - x}{2}\right)$$

$$(x > -6 \quad \text{lub} \quad x < -2) \quad \text{i} \quad \left(x > -\frac{2}{3} \quad \text{lub} \quad x < -10\right)$$

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad \left(x > -\frac{2}{3} \quad \text{lub} \quad x < -10\right)$$

$$x > -\frac{2}{3} \quad \text{lub} \quad x < -10$$

Rozwiązaniami nierówności $|x - 2| - 2 \cdot |x + 3| < -2$ są wszystkie liczby ze zbioru $(-\infty, -10) \cup (-\frac{2}{3}, +\infty)$.

Zadanie 6. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.R2) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{27}{2}$ lub 27.

- 3 pkt – obliczenie a_1 oraz q : $(a_1, q) = \left(18, \frac{1}{3}\right)$, $(a_1, q) = \left(18, -\frac{1}{3}\right)$, $(a_1, q) = (2, 3)$,
 $(a_1, q) = (2, -3)$
 ALBO
- obliczenie a_3 oraz q : $(a_3, q) = \left(2, \frac{1}{3}\right)$, $(a_3, q) = \left(2, -\frac{1}{3}\right)$, $(a_3, q) = (18, 3)$,
 $(a_3, q) = (18, -3)$,
 ALBO
- obliczenie a_2 oraz q : $(a_2, q) = (-6, -3)$, $(a_2, q) = \left(-6, -\frac{1}{3}\right)$, $(a_2, q) = \left(6, \frac{1}{3}\right)$,
 $(a_2, q) = (6, 3)$ (dla sposobu III),
 ALBO
- wyznaczenie jednej z par (a_1, q) , dla której szereg geometryczny jest zbieżny
 i obliczenie sumy tego szeregu, np. $(a_1, q) = \left(18, \frac{1}{3}\right)$ i $S = 27$, $(a_1, q) = \left(18, -\frac{1}{3}\right)$
 i $S = \frac{27}{2}$,
 ALBO
- wyznaczenie jednej z par (a_3, q) , dla której szereg geometryczny jest zbieżny
 i obliczenie sumy tego szeregu, np. $(a_3, q) = \left(2, \frac{1}{3}\right)$ i $S = 27$, $(a_3, q) = \left(2, -\frac{1}{3}\right)$
 i $S = \frac{27}{2}$,
 ALBO
- wyznaczenie jednej z par (a_2, q) , dla której szereg geometryczny jest zbieżny
 i obliczenie sumy tego szeregu, np. $(a_2, q) = \left(6, \frac{1}{3}\right)$ i $S = 27$, $(a_2, q) = \left(-6, -\frac{1}{3}\right)$
 i $S = \frac{27}{2}$ (dla sposobu III).
- 2 pkt – obliczenie a_1 : $a_1 = 2$ oraz $a_1 = 18$
 ALBO
- obliczenie a_3 : $a_3 = 18$ oraz $a_3 = 2$,
 ALBO
- obliczenie q^2 : $q^2 = 9$ oraz $q^2 = \frac{1}{9}$,
 ALBO
- zapisanie alternatywy równań $-\frac{6}{q} - 6q = 20$ lub $\frac{6}{q} + 6q = 20$ (dla sposobu III),
 ALBO
- zapisanie równania $\frac{36}{q^2} + 36q^2 = 328$ (dla sposobu III).
- 1 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (a_1 lub a_3 , lub q), np.
 $a_1^2 + (20 - a_1)^2 = 328$, $(20 - a_3)^2 + a_3^2 = 328$, $\frac{400}{(q^2 + 1)^2} \cdot (1 + q^4) = 328$
 ALBO
- zapisanie równania z jedną niewiadomą a_2 , np. $a_2^2 = 36$, $20^2 - 2a_2^2 = 328$ (dla sposobu III).
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający odrzuci otrzymane wartości $q = 3$ oraz $q = -3$ (lub parę $(a_1, a_3) = (2, 18)$) bez komentarza, to może otrzymać **4 punkty** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający nie odrzuci wartości $q = 3$ oraz $q = -3$ i zastosuje wzór na sumę szeregu geometrycznego dla $q = 3$ (albo dla $q = -3$), to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
3. a) Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy, ale otrzyma co najmniej jeden iloraz spełniający warunek $|q| < 1$ oraz co najmniej jeden iloraz spełniający warunek $|q| \geq 1$ i rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (2 punkty za pary (a_1, q) oraz 1 punkt za obliczenie sum szeregów dla wszystkich otrzymanych ilorazów q spełniających warunek $|q| < 1$, o ile nie obliczy sumy szeregu dla ilorazu spełniającego warunek $|q| \geq 1$).
3. b) Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy, ale otrzyma co najmniej dwa ilorazy i wszystkie z nich spełniają warunek $|q| < 1$ oraz rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za pary (a_1, q) oraz 1 punkt za obliczenie sum szeregów dla wszystkich otrzymanych ilorazów q), o ile nie nabył prawa do innej punktacji zgodnej z zasadami oceniania.
4. Jeżeli zdający popełni błąd, który nie jest rachunkowy, ale otrzyma co najmniej jeden iloraz spełniający warunek $|q| < 1$ i rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za pary (a_1, q) oraz 1 punkt za obliczenie sum szeregów dla wszystkich otrzymanych ilorazów q spełniających warunek $|q| < 1$, o ile nie obliczy sumy szeregu dla ilorazu spełniającego warunek $|q| \geq 1$), o ile nie nabył prawa do innej punktacji zgodnej z zasadami oceniania.
5. Jeżeli zdający odgadnie rozwiązanie układu równań $a_1 + a_3 = 20$ i $a_1^2 + a_3^2 = 328$:
 $(a_1, a_3) = (18, 2)$ oraz obliczy poprawnie obie sumy szeregu: $S = 27$ i $S = \frac{27}{2}$ i nie obliczy sumy szeregu dla ilorazu spełniającego warunek $|q| \geq 1$, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
6. Jeżeli zdający odgadnie rozwiązanie układu równań $a_1 + a_3 = 20$ i $a_1^2 + a_3^2 = 328$:
 $(a_1, a_3) = (18, 2)$ oraz $(a_1, a_3) = (2, 18)$, ale nie obliczy poprawnie obu sum szeregu: $S = 27$ i $S = \frac{27}{2}$ lub obliczy sumę szeregu dla ilorazu spełniającego warunek $|q| \geq 1$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Niech q oznacza iloraz ciągu (a_n) . Z warunków $a_1 + a_3 = 20$ i $a_1^2 + a_3^2 = 328$ otrzymujemy:

$$a_1^2 + (20 - a_1)^2 = 328$$

$$2a_1^2 - 40a_1 + 72 = 0$$

$$a_1 = 2 \quad \vee \quad a_1 = 18$$

Gdy $a_1 = 2$, to $a_3 = 20 - a_1 = 18$ i wtedy $q^2 = 9$, więc $q = -3$ lub $q = 3$. Dla każdej z tych wartości ilorazu ciąg (a_n) jest rozbieżny i tym samym nie są spełnione warunki zadania.

Gdy $a_1 = 18$, to $a_3 = 20 - a_1 = 2$ i wtedy $q^2 = \frac{1}{9}$, więc $q = -\frac{1}{3}$ lub $q = \frac{1}{3}$. Dla każdej z tych wartości q ciąg (a_n) jest zbieżny, a ponieważ $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$ oraz $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$, więc dla obu tych wartości ilorazu istnieje suma wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) . Dla $a_1 = 18$ i $q = -\frac{1}{3}$ suma S wszystkich wyrazów ciągu (a_n) jest równa

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{18}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{27}{2}$$

Dla $a_1 = 18$ i $q = \frac{1}{3}$ suma S wszystkich wyrazów ciągu (a_n) jest równa

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{18}{1 - \frac{1}{3}} = 27$$

Sposób II

Niech q oznacza iloraz ciągu (a_n) . Z warunku $a_1 + a_3 = 20$ otrzymujemy

$$a_1 + a_1 q^2 = 20, \text{ więc } a_1 = \frac{20}{q^2 + 1} \text{ i } a_1 \neq 0.$$

Stąd i z warunku $a_1^2 + a_3^2 = 328$ otrzymujemy:

$$a_1^2 + (a_1 q^2)^2 = 328$$

$$a_1^2 \cdot (1 + q^4) = 328$$

$$\frac{400}{(q^2 + 1)^2} \cdot (1 + q^4) = 328$$

$$72q^4 - 656q^2 + 72 = 0$$

$$9q^4 - 82q^2 + 9 = 0$$

$$\Delta = (-82)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 9 = 6400$$

$$q^2 = \frac{82 - 80}{2 \cdot 9} = \frac{1}{9} \quad \vee \quad q^2 = \frac{82 + 80}{2 \cdot 9} = 9$$

$$q = -\frac{1}{3} \quad \vee \quad q = \frac{1}{3} \quad \vee \quad q = -3 \quad \vee \quad q = 3$$

Ponieważ $a_1 \neq 0$, więc dla $q = -3$ oraz $q = 3$ ciąg (a_n) nie jest zbieżny.

Gdy $q = -\frac{1}{3}$, to $a_1 = \frac{20}{q^2 + 1} = 18$ i ciąg (a_n) jest zbieżny. Ponadto $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$, więc istnieje suma S wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego i jest ona równa

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{18}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{27}{2}$$

Gdy $q = \frac{1}{3}$, to $a_1 = \frac{20}{q^2+1} = 18$ i ciąg (a_n) jest zbieżny. Ponadto $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$, więc istnieje suma S wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego i jest ona równa

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{18}{1 - \frac{1}{3}} = 27$$

Sposób III (poprzez a_2)

Niech q oznacza iloraz ciągu (a_n) . Z warunków $a_1 + a_3 = 20$ i $a_1^2 + a_3^2 = 328$ otrzymujemy:

$$a_1^2 + a_3^2 = 328$$

$$(a_1 + a_3)^2 - 2a_1 \cdot a_3 = 328$$

$$20^2 - 2a_1 \cdot a_3 = 328$$

Stąd, po zastosowaniu własności ciągu geometrycznego, dostajemy

$$20^2 - 2a_2^2 = 328$$

$$a_2 = -6 \quad \vee \quad a_2 = 6$$

Przypadek 1. (gdy $a_2 = -6$).

Warunek $a_1 + a_3 = 20$ zapisujemy w postaci $\frac{a_2}{q} + a_2 \cdot q = 20$ i obliczamy iloraz ciągu:

$$-\frac{6}{q} - 6q = 20$$

$$-6q^2 - 20q - 6 = 0$$

$$q = \frac{20 - 16}{-12} = -\frac{1}{3} \quad \vee \quad q = \frac{20 + 16}{-12} = -3$$

Gdy $q = -\frac{1}{3}$ i $a_2 = -6$, to ciąg (a_n) jest zbieżny. Ponadto $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$, więc istnieje suma S wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego i jest ona równa

$$S = \frac{\frac{a_2}{q}}{1-q} = \frac{18}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{27}{2}$$

Gdy $q = -3$ i $a_2 = -6$, to ciąg (a_n) jest rozbieżny, więc warunki zadania nie są spełnione.

Przypadek 2. (gdy $a_2 = 6$).

Warunek $a_1 + a_3 = 20$ zapisujemy w postaci $\frac{a_2}{q} + a_2 \cdot q = 20$ i obliczamy iloraz ciągu:

$$\frac{6}{q} + 6q = 20$$

$$6q^2 - 20q + 6 = 0$$

$$q = \frac{20 - 16}{12} = \frac{1}{3} \quad \vee \quad q = \frac{20 + 16}{12} = 3$$

Gdy $q = \frac{1}{3}$ i $a_2 = 6$, to ciąg (a_n) jest zbieżny. Ponadto $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$, więc istnieje suma S wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego i jest ona równa

$$S = \frac{\frac{a_2}{q}}{1 - q} = \frac{18}{1 - \frac{1}{3}} = 27$$

Gdy $q = 3$ i $a_2 = 6$, to ciąg (a_n) jest rozbieżny, więc warunki zadania nie są spełnione.

Zadanie 7. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.11) przeprowadza dowody geometryczne.

Zasady oceniania (dla *sposobów I* oraz *II*)

4 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

3 pkt – zapisanie związku między długościami podstaw trapezu, np. $\frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a+b}{2} + b\right)}{\frac{1}{2} \cdot \left(a + \frac{a+b}{2}\right)} = \frac{1}{2}$.

2 pkt – zapisanie równań $\frac{P_{EFCD}}{P_{ABFE}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (d+b) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (a+d) \cdot \frac{h}{2}}$ oraz $\frac{P_{EFCD}}{P_{ABFE}} = \frac{1}{2}$ oraz $d = \frac{a+b}{2}$

ALBO

– spełnienie dwóch spośród czterech poniższych warunków:

1) zapisanie równań $\frac{P_{EFCD}}{P_{ABFE}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (d+b) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (a+d) \cdot \frac{h}{2}}$ albo $\frac{\frac{1}{2} \cdot (d+b) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (a+d) \cdot \frac{h}{2}} = \frac{1}{2}$,

2) zapisanie równań $\frac{P_{EFCD}}{P_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (d+b) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot h}$ albo $\frac{\frac{1}{2} \cdot (d+b) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot h} = \frac{1}{3}$,

3) zapisanie równań $\frac{P_{ABFE}}{P_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (a+d) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot h}$ albo $\frac{\frac{1}{2} \cdot (a+d) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot h} = \frac{2}{3}$,

4) zapisanie równania $\frac{1}{2} \cdot (a + d) \cdot \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \cdot (b + d) \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$.

1 pkt – spełnienie jednego spośród czterech poniższych warunków:

1) zapisanie równań $\frac{P_{EFCD}}{P_{ABFE}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (d + b) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (a + d) \cdot \frac{h}{2}}$ albo $\frac{\frac{1}{2} \cdot (d + b) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (a + d) \cdot \frac{h}{2}} = \frac{1}{2}$,

2) zapisanie równań $\frac{P_{EFCD}}{P_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (d + b) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h}$ albo $\frac{\frac{1}{2} \cdot (d + b) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h} = \frac{1}{3}$,

3) zapisanie równań $\frac{P_{ABFE}}{P_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (a + d) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h}$ albo $\frac{\frac{1}{2} \cdot (a + d) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h} = \frac{2}{3}$,

4) zapisanie równania $\frac{1}{2} \cdot (a + d) \cdot \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \cdot (b + d) \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$,
ALBO

– zapisanie równania $d = \frac{a + b}{2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli w rozwiązaniu zdający błędnie zakłada, że trapezy $ABFE$ i $EFCD$ są podobne i na tym opiera rozwiązanie, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za zapisanie związku między długościami podstaw trapezu i odcinka łączącego środki jego ramion.
2. Jeżeli zdający rozpatruje trapez o konkretnych wymiarach i na tym opiera całe rozwiązanie, to otrzymuje **0 punktów**, o ile nie nabył prawa do innej punktacji zgodnej z zasadami oceniania.

3. Jeżeli zdający zapisze jednocześnie $\frac{P_{EFCD}}{P_{ABFE}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a+b}{2} + b\right)}{\frac{1}{2} \cdot \left(a + \frac{a+b}{2}\right)}$ oraz $\frac{P_{EFCD}}{P_{ABFE}} = \frac{1}{2}$, to może otrzymać **3 punkty**.

Zasady oceniania (dla sposobu II)

4 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

3 pkt – wyznaczenie stosunku pól trójkątów AKE i KFC : $1 : 5$.

2 pkt – zapisanie pól trapezów $EFCD$ i $ABFE$ w zależności od pól trójkątów AKE i KFC .

1 pkt – zapisanie zależności pomiędzy polami trójkątów podobnych ACD i AKE oraz zapisanie zależności pomiędzy polami trójkątów podobnych ABC i KFC .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

a, b – długość – odpowiednio – dłuższej i krótszej podstawy trapezu,

d – długość odcinka łączącego środki ramion trapezu,

h – wysokość trapezu.

Z własności trapezu otrzymujemy $d = \frac{a+b}{2}$. Trapezy $EFCD$ i $ABFE$ mają równe wysokości oraz stosunek pola trapezu $EFCD$ do pola trapezu $ABFE$ jest równy $\frac{1}{2}$, więc

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot (d+b) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (a+d) \cdot \frac{h}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d+b}{a+d} = \frac{1}{2}$$

$$2d + 2b = a + d$$

$$d + 2b = a$$

Stąd i z zależności $d = \frac{a+b}{2}$ otrzymujemy

$$a + b + 4b = 2a$$

$$5b = a$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{5}$$

To należało wykazać.

Sposób 1a

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

a, b – długość – odpowiednio – dłuższej i krótszej podstawy trapezu,

d – długość odcinka łączącego środki ramion trapezu,

h – wysokość trapezu.

Trapezy $EFCD$ i $ABFE$ mają równe wysokości oraz stosunek pola trapezu $EFCD$ do pola trapezu $ABFE$ jest równy $\frac{1}{2}$, więc

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot (d+b) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (a+d) \cdot \frac{h}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d+b}{a+d} = \frac{1}{2}$$

$$2d + 2b = a + d$$

$$d = a - 2b$$

Ponadto stosunek pola trapezu $EFCD$ do pola trapezu $ABCD$ jest równy $\frac{1}{3}$, więc

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot (d+b) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot h} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{d+b}{2(a+b)} = \frac{1}{3}$$

$$3d + 3b = 2a + 2b$$

$$3d = 2a - b$$

Stąd i zależności $d = a - 2b$ otrzymujemy

$$3(a - 2b) = 2a - b$$

$$a = 5b$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{5}$$

To należało wykazać.

Sposób II (przez pola trójkątów podobnych)

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

a, b – długość – odpowiednio – dłuższej i krótszej podstawy trapezu,

K – punkt przecięcia przekątnej AC z odcinkiem EF ,

n, m – pole – odpowiednio – trójkąta AKE i KFC .

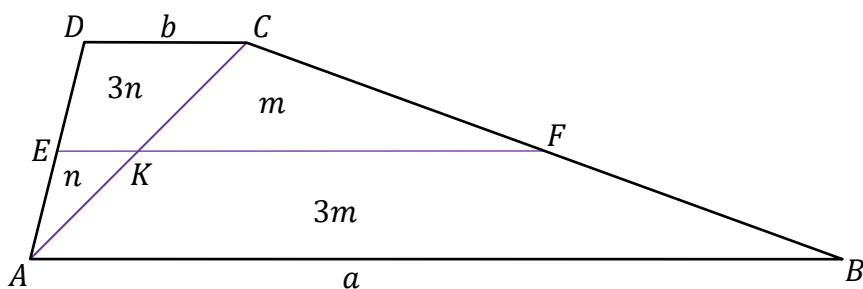
Trójkąty ACD i AKE oraz trójkąty ABC i KFC są podobne (cecha kkk), a skala każdego z tych podobieństw jest równa 2, gdyż E i F to środki boków AD oraz BC . Zatem

$$P_{ACD} = 2^2 \cdot P_{AKE} = 4n \text{ oraz } P_{ABC} = 2^2 \cdot P_{KFC} = 4m$$

Stąd

$$P_{EKCD} = 3n \text{ oraz } P_{ABFK} = 3m$$

(zobacz rysunek).



Zatem

$$P_{EFCD} = 3n + m \text{ oraz } P_{ABFE} = n + 3m$$

Trójkąty ACD i ABC mają wspólną wysokość, więc

$$\frac{P_{ACD}}{P_{ABC}} = \frac{b}{a} = \frac{4n}{4m} = \frac{n}{m}$$

Z warunków zadania otrzymujemy

$$\frac{P_{EFCD}}{P_{ABFE}} = \frac{3n + m}{n + 3m} = \frac{1}{2}$$

Stąd

$$6n + 2m = n + 3m$$

$$5n = m$$

Zatem

$$\frac{b}{a} = \frac{n}{m} = \frac{n}{5n} = \frac{1}{5}$$

To należało wykazać.

Zadanie 8. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IX.R2) znajduje punkty wspólne dwóch okręgów; IX.R3) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość, dodaje wektory i mnoży wektor przez liczbę, oba te działania wykonuje zarówno analitycznie, jak i geometrycznie.

Zasady oceniania

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $A = \left(\frac{16}{5}, -\frac{13}{5}\right)$, $B = (-1, -2)$

oraz $M = \left(\frac{2}{5}, -\frac{11}{5}\right)$.

4 pkt – zapisanie równania $\left[x_M - \frac{16}{5}, y_M - \left(-\frac{13}{5}\right)\right] = -2 \cdot [x_M - (-1), y_M - (-2)]$

ALBO

– zapisanie układu równań z dwiema niewiadomymi, który pozwala obliczyć

współrzędne punktu M , np. $\sqrt{(-1 - x_M)^2 + (-2 - y_M)^2} = \sqrt{2}$ oraz

$$\sqrt{(x_M - 3,2)^2 + (y_M + 2,6)^2} = 2\sqrt{2},$$

ALBO

– obliczenie współrzędnych punktów A oraz B : $A = \left(\frac{16}{5}, -\frac{13}{5}\right)$ i $B = (-1, -2)$

oraz zapisanie równości $x_M = \frac{1}{3}x_A + \frac{2}{3}x_B$ oraz $y_M = \frac{1}{3}y_A + \frac{2}{3}y_B$.

3 pkt – obliczenie współrzędnych punktów A oraz B : $A = \left(\frac{16}{5}, -\frac{13}{5}\right)$ oraz

$$B = (-1, -2)$$

ALBO

- zapisanie równania z jedną niewiadomą, pozwalającego obliczyć pierwsze (lub drugie) współrzędne punktów przecięcia okręgów, np.

$$(-7y - 15 - 2)^2 + (y - 4)^2 = 45 \text{ oraz zapisanie równości } x_M = \frac{1}{3}x_A + \frac{2}{3}x_B \text{ oraz}$$

$$y_M = \frac{1}{3}y_A + \frac{2}{3}y_B.$$

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą, pozwalającego obliczyć pierwsze (lub drugie) współrzędne punktów przecięcia okręgów, np.

$$(-7y - 15 - 2)^2 + (y - 4)^2 = 45,$$

ALBO

- wyznaczenie równania prostej AB , np. $2x + 14y = -30$ oraz zapisanie równości

$$x_M = \frac{1}{3}x_A + \frac{2}{3}x_B \text{ oraz } y_M = \frac{1}{3}y_A + \frac{2}{3}y_B,$$

ALBO

- zapisanie współrzędnych punktu B : $B = (-1, -2)$ i sprawdzenie rachunkiem, że punkt B jest punktem przecięcia okręgów oraz wyznaczenie równania prostej AB ,
ALBO

- zapisanie współrzędnych punktu B : $B = (-1, -2)$ i sprawdzenie rachunkiem, że punkt B jest punktem przecięcia okręgów oraz obliczenie współrzędnych środka odcinka AB : $\left(\frac{11}{10}, -\frac{23}{10}\right)$.

1 pkt – wyznaczenie równania prostej AB , np. $2x + 14y = -30$

ALBO

- zapisanie równości $x_M = \frac{1}{3}x_A + \frac{2}{3}x_B$ oraz $y_M = \frac{1}{3}y_A + \frac{2}{3}y_B$,

ALBO

- zapisanie współrzędnych punktu B : $B = (-1, -2)$ i sprawdzenie rachunkiem, że punkt B jest punktem przecięcia okręgów oraz zapisanie/obliczenie współczynnika kierunkowego prostej przechodzącej przez środki okręgów: 7.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający błędnie identyfikuje punkt A jako $(-1, -2)$, to może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe i otrzyma punkty A oraz B , których pierwsze współrzędne są liczbami dodatnimi, i konsekwentnie do popełnionych błędów rozwiązuje zadanie do końca, rozważając dwa przypadki, to może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe i otrzyma punkty A oraz B , których pierwsze współrzędne są liczbami ujemnymi, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (trzeci punkt otrzymuje za zapisanie równości $x_M = \frac{1}{3}x_A + \frac{2}{3}x_B$ oraz $y_M = \frac{1}{3}y_A + \frac{2}{3}y_B$).

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy współrzędne punktów A oraz B , w których przecinają się okręgi $\mathcal{O}_1$ oraz $\mathcal{O}_2$:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 = 5 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 - (x-2)^2 - (y-4)^2 = 5 - 45 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 - x^2 + 4x - 4 - y^2 + 8y - 16 = -40 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 14y = -30 \quad /:2 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 7y = -15 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -7y - 15 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -7y - 15 \\ (-7y - 15 - 2)^2 + (y - 4)^2 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -7y - 15 \\ 50y^2 + 230y + 260 = 0 \end{cases}$$

Stąd

$$y = -\frac{13}{5} \quad \text{lub} \quad y = -2$$

Gdy $y = -\frac{13}{5}$ to wtedy $x = -7 \cdot \left(-\frac{13}{5}\right) - 15 = \frac{16}{5}$.

Gdy $y = -2$ to wtedy $x = -7 \cdot (-2) - 15 = -1$.

Ponieważ pierwsza współrzędna punktu A jest dodatnia, więc $A = \left(\frac{16}{5}, -\frac{13}{5}\right)$

oraz $B = (-1, -2)$.

Oznaczmy przez x_M i y_M odpowiednie współrzędne punktu M , tj. $M = (x_M, y_M)$. Wtedy

$$\overrightarrow{AM} = -2 \cdot \overrightarrow{BM}$$

$$\left[x_M - \frac{16}{5}, y_M - \left(-\frac{13}{5}\right)\right] = -2 \cdot [x_M - (-1), y_M - (-2)]$$

$$\left[x_M - \frac{16}{5}, y_M + \frac{13}{5}\right] = [-2x_M - 2, -2y_M - 4]$$

$$x_M - \frac{16}{5} = -2x_M - 2 \quad \wedge \quad y_M + \frac{13}{5} = -2y_M - 4$$

$$x_M = \frac{2}{5} \wedge y_M = -\frac{11}{5}$$

Zatem $M = \left(\frac{2}{5}, -\frac{11}{5}\right)$.

Zadanie 9. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.R6) rozwiązuje równania trygonometryczne.

Zasady oceniania (dla *sposobów I–III*)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right), \left(-\frac{\pi}{6}\right), \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$.

4 pkt – zapisanie założenia $\cos x \neq 0$ oraz rozwiązanie alternatywy równań $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w przedziale $[-\pi, \pi]$: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right), \left(-\frac{\pi}{6}\right), \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$ (dla *sposobów I* oraz *III*)
ALBO

– rozwiązanie jednego z równań alternatywy $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, gdzie $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ i $k \in \mathbb{Z}$, w przedziale $[-\pi, \pi]$, np.

$\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ i $\frac{\pi}{3}$ (rozwiązania równania $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ w przedziale $[-\pi, \pi]$),

$\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ oraz $\frac{5\pi}{6}$ (rozwiązania równania $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w przedziale $[-\pi, \pi]$),

oraz uzasadnienie, że liczby postaci $\frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie spełniają równania $3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$ (dla *sposobów I* oraz *III*),
ALBO

– rozwiązanie alternatywy równań $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w zbiorze $\mathbb{R}$:

$x = \frac{\pi}{3} + \pi k$ oraz $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, **oraz** uzasadnienie, że liczby postaci $\frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie spełniają równania

$3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$ (dla *sposobów I* oraz *III*),
ALBO

– zapisanie założenia $\cos(2x) \neq 0$ oraz rozwiązanie równania $\operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$ w przedziale $[-\pi, \pi]$: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right), \left(-\frac{\pi}{6}\right), \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$ (dla *sposobu II*),
ALBO

– rozwiązanie równania $\operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$ w zbiorze $\mathbb{R}$: $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$,
oraz uzasadnienie, że liczby postaci $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie spełniają równania $3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0$ (dla *sposobu II*).

3 pkt – zapisanie założenia $\cos x \neq 0$ oraz rozwiązanie alternatywy równań $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub

$\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w zbiorze $\mathbb{R}$:

$x = \frac{\pi}{3} + \pi k$ oraz $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ (dla *sposobów I* oraz *III*)

ALBO

– przekształcenie równania do postaci alternatywy równań $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

oraz rozwiązanie jednego z równań tej alternatywy w przedziale $[-\pi, \pi]$, np.

$(-\frac{2\pi}{3})$ i $\frac{\pi}{3}$ (rozwiązania równania $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ w przedziale $[-\pi, \pi]$),

$(-\frac{\pi}{6})$ i $\frac{5\pi}{6}$ (rozwiązania równania $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w przedziale $[-\pi, \pi]$),

(dla *sposobów I* oraz *III*),

ALBO

– przekształcenie równania do postaci alternatywy równań $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

oraz uzasadnienie, że liczby postaci $\frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie spełniają równania

$3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$ (dla *sposobów I* oraz *III*)

ALBO

– zapisanie założenia $\cos(2x) \neq 0$ oraz rozwiązanie równania $\operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$

w zbiorze $\mathbb{R}$: $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ (dla *sposobu II*),

ALBO

– przekształcenie równania do postaci $\operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$ **oraz** uzasadnienie, że liczby

postaci $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie spełniają równania $3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0$

(dla *sposobu II*).

2 pkt – przekształcenie równania do alternatywy równań $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (dla

sposobów I oraz *III*)

ALBO

– przekształcenie równania do postaci $-3\operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 3 = 0$ **oraz**

uzasadnienie, że liczby postaci $\frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie spełniają równania

$3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$ (dla *sposobu I*),

ALBO

– przekształcenie równania do postaci $\operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$ (dla *sposobu II*).

1 pkt – przekształcenie równania do postaci $-3\operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 3 = 0$ (dla *sposobu I*)

ALBO

– zastosowanie wzoru na cosinus podwojonego kąta i zapisanie równania

$3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0$ (dla *sposobu II*),

ALBO

– zastosowanie wzoru na sinus podwojonego kąta oraz wzorów skróconego mnożenia i przekształcenie równania do postaci

$(\sqrt{3}\cos x + \sin x - 2\sin x)(\sqrt{3}\cos x + \sin x + 2\sin x) = 0$ (dla *sposobu III*),

ALBO

– uzasadnienie, że liczby postaci $\frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie spełniają równania

$$3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0 \quad (\text{dla sposobów I oraz III}).$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla sposobów IV–V)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right), \left(-\frac{\pi}{6}\right), \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$.

4 pkt – rozwiązanie równania $\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = 0$ w zbiorze $\mathbb{R}$: $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

(dla sposobu IV),

ALBO

– rozwiązanie równania $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = 0$ w zbiorze $\mathbb{R}$: $x = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

(dla sposobu IV),

ALBO

– rozwiązanie obydwu równań alternatywy $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$ lub $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$

w zbiorze $\mathbb{R}$:

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k \text{ oraz } x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z} \quad (\text{dla sposobu V}),$$

ALBO

– przekształcenie równania do postaci alternatywy równań $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$ lub

$\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0$ oraz rozwiązanie jednego z równań tej alternatywy w przedziale $[-\pi, \pi]$, np.

$$\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \text{ i } \frac{\pi}{3} \quad (\text{rozwiązania równania } \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0 \text{ w przedziale } [-\pi, \pi]),$$

$$\left(-\frac{\pi}{6}\right) \text{ oraz } \frac{5\pi}{6} \quad (\text{rozwiązania równania } \sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0 \text{ w przedziale } [-\pi, \pi]),$$

(dla sposobu V),

ALBO

– przekształcenie równania do postaci alternatywy równań $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$ lub

$\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$ oraz rozwiązanie jednego z równań tej alternatywy w przedziale $[-\pi, \pi]$, np.

$$\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \text{ i } \frac{\pi}{3} \quad (\text{rozwiązania równania } \sqrt{3}\cos x - \sin x = 0 \text{ w przedziale } [-\pi, \pi]),$$

$$\left(-\frac{\pi}{6}\right) \text{ oraz } \frac{5\pi}{6} \quad (\text{rozwiązania równania } \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0 \text{ w przedziale } [-\pi, \pi]),$$

(dla sposobu V).

3 pkt – przekształcenie równania do postaci $\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = 0$ (dla sposobu IV)

ALBO

– przekształcenie równania do postaci $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = 0$ (dla sposobu IV),

ALBO

- przekształcenie równania do postaci alternatywy równań $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$ lub $\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0$ **oraz** rozwiązanie jednego z równań tej alternatywy w zbiorze $\mathbb{R}$, np.

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k \text{ (rozwiązania równania } \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0 \text{ w zbiorze } \mathbb{R}),$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k \text{ (rozwiązania równania } \sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0 \text{ w zbiorze } \mathbb{R}),$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$ (dla **sposobu V**),

- przekształcenie równania do postaci alternatywy równań $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$ lub $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$ **oraz** rozwiązanie jednego z równań tej alternatywy w zbiorze $\mathbb{R}$, np.

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k \text{ (rozwiązania równania } \sqrt{3}\cos x - \sin x = 0 \text{ w zbiorze } \mathbb{R}),$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k \text{ (rozwiązania równania } \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0 \text{ w zbiorze } \mathbb{R}), \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z} \text{ (dla } \textbf{sposobu V}).$$

2 pkt – przekształcenie równania do postaci $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x) = 0$ (dla **sposobu IV**)

ALBO

- przekształcenie równania do postaci alternatywy równań

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0 \text{ lub } \sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0 \text{ (dla } \textbf{sposobu V}),$$

ALBO

- przekształcenie równania do postaci alternatywy równań

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0 \text{ lub } \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0 \text{ (dla } \textbf{sposobu V}).$$

1 pkt – zastosowanie wzoru na cosinus podwojonego kąta i zapisanie równania

$$3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0 \text{ (dla } \textbf{sposobu IV})$$

ALBO

- zastosowanie wzoru na sinus podwojonego kąta oraz wzorów skróconego mnożenia i przekształcenie równania do postaci

$$(\sqrt{3}\cos x + \sin x - 2\sin x)(\sqrt{3}\cos x + \sin x + 2\sin x) = 0 \text{ (dla } \textbf{sposobu V}),$$

ALBO

- zastosowanie wzoru na sinus podwojonego kąta i obliczenie wyróżnika Δ trójkianu kwadratowego $3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x$ zmiennej np. $\cos x$:

$$\Delta = (4\sqrt{3}\sin x)^2.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:

- niepoprawne zastosowanie wzoru na sumę/różnicę cosinusów/sinusów,
- niepoprawne zastosowanie wzoru na iloczyn cosinusów/sinusów,
- błędne zastosowanie nieparzystości/parzystości funkcji trygonometrycznej,

ale zdający otrzyma elementarne równania trygonometryczne postaci $\sin(ax + b) = c$, $\cos(ax + b) = c$, gdzie $a \neq 0$, $a^2 \neq 1$, $b \neq 0$, $c \in [-1, 1]$, i rozwiązanie doprowadzi konsekwentnie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej punktacji zgodnej z zasadami oceniania.

2. Jeżeli zdający błędnie stosuje metodę analizy starożytnych, np. podnosi obie strony równania $3 \cos(2x) = -\sqrt{3} \sin(2x)$ do kwadratu i nie sprawdza rachunkiem, czy wszystkie otrzymane liczby są rozwiązaniami, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **3 punkty**; natomiast jeżeli odrzuci co najmniej jedno rozwiązanie „obce” (ale nie odrzuci wszystkich rozwiązań „obcych”), to może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający dzieli obie strony równania przez wyrażenie $a(x)$ zawierające niewiadomą x i nie zapisze założenia $a(x) \neq 0$, ani też nie rozważy przypadku $a(x) = 0$, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I (poprzez sinus podwojonego kąta i tangens)

Stosujemy wzory na sinus podwojonego kąta i przekształcamy równanie

$3 \cos^2 x + \sqrt{3} \sin(2x) - 3 \sin^2 x = 0$ do postaci

$$3 \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 3 \sin^2 x = 0$$

Należy rozważyć dwa przypadki.

Przypadek 1. (gdy $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$).

Dzielimy obie strony równania $3 \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 3 \sin^2 x = 0$ przez $\cos^2 x$ i otrzymujemy

$$3 + \frac{2\sqrt{3} \sin x}{\cos x} - \frac{3 \sin^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$3 + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{tg}^2 x = 0$$

$$-3 \operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 3 = 0$$

$$\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 3 = 48$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \quad \vee \quad \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Rozwiązaniami równania $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ w zbiorze $\mathbb{R}$ są wszystkie liczby postaci $\frac{\pi}{3} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Zatem rozwiązaniami tego równania w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby $(-\frac{2\pi}{3})$ i $\frac{\pi}{3}$.

Rozwiązaniami równania $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w zbiorze $\mathbb{R}$ są wszystkie liczby postaci $-\frac{\pi}{6} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Zatem rozwiązaniami tego równania w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby $(-\frac{\pi}{6})$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Przypadek 2. (gdy $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$).

Ponieważ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ oraz $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 1$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}$, więc równanie $3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$ przyjmuje postać

$$3 \cdot 0^2 + 2\sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) \cdot 0 - 3 \cdot 1 = 0$$

czyli $-3 = 0$. To oznacza, że wśród liczb postaci $\frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie ma rozwiązań równania $3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$.

Ostatecznie rozwiązaniami równania $3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Sposób II (poprzez cosinus podwojonego kąta i tangens)

Stosujemy wzory na cosinus podwojonego kąta i przekształcamy równanie

$3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$ do postaci

$$3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0$$

Należy rozważyć dwa przypadki.

Przypadek 1. (gdy $2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$).

Dzielimy obie strony równania $3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0$ przez $\cos(2x)$ i otrzymujemy

$$3 + \sqrt{3} \cdot \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = 0$$

$$\operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$$

$$2x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Stąd otrzymujemy cztery rozwiązania w przedziale $[-\pi, \pi]$: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Przypadek 2. (gdy $2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$).

Ponieważ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}$, więc równanie

$3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0$ przyjmuje postać

$$3 \cdot 0 + \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$$

i stąd $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Korzystając z jedynki trygonometrycznej, otrzymujemy

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 1$$

$$0^2 + 0^2 = 1$$

czyli $0 = 1$. To oznacza, że wśród liczb postaci $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie ma rozwiązań równania $3 \cos(2x) + \sqrt{3} \sin(2x) = 0$.

Ostatecznie rozwiązaniami równania $3 \cos^2 x + \sqrt{3} \sin(2x) - 3 \sin^2 x = 0$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Sposób III

Przekształcamy równanie $3 \cos^2 x + \sqrt{3} \sin(2x) - 3 \sin^2 x = 0$ równoważnie, stosując wzór na sinus podwojonego kąta i wzory skróconego mnożenia:

$$3 \cos^2 x + \sqrt{3} \sin(2x) - 3 \sin^2 x = 0$$

$$3 \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 3 \sin^2 x = 0$$

$$(\sqrt{3} \cos x + \sin x)^2 - 4 \sin^2 x = 0$$

$$(\sqrt{3} \cos x + \sin x - 2 \sin x)(\sqrt{3} \cos x + \sin x + 2 \sin x) = 0$$

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 0 \quad \vee \quad \sqrt{3} \cos x + 3 \sin x = 0$$

$$\sin x = \sqrt{3} \cos x \quad \vee \quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cos x$$

Przypadek 1. (gdy $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$).

Dzielimy strony równań alternatywy przez $\cos x$ i otrzymujemy

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \quad \vee \quad \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Rozwiązaniami równania $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ w zbiorze $\mathbb{R}$ są wszystkie liczby postaci $\frac{\pi}{3} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Zatem rozwiązaniami tego równania w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ i $\frac{\pi}{3}$.

Rozwiązaniami równania $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w zbiorze $\mathbb{R}$ są wszystkie liczby postaci $-\frac{\pi}{6} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Zatem rozwiązaniami alternatywy równań $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Przypadek 2. (gdy $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$).

Ponieważ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$, więc równania alternatywy $\sin x = \sqrt{3} \cos x$ lub

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cos x$ przyjmują postać

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = \sqrt{3} \cdot 0 \quad \text{oraz} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 0$$

i stąd $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Korzystając z jedynki trygonometrycznej, otrzymujemy

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 1$$

$$0^2 + 0^2 = 1$$

czyli $0 = 1$. To oznacza, że wśród liczb postaci $\frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie ma rozwiązań

równania $\sin x = \sqrt{3} \cos x$ i nie ma rozwiązań równania $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cos x$.

Ostatecznie rozwiązaniami równania $3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Sposób IV (poprzez cosinus podwojonego kąta i sinus sumy)

Przekształcamy równanie $3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$ równoważnie, stosując wzór na cosinus podwojonego kąta i sinus sumy kątów:

$$3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$$

$$3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0 \quad /: 2\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = 0$$

$$2x + \frac{\pi}{3} = \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Rozwiązaniami równania $3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Sposób V

Przekształcamy równanie $3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$ równoważnie, stosując wzór na sinus podwojonego kąta i wzory skróconego mnożenia:

$$3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$$

$$3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$$

$$(\sqrt{3}\cos x + \sin x)^2 - 4\sin^2 x = 0$$

$$(\sqrt{3}\cos x + \sin x - 2\sin x)(\sqrt{3}\cos x + \sin x + 2\sin x) = 0$$

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0 \quad \vee \quad \sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0$$

Rozwiązujemy równanie $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$ w zbiorze $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0 \quad /: 2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$$

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stąd rozwiązaniami równania $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby:

$$\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \text{ oraz } \frac{\pi}{3}.$$

Rozwiązujemy równanie $\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0$ w zbiorze $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0 \quad /: 2\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$$

$$x + \frac{\pi}{6} = \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stąd rozwiązaniami równania $\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby:

$$\left(-\frac{\pi}{6}\right) \text{ oraz } \frac{5\pi}{6}.$$

Ostatecznie rozwiązaniami równania $3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Zadanie 10. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: X.3) rozpoznaje w [...] ostrosłupach kąty między odcinkami [...] oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów; X.5) oblicza [...] pola powierzchni [...] ostrosłupów [...].

Zasady oceniania

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 918.

4 pkt – obliczenie długości krawędzi SC i BE : $|SC| = 34$ i $|BE| = 15$

ALBO

– obliczenie długości krawędzi SC i BS : $|SC| = 34$ i $|BS| = 5\sqrt{34}$,

ALBO

– obliczenie długości krawędzi BS : $|BS| = 5\sqrt{34}$ i zapisanie, że trójkąt SBC jest prostokątny (albo z rozwiązania wynika, że zdający rozpatruje trójkąt SBC jako prostokątny),

ALBO

– obliczenie długości krawędzi AS i SB : $|AS| = 4\sqrt{34}$ i $|BS| = 5\sqrt{34}$,

ALBO

– obliczenie długości krawędzi AS i SC : $|AS| = 4\sqrt{34}$ i $|SC| = 34$,

ALBO

– obliczenie długości krawędzi AS i BE : $|AS| = 4\sqrt{34}$ i $|BE| = 15$,

ALBO

– obliczenie długości krawędzi AS : $|AS| = 4\sqrt{34}$ i zapisanie, że trójkąt SBC jest prostokątny (albo z rozwiązania wynika, że zdający rozpatruje trójkąt SBC jako prostokątny).

3 pkt – obliczenie długości odcinka CE : $|CE| = 9$ **oraz** zapisanie równania pozwalającego obliczyć długość jednego z odcinków: SC , SB , SA , SE , np.:

$$\frac{|CE|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|SC|} \quad (|SC| \text{ z podobieństwa trójkątów } BCS \text{ i } ECB),$$

$$\frac{|CE|}{|OC|} = \frac{|AC|}{|SC|} \quad (|SC| \text{ z podobieństwa trójkątów } ECO \text{ i } ACS),$$

$$\frac{|CE|}{|BE|} = \frac{|BC|}{|SB|} \quad (|SB| \text{ z podobieństwa trójkątów } BCS \text{ i } ECB),$$

$$\frac{|CE|}{|BC|} = \frac{|BE|}{|SB|} \quad (|SB| \text{ z podobieństwa trójkątów } ESB \text{ i } EBC),$$

$$\frac{|CE|}{|OE|} = \frac{|AC|}{|SA|} \quad (|SA| \text{ z podobieństwa trójkątów } ECO \text{ i } ACS),$$

$$|SE| \cdot |CE| = |BE|^2 \quad (|SE| \text{ z podobieństwa trójkątów } ESB \text{ i } EBC),$$

ALBO

- zapisanie układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi, w którym jedną z niewiadomych jest długość krawędzi BS , a drugą długość krawędzi SC , np.

$$|BS|^2 + (3\sqrt{34})^2 = |SC|^2 \quad \text{ i } \quad \frac{15}{3\sqrt{34}} = \frac{|BS|}{|SC|},$$

ALBO

- zapisanie równania z jedną niewiadomą (długością krawędzi BS albo długością krawędzi SC , albo długością krawędzi AS), np. $\left(\frac{15}{|BS|}\right)^2 + \left(\frac{15}{3\sqrt{34}}\right)^2 = 1$,

$$\left(\frac{3\sqrt{34}}{|SC|}\right)^2 + \left(\frac{15}{3\sqrt{34}}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{6\sqrt{2}}{\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{12\sqrt{2}}{|AS|}\right)^2 = 1.$$

- 2 pkt – obliczenie długości x odcinka BE (lub DE): $x = 15$

ALBO

- obliczenie długości y odcinka EO : $y = 6\sqrt{2}$,

ALBO

- spełnienie warunku 2) i jednego z warunków 3), 4) określonych w zasadach oceniania za 1 punkt.

- 1 pkt – spełnienie jednego z poniższych warunków 1)-4):

- 1) obliczenie wartości funkcji trygonometrycznej kąta $\frac{\beta}{2} = |\angle BEO|$ (gdzie O jest

punktem przecięcia przekątnych podstawy $ABCD$), np.: $\sin \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{17}}{5}$,

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{34}}{4}, \quad \cos \frac{\beta}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{5};$$

- 2) zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta BED i zapisanie równania $(3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2})^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cdot \left(-\frac{9}{25}\right)$;

- 3) zdający zapisze, że trójkąt SBC (lub SDC) jest prostokątny i wskaże właściwy wierzchołek kąta prostego lub wynika to z rozwiązania, np.:

- zapisze równość wynikającą z twierdzenia Pitagorasa: $|SC|^2 = |BS|^2 + |BC|^2$,

- zapisze, że trójkąty CBS oraz CEB są podobne,

- zapisze równość wynikającą z podobieństwa trójkątów CBS oraz CEB , np.:

$$\frac{|BS|}{|BC|} = \frac{|BE|}{|EC|},$$

- zapisze, że trójkąty BES oraz CEB są podobne,

- zapisze równość wynikającą z podobieństwa trójkątów BES oraz CEB , np.:

$$\frac{|ES|}{|BE|} = \frac{|BE|}{|EC|};$$

- 4) zapisze, że trójkąt OEC jest prostokątny lub wynika to z rozwiązania, np.:

- zdający zapisze równość $|OC|^2 = |OE|^2 + |EC|^2$,

- zapisze, że trójkąty OEC oraz SAC są podobne,

- zapisze równość wynikającą z podobieństwa trójkątów OEC oraz SAC , np.:

$$\frac{|OE|}{|OC|} = \frac{|AS|}{|CS|}.$$

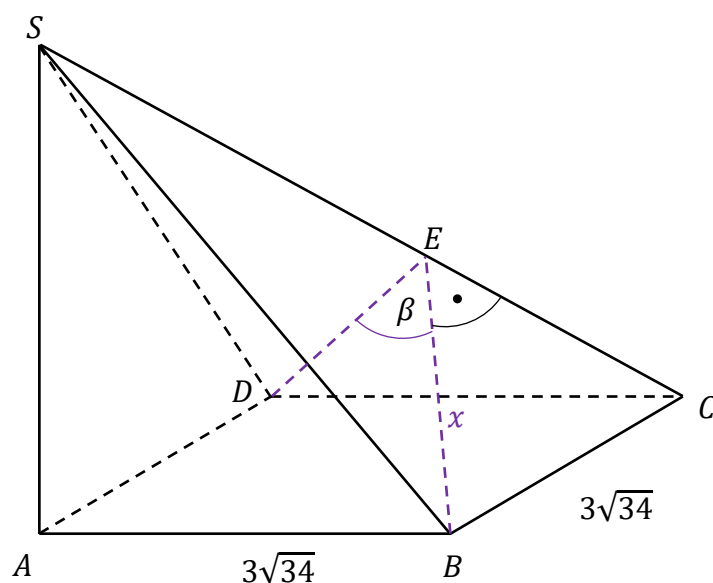
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający w rozwiązaniu rozpatruje ostrosłup prawidłowy czworokątny, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt** (za poprawną interpretację kąta między ścianami bocznymi oraz za zapisanie równania wynikającego z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BDE).
2. Jeżeli zdający w rozwiązaniu błędnie interpretuje kąt między ścianami bocznymi BCS i CDS , np. zakłada, że jest to kąt BSD , to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** (za spełnienie warunku 3) z kryterium za 1 punkt).
3. Jeżeli zdający w rozwiązaniu rozpatruje inną bryłę i nie jest nią ostrosłup prawidłowy czworokątny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania*Sposób I (poprzez BE , CS , AS)*

Niech E będzie spodkiem wysokości ściany bocznej BCS poprowadzonej z wierzchołka B . Oznaczmy $x = |BE|$ (zobacz rysunek).



Ponieważ ściany boczne BCS i CDS są trójkątami przystającymi, więc $|DE| = |BE| = x$. Stosujemy do trójkąta BED twierdzenie cosinusów i otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 |BD|^2 &= x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos \beta \\
 (3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2})^2 &= x^2 + x^2 - 2x^2 \cdot \left(-\frac{9}{25}\right) \\
 x &= 15
 \end{aligned}$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta BEC i obliczamy długość odcinka CE :

$$\begin{aligned}
 |CE|^2 &= |BC|^2 - |BE|^2 \\
 |CE|^2 &= (3\sqrt{34})^2 - 15^2 \\
 |CE| &= 9
 \end{aligned}$$

Trójkąt BCS jest prostokątny, co wynika z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych, gdyż $AB \perp BC$ i odcinek AB jest rzutem prostokątnym odcinka SB na płaszczyznę $ABCD$.

Trójkąty BCS i ECB są podobne (na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów), więc

$$\begin{aligned}\frac{|CE|}{|BC|} &= \frac{|BC|}{|SC|} \\ \frac{9}{3\sqrt{34}} &= \frac{3\sqrt{34}}{|SC|} \\ |SC| &= 34\end{aligned}$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta ACS i obliczamy długość odcinka AS :

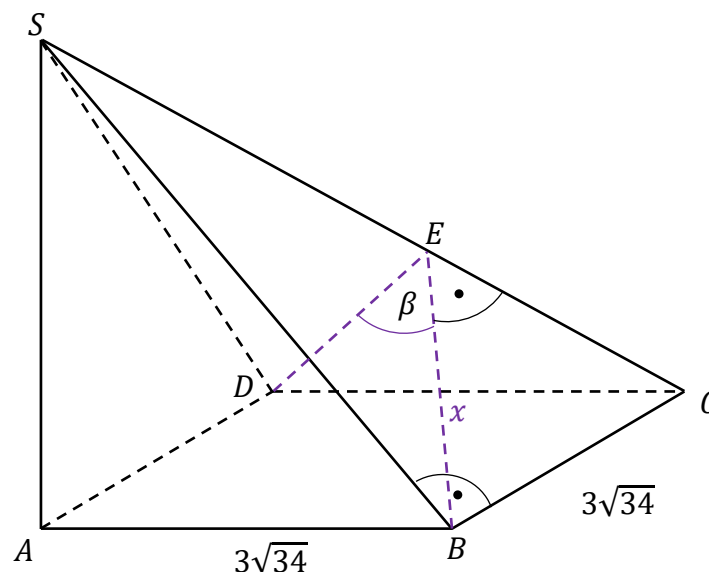
$$\begin{aligned}|AS|^2 &= |SC|^2 - |AC|^2 \\ |AS|^2 &= 34^2 - (3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2})^2 \\ |AS| &= 4\sqrt{34}\end{aligned}$$

Obliczamy pole P_b powierzchni bocznej ostrosłupa:

$$P_b = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AS| + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot |SC| = 3\sqrt{34} \cdot 4\sqrt{34} + 15 \cdot 34 = 918$$

Sposób 1a (poprzez BE , CE , BS , AS)

Niech E będzie spodkiem wysokości ściany bocznej BCS poprowadzonej z wierzchołka B . Oznaczmy $x = |BE|$ (zobacz rysunek).



Ponieważ ściany boczne BCS i CDS są trójkątami przystającymi, więc $|DE| = |BE| = x$. Stosujemy do trójkąta BED twierdzenie cosinusów i otrzymujemy

$$\begin{aligned}|BD|^2 &= x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos \beta \\ (3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2})^2 &= x^2 + x^2 - 2x^2 \cdot \left(-\frac{9}{25}\right) \\ x &= 15\end{aligned}$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta BEC i obliczamy długość odcinka CE :

$$\begin{aligned}|CE|^2 &= |BC|^2 - |BE|^2 \\ |CE|^2 &= (3\sqrt{34})^2 - 15^2 \\ |CE| &= 9\end{aligned}$$

Trójkąt BCS jest prostokątny, co wynika z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych, gdyż $AB \perp BC$ i odcinek AB jest rzutem prostokątnym odcinka SB na płaszczyznę $ABCD$. Ponieważ kąt ostry przy wierzchołku C jest wspólnym kątem trójkątów prostokątnych BCE i BCS , więc są to trójkąty podobne. Stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\frac{|BS|}{|BC|} &= \frac{|BE|}{|EC|} \\ \frac{|BS|}{3\sqrt{34}} &= \frac{15}{9} \\ |BS| &= 5\sqrt{34}\end{aligned}$$

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego dla trójkąta ABS obliczamy długość odcinka AS :

$$\begin{aligned}|AS|^2 &= |BS|^2 - |AB|^2 \\ |AS|^2 &= (5\sqrt{34})^2 - (3\sqrt{34})^2 = (4\sqrt{34})^2 \\ |AS| &= 4\sqrt{34}\end{aligned}$$

Obliczamy pole P_b powierzchni bocznej ostrosłupa:

$$P_b = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AS| + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |BS| \cdot |BC| = 3\sqrt{34} \cdot 4\sqrt{34} + 5\sqrt{34} \cdot 3\sqrt{34} = 918$$

Sposób II (poprzez EO , SC , AS , BS)

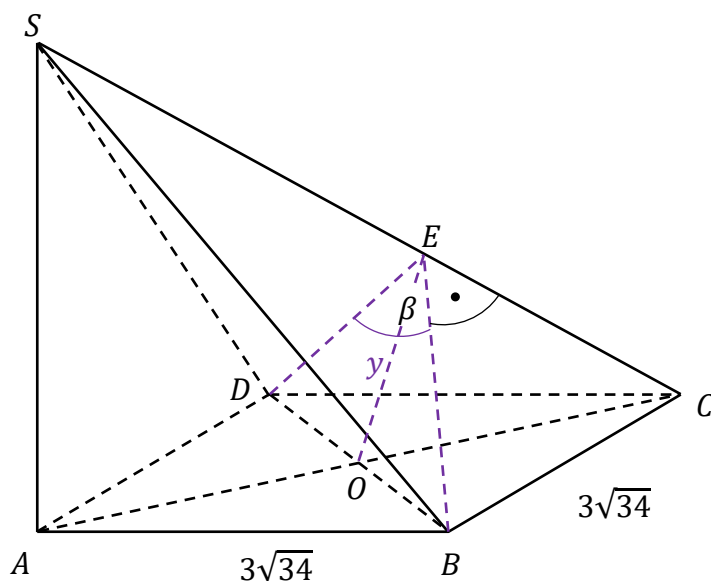
Przyjmijmy następujące oznaczenia:

E – spodek wysokości ściany bocznej BCS poprowadzonej z wierzchołka B ,

O – punkt przecięcia przekątnych podstawy $ABCD$,

y – długość odcinka EO

(zobacz rysunek).



Ponieważ ściany boczne BCS i CDS są trójkątami przystającymi, więc $|DE| = |BE|$.
Obliczamy sinus i cosinus kąta ostrego BEO :

$$\cos \beta = -\frac{9}{25}$$

$$1 - 2 \sin^2 \frac{\beta}{2} = -\frac{9}{25} \text{ oraz } 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} - 1 = -\frac{9}{25}$$

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{17}}{5} \text{ oraz } \cos \frac{\beta}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

Obliczamy tangens kąta ostrego BEO :

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{17}}{5}}{\frac{2\sqrt{2}}{5}} = \frac{\sqrt{34}}{4}$$

Obliczamy długość y odcinka EO :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} &= \frac{|BO|}{|EO|} \\ \frac{\sqrt{34}}{4} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2}}{y} \\ y &= 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

Ponieważ kąty SCA i OCE mają równe miary, więc korzystając z jedynki trygonometrycznej oraz definicji sinusa i cosinusa, otrzymujemy

$$\sin^2 |\sphericalangle OCE| + \cos^2 |\sphericalangle SCA| = 1$$

$$\left(\frac{y}{|OC|}\right)^2 + \left(\frac{|AC|}{|SC|}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{6\sqrt{2}}{\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2}}{|SC|}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{6\sqrt{17}}{|SC|}\right)^2 = \frac{9}{17}$$

$$|SC| = 34$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta ACS i obliczamy długość krawędzi AS :

$$|AS|^2 + |AC|^2 = |SC|^2$$

$$|AS|^2 = 34^2 - (3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2})^2$$

$$|AS| = 4\sqrt{34}$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta ABS i obliczamy długość krawędzi BS :

$$|BS|^2 = |AS|^2 + |AB|^2$$

$$|BS|^2 = (4\sqrt{34})^2 + (3\sqrt{34})^2$$

$$|BS| = 5\sqrt{34}$$

Obliczamy pole P_b powierzchni bocznej ostrosłupa:

$$P_b = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AS| + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |BS| \cdot |BC| = 3\sqrt{34} \cdot 4\sqrt{34} + 5\sqrt{34} \cdot 3\sqrt{34} = 918$$

Zadanie 11. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: III.R3) stosuje wzory Viète'a dla równań kwadratowych; III.R5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami [...].

Zasady oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z czterech etapów.

Pierwszy etap polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$: $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga.

Jeżeli zdający rozwiązuje warunek $\Delta \geq 0$, to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na wyznaczeniu tych wartości parametru m , dla których miejsca zerowe funkcji f są tego samego znaku. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – zapisanie i poprawne rozwiązanie nierówności $\frac{m+8}{2-m} > 0$: $m \in (-8, 2)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Trzeci etap polega na wyznaczeniu tych wartości parametru m , dla których jest spełniony warunek $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **3 punkty**.

Podział punktów za trzeci etap rozwiązania:

3 pkt – rozwiązanie nierówności z jedną niewiadomą m równoważnej warunkowi

$$(x_1 - x_2)^2 \leq 180: m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{13}{4}, +\infty\right).$$

2 pkt – zapisanie nierówności z jedną niewiadomą m równoważnej warunkowi

$$(x_1 - x_2)^2 \leq 180, \text{ np.}$$

$$\left[\frac{2(2m+1)}{2-m}\right]^2 - 4 \cdot \frac{m+8}{2-m} \leq 180$$

1 pkt – przekształcenie nierówności $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a, np. $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \leq 180$
ALBO

– przekształcenie nierówności $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$ do postaci $\frac{\Delta}{a^2} \leq 180$ (lub

$$\frac{b^2 - 4ac}{a^2} \leq 180).$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Czwarty etap polega na wyznaczeniu wszystkich wartości parametru m , które spełniają jednocześnie warunki: $m \neq 2$ oraz $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ oraz $m \in (-8, 2)$ oraz $m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{13}{4}, +\infty\right)$:

$$m \in (-8, -3) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right].$$

Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

- 1 pkt – poprawne wyznaczenie wszystkich wartości parametru m , które spełniają jednocześnie warunki $m \neq 2$ oraz $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ oraz $m \in (-8, 2)$ oraz $m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{13}{4}, +\infty\right)$: $m \in (-8, -3) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right]$.
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający w którymś z etapów I–III popełni błąd, który nie jest błędem rachunkowym, to za IV etap otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający w etapach I–III nie popełni błędów innych niż rachunkowe i otrzyma zbiory rozwiązań, które nie są rozłączne i żaden z nich nie jest zbiorem liczb rzeczywistych, a następnie poprawnie wyznaczy część wspólną zbiorów rozwiązań z etapów I–III i warunku $m \neq 2$, to za IV etap otrzymuje **1 punkt**; natomiast jeżeli otrzyma zbiory rozwiązań, które są rozłączne lub co najmniej jeden z nich jest zbiorem liczb rzeczywistych, to za IV etap otrzymuje **0 punktów**.
3. Jeżeli zdający w III etapie rozwiązania popełni błąd – przyjmie, że $x_1 + x_2 = \pm \frac{m+8}{2-m}$ lub $x_1 \cdot x_2 = \pm \frac{2(2m+1)}{2-m}$, lub $x_1 + x_2 = \pm \frac{b}{2a}$, to za III etap może otrzymać co najwyżej **2 punkty** (1 punkt za przekształcenie nierówności $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète’a oraz 1 punkt za konsekwentne rozwiązanie nierówności do końca), a za IV etap otrzymuje **0 punktów**.
4. Jeżeli zdający wprowadza dodatkowe założenie, które nie wynika z warunków zadania (np. $x_1 + x_2 > 0$), to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **5 punktów** (co najwyżej 1 punkt za I etap, co najwyżej 1 punkt za II etap i co najwyżej 3 punkty za III etap).
5. Jeżeli zdający podczas przekształcania nierówności $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$ do postaci pozwalającej na zastosowanie wzorów Viète’a popełni błąd, który nie jest błędem rachunkowym, ale otrzyma nierówność postaci $(x_1 + x_2)^2 + k \cdot x_1 \cdot x_2 \leq 180$, gdzie $k \neq -4$, to za III etap może otrzymać co najwyżej **2 punkty** (1 punkt za poprawne zastosowanie wzorów Viète’a oraz 1 punkt za konsekwentne rozwiązanie nierówności do końca), a za IV etap otrzymuje **0 punktów**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe tylko wówczas, gdy $2 - m \neq 0$ i wyróżnik Δ trójkianu $(2 - m)x^2 - 2(2m + 1)x + m + 8$ jest dodatni. Rozwiązujemy warunek $\Delta > 0$:

$$[-2(2m + 1)]^2 - 4 \cdot (2 - m)(m + 8) > 0$$

$$16m^2 + 16m + 4 + 4m^2 + 24m - 64 > 0$$

$$20m^2 + 40m - 60 > 0$$

$$20(m - 1)(m + 3) > 0$$

$$m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$$

Miejsca zerowe funkcji f mają ten sam znak tylko wtedy, gdy $x_1 \cdot x_2 > 0$. Rozwiązujemy tę nierówność, korzystając ze wzorów Viète'a:

$$\frac{m+8}{2-m} > 0$$

$$(m+8)(2-m) > 0 \quad \wedge \quad m \neq 2$$

$$m \in (-8, 2)$$

Przekształcamy warunek $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a i rozwiązujemy uzyskaną nierówność z niewiadomą m :

$$(x_1 - x_2)^2 \leq 180$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 \leq 180$$

$$\left[\frac{-2(2m+1)}{2-m} \right]^2 - 4 \cdot \frac{m+8}{2-m} \leq 180$$

$$\frac{16m^2 + 16m + 4}{(m-2)^2} + 4 \cdot \frac{(m+8)(m-2)}{(m-2)^2} - \frac{180(m-2)^2}{(m-2)^2} \leq 0$$

$$\frac{16m^2 + 16m + 4 + 4m^2 + 24m - 64 - 180m^2 + 720m - 720}{(m-2)^2} \leq 0$$

$$\frac{-160m^2 + 760m - 780}{(m-2)^2} \leq 0$$

$$-160m^2 + 760m - 780 \leq 0 \quad \wedge \quad m \neq 2$$

$$8m^2 - 38m + 39 \geq 0 \quad \wedge \quad m \neq 2$$

$$\Delta_m = (-38)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 39 = 196$$

$$m = \frac{38 - 14}{16} = \frac{3}{2} \quad \vee \quad m = \frac{38 + 14}{16} = \frac{13}{4}$$

$$8 \left(m - \frac{3}{2} \right) \left(m - \frac{13}{4} \right) \geq 0 \quad \wedge \quad m \neq 2$$

$$m \in \left(-\infty, \frac{3}{2} \right] \cup \left[\frac{13}{4}, +\infty \right)$$

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m , które jednocześnie spełniają warunki:

- $m \neq 2$
- $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$
- $m \in (-8, 2)$
- $m \in \left(-\infty, \frac{3}{2} \right] \cup \left[\frac{13}{4}, +\infty \right)$:

$$m \in (-8, -3) \cup \left(1, \frac{3}{2} \right]$$

Funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe x_1 oraz x_2 tego samego znaku, które spełniają warunek $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$, tylko wtedy, gdy $m \in (-8, -3) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right]$.

Zadanie 12.1. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: X.5) oblicza objętości [...] stożka [...].

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – zapisanie związku między promieniem podstawy stożka a wysokością stożka, np.

$$\frac{1}{2}rh = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{h^2 + r^2}, \left(\frac{5}{r}\right)^2 + \left(\frac{5}{h}\right)^2 = 1, \frac{r}{5} = \frac{h}{\sqrt{h^2 - 25}}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Rozpatrzmy dowolny z rozważanych stożków. Przyjmijmy następujące oznaczenia:

A, B, C – wierzchołki trójkąta, który jest przekrojem osiowym stożka,

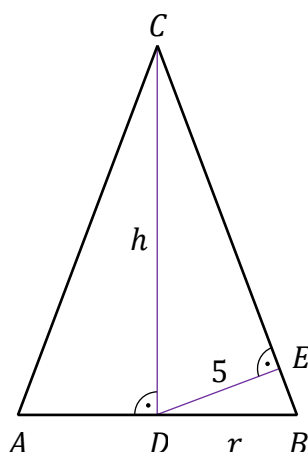
D – środek podstawy stożka,

E – spodek wysokości trójkąta DBC opuszczonej z wierzchołka D na bok BC ,

r – promień podstawy stożka,

h – wysokość stożka

(zobacz rysunek).



Zapisujemy pole trójkąta DBC na dwa sposoby i stosujemy twierdzenie Pitagorasa, otrzymując:

$$\frac{1}{2} \cdot |DB| \cdot |DC| = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |DE|$$

$$\frac{1}{2}rh = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{h^2 + r^2} \cdot 5$$

$$r^2h^2 = 25h^2 + 25r^2$$

$$r^2 = \frac{25h^2}{h^2 - 25}$$

Zatem objętość V stożka jest równa

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{25h^2}{h^2 - 25} \cdot h = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$$

To należało wykazać.

Zadanie 12.2. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XIII.R4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu [...]; XIII.R5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji; XIII.R6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

4 pkt – uzasadnienie, że funkcja V przyjmuje wartość najmniejszą dla $h = 5\sqrt{3}$ oraz

$$\text{obliczenie objętości stożka o takiej wysokości: } V(5\sqrt{3}) = \frac{125\sqrt{3}\pi}{2}.$$

3 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja V przyjmuje wartość najmniejszą dla $h = 5\sqrt{3}$.

2 pkt – obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji V (lub funkcji $\frac{3}{\pi} \cdot V$): $h = 5\sqrt{3}$.

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji V (lub funkcji $\frac{3}{\pi} \cdot V$), np.

$$V'(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{75h^2 \cdot (h^2 - 25) - 25h^3 \cdot 2h}{(h^2 - 25)^2}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

- Jeżeli zdający wyznacza pochodną ilorazu jako iloraz pochodnych, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli z rozwiązania wynika, że zdający poprawnie stosuje wzór na pochodną ilorazu funkcji oraz zdający poprawnie wyznacza pochodne funkcji $25h^3$ oraz $h^2 - 25$ i dalej popełnia błędy, otrzymując pochodną w postaci $a \cdot \frac{75h^2(h^2-25)-25h^3 \cdot 2h}{(h^2-25)}$ (gdzie $a \neq 0$)

lub $\frac{B(h)}{(h^2-25)^2}$, gdzie B jest wielomianem stopnia czwartego, który w przedziale $(5, +\infty)$

ma dokładnie jeden pierwiastek, i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (za miejsce zerowe pochodnej, za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości funkcji, za obliczenie najmniejszej wartości funkcji V).

Jeżeli z rozwiązania nie wynika, że zdający poprawnie stosuje wzór na pochodną ilorazu funkcji lub zdający błędnie wyznacza pochodną funkcji $25h^3$ lub $h^2 - 25$ i dalej

popełnia błędy, otrzymując pochodną w postaci $\frac{75h^2(h^2-25)-25h^3 \cdot 2h}{(h^2-25)}$ lub $\frac{B(h)}{(h^2-25)^2}$,

gdzie B jest wielomianem stopnia czwartego, który w przedziale $(5, +\infty)$ ma dokładnie jeden pierwiastek, i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości funkcji i za obliczenie najmniejszej wartości funkcji V).

3. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja osiąga wartość najmniejszą dla wyznaczonej wartości h , przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej

ORAZ:

– opisuje (słownie lub graficznie – np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji V
LUB

– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości h funkcja V ma minimum lokalne i jest to jednocześnie jej najmniejsza wartość,

LUB

– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości h funkcja V ma minimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.

Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku (np. znakami „+” i „-”) znak pochodnej.

4. Jeżeli zdający przedstawi niepełne uzasadnienie, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (nie otrzymuje punktu za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości).
5. Jeżeli zdający, uzasadniając najmniejszą wartość funkcji, rozpatruje funkcję w $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{R}_+$, to może uzyskać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
6. Jeżeli zdający nie uzasadnia istnienia najmniejszej wartości funkcji, to może uzyskać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za pochodną i 1 punkt za miejsce zerowe pochodnej).

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy argument, dla którego funkcja V określona wzorem $V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2-25}$ dla $h \in (5, +\infty)$ osiąga wartość najmniejszą.

Wyznaczamy pochodną funkcji V : $V'(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{75h^2 \cdot (h^2-25) - 25h^3 \cdot 2h}{(h^2-25)^2} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^2(h^2-75)}{(h^2-25)^2}$

dla $h \in (5, +\infty)$.

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji V :

$$V'(h) = 0$$

$$\frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^2(h^2-75)}{(h^2-25)^2} = 0$$

$$25h^2(h^2-75) = 0$$

$$h = 0 \notin (5, +\infty) \vee h = -5\sqrt{3} \notin (5, +\infty) \vee h = 5\sqrt{3} \in (5, +\infty)$$

Badamy znak pochodnej:

$$V'(h) < 0$$

$$\frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^2(h^2-75)}{(h^2-25)^2} < 0 \wedge h \in (5, +\infty)$$

$$h^2(h^2-75) < 0 \wedge h \in (5, +\infty)$$

$$h^2 < 75 \wedge h \in (5, +\infty)$$

$$h \in (5, 5\sqrt{3})$$

więc $V'(h) < 0$ dla $h \in (5, 5\sqrt{3})$ oraz $V'(h) > 0$ dla $h \in (5\sqrt{3}, +\infty)$.

Zatem funkcja V jest malejąca w przedziale $(5, 5\sqrt{3}]$ i rosnąca w przedziale $[5\sqrt{3}, +\infty)$.

Stąd funkcja V osiąga wartość najmniejszą dla $h = 5\sqrt{3}$. Wtedy

$$V(5\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25(5\sqrt{3})^3}{(5\sqrt{3})^2 - 25} = \frac{125\sqrt{3}\pi}{2}$$

Uwaga.

Funkcja V jest różniczkowalna, więc jest ciągła. Ponadto $\lim_{h \rightarrow 5^+} V(h) = +\infty$ oraz

$\lim_{h \rightarrow +\infty} V(h) = +\infty$, więc uwzględniając wartość funkcji V w punkcie stacjonarnym $h = 5\sqrt{3}$

równą $V(5\sqrt{3}) = \frac{125\sqrt{3}\pi}{2}$, można wyciągnąć wniosek, że funkcja V osiąga wartość

najmniejszą równą $\frac{125\sqrt{3}\pi}{2}$ dla argumentu $h = 5\sqrt{3}$.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

PESEL

Miejsce na naklejkę.

Sprawdź, czy kod na naklejce to
E-100.

Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny

Formuła 2015

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Symbol arkusza

EMAP-R0-**100**-2505

DATA: **12 maja 2025 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

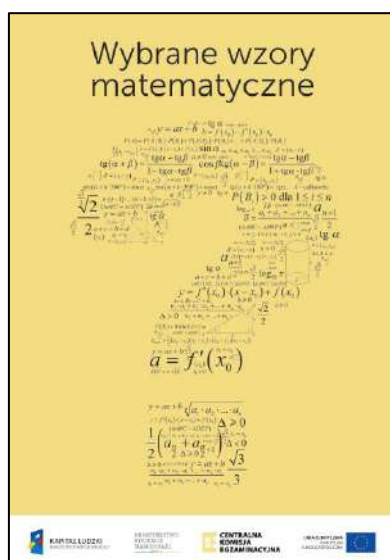
Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.



Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 29 stron (zadania 1–15).
Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Odpowiedzi do zadań zamkniętych (1–4) zaznacz na karcie odpowiedzi w części przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj  pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem  i zaznacz właściwe.
4. W zadaniu 5. wpisz odpowiednie cyfry w kratki pod treścią zadania.
5. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego (6–15) może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
6. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
7. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
8. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
9. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
10. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
11. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, z cyrkla i linijki oraz z kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



**Zadania egzaminacyjne są wydrukowane
na następnych stronach.**

W każdym z zadań od 1. do 4. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Suma wszystkich pierwiastków wielomianu $W(x) = x^3 + 5x^2 - 7x - 11$ jest równa

- A. (-5) B. (-3) C. 3 D. 5

Zadanie 2. (0–1)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 9}$ dla każdej liczby rzeczywistej x .

Zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie, jest

- A. $(2, 3)$
B. $(-3, -2)$
C. $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$
D. $(-\infty, -3) \cup (-2, +\infty)$

Zadanie 3. (0–1)

Wartość wyrażenia $\cos \frac{7\pi}{6} \cdot \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3}$ jest równa

- A. $\left(-\frac{3}{2}\right)$ B. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

Zadanie 4. (0–1)

Granica $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{2x^2 + 2x - 12}$ jest równa

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{6}{5}$ D. $\frac{12}{5}$

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Zadanie 5. (0–2)

Sąsiednie boki równoległoboku mają długość 6 i 9. Pole tego równoległoboku jest równe 18. Oblicz długość dłuższej przekątnej tego równoległoboku.

W poniższe kratki wpisz kolejno – od lewej do prawej – cyfrę dziesiątek, cyfrę jedności i pierwszą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Zadanie 6. (0–3)

Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej a i dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej b takich, że $b \neq \frac{1}{2}a$, prawdziwa jest nierówność

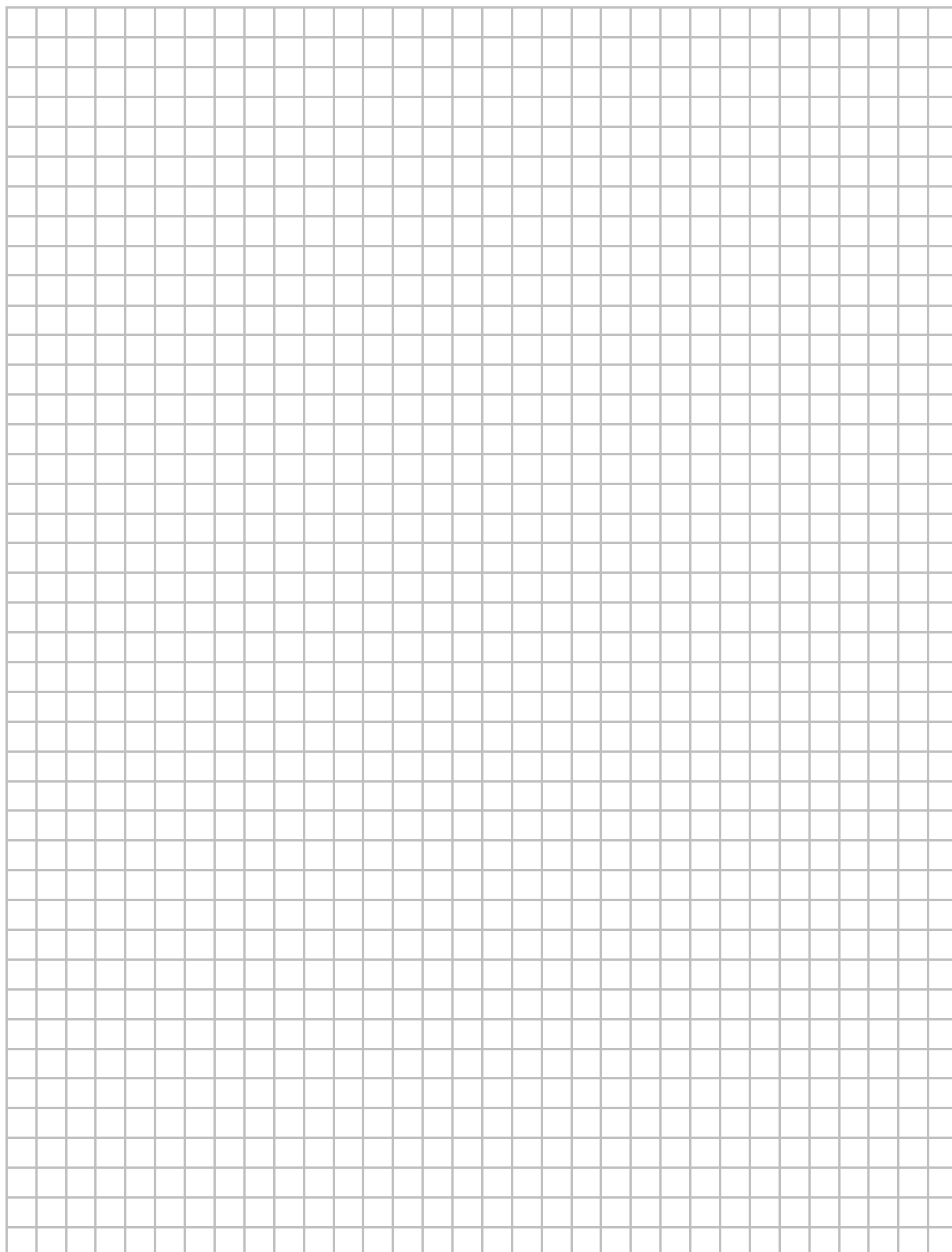
$$(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$$

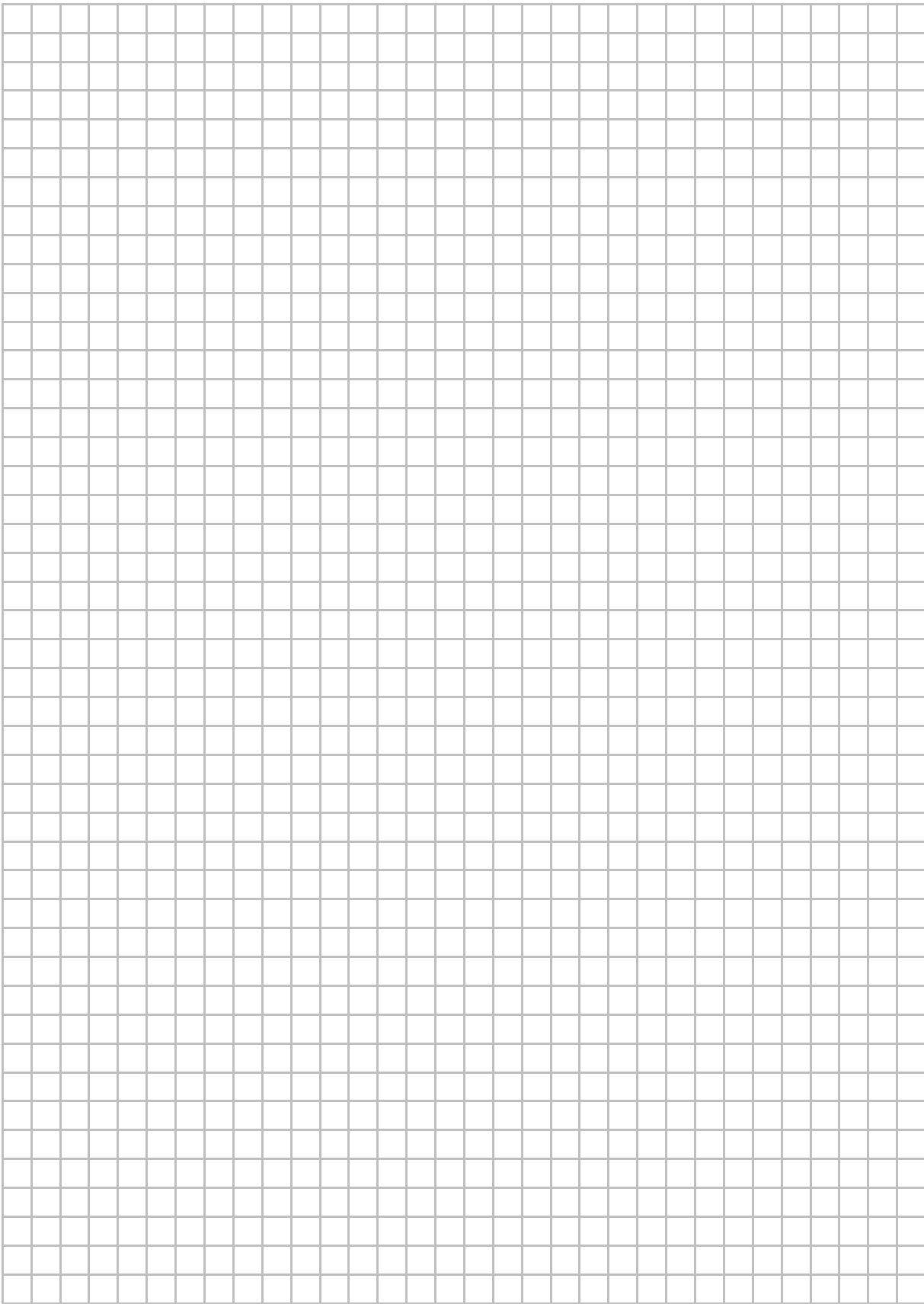
Wypełnia egzaminator	Nr zadania	5.	6.
	Maks. liczba pkt	2	3
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 7. (0–3)

W trójkącie równobocznym ABC punkt D leży na boku BC . Stosunek pola trójkąta ABD do pola trójkąta ADC jest równy $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Wykaż, że miara kąta DAC jest równa 45° .

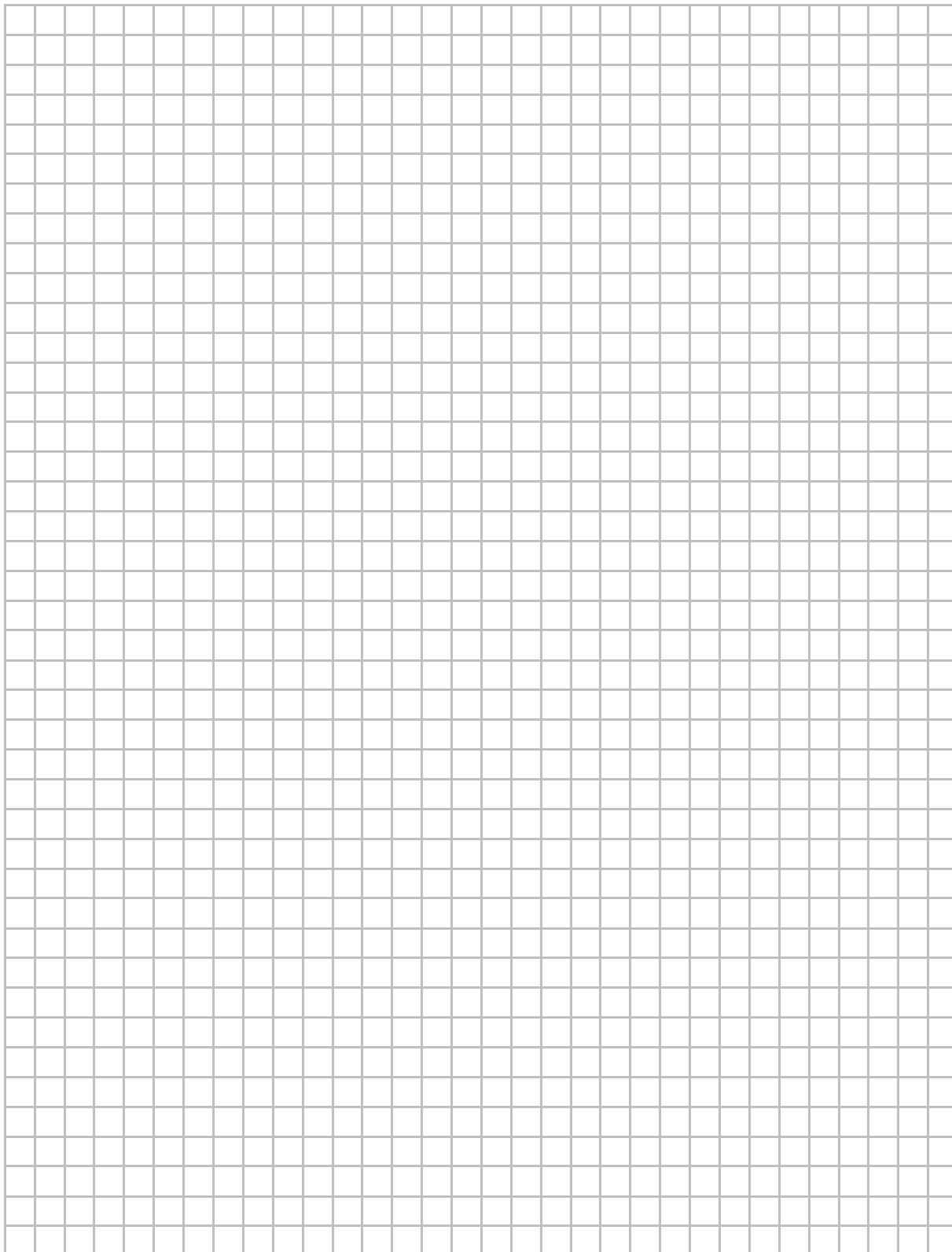


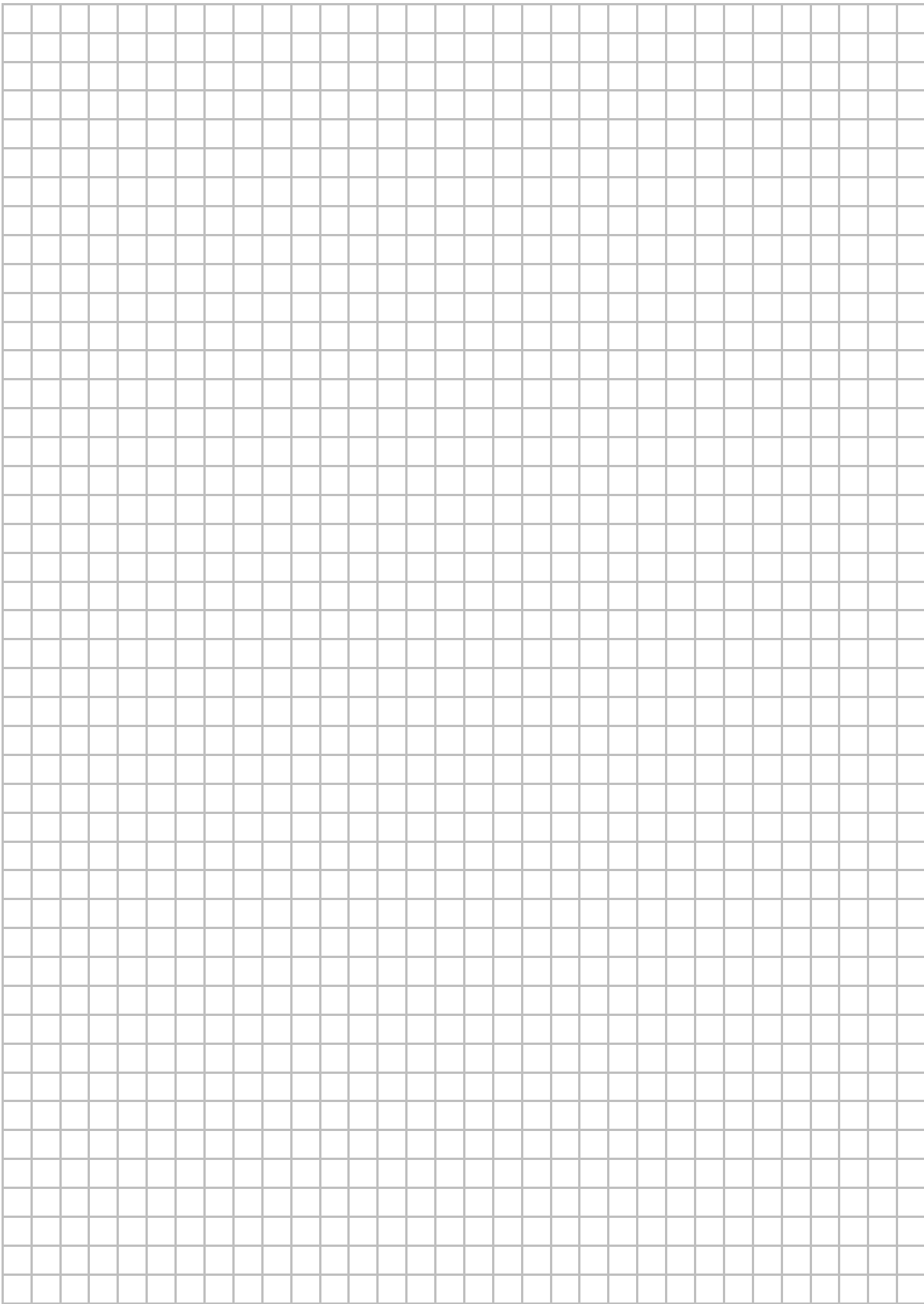


Wypełnia egzaminator	Nr zadania	7.
	Maks. liczba pkt	3
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 8. (0–3)

Doświadczenie losowe polega na czterokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ścianie ma inną liczbę oczek – od jednego oczka do sześciu oczek. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymamy co najmniej jeden raz sześć oczek, pod warunkiem że otrzymamy dokładnie dwa razy pięć oczek.



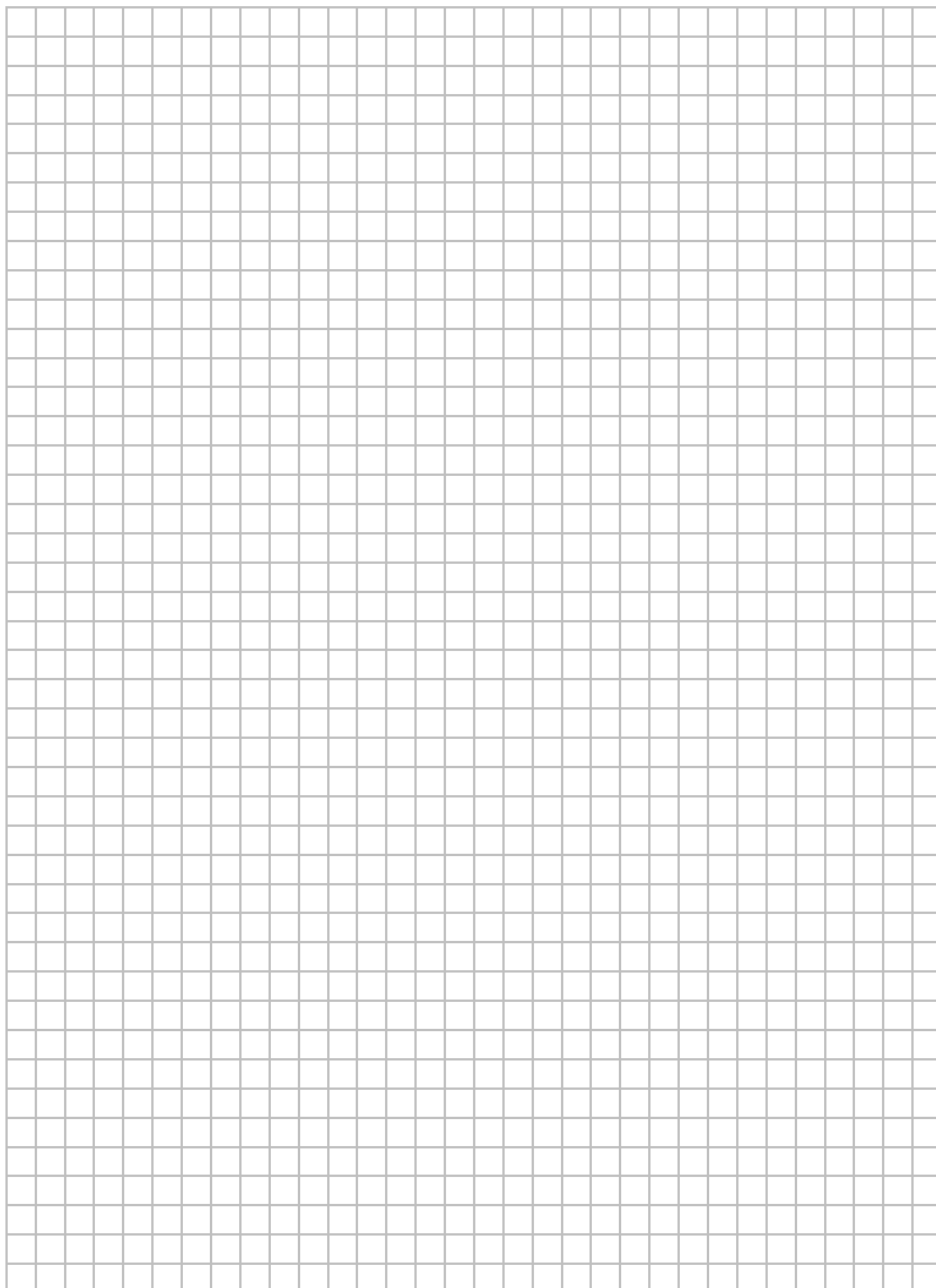


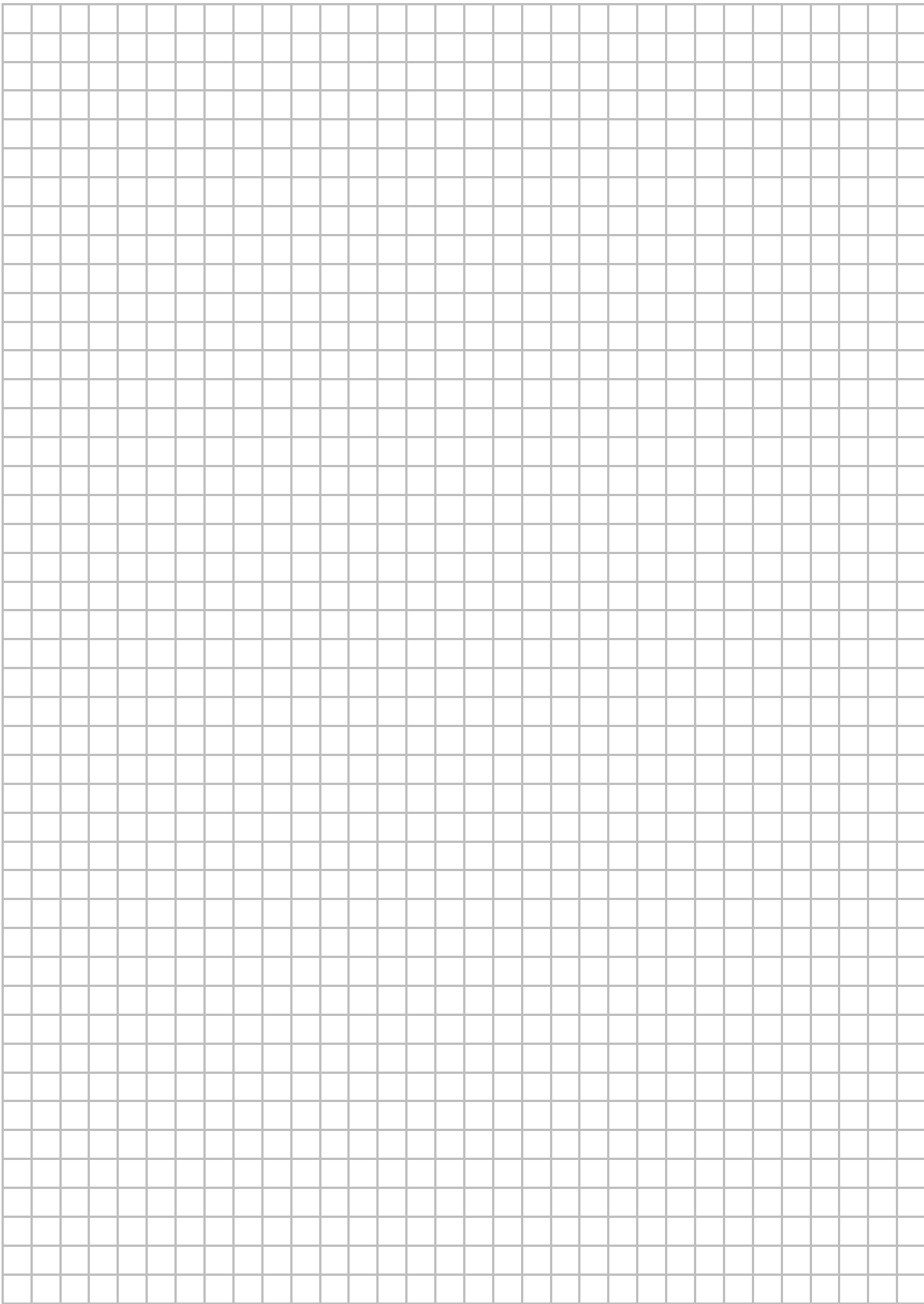
Wypełnia egzaminator	Nr zadania	8.
	Maks. liczba pkt	3
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 9. (0–4)

Rozwiąż nierówność

$$|x - 2| - 2 \cdot |x + 3| < -2$$



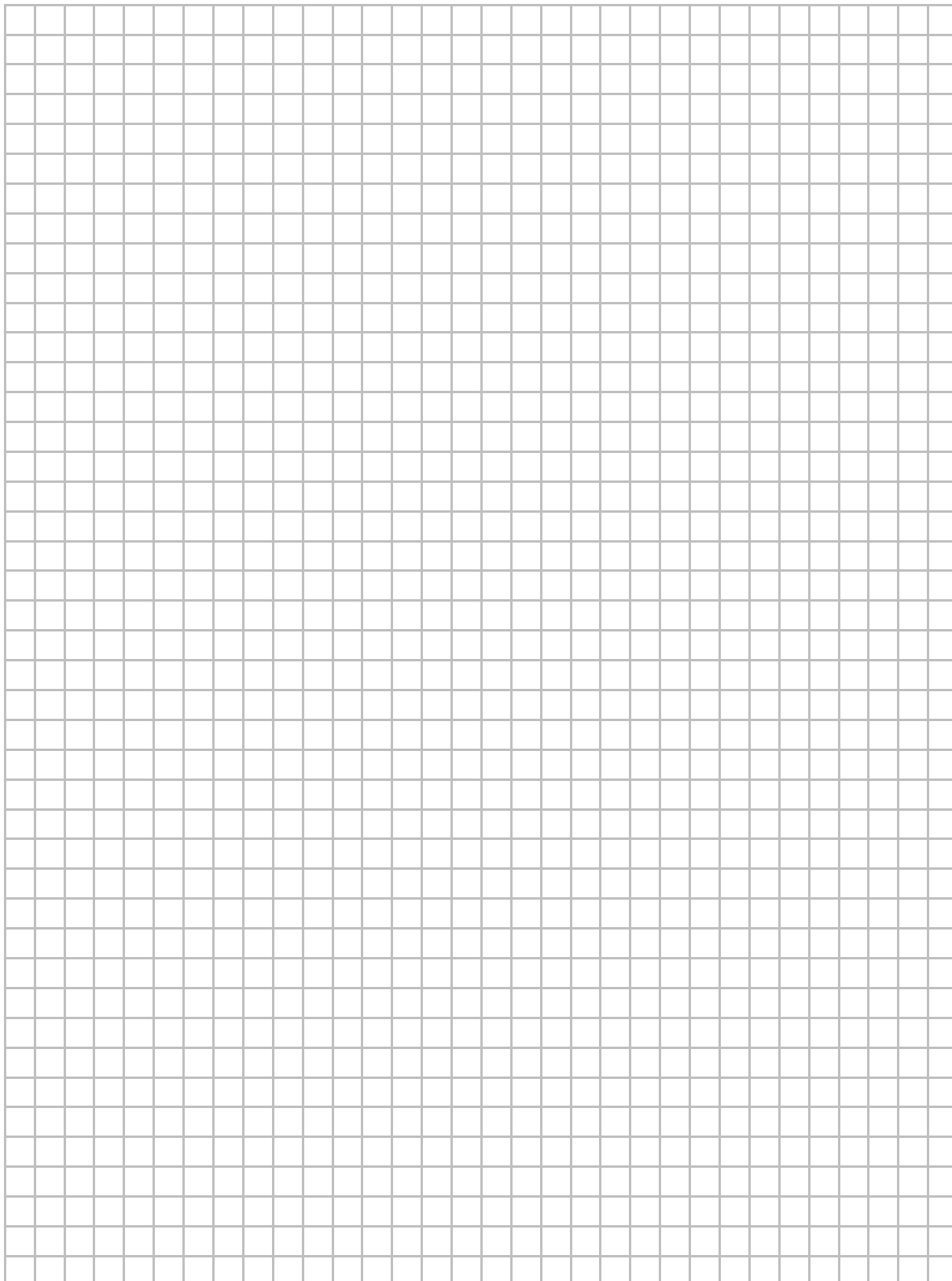


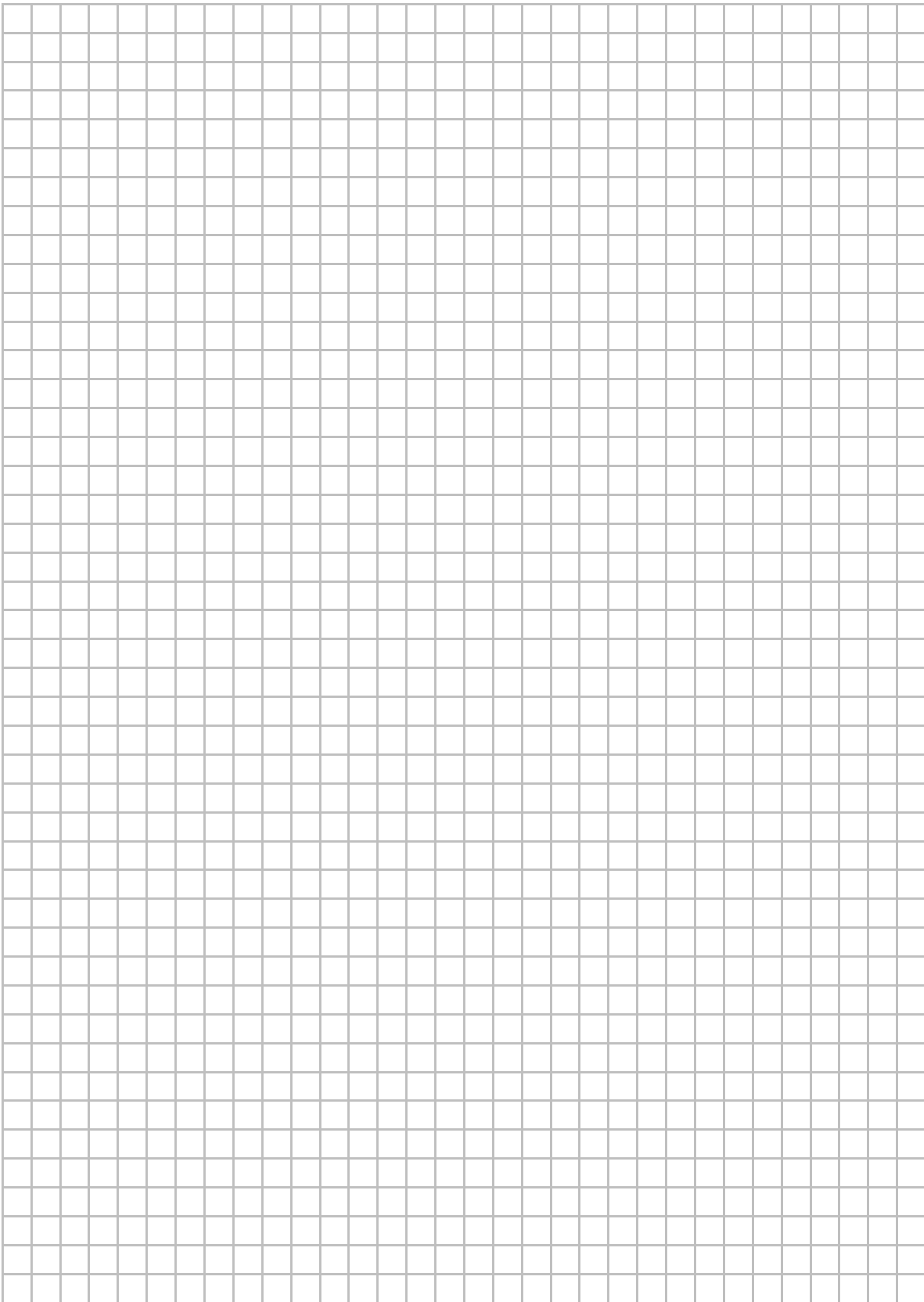
Wypełnia egzaminator	Nr zadania	9.
	Maks. liczba pkt	4
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 10. (0–4)

Ciąg (a_n) , określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest geometryczny i zbieżny. W tym ciągu $a_1 + a_3 = 20$ i $a_1^2 + a_3^2 = 328$.

Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu. Rozważ wszystkie przypadki.





Wypełnia egzaminator	Nr zadania	10.
	Maks. liczba pkt	4
	Uzyskana liczba pkt	

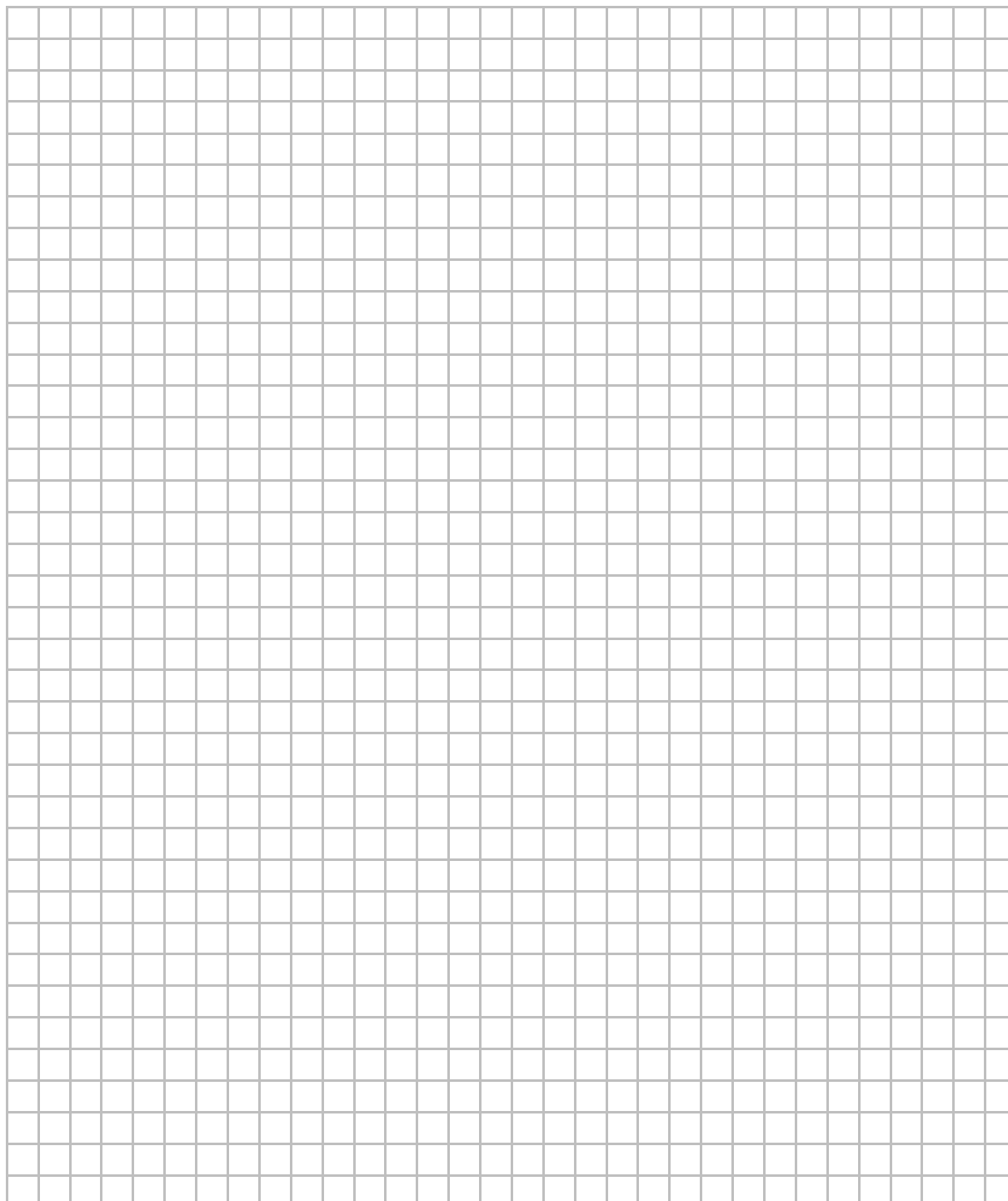
Zadanie 11. (0–5)

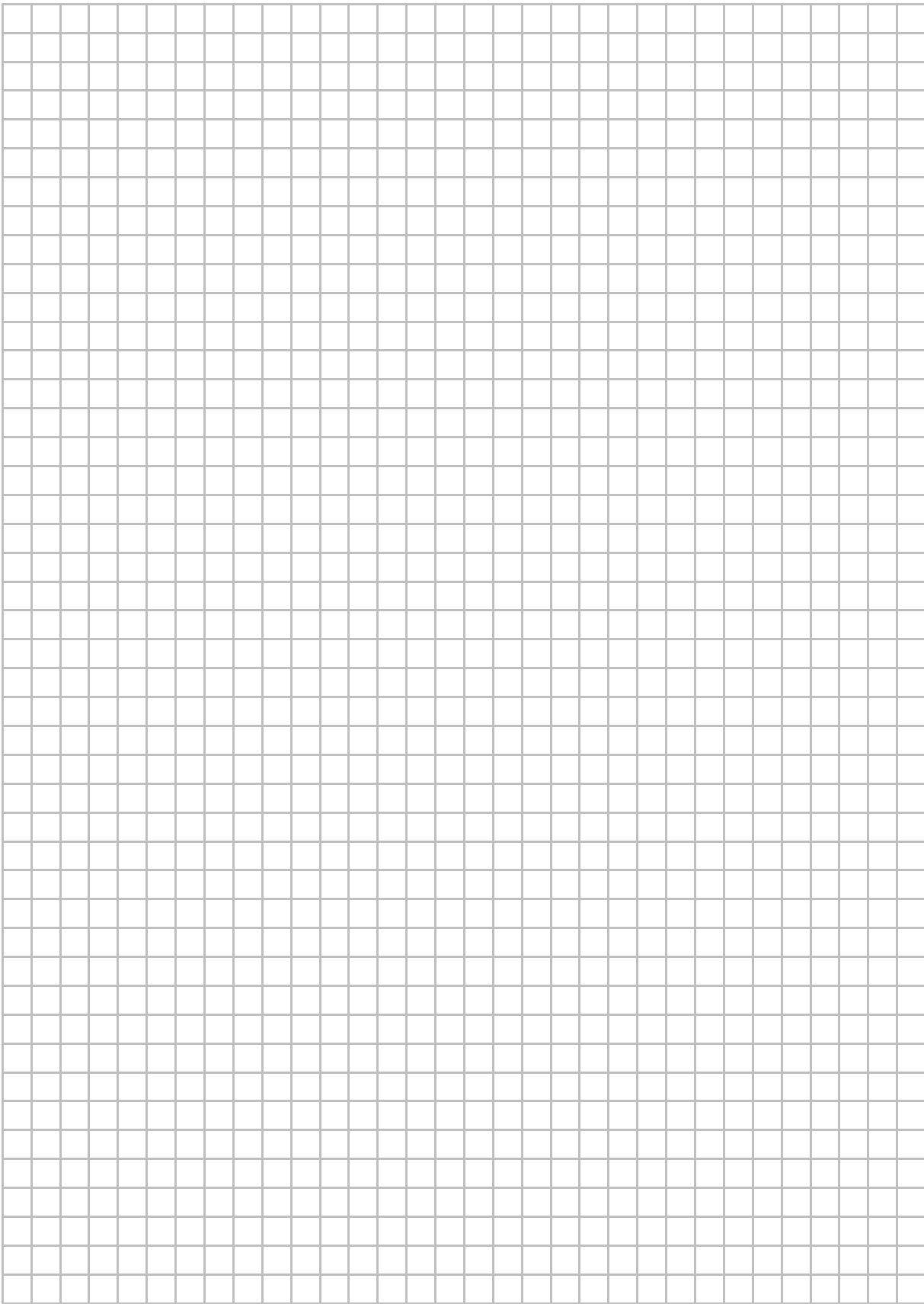
W układzie współrzędnych (x, y) dane są okręgi $\mathcal{O}_1$ oraz $\mathcal{O}_2$ o równaniach:

- $\mathcal{O}_1: (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 5$
- $\mathcal{O}_2: (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 45.$

Te okręgi przecinają się w punktach A oraz B . Punkt A ma pierwszą współrzędną dodatnią. Punkt M spełnia warunek $\overrightarrow{AM} = -2 \cdot \overrightarrow{BM}$.

Oblicz współrzędne punktów A , B oraz M .



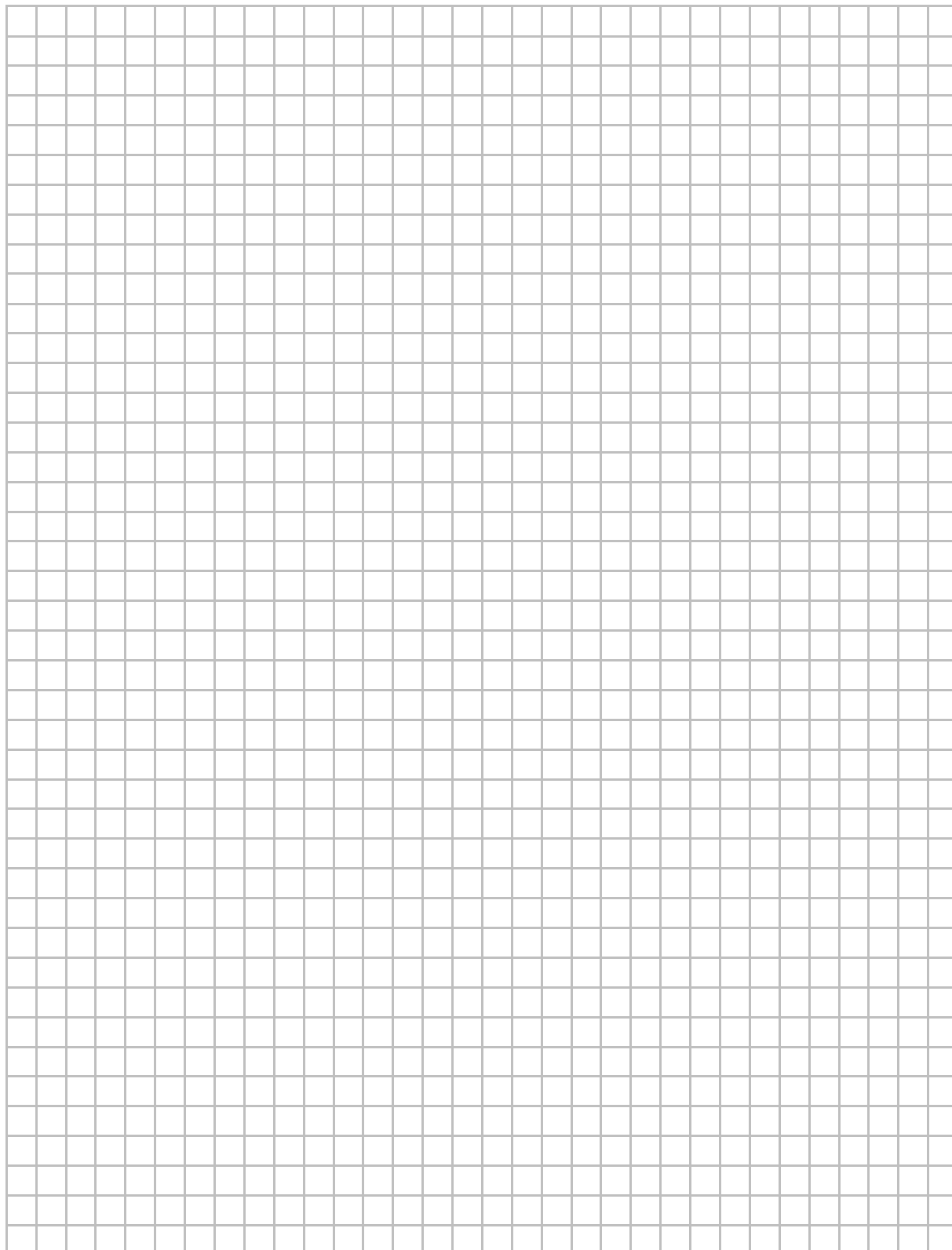


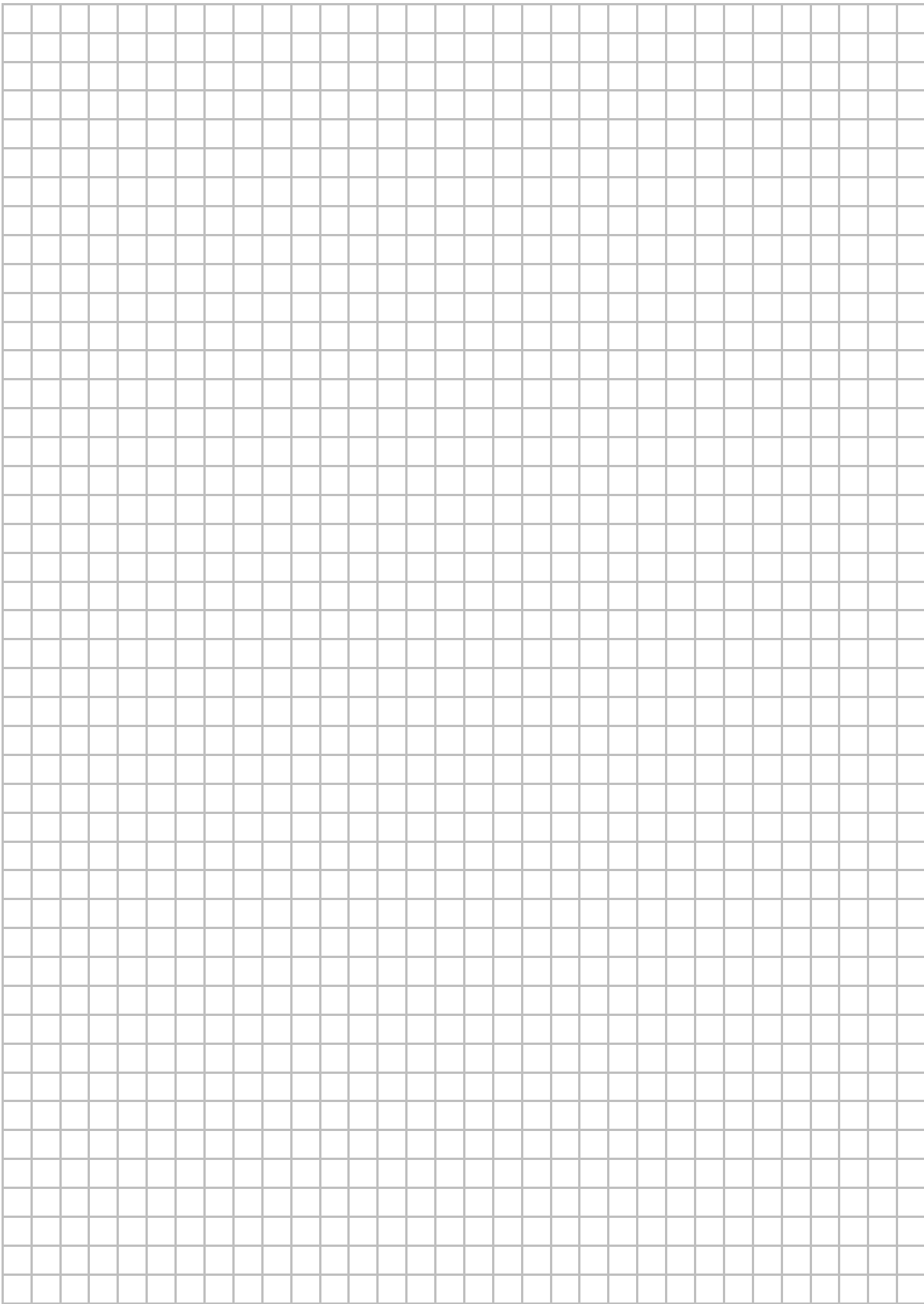
Wypełnia egzaminator	Nr zadania	11.
	Maks. liczba pkt	5
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 12. (0–5)

Rozwiąż równanie

$$3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$$

w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$.

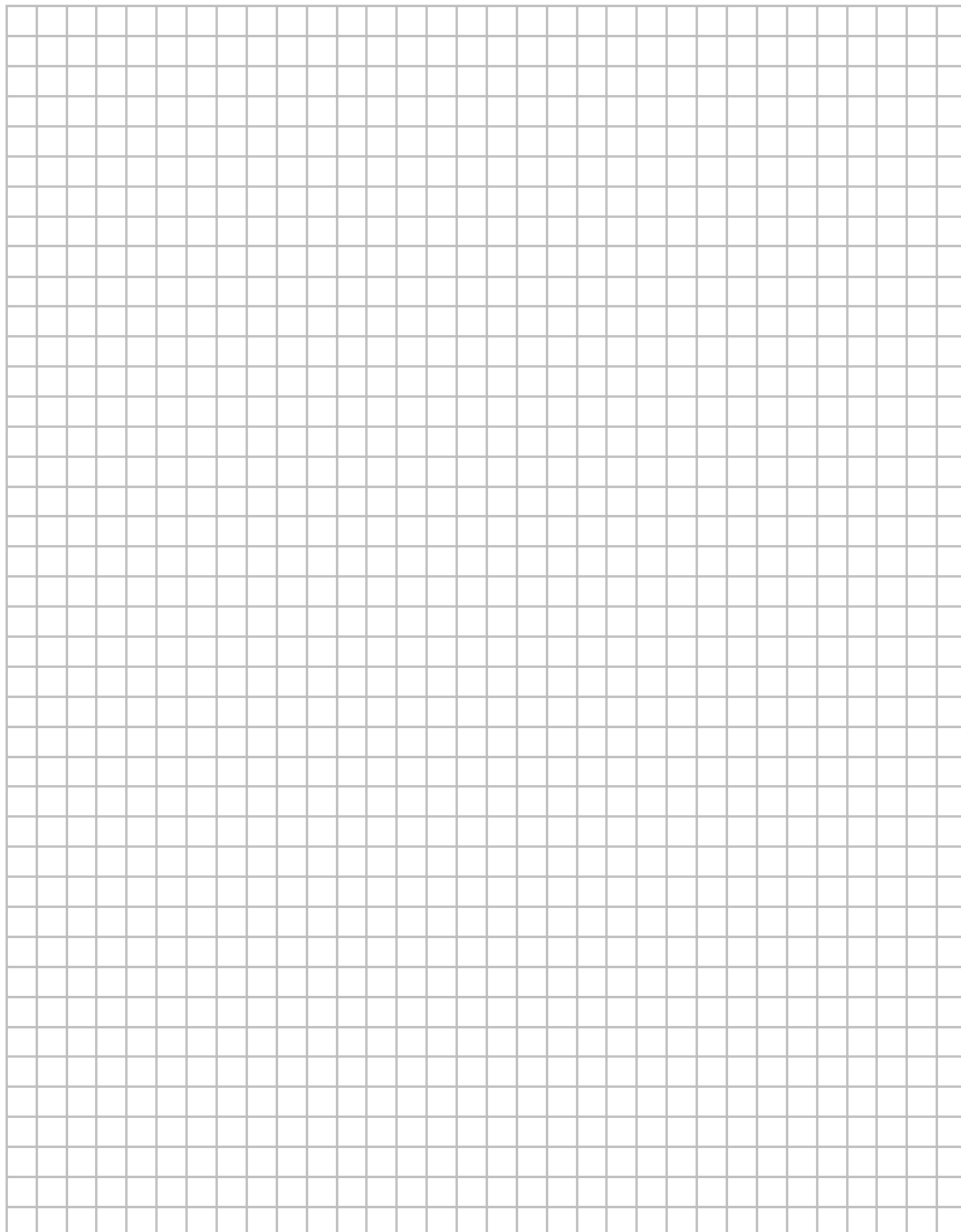


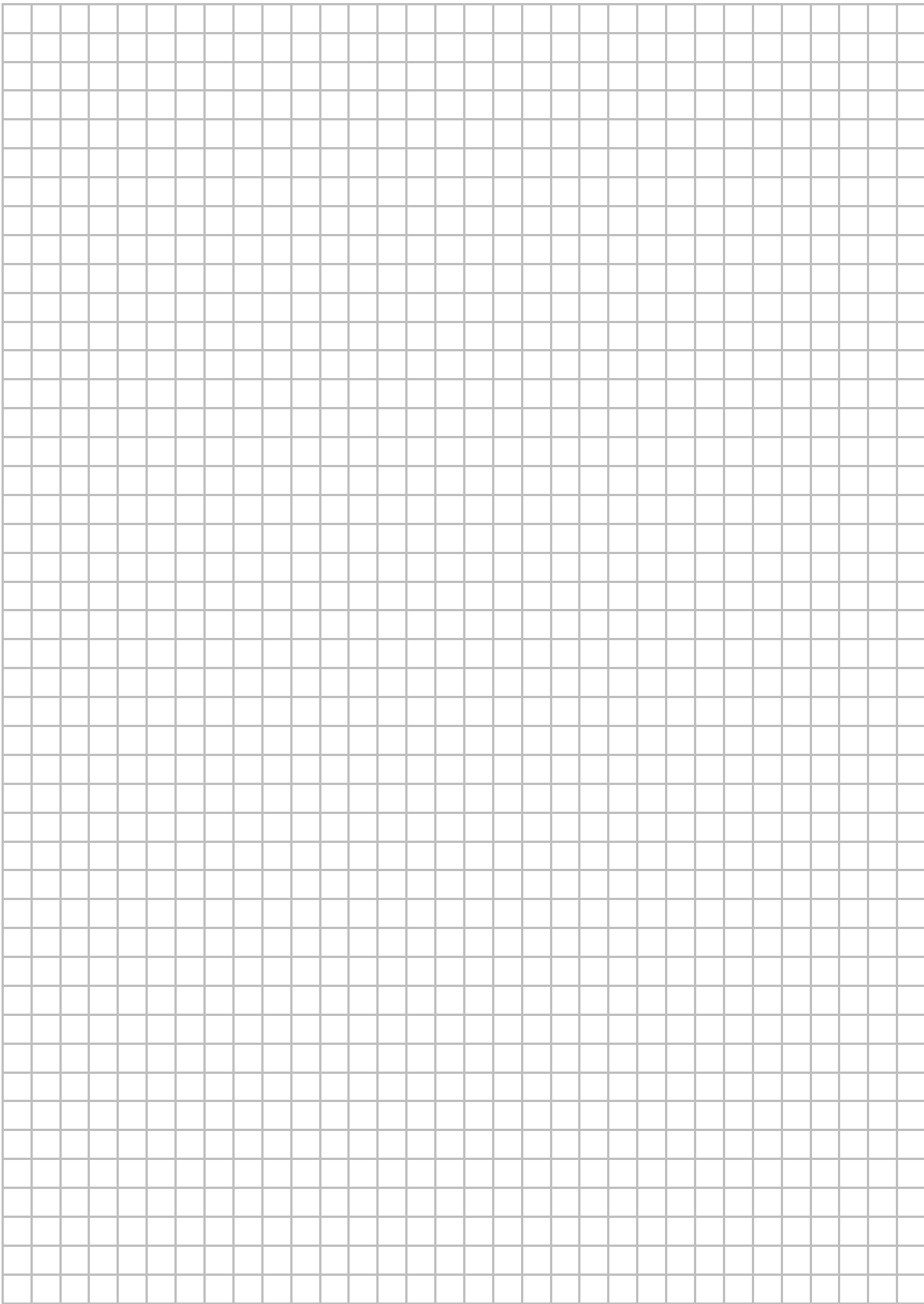
Wypełnia egzaminator	Nr zadania	12.
	Maks. liczba pkt	5
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 13. (0–5)

Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest kwadrat $ABCD$. Krawędź boczna SA jest wysokością ostrosłupa, natomiast krawędź podstawy ma długość $3\sqrt{34}$. Cosinus kąta β między ścianami bocznymi CDS i BCS tego ostrosłupa jest równy $\left(-\frac{9}{25}\right)$.

Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.





Wypełnia egzaminator	Nr zadania	13.
	Maks. liczba pkt	5
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 14. (0–6)

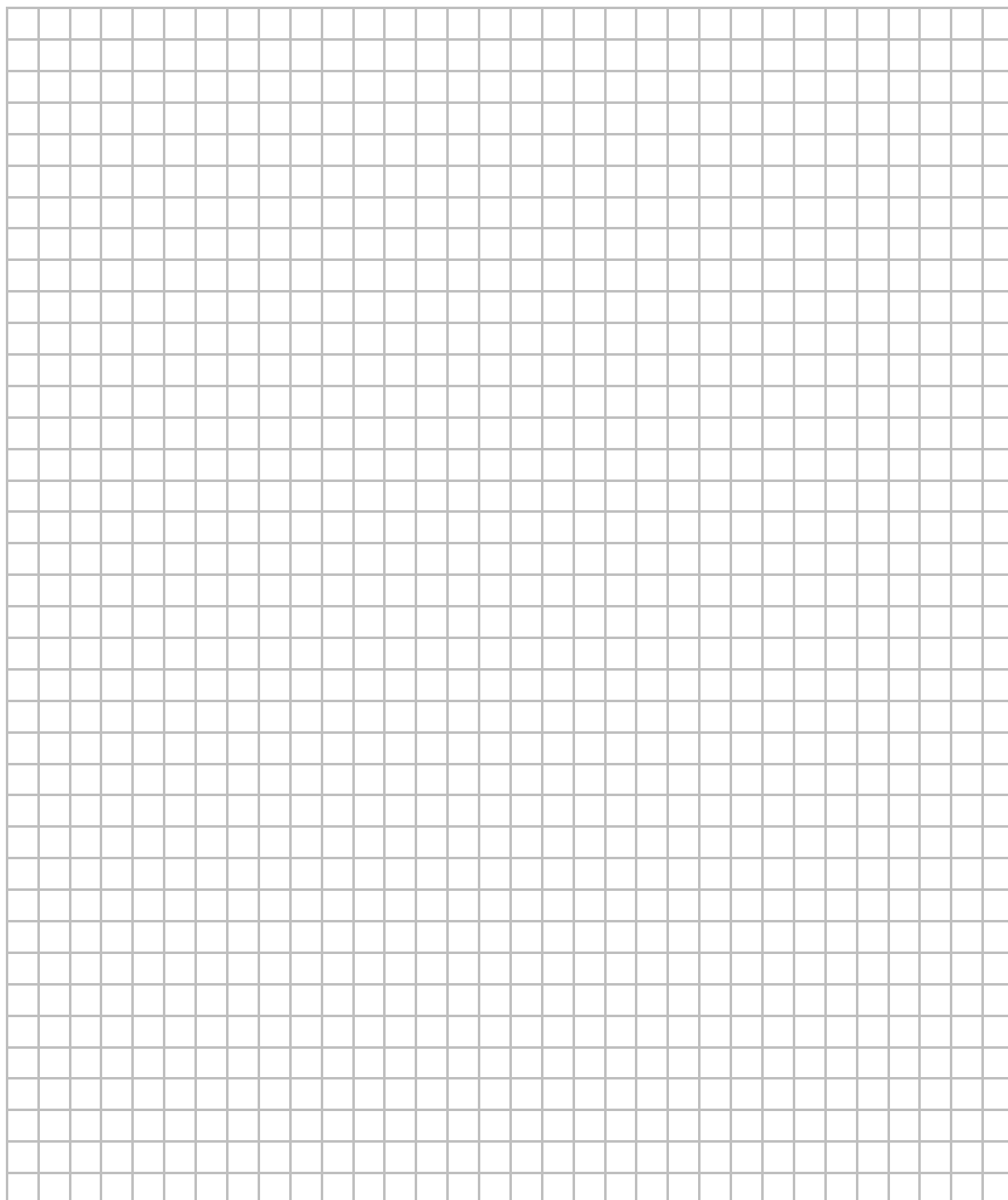
Funkcja f jest określona wzorem

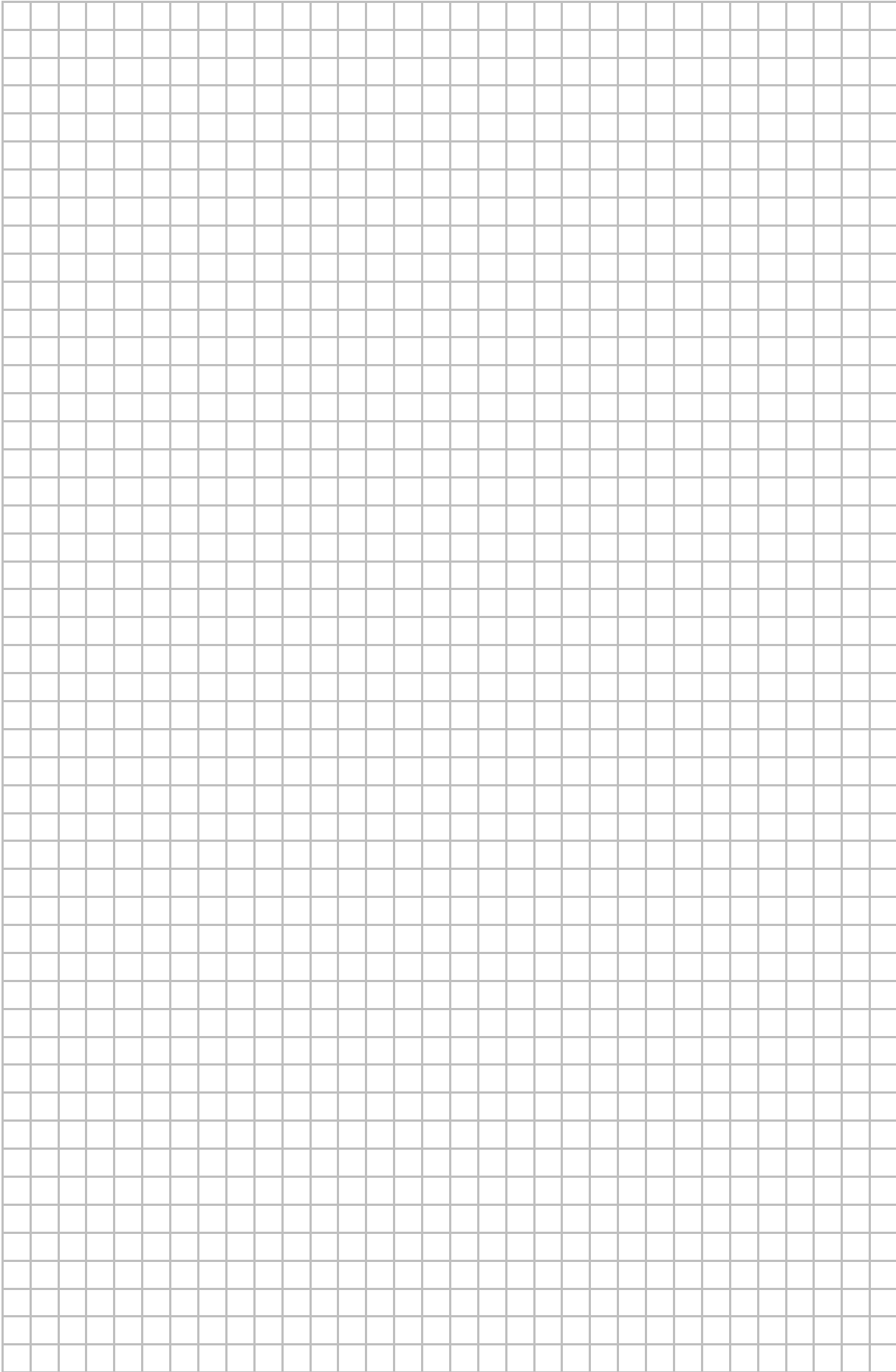
$$f(x) = (2 - m)x^2 - 2(2m + 1)x + m + 8$$

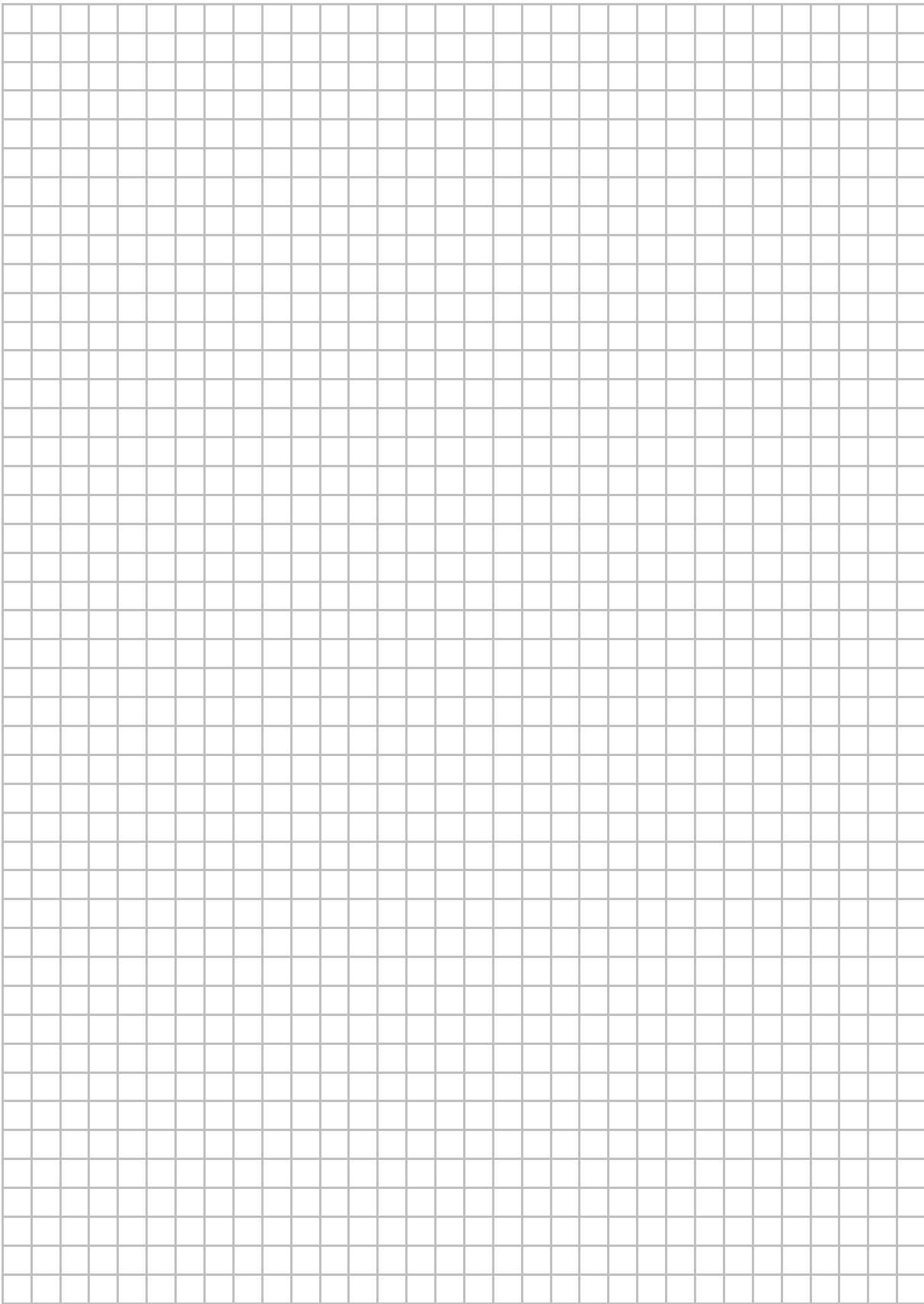
dla każdej liczby rzeczywistej x , gdzie m jest liczbą rzeczywistą różną od 2.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe x_1 oraz x_2 tego samego znaku, które spełniają warunek

$$(x_1 - x_2)^2 \leq 180$$







Wypełnia egzaminator	Nr zadania	14.
	Maks. liczba pkt	6
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 15. (0–6)

Rozważamy wszystkie stożki, których wysokość jest większa od 5, a odległość środka podstawy od tworzącej jest równa 5.

- a) Wykaż, że objętość V stożka, jako funkcja wysokości h stożka, wyraża się wzorem

$$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$$

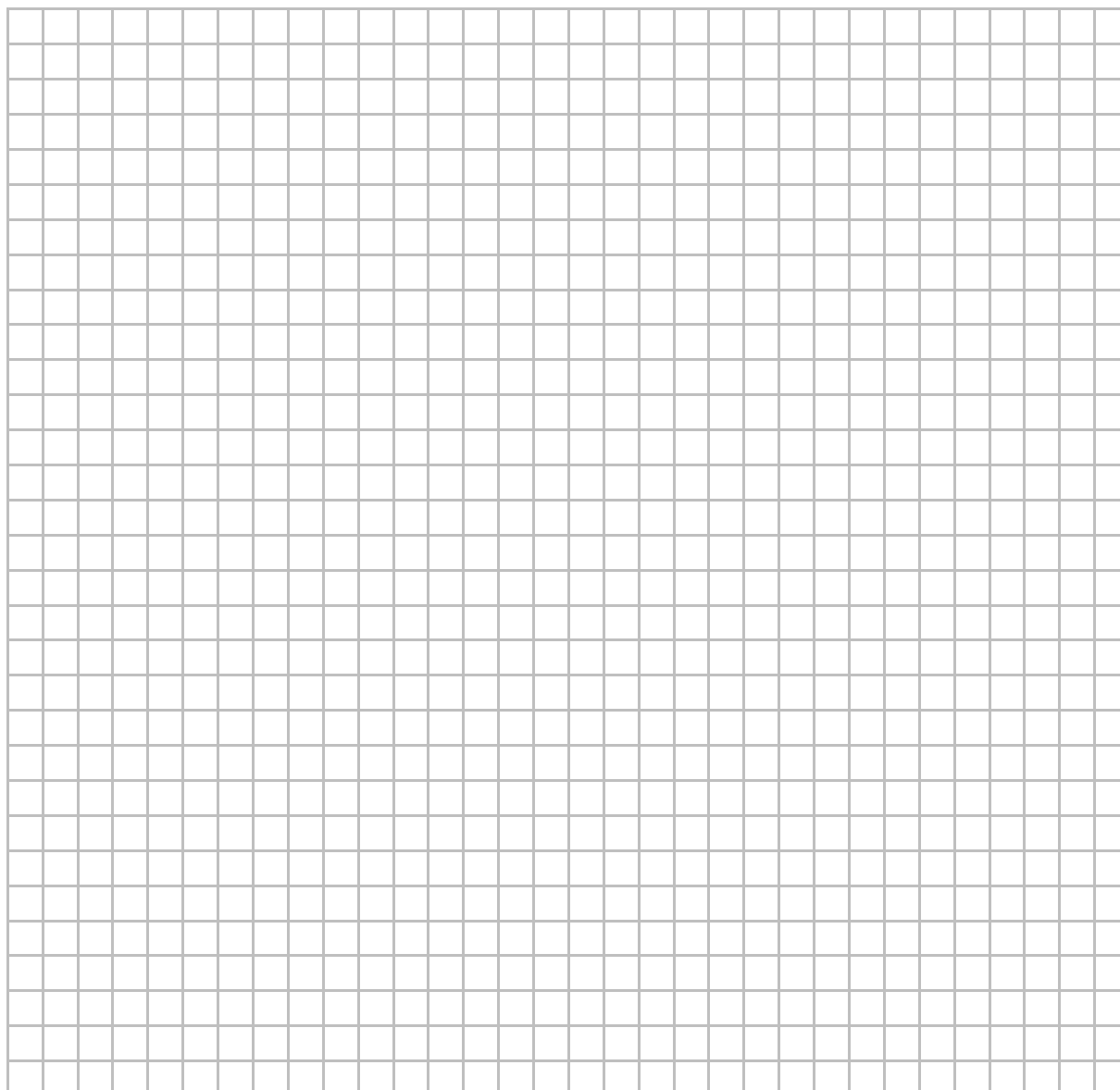
- b) Objętość V stożka, jako funkcja wysokości h stożka, wyraża się wzorem

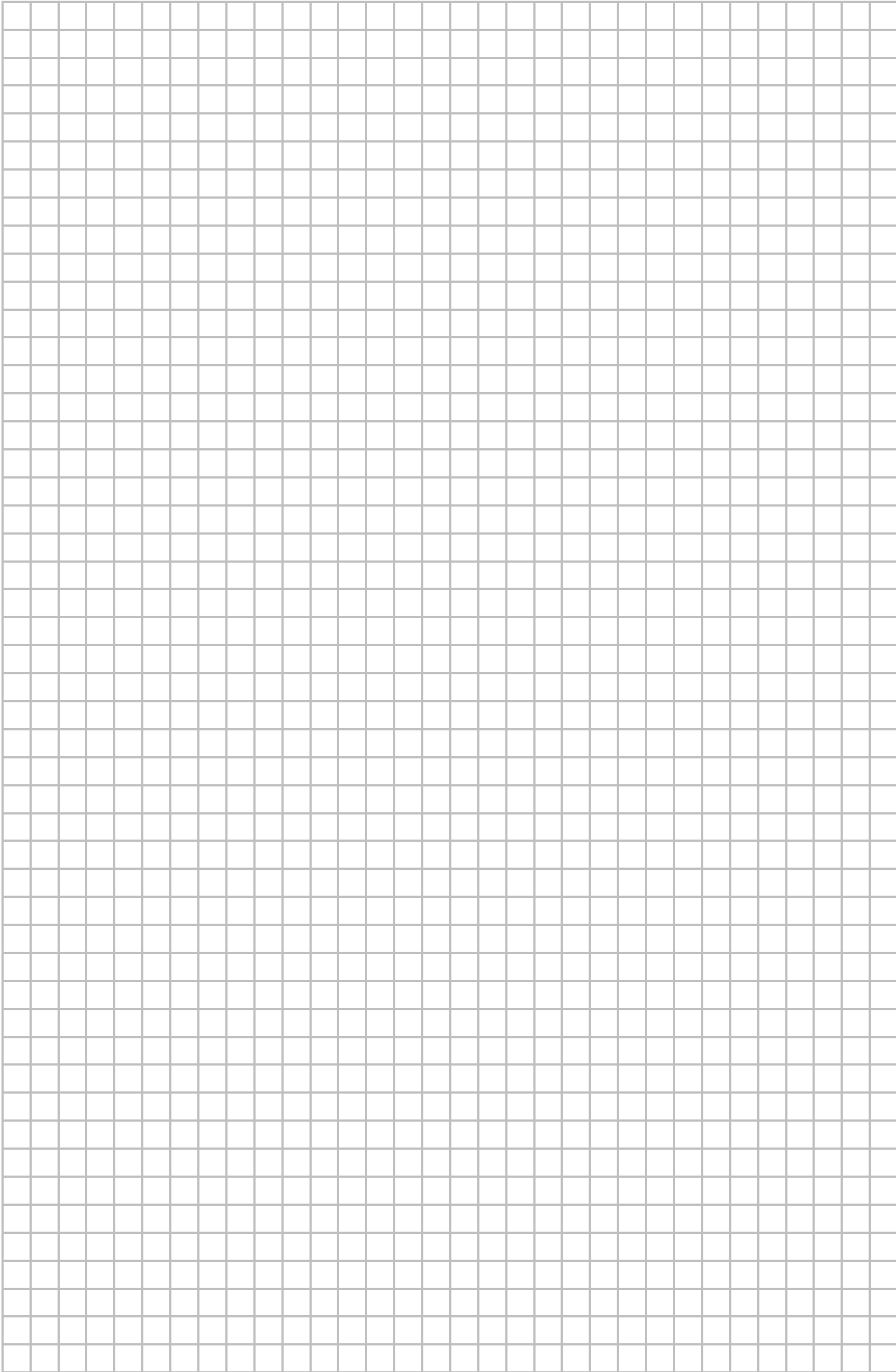
$$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$$

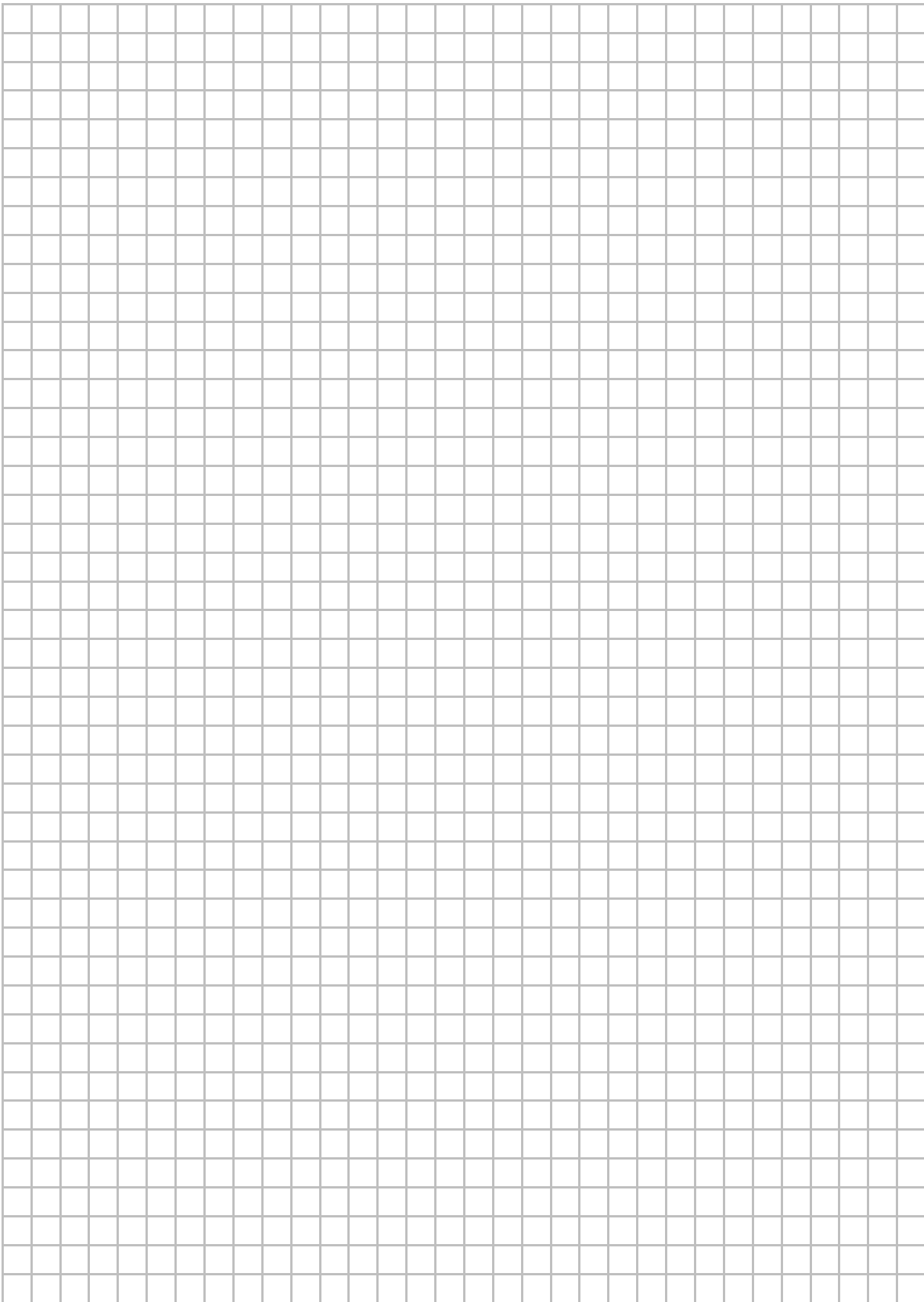
dla $h \in (5, +\infty)$.

Wyznacz wysokość tego z rozważanych stożków, którego objętość jest najmniejsza.

Oblicz tę najmniejszą objętość.

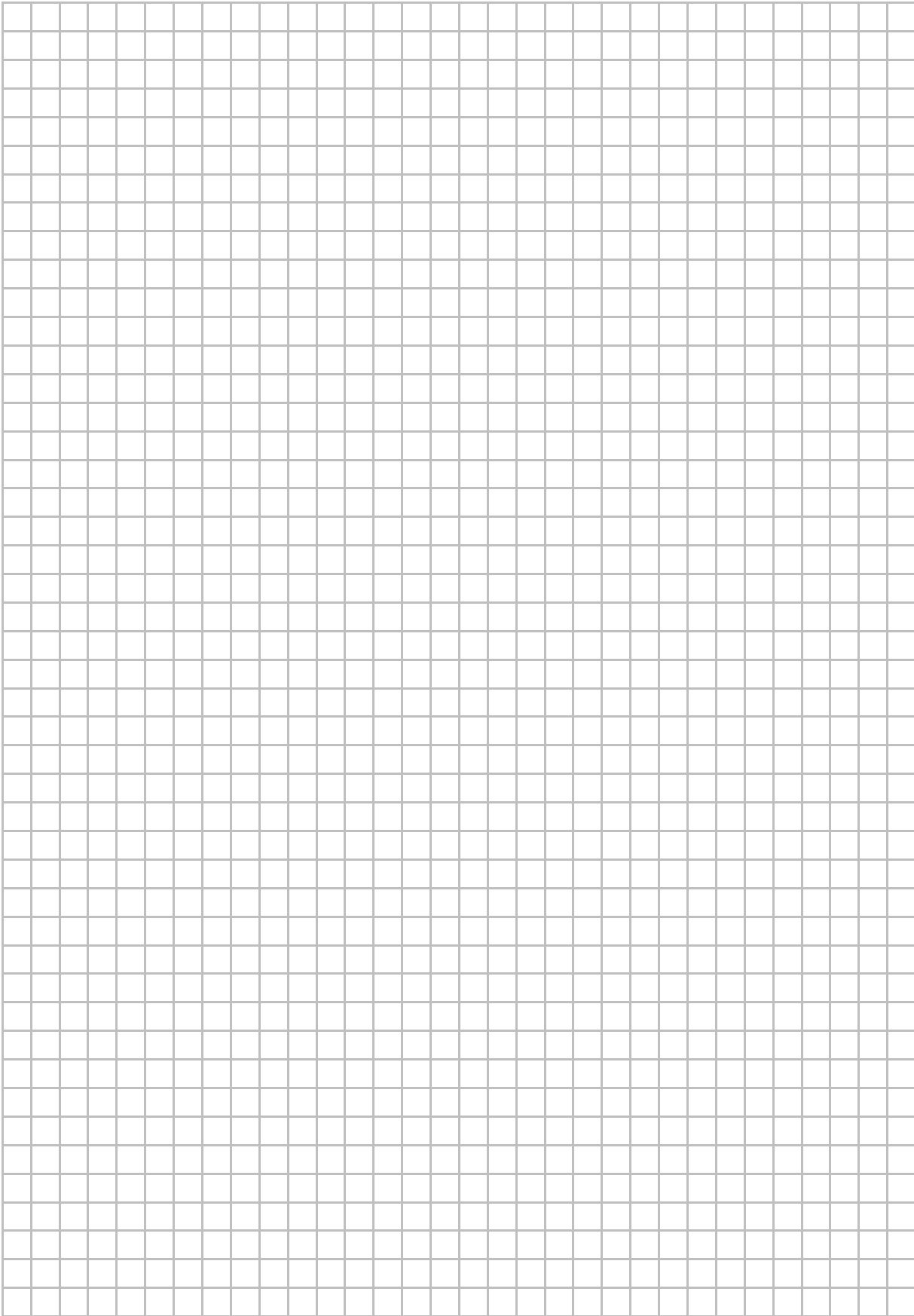




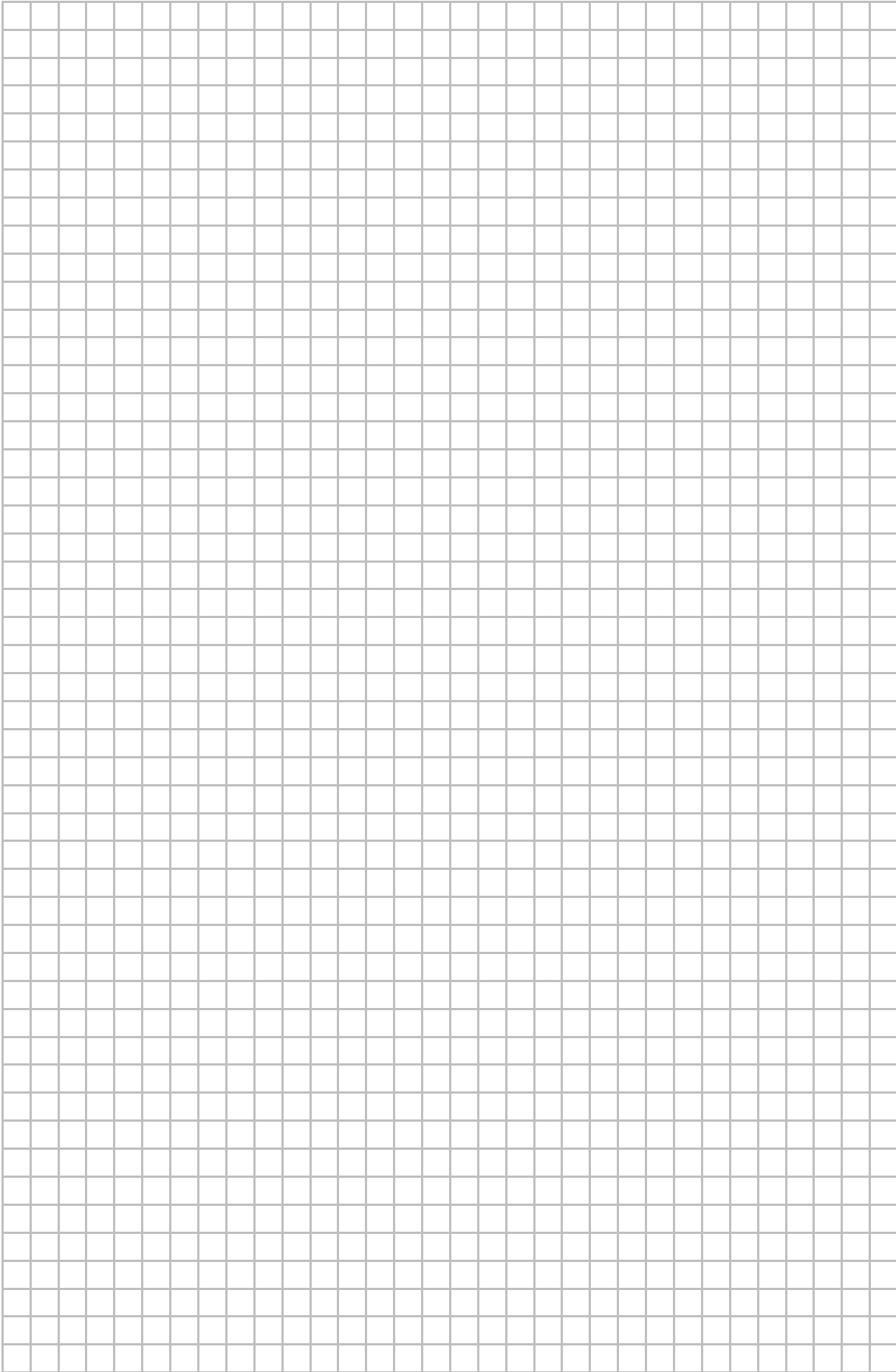


Wypełnia egzaminator	Nr zadania	15.
	Maks. liczba pkt	6
	Uzyskana liczba pkt	

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)



Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl



MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2015

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2015

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2015

<i>Rodzaj dokumentu:</i>	Zasady oceniania rozwiązań zadań
<i>Egzamin:</i>	Egzamin maturalny
<i>Przedmiot:</i>	Matematyka
<i>Poziom:</i>	Poziom rozszerzony
<i>Formy arkusza:</i>	EMAP-R0-100, EMAP-R0-200, EMAP-R0-300, EMAP-R0-400, EMAP-R0-700, EMAP-R0-K00, EMAP-R0-Q00, EMAU-R0-100
<i>Termin egzaminu:</i>	12 maja 2025 r.
<i>Data publikacji dokumentu:</i>	27 czerwca 2025 r.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania określone w podstawie programowej ¹	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.5R) stosuje twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.8R) rozwiązuje proste nierówności wymierne [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

¹ Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 27 sierpnia 2012 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół (Dz.U. 2012 poz. 977).

Zadanie 3. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 6.2R) [...] wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens dowolnego kąta [...] (przez sprowadzenie do przypadku kąta ostrego).

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 4. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 11.1R) oblicza granice funkcji [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

ZADANIE OTWARTE (KODOWANE)

Zadanie 5. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 7.5R) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.

Zasady oceniania

2 pkt – odpowiedź całkowicie poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

1	4	7

ZADANIA OTWARTE (NIEKODOWANE)

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 6. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 2.1R) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania (tj. spełnienie kryterium za 2 punkty **oraz** zapisanie, że $a + 2b > 0$ **oraz** uzasadnienie, że dla liczb spełniających warunek $b \neq \frac{1}{2}a$ zachodzi $(a - 2b)^2 > 0$).

2 pkt – przekształcenie nierówności do postaci $(a - 2b)^2(a + 2b) > 0$

ALBO

– przekształcenie nierówności do postaci $(a - 2b)^2 > 0$,

ALBO

– uzasadnienie, że funkcja f osiąga wartość najmniejszą dla $a = 2b$.

1 pkt – zastosowanie wzoru na sześcian sumy i przekształcenie nierówności do postaci

$$a^2(a - 2b) - 4b^2(a - 2b) > 0$$

ALBO

– przekształcenie nierówności do postaci $(a + 2b)[(a + 2b)^2 - 8ab] > 0$,

ALBO

– przekształcenie nierówności do postaci $(a + 2b)^2 > 8ab$,

ALBO

– rozważenie funkcji $f(a) = a^3 - 2ba^2 - 4b^2a + 8b^3$ określonej dla $a > 0$ oraz obliczenie pochodnej tej funkcji i miejsca zerowego tej pochodnej:

$$f'(a) = 3a^2 - 4ba - 4b^2 \text{ oraz } a = 2b.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga.

Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość nierówności jedynie dla wybranych wartości a i b , to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania*Sposób I*

Przekształcamy równoważnie nierówność, korzystając ze wzoru na sześcian sumy:

$$(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$$

$$a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3 - 8a^2b - 16ab^2 > 0$$

$$a^3 - 2a^2b - 4ab^2 + 8b^3 > 0$$

$$a^2(a - 2b) - 4b^2(a - 2b) > 0$$

$$(a - 2b)(a^2 - 4b^2) > 0$$

$$(a - 2b)^2(a + 2b) > 0$$

Z założenia $a > 0$ i $b > 0$, więc $a + 2b > 0$.

Ponieważ $b \neq \frac{1}{2}a$, więc $a - 2b \neq 0$ i wtedy $(a - 2b)^2 > 0$ jako kwadrat liczby rzeczywistej różnej od zera.

Zatem $(a - 2b)^2(a + 2b)$ jest dodatnie jako iloczyn liczb dodatnich, więc nierówność $(a - 2b)^2(a + 2b) > 0$ jest prawdziwa dla każdej liczby dodatniej a i każdej liczby dodatniej b takich, że $b \neq \frac{1}{2}a$. To oznacza, że również nierówność $(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$ jest prawdziwa dla każdej dla każdej liczby dodatniej a i każdej liczby dodatniej b takich, że $b \neq \frac{1}{2}a$. To należało wykazać.

Sposób II

Przekształcamy równoważnie nierówność, korzystając ze wzorów na kwadrat sumy i różnicy:

$$(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$$

$$(a + 2b)^3 > 8ab(a + 2b)$$

$$(a + 2b)^3 - 8ab(a + 2b) > 0$$

$$(a + 2b)[(a + 2b)^2 - 8ab] > 0$$

$$(a + 2b)(a^2 - 4ab + 4b^2) > 0$$

$$(a - 2b)^2(a + 2b) > 0$$

Z założenia $a > 0$ i $b > 0$, więc $a + 2b > 0$.

Ponieważ $b \neq \frac{1}{2}a$, więc $a - 2b \neq 0$ i wtedy $(a - 2b)^2 > 0$ jako kwadrat liczby rzeczywistej różnej od zera.

Zatem $(a - 2b)^2(a + 2b)$ jest dodatnie jako iloczyn liczb dodatnich, więc nierówność $(a - 2b)^2(a + 2b) > 0$ jest prawdziwa dla każdej liczby dodatniej a i każdej liczby dodatniej b takich, że $b \neq \frac{1}{2}a$. To oznacza, że również nierówność $(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$ jest prawdziwa dla każdej dla każdej liczby dodatniej a i każdej liczby dodatniej b takich, że $b \neq \frac{1}{2}a$. To należało wykazać.

Sposób III

Niech f będzie funkcją określoną wzorem $f(a) = (a + 2b)^3 - 8a^2b - 16ab^2$ dla każdego $a \in (0, +\infty)$.

Obliczamy pochodną funkcji f oraz jej miejsca zerowe:

$$f'(a) = 3(a + 2b)^2 - 16ba - 16b^2$$

$$3a^2 + 12ab + 12b^2 - 16ba - 16b^2 = 0 \quad \wedge \quad a > 0$$

$$3a^2 - 4ba - 4b^2 = 0 \quad \wedge \quad a > 0$$

$$\left(a = -\frac{2}{3}b \vee a = 2b\right) \wedge a > 0$$

Gdy $b > 0$, to $f'(a) > 0$ dla $a \in (2b, +\infty)$ oraz $f'(a) < 0$ dla $a \in (0, 2b)$. Zatem przy b dodatnim funkcja f jest malejąca w przedziale $(0, 2b]$ oraz rosnąca w przedziale $[2b, +\infty)$, czyli funkcja f osiąga wartość najmniejszą dla argumentu dodatniego $a = 2b$. Ta najmniejsza wartość jest równa $f(2b) = (2b + 2b)^3 - 8 \cdot (2b)^2 \cdot b - 16 \cdot 2b \cdot b^2 = 0$. Zatem dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej a i dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej b takich, że $a \neq 2b$, prawdziwa jest nierówność

$$(a + 2b)^3 - 8a^2b - 16ab^2 > 0$$

To należało wykazać.

Zadanie 7. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 7.4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi..

Zasady oceniania (dla sposobów I oraz VI)

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą – jednym z kątów: CAD , BAD , CDA , ADB , w którym wszystkie funkcje trygonometryczne są tego samego argumentu, np.

$$\frac{\sin 60^\circ \cdot \cos \alpha - \cos 60^\circ \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \text{ gdzie } \alpha = |\angle CAD|,$$

ALBO

– obliczenie współczynnika kierunkowego prostej AD : $2 - \sqrt{3}$.

1 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą – jednym z kątów: CAD , BAD , CDA , ADB ,

np. $\frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$, gdzie $\alpha = |\angle CAD|$,

ALBO

– zapisanie związku $\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla sposobu II)

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – wyznaczenie długości czterech spośród pięciu odcinków: BD , CD , CE , DE , AE ,

w zależności od jednej zmiennej, np. $|CD| = x$ i $|BD| = \frac{\sqrt{3}-1}{2}x$ i $|CE| = \frac{1}{2}x$

i $|AE| = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

ALBO

– wyznaczenie długości odcinków: BD , CD , CE , w zależności od długości odcinka AE

i tangensa kąta DAC , np. $|CE| = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot |AE| \cdot \operatorname{tg} \alpha$ i $|CD| = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot |AE| \cdot \operatorname{tg} \alpha$

i $|BD| = |AE| - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot |AE| \cdot \operatorname{tg} \alpha$, gdzie α jest kątem DAC .

1 pkt – zapisanie związku $\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$,

ALBO

– wyznaczenie długości dwóch odcinków spośród BD , BC i CD w zależności od

jednej zmiennej, np. $|CD| = x$ i $|BD| = \frac{\sqrt{3}-1}{2}x$,

ALBO

- wyznaczenie długości boków trójkąta CED w zależności od jednej zmiennej, np.

$$|CD| = x, |CE| = \frac{1}{2}x, |DE| = \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

ALBO

- wyznaczenie długości odcinka CE (albo CD) w zależności od długości odcinka AE i tangensa kąta DAC : $|CE| = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot |AE| \cdot \operatorname{tg} \alpha$ (albo $|CD| = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot |AE| \cdot \operatorname{tg} \alpha$), gdzie α jest kątem DAC .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla sposobów III – V)

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – obliczenie $\frac{|BD|}{|DF|}$ oraz $\frac{|AB|}{|AF|} : \frac{|BD|}{|DF|} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ oraz $\frac{|AB|}{|AF|} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

ALBO

- wyznaczenie długości odcinków AD oraz CD w zależności od jednej zmiennej, np.

$$|AD| = \sqrt{6}m \text{ oraz } |CD| = 2m.$$

1 pkt – wyznaczenie długości odcinków BD i CD w zależności od jednej zmiennej, np.

$$|CD| = 2m \text{ i } |BD| = (\sqrt{3} - 1)m.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

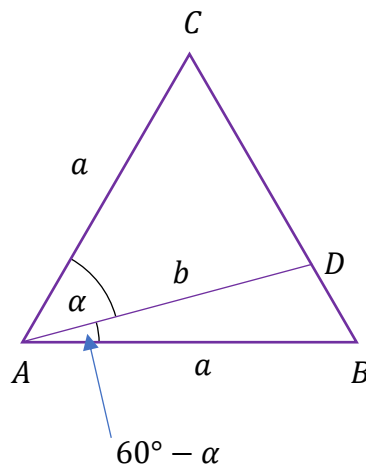
Przyjmijmy następujące oznaczenia:

a – długość boku trójkąta ABC ,

b – długość odcinka AD ,

α – miara kąta DAC

(zobacz rysunek).



Korzystając ze wzoru na pole trójkąta oraz uwzględniając warunki zadania, otrzymujemy:

$$\frac{P_{ABD}}{P_{ADC}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(60^\circ - \alpha)}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

Stąd i ze wzoru na sinus różnicy kątów otrzymujemy kolejno:

$$\frac{\sin 60^\circ \cdot \cos \alpha - \cos 60^\circ \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\sin 60^\circ \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 1$$

$$\alpha = 45^\circ$$

Zatem kąt DAC ma miarę 45° . To należało wykazać.

Sposób II

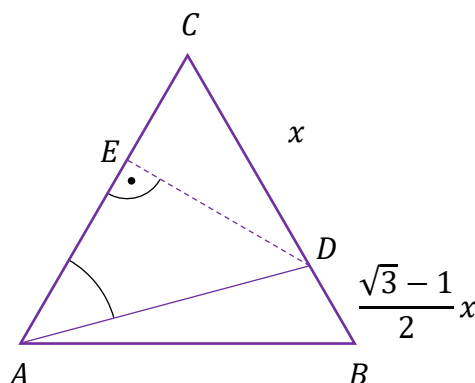
Trójkąty ABD i ACD mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka A , więc

$$\frac{P_{ABD}}{P_{ADC}} = \frac{|BD|}{|CD|}$$

zatem

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

Oznaczmy $x = |CD|$. Wtedy $|BD| = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}x$. Niech E będzie spodkiem wysokości trójkąta ADC poprowadzonej z wierzchołka D (zobacz rysunek).



Z własności trójkąta o kątach 30° , 60° , 90° otrzymujemy $|DE| = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ oraz $|EC| = \frac{1}{2}x$.

Ponieważ $|AE| + |EC| = |CD| + |DB|$, więc

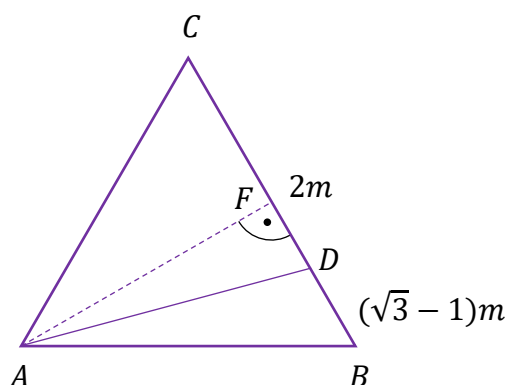
$$|AE| + \frac{1}{2}x = x + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}x$$

$$|AE| = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Zatem $|AE| = |DE|$. To oznacza, że trójkąt prostokątny DEA jest równoramienny i kąt DAC ma miarę 45° . To należało wykazać.

Sposób III (z twierdzenia o dwusiecznej)

Niech F będzie spodkiem wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka A . Trójkąty ABD i ADC mają wspólną wysokość AF , więc stosunek pól tych trójkątów jest równy stosunkowi długości odpowiednich podstaw. Zatem $|BD| = (\sqrt{3} - 1)m$ oraz $|CD| = 2m$, przy pewnym $m > 0$ (zobacz rysunek).



Wtedy $|AB| = |BC| = (\sqrt{3} + 1)m$, $|AF| = \frac{(\sqrt{3} + 1) \cdot \sqrt{3}}{2}m$ oraz

$|BF| = \frac{1}{2} \cdot |AB| = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}m$. Stąd

$$|DF| = |BF| - |BD| = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}m - (\sqrt{3} - 1)m = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}m$$

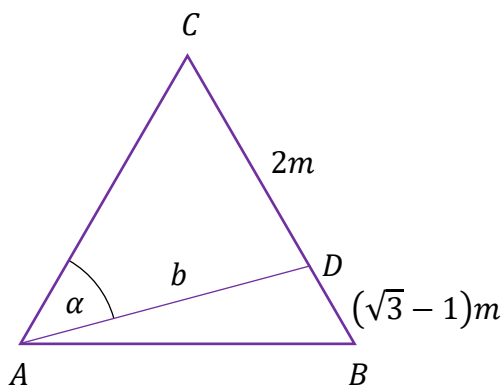
Ponieważ $\frac{|BD|}{|DF|} = \frac{(\sqrt{3} - 1)m}{\frac{(3 - \sqrt{3})m}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ oraz $\frac{|AB|}{|AF|} = \frac{(\sqrt{3} + 1)m}{\frac{(\sqrt{3} + 1) \cdot \sqrt{3}m}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, więc półprosta AD

jest dwusieczną kąta BAF . To oznacza, że

$|\angle DAF| = \frac{1}{2} \cdot |\angle BAF| = \frac{1}{2} \cdot 30^\circ = 15^\circ$ oraz $|\angle DAC| = 30^\circ + |\angle DAF| = 45^\circ$. To należało wykazać.

Sposób IV (z twierdzenia cosinusów i sinusów / dwukrotnie z twierdzenia cosinusów)

Oznaczmy kąt CAD przez α , natomiast długość odcinka AD oznaczmy przez b . Trójkąty ABD i ADC mają wspólną wysokość poprowadzoną z wierzchołka A na prostą BC , więc stosunek pól tych trójkątów jest równy stosunkowi długości odpowiednich podstaw. Zatem $|BD| = (\sqrt{3} - 1)m$ oraz $|CD| = 2m$, przy pewnym $m > 0$ (zobacz rysunek).



Wtedy $|AB| = |BC| = |CA| = (\sqrt{3} + 1)m$.

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta ADC :

$$\begin{aligned} b^2 &= |AC|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |CD| \cdot \cos 60^\circ \\ b^2 &= [(\sqrt{3} + 1)m]^2 + (2m)^2 - 2 \cdot (\sqrt{3} + 1)m \cdot 2m \cdot \frac{1}{2} \\ b^2 &= (4 + 2\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3} - 2) \cdot m^2 \\ b &= \sqrt{6}m \end{aligned}$$

Stosujemy twierdzenie sinusów do trójkąta ADC i otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{b}{\sin 60^\circ} &= \frac{2m}{\sin \alpha} \\ \frac{\sqrt{6}m}{\sin 60^\circ} &= \frac{2m}{\sin \alpha} \\ \sin \alpha &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Zatem $|\angle DAC| = 45^\circ$. To należało wykazać.

Uwaga.

Zamiast $\sin \alpha$ możemy też obliczyć $\cos \alpha$, korzystając po raz drugi z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ADC :

$$\begin{aligned} |CD|^2 &= |AC|^2 + b^2 - 2 \cdot |AC| \cdot b \cdot \cos \alpha \\ (2m)^2 &= [(\sqrt{3} + 1)m]^2 + (\sqrt{6}m)^2 - 2 \cdot (\sqrt{3} + 1)m \cdot \sqrt{6}m \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

$$2 \cdot (\sqrt{3} + 1)m \cdot \sqrt{6}m \cdot \cos \alpha = [(\sqrt{3} + 1)m]^2 + (\sqrt{6}m)^2 - (2m)^2$$

$$\cos \alpha = \frac{(3 + 2\sqrt{3} + 1) + 6 - 4}{2\sqrt{6} \cdot (\sqrt{3} + 1)} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{6} \cdot (\sqrt{3} + 1)} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{2\sqrt{6} \cdot (\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zatem $|\angle DAC| = 45^\circ$.

Sposób V (z twierdzenia Stewarta)

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

a – długość boku trójkąta ABC ,

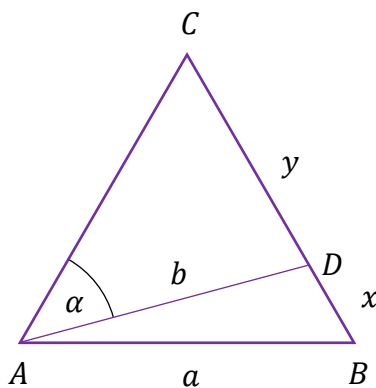
b – długość odcinka AD ,

x – długość odcinka BD ,

y – długość odcinka CD ,

α – miara kąta DAC

(zobacz rysunek).



Trójkąty ABD i ADC mają wspólną wysokość poprowadzoną z wierzchołka A na prostą BC , więc stosunek pól tych trójkątów jest równy stosunkowi długości odpowiednich podstaw. Zatem $x = (\sqrt{3} - 1)m$ oraz $y = 2m$, przy pewnym $m > 0$.

Wtedy $a = (\sqrt{3} + 1)m$.

Stosujemy twierdzenie Stewarta

$$a^2 \cdot x + a^2 \cdot y = (x + y)(b^2 + xy)$$

$$a^2 = b^2 + xy$$

$$[(\sqrt{3} + 1)m]^2 = b^2 + (\sqrt{3} - 1)m \cdot 2m$$

$$b = \sqrt{6}m$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta ADC i otrzymujemy:

$$y^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos \alpha$$

$$(2m)^2 = (\sqrt{6}m)^2 + [(\sqrt{3} + 1)m]^2 - 2 \cdot (\sqrt{3} + 1)m \cdot \sqrt{6}m \cdot \cos \alpha$$

$$4m^2 = 6m^2 + (4 + 2\sqrt{3})m^2 - 2(3\sqrt{2} + \sqrt{6}) \cdot m^2 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{(6 + 2\sqrt{3})}{2(3\sqrt{2} + \sqrt{6})}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}(3\sqrt{2} + \sqrt{6})}{2(3\sqrt{2} + \sqrt{6})}$$

Zatem $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\alpha = 45^\circ$. To należało wykazać.

Sposób VI (analitycznie)

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

a – długość boku trójkąta ABC ,

α – miara kąta DAC ,

β – miara kąta BAD .

Umieszczamy trójkąt ABC w układzie współrzędnych tak, żeby $A = (0, 0)$, $B = (a, 0)$ i C

leżał w I ćwiartce układu współrzędnych. Wtedy $C = \left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

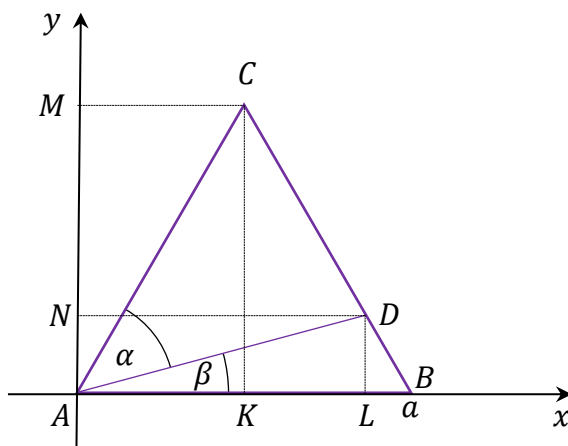
Trójkąty ABD i ACD mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka A , więc

$$\frac{P_{ABD}}{P_{ADC}} = \frac{|BD|}{|CD|}$$

zatem

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

Oznaczmy teraz rzuty prostokątne punktów C i D na oś odciętych przez – odpowiednio – K oraz L , a rzuty prostokątne punktów C i D na oś rzędnych przez – odpowiednio – M oraz N (zobacz rysunek).



Z twierdzenia Talesa otrzymujemy

$$\frac{|KL|}{|KB|} = \frac{|CD|}{|BC|} = \frac{2}{2 + \sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} - 1 \text{ oraz } \frac{|AN|}{|AM|} = \frac{|BD|}{|BC|} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2 + \sqrt{3} - 1} = 2 - \sqrt{3}$$

zatem

$$|KL| = (\sqrt{3} - 1) \cdot |KB| = (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{a}{2} \quad \text{oraz} \quad |AN| = (2 - \sqrt{3}) \cdot |AM| = (2 - \sqrt{3}) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Stąd

$$D = \left(\frac{a}{2} + (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{a}{2}, (2 - \sqrt{3}) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{2} \right)$$

Współczynnik kierunkowy prostej AD jest równy

$$a_{AD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = 2 - \sqrt{3}$$

Zatem

$$\operatorname{tg} \beta = a_{AD} = 2 - \sqrt{3}$$

Ze wzoru na tangens różnicy kątów otrzymujemy

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(60^\circ - \beta) = \frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{\sqrt{3} - (2 - \sqrt{3})}{1 + \sqrt{3} \cdot (2 - \sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3} - 2}{2\sqrt{3} - 2} = 1$$

Zatem $\alpha = 45^\circ$. To należało wykazać.

Zadanie 8. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.2R) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{9}{25}$ (lub $\frac{54}{150}$).

2 pkt – wyznaczenie mocy zdarzeń B oraz $A \cap B$, np. $|B| = \binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 5$ oraz
 $|A \cap B| = \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot 4 + \binom{4}{2}$.

1 pkt – wyznaczenie mocy zdarzenia B , np. $|B| = \binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 5$,
 ALBO

– wyznaczenie mocy zdarzenia $A \cap B$, np. $|A \cap B| = \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot 4 + \binom{4}{2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga.

Jeżeli zdający, obliczając $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (lub $\frac{|A \cap B|}{|B|}$), pominie w liczniku i mianowniku czynnik $\binom{4}{2}$ bez stosownego komentarza, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie czteroelementowe wariacje z powtórzeniami ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Niech Ω oznacza zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych.

Oznaczmy przez A zdarzenie polegające na tym, że otrzymamy co najmniej jeden raz sześć oczek, natomiast przez B – że otrzymamy dokładnie dwa razy pięć oczek.

Obliczamy moc zdarzenia B : $|B| = \binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 5 = 150$.

Obliczamy moc zdarzenia $A \cap B$: $|A \cap B| = \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot 4 + \binom{4}{2} = 54$.

Obliczamy prawdopodobieństwo warunkowe $P(A|B)$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{54}{150} = \frac{9}{25}$$

Zadanie 9. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.9R) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną [...].

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $x \in (-\infty, -10) \cup \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

3 pkt – zapisanie trzech przedziałów: $(-\infty, -3)$ i $[-3, 2)$ i $[2, +\infty)$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przedziałów **oraz** rozwiązanie nierówności w dwóch spośród tych przedziałów - tj. wyznaczenie części wspólnych zbiorów rozwiązań zapisanych nierówności z rozpatrywanymi przedziałami,

ALBO

– zapisanie czterech przypadków: $x + 3 < 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 < 0$ i $x - 2 \geq 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 \geq 0$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przypadków **oraz** rozwiązanie nierówności w dwóch spośród trzech następujących przypadków: $x + 3 < 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 \geq 0$ - tj. wyznaczenie części wspólnych zbiorów rozwiązań zapisanych nierówności,

ALBO

– zapisanie, że przypadek $x + 3 < 0$ i $x - 2 \geq 0$ jest sprzeczny **oraz** zapisanie trzech przypadków: $x + 3 < 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 \geq 0$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przypadków **oraz** rozwiązanie nierówności w dwóch spośród tych trzech przypadków - tj. wyznaczenie części wspólnych zbiorów rozwiązań zapisanych nierówności,

ALBO

– zapisanie nierówności w postaci równoważnej koniunkcji dwóch nierówności: $x - 2 < -2 + 2 \cdot |x + 3|$ i $x - 2 > -(-2 + 2 \cdot |x + 3|)$, a następnie w postaci równoważnej koniunkcji alternatyw nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej:

$$(x + 3 > \frac{1}{2}x \text{ lub } x + 3 < -\frac{1}{2}x) \text{ i } (x + 3 > \frac{4-x}{2} \text{ lub } x + 3 < -\frac{4-x}{2}),$$

ALBO

– odczytanie z wykresów funkcji f oraz g pierwszych współrzędnych punktów ich przecięcia: $x = -\frac{2}{3}$ oraz $x = -10$ i sprawdzenie rachunkiem poprawności odczytanych współrzędnych.

2 pkt – zapisanie trzech przedziałów: $(-\infty, -3)$ i $[-3, 2)$ i $[2, +\infty)$ (z dokładnością do domknięcia) oraz zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przedziałów

ALBO

- zapisanie czterech przypadków: $x + 3 < 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 < 0$ i $x - 2 \geq 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 \geq 0$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przypadków,
ALBO
 - zapisanie trzech przypadków: $x + 3 < 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 \geq 0$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przypadków **oraz** zapisanie, że przypadek $x + 3 < 0$ i $x - 2 \geq 0$ jest sprzeczny,
ALBO
 - zapisanie nierówności w postaci równoważnej koniunkcji dwóch nierówności:
 $x - 2 < -2 + 2 \cdot |x + 3|$ i $x - 2 > -(-2 + 2 \cdot |x + 3|)$,
ALBO
 - narysowanie wykresów funkcji $f(x) = |x - 2|$ oraz $g(x) = 2 \cdot |x + 3| - 2$.
- 1 pkt – zapisanie trzech przedziałów: $(-\infty, -3)$ i $[-3, 2)$ i $[2, +\infty)$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie danej nierówności w jednym z tych przedziałów bez użycia symbolu wartości bezwzględnej
ALBO
- zapisanie jednego z przedziałów: $(-\infty, -3)$, $[-3, 2)$, $[2, +\infty)$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** rozwiązanie danej nierówności w tym przedziale - tj. wyznaczenie części wspólnej zbioru rozwiązań zapisanej nierówności z rozpatrywanym przedziałem,
ALBO
 - zapisanie czterech przypadków: $x + 3 < 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 < 0$ i $x - 2 \geq 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 \geq 0$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie danej nierówności w jednym z tych przypadków bez użycia wartości bezwzględnej,
ALBO
 - zapisanie jednego z trzech przypadków: $x + 3 < 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 \geq 0$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** rozwiązanie danej nierówności w tym przypadku - tj. wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań zapisanych nierówności.
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający, zapisując nierówność bez użycia wartości bezwzględnej, popełni błąd, który nie jest rachunkowy, tylko w jednym z rozpatrywanych przypadków/przedziałów i rozwiąże zadanie do końca, to może uzyskać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej punktacji zgodnej z zasadami oceniania.
2. Jeżeli zdający nie rozpatruje przedziałów, które wyczerpują zbiór wszystkich liczb rzeczywistych i w których nierówność ma różne postaci (lub rozpatruje przypadki wyznaczone jedynie przez nierówności ostre, które nie wyczerpują zbioru $\mathbb{R}$), to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający przy rozwiązaniu graficznym poda zbiór rozwiązań $(-\infty, -10) \cup (-\frac{2}{3}, +\infty)$, ale nie sprawdzi rachunkiem pierwszych współrzędnych

punktów przecięcia wykresów funkcji f i g , to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Wyznaczamy przedziały, które wyczerpują zbiór wszystkich liczb rzeczywistych i w których nierówność ma różne postaci: $(-\infty, -3)$ i $[-3, 2)$ i $[2, +\infty)$.

Rozważamy trzy przypadki.

Przypadek 1. (gdy $x \in (-\infty, -3)$)

W tym przypadku nierówność ma postać $-x + 2 + 2(x + 3) < -2$, czyli $x < -10$.

Stąd otrzymujemy $x \in (-\infty, -10)$.

Przypadek 2. (gdy $x \in [-3, 2)$)

W tym przypadku nierówność ma postać $-x + 2 - 2(x + 3) < -2$, czyli $x > -\frac{2}{3}$.

Stąd otrzymujemy $x \in (-\frac{2}{3}, 2)$.

Przypadek 3. (gdy $x \in [2, +\infty)$)

W tym przypadku nierówność ma postać $x - 2 - 2(x + 3) < -2$, czyli $x > -6$.

Stąd otrzymujemy $x \in [2, +\infty)$.

Ostatecznie rozwiązaniami nierówności $|x - 2| - 2 \cdot |x + 3| < -2$ są wszystkie liczby ze zbioru $(-\infty, -10) \cup (-\frac{2}{3}, +\infty)$.

Sposób II (poprzez koniunkcję nierówności)

Dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej a prawdziwe są równoważności:

(1) $|x| < a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x < a$ i $x > -a$

oraz

(2) $|x| > a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x > a$ lub $x < -a$.

Przekształcamy nierówność $|x - 2| - 2 \cdot |x + 3| < -2$, korzystając z równoważności (1):

$$x - 2 < -2 + 2 \cdot |x + 3| \quad \text{i} \quad x - 2 > -(-2 + 2 \cdot |x + 3|)$$

$$|x + 3| > \frac{1}{2}x \quad \text{i} \quad |x + 3| > \frac{4 - x}{2}$$

Rozwiązujemy każdą z otrzymanych nierówności, korzystając z równoważności (2):

$$\left(x + 3 > \frac{1}{2}x \quad \text{lub} \quad x + 3 < -\frac{1}{2}x\right) \quad \text{i} \quad \left(x + 3 > \frac{4 - x}{2} \quad \text{lub} \quad x + 3 < -\frac{4 - x}{2}\right)$$

$$(x > -6 \quad \text{lub} \quad x < -2) \quad \text{i} \quad \left(x > -\frac{2}{3} \quad \text{lub} \quad x < -10\right)$$

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad \left(x > -\frac{2}{3} \quad \text{lub} \quad x < -10 \right)$$

$$x > -\frac{2}{3} \quad \text{lub} \quad x < -10$$

Rozwiązaniami nierówności $|x - 2| - 2 \cdot |x + 3| < -2$ są wszystkie liczby ze zbioru $(-\infty, -10) \cup (-\frac{2}{3}, +\infty)$.

Zadanie 10. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 5.3R) rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{27}{2}$ lub 27.

3 pkt – obliczenie a_1 oraz q : $(a_1, q) = (18, \frac{1}{3})$, $(a_1, q) = (18, -\frac{1}{3})$, $(a_1, q) = (2, 3)$,

$$(a_1, q) = (2, -3)$$

ALBO

– obliczenie a_3 oraz q : $(a_3, q) = (2, \frac{1}{3})$, $(a_3, q) = (2, -\frac{1}{3})$, $(a_3, q) = (18, 3)$,

$$(a_3, q) = (18, -3),$$

ALBO

– obliczenie a_2 oraz q : $(a_2, q) = (-6, -3)$, $(a_2, q) = (-6, -\frac{1}{3})$, $(a_2, q) = (6, \frac{1}{3})$,

$$(a_2, q) = (6, 3) \text{ (dla sposobu III),}$$

ALBO

– wyznaczenie jednej z par (a_1, q) , dla której szereg geometryczny jest zbieżny

i obliczenie sumy tego szeregu, np. $(a_1, q) = (18, \frac{1}{3})$ i $S = 27$, $(a_1, q) = (18, -\frac{1}{3})$

$$\text{ i } S = \frac{27}{2},$$

ALBO

– wyznaczenie jednej z par (a_3, q) , dla której szereg geometryczny jest zbieżny

i obliczenie sumy tego szeregu, np. $(a_3, q) = (2, \frac{1}{3})$ i $S = 27$, $(a_3, q) = (2, -\frac{1}{3})$

$$\text{ i } S = \frac{27}{2},$$

ALBO

– wyznaczenie jednej z par (a_2, q) , dla której szereg geometryczny jest zbieżny

i obliczenie sumy tego szeregu, np. $(a_2, q) = (6, \frac{1}{3})$ i $S = 27$, $(a_2, q) = (-6, -\frac{1}{3})$

$$\text{ i } S = \frac{27}{2} \text{ (dla sposobu III).}$$

2 pkt – obliczenie a_1 : $a_1 = 2$ oraz $a_1 = 18$

ALBO

– obliczenie a_3 : $a_3 = 18$ oraz $a_3 = 2$,

ALBO

– obliczenie q^2 : $q^2 = 9$ oraz $q^2 = \frac{1}{9}$,

ALBO

– zapisanie alternatywy równań $-\frac{6}{q} - 6q = 20$ lub $\frac{6}{q} + 6q = 20$ (dla sposobu III),

ALBO

– zapisanie równania $\frac{36}{q^2} + 36q^2 = 328$ (dla *sposobu III*).

1 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (a_1 lub a_3 , lub q), np.

$$a_1^2 + (20 - a_1)^2 = 328, (20 - a_3)^2 + a_3^2 = 328, \frac{400}{(q^2 + 1)^2} \cdot (1 + q^4) = 328$$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą a_2 , np. $a_2^2 = 36$, $20^2 - 2a_2^2 = 328$ (dla *sposobu III*).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

- Jeżeli zdający odrzuci otrzymane wartości $q = 3$ oraz $q = -3$ (lub parę $(a_1, a_3) = (2, 18)$) bez komentarza, to może otrzymać **4 punkty** za całe rozwiązanie.
- Jeżeli zdający nie odrzuci wartości $q = 3$ oraz $q = -3$ i zastosuje wzór na sumę szeregu geometrycznego dla $q = 3$ (albo dla $q = -3$), to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
- a)** Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy, ale otrzyma co najmniej jeden iloraz spełniający warunek $|q| < 1$ oraz co najmniej jeden iloraz spełniający warunek $|q| \geq 1$ i rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (2 punkty za pary (a_1, q) oraz 1 punkt za obliczenie sum szeregów dla wszystkich otrzymanych ilorazów q spełniających warunek $|q| < 1$, o ile nie obliczy sumy szeregu dla ilorazu spełniającego warunek $|q| \geq 1$).
- b)** Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy, ale otrzyma co najmniej dwa ilorazy i wszystkie z nich spełniają warunek $|q| < 1$ oraz rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za pary (a_1, q) oraz 1 punkt za obliczenie sum szeregów dla wszystkich otrzymanych ilorazów q), o ile nie nabył prawa do innej punktacji zgodnej z zasadami oceniania.
- Jeżeli zdający popełni błąd, który nie jest rachunkowy, ale otrzyma co najmniej jeden iloraz spełniający warunek $|q| < 1$ i rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za pary (a_1, q) oraz 1 punkt za obliczenie sum szeregów dla wszystkich otrzymanych ilorazów q spełniających warunek $|q| < 1$, o ile nie obliczy sumy szeregu dla ilorazu spełniającego warunek $|q| \geq 1$), o ile nie nabył prawa do innej punktacji zgodnej z zasadami oceniania.
- Jeżeli zdający odgadnie rozwiązanie układu równań $a_1 + a_3 = 20$ i $a_1^2 + a_3^2 = 328$:
 $(a_1, a_3) = (18, 2)$ oraz obliczy poprawnie obie sumy szeregu: $S = 27$ i $S = \frac{27}{2}$ i nie obliczy sumy szeregu dla ilorazu spełniającego warunek $|q| \geq 1$, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
- Jeżeli zdający odgadnie rozwiązanie układu równań $a_1 + a_3 = 20$ i $a_1^2 + a_3^2 = 328$:
 $(a_1, a_3) = (18, 2)$ oraz $(a_1, a_3) = (2, 18)$, ale nie obliczy poprawnie obu sum szeregu: $S = 27$ i $S = \frac{27}{2}$ lub obliczy sumę szeregu dla ilorazu spełniającego warunek $|q| \geq 1$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania**Sposób I**

Niech q oznacza iloraz ciągu (a_n) . Z warunków $a_1 + a_3 = 20$ i $a_1^2 + a_3^2 = 328$ otrzymujemy:

$$a_1^2 + (20 - a_1)^2 = 328$$

$$2a_1^2 - 40a_1 + 72 = 0$$

$$a_1 = 2 \quad \vee \quad a_1 = 18$$

Gdy $a_1 = 2$, to $a_3 = 20 - a_1 = 18$ i wtedy $q^2 = 9$, więc $q = -3$ lub $q = 3$. Dla każdej z tych wartości ilorazu ciąg (a_n) jest rozbieżny i tym samym nie są spełnione warunki zadania.

Gdy $a_1 = 18$, to $a_3 = 20 - a_1 = 2$ i wtedy $q^2 = \frac{1}{9}$, więc $q = -\frac{1}{3}$ lub $q = \frac{1}{3}$. Dla każdej z tych wartości q ciąg (a_n) jest zbieżny, a ponieważ $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$ oraz $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$, więc dla obu tych wartości ilorazu istnieje suma wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) .

Dla $a_1 = 18$ i $q = -\frac{1}{3}$ suma S wszystkich wyrazów ciągu (a_n) jest równa

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{18}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{27}{2}$$

Dla $a_1 = 18$ i $q = \frac{1}{3}$ suma S wszystkich wyrazów ciągu (a_n) jest równa

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{18}{1 - \frac{1}{3}} = 27$$

Sposób II

Niech q oznacza iloraz ciągu (a_n) . Z warunku $a_1 + a_3 = 20$ otrzymujemy

$$a_1 + a_1 q^2 = 20, \text{ więc } a_1 = \frac{20}{q^2 + 1} \text{ i } a_1 \neq 0.$$

Stąd i z warunku $a_1^2 + a_3^2 = 328$ otrzymujemy:

$$a_1^2 + (a_1 q^2)^2 = 328$$

$$a_1^2 \cdot (1 + q^4) = 328$$

$$\frac{400}{(q^2 + 1)^2} \cdot (1 + q^4) = 328$$

$$72q^4 - 656q^2 + 72 = 0$$

$$9q^4 - 82q^2 + 9 = 0$$

$$\Delta = (-82)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 9 = 6400$$

$$q^2 = \frac{82 - 80}{2 \cdot 9} = \frac{1}{9} \quad \vee \quad q^2 = \frac{82 + 80}{2 \cdot 9} = 9$$

$$q = -\frac{1}{3} \vee q = \frac{1}{3} \vee q = -3 \vee q = 3$$

Ponieważ $a_1 \neq 0$, więc dla $q = -3$ oraz $q = 3$ ciąg (a_n) nie jest zbieżny.

Gdy $q = -\frac{1}{3}$, to $a_1 = \frac{20}{q^2+1} = 18$ i ciąg (a_n) jest zbieżny. Ponadto $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$, więc istnieje suma S wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego i jest ona równa

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{18}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{27}{2}$$

Gdy $q = \frac{1}{3}$, to $a_1 = \frac{20}{q^2+1} = 18$ i ciąg (a_n) jest zbieżny. Ponadto $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$, więc istnieje suma S wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego i jest ona równa

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{18}{1-\frac{1}{3}} = 27$$

Sposób III (poprzez a_2)

Niech q oznacza iloraz ciągu (a_n) . Z warunków $a_1 + a_3 = 20$ i $a_1^2 + a_3^2 = 328$ otrzymujemy:

$$a_1^2 + a_3^2 = 328$$

$$(a_1 + a_3)^2 - 2a_1 \cdot a_3 = 328$$

$$20^2 - 2a_1 \cdot a_3 = 328$$

Stąd, po zastosowaniu własności ciągu geometrycznego, dostajemy

$$20^2 - 2a_2^2 = 328$$

$$a_2 = -6 \vee a_2 = 6$$

Przypadek 1. (gdy $a_2 = -6$).

Warunek $a_1 + a_3 = 20$ zapisujemy w postaci $\frac{a_2}{q} + a_2 \cdot q = 20$ i obliczamy iloraz ciągu:

$$-\frac{6}{q} - 6q = 20$$

$$-6q^2 - 20q - 6 = 0$$

$$q = \frac{20-16}{-12} = -\frac{1}{3} \vee q = \frac{20+16}{-12} = -3$$

Gdy $q = -\frac{1}{3}$ i $a_2 = -6$, to ciąg (a_n) jest zbieżny. Ponadto $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$, więc istnieje suma S wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego i jest ona równa

$$S = \frac{\frac{a_2}{q}}{1 - q} = \frac{18}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{27}{2}$$

Gdy $q = -3$ i $a_2 = -6$, to ciąg (a_n) jest rozbieżny, więc warunki zadania nie są spełnione.

Przypadek 2. (gdy $a_2 = 6$).

Warunek $a_1 + a_3 = 20$ zapisujemy w postaci $\frac{a_2}{q} + a_2 \cdot q = 20$ i obliczamy iloraz ciągu:

$$\frac{6}{q} + 6q = 20$$

$$6q^2 - 20q + 6 = 0$$

$$q = \frac{20 - 16}{12} = \frac{1}{3} \quad \vee \quad q = \frac{20 + 16}{12} = 3$$

Gdy $q = \frac{1}{3}$ i $a_2 = 6$, to ciąg (a_n) jest zbieżny. Ponadto $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$, więc istnieje suma S wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego i jest ona równa

$$S = \frac{\frac{a_2}{q}}{1 - q} = \frac{18}{1 - \frac{1}{3}} = 27$$

Gdy $q = 3$ i $a_2 = 6$, to ciąg (a_n) jest rozbieżny, więc warunki zadania nie są spełnione.

Zadanie 11. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 8.5R) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ [...]; 8.7R) oblicza współrzędne oraz długość wektora; dodaje i odejmuje wektory oraz mnoży je przez liczbę. Interpretuje geometrycznie działania na wektorach.

Zasady oceniania

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $A = \left(\frac{16}{5}, -\frac{13}{5}\right)$, $B = (-1, -2)$
oraz $M = \left(\frac{2}{5}, -\frac{11}{5}\right)$.

4 pkt – zapisanie równania $\left[x_M - \frac{16}{5}, y_M - \left(-\frac{13}{5}\right)\right] = -2 \cdot [x_M - (-1), y_M - (-2)]$
ALBO

– zapisanie układu równań z dwiema niewiadomymi, który pozwala obliczyć

współrzędne punktu M , np. $\sqrt{(-1 - x_M)^2 + (-2 - y_M)^2} = \sqrt{2}$ oraz

$\sqrt{(x_M - 3,2)^2 + (y_M + 2,6)^2} = 2\sqrt{2}$,

ALBO

– obliczenie współrzędnych punktów A oraz B : $A = \left(\frac{16}{5}, -\frac{13}{5}\right)$ i $B = (-1, -2)$

oraz zapisanie równości $x_M = \frac{1}{3}x_A + \frac{2}{3}x_B$ oraz $y_M = \frac{1}{3}y_A + \frac{2}{3}y_B$.

3 pkt – obliczenie współrzędnych punktów A oraz B : $A = \left(\frac{16}{5}, -\frac{13}{5}\right)$ oraz

$B = (-1, -2)$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą, pozwalającego obliczyć pierwsze (lub drugie) współrzędne punktów przecięcia okręgów, np.

$(-7y - 15 - 2)^2 + (y - 4)^2 = 45$ **oraz** zapisanie równości $x_M = \frac{1}{3}x_A + \frac{2}{3}x_B$ oraz

$y_M = \frac{1}{3}y_A + \frac{2}{3}y_B$.

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą, pozwalającego obliczyć pierwsze (lub drugie) współrzędne punktów przecięcia okręgów, np.

$(-7y - 15 - 2)^2 + (y - 4)^2 = 45$,

ALBO

– wyznaczenie równania prostej AB , np. $2x + 14y = -30$ **oraz** zapisanie równości

$x_M = \frac{1}{3}x_A + \frac{2}{3}x_B$ oraz $y_M = \frac{1}{3}y_A + \frac{2}{3}y_B$,

ALBO

– zapisanie współrzędnych punktu B : $B = (-1, -2)$ i sprawdzenie rachunkiem, że punkt B jest punktem przecięcia okręgów **oraz** wyznaczenie równania prostej AB ,

ALBO

- zapisanie współrzędnych punktu B : $B = (-1, -2)$ i sprawdzenie rachunkiem, że punkt B jest punktem przecięcia okręgów **oraz** obliczenie współrzędnych środka odcinka AB : $\left(\frac{11}{10}, -\frac{23}{10}\right)$.

1 pkt – wyznaczenie równania prostej AB , np. $2x + 14y = -30$

ALBO

- zapisanie równości $x_M = \frac{1}{3}x_A + \frac{2}{3}x_B$ oraz $y_M = \frac{1}{3}y_A + \frac{2}{3}y_B$,

ALBO

- zapisanie współrzędnych punktu B : $B = (-1, -2)$ i sprawdzenie rachunkiem, że punkt B jest punktem przecięcia okręgów **oraz** zapisanie/obliczenie współczynnika kierunkowego prostej przechodzącej przez środki okręgów: 7.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający błędnie identyfikuje punkt A jako $(-1, -2)$, to może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe i otrzyma punkty A oraz B , których pierwsze współrzędne są liczbami dodatnimi, i konsekwentnie do popełnionych błędów rozwiązuje zadanie do końca, rozważając dwa przypadki, to może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe i otrzyma punkty A oraz B , których pierwsze współrzędne są liczbami ujemnymi, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (trzeci punkt otrzymuje za zapisanie równości $x_M = \frac{1}{3}x_A + \frac{2}{3}x_B$ oraz $y_M = \frac{1}{3}y_A + \frac{2}{3}y_B$).

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy współrzędne punktów A oraz B , w których przecinają się okręgi O_1 oraz O_2 :

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 = 5 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 - (x-2)^2 - (y-4)^2 = 5 - 45 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 - x^2 + 4x - 4 - y^2 + 8y - 16 = -40 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 14y = -30 \quad / :2 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 7y = -15 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -7y - 15 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -7y - 15 \\ (-7y - 15 - 2)^2 + (y - 4)^2 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -7y - 15 \\ 50y^2 + 230y + 260 = 0 \end{cases}$$

Stąd

$$y = -\frac{13}{5} \text{ lub } y = -2$$

Gdy $y = -\frac{13}{5}$ to wtedy $x = -7 \cdot \left(-\frac{13}{5}\right) - 15 = \frac{16}{5}$.

Gdy $y = -2$ to wtedy $x = -7 \cdot (-2) - 15 = -1$.

Ponieważ pierwsza współrzędna punktu A jest dodatnia, więc $A = \left(\frac{16}{5}, -\frac{13}{5}\right)$

oraz $B = (-1, -2)$.

Oznaczmy przez x_M i y_M odpowiednie współrzędne punktu M , tj. $M = (x_M, y_M)$. Wtedy

$$\overrightarrow{AM} = -2 \cdot \overrightarrow{BM}$$

$$\left[x_M - \frac{16}{5}, y_M - \left(-\frac{13}{5}\right)\right] = -2 \cdot [x_M - (-1), y_M - (-2)]$$

$$\left[x_M - \frac{16}{5}, y_M + \frac{13}{5}\right] = [-2x_M - 2, -2y_M - 4]$$

$$x_M - \frac{16}{5} = -2x_M - 2 \quad \wedge \quad y_M + \frac{13}{5} = -2y_M - 4$$

$$x_M = \frac{2}{5} \quad \wedge \quad y_M = -\frac{11}{5}$$

Zatem $M = \left(\frac{2}{5}, -\frac{11}{5}\right)$.

Zadanie 12. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 6.5R) stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów; 6.6R) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne [...].

Zasady oceniania (dla sposobów I–III)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right), \left(-\frac{\pi}{6}\right), \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$.

4 pkt – zapisanie założenia $\cos x \neq 0$ oraz rozwiązanie alternatywy równań $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub

$\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w przedziale $[-\pi, \pi]$: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right), \left(-\frac{\pi}{6}\right), \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$ (dla sposobów I oraz III)
ALBO

– rozwiązanie jednego z równań alternatywy $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, gdzie

$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ i $k \in \mathbb{Z}$, w przedziale $[-\pi, \pi]$, np.

$\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ i $\frac{\pi}{3}$ (rozwiązania równania $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ w przedziale $[-\pi, \pi]$),

$\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ oraz $\frac{5\pi}{6}$ (rozwiązania równania $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w przedziale $[-\pi, \pi]$),

oraz uzasadnienie, że liczby postaci $\frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie spełniają równania

$3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$ (dla sposobów I oraz III),
ALBO

– rozwiązanie alternatywy równań $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w zbiorze $\mathbb{R}$:

$x = \frac{\pi}{3} + \pi k$ oraz $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, **oraz** uzasadnienie, że liczby postaci $\frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie spełniają równania

$3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$ (dla sposobów I oraz III),
ALBO

– zapisanie założenia $\cos(2x) \neq 0$ oraz rozwiązanie równania $\operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$

w przedziale $[-\pi, \pi]$: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right), \left(-\frac{\pi}{6}\right), \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$ (dla sposobu II),

ALBO

– rozwiązanie równania $\operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$ w zbiorze $\mathbb{R}$: $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$,

oraz uzasadnienie, że liczby postaci $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie spełniają równania

$3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0$ (dla sposobu II).

3 pkt – zapisanie założenia $\cos x \neq 0$ oraz rozwiązanie alternatywy równań $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub

$\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w zbiorze $\mathbb{R}$:

$x = \frac{\pi}{3} + \pi k$ oraz $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ (dla *sposobów I* oraz *III*)

ALBO

– przekształcenie równania do postaci alternatywy równań $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

oraz rozwiązanie jednego z równań tej alternatywy w przedziale $[-\pi, \pi]$, np.

$(-\frac{2\pi}{3})$ i $\frac{\pi}{3}$ (rozwiązania równania $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ w przedziale $[-\pi, \pi]$),

$(-\frac{\pi}{6})$ i $\frac{5\pi}{6}$ (rozwiązania równania $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w przedziale $[-\pi, \pi]$),

(dla *sposobów I* oraz *III*),

ALBO

– przekształcenie równania do postaci alternatywy równań $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

oraz uzasadnienie, że liczby postaci $\frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie spełniają równania

$3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$ (dla *sposobów I* oraz *III*)

ALBO

– zapisanie założenia $\cos(2x) \neq 0$ oraz rozwiązanie równania $\operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$

w zbiorze $\mathbb{R}$: $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ (dla *sposobu II*),

ALBO

– przekształcenie równania do postaci $\operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$ **oraz** uzasadnienie, że liczby

postaci $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie spełniają równania $3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0$

(dla *sposobu II*).

2 pkt – przekształcenie równania do alternatywy równań $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (dla

sposobów I oraz *III*)

ALBO

– przekształcenie równania do postaci $-3\operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 3 = 0$ **oraz**

uzasadnienie, że liczby postaci $\frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie spełniają równania

$3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$ (dla *sposobu I*),

ALBO

– przekształcenie równania do postaci $\operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$ (dla *sposobu II*).

1 pkt – przekształcenie równania do postaci $-3\operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 3 = 0$ (dla *sposobu I*)

ALBO

– zastosowanie wzoru na cosinus podwojonego kąta i zapisanie równania

$3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0$ (dla *sposobu II*),

ALBO

– zastosowanie wzoru na sinus podwojonego kąta oraz wzorów skróconego mnożenia i przekształcenie równania do postaci

$(\sqrt{3}\cos x + \sin x - 2\sin x)(\sqrt{3}\cos x + \sin x + 2\sin x) = 0$ (dla *sposobu III*),

ALBO

– uzasadnienie, że liczby postaci $\frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie spełniają równania

$$3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0 \quad (\text{dla sposobów I oraz III}).$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla sposobów IV–V)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right), \left(-\frac{\pi}{6}\right), \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$.

4 pkt – rozwiązanie równania $\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = 0$ w zbiorze $\mathbb{R}$: $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

(dla sposobu IV),

ALBO

– rozwiązanie równania $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = 0$ w zbiorze $\mathbb{R}$: $x = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

(dla sposobu IV),

ALBO

– rozwiązanie obydwu równań alternatywy $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$ lub $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$

w zbiorze $\mathbb{R}$:

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k \text{ oraz } x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z} \quad (\text{dla sposobu V}),$$

ALBO

– przekształcenie równania do postaci alternatywy równań $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$ lub

$$\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0 \text{ oraz rozwiązanie jednego z równań tej alternatywy}$$

w przedziale $[-\pi, \pi]$, np.

$$\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \text{ i } \frac{\pi}{3} \quad (\text{rozwiązania równania } \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0 \text{ w przedziale } [-\pi, \pi]),$$

$$\left(-\frac{\pi}{6}\right) \text{ oraz } \frac{5\pi}{6} \quad (\text{rozwiązania równania } \sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0 \text{ w przedziale } [-\pi, \pi]),$$

(dla sposobu V),

ALBO

– przekształcenie równania do postaci alternatywy równań $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$ lub

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0 \text{ oraz rozwiązanie jednego z równań tej alternatywy w przedziale}$$

$[-\pi, \pi]$, np.

$$\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \text{ i } \frac{\pi}{3} \quad (\text{rozwiązania równania } \sqrt{3}\cos x - \sin x = 0 \text{ w przedziale } [-\pi, \pi]),$$

$$\left(-\frac{\pi}{6}\right) \text{ oraz } \frac{5\pi}{6} \quad (\text{rozwiązania równania } \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0 \text{ w przedziale } [-\pi, \pi]),$$

(dla sposobu V).

3 pkt – przekształcenie równania do postaci $\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = 0$ (dla sposobu IV)

ALBO

– przekształcenie równania do postaci $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = 0$ (dla sposobu IV),

ALBO

- przekształcenie równania do postaci alternatywy równań $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$ lub $\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0$ **oraz** rozwiązanie jednego z równań tej alternatywy w zbiorze $\mathbb{R}$, np.
- $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$ (rozwiązania równania $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$ w zbiorze $\mathbb{R}$),
 $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$ (rozwiązania równania $\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0$ w zbiorze $\mathbb{R}$),
 gdzie $k \in \mathbb{Z}$ (dla **sposobu V**),
- przekształcenie równania do postaci alternatywy równań $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$ lub $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$ **oraz** rozwiązanie jednego z równań tej alternatywy w zbiorze $\mathbb{R}$, np.
- $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$ (rozwiązania równania $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$ w zbiorze $\mathbb{R}$),
 $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$ (rozwiązania równania $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$ w zbiorze $\mathbb{R}$), gdzie $k \in \mathbb{Z}$ (dla **sposobu V**).
- 2 pkt – przekształcenie równania do postaci $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x) = 0$ (dla **sposobu IV**)
 ALBO
- przekształcenie równania do postaci alternatywy równań $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$ lub $\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0$ (dla **sposobu V**),
 ALBO
- przekształcenie równania do postaci alternatywy równań $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$ lub $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$ (dla **sposobu V**).
- 1 pkt – zastosowanie wzoru na cosinus podwojonego kąta i zapisanie równania $3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0$ (dla **sposobu IV**)
 ALBO
- zastosowanie wzoru na sinus podwojonego kąta oraz wzorów skróconego mnożenia i przekształcenie równania do postaci $(\sqrt{3}\cos x + \sin x - 2\sin x)(\sqrt{3}\cos x + \sin x + 2\sin x) = 0$ (dla **sposobu V**),
 ALBO
- zastosowanie wzoru na sinus podwojonego kąta i obliczenie wyróżnika Δ trójkianu kwadratowego $3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x$ zmiennej np. $\cos x$:
 $\Delta = (4\sqrt{3}\sin x)^2$.
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:

- niepoprawne zastosowanie wzoru na sumę/różnicę cosinusów/sinusów,
- niepoprawne zastosowanie wzoru na iloczyn cosinusów/sinusów,
- błędne zastosowanie nieparzystości/parzystości funkcji trygonometrycznej,

ale zdający otrzyma elementarne równania trygonometryczne postaci $\sin(ax + b) = c$, $\cos(ax + b) = c$, gdzie $a \neq 0$, $a^2 \neq 1$, $b \neq 0$, $c \in [-1, 1]$, i rozwiązanie doprowadzi konsekwentnie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej punktacji zgodnej z zasadami oceniania.

2. Jeżeli zdający błędnie stosuje metodę analizy starożytnych, np. podnosi obie strony równania $3 \cos(2x) = -\sqrt{3} \sin(2x)$ do kwadratu i nie sprawdza rachunkiem, czy wszystkie otrzymane liczby są rozwiązaniami, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **3 punkty**; natomiast jeżeli odrzuci co najmniej jedno rozwiązanie „obce” (ale nie odrzuci wszystkich rozwiązań „obcych”), to może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający dzieli obie strony równania przez wyrażenie $a(x)$ zawierające niewiadomą x i nie zapisze założenia $a(x) \neq 0$, ani też nie rozważy przypadku $a(x) = 0$, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I (poprzez sinus podwojonego kąta i tangens)

Stosujemy wzory na sinus podwojonego kąta i przekształcamy równanie

$$3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0 \text{ do postaci}$$

$$3\cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$$

Należy rozważyć dwa przypadki.

Przypadek 1. (gdy $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$).

Dzielimy obie strony równania $3\cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$ przez $\cos^2 x$ i otrzymujemy

$$3 + \frac{2\sqrt{3} \sin x}{\cos x} - \frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$3 + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{tg}^2 x = 0$$

$$-3 \operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 3 = 0$$

$$\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 3 = 48$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \quad \vee \quad \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Rozwiązaniami równania $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ w zbiorze $\mathbb{R}$ są wszystkie liczby postaci $\frac{\pi}{3} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Zatem rozwiązaniami tego równania w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby $(-\frac{2\pi}{3})$ i $\frac{\pi}{3}$.

Rozwiązaniami równania $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w zbiorze $\mathbb{R}$ są wszystkie liczby postaci $-\frac{\pi}{6} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Zatem rozwiązaniami tego równania w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby $(-\frac{\pi}{6})$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Przypadek 2. (gdy $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$).

Ponieważ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ oraz $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 1$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}$, więc równanie $3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$ przyjmuje postać

$$3 \cdot 0^2 + 2\sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) \cdot 0 - 3 \cdot 1 = 0$$

czyli $-3 = 0$. To oznacza, że wśród liczb postaci $\frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie ma rozwiązań równania $3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$.

Ostatecznie rozwiązaniami równania $3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Sposób II (poprzez cosinus podwojonego kąta i tangens)

Stosujemy wzory na cosinus podwojonego kąta i przekształcamy równanie

$3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$ do postaci

$$3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0$$

Należy rozważyć dwa przypadki.

Przypadek 1. (gdy $2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$).

Dzielimy obie strony równania $3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0$ przez $\cos(2x)$ i otrzymujemy

$$3 + \sqrt{3} \cdot \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = 0$$

$$\operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$$

$$2x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Stąd otrzymujemy cztery rozwiązania w przedziale $[-\pi, \pi]$: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Przypadek 2. (gdy $2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$).

Ponieważ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}$, więc równanie

$3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0$ przyjmuje postać

$$3 \cdot 0 + \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$$

i stąd $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Korzystając z jedynki trygonometrycznej, otrzymujemy

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 1$$

$$0^2 + 0^2 = 1$$

czyli $0 = 1$. To oznacza, że wśród liczb postaci $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie ma rozwiązań równania $3 \cos(2x) + \sqrt{3} \sin(2x) = 0$.

Ostatecznie rozwiązaniami równania $3 \cos^2 x + \sqrt{3} \sin(2x) - 3 \sin^2 x = 0$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Sposób III

Przekształcamy równanie $3 \cos^2 x + \sqrt{3} \sin(2x) - 3 \sin^2 x = 0$ równoważnie, stosując wzór na sinus podwojonego kąta i wzory skróconego mnożenia:

$$3 \cos^2 x + \sqrt{3} \sin(2x) - 3 \sin^2 x = 0$$

$$3 \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 3 \sin^2 x = 0$$

$$(\sqrt{3} \cos x + \sin x)^2 - 4 \sin^2 x = 0$$

$$(\sqrt{3} \cos x + \sin x - 2 \sin x)(\sqrt{3} \cos x + \sin x + 2 \sin x) = 0$$

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 0 \quad \vee \quad \sqrt{3} \cos x + 3 \sin x = 0$$

$$\sin x = \sqrt{3} \cos x \quad \vee \quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cos x$$

Przypadek 1. (gdy $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$).

Dzielimy strony równań alternatywy przez $\cos x$ i otrzymujemy

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \quad \vee \quad \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Rozwiązaniami równania $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ w zbiorze $\mathbb{R}$ są wszystkie liczby postaci $\frac{\pi}{3} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Zatem rozwiązaniami tego równania w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ i $\frac{\pi}{3}$.

Rozwiązaniami równania $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w zbiorze $\mathbb{R}$ są wszystkie liczby postaci $-\frac{\pi}{6} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Zatem rozwiązaniami alternatywy równań $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Przypadek 2. (gdy $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$).

Ponieważ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$, więc równania alternatywy $\sin x = \sqrt{3} \cos x$ lub

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cos x$ przyjmują postać

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = \sqrt{3} \cdot 0 \quad \text{oraz} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 0$$

i stąd $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Korzystając z jedynki trygonometrycznej, otrzymujemy

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 1$$

$$0^2 + 0^2 = 1$$

czyli $0 = 1$. To oznacza, że wśród liczb postaci $\frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie ma rozwiązań

równania $\sin x = \sqrt{3} \cos x$ i nie ma rozwiązań równania $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cos x$.

Ostatecznie rozwiązaniami równania $3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Sposób IV (poprzez cosinus podwojonego kąta i sinus sumy)

Przekształcamy równanie $3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$ równoważnie, stosując wzór na cosinus podwojonego kąta i sinus sumy kątów:

$$3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$$

$$3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0 \quad /: 2\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = 0$$

$$2x + \frac{\pi}{3} = \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Rozwiązaniami równania $3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Sposób V

Przekształcamy równanie $3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$ równoważnie, stosując wzór na sinus podwojonego kąta i wzory skróconego mnożenia:

$$3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$$

$$3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$$

$$(\sqrt{3}\cos x + \sin x)^2 - 4\sin^2 x = 0$$

$$(\sqrt{3}\cos x + \sin x - 2\sin x)(\sqrt{3}\cos x + \sin x + 2\sin x) = 0$$

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0 \quad \vee \quad \sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0$$

Rozwiązujemy równanie $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$ w zbiorze $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0 \quad /: 2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$$

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stąd rozwiązaniami równania $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby:

$$\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \text{ oraz } \frac{\pi}{3}.$$

Rozwiązujemy równanie $\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0$ w zbiorze $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0 \quad /: 2\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$$

$$x + \frac{\pi}{6} = \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stąd rozwiązaniami równania $\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby:

$$\left(-\frac{\pi}{6}\right) \text{ oraz } \frac{5\pi}{6}.$$

Ostatecznie rozwiązaniami równania $3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Zadanie 13. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 9.4) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami; 9.6) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.

Zasady oceniania

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 918.

4 pkt – obliczenie długości krawędzi SC i BE : $|SC| = 34$ i $|BE| = 15$

ALBO

– obliczenie długości krawędzi SC i BS : $|SC| = 34$ i $|BS| = 5\sqrt{34}$,

ALBO

– obliczenie długości krawędzi BS : $|BS| = 5\sqrt{34}$ i zapisanie, że trójkąt SBC jest prostokątny (albo z rozwiązania wynika, że zdający rozpatruje trójkąt SBC jako prostokątny),

ALBO

– obliczenie długości krawędzi AS i SB : $|AS| = 4\sqrt{34}$ i $|BS| = 5\sqrt{34}$,

ALBO

– obliczenie długości krawędzi AS i SC : $|AS| = 4\sqrt{34}$ i $|SC| = 34$,

ALBO

– obliczenie długości krawędzi AS i BE : $|AS| = 4\sqrt{34}$ i $|BE| = 15$,

ALBO

– obliczenie długości krawędzi AS : $|AS| = 4\sqrt{34}$ i zapisanie, że trójkąt SBC jest prostokątny (albo z rozwiązania wynika, że zdający rozpatruje trójkąt SBC jako prostokątny).

3 pkt – obliczenie długości odcinka CE : $|CE| = 9$ **oraz** zapisanie równania pozwalającego obliczyć długość jednego z odcinków: SC , SB , SA , SE , np.:

$$\frac{|CE|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|SC|} \quad (|SC| \text{ z podobieństwa trójkątów } BCS \text{ i } ECB),$$

$$\frac{|CE|}{|OC|} = \frac{|AC|}{|SC|} \quad (|SC| \text{ z podobieństwa trójkątów } ECO \text{ i } ACS),$$

$$\frac{|CE|}{|BE|} = \frac{|BC|}{|SB|} \quad (|SB| \text{ z podobieństwa trójkątów } BCS \text{ i } ECB),$$

$$\frac{|CE|}{|BC|} = \frac{|BE|}{|SB|} \quad (|SB| \text{ z podobieństwa trójkątów } ESB \text{ i } EBC),$$

$$\frac{|CE|}{|OE|} = \frac{|AC|}{|SA|} \quad (|SA| \text{ z podobieństwa trójkątów } ECO \text{ i } ACS),$$

$$|SE| \cdot |CE| = |BE|^2 \quad (|SE| \text{ z podobieństwa trójkątów } ESB \text{ i } EBC),$$

ALBO

– zapisanie układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi, w którym jedną z niewiadomych jest długość krawędzi BS , a drugą długość krawędzi SC , np.

$$|BS|^2 + (3\sqrt{34})^2 = |SC|^2 \text{ i } \frac{15}{3\sqrt{34}} = \frac{|BS|}{|SC|},$$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą (długością krawędzi BS albo długością krawędzi SC , albo długością krawędzi AS), np. $\left(\frac{15}{|BS|}\right)^2 + \left(\frac{15}{3\sqrt{34}}\right)^2 = 1$,

$$\left(\frac{3\sqrt{34}}{|SC|}\right)^2 + \left(\frac{15}{3\sqrt{34}}\right)^2 = 1, \left(\frac{6\sqrt{2}}{\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{12\sqrt{2}}{|AS|}\right)^2 = 1.$$

2 pkt – obliczenie długości x odcinka BE (lub DE): $x = 15$

ALBO

– obliczenie długości y odcinka EO : $y = 6\sqrt{2}$,

ALBO

– spełnienie warunku 2) i jednego z warunków 3), 4) określonych w zasadach oceniania za 1 punkt.

1 pkt – spełnienie jednego z poniższych warunków 1)-4):

1) obliczenie wartości funkcji trygonometrycznej kąta $\frac{\beta}{2} = |\angle BEO|$ (gdzie O jest punktem przecięcia przekątnych podstawy $ABCD$), np.: $\sin \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{17}}{5}$,

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{34}}{4}, \cos \frac{\beta}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{5};$$

2) zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta BED i zapisanie równania $(3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2})^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cdot \left(-\frac{9}{25}\right)$;

3) zdający zapisze, że trójkąt SBC (lub SDC) jest prostokątny i wskaże właściwy wierzchołek kąta prostego lub wynika to z rozwiązania, np.:

– zapisze równość wynikającą z twierdzenia Pitagorasa: $|SC|^2 = |BS|^2 + |BC|^2$,

– zapisze, że trójkąty CBS oraz CEB są podobne,

– zapisze równość wynikającą z podobieństwa trójkątów CBS oraz CEB , np.:

$$\frac{|BS|}{|BC|} = \frac{|BE|}{|EC|},$$

– zapisze, że trójkąty BES oraz CEB są podobne,

– zapisze równość wynikającą z podobieństwa trójkątów BES oraz CEB , np.:

$$\frac{|ES|}{|BE|} = \frac{|BE|}{|EC|},$$

4) zapisze, że trójkąt OEC jest prostokątny lub wynika to z rozwiązania, np.:

– zdający zapisze równość $|OC|^2 = |OE|^2 + |EC|^2$,

– zapisze, że trójkąty OEC oraz SAC są podobne,

– zapisze równość wynikającą z podobieństwa trójkątów OEC oraz SAC , np.:

$$\frac{|OE|}{|OC|} = \frac{|AS|}{|CS|}.$$

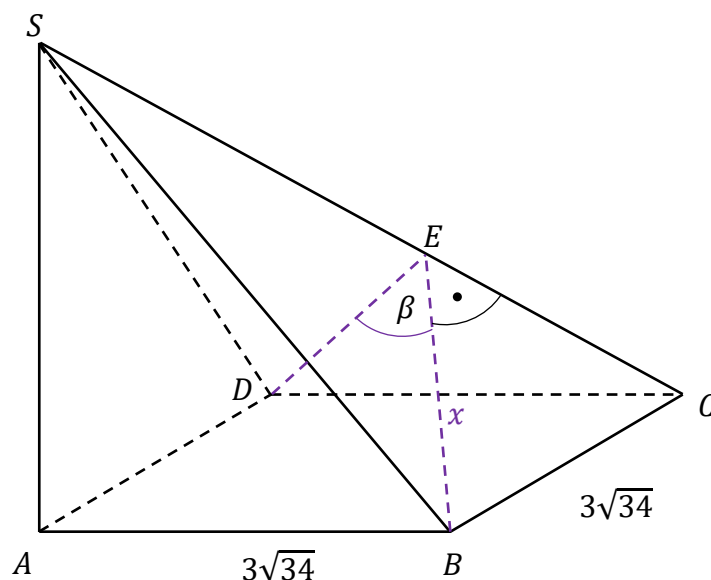
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający w rozwiązaniu rozpatruje ostrosłup prawidłowy czworokątny, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt** (za poprawną interpretację kąta między ścianami bocznymi oraz za zapisanie równania wynikającego z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BDE).
2. Jeżeli zdający w rozwiązaniu błędnie interpretuje kąt między ścianami bocznymi BCS i CDS , np. zakłada, że jest to kąt BSD , to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** (za spełnienie warunku 3) z kryterium za 1 punkt).
3. Jeżeli zdający w rozwiązaniu rozpatruje inną bryłę i nie jest nią ostrosłup prawidłowy czworokątny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania*Sposób I (poprzez BE , CS , AS)*

Niech E będzie spodkiem wysokości ściany bocznej BCS poprowadzonej z wierzchołka B . Oznaczmy $x = |BE|$ (zobacz rysunek).



Ponieważ ściany boczne BCS i CDS są trójkątami przystającymi, więc $|DE| = |BE| = x$. Stosujemy do trójkąta BED twierdzenie cosinusów i otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 |BD|^2 &= x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos \beta \\
 (3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2})^2 &= x^2 + x^2 - 2x^2 \cdot \left(-\frac{9}{25}\right) \\
 x &= 15
 \end{aligned}$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta BEC i obliczamy długość odcinka CE :

$$\begin{aligned}
 |CE|^2 &= |BC|^2 - |BE|^2 \\
 |CE|^2 &= (3\sqrt{34})^2 - 15^2 \\
 |CE| &= 9
 \end{aligned}$$

Trójkąt BCS jest prostokątny, co wynika z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych, gdyż $AB \perp BC$ i odcinek AB jest rzutem prostokątnym odcinka SB na płaszczyznę $ABCD$.

Trójkąty BCS i ECB są podobne (na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów), więc

$$\frac{|CE|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|SC|}$$

$$\frac{9}{3\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{|SC|}$$

$$|SC| = 34$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta ACS i obliczamy długość odcinka AS :

$$|AS|^2 = |SC|^2 - |AC|^2$$

$$|AS|^2 = 34^2 - (3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2})^2$$

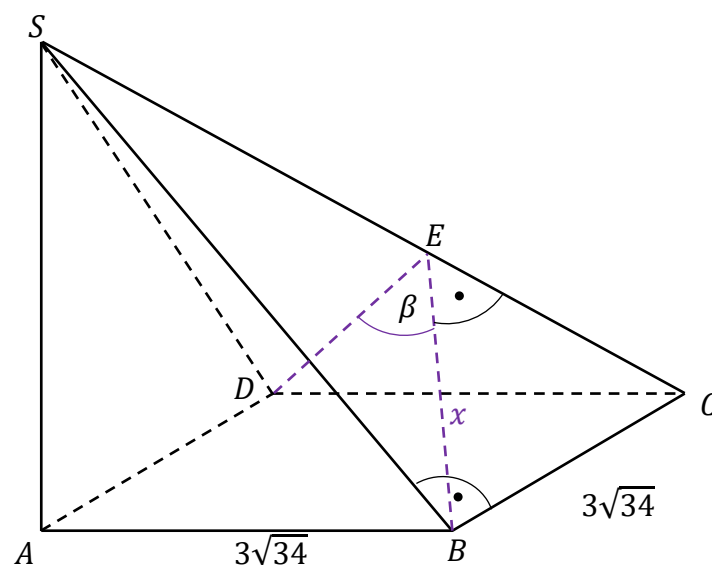
$$|AS| = 4\sqrt{34}$$

Obliczamy pole P_b powierzchni bocznej ostrosłupa:

$$P_b = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AS| + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot |SC| = 3\sqrt{34} \cdot 4\sqrt{34} + 15 \cdot 34 = 918$$

Sposób 1a (poprzez BE , CE , BS , AS)

Niech E będzie spodkiem wysokości ściany bocznej BCS poprowadzonej z wierzchołka B . Oznaczmy $x = |BE|$ (zobacz rysunek).



Ponieważ ściany boczne BCS i CDS są trójkątami przystającymi, więc $|DE| = |BE| = x$. Stosujemy do trójkąta BED twierdzenie cosinusów i otrzymujemy

$$\begin{aligned}|BD|^2 &= x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos \beta \\ (3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2})^2 &= x^2 + x^2 - 2x^2 \cdot \left(-\frac{9}{25}\right) \\ x &= 15\end{aligned}$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta BEC i obliczamy długość odcinka CE :

$$\begin{aligned}|CE|^2 &= |BC|^2 - |BE|^2 \\ |CE|^2 &= (3\sqrt{34})^2 - 15^2 \\ |CE| &= 9\end{aligned}$$

Trójkąt BCS jest prostokątny, co wynika z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych, gdyż $AB \perp BC$ i odcinek AB jest rzutem prostokątnym odcinka SB na płaszczyznę $ABCD$. Ponieważ kąt ostry przy wierzchołku C jest wspólnym kątem trójkątów prostokątnych BCE i BCS , więc są to trójkąty podobne. Stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\frac{|BS|}{|BC|} &= \frac{|BE|}{|EC|} \\ \frac{|BS|}{3\sqrt{34}} &= \frac{15}{9} \\ |BS| &= 5\sqrt{34}\end{aligned}$$

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego dla trójkąta ABS obliczamy długość odcinka AS :

$$\begin{aligned}|AS|^2 &= |BS|^2 - |AB|^2 \\ |AS|^2 &= (5\sqrt{34})^2 - (3\sqrt{34})^2 = (4\sqrt{34})^2 \\ |AS| &= 4\sqrt{34}\end{aligned}$$

Obliczamy pole P_b powierzchni bocznej ostrosłupa:

$$P_b = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AS| + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |BS| \cdot |BC| = 3\sqrt{34} \cdot 4\sqrt{34} + 5\sqrt{34} \cdot 3\sqrt{34} = 918$$

Sposób II (poprzez EO , SC , AS , BS)

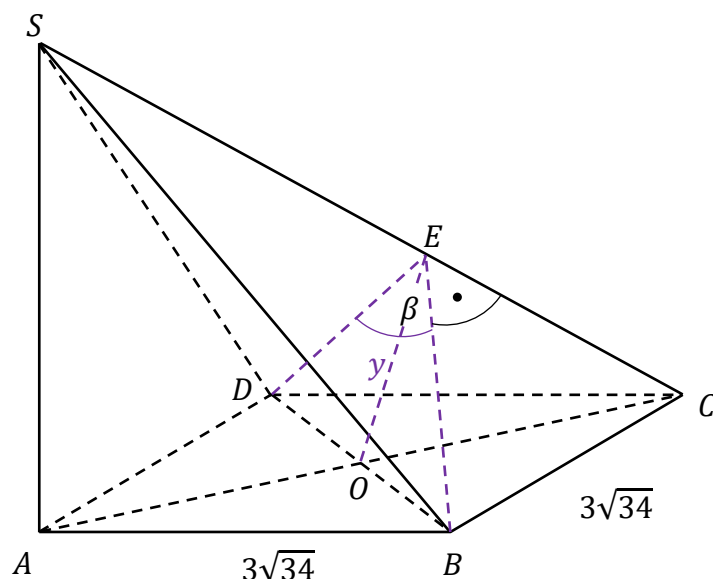
Przyjmijmy następujące oznaczenia:

E – spodek wysokości ściany bocznej BCS poprowadzonej z wierzchołka B ,

O – punkt przecięcia przekątnych podstawy $ABCD$,

y – długość odcinka EO

(zobacz rysunek).



Ponieważ ściany boczne BCS i CDS są trójkątami przystającymi, więc $|DE| = |BE|$.

Obliczamy sinus i cosinus kąta ostrego BEO :

$$\cos \beta = -\frac{9}{25}$$

$$1 - 2 \sin^2 \frac{\beta}{2} = -\frac{9}{25} \text{ oraz } 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} - 1 = -\frac{9}{25}$$

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{17}}{5} \text{ oraz } \cos \frac{\beta}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

Obliczamy tangens kąta ostrego BEO :

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{17}}{5}}{\frac{2\sqrt{2}}{5}} = \frac{\sqrt{34}}{4}$$

Obliczamy długość y odcinka EO :

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{|BO|}{|EO|}$$

$$\frac{\sqrt{34}}{4} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2}}{y}$$

$$y = 6\sqrt{2}$$

Ponieważ kąty SCA i OCE mają równe miary, więc korzystając z jedynki trygonometrycznej oraz definicji sinusa i cosinusa, otrzymujemy

$$\sin^2|\angle OCE| + \cos^2|\angle SCA| = 1$$

$$\left(\frac{y}{|OC|}\right)^2 + \left(\frac{|AC|}{|SC|}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{6\sqrt{2}}{\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2}}{|SC|}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{6\sqrt{17}}{|SC|}\right)^2 = \frac{9}{17}$$

$$|SC| = 34$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta ACS i obliczamy długość krawędzi AS :

$$|AS|^2 + |AC|^2 = |SC|^2$$

$$|AS|^2 = 34^2 - (3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2})^2$$

$$|AS| = 4\sqrt{34}$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta ABS i obliczamy długość krawędzi BS :

$$|BS|^2 = |AS|^2 + |AB|^2$$

$$|BS|^2 = (4\sqrt{34})^2 + (3\sqrt{34})^2$$

$$|BS| = 5\sqrt{34}$$

Obliczamy pole P_b powierzchni bocznej ostrosłupa:

$$P_b = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AS| + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |BS| \cdot |BC| = 3\sqrt{34} \cdot 4\sqrt{34} + 5\sqrt{34} \cdot 3\sqrt{34} = 918$$

Zadanie 14. (0–6)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 3.1R) stosuje wzory Viète'a; 3.2R) rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem.

Zasady oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z czterech etapów.

Pierwszy etap polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$: $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga.

Jeżeli zdający rozwiązuje warunek $\Delta \geq 0$, to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na wyznaczeniu tych wartości parametru m , dla których miejsca zerowe funkcji f są tego samego znaku. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – zapisanie i poprawne rozwiązanie nierówności $\frac{m+8}{2-m} > 0$: $m \in (-8, 2)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Trzeci etap polega na wyznaczeniu tych wartości parametru m , dla których jest spełniony warunek $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **3 punkty**.

Podział punktów za trzeci etap rozwiązania:

3 pkt – rozwiązanie nierówności z jedną niewiadomą m równoważnej warunkowi

$$(x_1 - x_2)^2 \leq 180: m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{13}{4}, +\infty\right).$$

2 pkt – zapisanie nierówności z jedną niewiadomą m równoważnej warunkowi

$$(x_1 - x_2)^2 \leq 180, \text{ np.}$$

$$\left[\frac{2(2m+1)}{2-m}\right]^2 - 4 \cdot \frac{m+8}{2-m} \leq 180$$

1 pkt – przekształcenie nierówności $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a, np. $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \leq 180$
ALBO

– przekształcenie nierówności $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$ do postaci $\frac{\Delta}{a^2} \leq 180$ (lub

$$\frac{b^2 - 4ac}{a^2} \leq 180).$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Czwarty etap polega na wyznaczeniu wszystkich wartości parametru m , które spełniają jednocześnie warunki: $m \neq 2$ oraz $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ oraz $m \in (-8, 2)$ oraz $m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{13}{4}, +\infty\right)$:
 $m \in (-8, -3) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right]$.

Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – poprawne wyznaczenie wszystkich wartości parametru m , które spełniają jednocześnie warunki $m \neq 2$ oraz $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ oraz $m \in (-8, 2)$ oraz $m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{13}{4}, +\infty\right)$: $m \in (-8, -3) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right]$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

- Jeżeli zdający w którymś z etapów I–III popełni błąd, który nie jest błędem rachunkowym, to za IV etap otrzymuje **0 punktów**.
- Jeżeli zdający w etapach I–III nie popełni błędów innych niż rachunkowe i otrzyma zbiory rozwiązań, które nie są rozłączne i żaden z nich nie jest zbiorem liczb rzeczywistych, a następnie poprawnie wyznaczy część wspólną zbiorów rozwiązań z etapów I–III i warunku $m \neq 2$, to za IV etap otrzymuje **1 punkt**; natomiast jeżeli otrzyma zbiory rozwiązań, które są rozłączne lub co najmniej jeden z nich jest zbiorem liczb rzeczywistych, to za IV etap otrzymuje **0 punktów**.
- Jeżeli zdający w III etapie rozwiązania popełni błąd – przyjmie, że $x_1 + x_2 = \pm \frac{m+8}{2-m}$ lub $x_1 \cdot x_2 = \pm \frac{2(2m+1)}{2-m}$, lub $x_1 + x_2 = \pm \frac{b}{2a}$, to za III etap może otrzymać co najwyżej **2 punkty** (1 punkt za przekształcenie nierówności $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a oraz 1 punkt za konsekwentne rozwiązanie nierówności do końca), a za IV etap otrzymuje **0 punktów**.
- Jeżeli zdający wprowadza dodatkowe założenie, które nie wynika z warunków zadania (np. $x_1 + x_2 > 0$), to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **5 punktów** (co najwyżej 1 punkt za I etap, co najwyżej 1 punkt za II etap i co najwyżej 3 punkty za III etap).
- Jeżeli zdający podczas przekształcania nierówności $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$ do postaci pozwalającej na zastosowanie wzorów Viète'a popełni błąd, który nie jest błędem rachunkowym, ale otrzyma nierówność postaci $(x_1 + x_2)^2 + k \cdot x_1 \cdot x_2 \leq 180$, gdzie $k \neq -4$, to za III etap może otrzymać co najwyżej **2 punkty** (1 punkt za poprawne zastosowanie wzorów Viète'a oraz 1 punkt za konsekwentne rozwiązanie nierówności do końca), a za IV etap otrzymuje **0 punktów**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe tylko wówczas, gdy $2 - m \neq 0$ i wyróżnik Δ trójmianu $(2 - m)x^2 - 2(2m + 1)x + m + 8$ jest dodatni. Rozwiązujemy warunek $\Delta > 0$:

$$[-2(2m + 1)]^2 - 4 \cdot (2 - m)(m + 8) > 0$$

$$16m^2 + 16m + 4 + 4m^2 + 24m - 64 > 0$$

$$20m^2 + 40m - 60 > 0$$

$$20(m - 1)(m + 3) > 0$$

$$m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$$

Miejsca zerowe funkcji f mają ten sam znak tylko wtedy, gdy $x_1 \cdot x_2 > 0$. Rozwiązujemy tę nierówność, korzystając ze wzorów Viète'a:

$$\frac{m + 8}{2 - m} > 0$$

$$(m + 8)(2 - m) > 0 \quad \wedge \quad m \neq 2$$

$$m \in (-8, 2)$$

Przekształcamy warunek $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a i rozwiązujemy uzyskaną nierówność z niewiadomą m :

$$(x_1 - x_2)^2 \leq 180$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 \leq 180$$

$$\left[\frac{-2(2m + 1)}{2 - m} \right]^2 - 4 \cdot \frac{m + 8}{2 - m} \leq 180$$

$$\frac{16m^2 + 16m + 4}{(m - 2)^2} + 4 \cdot \frac{(m + 8)(m - 2)}{(m - 2)^2} - \frac{180(m - 2)^2}{(m - 2)^2} \leq 0$$

$$\frac{16m^2 + 16m + 4 + 4m^2 + 24m - 64 - 180m^2 + 720m - 720}{(m - 2)^2} \leq 0$$

$$\frac{-160m^2 + 760m - 780}{(m - 2)^2} \leq 0$$

$$-160m^2 + 760m - 780 \leq 0 \quad \wedge \quad m \neq 2$$

$$8m^2 - 38m + 39 \geq 0 \quad \wedge \quad m \neq 2$$

$$\Delta_m = (-38)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 39 = 196$$

$$m = \frac{38 - 14}{16} = \frac{3}{2} \quad \vee \quad m = \frac{38 + 14}{16} = \frac{13}{4}$$

$$8\left(m - \frac{3}{2}\right)\left(m - \frac{13}{4}\right) \geq 0 \quad \wedge \quad m \neq 2$$

$$m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{13}{4}, +\infty\right)$$

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m , które jednocześnie spełniają warunki:

- $m \neq 2$
- $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$
- $m \in (-8, 2)$
- $m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{13}{4}, +\infty\right)$:

$$m \in (-8, -3) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right]$$

Funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe x_1 oraz x_2 tego samego znaku, które spełniają warunek $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$, tylko wtedy, gdy $m \in (-8, -3) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right]$.

Zadanie 15. (0–6)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 11.6R) stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

Zasady oceniania**Część a)**

2 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – zapisanie związku między promieniem podstawy stożka a wysokością stożka, np.

$$\frac{1}{2}rh = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{h^2 + r^2}, \left(\frac{5}{r}\right)^2 + \left(\frac{5}{h}\right)^2 = 1, \frac{r}{5} = \frac{h}{\sqrt{h^2 - 25}}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Część b)

4 pkt – uzasadnienie, że funkcja V przyjmuje wartość najmniejszą dla $h = 5\sqrt{3}$ oraz

$$\text{obliczenie objętości stożka o takiej wysokości: } V(5\sqrt{3}) = \frac{125\sqrt{3}\pi}{2}.$$

3 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja V przyjmuje wartość najmniejszą dla $h = 5\sqrt{3}$.

2 pkt – obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji V (lub funkcji $\frac{3}{\pi} \cdot V$): $h = 5\sqrt{3}$.

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji V (lub funkcji $\frac{3}{\pi} \cdot V$), np.

$$V'(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{75h^2 \cdot (h^2 - 25) - 25h^3 \cdot 2h}{(h^2 - 25)^2}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający wyznacza pochodną ilorazu jako iloraz pochodnych, to otrzymuje

0 punktów za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli z rozwiązania wynika, że zdający poprawnie stosuje wzór na pochodną ilorazu

funkcji oraz zdający poprawnie wyznacza pochodne funkcji $25h^3$ oraz $h^2 - 25$ i dalej

popołnia błędy, otrzymując pochodną w postaci $a \cdot \frac{75h^2(h^2 - 25) - 25h^3 \cdot 2h}{(h^2 - 25)^2}$ (gdzie $a \neq 0$)

lub $\frac{B(h)}{(h^2 - 25)^2}$, gdzie B jest wielomianem stopnia czwartego, który w przedziale $(5, +\infty)$

ma dokładnie jeden pierwiastek, i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (za miejsce zerowe pochodnej, za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości funkcji, za obliczenie najmniejszej wartości funkcji V).

Jeżeli z rozwiązania nie wynika, że zdający poprawnie stosuje wzór na pochodną ilorazu funkcji lub zdający błędnie wyznacza pochodną funkcji $25h^3$ lub $h^2 - 25$ i dalej

popelnia błędy, otrzymując pochodną w postaci $\frac{75h^2(h^2-25)-25h^3 \cdot 2h}{(h^2-25)^2}$ lub $\frac{B(h)}{(h^2-25)^2}$,

gdzie B jest wielomianem stopnia czwartego, który w przedziale $(5, +\infty)$ ma dokładnie jeden pierwiastek, i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości funkcji i za obliczenie najmniejszej wartości funkcji V).

3. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja osiąga wartość najmniejszą dla wyznaczonej wartości h , przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej

ORAZ:

– opisuje (słownie lub graficznie – np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji V
LUB

– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości h funkcja V ma minimum lokalne i jest to jednocześnie jej najmniejsza wartość,

LUB

– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości h funkcja V ma minimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.

Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku (np. znakami „+” i „-”) znak pochodnej.

4. Jeżeli zdający przedstawi niepełne uzasadnienie, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (nie otrzymuje punktu za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości).
5. Jeżeli zdający, uzasadniając najmniejszą wartość funkcji, rozpatruje funkcję w $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{R}_+$, to może uzyskać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
6. Jeżeli zdający nie uzasadnia istnienia najmniejszej wartości funkcji, to może uzyskać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za pochodną i 1 punkt za miejsce zerowe pochodnej).

Przykładowe pełne rozwiązanie

a)

Rozpatrzmy dowolny z rozważanych stożków. Przyjmijmy następujące oznaczenia:

A, B, C – wierzchołki trójkąta, który jest przekrojem osiowym stożka,

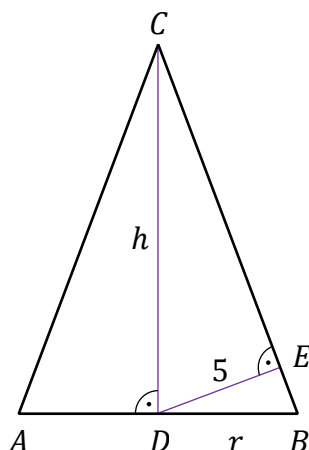
D – środek podstawy stożka,

E – spodek wysokości trójkąta DBC opuszczonej z wierzchołka D na bok BC ,

r – promień podstawy stożka,

h – wysokość stożka

(zobacz rysunek).



Zapisujemy pole trójkąta DBC na dwa sposoby i stosujemy twierdzenie Pitagorasa, otrzymując:

$$\frac{1}{2} \cdot |DB| \cdot |DC| = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |DE|$$

$$\frac{1}{2} rh = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{h^2 + r^2} \cdot 5$$

$$r^2 h^2 = 25h^2 + 25r^2$$

$$r^2 = \frac{25h^2}{h^2 - 25}$$

Zatem objętość V stożka jest równa

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{25h^2}{h^2 - 25} \cdot h = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$$

To należało wykazać.

b)

Obliczamy argument, dla którego funkcja V określona wzorem $V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$ dla $h \in (5, +\infty)$ osiąga wartość najmniejszą.

$$\text{Wyznaczamy pochodną funkcji } V: V'(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{75h^2 \cdot (h^2 - 25) - 25h^3 \cdot 2h}{(h^2 - 25)^2} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^2(h^2 - 75)}{(h^2 - 25)^2}$$

dla $h \in (5, +\infty)$.

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji V :

$$V'(h) = 0$$

$$\frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^2(h^2 - 75)}{(h^2 - 25)^2} = 0$$

$$25h^2(h^2 - 75) = 0$$

$$h = 0 \notin (5, +\infty) \vee h = -5\sqrt{3} \notin (5, +\infty) \vee h = 5\sqrt{3} \in (5, +\infty)$$

Badamy znak pochodnej:

$$V'(h) < 0$$

$$\frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^2(h^2 - 75)}{(h^2 - 25)^2} < 0 \quad \wedge \quad h \in (5, +\infty)$$

$$h^2(h^2 - 75) < 0 \quad \wedge \quad h \in (5, +\infty)$$

$$h^2 < 75 \quad \wedge \quad h \in (5, +\infty)$$

$$h \in (5, 5\sqrt{3})$$

więc $V'(h) < 0$ dla $h \in (5, 5\sqrt{3})$ oraz $V'(h) > 0$ dla $h \in (5\sqrt{3}, +\infty)$.

Zatem funkcja V jest malejąca w przedziale $(5, 5\sqrt{3}]$ i rosnąca w przedziale $[5\sqrt{3}, +\infty)$.

Stąd funkcja V osiąga wartość najmniejszą dla $h = 5\sqrt{3}$. Wtedy

$$V(5\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25(5\sqrt{3})^3}{(5\sqrt{3})^2 - 25} = \frac{125\sqrt{3}\pi}{2}$$

Uwaga.

Funkcja V jest różniczkowalna, więc jest ciągła. Ponadto $\lim_{h \rightarrow 5^+} V(h) = +\infty$ oraz

$\lim_{h \rightarrow +\infty} V(h) = +\infty$, więc uwzględniając wartość funkcji V w punkcie stacjonarnym $h = 5\sqrt{3}$

równą $V(5\sqrt{3}) = \frac{125\sqrt{3}\pi}{2}$, można wyciągnąć wniosek, że funkcja V osiąga wartość

najmniejszą równą $\frac{125\sqrt{3}\pi}{2}$ dla argumentu $h = 5\sqrt{3}$.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

PESEL

Miejsce na naklejkę.

Sprawdź, czy kod na naklejce to

M-100.

Jeżeli tak – przyklej naklejkę.

Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Symbol arkusza

MMAP-R0-**100**-2506

DATA: **6 czerwca 2025 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

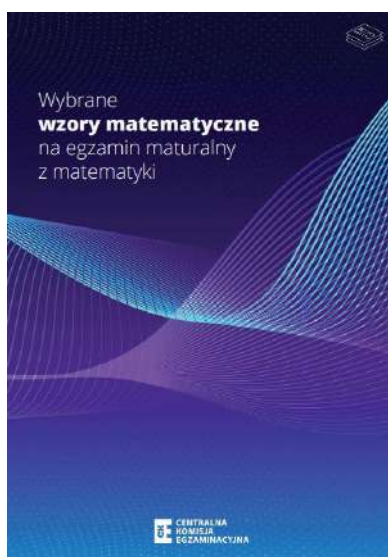
1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.





Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 29 stron (zadania 1–12). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
5. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
8. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, z cyrkla i linijki oraz z kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



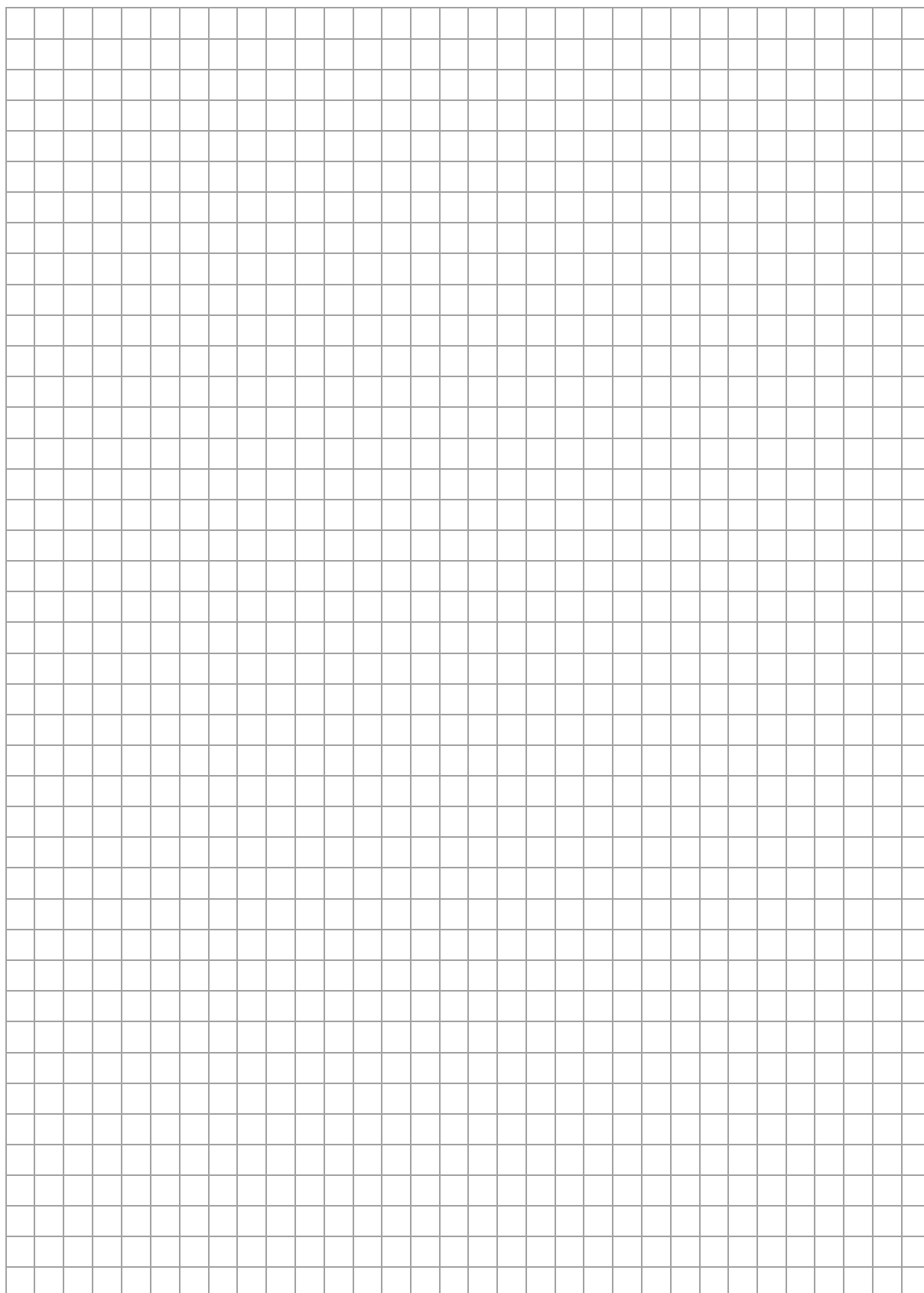
**Zadania egzaminacyjne są wydrukowane
na następnych stronach.**

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że spośród 10 pralek wysłanych dziesięciu klientom przez ten sklep co najwyżej jedna ulegnie uszkodzeniu podczas transportu. Wynik zapisz w postaci ułamka dziesiętnego w zaokrągleniu do części tysięcznych. Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Zadanie 2. (0–3)

Wykaż, że jeżeli $a = \log_2 14$ oraz $b = \log_{\sqrt{2}} 27$, to $\log_7 54 = \frac{b+2}{2a-2}$.



Zadanie 3. (0–3)

Rozważamy wszystkie liczby naturalne sześciocyfrowe, w których zapisie dziesiętnym iloczyn cyfr jest liczbą parzystą mniejszą od 5.

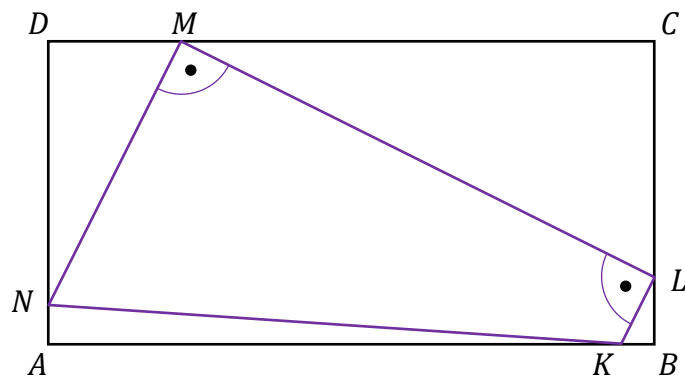
Oblicz, ile jest wszystkich takich liczb sześciocyfrowych. Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

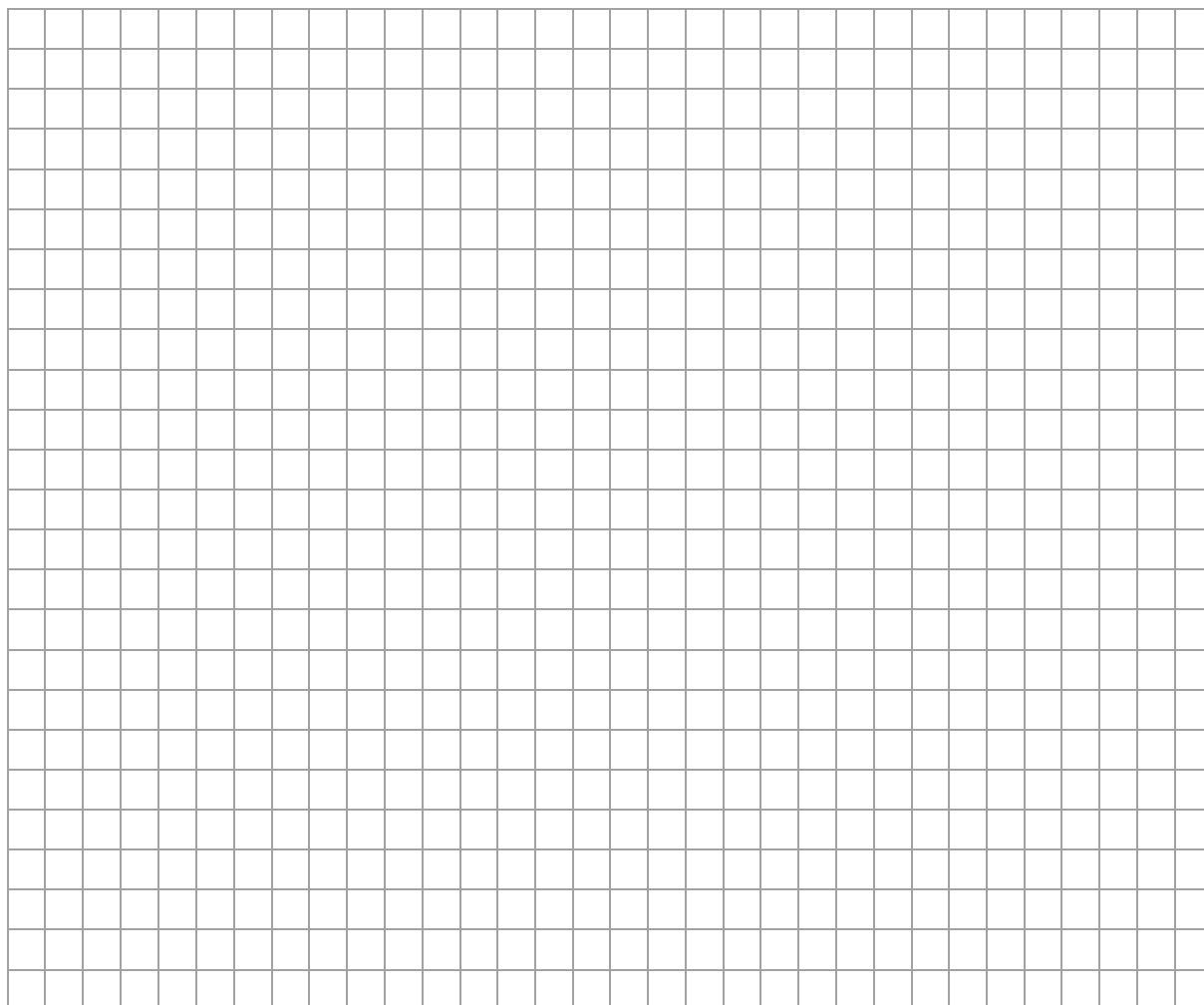
**Kolejne zadania egzaminacyjne są wydrukowane
na następnych stronach.**

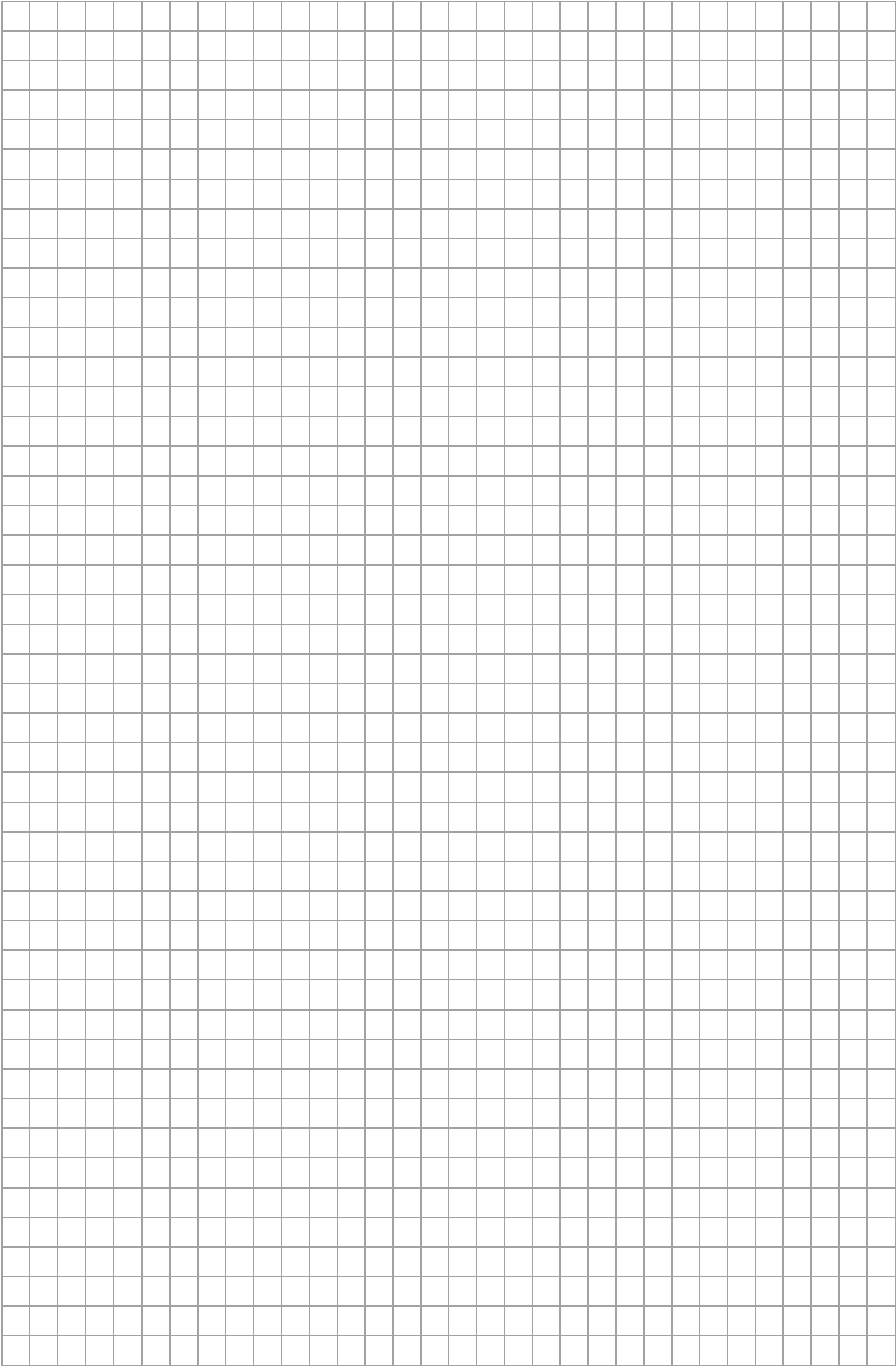
Zadanie 4. (0–3)

Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = 2 \cdot |AD|$. Na bokach AB , BC , CD oraz DA tego prostokąta obrano punkty – odpowiednio – K , L , M oraz N (przy czym każdy z tych punktów leży na dokładnie jednym boku prostokąta $ABCD$). Czworokąt $KLMN$ jest trapezem prostokątnym (zobacz rysunek), a wysokość LM tego trapezu jest równoległa do przekątnej BD prostokąta.



Wykaż, że stosunek pola trójkąta MDN do pola trójkąta KBL jest równy 16.





Zadanie 5. (0–4)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

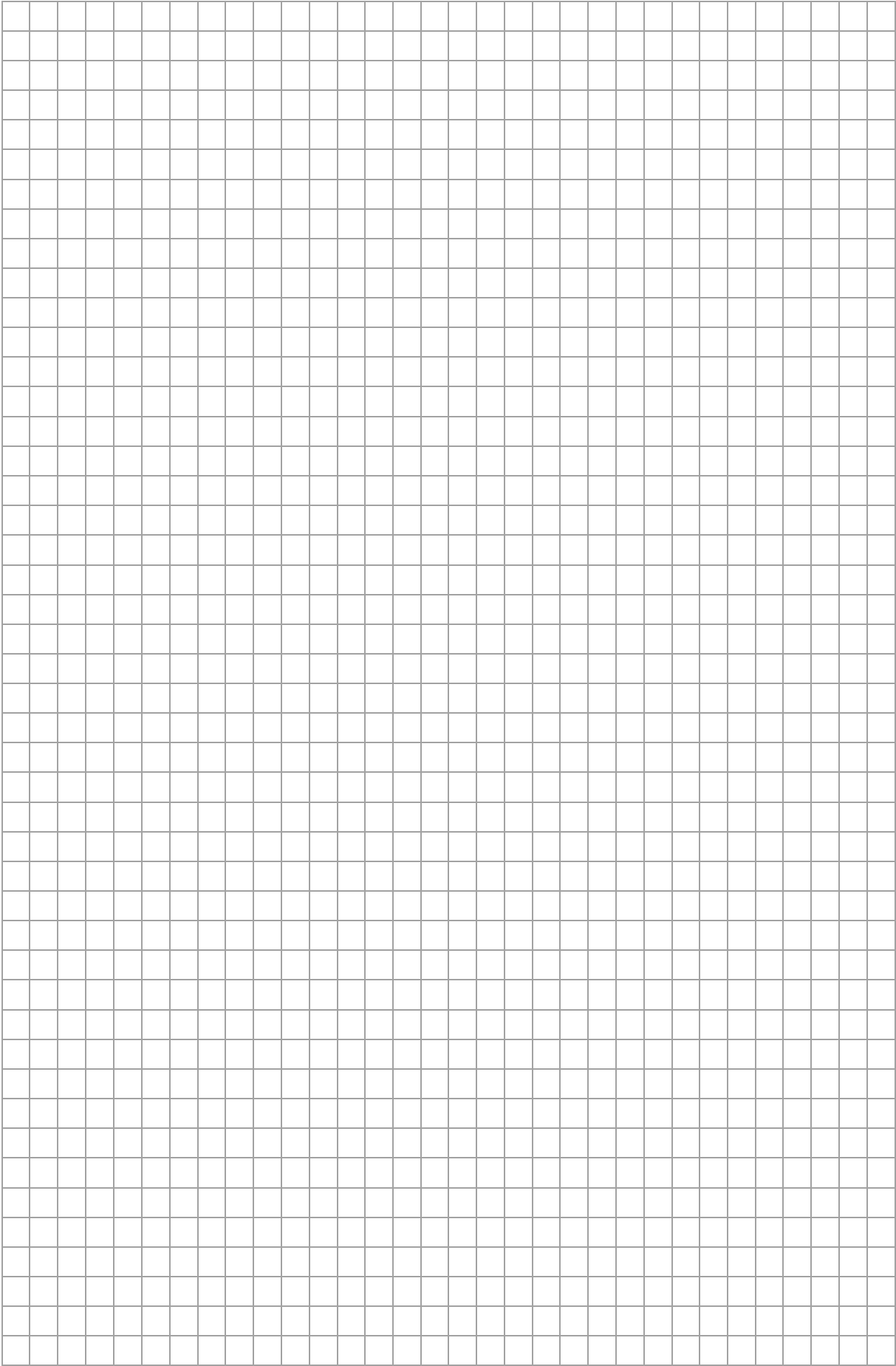
$$x^2 + 2mx + 2m - 1 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek

$$m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$$

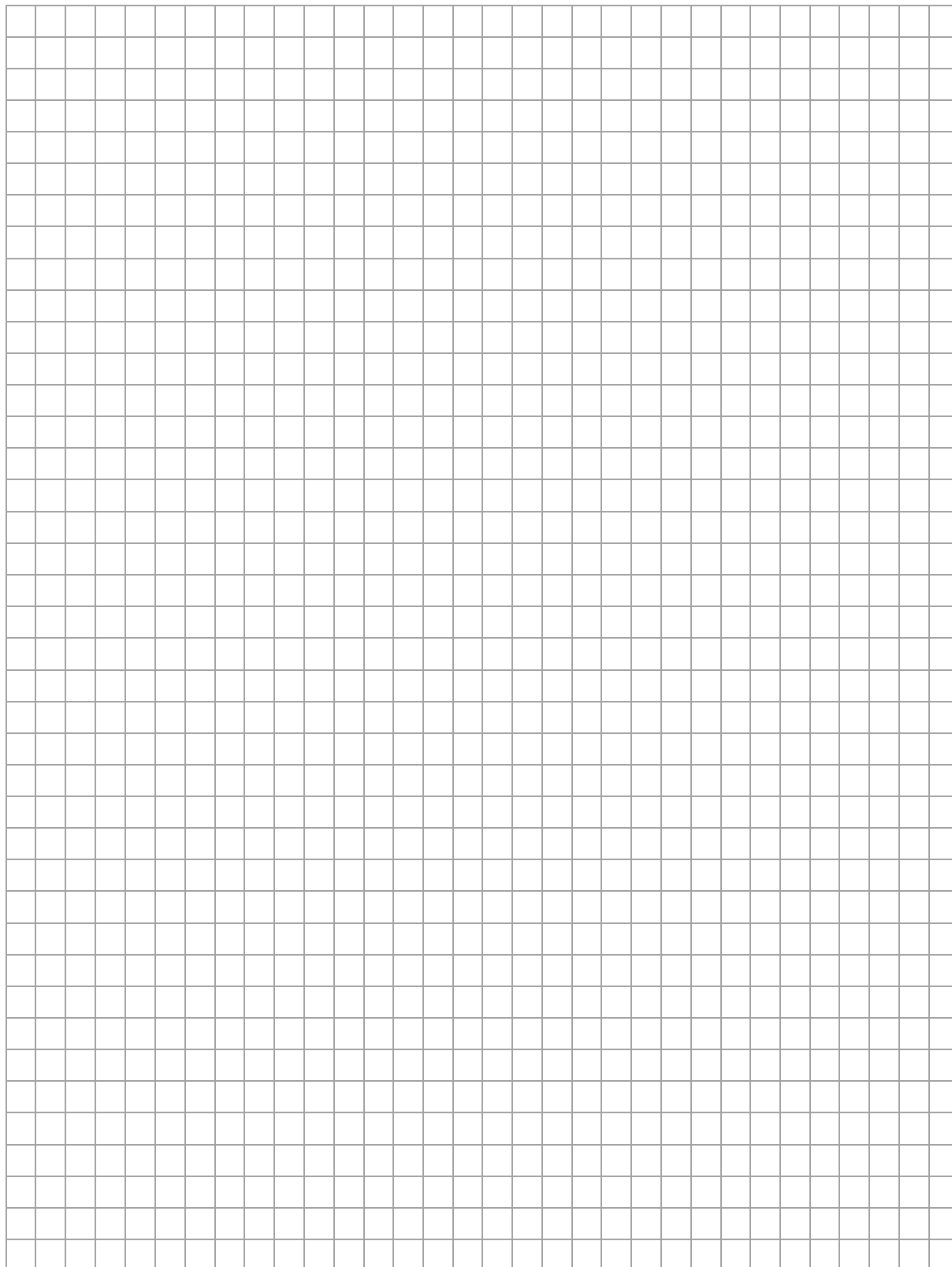
Zapisz obliczenia.

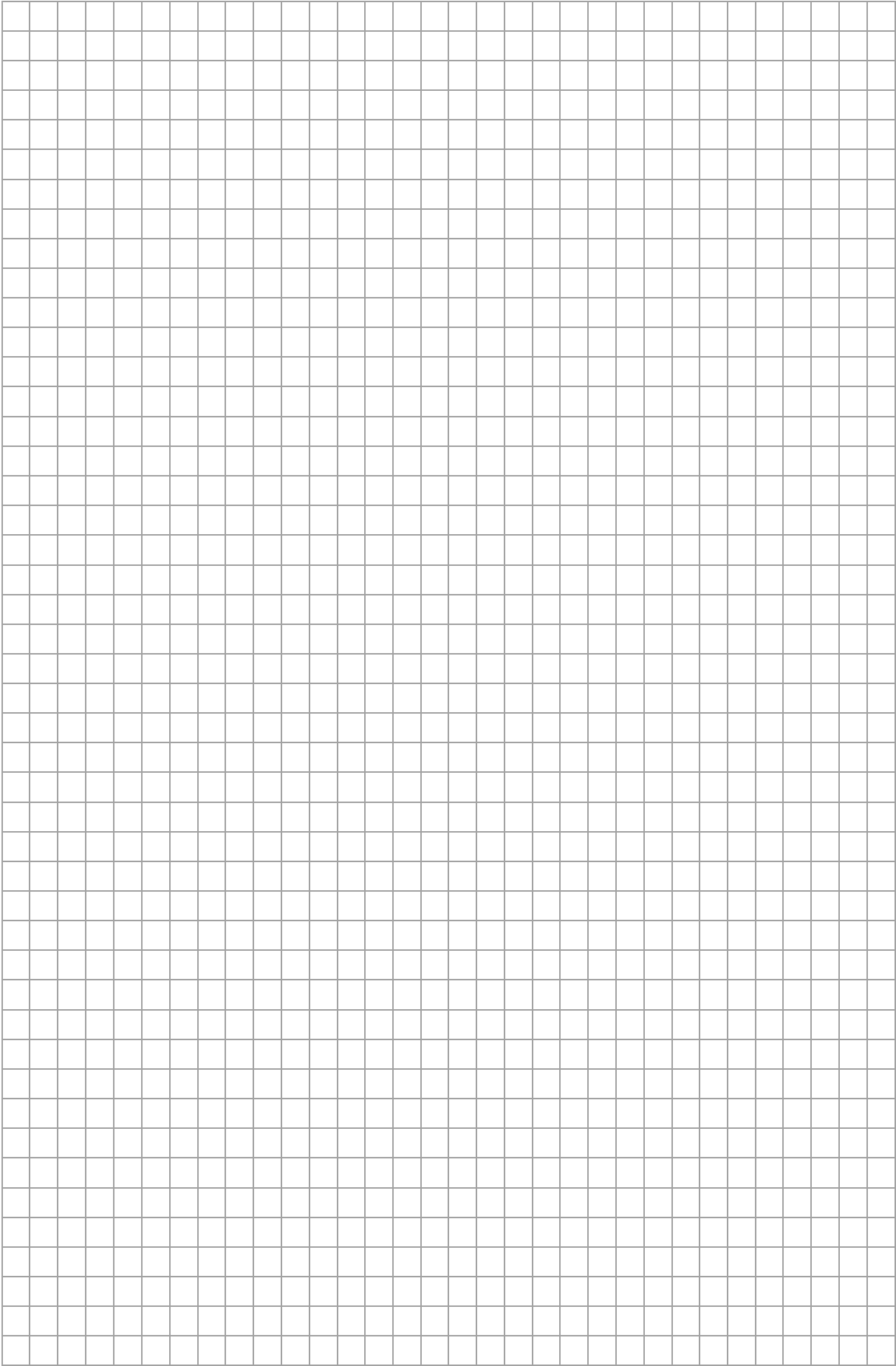
This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.



Zadanie 6. (0–4)**Rozwiąż równanie**

$$\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$$

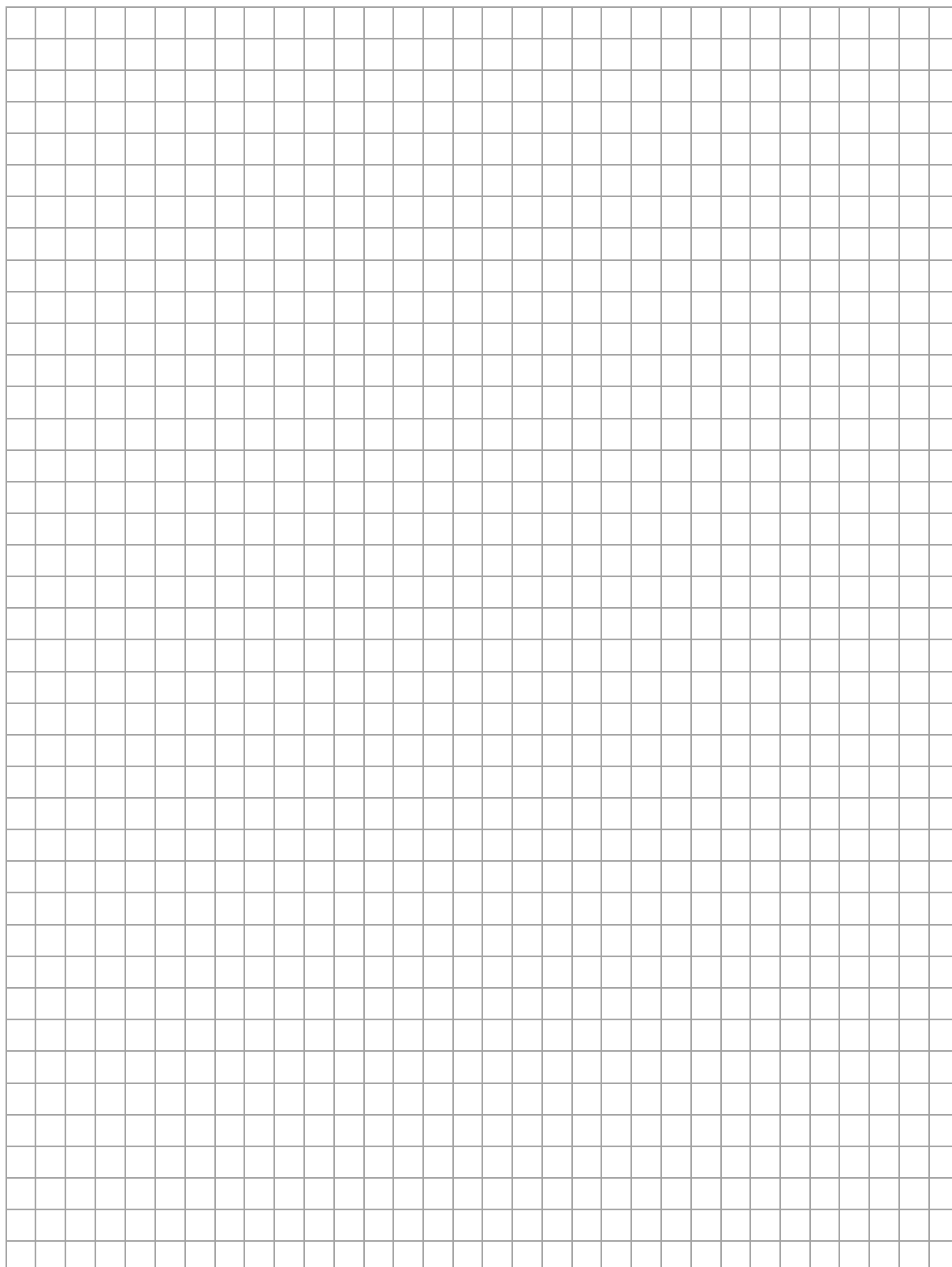
w przedziale $[0, \pi]$. Zapisz obliczenia.

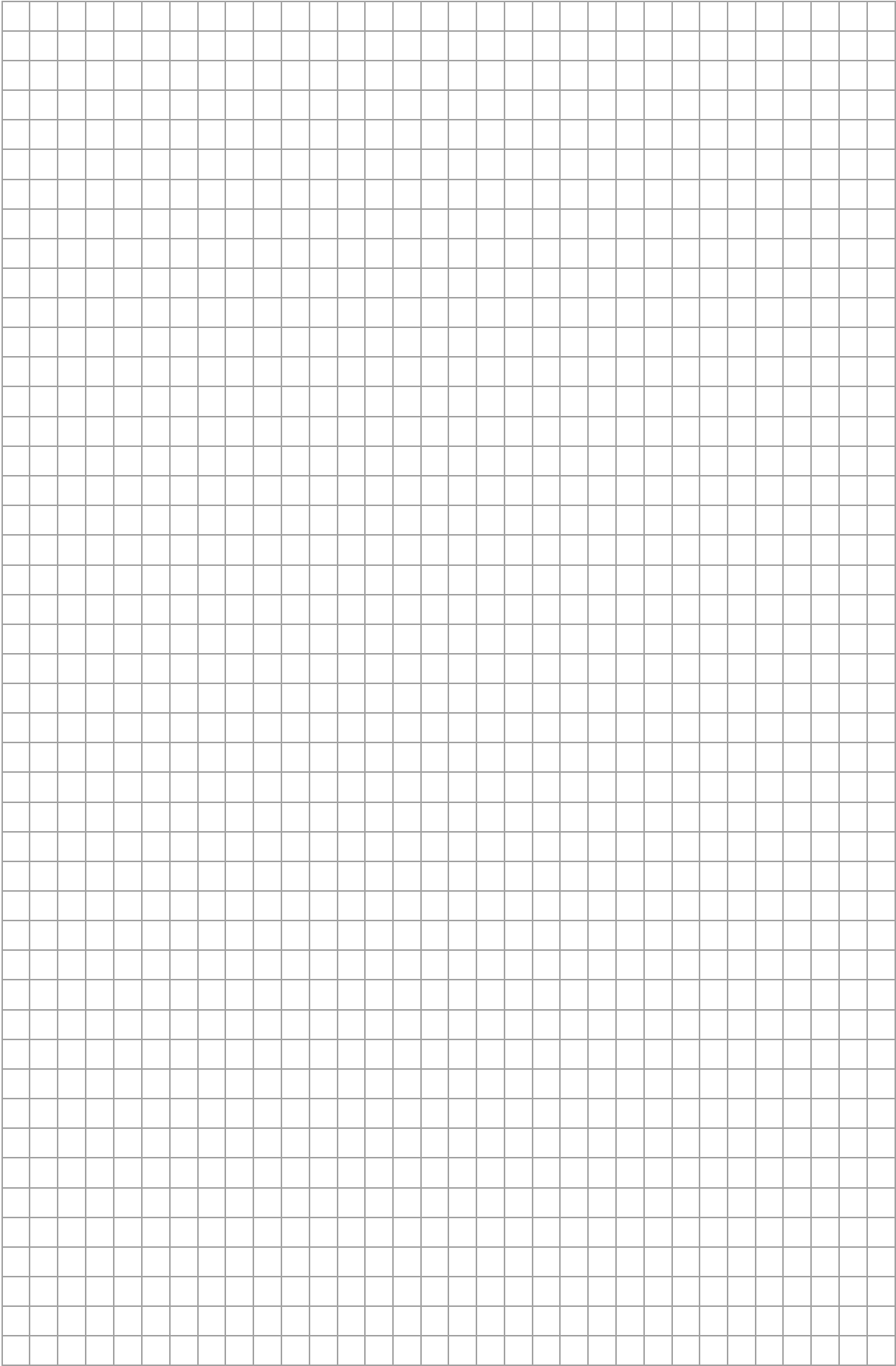


Zadanie 7. (0–4)

Na czworokącie wypukłym $ABCD$ o bokach długości: $|AB| = 3$, $|BC| = 3$, $|CD| = 5$ oraz $|DA| = 8$, opisano okrąg.

Oblicz promień tego okręgu. Zapisz obliczenia.

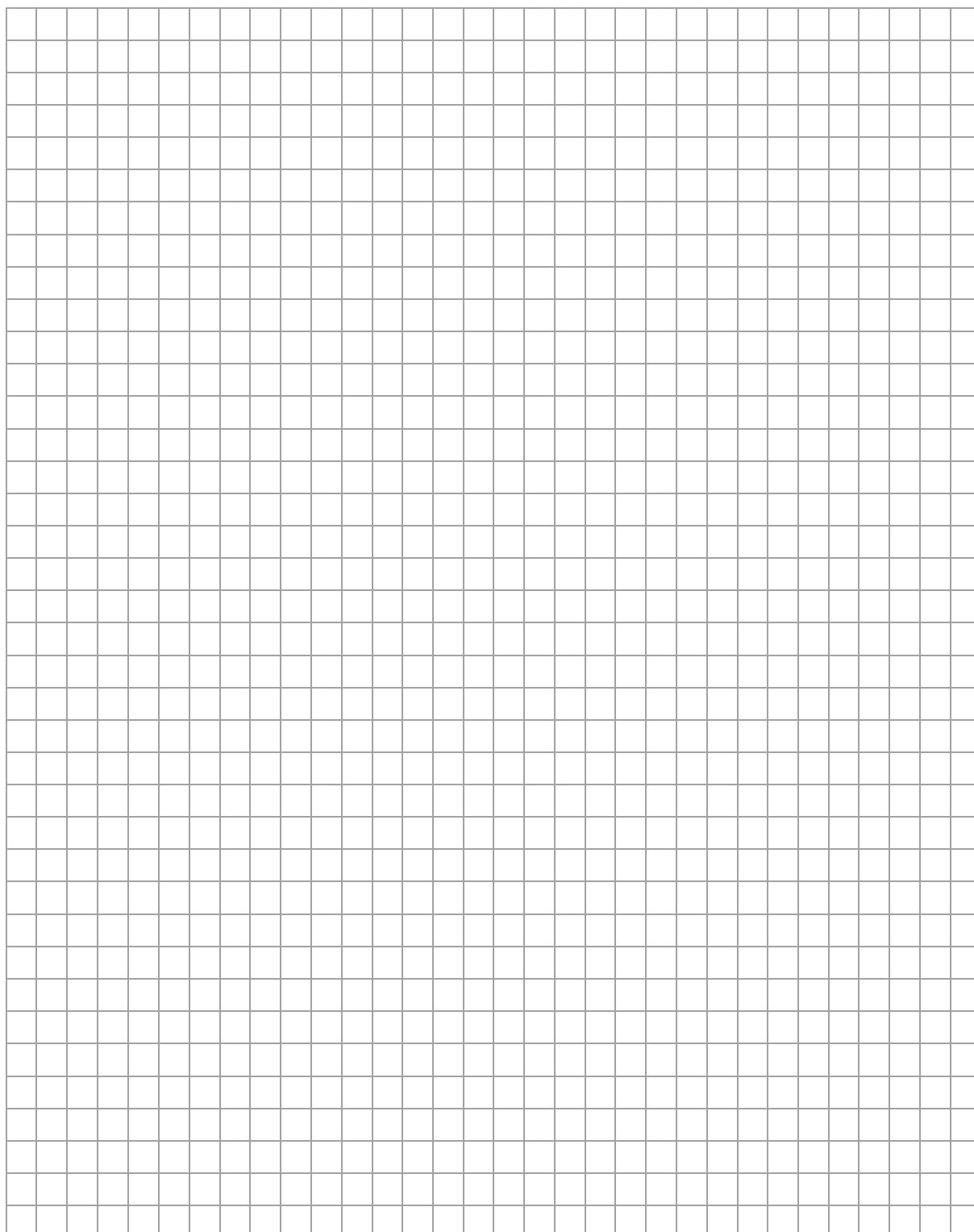


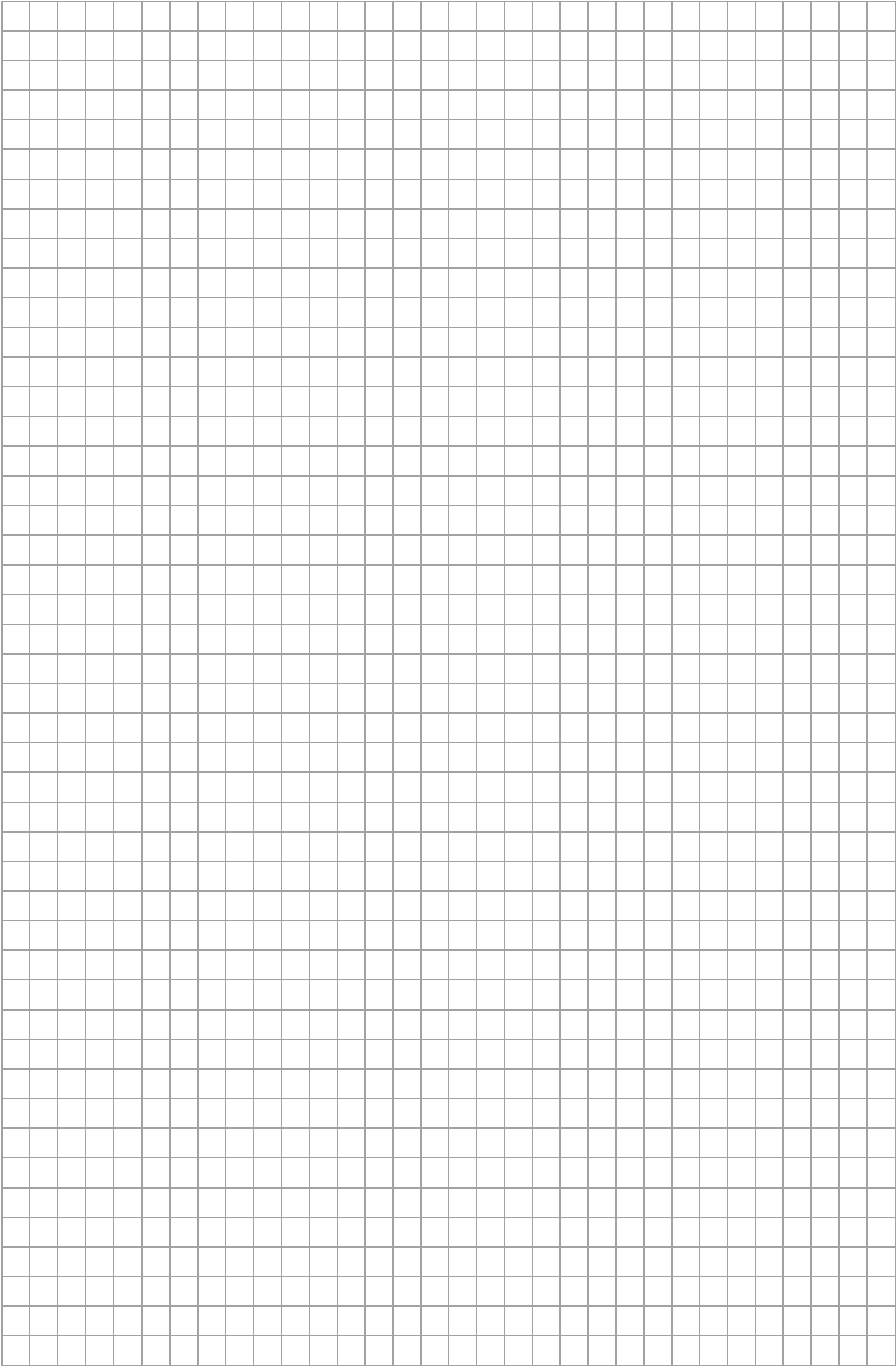


Zadanie 8. (0–4)

Wielomian f zmiennej rzeczywistej x jest określony wzorem $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Liczba (-2) jest miejscem zerowym tego wielomianu. W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) styczna do wykresu wielomianu f w punkcie A o pierwszej współrzędnej równej (-2) przecina ten wykres w punkcie $P = (1, 9)$.

Wyznacz wzór wielomianu f . Zapisz obliczenia.





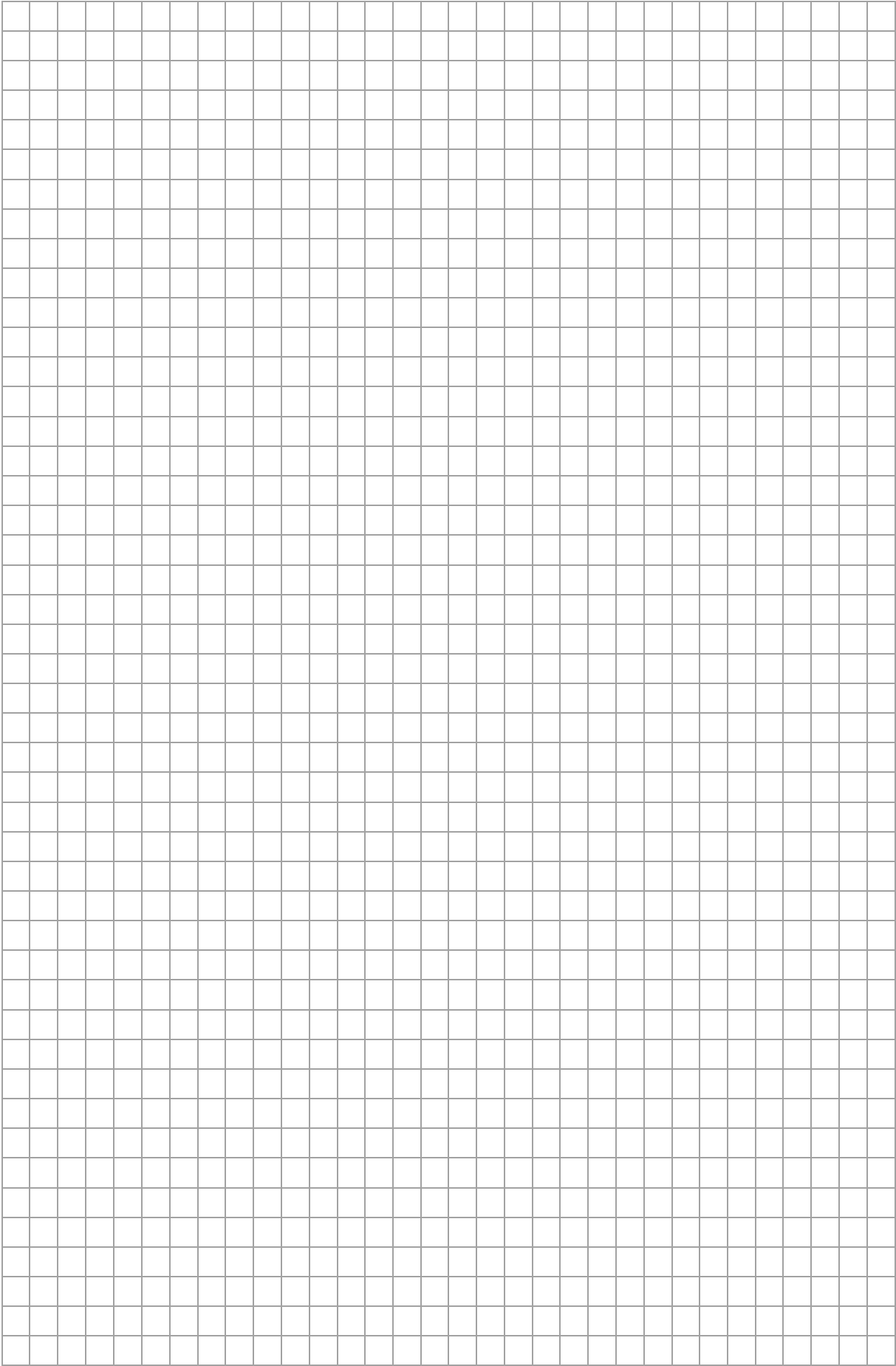
Zadanie 9. (0–5)

Ciąg (a_n) , określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest arytmetyczny i rosnący. W tym ciągu $a_6 = 15$ oraz $a_{15} = a_3 \cdot (a_8 - 6)$.

Ciąg (b_n) , określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest geometryczny i $b_1 = a_{11}$ oraz $b_2 = a_6$.

Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu (b_n) . Zapisz obliczenia.

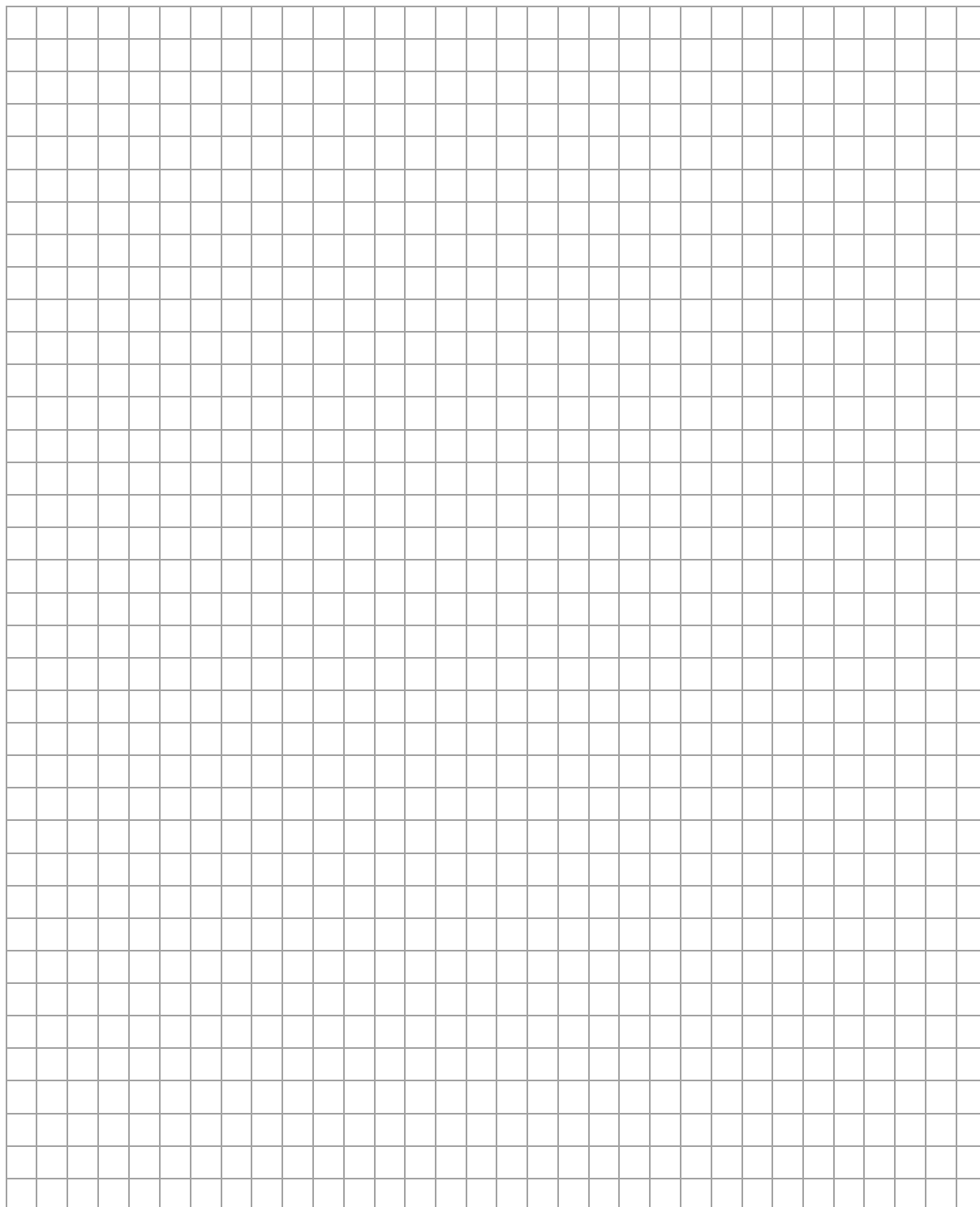


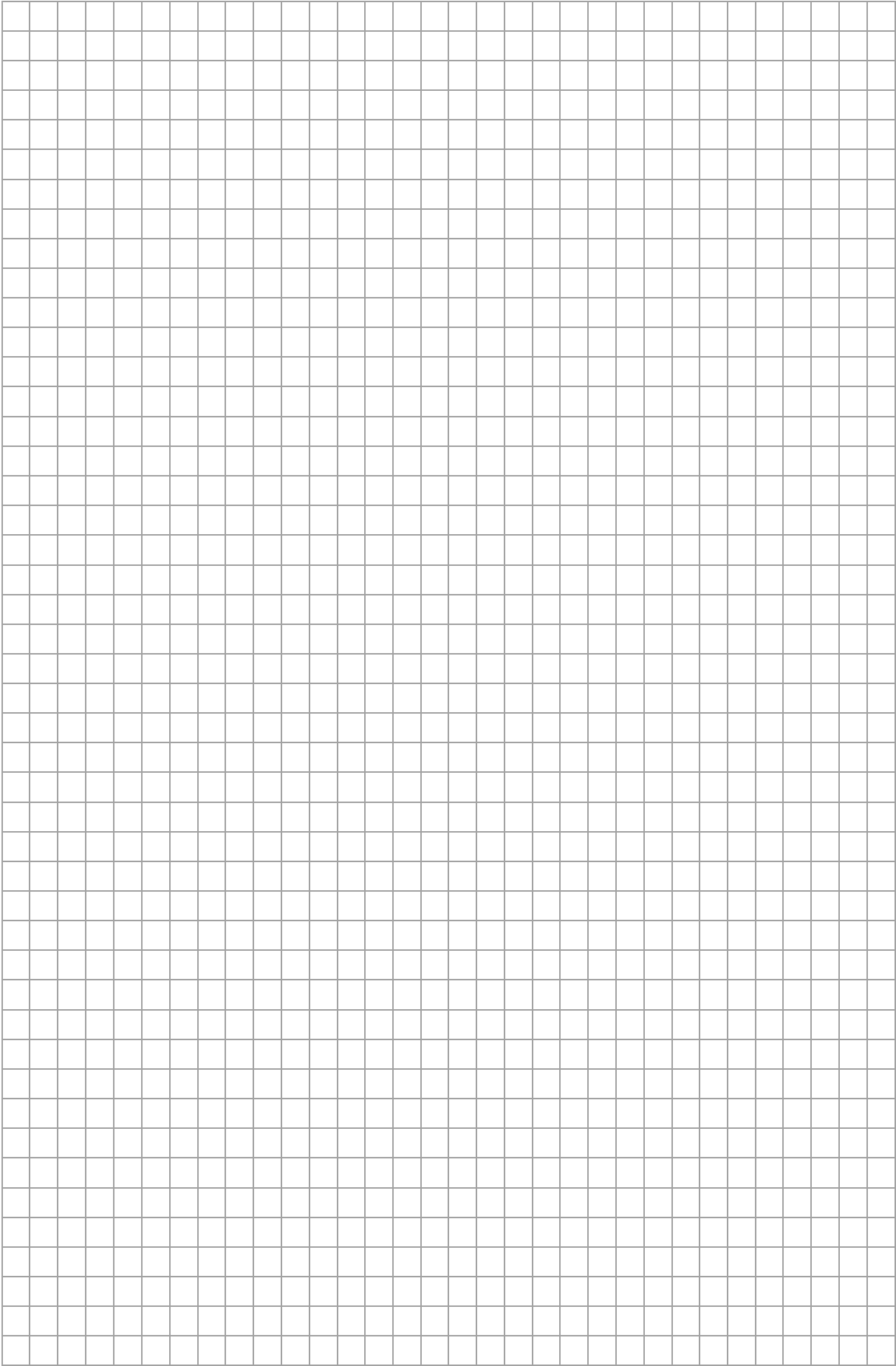


Zadanie 10. (0–5)

Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny $ABCD$ o podstawie ABC . Płaszczyzna zawierająca krawędź AB podstawy i prostopadła do krawędzi bocznej CD przecina tę krawędź w punkcie E , przy czym $\frac{|CE|}{|DE|} = \frac{3}{11}$.

**Oblicz stosunek pola powierzchni całkowitej tego ostrosłupa do pola podstawy ABC .
Zapisz obliczenia.**



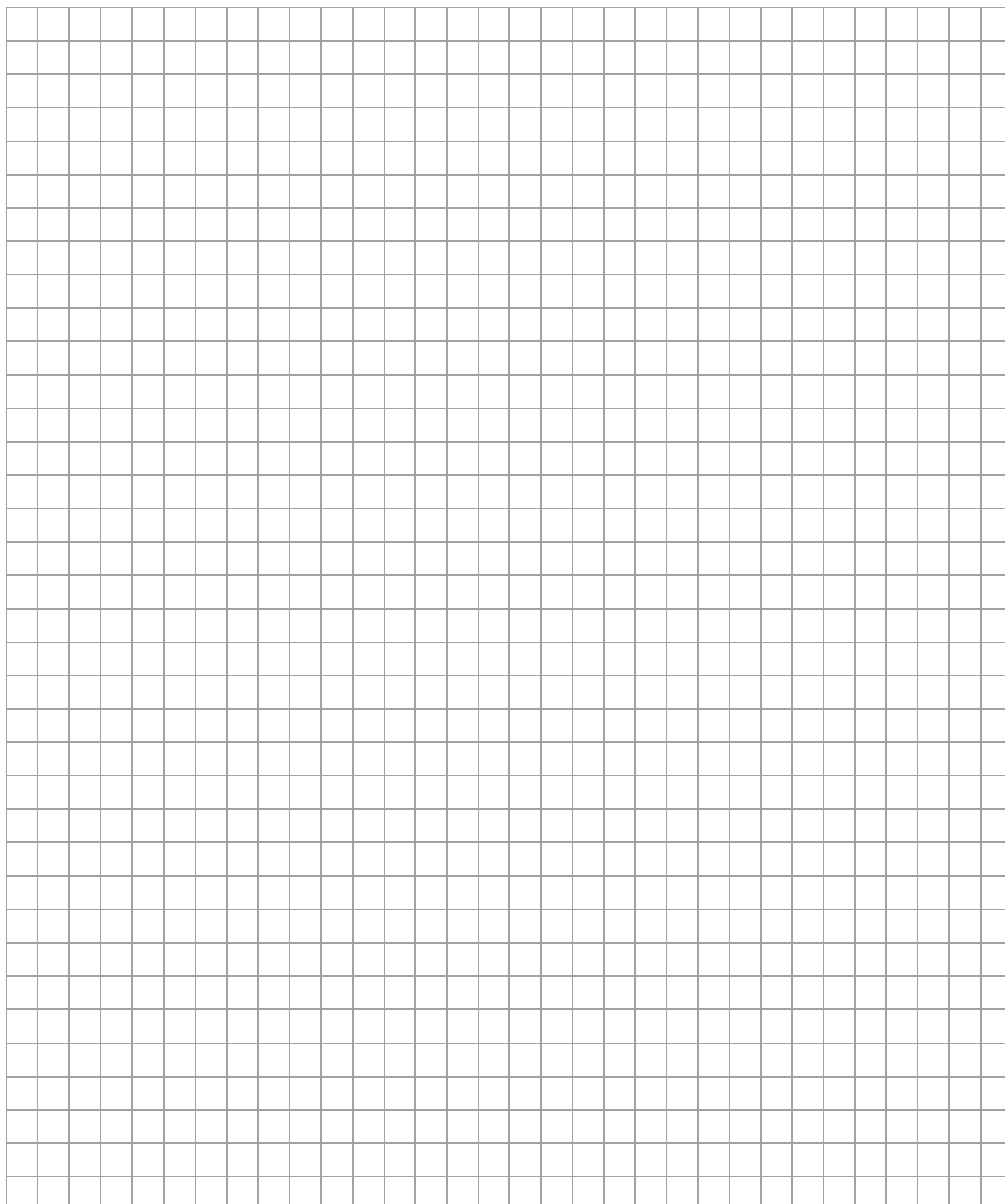


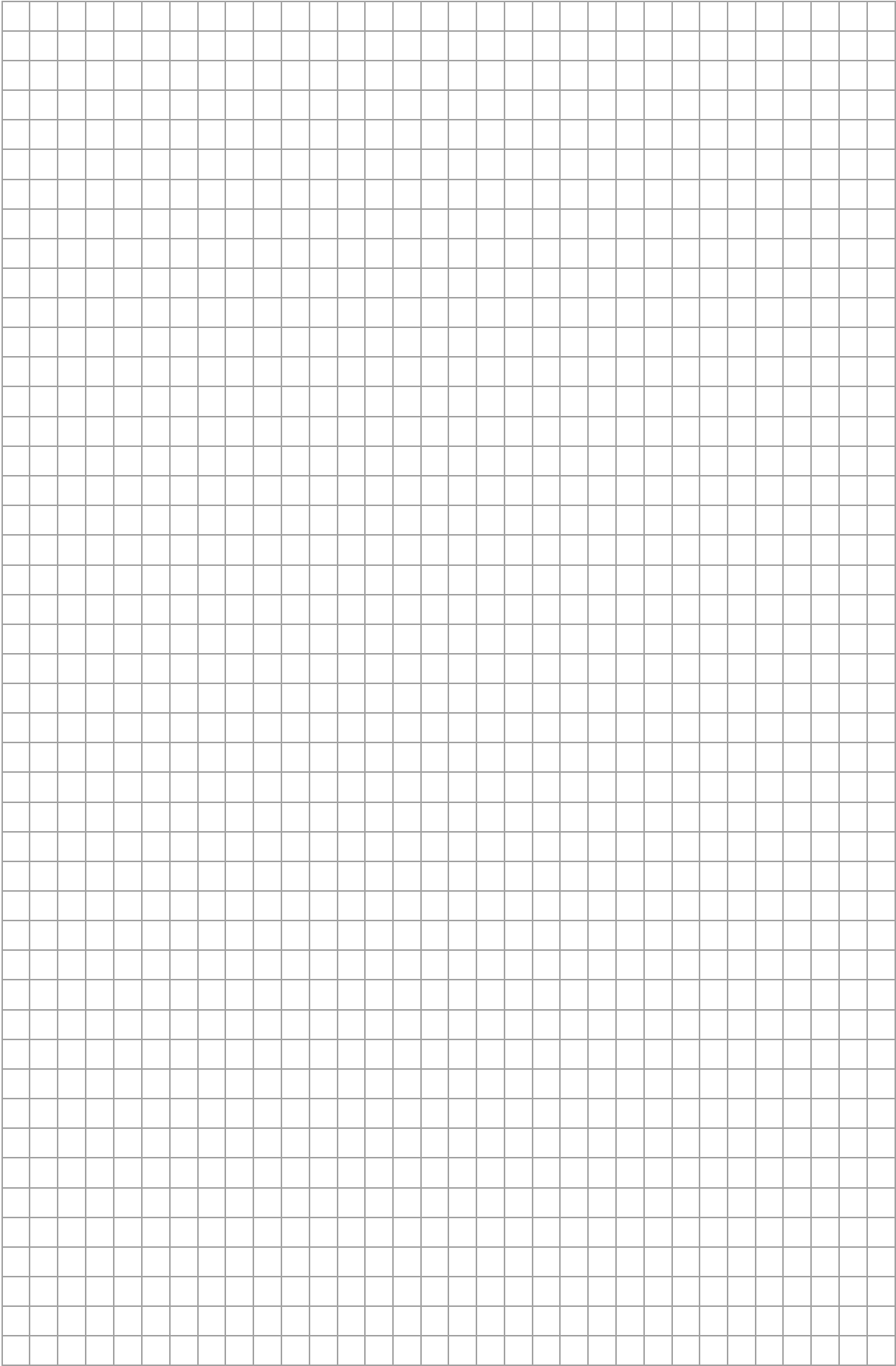
Zadanie 11. (0–6)

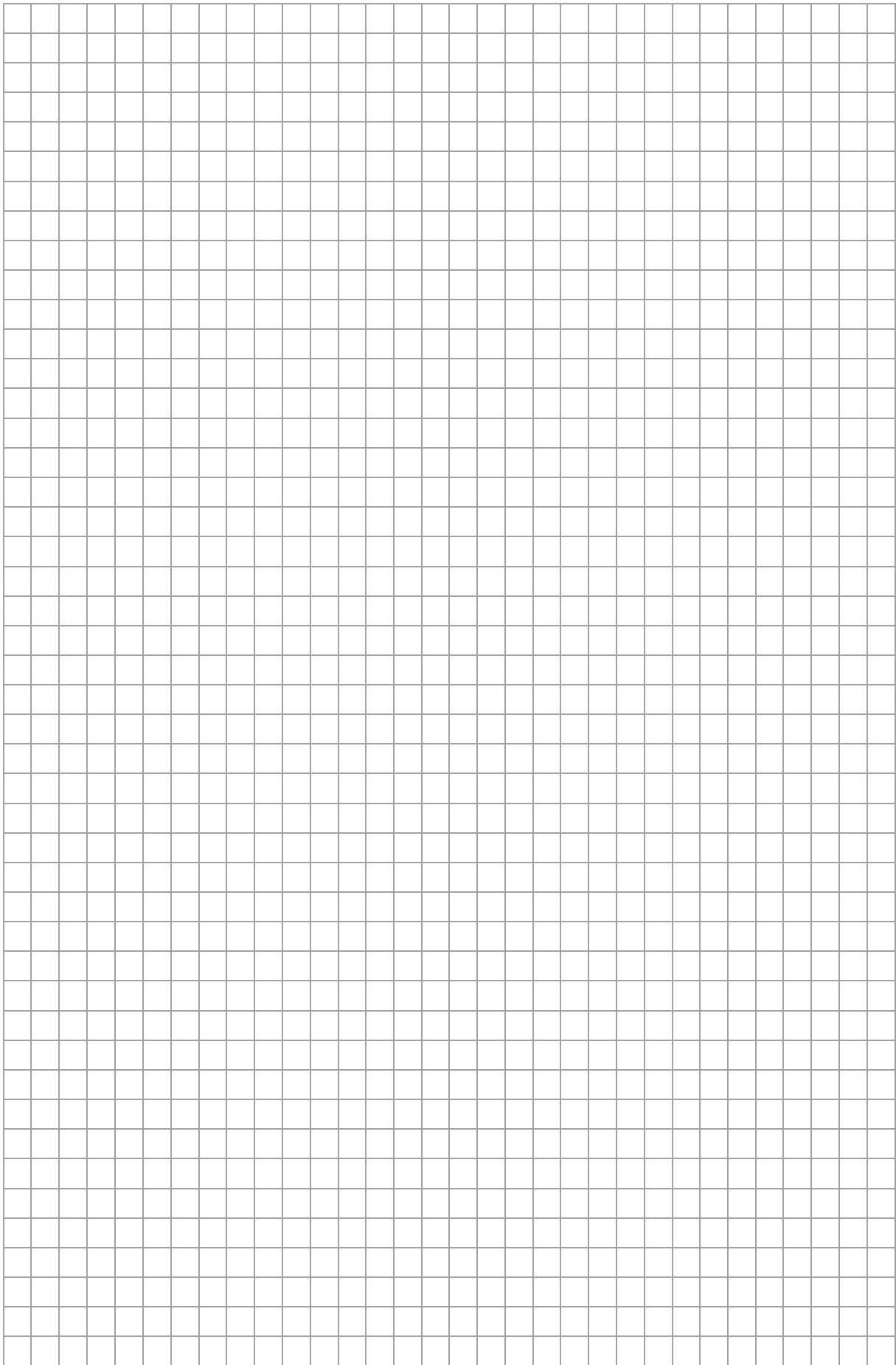
W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest równoległobok $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-8, -1)$ i $D = (-13, 9)$ oraz środka symetrii $M = \left(-\frac{9}{2}, 1\right)$.

Okrąg $\mathcal{O}$ przechodzi przez początek tego układu i jest styczny do prostych zawierających boki AB i BC tego równoległoboku. Druga współrzędna środka okręgu $\mathcal{O}$ jest liczbą ujemną.

Wyznacz równanie okręgu $\mathcal{O}$. Zapisz obliczenia.







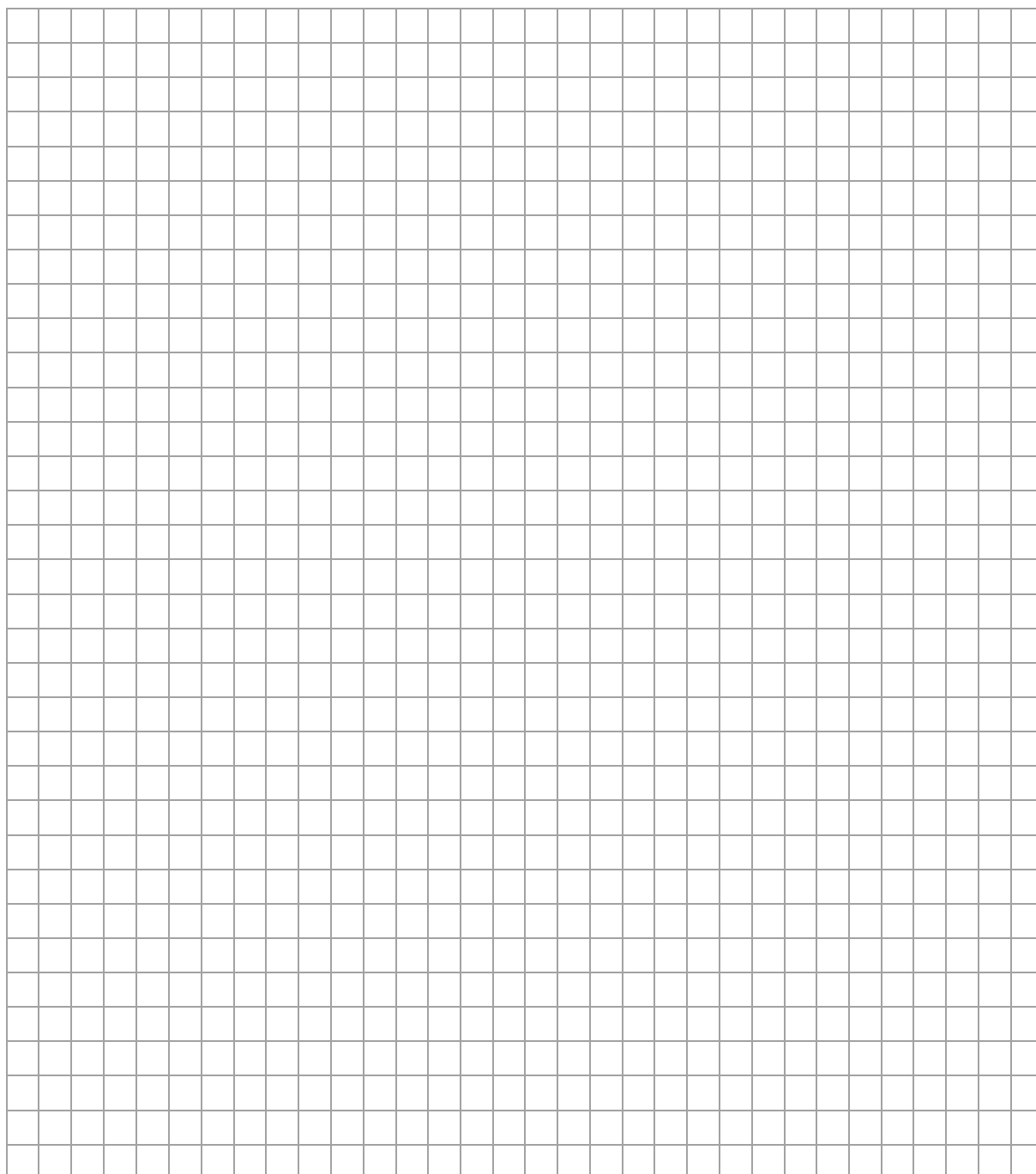
Zadanie 12.

Rozważamy wszystkie graniastosłupy prawidłowe trójkątne o polu powierzchni całkowitej równym $24\sqrt{3}$.

Zadanie 12.1. (0–2)

Wykaż, że objętość V graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi podstawy jest określona wzorem

$$V(a) = 6a - \frac{1}{8}a^3$$



Zadanie 12.2. (0–4)

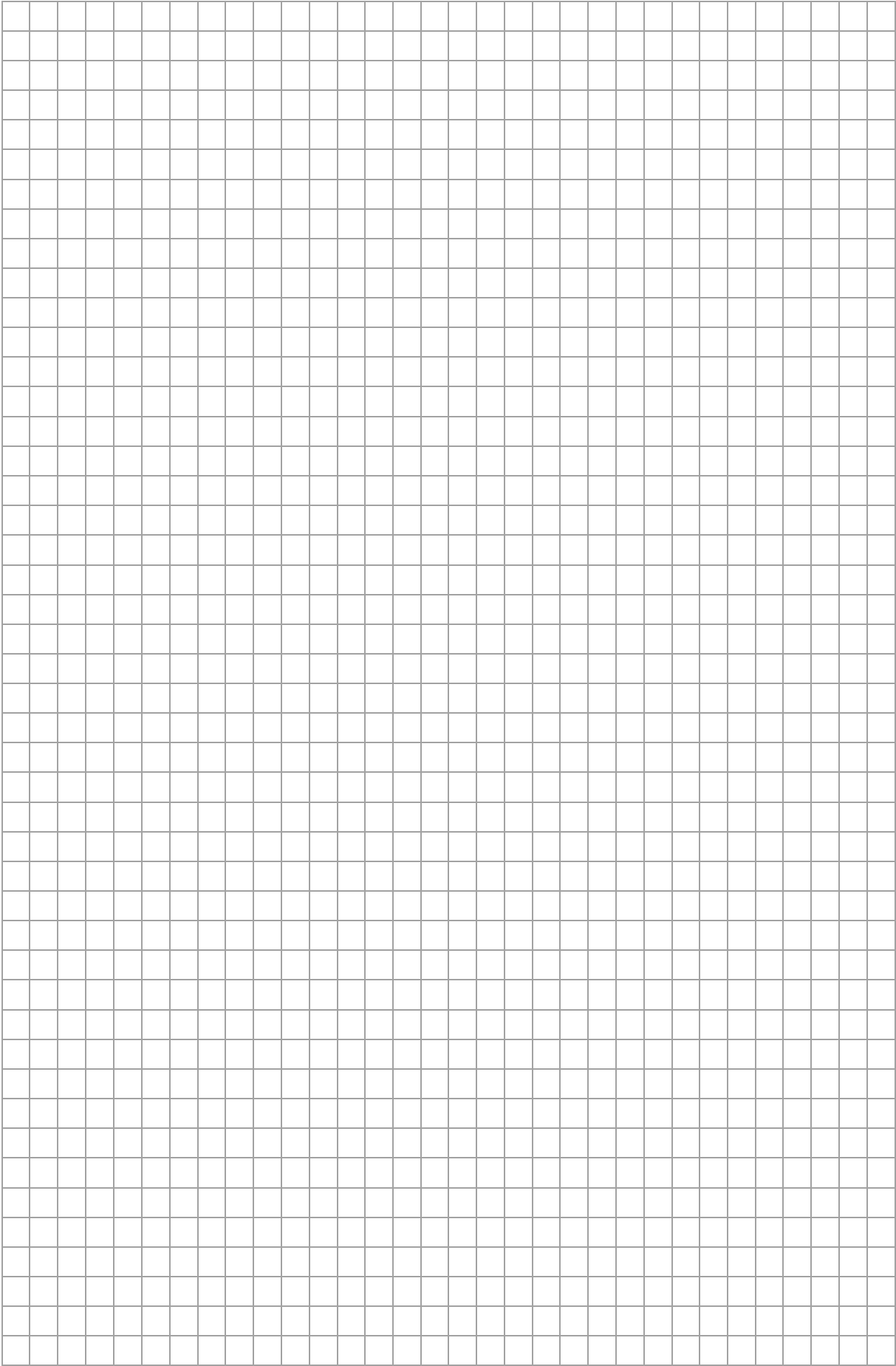
Objętość V graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi podstawy jest określona wzorem

$$V(a) = 6a - \frac{1}{8}a^3$$

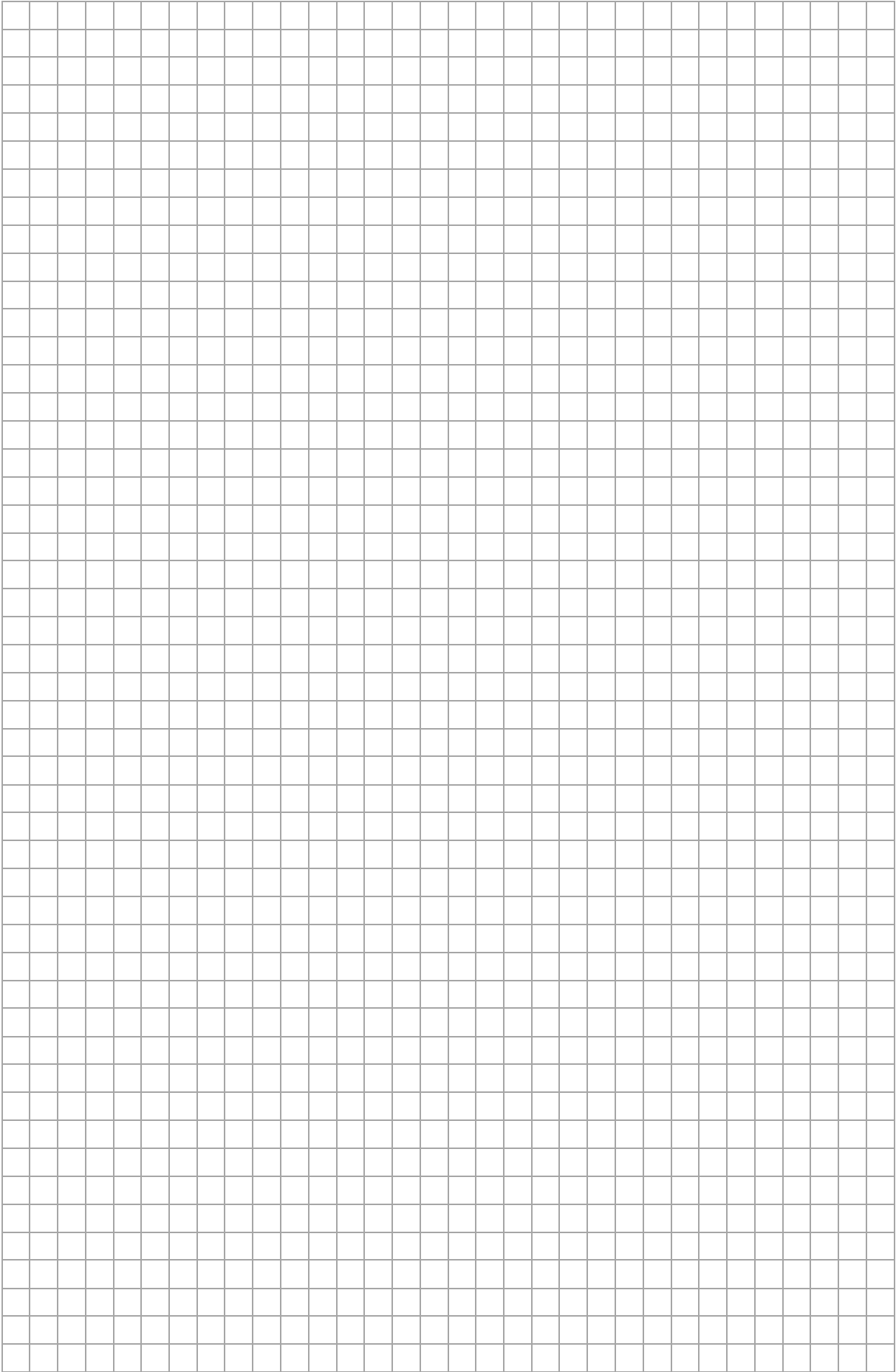
dla $a \in (0, 4\sqrt{3})$.

Wyznacz długość krawędzi podstawy tego z rozważanych graniastosłupów, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość. Zapisz obliczenia.





This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.



MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023



MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023



MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023



<i>Rodzaj dokumentu:</i>	Zasady oceniania rozwiązań zadań
<i>Egzamin:</i>	Egzamin maturalny
<i>Przedmiot:</i>	Matematyka
<i>Poziom:</i>	Poziom rozszerzony
<i>Formy arkusza:</i>	MMAP-R0-100, MMAP-R0-200, MMAP-R0-300, MMAP-R0-400, MMAP-R0-700, MMAP-R0-K00, MMAP-R0-Q00, MMAU-R0-100
<i>Termin egzaminu:</i>	6 czerwca 2025 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–3)

Wymagania określone w podstawie programowej ¹	
Wymagania ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. I. Sprawność rachunkowa.	Zdający: XII.R2) stosuje schemat Bernoullego.

Zasady oceniania

- 3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 0,984.
 2 pkt – zapisanie poprawnego prawdopodobieństwa uzyskania co najwyżej jednego sukcesu w dziesięciu próbach Bernoullego, np.

$$P = \binom{10}{0} \cdot (0,98)^{10} + \binom{10}{1} \cdot (0,02)^1 \cdot (1 - 0,02)^9,$$

$$P = (0,98)^{10} + 10 \cdot 0,02 \cdot (0,98)^9$$

- 1 pkt – zapisanie prawdopodobieństwa odniesienia sukcesu (p) i porażki (q) w pojedynczej próbie: $p = 0,02$, $q = 0,98$

ALBO

- zapisanie prawdopodobieństwa w postaci $q^{10} + 10p \cdot q^9$, gdzie p jest prawdopodobieństwem odniesienia sukcesu, q – porażki,

ALBO

- przedstawienie fragmentu drzewa zawierającego wszystkie istotne gałęzie odpowiadające sytuacji wysłania przez sklep dziesięciu pralek, które nie ulegną uszkodzeniu podczas transportu, oraz wszystkie istotne gałęzie odpowiadające sytuacji wysłania przez sklep dziesięciu pralek, z których dokładnie jedna uległa uszkodzeniu podczas transportu,

ALBO

¹Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz.U. z 2024 r. poz. 1019).

- przedstawienie fragmentu drzewa zawierającego gałąź odpowiadającą sytuacji uszkodzenia podczas transportu jednej spośród dziesięciu wysłanych pralek **oraz** określenie na każdym odcinku gałęzi prawdopodobieństwa sukcesu i porażki.
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisze poprawne prawdopodobieństwa

$$P(S_{10}^0) = \binom{10}{0} \cdot (0,02)^0 \cdot (0,98)^{10} \text{ oraz } P(S_{10}^1) = \binom{10}{1} \cdot (0,02)^1 \cdot (0,98)^9, \text{ ale}$$

z dalszego rozwiązania nie wynika, że $P = P(S_{10}^0) + P(S_{10}^1)$, to otrzymuje co najwyżej

1 punkt za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający przyjmuje $p = 0,2$ oraz $q = 0,8$ (albo $p = 0,02$ i $q = 0,8$) i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający przyjmuje $p = 0,98$ i $q = 0,02$, konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, lecz błędnie interpretuje wynik końcowy, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający nie określi sukcesu w pojedynczej próbie, ale z rozwiązania wynika, że poprawnie interpretuje warunki zadania, to może otrzymać **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Sukcesem w pojedynczej próbie Bernoullego jest uszkodzenie pralki podczas transportu.

Określamy prawdopodobieństwo sukcesu (p) i porażki (q) w pojedynczej próbie Bernoullego:

$$p = 0,02, \quad q = 1 - p = 0,98.$$

Niech S_{10}^k oznacza zdarzenie polegające na tym, że wśród dziesięciu wysłanych przez sklep pralek dokładnie k pralek uległo uszkodzeniu podczas transportu ($k \in \{0, 1\}$).

Obliczamy prawdopodobieństwo P zdarzenia polegającego na tym, że wśród dziesięciu wysłanych pralek uszkodzeniu podczas transportu ulegnie co najwyżej jedna:

$$\begin{aligned} P &= P(S_{10}^0) + P(S_{10}^1) = \binom{10}{0} \cdot (0,02)^0 \cdot (0,98)^{10} + \binom{10}{1} \cdot (0,02)^1 \cdot (0,98)^9 = \\ &= (0,98)^9 \cdot (0,98 + 10 \cdot 0,02) = (0,98)^9 \cdot 1,18 \approx 0,984 \end{aligned}$$

Zadanie 2. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu	Zdający: I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi. I.R) stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Zasady oceniania (dla sposobów I-IV)

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – przekształcenie wyrażenia $\frac{\log_{\sqrt{2}} 27 + 2}{2 \log_2 14 - 2}$ lub $\log_7 54$, lub obydwu tych wyrażeń do

takiej postaci, z której poprzez jednokrotne zastosowanie wzoru na logarytm iloczynu lub logarytm ilorazu, lub wzoru na zamianę podstawy logarytmu, lub wzoru na logarytm potęgi oraz ewentualne kilkukrotne przekształcenie wyrażenia wymiernego można otrzymać tezę

ALBO

– zapisanie jednego równania z a , b oraz niewiadomą x , np.

$$(a - 1)x = \frac{b}{2} + 1 \quad (\text{dla sposobu III}),$$

ALBO

– zapisanie liczby 2 w postaci $7^{\frac{1}{a-1}}$ oraz liczby 27 w postaci $2^{\frac{b}{2}}$ (dla sposobu IV).

1 pkt – zastosowanie wzoru na zamianę podstawy logarytmu lub na logarytm iloczynu, lub na

$$\log_7 54 = \frac{\log_2 54}{\log_2 7}, \log_7 54 = \frac{\log_{\sqrt{2}} 54}{\log_{\sqrt{2}} 7},$$

$$\log_{\sqrt{2}} 27 + 2 = \log_{\sqrt{2}}(27 \cdot 2), 2 \log_2 14 - 2 = 2 \log_2 \left(\frac{14}{2}\right)$$

ALBO

– zapisanie liczb 7 oraz 27 jako potęg liczby 2: $7 = 2^{a-1}$ i $27 = 2^{\frac{b}{2}}$ oraz zapisanie równania $7^x = 54$ (dla sposobu III),

ALBO

– zapisanie liczby 2 w postaci $7^{\frac{1}{a-1}}$ (dla sposobu IV).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przekształcamy wyrażenie $\log_7 54$, stosując wzór na zamianę podstawy logarytmu, a następnie wzory na logarytm iloczynu oraz logarytm ilorazu:

$$\log_7 54 = \frac{\log_2 54}{\log_2 7} = \frac{\log_2 27 + \log_2 2}{\log_2 14 - \log_2 2} = \frac{\frac{\log_{\sqrt{2}} 27}{\log_{\sqrt{2}} 2} + 1}{a - 1} = \frac{\frac{b}{2} + 1}{a - 1} = \frac{b + 2}{2a - 2}$$

To należało wykazać.

Sposób II

Przekształcamy wyrażenie $\frac{b+2}{2a-2}$, korzystając z założenia oraz ze wzoru zamianę podstawy logarytmu:

$$\frac{b+2}{2a-2} = \frac{\log_{\sqrt{2}} 27 + 2}{2 \log_2 14 - 2} = \frac{\frac{\log_2 27}{\log_2 \sqrt{2}} + 2}{2 \cdot (\log_2 14 - 1)} = \frac{2 \cdot (\log_2 27 + 1)}{2 \cdot (\log_2 14 - 1)} = \frac{\log_2 27 + 1}{\log_2 14 - 1}$$

Stąd i ze wzorów na sumę logarytmów, różnicę logarytmów oraz wzoru na zamianę podstawy logarytmu otrzymujemy dalej

$$\frac{\log_2 27 + 1}{\log_2 14 - 1} = \frac{\log_2 27 + \log_2 2}{\log_2 14 - \log_2 2} = \frac{\log_2 54}{\log_2 7} = \log_7 54$$

Zatem $\log_7 54 = \frac{b+2}{2a-2}$.

To należało wykazać.

Sposób III

Korzystamy z definicji logarytmu oraz z założenia i otrzymujemy $2^a = 14$ oraz

$$(\sqrt{2})^b = 27. \text{ Stąd } 7 = 2^{a-1} \text{ oraz } 27 = 2^{\frac{b}{2}}.$$

Oznaczmy przez x liczbę rzeczywistą taką, że $7^x = 54$. Wtedy

$$2^{(a-1)x} = 2 \cdot 27$$

$$2^{(a-1)x} = 2 \cdot 2^{\frac{b}{2}}$$

$$2^{(a-1)x} = 2^{\frac{b}{2} + 1}$$

Stąd

$$(a-1)x = \frac{b}{2} + 1$$

$$x = \frac{b+2}{2(a-1)}$$

Zatem $\log_7 54 = x = \frac{b+2}{2a-2}$.

To należało wykazać.

Sposób IV

Korzystamy z definicji logarytmu oraz z założenia i otrzymujemy $2^a = 14$ oraz

$(\sqrt{2})^b = 27$. Stąd $7 = 2^{a-1}$, czyli $2 = 7^{\frac{1}{a-1}}$, oraz $27 = 2^{\frac{b}{2}}$. Zatem

$$54 = 27 \cdot 2 = 2^{\frac{b}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{a-1}} = 7^{\frac{b}{2(a-1)}} \cdot 7^{\frac{1}{a-1}} = 7^{\frac{b}{2(a-1)} + \frac{1}{a-1}} = 7^{\frac{b+2}{2a-2}}$$

czyli $\log_7 54 = \frac{b+2}{2a-2}$.

To należało wykazać.

Zadanie 3. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XI.R1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 368 586.

2 pkt – wyznaczenie liczby liczb sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 4 (np. $\binom{6}{2} + 6$)
oraz zapisanie liczby liczb sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 2: 6, **oraz**
wyznaczenie liczby liczb sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 0
(np. $9 \cdot 10^5 - 9^6$).

1 pkt – wyznaczenie liczby liczb sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 4 (np. $\binom{6}{2} + 6$)
oraz zapisanie liczby liczb sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 2: 6
ALBO
– wyznaczenie liczby liczb sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 0, np.:
 $9 \cdot 10^5 - 9^6$, $5 \cdot 9^5 + \binom{5}{2} \cdot 9^4 + \binom{5}{3} \cdot 9^3 + \binom{5}{4} \cdot 9^2 + \binom{5}{5} \cdot 9$, 368 559,
ALBO
– wypisanie wszystkich przypadków, dla których iloczyn cyfr będzie liczbą parzystą
mniejszą od 5: jedna dwójka i pięć jedynek, dwie dwójki i cztery jedynek, jedna
czwórka i pięć jedynek, co najmniej jedno zero.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Iloczyn cyfr liczby naturalnej sześciocyfrowej jest równy 4 tylko wtedy, gdy w zapisie dziesiętnym tej liczby występują:

- dwie dwójki i cztery jedynek,
- albo
- jedna czwórka i pięć jedynek.

Liczb naturalnych sześciocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie dwie dwójki i cztery jedynek jest $\binom{6}{2} = 15$.

Liczb naturalnych sześciocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie jedna czwórka i pięć jedynek jest 6.

Zatem wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 4 jest 21.

Iloczyn cyfr liczby naturalnej sześciocyfrowej jest równy 2 tylko wtedy, gdy w zapisie dziesiętnym tej liczby występują jedna dwójka i pięć jedynek.

Zatem wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 2 jest 6.

Iloczyn cyfr liczby naturalnej sześciocyfrowej jest równy 0 tylko wtedy, gdy w zapisie dziesiętnym tej liczby występuje na pierwszej pozycji cyfra różna od zera, a na dalszych pozycjach co najmniej jedno zero.

Ponieważ wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych jest $9 \cdot 10^5$, a wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych o wszystkich cyfrach różnych od zera jest 9^6 , więc wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 0 jest $9 \cdot 10^5 - 9^6 = 368\,559$.

Zatem wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych, których iloczyn cyfr jest liczbą parzystą mniejszą od 5 jest $21 + 6 + 368\,559 = 368\,586$.

Uwaga.

Liczbę wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 0 można obliczyć też w następujący sposób.

Wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym cyfra zero występuje dokładnie jeden raz jest $\binom{5}{1} \cdot 9^5 = 295\,245$.

Wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym cyfra zero występuje dokładnie dwa razy jest $\binom{5}{2} \cdot 9^4 = 65\,610$.

Wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym cyfra zero występuje dokładnie trzy razy jest $\binom{5}{3} \cdot 9^3 = 7\,290$.

Wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym cyfra zero występuje dokładnie cztery razy jest $\binom{5}{4} \cdot 9^2 = 405$.

Wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym cyfra zero występuje dokładnie pięć razy jest $\binom{5}{5} \cdot 9^1 = 9$.

Zatem wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 0 jest

$$295\,245 + 65\,610 + 7\,290 + 405 + 9 = 368\,559$$

Zadanie 4. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.11) przeprowadza dowody geometryczne.

Zasady oceniania (dla sposobów I – III)

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – wyznaczenie długości odcinka CL (lub LB) w zależności od długości odcinka DM ,

np. $|CL| = a - \frac{1}{2} \cdot |DM|$, $|LB| = \frac{1}{2} \cdot |DM|$ **oraz** uzasadnienie, że trójkąty MDN

i KBL są podobne (dla sposobu I)

ALBO

– uzasadnienie, że trójkąty MDN i KBL są podobne **oraz** zapisanie długości odcinków DE oraz FL za pomocą jednej zmiennej (lub zapisanie związku między nimi), np. $|DE| = 2x$ i $|FL| = \frac{1}{2}x$ (dla sposobu II).

ALBO

– wyznaczenie współrzędnych wierzchołków trapezu $KLMN$ w zależności od a oraz parametru c : $K = \left(\frac{5a-c}{2}, 0\right)$ oraz $L = (2a, c-a)$ oraz $M = (2c-2a, a)$ oraz $N = (0, 5a-4c)$ (dla sposobu III).

1 pkt – uzasadnienie, że trójkąty MDN i KBL są podobne (dla sposobów I oraz II)

ALBO

– wyznaczenie długości odcinka CL (lub LB) w zależności od długości odcinka DM , np. $|CL| = a - \frac{1}{2} \cdot |DM|$, $|LB| = \frac{1}{2} \cdot |DM|$ (dla sposobu I),

ALBO

– zapisanie długości odcinków DE oraz FL za pomocą jednej zmiennej (lub zapisanie związku między nimi), np. $|DE| = 2x$ i $|FL| = x$ (dla sposobu II),

ALBO

– umieszczenie prostokąta $ABCD$ w układzie współrzędnych i zapisanie współrzędnych jego wierzchołków, np. $A = (0, 0)$ i $B = (2a, 0)$ i $C = (2a, a)$

i $D = (0, a)$ **oraz** zapisanie równania prostej ML : $y = -\frac{1}{2}x + c$ (dla sposobu III).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania**Sposób I**

Oznaczmy przez a długość boku AD . Wtedy $|AB| = 2a$.

Kąty DMN i BKL są naprzemianległe oraz $MN \parallel KL$, więc te kąty mają równe miary.

Zatem trójkąty prostokątne MDN i KBL są podobne (na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów).

Ponieważ $ML \parallel DB$, więc korzystając z twierdzenia Talesa, otrzymujemy

$$\frac{|DM|}{|LB|} = \frac{|MC|}{|LC|}$$

$$\frac{|DM|}{|LB|} = \frac{2a - |DM|}{a - |LB|}$$

$$|DM| \cdot a - |DM| \cdot |LB| = 2 \cdot |LB| \cdot a - |LB| \cdot |DM|$$

$$|LB| = \frac{1}{2} \cdot |DM|$$

Z warunków zadania wynika, że $MN \perp DB$, więc z rachunku kątów dostajemy $|\angle DNM| = |\angle CDB|$, więc trójkąty prostokątne MDN oraz BCD są podobne (na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów). Zatem $\frac{|DM|}{|DN|} = \frac{|BC|}{|CD|}$, czyli $\frac{|DM|}{|DN|} = \frac{1}{2}$.

Stąd i ze związku $|LB| = \frac{1}{2} \cdot |DM|$ otrzymujemy $|LB| = \frac{1}{4} \cdot |DN|$, co oznacza, że trójkąt MDN jest podobny do trójkąta KBL w skali 4. Ponieważ stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa, więc stosunek pola trójkąta MDN do pola trójkąta KBL jest równy 16. To należało wykazać.

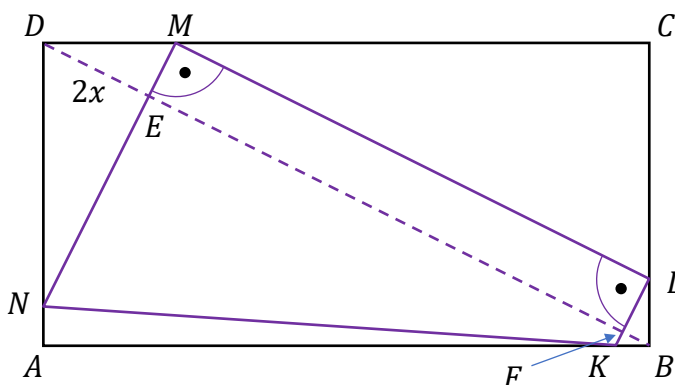
Sposób II

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

E – punkt przecięcia przekątnej DB z bokiem MN trapezu $KLMN$,

F – punkt przecięcia przekątnej DB z bokiem KL trapezu $KLMN$,

$2x$ – długość odcinka DE (zobacz rysunek).



Ponieważ $ML \parallel DB$, więc trójkąty DEM oraz FBL są prostokątne. Trójkąty prostokątne MDE i BDC mają wspólny kąt ostry, więc są podobne (cecha kkk podobieństwa trójkątów).

Zatem $\frac{|ME|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|CD|} = \frac{1}{2}$, więc $|ME| = \frac{1}{2} \cdot |DE| = x$.

Czworokąt $MEFL$ jest prostokątem, więc $|FL| = |ME| = x$.

Z rachunku kątów mamy $|\angle FLB| = |\angle MDE|$, więc trójkąty prostokątne MDE i KLB są podobne (na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów). Zatem $\frac{|FB|}{|FL|} = \frac{|ME|}{|DE|} = \frac{1}{2}$, czyli

$$|FB| = \frac{1}{2} \cdot |FL| = \frac{1}{2}x.$$

Kąty DMN i BKL są naprzemianległe oraz $MN \parallel KL$, więc te kąty mają równe miary. Zatem trójkąty prostokątne MDN i KBL są podobne (na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów). Ponieważ stosunek odpowiednich wysokości tych trójkątów jest równy $\frac{|DE|}{|FB|} = \frac{2x}{\frac{1}{2}x} = 4$, więc trójkąt MDN jest podobny do trójkąta KBL w skali 4.

Ponieważ stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa, więc stosunek pola trójkąta MDN do pola trójkąta KBL jest równy 16. To należało wykazać.

Sposób III

Oznaczmy przez a długość boku AD . Wtedy $|AB| = 2a$.

Umieszczamy prostokąt $ABCD$ w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) tak, że $A = (0, 0)$, $B = (2a, 0)$, $C = (2a, a)$, $D = (0, a)$.

Ponieważ stosunek $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{1}{2}$ oraz $ML \parallel BD$, więc prosta ML ma równanie

$$y = -\frac{1}{2}x + c, \text{ przy pewnym } c \in (a, 2a).$$

Wtedy $M = (2c - 2a, a)$ oraz $L = (2a, c - a)$.

Wyznaczamy równania prostych MN oraz KL , które są prostopadłe do ML :

$$MN: y = 2(x - 2c + 2a) + a$$

$$KL: y = 2(x - 2a) + c - a$$

Stąd $N = (0, 5a - 4c)$ oraz $K = \left(\frac{5a-c}{2}, 0\right)$.

Wyznaczamy długości boków trójkątów MDN i KBL :

$$|ND| = |a - (5a - 4c)| = 4 \cdot |c - a|$$

$$|DM| = |2c - 2a - 0| = 2 \cdot |c - a|$$

$$|KB| = \left|2a - \frac{5a-c}{2}\right| = \frac{1}{2} \cdot |c - a|$$

$$|BL| = |c - a - 0| = |c - a|$$

Wyznaczamy stosunek pól trójkątów MDN i KBL :

$$\frac{P_{\Delta MDN}}{P_{\Delta KBL}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |ND| \cdot |DM|}{\frac{1}{2} \cdot |KB| \cdot |BL|} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot |c - a| \cdot 2 \cdot |c - a|}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot |c - a| \cdot |c - a|} = 16$$

To należało wykazać.

Zadanie 5. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: III.R3) stosuje wzory Viète’a dla równań kwadratowych; III.R5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami [...].

Zasady oceniania

4 pkt – spełnienie następujących trzech warunków:

1) poprawne rozwiązanie warunku $m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$: $m = 2$,

2) poprawne rozwiązanie warunku $\Delta > 0$: $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

LUB

wyznaczenie wszystkich wartości parametru m , dla których $x_1 \neq x_2$: $m \neq 1$,

LUB

sprawdzenie, że dla $m = 2$ są spełnione warunki zadania,

3) zapisanie poprawnej odpowiedzi: $m = 2$.

3 pkt – poprawnie rozwiązany warunek $\Delta > 0$: $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ **oraz** zapisanie równania z jedną niewiadomą m , np. $m \cdot [(-2m)^2 - 2 \cdot (2m - 1)] = 3m \cdot (2m - 1) + 2$
ALBO

– rozwiązanie warunku $m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$: $m = 2$,

ALBO

– zapisanie, że $x_1 \neq x_2$ dla $m \neq 1$ **oraz** zapisanie równania z jedną niewiadomą m , np. $m \cdot [(-2m)^2 - 2 \cdot (2m - 1)] = 3m \cdot (2m - 1) + 2$.

2 pkt – poprawnie rozwiązany warunek $\Delta > 0$: $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ **oraz** przekształcenie warunku $m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète’a, np. $m \cdot [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2] = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$
ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą m , np.

$$m \cdot [(-2m)^2 - 2 \cdot (2m - 1)] = 3m \cdot (2m - 1) + 2$$

ALBO

– wyznaczenie pierwiastków trójmianu $x^2 + 2mx + (2m - 1)$: (-1) oraz $1 - 2m$, **oraz** zapisanie, że $x_1 \neq x_2$ dla $m \neq 1$.

1 pkt – poprawnie rozwiązany warunek $\Delta > 0$: $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
ALBO

– przekształcenie warunku $m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète’a, np.

$$m \cdot [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2] = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$$

ALBO

– wyznaczenie pierwiastków trójmianu $x^2 + 2mx + (2m - 1)$: (-1) oraz $1 - 2m$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga.

Jeżeli zdający przyjmie, że $x_1^2 + x_2^2$ jest równe $(x_1 + x_2)^2$ oraz doprowadzi rozwiązanie konsekwentnie do końca, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Równanie $x^2 + 2mx + 2m - 1 = 0$ ma dokładnie dwa różne rozwiązania rzeczywiste tylko wówczas, gdy wyróżnik Δ trójmianu kwadratowego $x^2 + 2mx + (2m - 1)$ jest dodatni.

Rozwiązujemy warunek $\Delta > 0$:

$$(2m)^2 - 4 \cdot (2m - 1) > 0$$

$$4m^2 - 8m + 4 > 0$$

$$4(m - 1)^2 > 0$$

$$m \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

Przekształcamy warunek $m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a i rozwiązujemy uzyskane równanie z niewiadomą m :

$$m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$$

$$m \cdot [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2] = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$$

$$m \cdot [(-2m)^2 - 2 \cdot (2m - 1)] = 3m \cdot (2m - 1) + 2$$

$$4m^3 - 10m^2 + 5m - 2 = 0$$

$$4m^3 - 8m^2 - 2m^2 + 4m + m - 2 = 0$$

$$4m^2(m - 2) - 2m(m - 2) + (m - 2) = 0$$

$$(m - 2)(4m^2 - 2m + 1) = 0$$

$$m - 2 = 0 \quad \vee \quad 4m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$m = 2$$

Ponieważ $4m^2 - 2m + 1 = 3m^2 + (m - 1)^2 > 0$, więc równanie $4m^2 - 2m + 1 = 0$ nie ma rozwiązań rzeczywistych.

Zatem warunek $m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$ jest spełniony tylko dla $m = 2$.

Ponieważ $2 \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, więc warunki zadania są spełnione tylko dla $m = 2$.

Sposób II

Zauważamy, że liczba (-1) jest rozwiązaniem równania $x^2 + 2mx + 2m - 1 = 0$. Korzystając ze wzorów Viète'a, mamy $x_1 + x_2 = -2m$, czyli $-1 + x_2 = -2m$, więc $x_2 = 1 - 2m$. Zatem $x_1 \neq x_2$ gdy $m \neq 1$.

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m , dla których spełniony jest warunek $m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$:

$$m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$$

$$m \cdot [(-1)^2 + (1 - 2m)^2] = 3m \cdot (-1) \cdot (1 - 2m) + 2$$

$$m \cdot (1 + 1 - 4m + 4m^2) = 6m^2 - 3m + 2$$

$$4m^3 - 10m^2 + 5m - 2 = 0$$

$$4m^3 - 8m^2 - 2m^2 + 4m + m - 2 = 0$$

$$4m^2(m - 2) - 2m(m - 2) + (m - 2) = 0$$

$$(m - 2)(4m^2 - 2m + 1) = 0$$

$$m - 2 = 0 \quad \vee \quad 4m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$m = 2$$

Wyróżnik trójmianu $4m^2 - 2m + 1$ jest ujemny, więc równanie $4m^2 - 2m + 1 = 0$ nie ma rozwiązań rzeczywistych.

Zatem warunek $m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$ jest spełniony tylko dla $m = 2$.

Warunki zadania są spełnione tylko dla $m = 2$.

Zadanie 6. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.R6) rozwiązuje równania trygonometryczne.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$.

3 pkt – rozwiązanie równania $\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$ w zbiorze $\mathbb{R}$, np.:

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \cdot k \text{ lub } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ lub } x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z},$$

ALBO

– spełnienie jednego z kryteriów określonych w zasadach oceniania za 2 punkty **oraz**

$$\text{rozwiązanie równania } \cos(3x) = 0 \text{ w przedziale } [0, \pi]: \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6},$$

ALBO

– spełnienie jednego z kryteriów określonych w zasadach oceniania za 2 punkty **oraz**

$$\text{rozwiązanie równania } \cos x + \cos(3x) = 0 \text{ w przedziale } [0, \pi]: \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4},$$

ALBO

– spełnienie jednego z kryteriów określonych w zasadach oceniania za 2 punkty **oraz**

$$\text{rozwiązanie równania } \cos(2x) = 0 \text{ w przedziale } [0, \pi]: \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4},$$

ALBO

– spełnienie jednego z kryteriów określonych w zasadach oceniania za 2 punkty **oraz**

$$\text{rozwiązanie równania } 4\cos^2 x - 2 = 0 \text{ w przedziale } [0, \pi]: \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4},$$

ALBO

– spełnienie jednego z kryteriów określonych w zasadach oceniania za 2 punkty **oraz**

$$\text{rozwiązanie równania } 2 - 4\sin^2 x = 0 \text{ w przedziale } [0, \pi]: \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}.$$

2 pkt – przekształcenie równoważne równania $\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$ do postaci alternatywy dwóch równań trygonometrycznych, z których jednym jest

$$\cos(3x) = 0, \text{ np.:}$$

$$\cos(3x) = 0 \text{ lub } 2\cos(2x)\cos x = 0,$$

$$\cos(3x) = 0 \text{ lub } \cos x + \cos(3x) = 0,$$

$$\cos(3x) = 0 \text{ lub } (4\cos^2 x - 2)\cos x = 0,$$

ALBO

– przekształcenie równoważne równania $\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$ do postaci alternatywy $\cos(3x) = 0$ lub $\cos(2x) = 0$ lub $\cos x = 0$.

1 pkt – przekształcenie równoważne równania do postaci $2\cos(3x)\cos x + 2\cos^2(3x) = 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przekształcamy równanie $\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$ równoważnie, stosując wzory na cosinus sumy oraz cosinus różnicy argumentów:

$$\cos(3x - x) + 2\cos^2(3x) + \cos(3x + x) = 0$$

$$\cos(3x)\cos x + \sin(3x)\sin x + 2\cos^2(3x) + \cos(3x)\cos x - \sin(3x)\sin x = 0$$

$$2\cos(3x)(\cos x + \cos(3x)) = 0$$

$$\cos(3x) = 0 \quad \vee \quad \cos x + \cos(3x) = 0$$

Rozwiązujemy równanie $\cos(3x) = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$\cos(3x) = 0$$

$$3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \cdot k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stąd otrzymujemy rozwiązania równania $\cos(3x) = 0$ w zbiorze $[0, \pi]$: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$.

Rozwiązujemy równanie $\cos x + \cos(3x) = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$\cos x + \cos(3x) = 0$$

$$\cos(3x) = -\cos x$$

$$\cos(3x) = \cos(\pi + x)$$

$$3x = \pi + x + 2k\pi \quad \vee \quad 3x = -\pi - x + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stąd otrzymujemy rozwiązania równania $\cos x + \cos(3x) = 0$ w zbiorze $[0, \pi]$: $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$.

Zatem rozwiązaniami równania $\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$ w zbiorze $[0, \pi]$ są liczby: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$.

Sposób II

Przekształcamy równanie $\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$ równoważnie, stosując wzór na sumę cosinusów:

$$2\cos\left(\frac{2x+4x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2x-4x}{2}\right) + 2\cos^2(3x) = 0$$

$$2\cos(3x)\cos(-x) + 2\cos^2(3x) = 0$$

$$2\cos(3x)(\cos x + \cos(3x)) = 0$$

$$\cos(3x) = 0 \quad \vee \quad \cos x + \cos(3x) = 0$$

Rozwiązujemy równanie $\cos(3x) = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$\cos(3x) = 0$$

$$3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \cdot k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stąd otrzymujemy rozwiązania równania $\cos(3x) = 0$ w zbiorze $[0, \pi]$: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$.

Rozwiązujemy równanie $\cos x + \cos(3x) = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$\cos x + \cos(3x) = 0$$

$$2 \cos\left(\frac{x+3x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-3x}{2}\right) = 0$$

$$\cos(2x) \cdot \cos(-x) = 0$$

$$\cos(2x) = 0 \quad \vee \quad \cos x = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stąd otrzymujemy rozwiązania równania $\cos x + \cos(3x) = 0$ w zbiorze $[0, \pi]$: $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$.

Zatem rozwiązaniami równania $\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$ w zbiorze $[0, \pi]$ są liczby: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$.

Zadanie 7. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VIII.R1) stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.

Zasady oceniania (dla sposobu I)

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

3 pkt – obliczenie długości jednej z przekątnych czworokąta $ABCD$, np. $d = 7$, $|AC| = \frac{39}{7}$,
ALBO

– obliczenie cosinusa jednego z kątów czworokąta $ABCD$, np. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$,

$$\cos \gamma = -\frac{1}{2}, \cos |\sphericalangle ABC| = -\frac{71}{98}, \cos |\sphericalangle CDA| = \frac{71}{98}.$$

2 pkt – zapisanie równań $d^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos \alpha$ oraz

$$d^2 = 3^2 + 5^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos \alpha$$

ALBO

– zapisanie równań $d^2 = 3^2 + 8^2 + 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos \gamma$ oraz

$$d^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos \gamma,$$

ALBO

– zapisanie równań $|AC|^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos |\sphericalangle ABC|$ oraz

$$|AC|^2 = 8^2 + 5^2 + 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos |\sphericalangle ABC|,$$

ALBO

– zapisanie równań $|AC|^2 = 3^2 + 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos |\sphericalangle CDA|$ oraz

$$|AC|^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos |\sphericalangle CDA|.$$

1 pkt – zapisanie związków $d^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos \alpha$ oraz $\alpha + \gamma = 180^\circ$

ALBO

– zapisanie związków $d^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos \gamma$ oraz $\alpha + \gamma = 180^\circ$,

ALBO

– zapisanie związków $d^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos \alpha$ oraz

$$d^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos \gamma,$$

ALBO

– zapisanie związków $|AC|^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos |\sphericalangle ABC|$ oraz

$$|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA| = 180^\circ,$$

ALBO

– zapisanie związków $|AC|^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos |\sphericalangle CDA|$ oraz

$$|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA| = 180^\circ,$$

ALBO

– zapisanie związków $|AC|^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos |\sphericalangle ABC|$ oraz

$$|AC|^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos |\sphericalangle CDA|.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla sposobu II)

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

3 pkt – obliczenie długości przekątnej AC : $|AC| = \frac{39}{7}$

ALBO

– obliczenie $\cos \delta$: $\cos \delta = \frac{13}{14}$.

2 pkt – zapisanie równań $e^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot (2 \cos^2 \delta - 1)$ oraz $\frac{1}{2}e = \cos \delta$.

1 pkt – zapisanie związków $e^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos |\angle ADC|$ oraz $|\angle ADC| = 2\delta$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla sposobu III)

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

3 pkt – obliczenie długości przekątnej AC : $|AC| = \frac{39}{7}$.

2 pkt – zapisanie, że trójkąt ABC' jest równoboczny.

1 pkt – uzasadnienie, że BD jest dwusieczną kąta ADC oraz zapisanie, że C' leży na odcinku AD .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania**Sposób I**

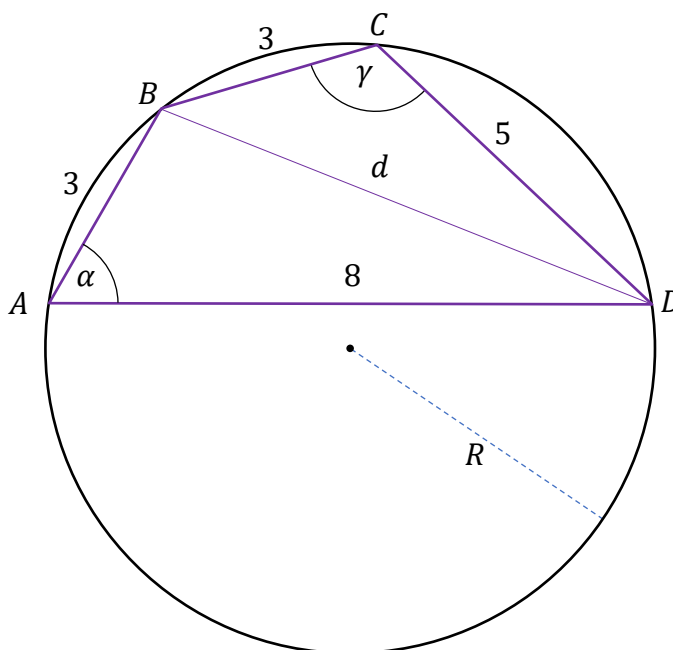
Przyjmijmy następujące oznaczenia:

R – promień okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$,

d – długość przekątnej BD ,

α – miara kąta BAD ,

γ – miara kąta BCD .



Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkątów ABD oraz BCD i otrzymujemy

$$d^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos \alpha \quad \wedge \quad d^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos \gamma$$

Stąd i z twierdzenia o czworokącie wpisanym w okrąg mamy

$$73 - 48 \cos \alpha = 34 - 30 \cos(180^\circ - \alpha)$$

Po zastosowaniu wzorów redukcyjnych otrzymujemy

$$73 - 48 \cos \alpha = 34 + 30 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}$$

Zatem $\alpha = 60^\circ$ i $d^2 = 73 - 48 \cdot \frac{1}{2} = 49$, czyli $d = 7$.

Okrąg opisany na czworokącie $ABCD$ jest jednocześnie okręgiem opisanym na trójkącie ABD . Stosując do tego trójkąta twierdzenie sinusów, otrzymujemy

$$\frac{d}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

$$R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

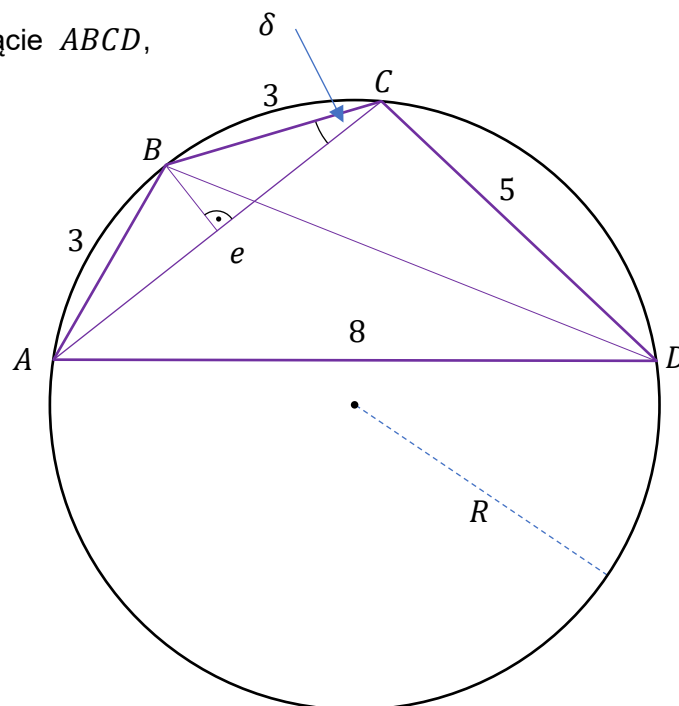
Sposób II

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

R – promień okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$,

e – długość przekątnej AC ,

δ – miara kąta ostrego ACB .



Ponieważ $|AB| = |BC|$, więc $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACB| = \delta$. Kąty wpisane ADB i ACB są oparte na tym samym łuku, więc $|\sphericalangle ADB| = \delta$. Kąty wpisane BAC i BDC są oparte na tym samym łuku, więc $|\sphericalangle BDC| = \delta$.

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta ADC oraz wzór na cosinus podwojonego argumentu i otrzymujemy:

$$e^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos(2\delta)$$

$$e^2 = 89 - 80 \cdot (2 \cos^2 \delta - 1)$$

$$e^2 = 169 - 160 \cos^2 \delta$$

Z trójkąta równoramiennego ACB otrzymujemy $\frac{1}{2}e = \cos \delta$, więc $e = 6 \cos \delta$. Zatem

$$(6 \cos \delta)^2 = 169 - 160 \cos^2 \delta$$

$$196 \cos^2 \delta = 169$$

$$\cos \delta = \frac{13}{14} \quad \vee \quad \cos \delta = -\frac{13}{14}$$

Kąt ACB w trójkącie równoramiennym ABC jest ostry, więc $\cos \delta = \frac{13}{14}$,

czyli $\sin \delta = \frac{3\sqrt{3}}{14}$.

Okrąg opisany na czworokącie $ABCD$ jest jednocześnie okręgiem opisanym na trójkącie ABC . Stosując do tego trójkąta twierdzenie sinusów, otrzymujemy

$$\frac{3}{\sin \delta} = 2R$$

$$\frac{3}{\frac{3\sqrt{3}}{14}} = 2R$$

$$R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

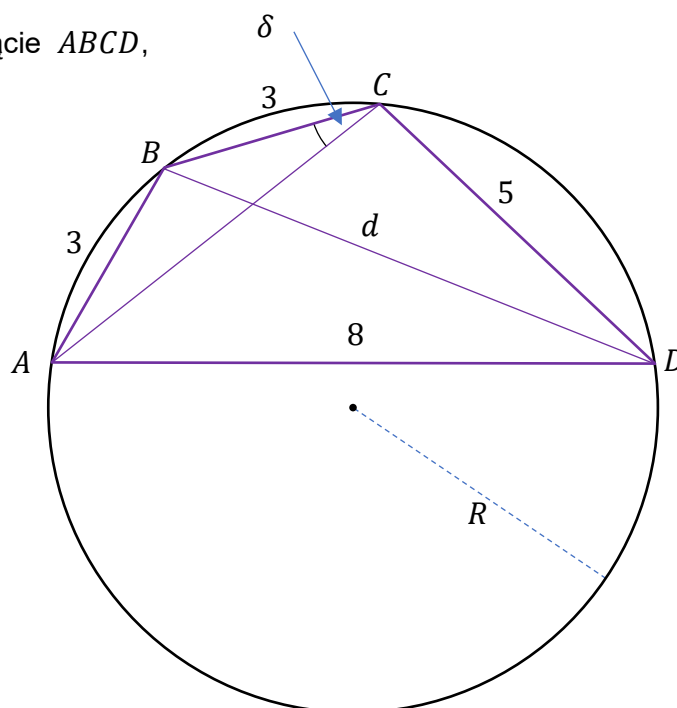
Sposób III

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

R – promień okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$,

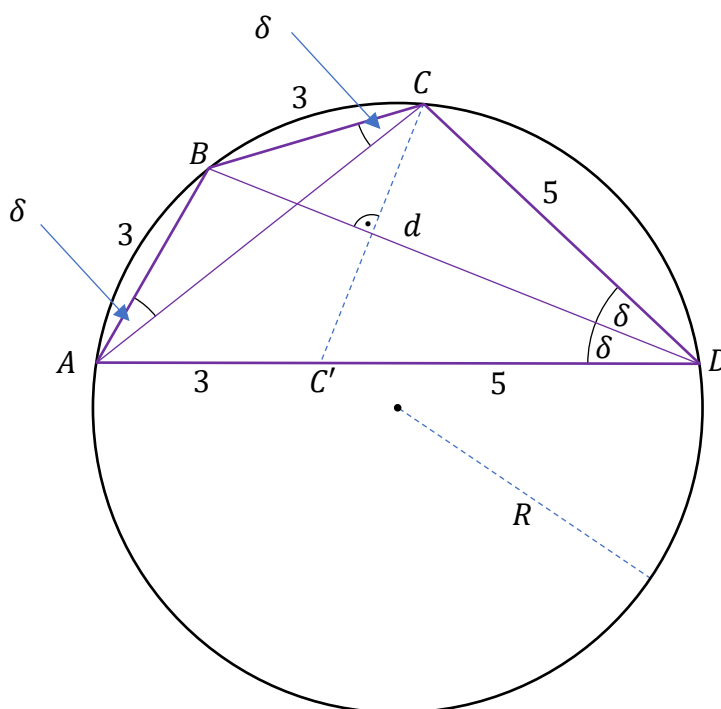
d – długość przekątnej BD ,

δ – miara kąta ostrego ACB .



Ponieważ $|AB| = |BC|$, więc $|\angle BAC| = |\angle ACB| = \delta$. Kąty wpisane ADB i ACB są parte na tym samym łuku, więc $|\angle ADB| = \delta$. Kąty wpisane BAC i BDC są oparte na tym samym łuku, więc $|\angle BDC| = \delta$. Zatem BD jest dwusieczną kąta ADC .

Niech C' będzie obrazem punktu C w symetrii osiowej względem prostej BD . Wtedy BD będzie zawierać wysokość trójkąta równoramiennego $CC'D$ i $|C'D| = |CD| = 5$, więc C' będzie leżał na odcinku AD .



Zatem czworokąt $BCDC'$ jest deltoidem i $|BC'| = |BC| = 3$.

Ponieważ $|AC'| = |AD| - |DC'| = 8 - 5 = 3$, więc trójkąt ABC' jest równoboczny, czyli $|\sphericalangle BAD| = 60^\circ$.

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta BAD i otrzymujemy:

$$d^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ$$

$$d = 7$$

Okrąg opisany na czworokącie $ABCD$ jest jednocześnie okręgiem opisanym na trójkącie ABD . Stosując do tego trójkąta twierdzenie sinusów, otrzymujemy

$$\frac{d}{\sin |\sphericalangle BAD|} = 2R$$

$$\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

$$R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

Zadanie 8. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście [...] matematycznym [...].	Zdający: XIII.R3) [...] podaje interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej.

Zasady oceniania (dla sposobów I oraz II)

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik niezależny od a, b, c :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2 \text{ (lub } f(x) = (x+2)(x^2 + x + 1)).$$

3 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą a , które wynika z warunków $f(-2) = 0$ i $f(1) = 9$ oraz $f'(-2) = 3$, np. $9 = 1 + a + (4a - 9) + (4a - 10)$ (dla sposobu I)

ALBO

– zapisanie układu dwóch niezależnych równań z dwiema niewiadomymi d oraz e , np. $3 = (-2)^2 + d \cdot (-2) + e + 0$ i $9 = (1+2)(1^2 + d + e)$ (dla sposobu II),

– zapisanie układu dwóch niezależnych równań z dwiema (spośród a, b oraz c) niewiadomymi, które wynikają z warunków $f(-2) = 0$ i $f(1) = 9$ oraz z warunku $f'(-2) = 3$, np.

$$0 = (-2)^3 + a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + 9 - 1^3 - a \cdot 1^2 - b \cdot 1 \text{ oraz}$$

$$3 = 3 \cdot (-2)^2 + 2a \cdot (-2) + b.$$

2 pkt – wyznaczenie (z warunków $f'(-2) = 3$ i $f(-2) = 0$) b oraz c w zależności od a : $b = 4a - 9$ i $c = 4a - 10$ (dla sposobu I)

ALBO

– wyznaczenie (z warunków $f'(-2) = 3$ i $f(1) = 9$) b oraz c w zależności od a : $b = 4a - 9$ i $c = 17 - 5a$ (dla sposobu II),

ALBO

– zapisanie warunku $f(1) = 9$ w postaci równania z dwiema niewiadomymi d oraz e , np. $9 = (1+2)(1^2 + d + e)$ (dla sposobu II),

ALBO

– zapisanie warunku $f'(-2) = 3$ w postaci równania z dwiema niewiadomymi d oraz e , np. $3 = (-2)^2 + d \cdot (-2) + e + 0$ (dla sposobu II),

ALBO

– zapisanie układu trzech niezależnych równań z trzema niewiadomymi a, b oraz c , które wynikają z warunków $f(-2) = 0$ i $f(1) = 9$ oraz $f'(-2) = 3$, np.

$$0 = (-2)^3 + a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \text{ oraz } 9 = 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \text{ oraz}$$

$$3 = 3 \cdot (-2)^2 + 2a \cdot (-2) + b,$$

ALBO

– obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej: 3 oraz wyznaczenie (z warunków $f(-2) = 0$ i $f(1) = 9$) b w zależności od a : $b = a$.

1 pkt – obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej: 3 (dla sposobów I oraz II),

ALBO

– zapisanie wzoru funkcji f w postaci $f(x) = (x+2)(x^2 + dx + e)$ (dla sposobu II),

ALBO

- zapisanie układu dwóch niezależnych równań z trzema niewiadomymi a , b oraz c , które wynikają z warunków $f(-2) = 0$ i $f(1) = 9$, np.

$$0 = (-2)^3 + a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \text{ oraz } 9 = 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla sposobu III)

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik niezależny od a , b , c :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2 \text{ (lub } f(x) = (x + 2)(x^2 + x + 1)).$$

3 pkt – wyznaczenie równania stycznej, np. $g(x) = 3(x + 2)$, **oraz** zapisanie związków

$$h(-2) = 0 \text{ i } h'(-2) = 0, \text{ **oraz** przedstawienie wielomianu } h \text{ w postaci}$$

$$h(x) = (x + k)(x + 2)^2$$

ALBO

- wyznaczenie wzoru wielomianu h , np. $h(x) = (x - 1)(x + 2)^2$.

2 pkt – obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej: 3 **oraz** zapisanie związków

$$h(-2) = 0 \text{ i } h'(-2) = 0$$

ALBO

- zapisanie związków $h(-2) = 0$ i $h'(-2) = 0$ **oraz** przedstawienie wielomianu h w postaci $h(x) = (x + k)(x + 2)^2$.

1 pkt – obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej: 3

ALBO

- zapisanie związków $h(-2) = 0$ oraz $h'(-2) = 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Wzór wielomianu f ma postać $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ przy pewnych $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Styczna jest prostą, na której leżą punkty $A = (-2, 0)$ i $P = (1, 9)$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy μ tej prostej: $\mu = \frac{9 - 0}{1 - (-2)} = 3$.

Korzystając z geometrycznej interpretacji pochodnej, mamy $f'(-2) = 3$.

Obliczając pochodną wielomianu f , otrzymujemy $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

Zatem $3 = 3 \cdot (-2)^2 + 2a \cdot (-2) + b$. Stąd $b = 4a - 9$.

Ponieważ $f(-2) = 0$, więc $(-2)^3 + a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 0$, czyli

$$-8 + 4a + (4a - 9) \cdot (-2) + c = 0$$

$$c = 4a - 10$$

Ponieważ $f(1) = 9$, więc $9 = 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$, czyli

$$9 = 1 + a + (4a - 9) + (4a - 10)$$

$$a = 3$$

Zatem $b = 4 \cdot 3 - 9 = 3$ oraz $c = 4 \cdot 3 - 10 = 2$.

Wielomian f jest określony wzorem $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$.

Sposób II

Zapisujemy wzór wielomianu f w postaci $f(x) = (x + 2)(x^2 + dx + e)$, gdzie $d, e \in \mathbb{R}$.
Styczna jest prostą, na której leżą punkty $A = (-2, 0)$ i $P = (1, 9)$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy μ tej prostej: $\mu = \frac{9 - 0}{1 - (-2)} = 3$.

Korzystając z geometrycznej interpretacji pochodnej, mamy $f'(-2) = 3$.

Obliczając pochodną wielomianu f , otrzymujemy

$$f'(x) = 1 \cdot (x^2 + dx + e) + (x + 2) \cdot (2x + d)$$

Zatem $3 = (-2)^2 + d \cdot (-2) + e + 0$. Stąd $e = 2d - 1$.

Ponieważ $f(1) = 9$, więc $9 = (1 + 2)(1^2 + d + e)$, czyli

$$9 = 3 \cdot (1 + d + 2d - 1)$$

$$d = 1$$

Zatem $e = 2 \cdot 1 - 1 = 1$.

Wielomian f jest określony wzorem $f(x) = (x + 2)(x^2 + x + 1)$.

Sposób III

Niech $y = g(x)$ będzie równaniem stycznej do wykresu funkcji f w punkcie A . Niech h będzie wielomianem trzeciego stopnia określonym następująco: $h(x) = f(x) - g(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Punkt A leży na wykresach funkcji f oraz g , więc $f(-2) = g(-2)$, czyli $h(-2) = 0$.

Korzystając z geometrycznej interpretacji pochodnej, mamy $f'(-2) = g'(-2)$, więc $h'(-2) = f'(-2) - g'(-2) = 0$. Zatem liczba (-2) jest pierwiastkiem podwójnym wielomianu h , czyli $h(x) = (x + k)(x + 2)^2$ przy pewnym $k \in \mathbb{R}$.

Punkt P leży na wykresach funkcji f oraz g , więc $f(1) = 9$ i $g(1) = 9$. Stąd $h(1) = f(1) - g(1) = 0$. Zatem

$$h(1) = (1 + k)(1 + 2)^2$$

$$0 = (1 + k) \cdot 9$$

$$k = -1$$

czyli $h(x) = (x - 1)(x + 2)^2$.

Styczna jest prostą, na której leżą punkty $A = (-2, 0)$ i $P = (1, 9)$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy μ tej prostej: $\mu = \frac{9 - 0}{1 - (-2)} = 3$. Zatem

$$g(x) = 3(x + 2).$$

Wyznaczamy wzór funkcji f :

$$\begin{aligned} f(x) &= h(x) + g(x) = (x - 1)(x + 2)^2 + 3(x + 2) = (x + 2)(x^2 + 2x - x - 2 + 3) = \\ &= (x + 2)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Zadanie 9. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.R2) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

Zasady oceniania

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{245}{4}$.

4 pkt – obliczenie b_1 oraz q : $b_1 = 35$ oraz $q = \frac{3}{7}$.

3 pkt – obliczenie różnicy ciągu (a_n) : $r = 4$ **oraz** odrzucenie przypadku $r = -5$.

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą r (albo a_1), np.

$$15 + 9r = (15 - 3r)(15 + 2r - 6),$$

$$a_1 + 14 \cdot \frac{15 - a_1}{5} = \left(a_1 + 2 \cdot \frac{15 - a_1}{5}\right) \cdot \left(a_1 + 7 \cdot \frac{15 - a_1}{5} - 6\right).$$

1 pkt – zapisanie układu dwóch niezależnych równań z niewiadomymi a_1 oraz r , np.

$$a_1 + 14r = (a_1 + 2r) \cdot (a_1 + 7r - 6) \text{ i } a_1 + 5r = 15.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Zdający może odrzucić otrzymaną wartość $r = -5$ bez komentarza.

2. Jeżeli zdający nie odrzuci wartości $q = -\frac{3}{2}$ i zastosuje wzór na sumę szeregu

geometrycznego dla $q = -\frac{3}{2}$, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za zapisanie układu równań, 1 punkt za zapisanie równania z jedną niewiadomą, 1 punkt za obliczenie $q = \frac{3}{7}$ oraz sumy dla $q = \frac{3}{7}$).

Przykładowe pełne rozwiązanie

Oznaczmy przez r różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) , natomiast przez q – iloraz ciągu geometrycznego (b_n) .

Ponieważ $a_6 = 15$ oraz $a_{15} = a_3 \cdot (a_8 - 6)$, więc stąd i z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$a_6 + 9r = (a_6 - 3r) \cdot (a_6 + 2r - 6)$$

$$15 + 9r = (15 - 3r)(15 + 2r - 6)$$

$$15 + 9r = (15 - 3r)(2r + 9)$$

$$6r^2 + 6r - 120 = 0$$

$$r^2 + r - 20 = 0$$

$$r = -5 \vee r = 4$$

Ciąg (a_n) jest rosnący, więc $r = 4$.

Zatem $b_1 = a_6 + 5r = 15 + 5 \cdot 4 = 35$, $b_2 = 15$ oraz $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{3}{7}$.

Ponieważ $\left|\frac{3}{7}\right| < 1$, więc suma S wszystkich wyrazów ciągu (b_n) istnieje i jest równa

$$S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{35}{1 - \frac{3}{7}} = \frac{245}{4}$$

Zadanie 10. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: X.5) oblicza objętości i pola graniastosłupów, ostrosłupów [...]. X.R2) wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych [...].

Zasady oceniania (dla sposobów I – III)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 6.

4 pkt – wyznaczenie w zależności od x czterech spośród wielkości 1)-4) określonych w zasadach oceniania za 1 punkt

ALBO

– wyznaczenie pola powierzchni całkowitej ostrosłupa w zależności od x : $126\sqrt{3}x^2$.

3 pkt – wyznaczenie w zależności od x trzech spośród wielkości 1)-4) określonych w zasadach oceniania za 1 punkt.

2 pkt – wyznaczenie w zależności od x dwóch spośród wielkości 1)-4) określonych w zasadach oceniania za 1 punkt.

1 pkt – wyznaczenie w zależności od x jednej z poniższych wielkości 1)-4):

1) długości wysokości ściany bocznej, np. $|BE| = 5\sqrt{3}x$, $|DF| = 5\sqrt{7}x$,

2) długości krawędzi podstawy ABC : $|BC| = 2\sqrt{21}x$,

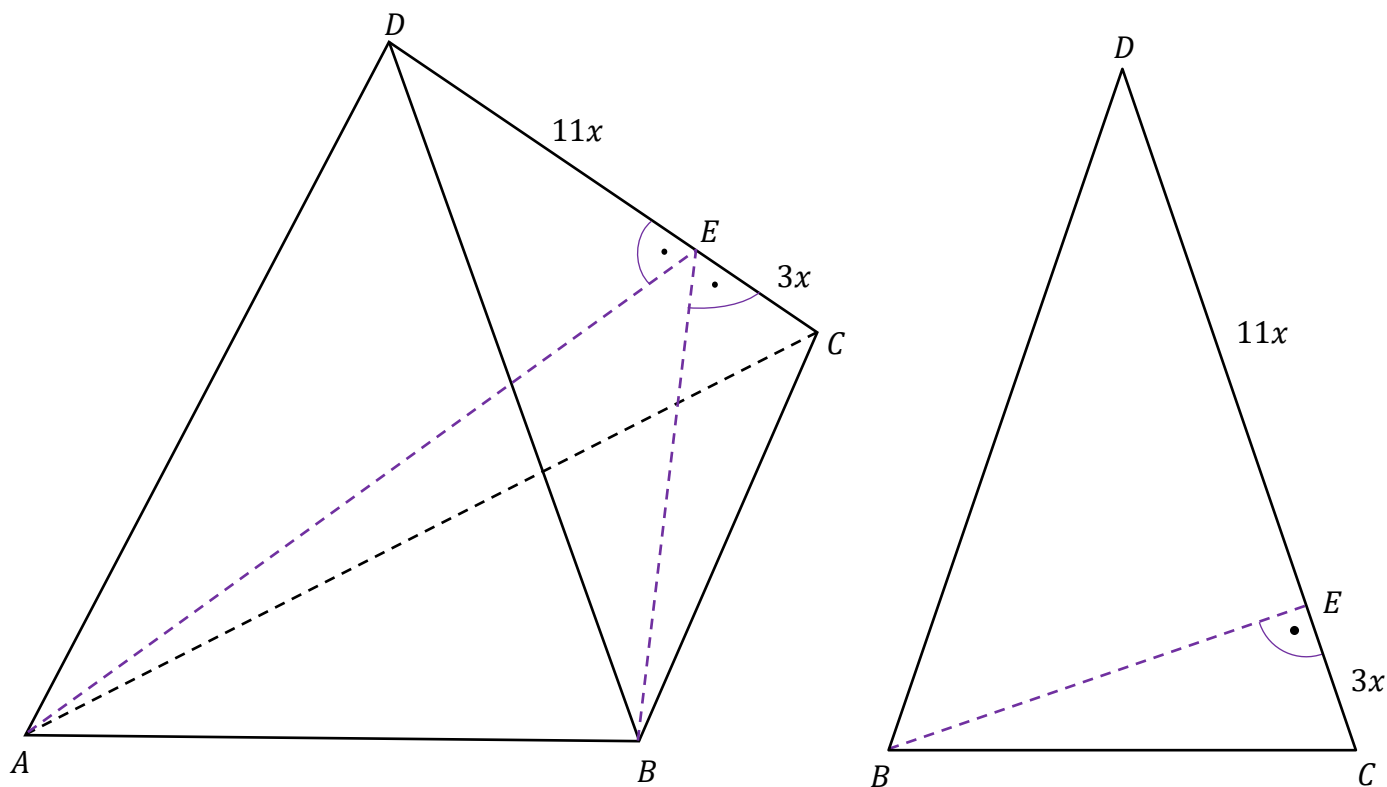
3) pola podstawy ABC : $21\sqrt{3}x^2$,

4) pola ściany bocznej (lub pola powierzchni bocznej): $35\sqrt{3}x^2$ (lub $105\sqrt{3}x^2$).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania**Sposób I**

Ponieważ $\frac{|CE|}{|ED|} = \frac{3}{11}$, więc $|CE| = 3x$ oraz $|ED| = 11x$ przy pewnym $x > 0$ (zobacz rysunki).



Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta BED i otrzymujemy:

$$|BE|^2 + |ED|^2 = |BD|^2$$

$$|BE|^2 + (11x)^2 = (14x)^2$$

$$|BE| = 5\sqrt{3}x$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta BCE i otrzymujemy:

$$|BC|^2 = |CE|^2 + |BE|^2$$

$$|BC|^2 = (3x)^2 + (5\sqrt{3}x)^2$$

$$|BC| = 2\sqrt{21}x$$

Wyznaczamy pole P_b powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego $ABCD$:

$$P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot |BE| = \frac{3}{2} \cdot 14x \cdot 5\sqrt{3}x = 105\sqrt{3}x^2$$

Wyznaczamy pole P_p podstawy ABC :

$$P_p = \frac{|BC|^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{(2\sqrt{21}x)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 21\sqrt{3}x^2$$

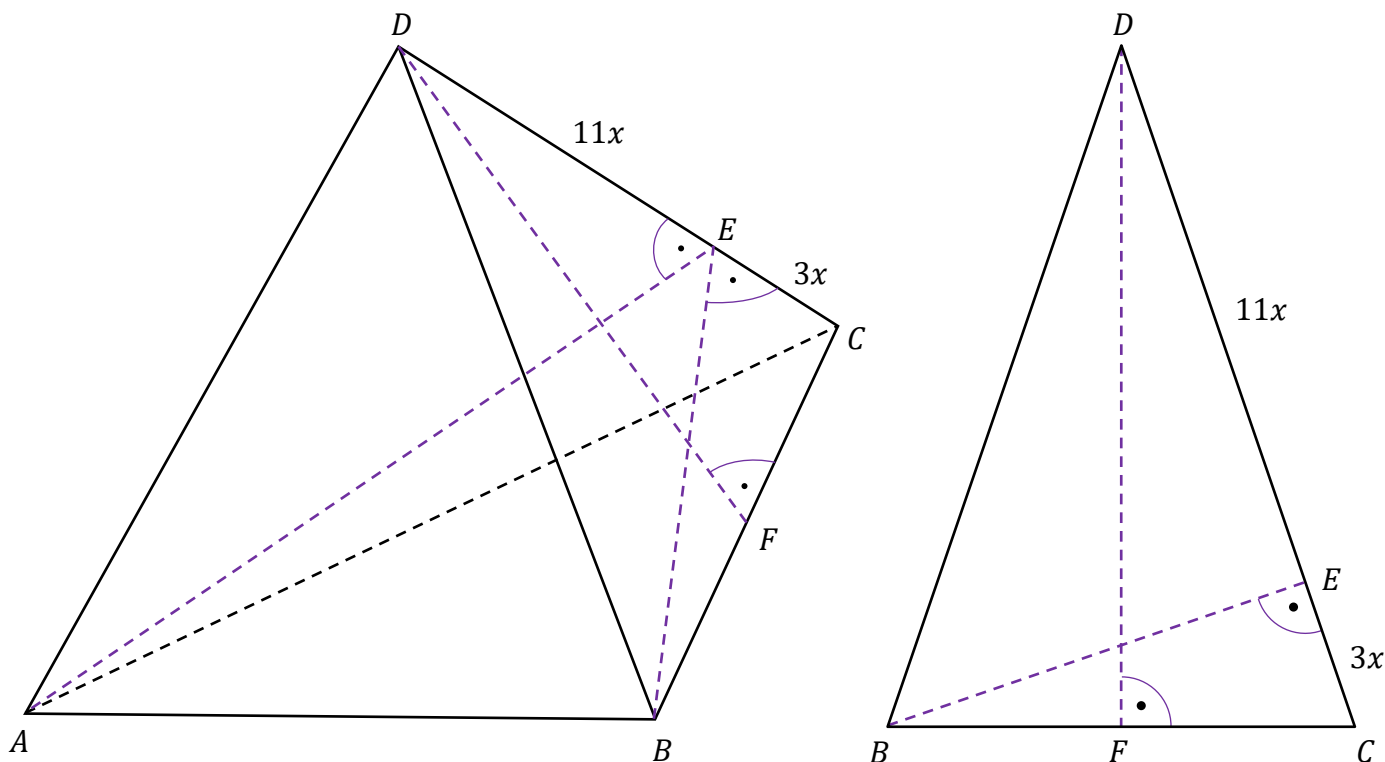
Obliczamy stosunek η pola powierzchni całkowitej ostrosłupa do pola podstawy ABC ostrosłupa:

$$\eta = \frac{P_b + P_p}{P_p} = \frac{105\sqrt{3}x^2 + 21\sqrt{3}x^2}{21\sqrt{3}x^2} = 6$$

Sposób II

Ponieważ $\frac{|CE|}{|ED|} = \frac{3}{11}$, więc $|CE| = 3x$ oraz $|ED| = 11x$ przy pewnym $x > 0$.

Niech F będzie spodkiem wysokości ściany bocznej BCD poprowadzonej z wierzchołka D na krawędź BC (zobacz rysunki).



Z podobieństwa trójkątów prostokątnych CEB oraz CFD otrzymujemy:

$$\frac{|EC|}{|BC|} = \frac{|FC|}{|CD|}$$

$$\frac{3x}{|BC|} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |BC|}{14x}$$

$$|BC| = 2\sqrt{21}x$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta CDF i otrzymujemy:

$$|CD|^2 = |DF|^2 + |FC|^2$$

$$(14x)^2 = |DF|^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{21}x\right)^2$$

$$|DF| = 5\sqrt{7}x$$

Wyznaczamy pole P_b powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego $ABCD$:

$$P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |DF| = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{21}x \cdot 5\sqrt{7}x = 105\sqrt{3}x^2$$

Wyznaczamy pole P_p podstawy ABC :

$$P_p = \frac{|BC|^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{(2\sqrt{21}x)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 21\sqrt{3}x^2$$

Obliczamy stosunek η pola powierzchni całkowitej ostrosłupa do pola podstawy ABC ostrosłupa:

$$\eta = \frac{P_b + P_p}{P_p} = \frac{105\sqrt{3}x^2 + 21\sqrt{3}x^2}{21\sqrt{3}x^2} = 6$$

Sposób III

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

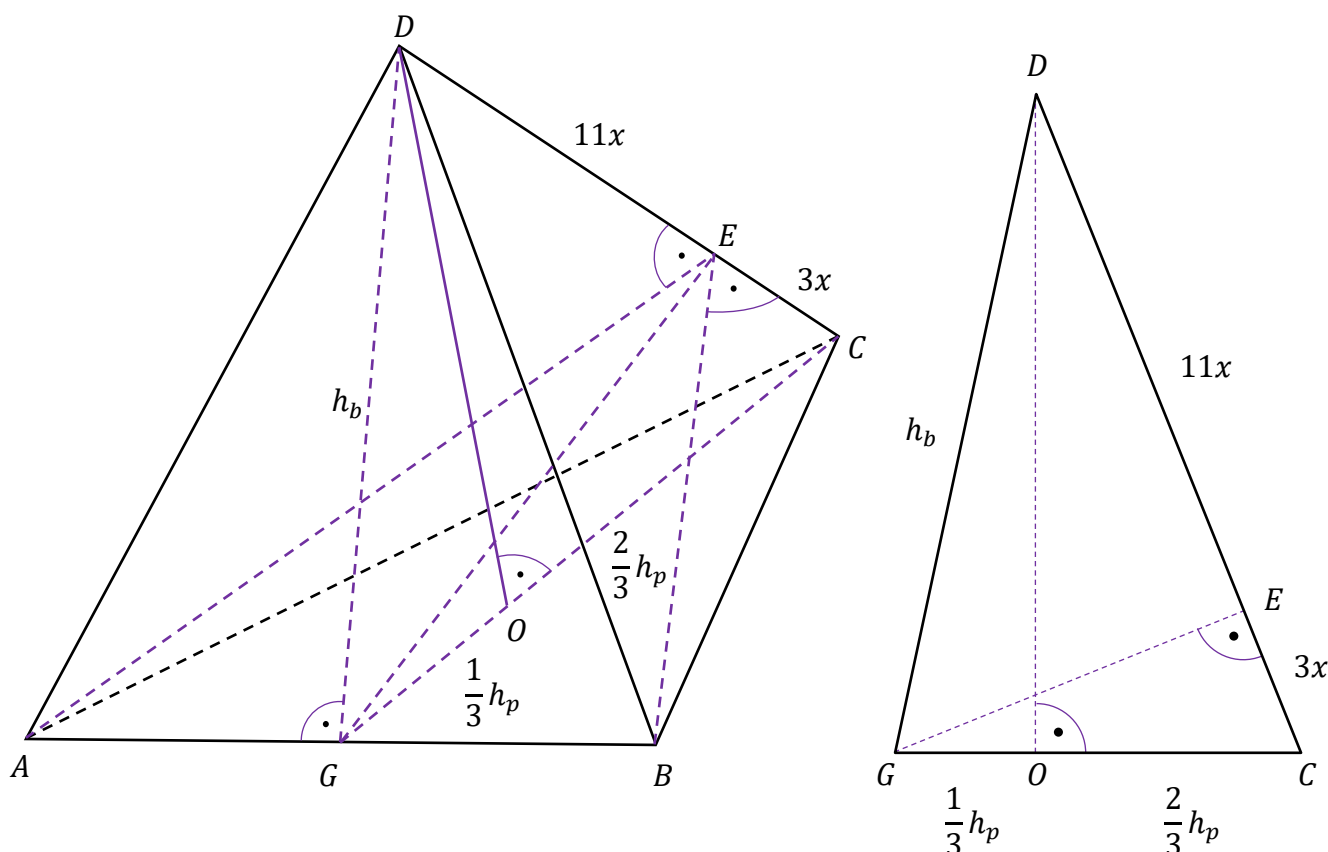
O – spodek wysokości ostrosłupa poprowadzonej z wierzchołka D na podstawę ABC ,

G – środek krawędzi AB ,

a – długość krawędzi podstawy ABC ,

h_b – wysokość ściany bocznej poprowadzonej z wierzchołka D ,

h_p – wysokość podstawy ABC (zobacz rysunki).



Ponieważ $\frac{|CE|}{|ED|} = \frac{3}{11}$, więc $|CE| = 3x$ oraz $|ED| = 11x$ przy pewnym $x > 0$.

Ostrosłup jest prawidłowy, więc punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie równobocznym ABC i jest jednocześnie środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Zatem

$$|OC| = \frac{2}{3}h_p = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ oraz } |OG| = \frac{1}{3}h_p = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Z podobieństwa trójkątów DOC i GEC mamy

$$\frac{|EC|}{|GC|} = \frac{|OC|}{|DC|}$$

$$\frac{3x}{h_p} = \frac{a\sqrt{3}}{14x}$$

$$\frac{\frac{3x}{a\sqrt{3}}}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{14x}$$

$$a = 2\sqrt{21}x$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta GBD i otrzymujemy:

$$|BD|^2 = |DG|^2 + |GB|^2$$

$$(14x)^2 = h_b^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{21}x\right)^2$$

$$h_b = 5\sqrt{7}x$$

Wyznaczamy pole P_b powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego $ABCD$:

$$P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_b = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{21}x \cdot 5\sqrt{7}x = 105\sqrt{3}x^2$$

Wyznaczamy pole P_p podstawy ABC :

$$P_p = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{(2\sqrt{21}x)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 21\sqrt{3}x^2$$

Obliczamy stosunek η pola powierzchni całkowitej ostrosłupa do pola podstawy ABC ostrosłupa:

$$\eta = \frac{P_b + P_p}{P_p} = \frac{105\sqrt{3}x^2 + 21\sqrt{3}x^2}{21\sqrt{3}x^2} = 6$$

Zadanie 11. (0–6)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IX.R1) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu; IX.R4) wyznacza równanie prostej prostopadłej do zadanej prostej i prostej stycznej do zadanego okręgu. VIII.4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombch i trapezach.

Zasady oceniania (dla sposobów I–III)

6 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$.

5 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą – pierwszą lub drugą współrzędną punktu S , np.:

$$\left[x_S - \left(\frac{3}{5}x_S + \frac{8}{5} \right) \right]^2 + \left[-x_S - 3 - \left(-\frac{6}{5}x_S - \frac{11}{5} \right) \right]^2 = x_S^2 + (-x_S - 3)^2$$

(ze związków $r = |ST|$ oraz $r = |SO|$),

$$\begin{aligned} (x_S - 4)^2 + (-x_S - 3 - (-7))^2 &= \\ &= \left(\frac{3}{5}x_S + \frac{8}{5} - 4 \right)^2 + \left(-\frac{6}{5}x_S - \frac{11}{5} - (-7) \right)^2 + x_S^2 + (-x_S - 3)^2 \end{aligned}$$

(ze związków $|BS|^2 = |BT|^2 + r^2$ oraz $r = |SO|$).

4 pkt – wyznaczenie równania dwusiecznej kąta ABC równoległoboku: $y = -x - 3$

ALBO

– zapisanie współrzędnych środka S za pomocą jednej niewiadomej, np.

$$S = (x_S, -x_S - 3).$$

3 pkt – obliczenie współrzędnych punktu E : $E = (-2, 5)$

ALBO

– obliczenie współrzędnych takich punktów P_1 oraz P_2 , że P_1 leży na półprostej $\overrightarrow{BA}$ oraz P_2 leży na półprostej $\overrightarrow{BC}$ oraz $|BP_1| = |BP_2|$,

ALBO

– obliczenie tangensa kąta α : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$ (dla sposobu II),

ALBO

– zapisanie związku $\frac{|\frac{1}{2}x_S + y_S + 5|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{|2x_S + y_S - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$ (dla sposobu III).

2 pkt – wyznaczenie równania prostej BC oraz obliczenie długości odcinka AB :

$$y = -2x + 1 \text{ oraz } |AB| = \sqrt{180}$$

ALBO

– wyznaczenie równania prostej AB oraz obliczenie długości odcinka BC :

$$y = -\frac{1}{2}x - 5 \text{ oraz } |BC| = \sqrt{75},$$

ALBO

– obliczenie współczynników kierunkowych prostych AB oraz BC : $a_{AB} = -\frac{1}{2}$ oraz

$$a_{BC} = -2 \text{ (dla sposobu II),}$$

ALBO

– wyznaczenie równań prostych AB oraz BC , np. $y = -\frac{1}{2}x - 5$ oraz $y = -2x + 1$ (dla sposobu III).

1 pkt – obliczenie współrzędnych wierzchołka B : $B = (4, -7)$

ALBO

– obliczenie współrzędnych wierzchołka C : $C = (-1, 3)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I (poprzez trójkąt równoramienny)

Środek symetrii równoległoboku jest punktem przecięcia przekątnych równoległoboku.

Zatem punkt M jest środkiem odcinka AC oraz środkiem odcinka BD . Stosujemy wzory na współrzędne środka odcinka i obliczamy współrzędne wierzchołka B :

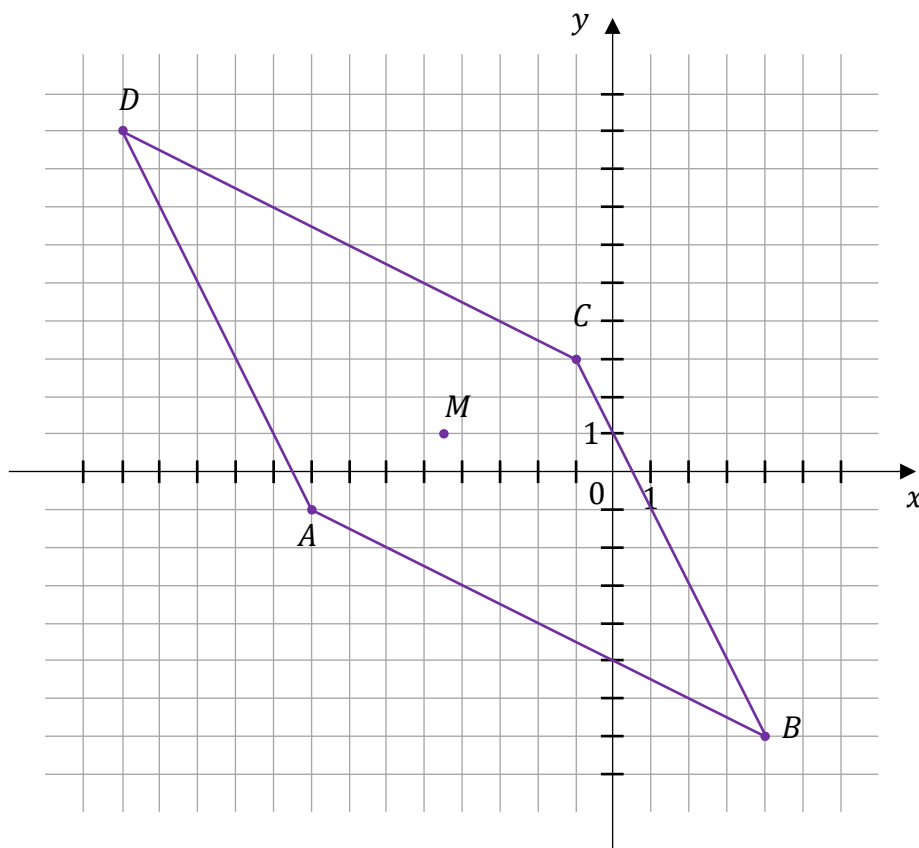
$$\frac{x_B + (-13)}{2} = -\frac{9}{2} \wedge \frac{y_B + 9}{2} = 1$$

$$B = (4, -7)$$

Stosujemy wzory na współrzędne środka odcinka i obliczamy współrzędne wierzchołka C :

$$\frac{-8 + x_C}{2} = -\frac{9}{2} \wedge \frac{-1 + y_C}{2} = 1$$

$$C = (-1, 3)$$



Obliczamy $|AB|$: $|AB| = \sqrt{(4 - (-8))^2 + (-7 - (-1))^2} = \sqrt{180}$.

Wyznaczamy równanie prostej BC : $y = \frac{3 - (-7)}{-1 - 4} \cdot (x - 4) + (-7)$, czyli $y = -2x + 1$.

Niech E będzie punktem na boku BC równoległoboku (lub na przedłużeniu tego boku w stronę C) takim, że $|BE| = |BA|$. Obliczamy współrzędne punktu E :

$$(x - 4)^2 + (y + 7)^2 = 180 \quad \wedge \quad y = -2x + 1$$

$$(x - 4)^2 + (-2x + 7 + 1)^2 = 180 \quad \wedge \quad y = -2x + 1$$

$$5x^2 - 40x - 100 = 0 \quad \wedge \quad y = -2x + 1$$

$$(x, y) = (-2, 5) \quad \vee \quad (x, y) = (10, -19)$$

Punkt $(10, -19)$ nie spełnia warunku narzuconego na E (bowiem $10 > x_B$), więc $E = (-2, 5)$.

Okrąg $\mathcal{O}$ jest styczny do prostych AB oraz BC , więc jego środek S leży na dwusiecznej kąta ABC równoległoboku $ABCD$. Ponieważ trójkąt ABE jest równoramienny, więc środek F odcinka AE leży na prostej BS i odcinek AE jest prostopadły do prostej BS .

Obliczamy współrzędne punktu F :

$$x_F = \frac{x_A + x_E}{2} = \frac{-8 - 2}{2} = -5 \quad \wedge \quad y_F = \frac{y_A + y_E}{2} = \frac{-1 + 5}{2} = 2$$

Wyznaczamy równanie prostej BS : $y = \frac{-7-2}{4-(-5)} \cdot (x-4) + (-7)$, czyli $y = -x - 3$.

Zatem $S = (x_S, -x_S - 3)$.

Niech T będzie punktem styczności okręgu $\mathcal{O}$ z prostą BC .

Wyznaczamy równanie prostej ST : $y = \frac{1}{2} \cdot (x - x_S) + (-x_S - 3)$.

Wyznaczamy współrzędne punktu T :

$$y = \frac{1}{2} \cdot (x - x_S) + (-x_S - 3) \wedge y = -2x + 1$$

$$-2x + 1 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x_S - 3 \wedge y = -2x + 1$$

$$x = \frac{3}{5}x_S + \frac{8}{5} \wedge y = -\frac{6}{5}x_S - \frac{11}{5}$$

czyli $T = \left(\frac{3}{5}x_S + \frac{8}{5}, -\frac{6}{5}x_S - \frac{11}{5}\right)$.

Oznaczmy przez r promień okręgu $\mathcal{O}$. Ponieważ okrąg przechodzi przez początek układu współrzędnych, więc $r = \sqrt{x_S^2 + (-x_S - 3)^2}$. Jednocześnie

$$r = |ST| = \sqrt{\left[x_S - \left(\frac{3}{5}x_S + \frac{8}{5}\right)\right]^2 + \left[-x_S - 3 - \left(-\frac{6}{5}x_S - \frac{11}{5}\right)\right]^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}x_S - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}x_S - \frac{4}{5}\right)^2}$$

więc

$$x_S^2 + (-x_S - 3)^2 = \left(\frac{2}{5}x_S - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}x_S - \frac{4}{5}\right)^2$$

Stąd otrzymujemy

$$x_S^2 + (x_S + 3)^2 = \frac{4}{25}(x_S - 4)^2 + \frac{1}{25}(x_S - 4)^2$$

$$2x_S^2 + 6x_S + 9 = \frac{1}{5}(x_S - 4)^2$$

$$9x_S^2 + 38x_S + 29 = 0$$

$$x_S = -1 \vee x_S = -\frac{29}{9}$$

Ponieważ $-\frac{29}{9} < -3$, a druga współrzędna punktu S ma być ujemna, więc $x_S = -1$, czyli

$S = (-1, -2)$. Obliczamy promień okręgu: $r = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.

Okrąg $\mathcal{O}$ ma równanie $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$.

Sposób II (poprzez współczynniki kierunkowe)

Środek symetrii równoległoboku jest punktem przecięcia przekątnych równoległoboku.

Zatem punkt M jest środkiem odcinka AC oraz środkiem odcinka BD . Stosujemy wzory na współrzędne środka odcinka i obliczamy współrzędne wierzchołka B :

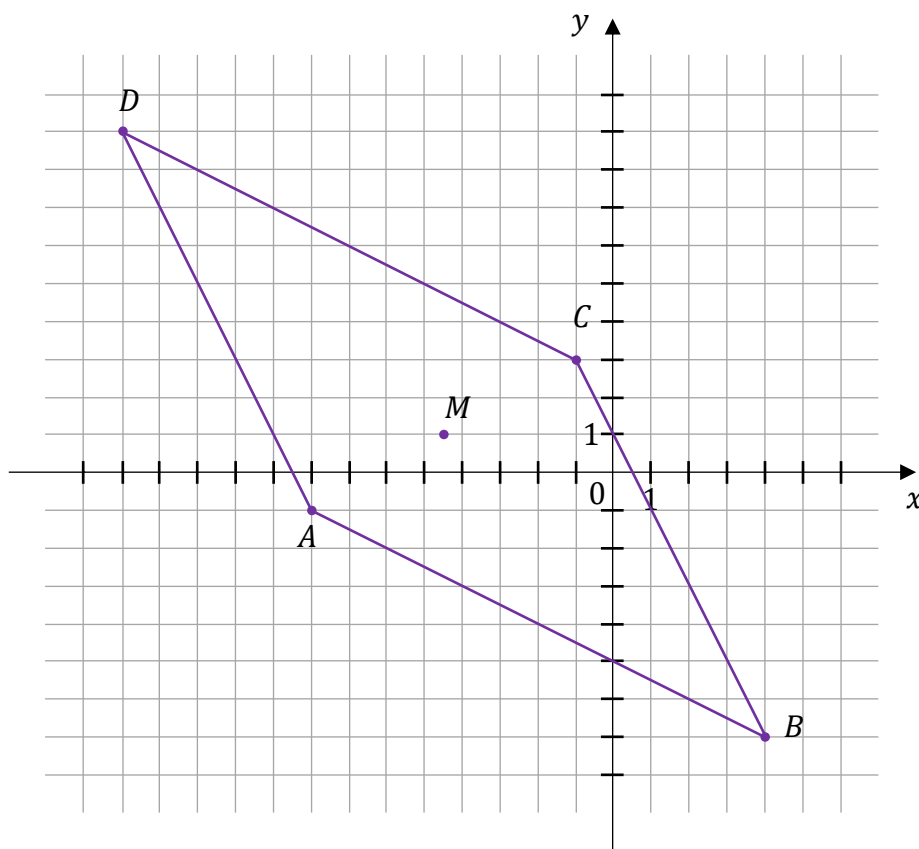
$$\frac{x_B + (-13)}{2} = -\frac{9}{2} \wedge \frac{y_B + 9}{2} = 1$$

$$B = (4, -7)$$

Stosujemy wzory na współrzędne środka odcinka i obliczamy współrzędne wierzchołka C :

$$\frac{-8 + x_C}{2} = -\frac{9}{2} \wedge \frac{-1 + y_C}{2} = 1$$

$$C = (-1, 3)$$



Obliczamy współczynnik kierunkowy a_{AB} prostej AB : $a_{AB} = \frac{-7 - (-1)}{4 - (-8)} = -\frac{1}{2}$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy a_{BC} prostej BC : $a_{BC} = \frac{3 - (-7)}{-1 - 4} = -2$.

Oznaczmy miarę kąta ABC równoległoboku przez 2α . Obliczamy tangens tego kąta, korzystając z interpretacji geometrycznej współczynnika kierunkowego prostej oraz wzoru na tangens różnicy kątów:

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{a_{AB} - a_{BC}}{1 + a_{AB} \cdot a_{BC}}$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{-\frac{1}{2} - (-2)}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2)} = \frac{3}{4}$$

Korzystamy ze wzoru na tangens podwojonego kąta i otrzymujemy

$$\frac{3}{4} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$3 \operatorname{tg}^2 \alpha + 8 \operatorname{tg} \alpha - 3 = 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-8 - 10}{6} = -3 \quad \vee \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{-8 + 10}{6} = \frac{1}{3}$$

Ponieważ kąt ABC równoległobku jest ostry, więc $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$.

Oznaczmy środek okręgu $\mathcal{O}$ przez S . Obliczamy współczynnik kierunkowy a_{BS} prostej BS , korzystając z interpretacji geometrycznej współczynnika kierunkowego prostej oraz wzoru na tangens sumy kątów:

$$a_{BS} = \frac{a_{BC} + \operatorname{tg} \alpha}{1 - a_{BC} \cdot \operatorname{tg} \alpha}$$

$$a_{BS} = \frac{-2 + \frac{1}{3}}{1 - (-2) \cdot \frac{1}{3}} = -1$$

Wyznaczamy równanie prostej BS : $y = -1 \cdot (x - 4) + (-7)$, czyli $y = -x - 3$. Zatem $S = (x_S, -x_S - 3)$.

Niech r będzie długością promienia okręgu $\mathcal{O}$. Ponieważ okrąg przechodzi przez początek układu współrzędnych, więc $r = \sqrt{x_S^2 + (-x_S - 3)^2}$. Ponadto

$$\frac{r}{|BS|} = \sin \alpha$$

więc

$$\frac{r}{|BS|} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$|BS|^2 = r^2 \cdot 10$$

$$(x_S - 4)^2 + (-x_S - 3 - (-7))^2 = r^2 \cdot 10$$

$$(x_S - 4)^2 + (-x_S + 4)^2 = [x_S^2 + (-x_S - 3)^2] \cdot 10$$

$$18x_S^2 + 76x_S + 58 = 0$$

$$9x_S^2 + 38x_S + 29 = 0$$

$$x_S = -1 \vee x_S = -\frac{29}{9}$$

Ponieważ $-\frac{29}{9} < -3$, a druga współrzędna punktu S ma być ujemna, więc $x_S = -1$, czyli

$S = (-1, -2)$. Obliczamy promień okręgu: $r = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.

Okrąg $\mathcal{O}$ ma równanie $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 5$.

Sposób III (z własności dwusiecznej)

Środek symetrii równoległoboku jest punktem przecięcia przekątnych równoległoboku.

Zatem punkt M jest środkiem odcinka AC oraz środkiem odcinka BD . Stosujemy wzory na współrzędne środka odcinka i obliczamy współrzędne wierzchołka B :

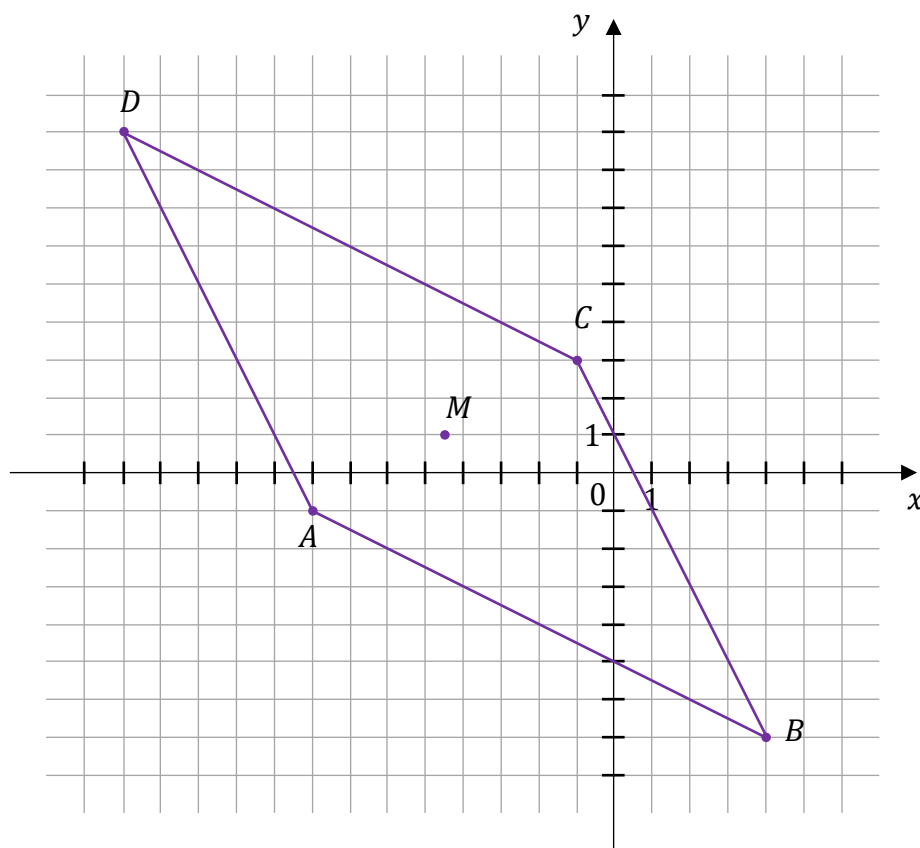
$$\frac{x_B + (-13)}{2} = -\frac{9}{2} \wedge \frac{y_B + 9}{2} = 1$$

$$B = (4, -7)$$

Stosujemy wzory na współrzędne środka odcinka i obliczamy współrzędne wierzchołka C :

$$\frac{-8 + x_C}{2} = -\frac{9}{2} \wedge \frac{-1 + y_C}{2} = 1$$

$$C = (-1, 3)$$



Wyznaczamy równanie prostej AB : $y = \frac{-7-(-1)}{4-(-8)} \cdot (x+8) + (-1)$, czyli $y = -\frac{1}{2}x - 5$.

Wyznaczamy równanie prostej BC : $y = \frac{3-(-7)}{-1-4} \cdot (x-4) + (-7)$, czyli $y = -2x + 1$.

Niech $S = (x_S, y_S)$ będzie środkiem okręgu $\mathcal{O}$, a r – długością promienia okręgu $\mathcal{O}$.

Punkt S leży na dwusiecznej kąta ABC równoległoboku $ABCD$, więc odległość punktu S od prostej AB jest równa odległości punktu S od prostej BC . Zatem

$$\frac{|\frac{1}{2}x_S + y_S + 5|}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 1^2}} = \frac{|2x_S + y_S - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

$$|x_S + 2y_S + 10| = |2x_S + y_S - 1|$$

$$x_S + 2y_S + 10 = 2x_S + y_S - 1 \quad \vee \quad x_S + 2y_S + 10 = -2x_S - y_S + 1$$

$$y_S = x_S - 11 \quad \vee \quad y_S = -x_S - 3$$

Ponieważ punkt $(0, 0)$ leży w równoległoboku $ABCD$, a prosta $y = x - 11$ ma tylko jeden punkt wspólny z równoległobokiem, więc dwusieczna kąta ABC ma równanie $y = -x - 3$.

Stąd $y_S = -x_S - 3$ oraz

$$r = \frac{|2x_S + y_S - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|2x_S - x_S - 3 - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|x_S - 4|}{\sqrt{5}}$$

Okrąg przechodzi przez początek układu współrzędnych, więc $r = \sqrt{x_S^2 + (-x_S - 3)^2}$.

Wobec powyższego otrzymujemy

$$\sqrt{x_S^2 + (-x_S - 3)^2} = \frac{|x_S - 4|}{\sqrt{5}}$$

$$x_S^2 + (x_S + 3)^2 = \frac{(x_S - 4)^2}{5}$$

$$9x_S^2 + 38x_S + 29 = 0$$

$$x_S = -1 \quad \vee \quad x_S = -\frac{29}{9}$$

Ponieważ $-\frac{29}{9} < -3$, a druga współrzędna punktu S ma być ujemna, więc $x_S = -1$, czyli

$S = (-1, -2)$. Obliczamy promień okręgu: $r = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.

Okrąg $\mathcal{O}$ ma równanie $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 5$.

Zadanie 12.1. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: X.5) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów [...].

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – wyznaczenie wysokości graniastosłupa w zależności od długości krawędzi podstawy

$$\text{graniastosłupa, np. } H = \frac{48\sqrt{3} - a^2 \cdot \sqrt{3}}{6a}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Rozpatrzmy dowolny z rozważanych graniastosłupów. Oznaczmy przez H jego wysokość.

Pole powierzchni całkowitej tej bryły jest równe $24\sqrt{3}$, więc

$$24\sqrt{3} = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3aH$$

Stąd

$$H = \frac{48\sqrt{3} - a^2 \cdot \sqrt{3}}{6a}$$

Zatem objętość V graniastosłupa jest równa

$$V = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{48\sqrt{3} - a^2 \cdot \sqrt{3}}{6a} = 6a - \frac{1}{8}a^3$$

To należało wykazać.

Zadanie 12.2. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XIII.R4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu [...]; XIII.R5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji; XIII.R6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

- 4 pkt – uzasadnienie, że funkcja V przyjmuje wartość największą dla $a = 4$ oraz obliczenie $V(4) = 16$.
- 3 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja V przyjmuje wartość największą dla $a = 4$.
- 2 pkt – obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji V : $a = 4$.
- 1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji V , np. $V'(a) = 6 - \frac{3}{8}a^2$.
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja osiąga wartość największą dla wyznaczonej wartości a , przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej
ORAZ:
– opisuje (słownie lub graficznie – np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji V
LUB
– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości a funkcja V ma maksimum lokalne i jest to jednocześnie jej największa wartość,
LUB
– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości a funkcja V ma maksimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.
Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku (np. znakami „+” i „-”) znak pochodnej.
2. Jeżeli zdający przedstawi niepełne uzasadnienie, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za poprawne wyznaczenie pochodnej, 1 punkt za obliczenie miejsca zerowego pochodnej, 1 punkt za obliczenie długości krawędzi podstawy oraz objętości graniastopuła o największej objętości).
3. Jeżeli zdający nie uzasadnia istnienia największej wartości funkcji, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za poprawne wyznaczenie pochodnej, 1 punkt za obliczenie miejsca zerowego pochodnej).

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy argument, dla którego funkcja V określona wzorem $V(a) = 6a - \frac{1}{8}a^3$ dla $a \in (0, 4\sqrt{3})$ osiąga wartość największą.

Wyznaczamy pochodną funkcji V : $V'(a) = 6 - \frac{3}{8}a^2$ dla $a \in (0, 4\sqrt{3})$.

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji V :

$$V'(a) = 0$$

$$6 - \frac{3}{8}a^2 = 0$$

$$a = -4 \notin (0, 4\sqrt{3}) \quad \vee \quad a = 4 \in (0, 4\sqrt{3})$$

Badamy znak pochodnej:

$$V'(a) < 0$$

$$6 - \frac{3}{8}a^2 < 0 \quad \wedge \quad a \in (0, 4\sqrt{3})$$

$$a \in (4, 4\sqrt{3})$$

więc $V'(a) < 0$ dla $a \in (4, 4\sqrt{3})$ oraz $V'(h) > 0$ dla $a \in (0, 4)$.

Zatem funkcja V jest rosnąca w przedziale $(0, 4]$ i malejąca w przedziale $[4, 4\sqrt{3})$.

Stąd funkcja V osiąga wartość największą dla $a = 4$. Wtedy

$$V(4) = 6 \cdot 4 - \frac{1}{8} \cdot 4^3 = 16$$

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

PESEL

Miejsce na naklejkę.

Sprawdź, czy kod na naklejce to
E-100.

Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny

Formuła 2015

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Symbol arkusza

EMAP-R0-**100**-2506

DATA: **6 czerwca 2025 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

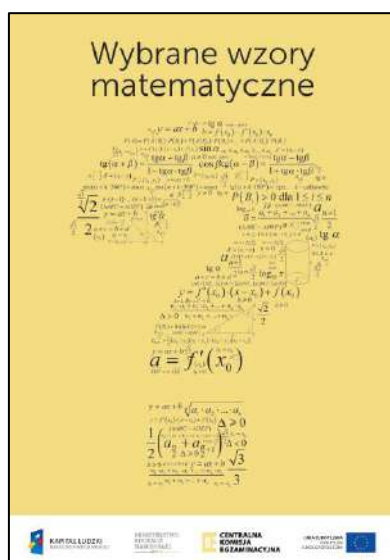
Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.



Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 29 stron (zadania 1–15).
Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Odpowiedzi do zadań zamkniętych (1–4) zaznacz na karcie odpowiedzi w części przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj  pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem  i zaznacz właściwe.
4. W zadaniu 5. wpisz odpowiednie cyfry w kratki pod treścią zadania.
5. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego (6–15) może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
6. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
7. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
8. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
9. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
10. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
11. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, z cyrkla i linijki oraz z kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



**Zadania egzaminacyjne są wydrukowane
na następnych stronach.**

W każdym z zadań od 1. do 4. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Wielomian W jest określony wzorem $W(x) = (2\sqrt{3}x - x^2 + 1)^2$.

We wzorze ogólnym tego wielomianu $W(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ współczynnik c jest równy

- A. (-1) B. 10 C. 12 D. 14

Zadanie 2. (0–1)

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = x^2 + x$. Funkcja kwadratowa g jest określona wzorem $g(x) = x^2 - x$.

Wykres funkcji kwadratowej g można otrzymać poprzez przesunięcie równoległe wykresu funkcji f o wektor

- A. $[-1, 0]$ B. $[1, 0]$ C. $[-1, 1]$ D. $[1, -1]$

Zadanie 3. (0–1)

Zbiorem wszystkich wartości m , dla których równanie $|x^2 - x| = m$ z niewiadomą x ma dokładnie dwa różne rozwiązania rzeczywiste, jest

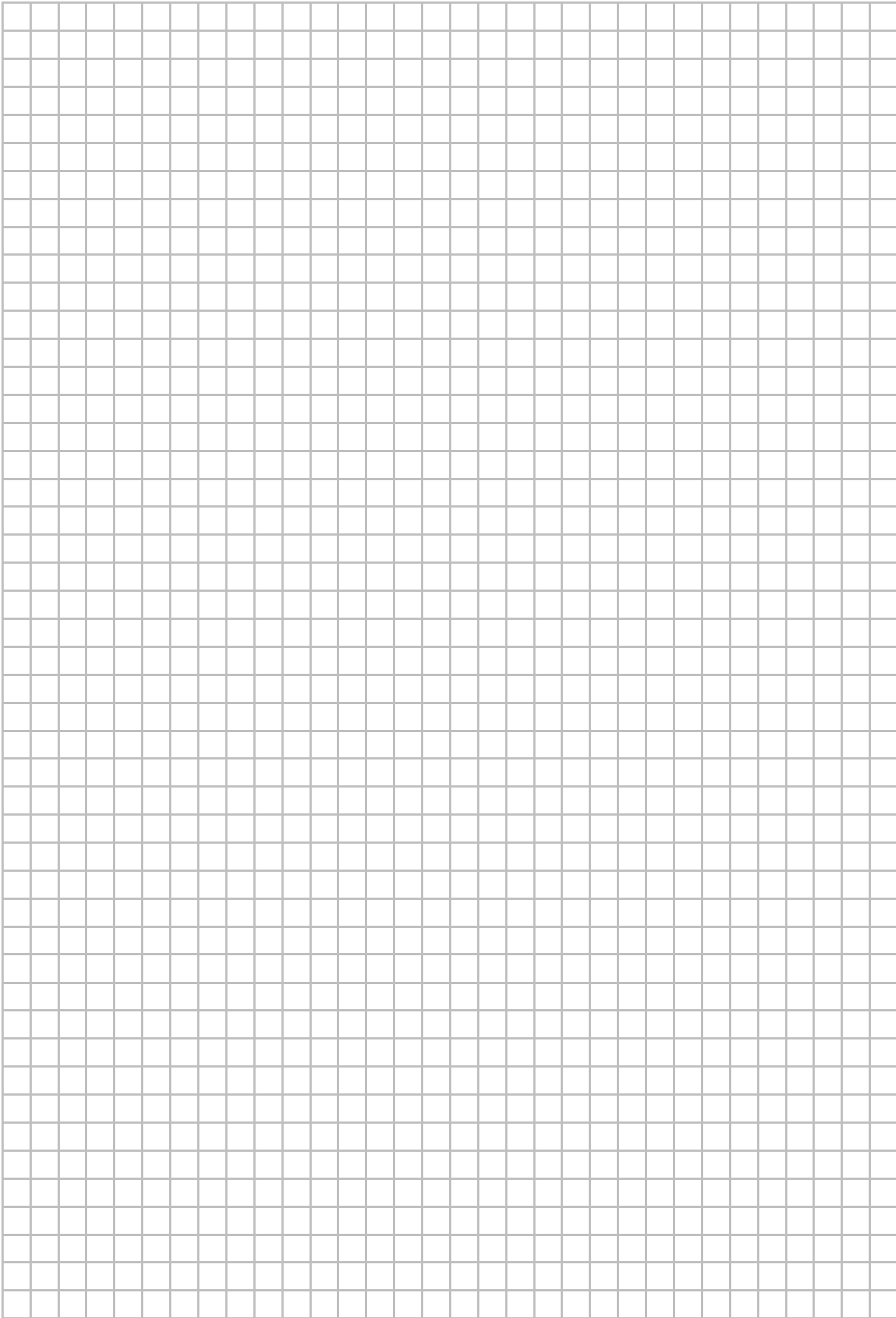
- A. $\langle 0, +\infty \rangle$ B. $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ C. $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$ D. $\{0\} \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$

Zadanie 4. (0–1)

Granica $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ jest równa

- A. $(-\infty)$ B. $+\infty$ C. (-1) D. 1

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)



Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl

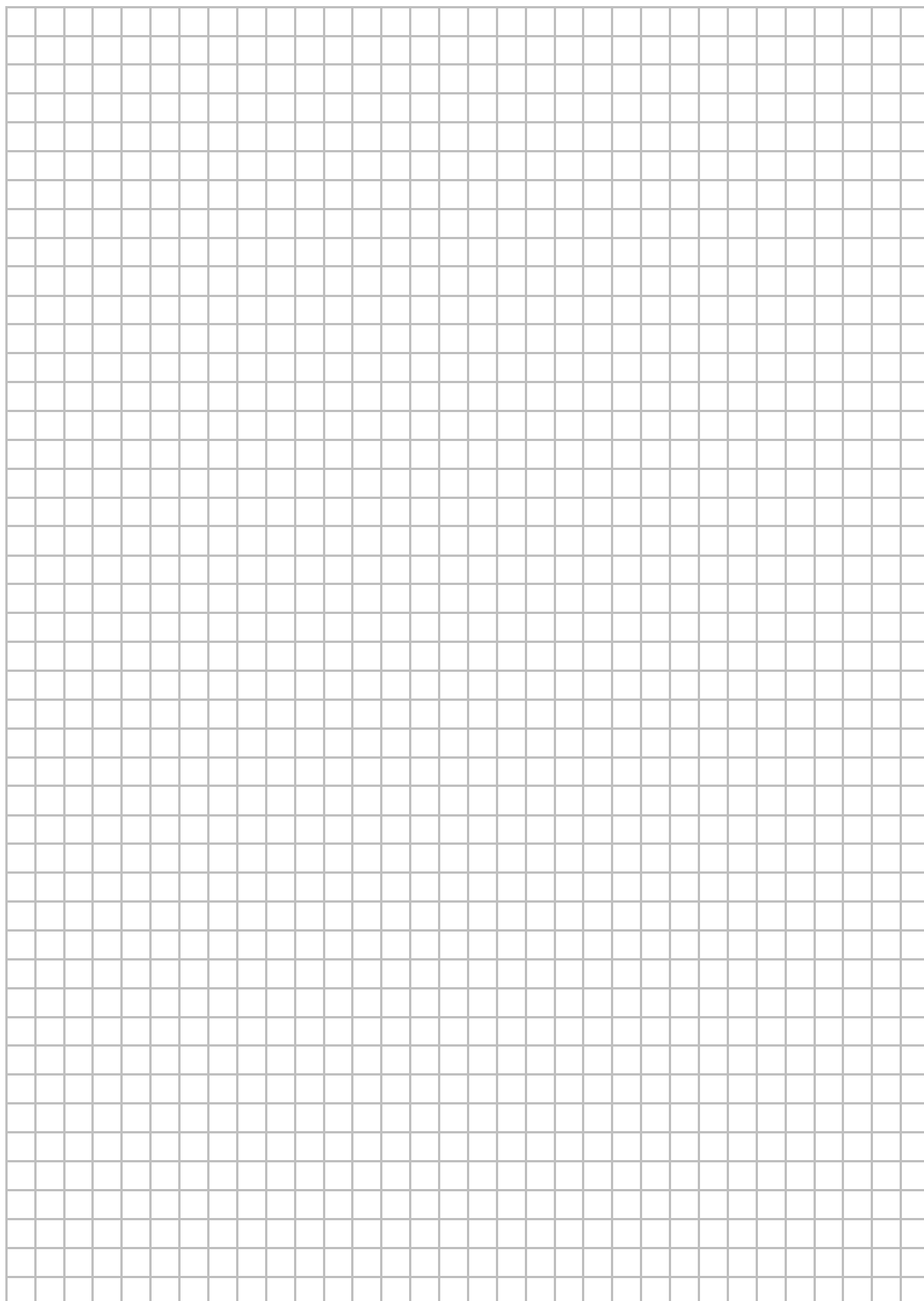
Rzucamy sześcienną symetryczną kostką do gry, która na każdej ścianie ma inną liczbę oczek – od jednego do sześciu oczek. Jeżeli wypadnie pięć lub sześć oczek, to losujemy jedną kulę z pierwszego pudełka, w przeciwnym przypadku losujemy jedną kulę z drugiego pudełka.

W poniższe kratki wpisz kolejno – od lewej do prawej – pierwszą, drugą i trzecią cyfrę po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

This image shows a full page of blank graph paper. The background is white, and it is covered by a uniform grid of thin, light gray lines. These lines intersect at right angles to form a series of small, identical squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings present on the page.

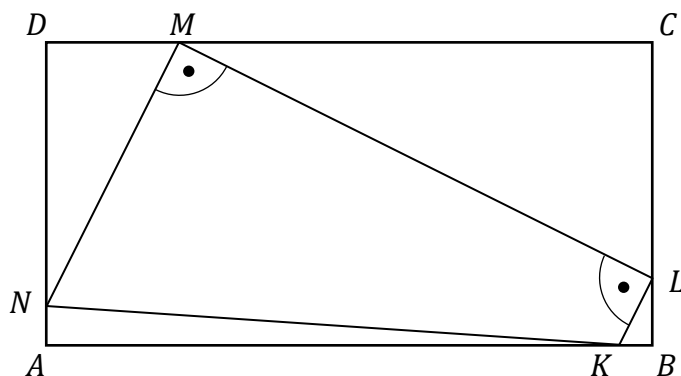
Zadanie 6. (0–3)

Wykaż, że jeżeli $a = \log_2 14$ oraz $b = \log_{\sqrt{2}} 27$, to $\log_7 54 = \frac{b+2}{2a-2}$.

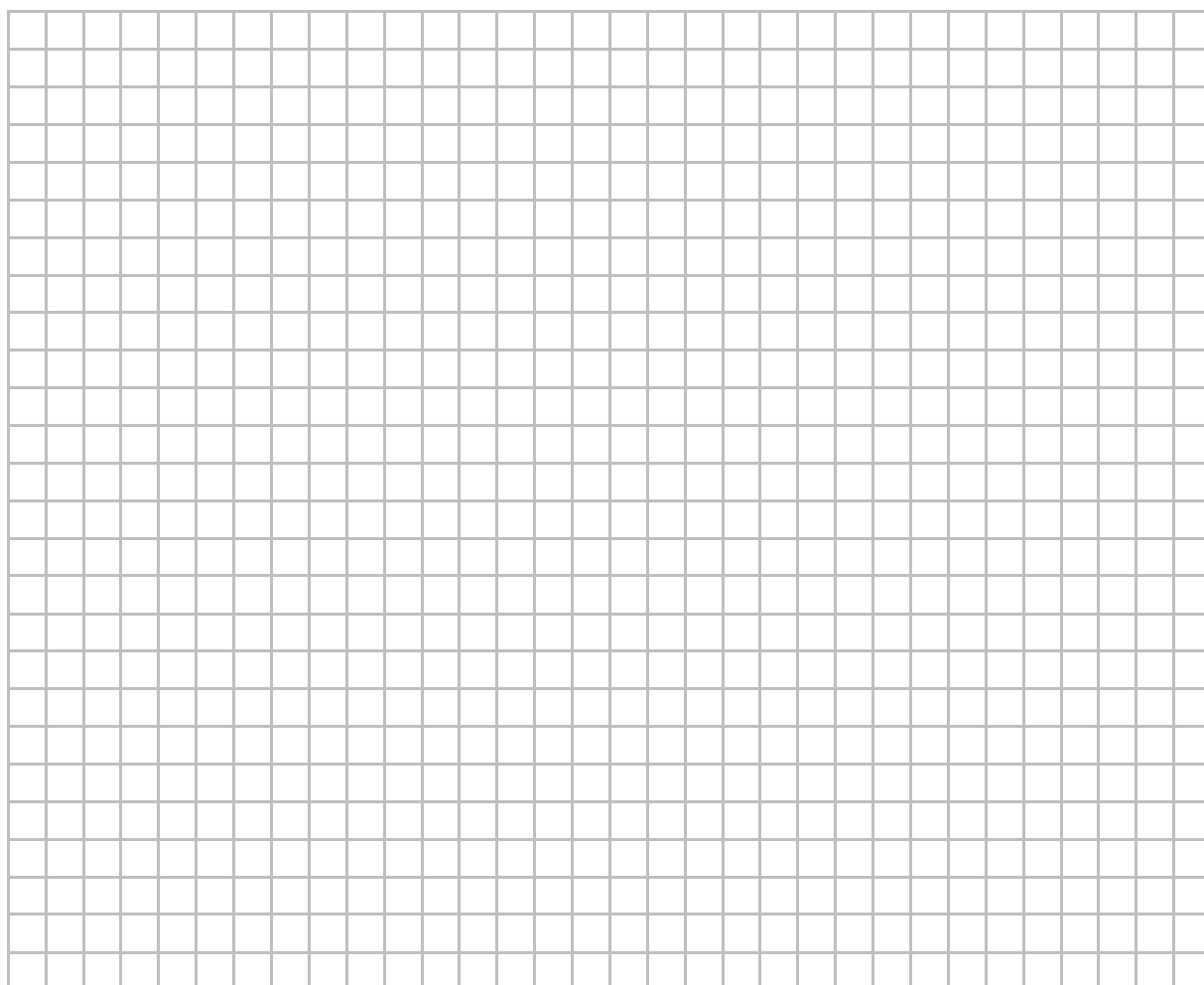


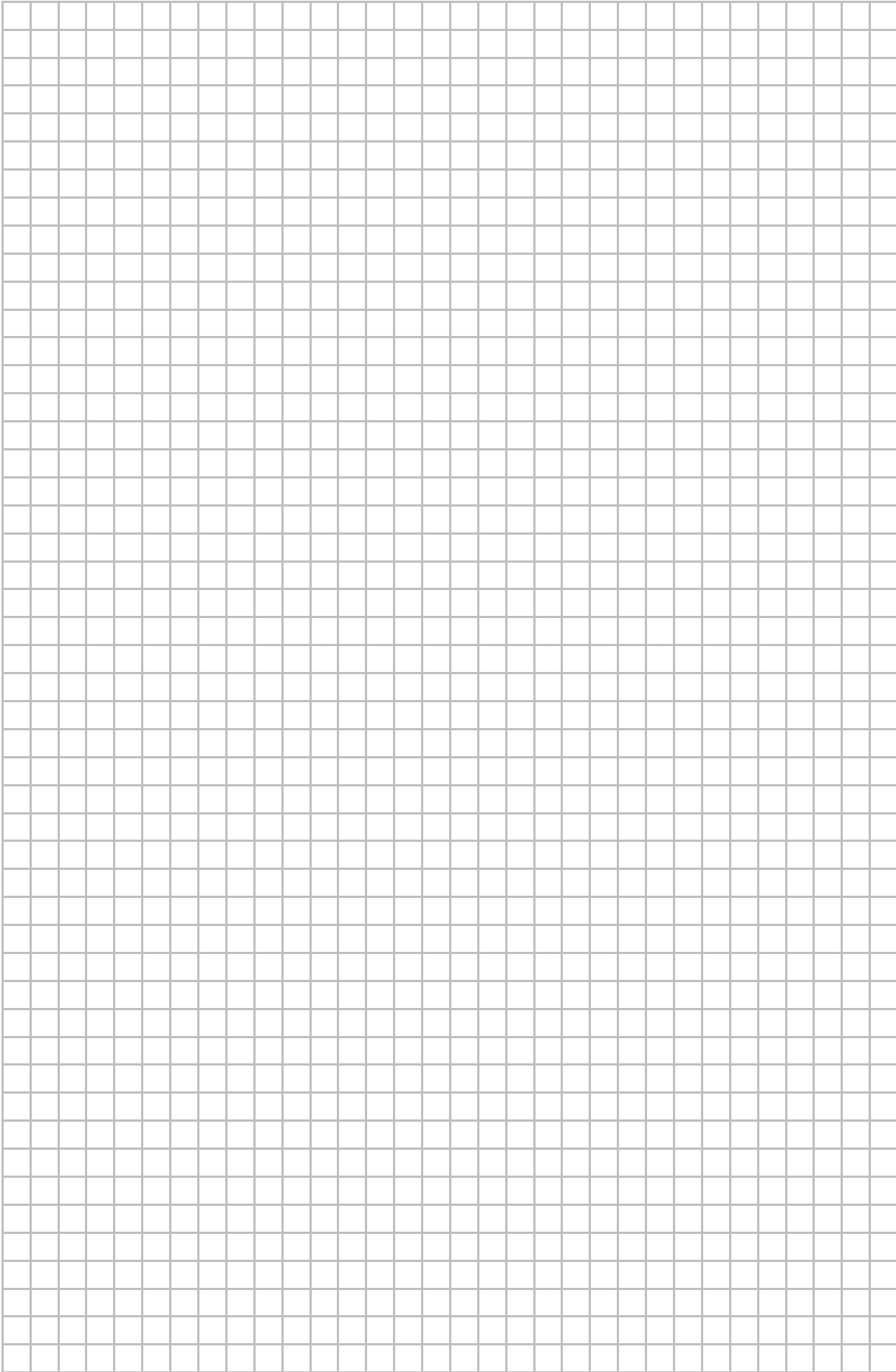
Zadanie 7. (0–3)

Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = 2 \cdot |AD|$. Na bokach AB , BC , CD oraz DA tego prostokąta obrano punkty – odpowiednio – K , L , M oraz N (przy czym każdy z tych punktów leży na dokładnie jednym boku prostokąta $ABCD$). Czworokąt $KLMN$ jest trapezem prostokątnym (zobacz rysunek), a wysokość LM tego trapezu jest równoległa do przekątnej BD prostokąta.



Wykaż, że stosunek pola trójkąta MDN do pola trójkąta KBL jest równy 16.





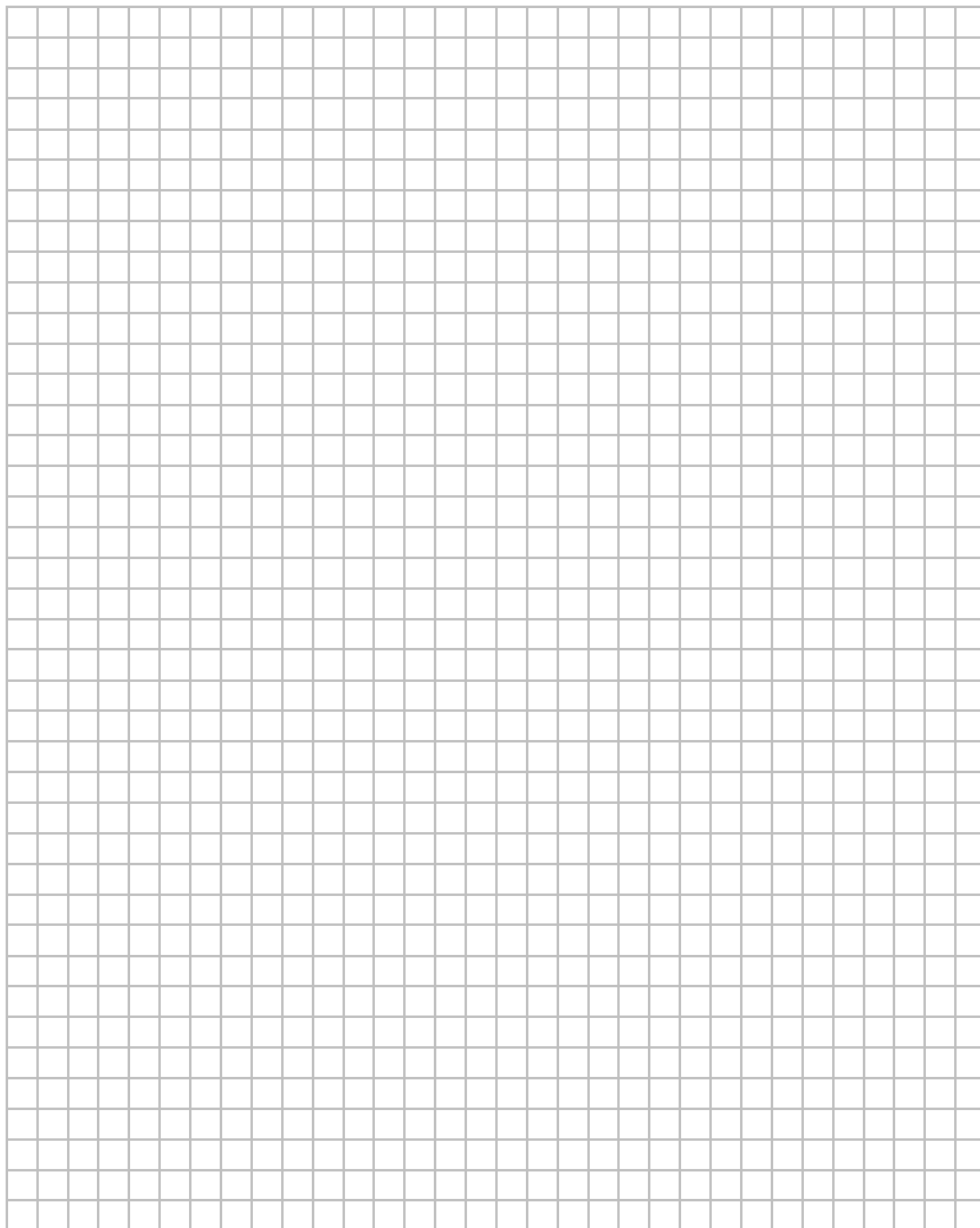
Zadanie 8. (0–4)

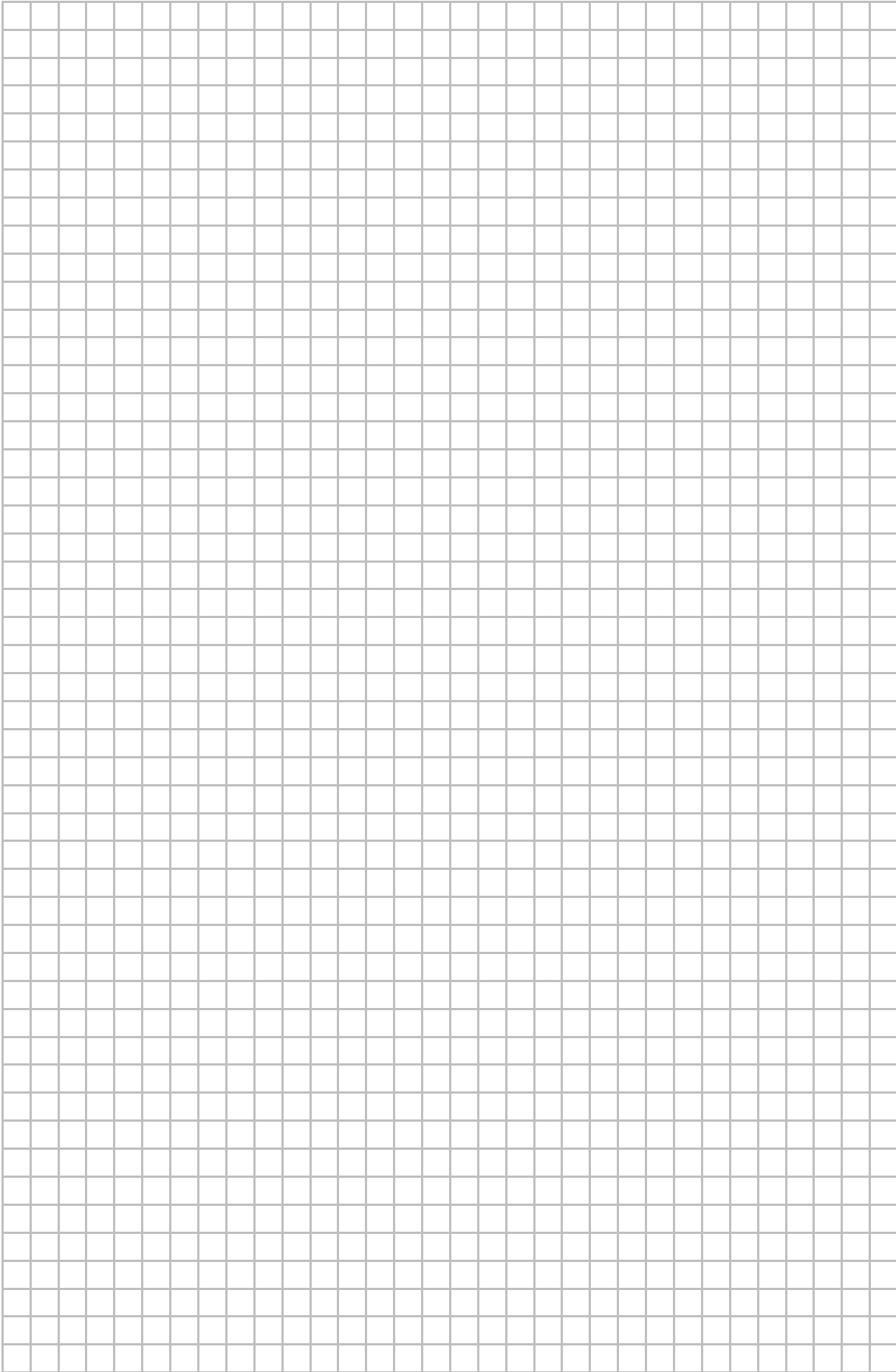
Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$x^2 + 2mx + 2m - 1 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek

$$m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$$

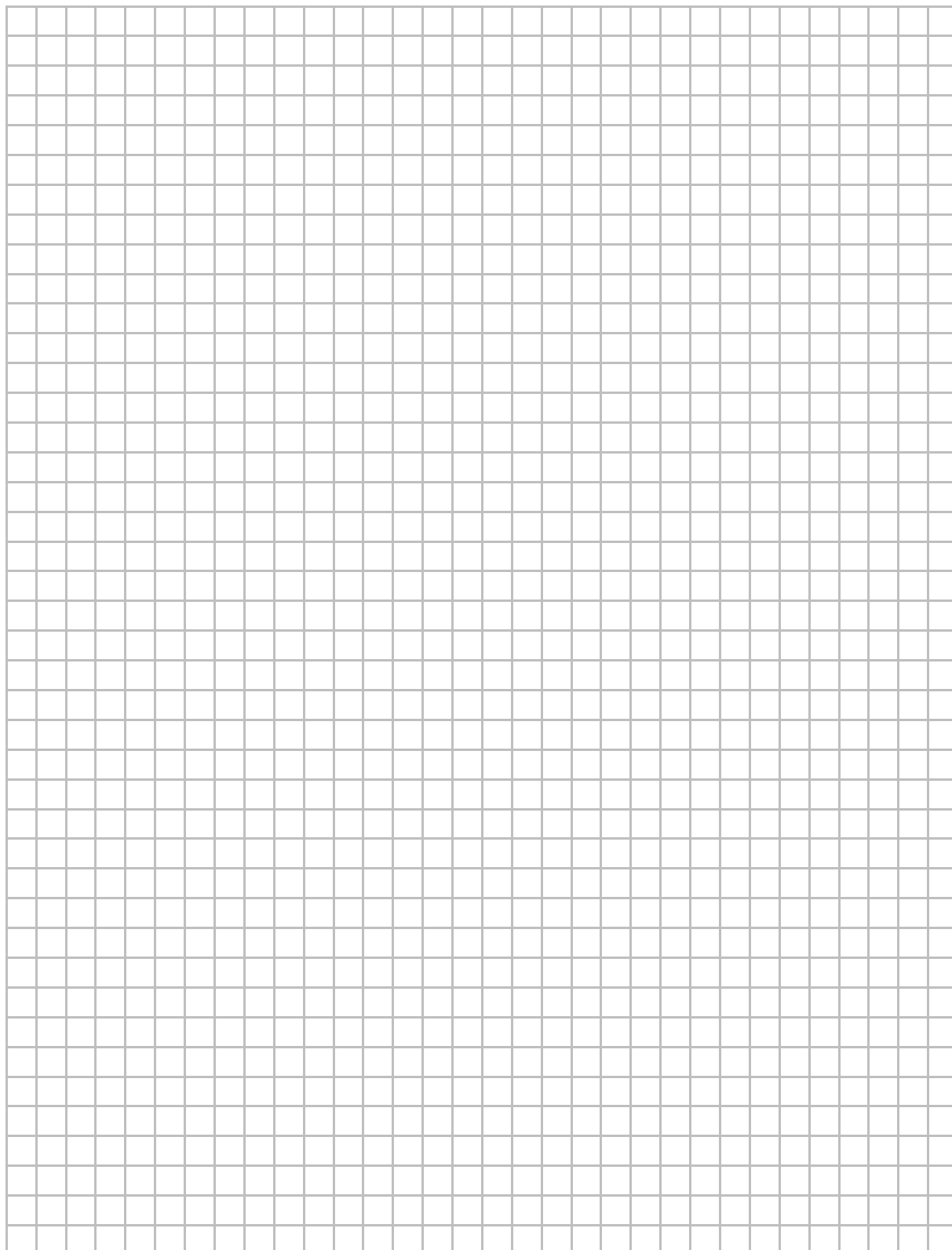


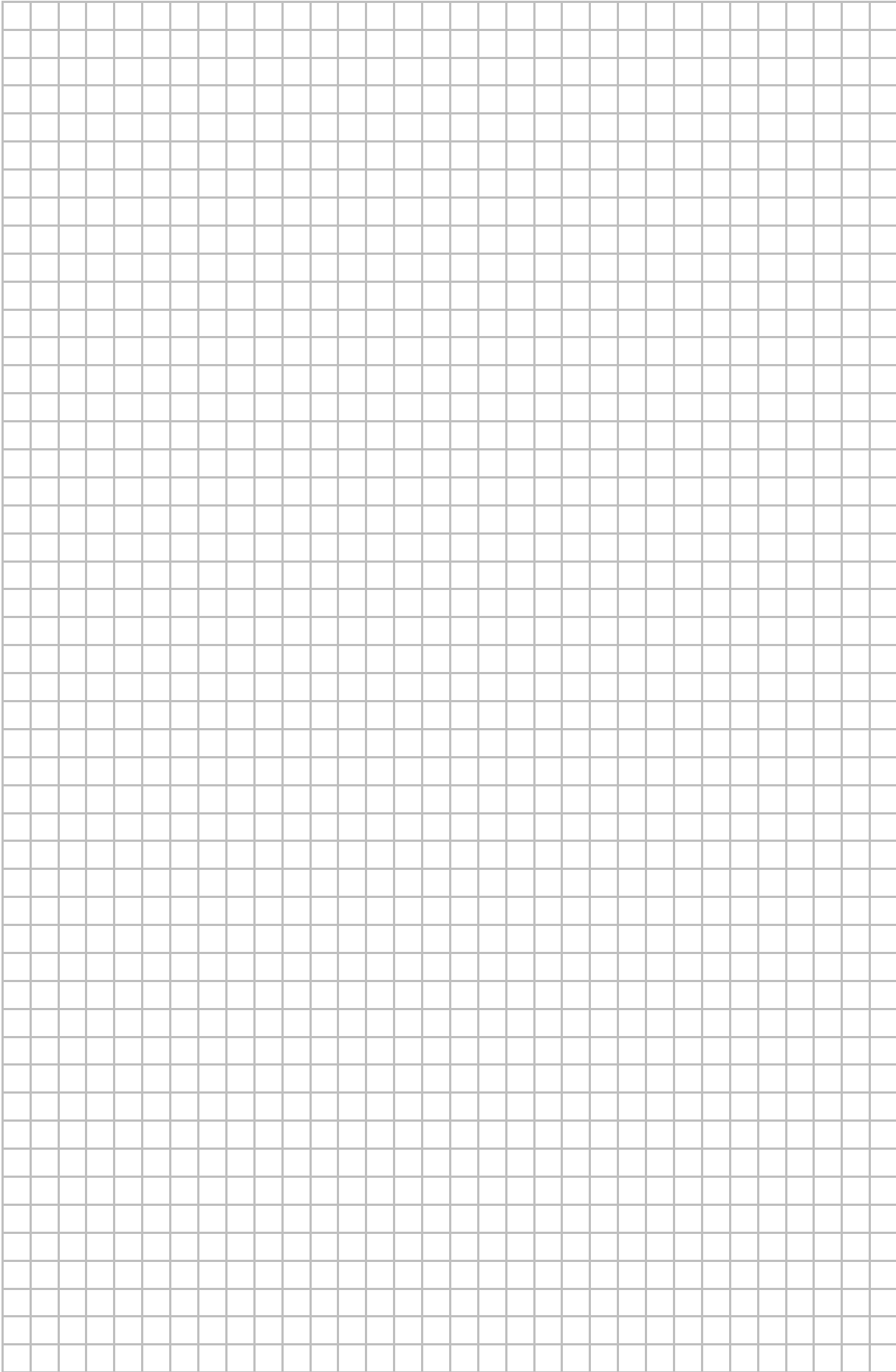


Zadanie 9. (0–4)

Rozwiąż równanie

$$\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$$

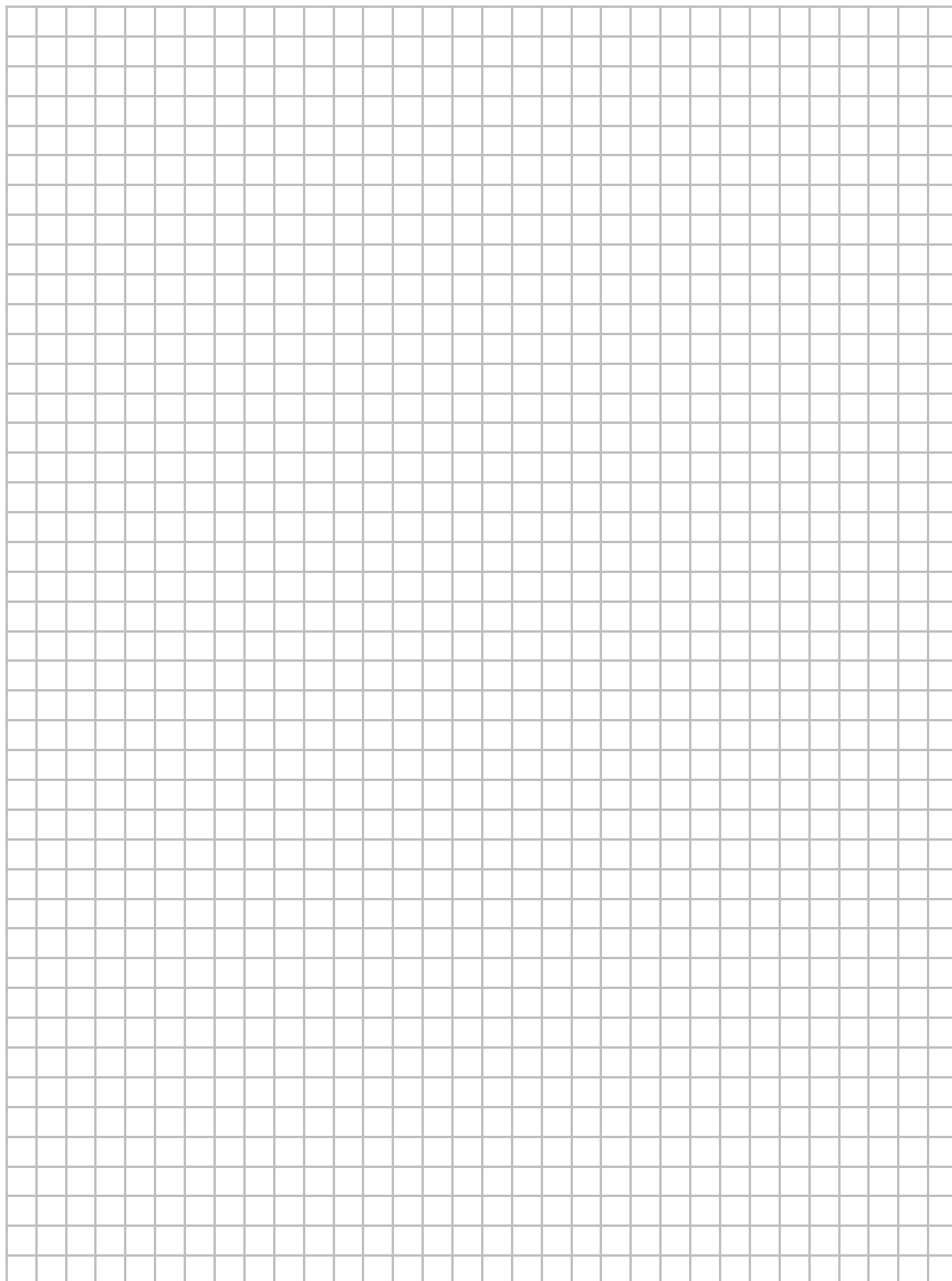
w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

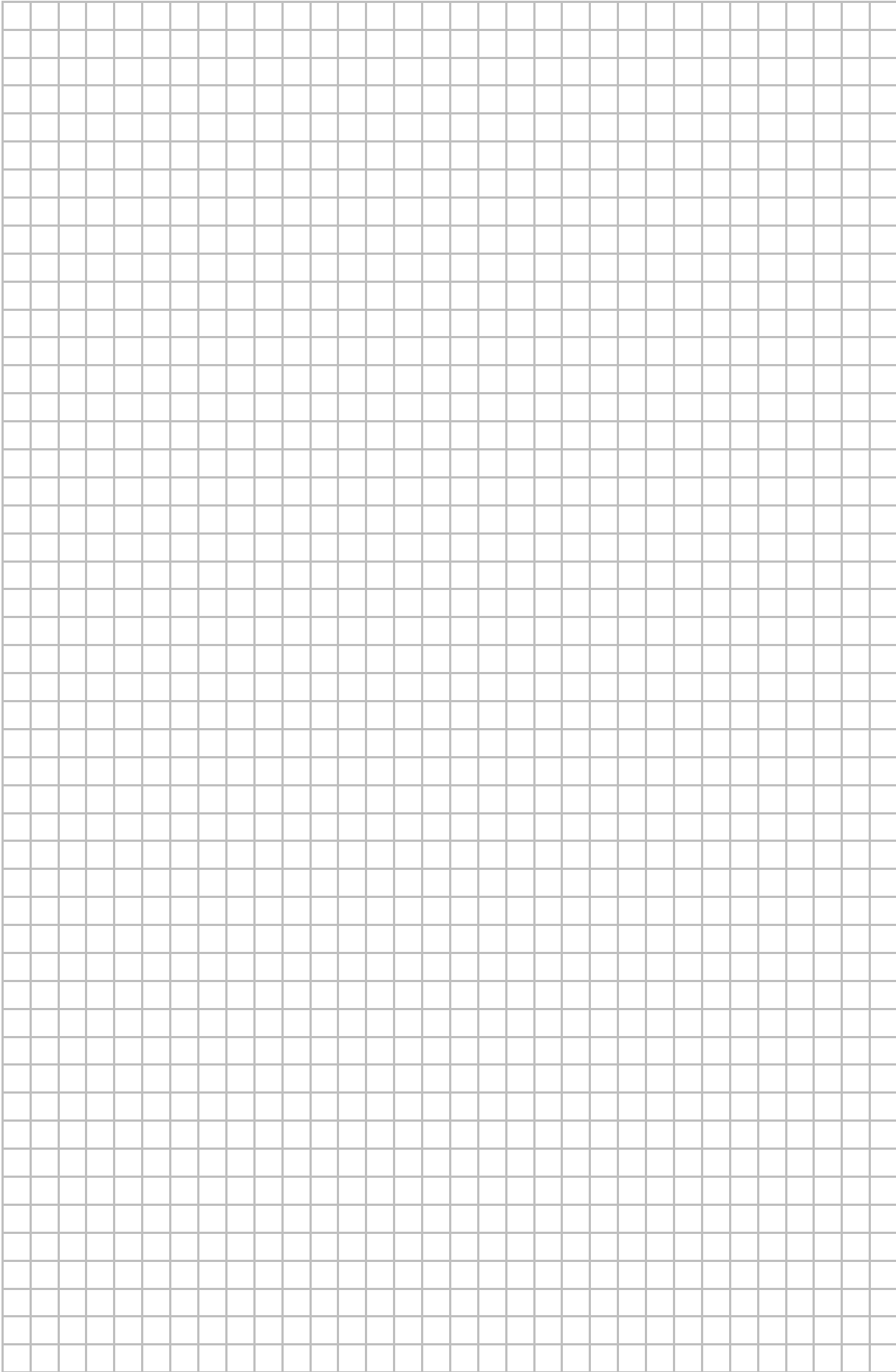


Zadanie 10. (0–4)

Na czworokącie wypukłym $ABCD$ o bokach długości: $|AB| = 3$, $|BC| = 3$, $|CD| = 5$ oraz $|DA| = 8$, opisano okrąg.

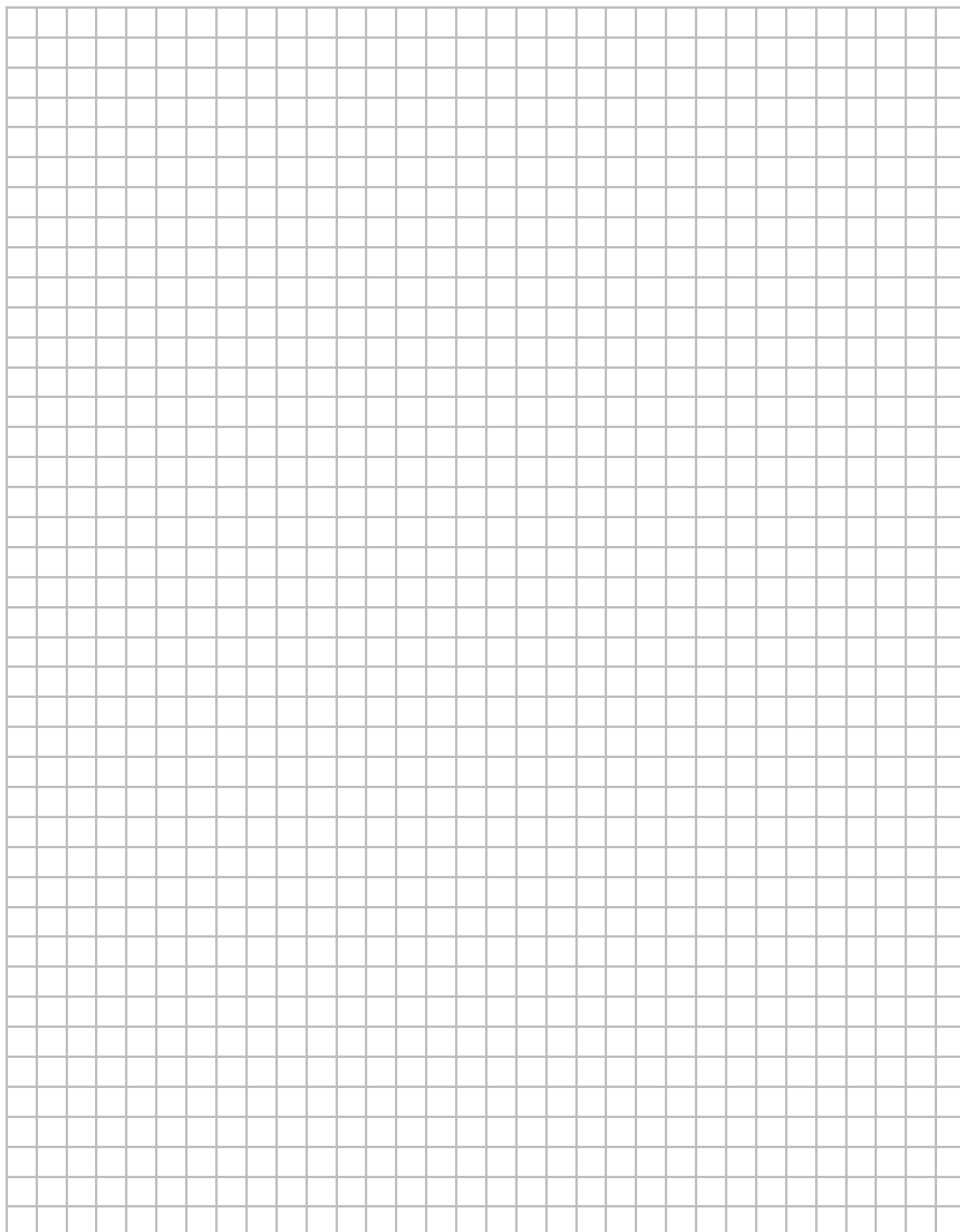
Oblicz promień tego okręgu.

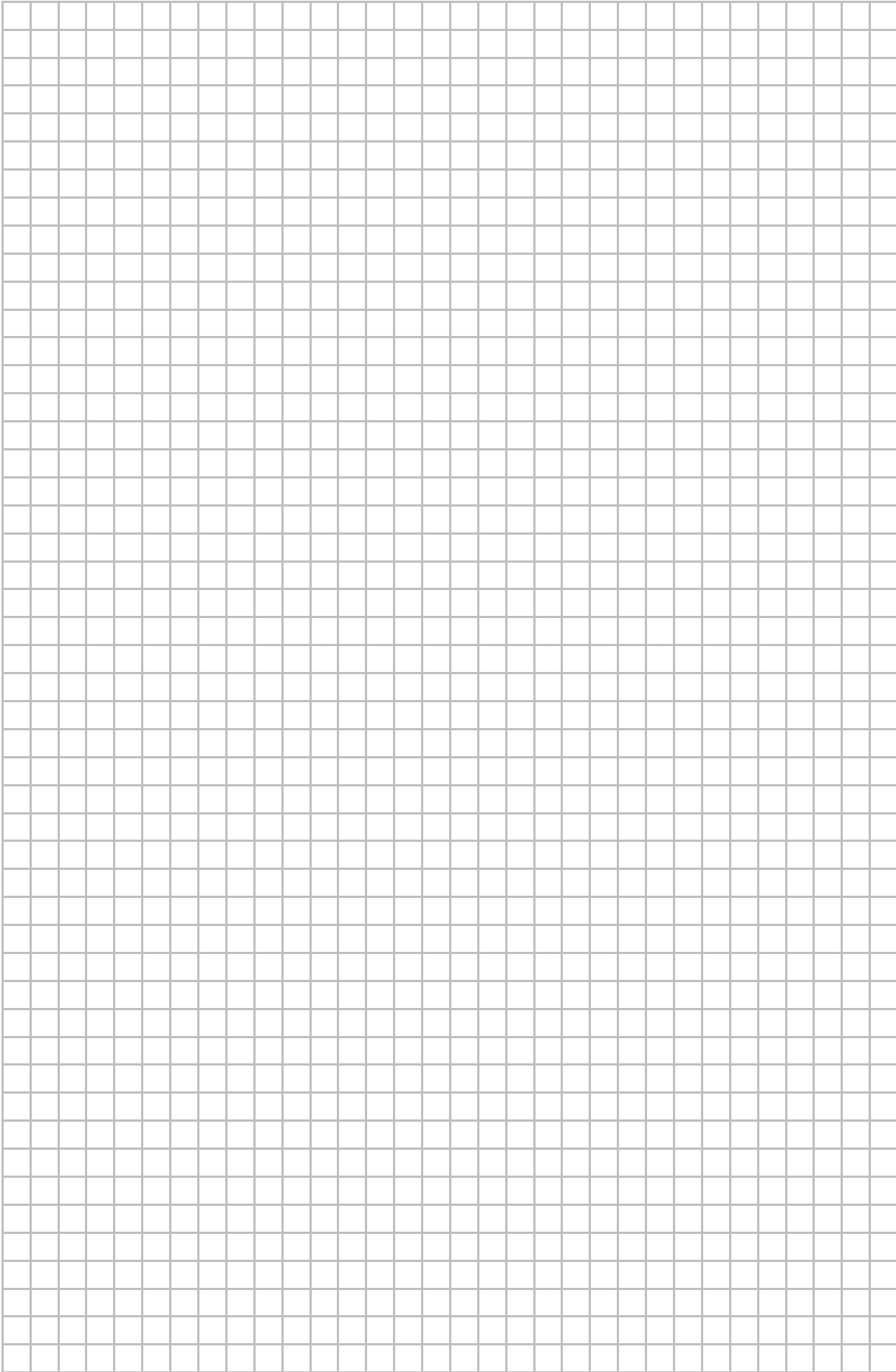




Zadanie 11. (0–4)

Wielomian f zmiennej rzeczywistej x jest określony wzorem $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Liczba (-2) jest miejscem zerowym tego wielomianu. W układzie współrzędnych (x, y) styczna do wykresu wielomianu f w punkcie A o pierwszej współrzędnej równej (-2) przecina ten wykres w punkcie $P = (1, 9)$. Wyznacz wzór wielomianu f .



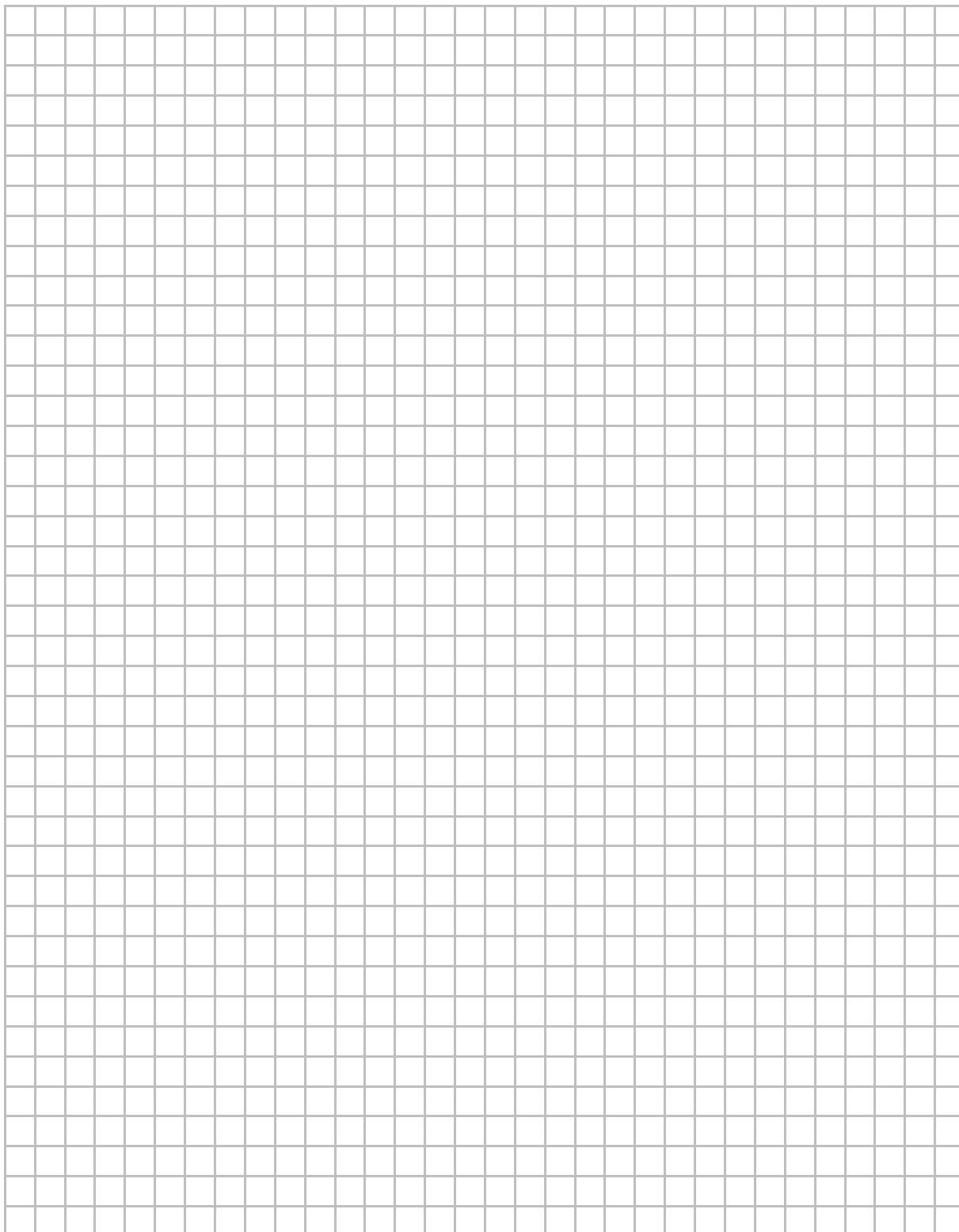


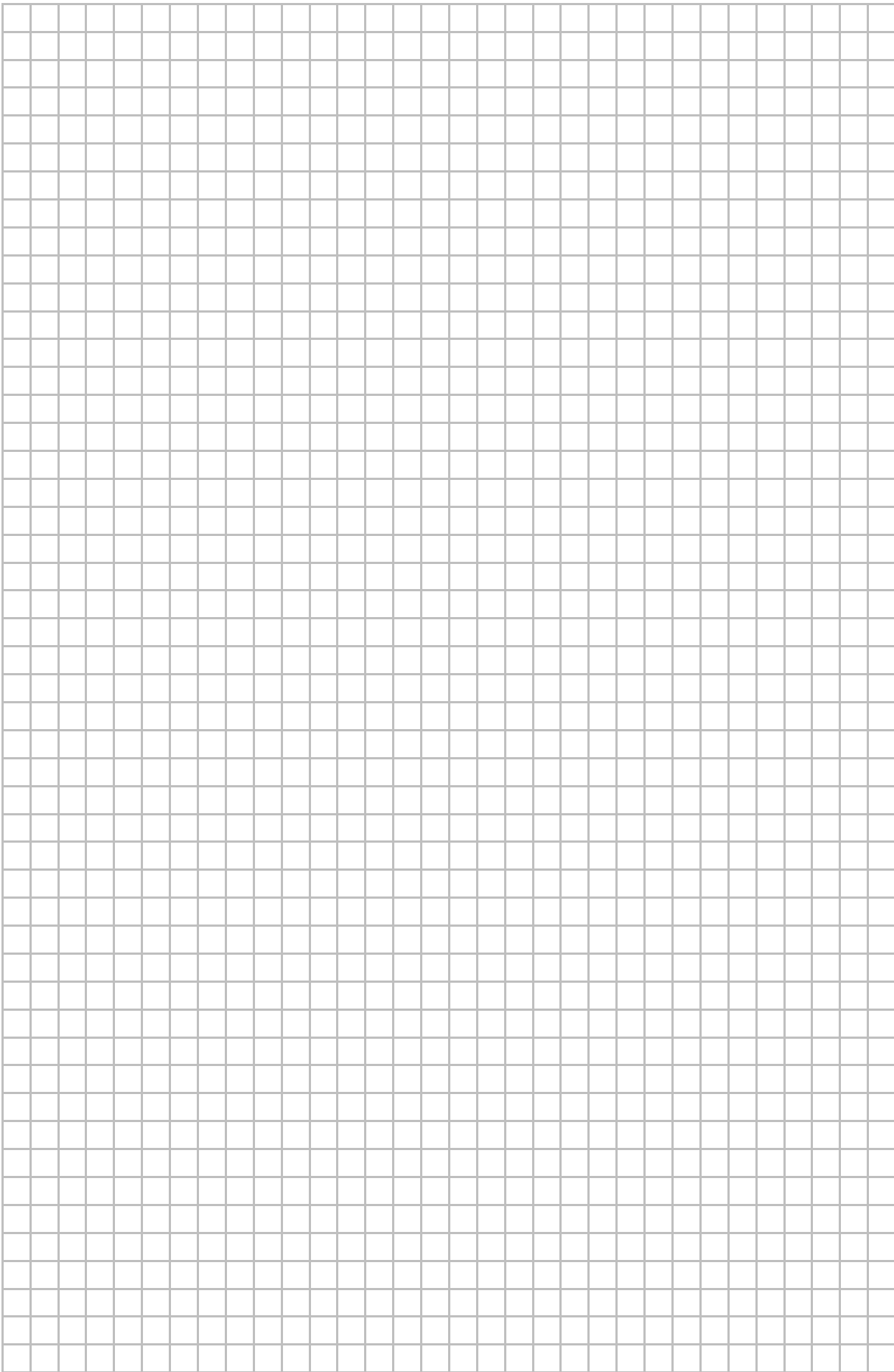
Zadanie 12. (0–5)

Ciąg (a_n) , określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest arytmetyczny i rosnący. W tym ciągu $a_6 = 15$ oraz $a_{15} = a_3 \cdot (a_8 - 6)$.

Ciąg (b_n) , określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest geometryczny i $b_1 = a_{11}$ oraz $b_2 = a_6$.

Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu (b_n) .

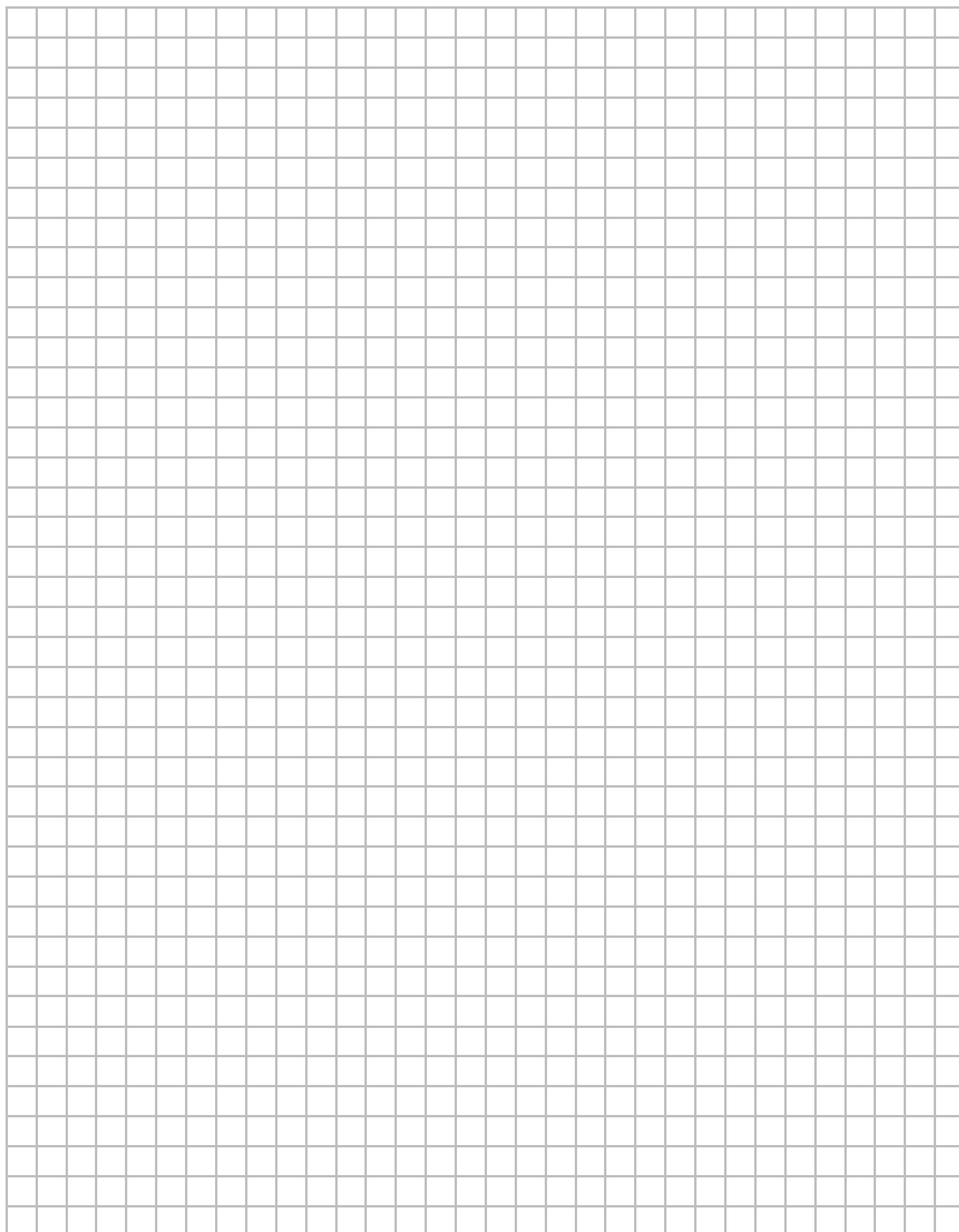


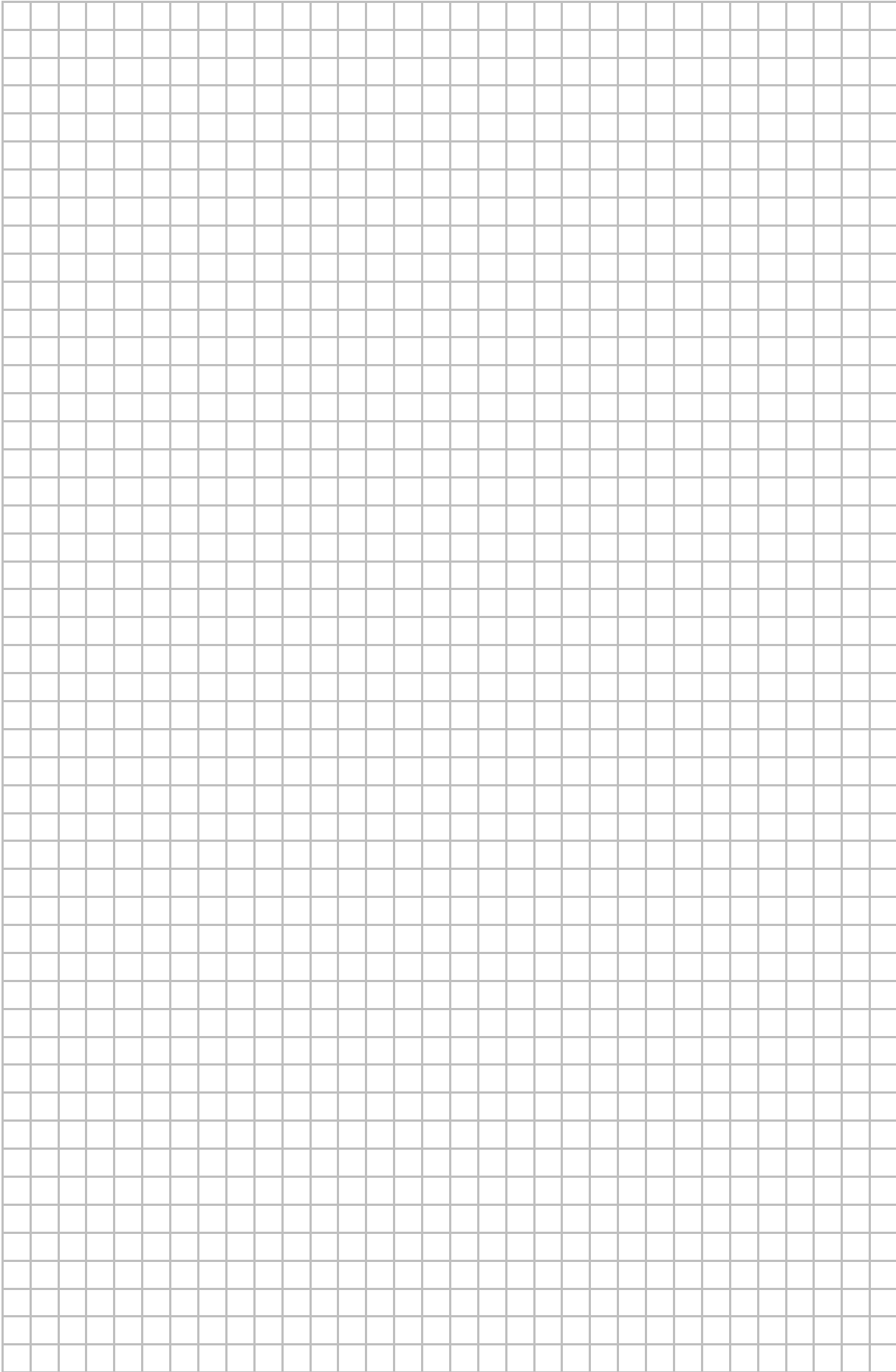


Zadanie 13. (0–5)

Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny $ABCD$ o podstawie ABC . Płaszczyzna zawierająca krawędź AB podstawy i prostopadła do krawędzi bocznej CD przecina tę krawędź w punkcie E , przy czym $\frac{|CE|}{|DE|} = \frac{3}{11}$.

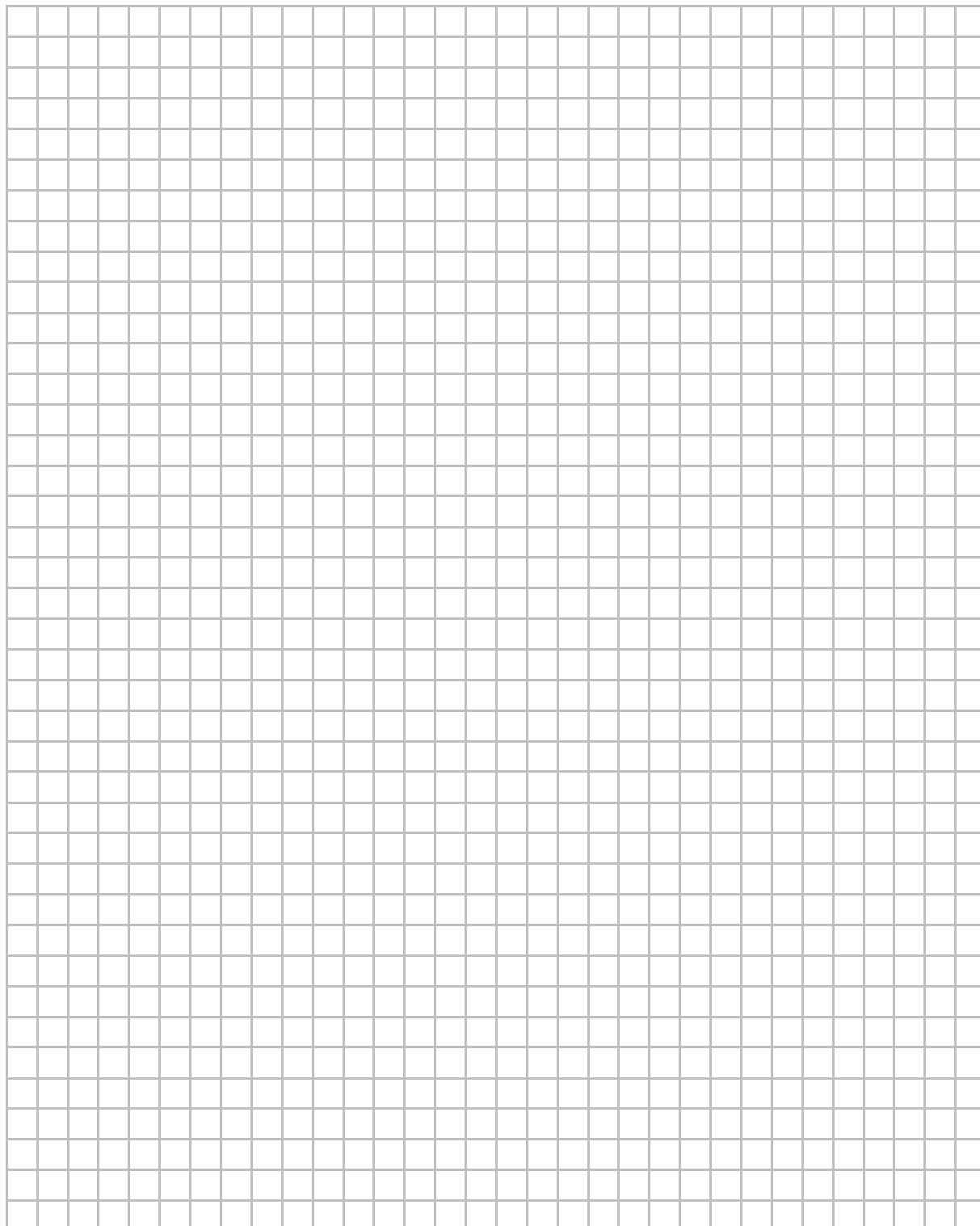
Oblicz stosunek pola powierzchni całkowitej tego ostrosłupa do pola podstawy ABC .

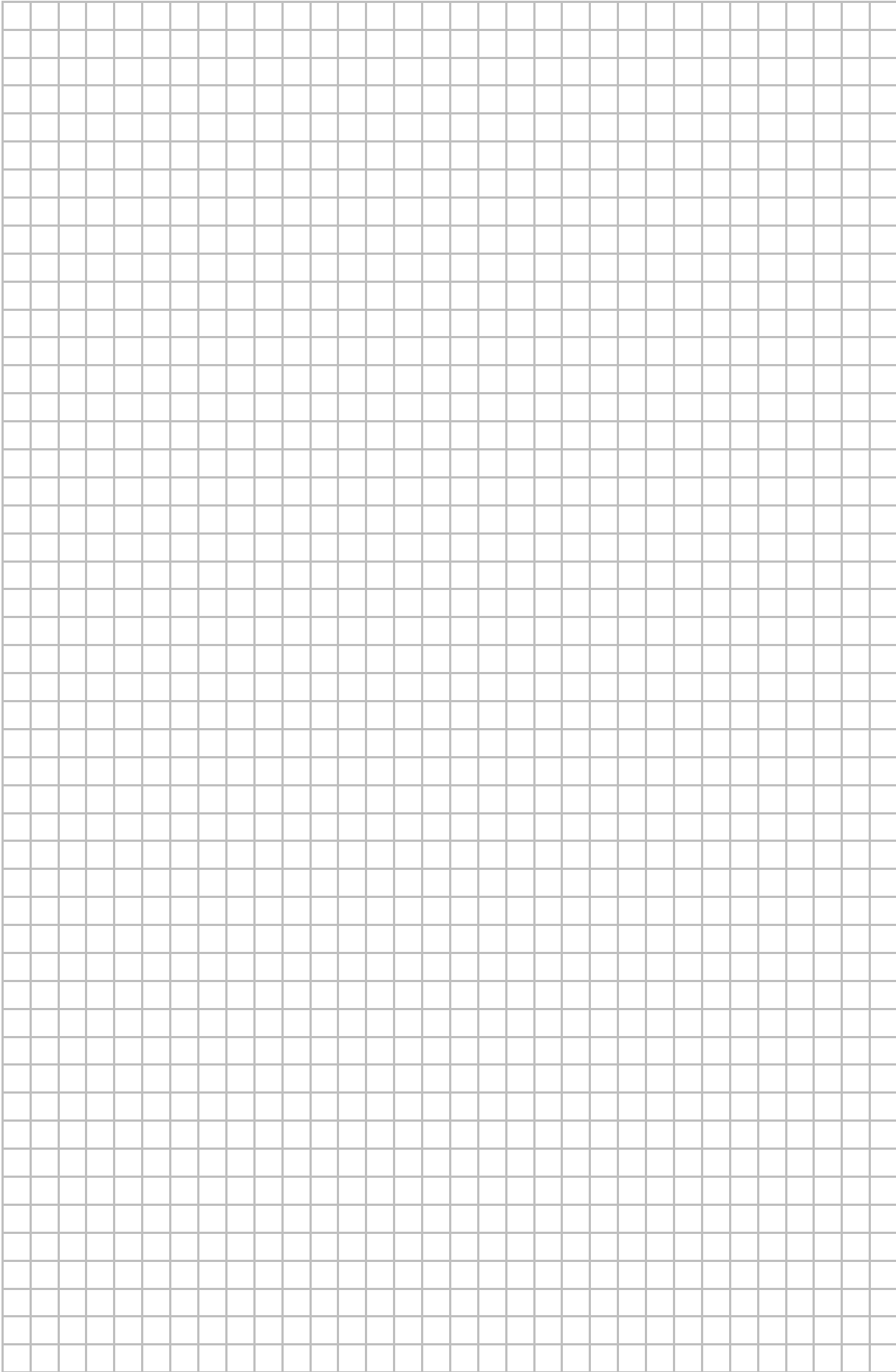


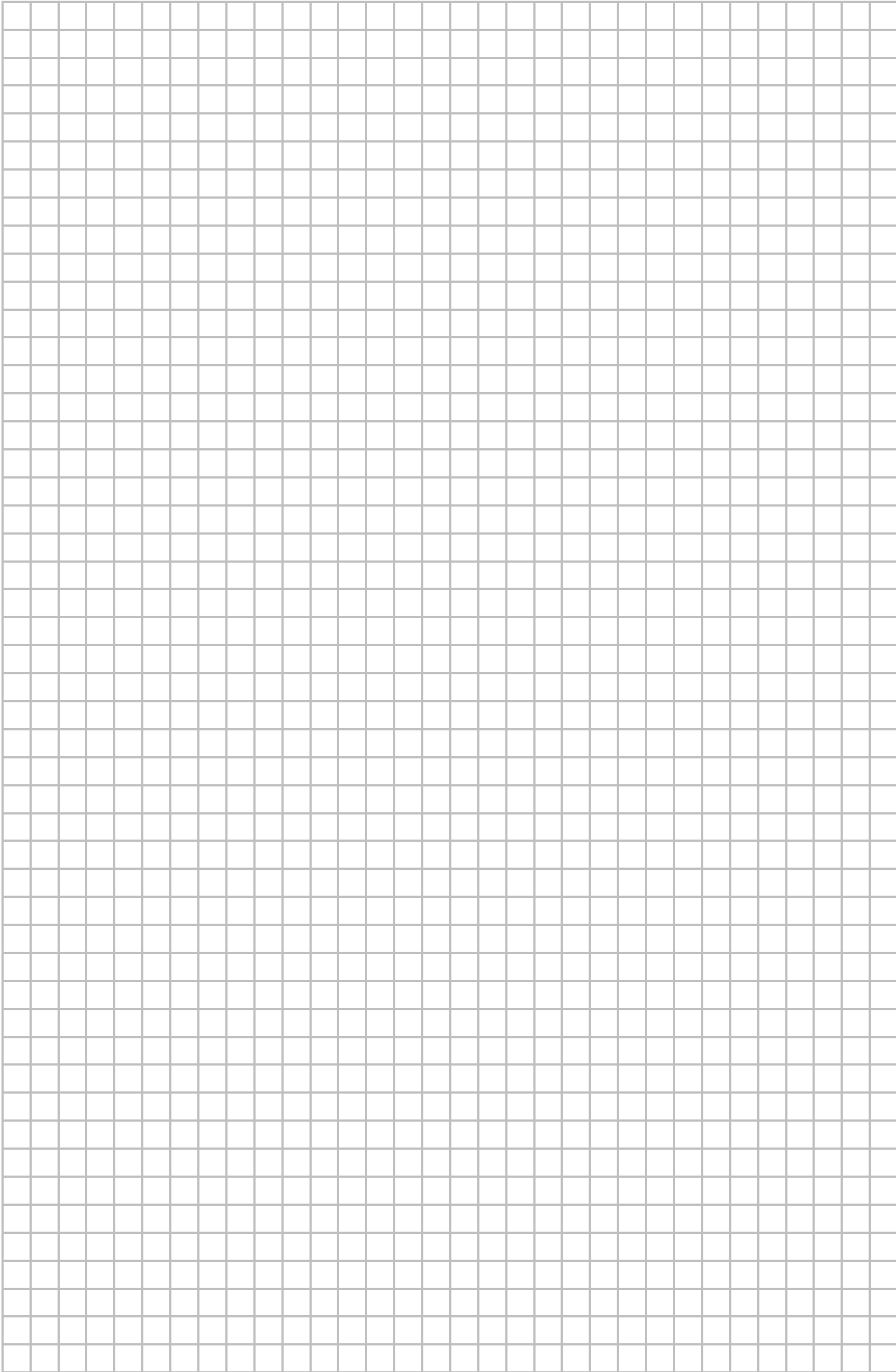


Zadanie 14. (0–6)

W układzie współrzędnych (x, y) dany jest równoległobok $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-8, -1)$ i $D = (-13, 9)$ oraz środka symetrii $M = \left(-\frac{9}{2}, 1\right)$. Okrąg $\mathcal{O}$ przechodzi przez początek tego układu i jest styczny do prostych zawierających boki AB i BC tego równoległoboku. Druga współrzędna środka okręgu $\mathcal{O}$ jest liczbą ujemną. Wyznacz równanie okręgu $\mathcal{O}$.







Zadanie 15. (0–6)

Rozważamy wszystkie graniastosłupy prawidłowe trójkątne o polu powierzchni całkowitej równym $24\sqrt{3}$.

- a) Wykaż, że objętość V graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi podstawy jest określona wzorem

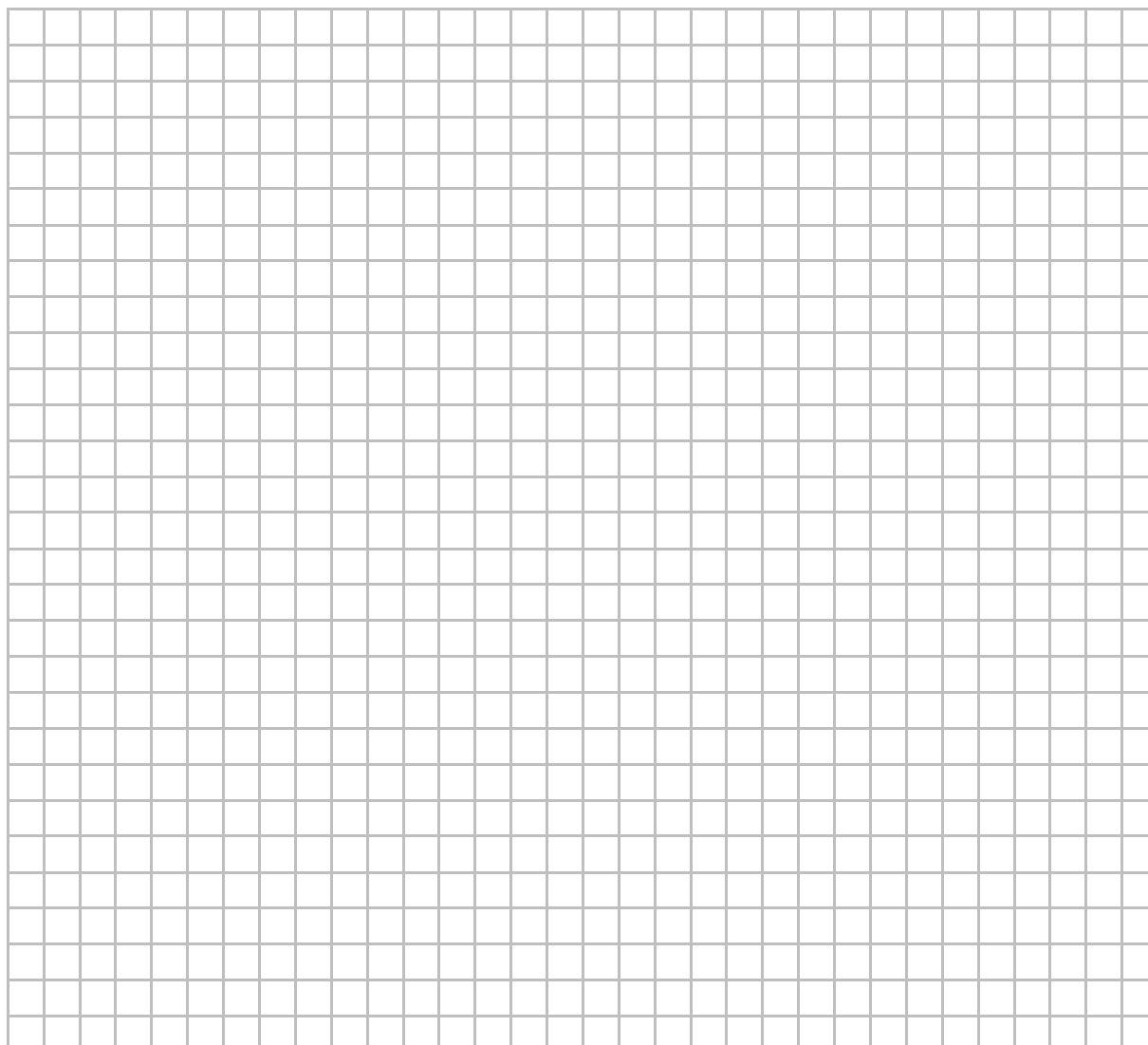
$$V(a) = 6a - \frac{1}{8}a^3$$

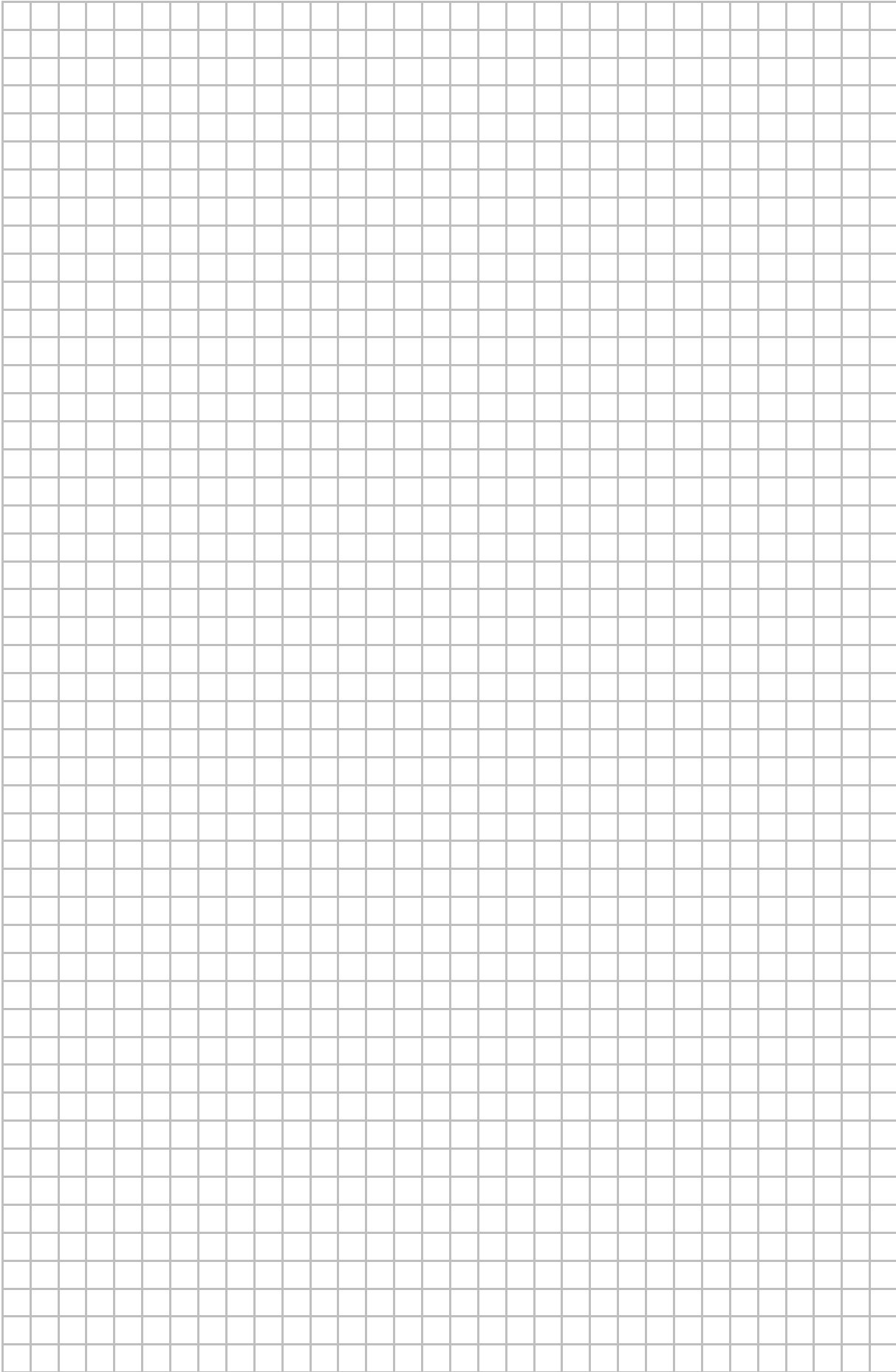
- b) Objętość V graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi podstawy jest określona wzorem

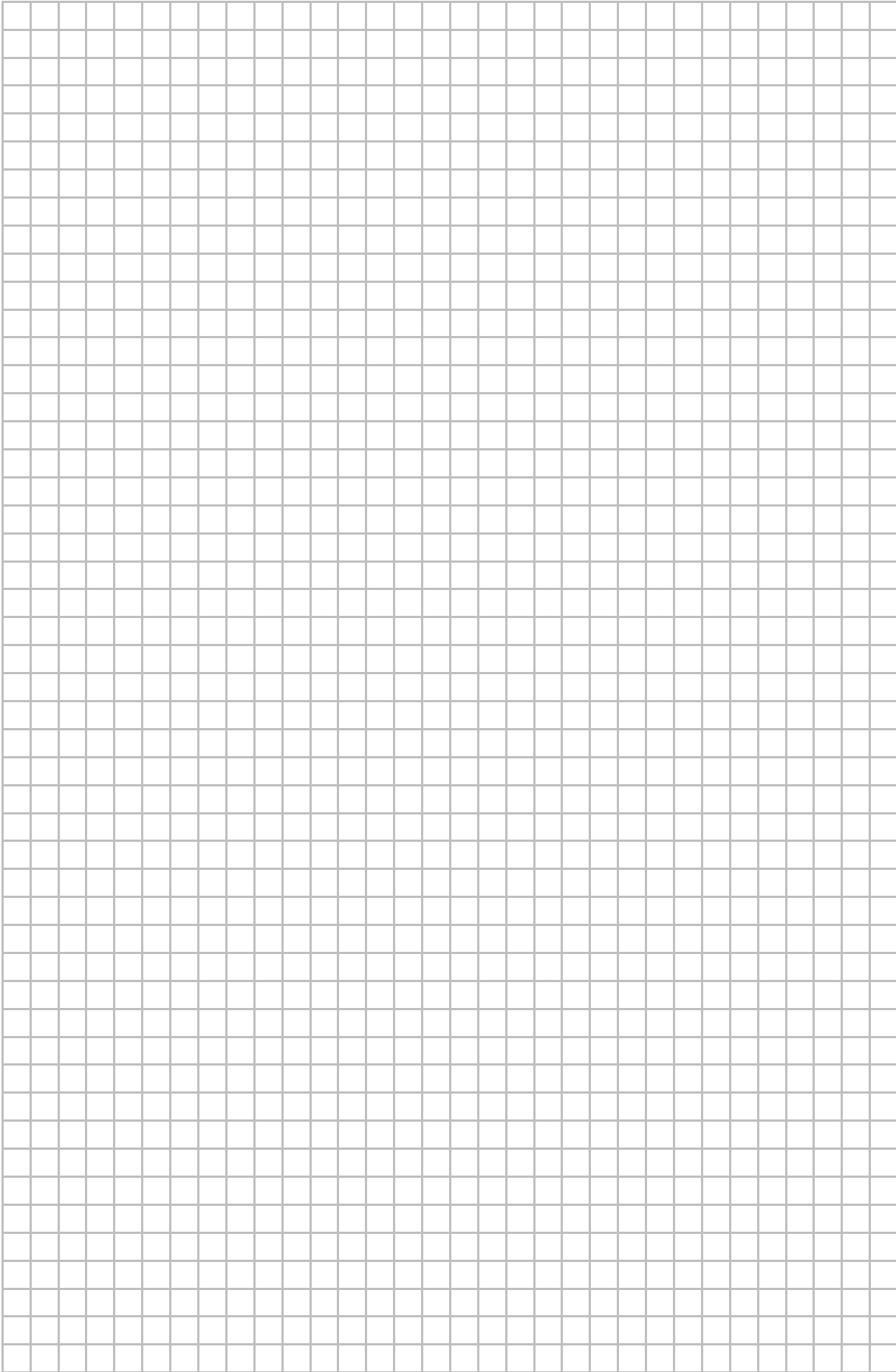
$$V(a) = 6a - \frac{1}{8}a^3$$

dla $a \in (0, 4\sqrt{3})$.

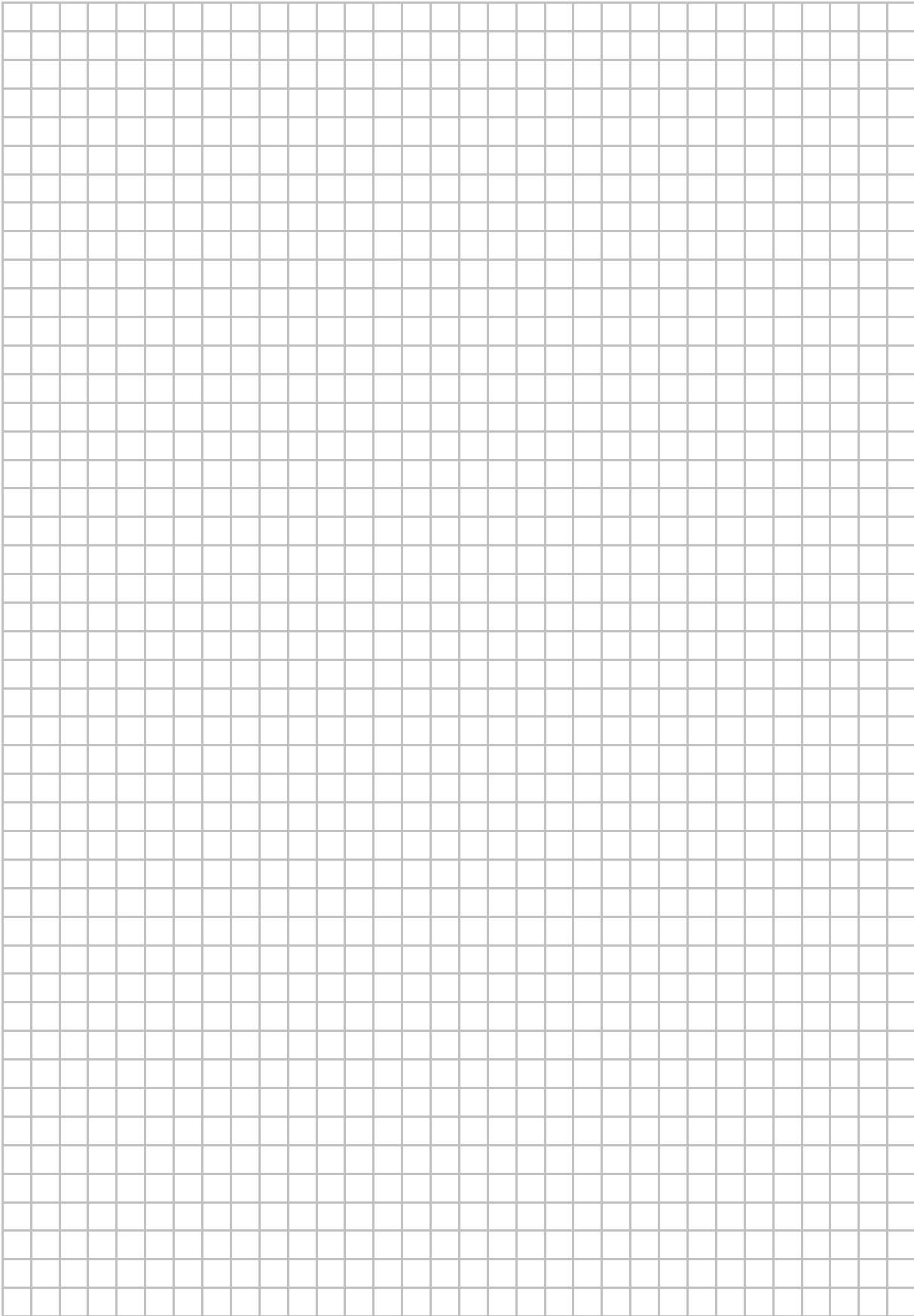
Wyznacz długość krawędzi podstawy tego z rozważanych graniastosłupów, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość.



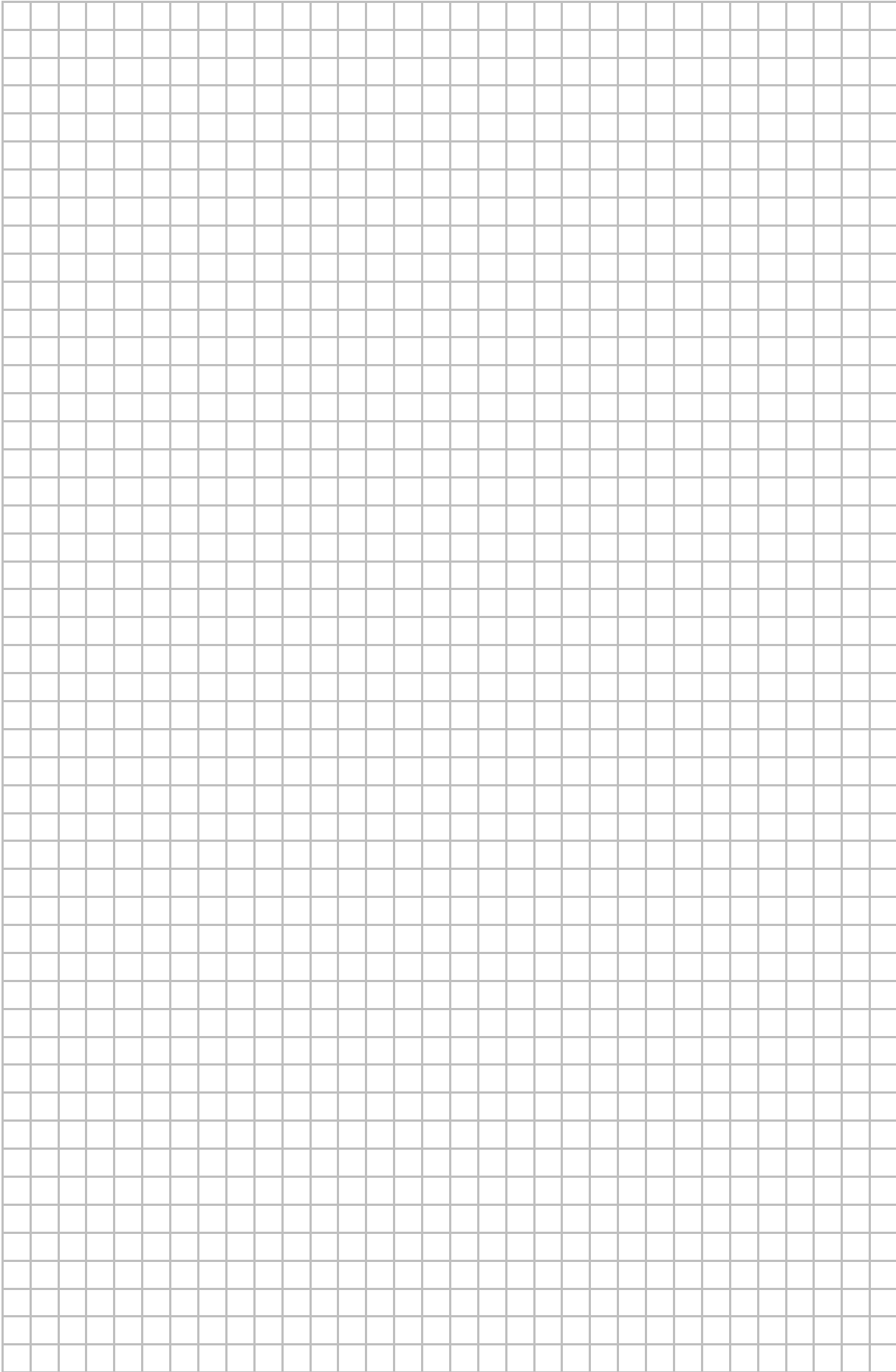




BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)



Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl



MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2015

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2015

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2015

<i>Rodzaj dokumentu:</i>	Zasady oceniania rozwiązań zadań
<i>Egzamin:</i>	Egzamin maturalny
<i>Przedmiot:</i>	Matematyka
<i>Poziom:</i>	Poziom rozszerzony
<i>Formy arkusza:</i>	EMAP-R0-100, EMAP-R0-200, EMAP-R0-300, EMAP-R0-400, EMAP-R0-700, EMAP-R0-K00, EMAP-R0-Q00, EMAU-R0-100
<i>Termin egzaminu:</i>	6 czerwca 2025 r.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania określone w podstawie programowej ¹	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 2.4R) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 8.8R) stosuje wektory do opisu przesunięcia wykresu funkcji.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

¹ Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 27 sierpnia 2012 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół (Dz.U. 2012 poz. 977).

Zadanie 3. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 4.1R) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x) $ [...]. 3.2R) rozwiązuje równania [...] z parametrem.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 4. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 11.1R) oblicza granice funkcji [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

ZADANIE OTWARTE (KODOWANE)

Zadanie 5. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.3R) korzysta z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.

Zasady oceniania

2 pkt – odpowiedź całkowicie poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

6	0	6

ZADANIA OTWARTE (NIEKODOWANE)

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 6. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 1.2R) stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Zasady oceniania (dla sposobów I-IV)

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – przekształcenie wyrażenia $\frac{\log_{\sqrt{2}} 27 + 2}{2\log_2 14 - 2}$ lub $\log_7 54$, lub obydwu tych wyrażeń do takiej postaci, z której poprzez jednokrotne zastosowanie wzoru na logarytm iloczynu lub logarytm ilorazu, lub wzoru na zamianę podstawy logarytmu, lub wzoru na logarytm potęgi oraz ewentualne kilkukrotne przekształcenie wyrażenia wymiernego można otrzymać tezę
ALBO

- zapisanie jednego równania z a , b oraz niewiadomą x , np.

$$(a-1)x = \frac{b}{2} + 1 \quad (\text{dla sposobu III}),$$

ALBO

- zapisanie liczby 2 w postaci $7^{\frac{1}{a-1}}$ oraz liczby 27 w postaci $2^{\frac{b}{2}}$ (dla sposobu IV).

1 pkt – zastosowanie wzoru na zamianę podstawy logarytmu lub na logarytm iloczynu, lub na

$$\text{logarytm ilorazu, np. } \log_7 54 = \frac{\log_2 54}{\log_2 7}, \log_7 54 = \frac{\log_{\sqrt{2}} 54}{\log_{\sqrt{2}} 7},$$

$$\log_{\sqrt{2}} 27 + 2 = \log_{\sqrt{2}}(27 \cdot 2), \quad 2 \log_2 14 - 2 = 2 \log_2 \left(\frac{14}{2}\right)$$

ALBO

- zapisanie liczb 7 oraz 27 jako potęg liczby 2: $7 = 2^{a-1}$ i $27 = 2^{\frac{b}{2}}$ oraz zapisanie równania $7^x = 54$ (dla sposobu III),

ALBO

- zapisanie liczby 2 w postaci $7^{\frac{1}{a-1}}$ (dla sposobu IV).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przekształcamy wyrażenie $\log_7 54$, stosując wzór na zamianę podstawy logarytmu, a następnie wzory na logarytm iloczynu oraz logarytm ilorazu:

$$\log_7 54 = \frac{\log_2 54}{\log_2 7} = \frac{\log_2 27 + \log_2 2}{\log_2 14 - \log_2 2} = \frac{\frac{\log_{\sqrt{2}} 27}{\log_{\sqrt{2}} 2} + 1}{a-1} = \frac{\frac{b}{2} + 1}{a-1} = \frac{b+2}{2a-2}$$

To należało wykazać.

Sposób II

Przekształcamy wyrażenie $\frac{b+2}{2a-2}$, korzystając z założenia oraz ze wzoru zamianę podstawy logarytmu:

$$\frac{b+2}{2a-2} = \frac{\log_{\sqrt{2}} 27 + 2}{2 \log_2 14 - 2} = \frac{\frac{\log_2 27}{\log_2 \sqrt{2}} + 2}{2 \cdot (\log_2 14 - 1)} = \frac{2 \cdot (\log_2 27 + 1)}{2 \cdot (\log_2 14 - 1)} = \frac{\log_2 27 + 1}{\log_2 14 - 1}$$

Stąd i ze wzorów na sumę logarytmów, różnicę logarytmów oraz wzoru na zamianę podstawy logarytmu otrzymujemy dalej

$$\frac{\log_2 27 + 1}{\log_2 14 - 1} = \frac{\log_2 27 + \log_2 2}{\log_2 14 - \log_2 2} = \frac{\log_2 54}{\log_2 7} = \log_7 54$$

$$\text{Zatem } \log_7 54 = \frac{b+2}{2a-2}.$$

To należało wykazać.

Sposób III

Korzystamy z definicji logarytmu oraz z założenia i otrzymujemy $2^a = 14$ oraz

$$(\sqrt{2})^b = 27. \text{ Stąd } 7 = 2^{a-1} \text{ oraz } 27 = 2^{\frac{b}{2}}.$$

Oznaczmy przez x liczbę rzeczywistą taką, że $7^x = 54$. Wtedy

$$2^{(a-1)x} = 2 \cdot 27$$

$$2^{(a-1)x} = 2 \cdot 2^{\frac{b}{2}}$$

$$2^{(a-1)x} = 2^{\frac{b}{2} + 1}$$

Stąd

$$(a-1)x = \frac{b}{2} + 1$$

$$x = \frac{b+2}{2(a-1)}$$

$$\text{Zatem } \log_7 54 = x = \frac{b+2}{2a-2}.$$

To należało wykazać.

Sposób IV

Korzystamy z definicji logarytmu oraz z założenia i otrzymujemy $2^a = 14$ oraz

$$(\sqrt{2})^b = 27. \text{ Stąd } 7 = 2^{a-1}, \text{ czyli } 2 = 7^{\frac{1}{a-1}}, \text{ oraz } 27 = 2^{\frac{b}{2}}. \text{ Zatem}$$

$$54 = 27 \cdot 2 = 2^{\frac{b}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{a-1}} = 7^{\frac{b}{2(a-1)}} \cdot 7^{\frac{1}{a-1}} = 7^{\frac{b}{2(a-1)} + \frac{1}{a-1}} = 7^{\frac{b+2}{2a-2}}$$

$$\text{czyli } \log_7 54 = \frac{b+2}{2a-2}.$$

To należało wykazać.

Zadanie 7. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 7.2R) stosuje twierdzenie Talesa [...] do obliczania długości odcinków [...].

Zasady oceniania (dla sposobów I – III)

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – wyznaczenie długości odcinka CL (lub LB) w zależności od długości odcinka DM ,

np. $|CL| = a - \frac{1}{2} \cdot |DM|$, $|LB| = \frac{1}{2} \cdot |DM|$ **oraz** uzasadnienie, że trójkąty MDN i KBL są podobne (dla sposobu I)

ALBO

– uzasadnienie, że trójkąty MDN i KBL są podobne **oraz** zapisanie długości odcinków DE oraz FL za pomocą jednej zmiennej (lub zapisanie związku między nimi), np. $|DE| = 2x$ i $|FL| = \frac{1}{2}x$ (dla sposobu II).

ALBO

– wyznaczenie współrzędnych wierzchołków trapezu $KLMN$ w zależności od a oraz parametru c : $K = \left(\frac{5a-c}{2}, 0\right)$ oraz $L = (2a, c-a)$ oraz $M = (2c-2a, a)$ oraz $N = (0, 5a-4c)$ (dla sposobu III).

1 pkt – uzasadnienie, że trójkąty MDN i KBL są podobne (dla sposobów I oraz II)

ALBO

– wyznaczenie długości odcinka CL (lub LB) w zależności od długości odcinka DM , np. $|CL| = a - \frac{1}{2} \cdot |DM|$, $|LB| = \frac{1}{2} \cdot |DM|$ (dla sposobu I),

ALBO

– zapisanie długości odcinków DE oraz FL za pomocą jednej zmiennej (lub zapisanie związku między nimi), np. $|DE| = 2x$ i $|FL| = x$ (dla sposobu II),

ALBO

– umieszczenie prostokąta $ABCD$ w układzie współrzędnych i zapisanie współrzędnych jego wierzchołków, np. $A = (0, 0)$ i $B = (2a, 0)$ i $C = (2a, a)$ i $D = (0, a)$ **oraz** zapisanie równania prostej ML : $y = -\frac{1}{2}x + c$ (dla sposobu III).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania**Sposób I**

Oznaczmy przez a długość boku AD . Wtedy $|AB| = 2a$.

Kąty DMN i BKL są naprzemianległe oraz $MN \parallel KL$, więc te kąty mają równe miary. Zatem trójkąty prostokątne MDN i KBL są podobne (na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów).

Ponieważ $ML \parallel DB$, więc korzystając z twierdzenia Talesa, otrzymujemy

$$|LB| = \frac{1}{2} \cdot |DM|$$

Strona 8 z 43

Kąty DMN i BKL są naprzemianległe oraz $MN \parallel KL$, więc te kąty mają równe miary. Zatem trójkąty prostokątne MDN i KBL są podobne (na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów). Ponieważ stosunek odpowiednich wysokości tych trójkątów jest równy $\frac{|DE|}{|FB|} = \frac{2x}{\frac{1}{2}x} = 4$, więc trójkąt MDN jest podobny do trójkąta KBL w skali 4.

Ponieważ stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa, więc stosunek pola trójkąta MDN do pola trójkąta KBL jest równy 16. To należało wykazać.

Sposób III

Oznaczmy przez a długość boku AD . Wtedy $|AB| = 2a$.

Umieszczamy prostokąt $ABCD$ w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) tak, że $A = (0, 0)$, $B = (2a, 0)$, $C = (2a, a)$, $D = (0, a)$.

Ponieważ stosunek $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{1}{2}$ oraz $ML \parallel BD$, więc prosta ML ma równanie

$$y = -\frac{1}{2}x + c, \text{ przy pewnym } c \in (a, 2a).$$

Wtedy $M = (2c - 2a, a)$ oraz $L = (2a, c - a)$.

Wyznaczamy równania prostych MN oraz KL , które są prostopadłe do ML :

$$MN: y = 2(x - 2c + 2a) + a$$

$$KL: y = 2(x - 2a) + c - a$$

Stąd $N = (0, 5a - 4c)$ oraz $K = \left(\frac{5a-c}{2}, 0\right)$.

Wyznaczamy długości boków trójkątów MDN i KBL :

$$|ND| = |a - (5a - 4c)| = 4 \cdot |c - a|$$

$$|DM| = |2c - 2a - 0| = 2 \cdot |c - a|$$

$$|KB| = \left|2a - \frac{5a-c}{2}\right| = \frac{1}{2} \cdot |c - a|$$

$$|BL| = |c - a - 0| = |c - a|$$

Wyznaczamy stosunek pól trójkątów MDN i KBL :

$$\frac{P_{\Delta MDN}}{P_{\Delta KBL}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |ND| \cdot |DM|}{\frac{1}{2} \cdot |KB| \cdot |BL|} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot |c - a| \cdot 2 \cdot |c - a|}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot |c - a| \cdot |c - a|} = 16$$

To należało wykazać.

Zadanie 8. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 3.1R) stosuje wzory Viète'a; 3.2R) rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem.

Zasady oceniania

4 pkt – spełnienie następujących trzech warunków:

1) poprawne rozwiązanie warunku $m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$: $m = 2$,

2) poprawne rozwiązanie warunku $\Delta > 0$: $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

LUB

wyznaczenie wszystkich wartości parametru m , dla których $x_1 \neq x_2$: $m \neq 1$,

LUB

sprawdzenie, że dla $m = 2$ są spełnione warunki zadania,

3) zapisanie poprawnej odpowiedzi: $m = 2$.

3 pkt – poprawnie rozwiązany warunek $\Delta > 0$: $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ **oraz** zapisanie równania

z jedną niewiadomą m , np. $m \cdot [(-2m)^2 - 2 \cdot (2m - 1)] = 3m \cdot (2m - 1) + 2$

ALBO

– rozwiązanie warunku $m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$: $m = 2$,

ALBO

– zapisanie, że $x_1 \neq x_2$ dla $m \neq 1$ **oraz** zapisanie równania z jedną niewiadomą m , np. $m \cdot [(-2m)^2 - 2 \cdot (2m - 1)] = 3m \cdot (2m - 1) + 2$.

2 pkt – poprawnie rozwiązany warunek $\Delta > 0$: $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ **oraz** przekształcenie warunku

$m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie

zastosowanie wzorów Viète'a, np. $m \cdot [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2] = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą m , np.

$$m \cdot [(-2m)^2 - 2 \cdot (2m - 1)] = 3m \cdot (2m - 1) + 2$$

ALBO

– wyznaczenie pierwiastków trójmianu $x^2 + 2mx + (2m - 1)$: (-1) oraz $1 - 2m$, **oraz** zapisanie, że $x_1 \neq x_2$ dla $m \neq 1$.

1 pkt – poprawnie rozwiązany warunek $\Delta > 0$: $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

ALBO

– przekształcenie warunku $m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a, np.

$$m \cdot [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2] = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$$

ALBO

– wyznaczenie pierwiastków trójmianu $x^2 + 2mx + (2m - 1)$: (-1) oraz $1 - 2m$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający przyjmie, że $x_1^2 + x_2^2$ jest równe $(x_1 + x_2)^2$ oraz doprowadzi rozwiązanie konsekwentnie do końca, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania**Sposób I**

Równanie $x^2 + 2mx + 2m - 1 = 0$ ma dokładnie dwa różne rozwiązania rzeczywiste tylko wówczas, gdy wyróżnik Δ trójmianu kwadratowego $x^2 + 2mx + (2m - 1)$ jest dodatni.

Rozwiązujemy warunek $\Delta > 0$:

$$(2m)^2 - 4 \cdot (2m - 1) > 0$$

$$4m^2 - 8m + 4 > 0$$

$$4(m - 1)^2 > 0$$

$$m \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

Przekształcamy warunek $m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a i rozwiązujemy uzyskane równanie z niewiadomą m :

$$m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$$

$$m \cdot [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2] = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$$

$$m \cdot [(-2m)^2 - 2 \cdot (2m - 1)] = 3m \cdot (2m - 1) + 2$$

$$4m^3 - 10m^2 + 5m - 2 = 0$$

$$4m^3 - 8m^2 - 2m^2 + 4m + m - 2 = 0$$

$$4m^2(m - 2) - 2m(m - 2) + (m - 2) = 0$$

$$(m - 2)(4m^2 - 2m + 1) = 0$$

$$m - 2 = 0 \quad \vee \quad 4m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$m = 2$$

Ponieważ $4m^2 - 2m + 1 = 3m^2 + (m - 1)^2 > 0$, więc równanie $4m^2 - 2m + 1 = 0$ nie ma rozwiązań rzeczywistych.

Zatem warunek $m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$ jest spełniony tylko dla $m = 2$.

Ponieważ $2 \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, więc warunki zadania są spełnione tylko dla $m = 2$.

Sposób II

Zauważamy, że liczba (-1) jest rozwiązaniem równania $x^2 + 2mx + 2m - 1 = 0$.

Korzystając ze wzorów Viète'a, mamy $x_1 + x_2 = -2m$, czyli $-1 + x_2 = -2m$, więc $x_2 = 1 - 2m$. Zatem $x_1 \neq x_2$ gdy $m \neq 1$.

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m , dla których spełniony jest warunek $m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$:

$$m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$$

$$m \cdot [(-1)^2 + (1 - 2m)^2] = 3m \cdot (-1) \cdot (1 - 2m) + 2$$

$$m \cdot (1 + 1 - 4m + 4m^2) = 6m^2 - 3m + 2$$

$$4m^3 - 10m^2 + 5m - 2 = 0$$

$$4m^3 - 8m^2 - 2m^2 + 4m + m - 2 = 0$$

$$4m^2(m - 2) - 2m(m - 2) + (m - 2) = 0$$

$$(m - 2)(4m^2 - 2m + 1) = 0$$

$$m - 2 = 0 \quad \vee \quad 4m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$m = 2$$

Wyróżnik trójmianu $4m^2 - 2m + 1$ jest ujemny, więc równanie $4m^2 - 2m + 1 = 0$ nie ma rozwiązań rzeczywistych.

Zatem warunek $m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$ jest spełniony tylko dla $m = 2$.

Warunki zadania są spełnione tylko dla $m = 2$.

Zadanie 9. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 6.6R) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne [...].

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$.

3 pkt – rozwiązanie równania $\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$ w zbiorze $\mathbb{R}$, np.:

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \cdot k \text{ lub } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ lub } x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z},$$

ALBO

– spełnienie jednego z kryteriów określonych w zasadach oceniania za 2 punkty **oraz**

$$\text{rozwiązanie równania } \cos(3x) = 0 \text{ w przedziale } [0, \pi]: \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6},$$

ALBO

– spełnienie jednego z kryteriów określonych w zasadach oceniania za 2 punkty **oraz**

$$\text{rozwiązanie równania } \cos x + \cos(3x) = 0 \text{ w przedziale } [0, \pi]: \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4},$$

ALBO

– spełnienie jednego z kryteriów określonych w zasadach oceniania za 2 punkty **oraz**

$$\text{rozwiązanie równania } \cos(2x) = 0 \text{ w przedziale } [0, \pi]: \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4},$$

ALBO

– spełnienie jednego z kryteriów określonych w zasadach oceniania za 2 punkty **oraz**

$$\text{rozwiązanie równania } 4\cos^2 x - 2 = 0 \text{ w przedziale } [0, \pi]: \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4},$$

ALBO

– spełnienie jednego z kryteriów określonych w zasadach oceniania za 2 punkty **oraz**

$$\text{rozwiązanie równania } 2 - 4\sin^2 x = 0 \text{ w przedziale } [0, \pi]: \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}.$$

2 pkt – przekształcenie równoważne równania $\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$ do postaci alternatywy dwóch równań trygonometrycznych, z których jednym jest $\cos(3x) = 0$, np.:

$$\cos(3x) = 0 \text{ lub } 2\cos(2x)\cos x = 0,$$

$$\cos(3x) = 0 \text{ lub } \cos x + \cos(3x) = 0,$$

$$\cos(3x) = 0 \text{ lub } (4\cos^2 x - 2)\cos x = 0,$$

ALBO

– przekształcenie równoważne równania $\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$ do postaci alternatywy $\cos(3x) = 0$ lub $\cos(2x) = 0$ lub $\cos x = 0$.

1 pkt – przekształcenie równoważne równania do postaci $2\cos(3x)\cos x + 2\cos^2(3x) = 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania*Sposób I*

Przekształcamy równanie $\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$ równoważnie, stosując wzory na cosinus sumy oraz cosinus różnicy argumentów:

$$\cos(3x - x) + 2\cos^2(3x) + \cos(3x + x) = 0$$

$$\cos(3x)\cos x + \sin(3x)\sin x + 2\cos^2(3x) + \cos(3x)\cos x - \sin(3x)\sin x = 0$$

$$2\cos(3x)(\cos x + \cos(3x)) = 0$$

$$\cos(3x) = 0 \quad \vee \quad \cos x + \cos(3x) = 0$$

Rozwiązujemy równanie $\cos(3x) = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$\cos(3x) = 0$$

$$3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \cdot k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stąd otrzymujemy rozwiązania równania $\cos(3x) = 0$ w zbiorze $[0, \pi]$: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$.

Rozwiązujemy równanie $\cos x + \cos(3x) = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$\cos x + \cos(3x) = 0$$

$$\cos(3x) = -\cos x$$

$$\cos(3x) = \cos(\pi + x)$$

$$3x = \pi + x + 2k\pi \quad \vee \quad 3x = -\pi - x + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stąd otrzymujemy rozwiązania równania $\cos x + \cos(3x) = 0$ w zbiorze $[0, \pi]$: $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$.

Zatem rozwiązaniami równania $\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$ w zbiorze $[0, \pi]$ są liczby: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$.

Sposób II

Przekształcamy równanie $\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$ równoważnie, stosując wzór na sumę cosinusów:

$$2\cos\left(\frac{2x+4x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2x-4x}{2}\right) + 2\cos^2(3x) = 0$$

$$2\cos(3x)\cos(-x) + 2\cos^2(3x) = 0$$

$$2\cos(3x)(\cos x + \cos(3x)) = 0$$

$$\cos(3x) = 0 \quad \vee \quad \cos x + \cos(3x) = 0$$

Rozwiązujemy równanie $\cos(3x) = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$\cos(3x) = 0$$

$$3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \cdot k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stąd otrzymujemy rozwiązania równania $\cos(3x) = 0$ w zbiorze $[0, \pi]$: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$.

Rozwiązujemy równanie $\cos x + \cos(3x) = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$\cos x + \cos(3x) = 0$$

$$2 \cos\left(\frac{x+3x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-3x}{2}\right) = 0$$

$$\cos(2x) \cdot \cos(-x) = 0$$

$$\cos(2x) = 0 \quad \vee \quad \cos x = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stąd otrzymujemy rozwiązania równania $\cos x + \cos(3x) = 0$ w zbiorze $[0, \pi]$: $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$.

Zatem rozwiązaniami równania $\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$ w zbiorze $[0, \pi]$ są liczby: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$.

Zadanie 10. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 7.1R) stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu.

Zasady oceniania (dla sposobu I)

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

3 pkt – obliczenie długości jednej z przekątnych czworokąta $ABCD$, np. $d = 7$, $|AC| = \frac{39}{7}$,
ALBO

– obliczenie cosinusa jednego z kątów czworokąta $ABCD$, np. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$,

$$\cos \gamma = -\frac{1}{2}, \cos |\sphericalangle ABC| = -\frac{71}{98}, \cos |\sphericalangle CDA| = \frac{71}{98}.$$

2 pkt – zapisanie równań $d^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos \alpha$ oraz

$$d^2 = 3^2 + 5^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos \alpha$$

ALBO

– zapisanie równań $d^2 = 3^2 + 8^2 + 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos \gamma$ oraz

$$d^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos \gamma,$$

ALBO

– zapisanie równań $|AC|^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos |\sphericalangle ABC|$ oraz

$$|AC|^2 = 8^2 + 5^2 + 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos |\sphericalangle ABC|,$$

ALBO

– zapisanie równań $|AC|^2 = 3^2 + 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos |\sphericalangle CDA|$ oraz

$$|AC|^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos |\sphericalangle CDA|.$$

1 pkt – zapisanie związków $d^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos \alpha$ oraz $\alpha + \gamma = 180^\circ$

ALBO

– zapisanie związków $d^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos \gamma$ oraz $\alpha + \gamma = 180^\circ$,

ALBO

– zapisanie związków $d^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos \alpha$ oraz

$$d^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos \gamma,$$

ALBO

– zapisanie związków $|AC|^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos |\sphericalangle ABC|$ oraz

$$|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA| = 180^\circ,$$

ALBO

– zapisanie związków $|AC|^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos |\sphericalangle CDA|$ oraz

$$|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA| = 180^\circ,$$

ALBO

– zapisanie związków $|AC|^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos |\sphericalangle ABC|$ oraz

$$|AC|^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos |\sphericalangle CDA|.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla sposobu II)

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

3 pkt – obliczenie długości przekątnej AC : $|AC| = \frac{39}{7}$

ALBO

– obliczenie $\cos \delta$: $\cos \delta = \frac{13}{14}$.

2 pkt – zapisanie równań $e^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot (2 \cos^2 \delta - 1)$ oraz $\frac{1}{2}e = \cos \delta$.

1 pkt – zapisanie związków $e^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos |\angle ADC|$ oraz $|\angle ADC| = 2\delta$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla sposobu III)

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

3 pkt – obliczenie długości przekątnej AC : $|AC| = \frac{39}{7}$.

2 pkt – zapisanie, że trójkąt ABC' jest równoboczny.

1 pkt – uzasadnienie, że BD jest dwusieczną kąta ADC oraz zapisanie, że C' leży na odcinku AD .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania**Sposób I**

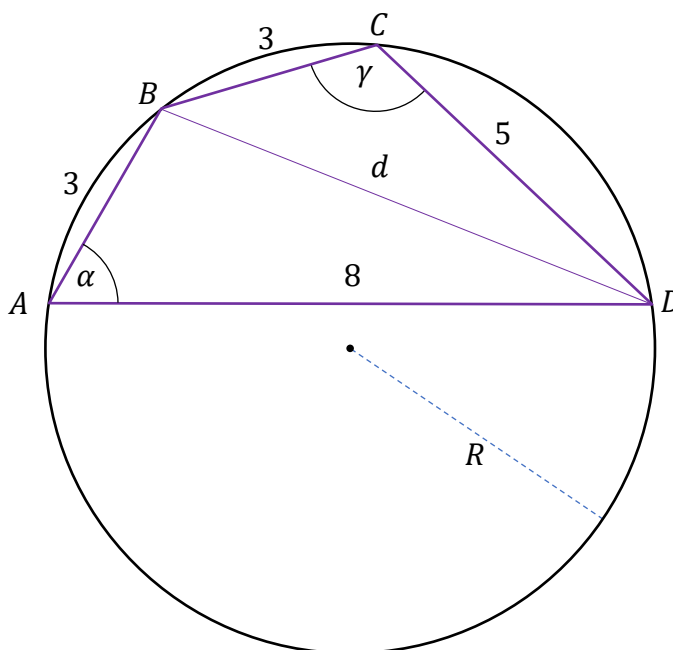
Przyjmijmy następujące oznaczenia:

R – promień okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$,

d – długość przekątnej BD ,

α – miara kąta BAD ,

γ – miara kąta BCD .



Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkątów ABD oraz BCD i otrzymujemy

$$d^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos \alpha \quad \wedge \quad d^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos \gamma$$

Stąd i z twierdzenia o czworokącie wpisanym w okrąg mamy

$$73 - 48 \cos \alpha = 34 - 30 \cos(180^\circ - \alpha)$$

Po zastosowaniu wzorów redukcyjnych otrzymujemy

$$73 - 48 \cos \alpha = 34 + 30 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}$$

Zatem $\alpha = 60^\circ$ i $d^2 = 73 - 48 \cdot \frac{1}{2} = 49$, czyli $d = 7$.

Okrąg opisany na czworokącie $ABCD$ jest jednocześnie okręgiem opisanym na trójkącie ABD . Stosując do tego trójkąta twierdzenie sinusów, otrzymujemy

$$\frac{d}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

$$R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

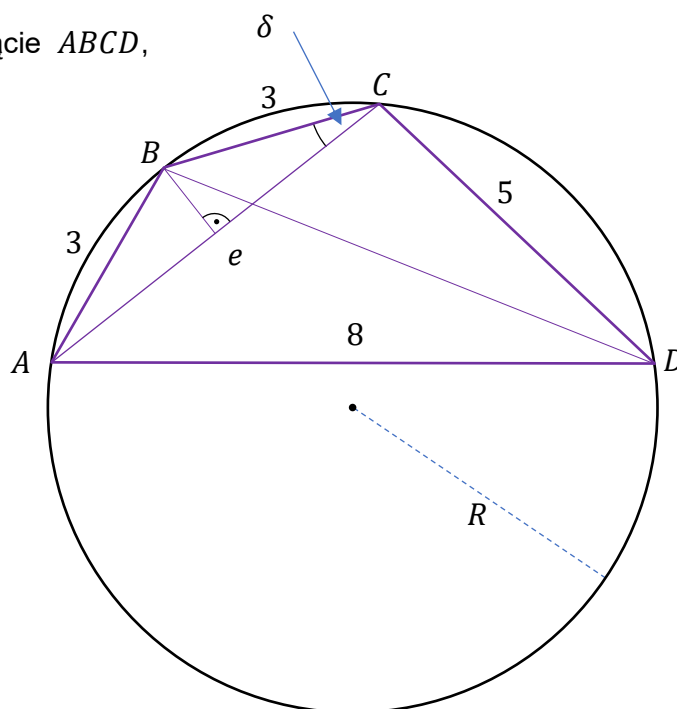
Sposób II

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

R – promień okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$,

e – długość przekątnej AC ,

δ – miara kąta ostrego ACB .



Ponieważ $|AB| = |BC|$, więc $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACB| = \delta$. Kąty wpisane ADB i ACB są oparte na tym samym łuku, więc $|\sphericalangle ADB| = \delta$. Kąty wpisane BAC i BDC są oparte na tym samym łuku, więc $|\sphericalangle BDC| = \delta$.

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta ADC oraz wzór na cosinus podwojonego argumentu i otrzymujemy:

$$e^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos(2\delta)$$

$$e^2 = 89 - 80 \cdot (2 \cos^2 \delta - 1)$$

$$e^2 = 169 - 160 \cos^2 \delta$$

Z trójkąta równoramiennego ACB otrzymujemy $\frac{1}{2}e = \cos \delta$, więc $e = 6 \cos \delta$. Zatem

$$(6 \cos \delta)^2 = 169 - 160 \cos^2 \delta$$

$$196 \cos^2 \delta = 169$$

$$\cos \delta = \frac{13}{14} \quad \vee \quad \cos \delta = -\frac{13}{14}$$

Kąt ACB w trójkącie równoramiennym ABC jest ostry, więc $\cos \delta = \frac{13}{14}$,

czyli $\sin \delta = \frac{3\sqrt{3}}{14}$.

Okrąg opisany na czworokącie $ABCD$ jest jednocześnie okręgiem opisanym na trójkącie ABC . Stosując do tego trójkąta twierdzenie sinusów, otrzymujemy

$$\frac{3}{\sin \delta} = 2R$$

$$\frac{3}{\frac{3\sqrt{3}}{14}} = 2R$$

$$R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

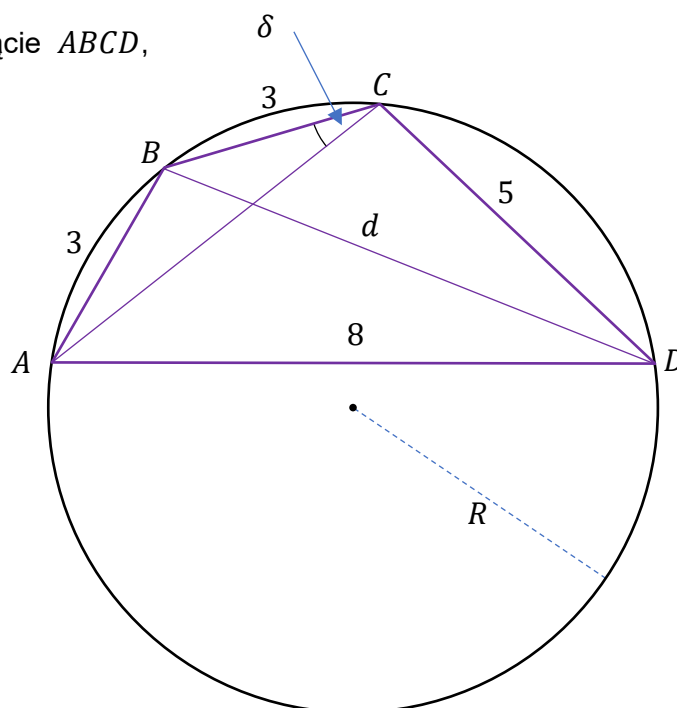
Sposób III

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

R – promień okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$,

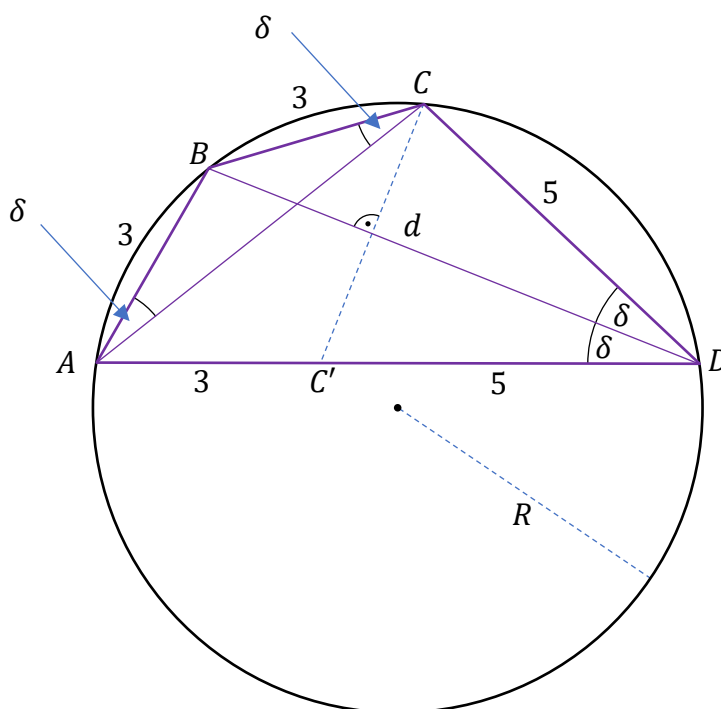
d – długość przekątnej BD ,

δ – miara kąta ostrego ACB .



Ponieważ $|AB| = |BC|$, więc $|\angle BAC| = |\angle ACB| = \delta$. Kąty wpisane ADB i ACB sąparte na tym samym łuku, więc $|\angle ADB| = \delta$. Kąty wpisane BAC i BDC sąoparte na tym samym łuku, więc $|\angle BDC| = \delta$. Zatem BD jest dwusieczną kąta ADC .

Niech C' będzie obrazem punktu C w symetrii osiowej względem prostej BD . Wtedy BD będzie zawierać wysokość trójkąta równoramiennego $CC'D$ i $|C'D| = |CD| = 5$, więc C' będzie leżał na odcinku AD .



Zatem czworokąt $BCDC'$ jest deltoidem i $|BC'| = |BC| = 3$.

Ponieważ $|AC'| = |AD| - |DC'| = 8 - 5 = 3$, więc trójkąt ABC' jest równoboczny, czyli $|\sphericalangle BAD| = 60^\circ$.

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta BAD i otrzymujemy:

$$d^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ$$

$$d = 7$$

Okrąg opisany na czworokącie $ABCD$ jest jednocześnie okręgiem opisanym na trójkącie ABD . Stosując do tego trójkąta twierdzenie sinusów, otrzymujemy

$$\frac{d}{\sin |\sphericalangle BAD|} = 2R$$

$$\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

$$R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

Zadanie 11. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 11.3R) korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej.

Zasady oceniania (dla sposobów I oraz II)

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik niezależny od a, b, c :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2 \text{ (lub } f(x) = (x + 2)(x^2 + x + 1)).$$

3 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą a , które wynika z warunków $f(-2) = 0$ i $f(1) = 9$ oraz $f'(-2) = 3$, np. $9 = 1 + a + (4a - 9) + (4a - 10)$ (dla sposobu I)

ALBO

– zapisanie układu dwóch niezależnych równań z dwiema niewiadomymi d oraz e , np. $3 = (-2)^2 + d \cdot (-2) + e + 0$ i $9 = (1 + 2)(1^2 + d + e)$ (dla sposobu II),

– zapisanie układu dwóch niezależnych równań z dwiema (spośród a, b oraz c) niewiadomymi, które wynikają z warunków $f(-2) = 0$ i $f(1) = 9$ oraz z warunku $f'(-2) = 3$, np.

$$0 = (-2)^3 + a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + 9 - 1^3 - a \cdot 1^2 - b \cdot 1 \text{ oraz}$$

$$3 = 3 \cdot (-2)^2 + 2a \cdot (-2) + b.$$

2 pkt – wyznaczenie (z warunków $f'(-2) = 3$ i $f(-2) = 0$) b oraz c w zależności od a : $b = 4a - 9$ i $c = 4a - 10$ (dla sposobu I)

ALBO

– wyznaczenie (z warunków $f'(-2) = 3$ i $f(1) = 9$) b oraz c w zależności od a : $b = 4a - 9$ i $c = 17 - 5a$ (dla sposobu II),

ALBO

– zapisanie warunku $f(1) = 9$ w postaci równania z dwiema niewiadomymi d oraz e , np. $9 = (1 + 2)(1^2 + d + e)$ (dla sposobu II),

ALBO

– zapisanie warunku $f'(-2) = 3$ w postaci równania z dwiema niewiadomymi d oraz e , np. $3 = (-2)^2 + d \cdot (-2) + e + 0$ (dla sposobu II),

ALBO

– zapisanie układu trzech niezależnych równań z trzema niewiadomymi a, b oraz c , które wynikają z warunków $f(-2) = 0$ i $f(1) = 9$ oraz $f'(-2) = 3$, np.

$$0 = (-2)^3 + a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \text{ oraz } 9 = 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \text{ oraz}$$

$$3 = 3 \cdot (-2)^2 + 2a \cdot (-2) + b,$$

ALBO

– obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej: 3 oraz wyznaczenie (z warunków $f(-2) = 0$ i $f(1) = 9$) b w zależności od a : $b = a$.

1 pkt – obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej: 3 (dla sposobów I oraz II),

ALBO

– zapisanie wzoru funkcji f w postaci $f(x) = (x + 2)(x^2 + dx + e)$ (dla sposobu II),

ALBO

- zapisanie układu dwóch niezależnych równań z trzema niewiadomymi a , b oraz c , które wynikają z warunków $f(-2) = 0$ i $f(1) = 9$, np.

$$0 = (-2)^3 + a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \text{ oraz } 9 = 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla sposobu III)

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik niezależny od a , b , c :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2 \text{ (lub } f(x) = (x + 2)(x^2 + x + 1)).$$

3 pkt – wyznaczenie równania stycznej, np. $g(x) = 3(x + 2)$, **oraz** zapisanie związków

$$h(-2) = 0 \text{ i } h'(-2) = 0, \text{ **oraz** przedstawienie wielomianu } h \text{ w postaci}$$

$$h(x) = (x + k)(x + 2)^2$$

ALBO

- wyznaczenie wzoru wielomianu h , np. $h(x) = (x - 1)(x + 2)^2$.

2 pkt – obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej: 3 **oraz** zapisanie związków

$$h(-2) = 0 \text{ i } h'(-2) = 0$$

ALBO

- zapisanie związków $h(-2) = 0$ i $h'(-2) = 0$ **oraz** przedstawienie wielomianu h w postaci $h(x) = (x + k)(x + 2)^2$.

1 pkt – obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej: 3

ALBO

- zapisanie związków $h(-2) = 0$ oraz $h'(-2) = 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Wzór wielomianu f ma postać $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ przy pewnych $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Styczna jest prostą, na której leżą punkty $A = (-2, 0)$ i $P = (1, 9)$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy μ tej prostej: $\mu = \frac{9 - 0}{1 - (-2)} = 3$.

Korzystając z geometrycznej interpretacji pochodnej, mamy $f'(-2) = 3$.

Obliczając pochodną wielomianu f , otrzymujemy $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

Zatem $3 = 3 \cdot (-2)^2 + 2a \cdot (-2) + b$. Stąd $b = 4a - 9$.

Ponieważ $f(-2) = 0$, więc $(-2)^3 + a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 0$, czyli

$$-8 + 4a + (4a - 9) \cdot (-2) + c = 0$$

$$c = 4a - 10$$

Ponieważ $f(1) = 9$, więc $9 = 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$, czyli

$$9 = 1 + a + (4a - 9) + (4a - 10)$$

$$a = 3$$

Zatem $b = 4 \cdot 3 - 9 = 3$ oraz $c = 4 \cdot 3 - 10 = 2$.

Wielomian f jest określony wzorem $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$.

Sposób II

Zapisujemy wzór wielomianu f w postaci $f(x) = (x + 2)(x^2 + dx + e)$, gdzie $d, e \in \mathbb{R}$.
Styczna jest prostą, na której leżą punkty $A = (-2, 0)$ i $P = (1, 9)$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy μ tej prostej: $\mu = \frac{9 - 0}{1 - (-2)} = 3$.

Korzystając z geometrycznej interpretacji pochodnej, mamy $f'(-2) = 3$.

Obliczając pochodną wielomianu f , otrzymujemy

$$f'(x) = 1 \cdot (x^2 + dx + e) + (x + 2) \cdot (2x + d)$$

Zatem $3 = (-2)^2 + d \cdot (-2) + e + 0$. Stąd $e = 2d - 1$.

Ponieważ $f(1) = 9$, więc $9 = (1 + 2)(1^2 + d + e)$, czyli

$$9 = 3 \cdot (1 + d + 2d - 1)$$

$$d = 1$$

Zatem $e = 2 \cdot 1 - 1 = 1$.

Wielomian f jest określony wzorem $f(x) = (x + 2)(x^2 + x + 1)$.

Sposób III

Niech $y = g(x)$ będzie równaniem stycznej do wykresu funkcji f w punkcie A . Niech h będzie wielomianem trzeciego stopnia określonym następująco: $h(x) = f(x) - g(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Punkt A leży na wykresach funkcji f oraz g , więc $f(-2) = g(-2)$, czyli $h(-2) = 0$.

Korzystając z geometrycznej interpretacji pochodnej, mamy $f'(-2) = g'(-2)$, więc $h'(-2) = f'(-2) - g'(-2) = 0$. Zatem liczba (-2) jest pierwiastkiem podwójnym wielomianu h , czyli $h(x) = (x + k)(x + 2)^2$ przy pewnym $k \in \mathbb{R}$.

Punkt P leży na wykresach funkcji f oraz g , więc $f(1) = 9$ i $g(1) = 9$. Stąd $h(1) = f(1) - g(1) = 0$. Zatem

$$h(1) = (1 + k)(1 + 2)^2$$

$$0 = (1 + k) \cdot 9$$

$$k = -1$$

czyli $h(x) = (x - 1)(x + 2)^2$.

Styczna jest prostą, na której leżą punkty $A = (-2, 0)$ i $P = (1, 9)$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy μ tej prostej: $\mu = \frac{9 - 0}{1 - (-2)} = 3$. Zatem

$$g(x) = 3(x + 2).$$

Wyznaczamy wzór funkcji f :

$$\begin{aligned} f(x) &= h(x) + g(x) = (x - 1)(x + 2)^2 + 3(x + 2) = (x + 2)(x^2 + 2x - x - 2 + 3) = \\ &= (x + 2)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Zadanie 12. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 5.3R) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.

Zasady oceniania

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{245}{4}$.

4 pkt – obliczenie b_1 oraz q : $b_1 = 35$ oraz $q = \frac{3}{7}$.

3 pkt – obliczenie różnicy ciągu (a_n) : $r = 4$ **oraz** odrzucenie przypadku $r = -5$.

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą r (albo a_1), np.

$$15 + 9r = (15 - 3r)(15 + 2r - 6),$$

$$a_1 + 14 \cdot \frac{15 - a_1}{5} = \left(a_1 + 2 \cdot \frac{15 - a_1}{5}\right) \cdot \left(a_1 + 7 \cdot \frac{15 - a_1}{5} - 6\right).$$

1 pkt – zapisanie układu dwóch niezależnych równań z niewiadomymi a_1 oraz r , np.

$$a_1 + 14r = (a_1 + 2r) \cdot (a_1 + 7r - 6) \text{ i } a_1 + 5r = 15.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Zdający może odrzucić otrzymaną wartość $r = -5$ bez komentarza.

2. Jeżeli zdający nie odrzuci wartości $q = -\frac{3}{2}$ i zastosuje wzór na sumę szeregu

geometrycznego dla $q = -\frac{3}{2}$, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za zapisanie układu równań, 1 punkt za zapisanie równania z jedną niewiadomą, 1 punkt za obliczenie $q = \frac{3}{7}$ oraz sumy dla $q = \frac{3}{7}$).

Przykładowe pełne rozwiązanie

Oznaczmy przez r różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) , natomiast przez q – iloraz ciągu geometrycznego (b_n) .

Ponieważ $a_6 = 15$ oraz $a_{15} = a_3 \cdot (a_8 - 6)$, więc stąd i z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$a_6 + 9r = (a_6 - 3r) \cdot (a_6 + 2r - 6)$$

$$15 + 9r = (15 - 3r)(15 + 2r - 6)$$

$$15 + 9r = (15 - 3r)(2r + 9)$$

$$6r^2 + 6r - 120 = 0$$

$$r^2 + r - 20 = 0$$

$$r = -5 \vee r = 4$$

Ciąg (a_n) jest rosnący, więc $r = 4$.

Zatem $b_1 = a_6 + 5r = 15 + 5 \cdot 4 = 35$, $b_2 = 15$ oraz $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{3}{7}$.

Ponieważ $\left|\frac{3}{7}\right| < 1$, więc suma S wszystkich wyrazów ciągu (b_n) istnieje i jest równa

$$S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{35}{1 - \frac{3}{7}} = \frac{245}{4}$$

Zadanie 13. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 9.1) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami [...], oblicza miary tych kątów; 9.2) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami [...], oblicza miary tych kątów.

Zasady oceniania (dla sposobów I – III)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 6.

4 pkt – wyznaczenie w zależności od x czterech spośród wielkości 1)-4) określonych w zasadach oceniania za 1 punkt

ALBO

– wyznaczenie pola powierzchni całkowitej ostrosłupa w zależności od x : $126\sqrt{3}x^2$.

3 pkt – wyznaczenie w zależności od x trzech spośród wielkości 1)-4) określonych w zasadach oceniania za 1 punkt.

2 pkt – wyznaczenie w zależności od x dwóch spośród wielkości 1)-4) określonych w zasadach oceniania za 1 punkt.

1 pkt – wyznaczenie w zależności od x jednej z poniższych wielkości 1)-4):

1) długości wysokości ściany bocznej, np. $|BE| = 5\sqrt{3}x$, $|DF| = 5\sqrt{7}x$,

2) długości krawędzi podstawy ABC : $|BC| = 2\sqrt{21}x$,

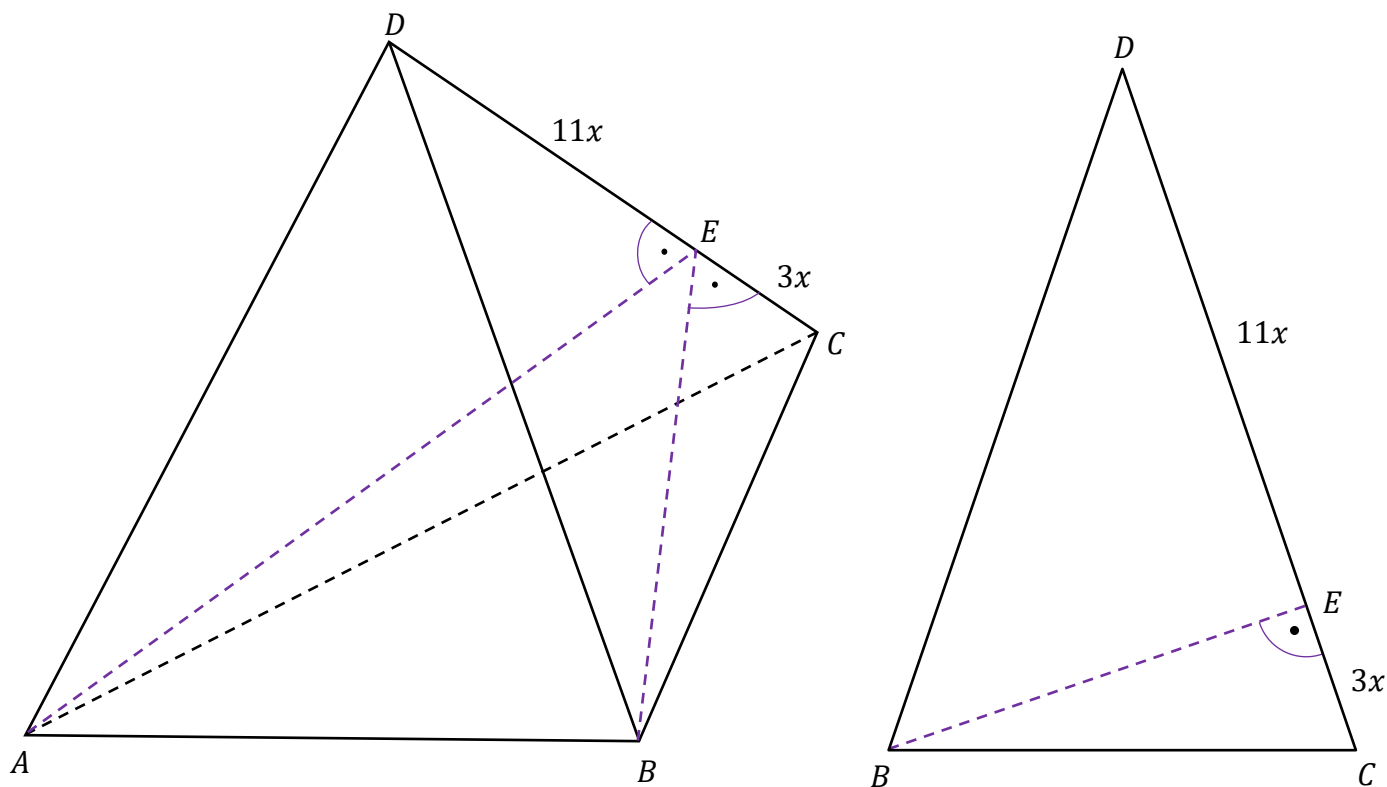
3) pola podstawy ABC : $21\sqrt{3}x^2$,

4) pola ściany bocznej (lub pola powierzchni bocznej): $35\sqrt{3}x^2$ (lub $105\sqrt{3}x^2$).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania**Sposób I**

Ponieważ $\frac{|CE|}{|ED|} = \frac{3}{11}$, więc $|CE| = 3x$ oraz $|ED| = 11x$ przy pewnym $x > 0$ (zobacz rysunki).



Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta BED i otrzymujemy:

$$|BE|^2 + |ED|^2 = |BD|^2$$

$$|BE|^2 + (11x)^2 = (14x)^2$$

$$|BE| = 5\sqrt{3}x$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta BCE i otrzymujemy:

$$|BC|^2 = |CE|^2 + |BE|^2$$

$$|BC|^2 = (3x)^2 + (5\sqrt{3}x)^2$$

$$|BC| = 2\sqrt{21}x$$

Wyznaczamy pole P_b powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego $ABCD$:

$$P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot |BE| = \frac{3}{2} \cdot 14x \cdot 5\sqrt{3}x = 105\sqrt{3}x^2$$

Wyznaczamy pole P_p podstawy ABC :

$$P_p = \frac{|BC|^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{(2\sqrt{21}x)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 21\sqrt{3}x^2$$

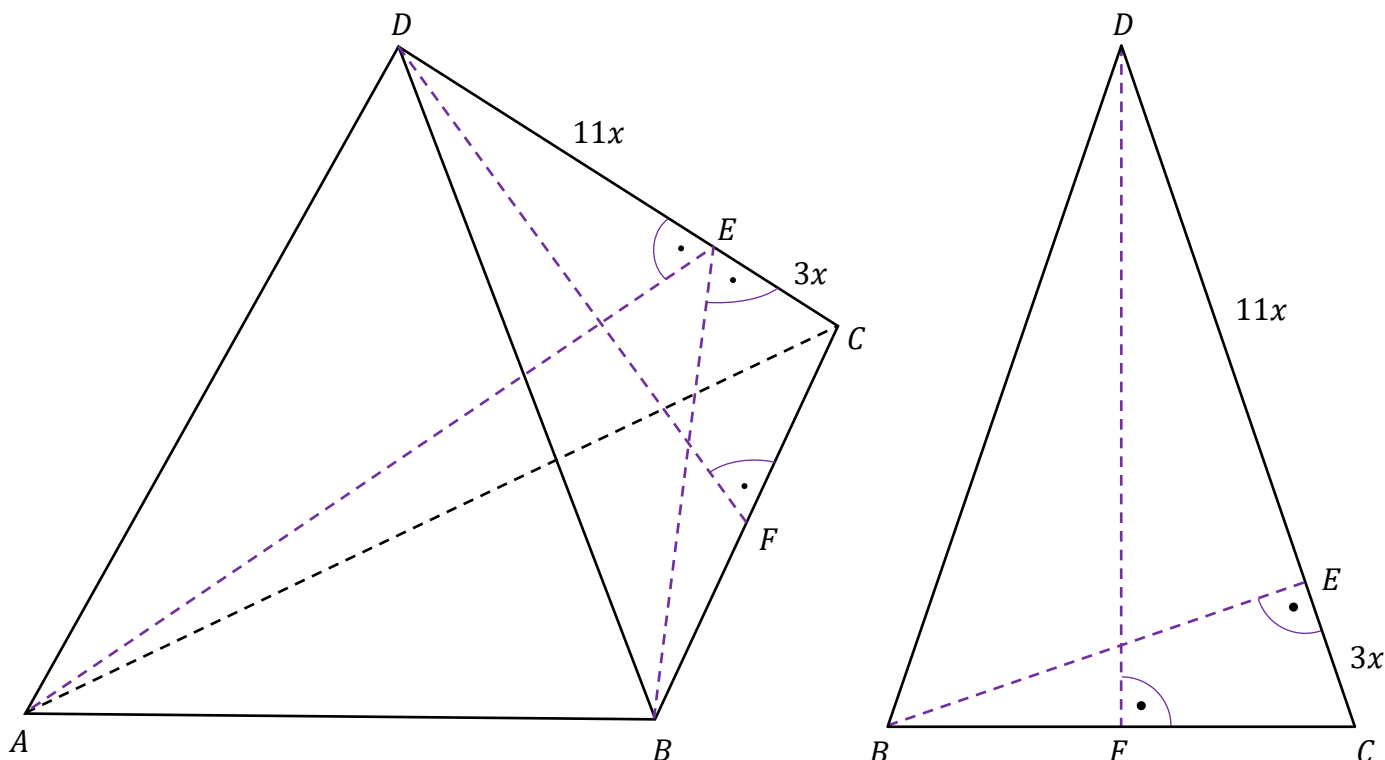
Obliczamy stosunek η pola powierzchni całkowitej ostrosłupa do pola podstawy ABC ostrosłupa:

$$\eta = \frac{P_b + P_p}{P_p} = \frac{105\sqrt{3}x^2 + 21\sqrt{3}x^2}{21\sqrt{3}x^2} = 6$$

Sposób II

Ponieważ $\frac{|CE|}{|ED|} = \frac{3}{11}$, więc $|CE| = 3x$ oraz $|ED| = 11x$ przy pewnym $x > 0$.

Niech F będzie spodkiem wysokości ściany bocznej BCD poprowadzonej z wierzchołka D na krawędź BC (zobacz rysunki).



Z podobieństwa trójkątów prostokątnych CEB oraz CFD otrzymujemy:

$$\frac{|EC|}{|BC|} = \frac{|FC|}{|CD|}$$

$$\frac{3x}{|BC|} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |BC|}{14x}$$

$$|BC| = 2\sqrt{21}x$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta CDF i otrzymujemy:

$$|CD|^2 = |DF|^2 + |FC|^2$$

$$(14x)^2 = |DF|^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{21}x\right)^2$$

$$|DF| = 5\sqrt{7}x$$

Wyznaczamy pole P_b powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego $ABCD$:

$$P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |DF| = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{21}x \cdot 5\sqrt{7}x = 105\sqrt{3}x^2$$

Wyznaczamy pole P_p podstawy ABC :

$$P_p = \frac{|BC|^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{(2\sqrt{21}x)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 21\sqrt{3}x^2$$

Obliczamy stosunek η pola powierzchni całkowitej ostrosłupa do pola podstawy ABC ostrosłupa:

$$\eta = \frac{P_b + P_p}{P_p} = \frac{105\sqrt{3}x^2 + 21\sqrt{3}x^2}{21\sqrt{3}x^2} = 6$$

Sposób III

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

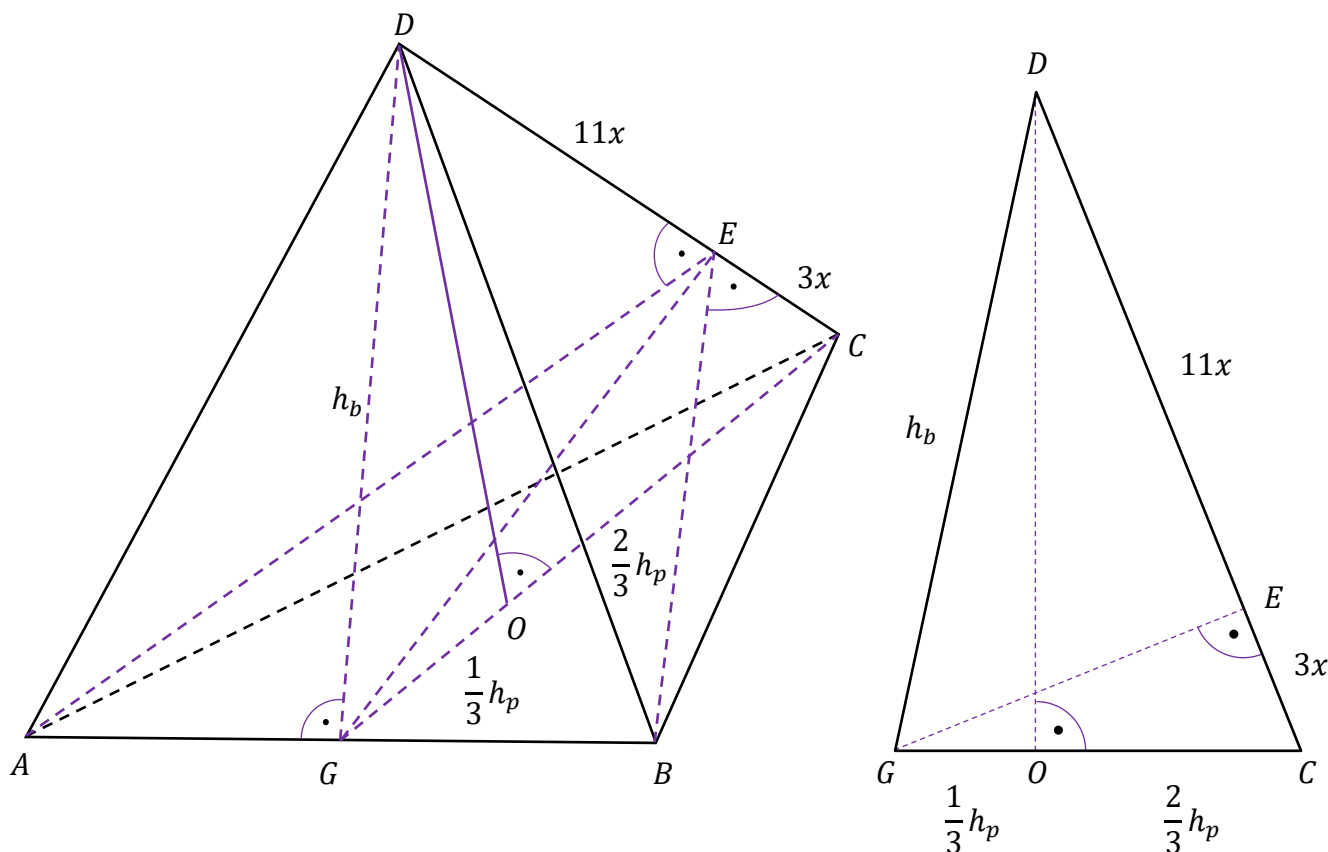
O – spodek wysokości ostrosłupa poprowadzonej z wierzchołka D na podstawę ABC ,

G – środek krawędzi AB ,

a – długość krawędzi podstawy ABC ,

h_b – wysokość ściany bocznej poprowadzonej z wierzchołka D ,

h_p – wysokość podstawy ABC (zobacz rysunki).



Ponieważ $\frac{|CE|}{|ED|} = \frac{3}{11}$, więc $|CE| = 3x$ oraz $|ED| = 11x$ przy pewnym $x > 0$.

Ostrosłup jest prawidłowy, więc punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie równobocznym ABC i jest jednocześnie środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Zatem

$$|OC| = \frac{2}{3} h_p = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ oraz } |OG| = \frac{1}{3} h_p = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Z podobieństwa trójkątów DOC i GEC mamy

$$\frac{|EC|}{|GC|} = \frac{|OC|}{|DC|}$$

$$\frac{3x}{h_p} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{14x}$$

$$\frac{3x}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{14x}$$

$$a = 2\sqrt{21}x$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta GBD i otrzymujemy:

$$|BD|^2 = |DG|^2 + |GB|^2$$

$$(14x)^2 = h_b^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{21}x\right)^2$$

$$h_b = 5\sqrt{7}x$$

Wyznaczamy pole P_b powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego $ABCD$:

$$P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_b = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{21}x \cdot 5\sqrt{7}x = 105\sqrt{3}x^2$$

Wyznaczamy pole P_p podstawy ABC :

$$P_p = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{(2\sqrt{21}x)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 21\sqrt{3}x^2$$

Obliczamy stosunek η pola powierzchni całkowitej ostrosłupa do pola podstawy ABC ostrosłupa:

$$\eta = \frac{P_b + P_p}{P_p} = \frac{105\sqrt{3}x^2 + 21\sqrt{3}x^2}{21\sqrt{3}x^2} = 6$$

Zadanie 14. (0–6)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 8.5R) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ [...]; 8.6R) wyznacza punkty wspólne prostej i okręgu.

Zasady oceniania (dla sposobów I–III)

6 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$.

5 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą – pierwszą lub drugą współrzędną punktu S , np.:

$$\left[x_S - \left(\frac{3}{5}x_S + \frac{8}{5} \right) \right]^2 + \left[-x_S - 3 - \left(-\frac{6}{5}x_S - \frac{11}{5} \right) \right]^2 = x_S^2 + (-x_S - 3)^2$$

(ze związków $r = |ST|$ oraz $r = |SO|$),

$$\begin{aligned} (x_S - 4)^2 + (-x_S - 3 - (-7))^2 = \\ = \left(\frac{3}{5}x_S + \frac{8}{5} - 4 \right)^2 + \left(-\frac{6}{5}x_S - \frac{11}{5} - (-7) \right)^2 + x_S^2 + (-x_S - 3)^2 \end{aligned}$$

(ze związków $|BS|^2 = |BT|^2 + r^2$ oraz $r = |SO|$).

4 pkt – wyznaczenie równania dwusiecznej kąta ABC równoległoboku: $y = -x - 3$

ALBO

– zapisanie współrzędnych środka S za pomocą jednej niewiadomej, np.

$$S = (x_S, -x_S - 3).$$

3 pkt – obliczenie współrzędnych punktu E : $E = (-2, 5)$

ALBO

– obliczenie współrzędnych takich punktów P_1 oraz P_2 , że P_1 leży na półprostej $\overrightarrow{BA}$ oraz P_2 leży na półprostej $\overrightarrow{BC}$ oraz $|BP_1| = |BP_2|$,

ALBO

– obliczenie tangensa kąta α : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$ (dla sposobu II),

ALBO

– zapisanie związku $\frac{|\frac{1}{2}x_S + y_S + 5|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{|2x_S + y_S - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$ (dla sposobu III).

2 pkt – wyznaczenie równania prostej BC oraz obliczenie długości odcinka AB :

$$y = -2x + 1 \text{ oraz } |AB| = \sqrt{180}$$

ALBO

– wyznaczenie równania prostej AB oraz obliczenie długości odcinka BC :

$$y = -\frac{1}{2}x - 5 \text{ oraz } |BC| = \sqrt{75},$$

ALBO

– obliczenie współczynników kierunkowych prostych AB oraz BC : $a_{AB} = -\frac{1}{2}$ oraz $a_{BC} = -2$ (dla sposobu II),
ALBO

– wyznaczenie równań prostych AB oraz BC , np. $y = -\frac{1}{2}x - 5$ oraz $y = -2x + 1$ (dla sposobu III).

1 pkt – obliczenie współrzędnych wierzchołka B : $B = (4, -7)$

ALBO

– obliczenie współrzędnych wierzchołka C : $C = (-1, 3)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I (poprzez trójkąt równoramienny)

Środek symetrii równoległoboku jest punktem przecięcia przekątnych równoległoboku.

Zatem punkt M jest środkiem odcinka AC oraz środkiem odcinka BD . Stosujemy wzory na współrzędne środka odcinka i obliczamy współrzędne wierzchołka B :

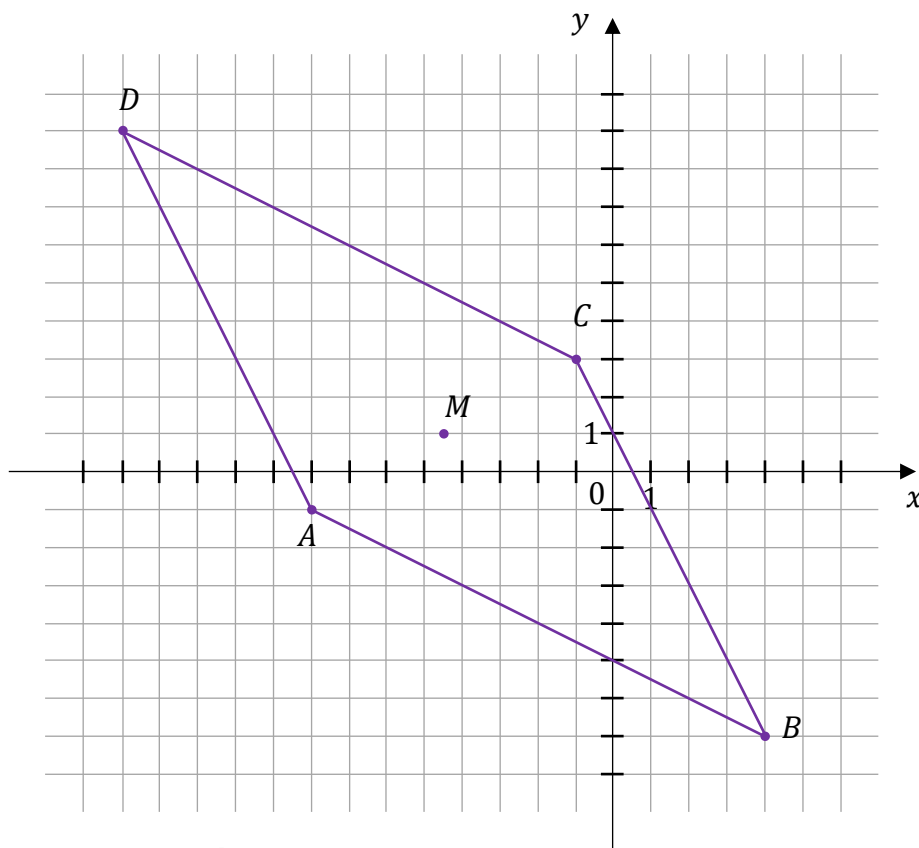
$$\frac{x_B + (-13)}{2} = -\frac{9}{2} \wedge \frac{y_B + 9}{2} = 1$$

$$B = (4, -7)$$

Stosujemy wzory na współrzędne środka odcinka i obliczamy współrzędne wierzchołka C :

$$\frac{-8 + x_C}{2} = -\frac{9}{2} \wedge \frac{-1 + y_C}{2} = 1$$

$$C = (-1, 3)$$



Obliczamy $|AB|$: $|AB| = \sqrt{(4 - (-8))^2 + (-7 - (-1))^2} = \sqrt{180}$.

Wyznaczamy równanie prostej BC : $y = \frac{3 - (-7)}{-1 - 4} \cdot (x - 4) + (-7)$, czyli $y = -2x + 1$.

Niech E będzie punktem na boku BC równoległoboku (lub na przedłużeniu tego boku w stronę C) takim, że $|BE| = |BA|$. Obliczamy współrzędne punktu E :

$$(x - 4)^2 + (y + 7)^2 = 180 \quad \wedge \quad y = -2x + 1$$

$$(x - 4)^2 + (-2x + 7 + 1)^2 = 180 \quad \wedge \quad y = -2x + 1$$

$$5x^2 - 40x - 100 = 0 \quad \wedge \quad y = -2x + 1$$

$$(x, y) = (-2, 5) \quad \vee \quad (x, y) = (10, -19)$$

Punkt $(10, -19)$ nie spełnia warunku narzuconego na E (bowiem $10 > x_B$), więc $E = (-2, 5)$.

Okrąg $\mathcal{O}$ jest styczny do prostych AB oraz BC , więc jego środek S leży na dwusiecznej kąta ABC równoległoboku $ABCD$. Ponieważ trójkąt ABE jest równoramienny, więc środek F odcinka AE leży na prostej BS i odcinek AE jest prostopadły do prostej BS .

Obliczamy współrzędne punktu F :

$$x_F = \frac{x_A + x_E}{2} = \frac{-8 - 2}{2} = -5 \quad \wedge \quad y_F = \frac{y_A + y_E}{2} = \frac{-1 + 5}{2} = 2$$

Wyznaczamy równanie prostej BS : $y = \frac{-7-2}{4-(-5)} \cdot (x-4) + (-7)$, czyli $y = -x - 3$.

Zatem $S = (x_S, -x_S - 3)$.

Niech T będzie punktem styczności okręgu $\mathcal{O}$ z prostą BC .

Wyznaczamy równanie prostej ST : $y = \frac{1}{2} \cdot (x - x_S) + (-x_S - 3)$.

Wyznaczamy współrzędne punktu T :

$$y = \frac{1}{2} \cdot (x - x_S) + (-x_S - 3) \wedge y = -2x + 1$$

$$-2x + 1 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x_S - 3 \wedge y = -2x + 1$$

$$x = \frac{3}{5}x_S + \frac{8}{5} \wedge y = -\frac{6}{5}x_S - \frac{11}{5}$$

czyli $T = \left(\frac{3}{5}x_S + \frac{8}{5}, -\frac{6}{5}x_S - \frac{11}{5}\right)$.

Oznaczmy przez r promień okręgu $\mathcal{O}$. Ponieważ okrąg przechodzi przez początek układu współrzędnych, więc $r = \sqrt{x_S^2 + (-x_S - 3)^2}$. Jednocześnie

$$r = |ST| = \sqrt{\left[x_S - \left(\frac{3}{5}x_S + \frac{8}{5}\right)\right]^2 + \left[-x_S - 3 - \left(-\frac{6}{5}x_S - \frac{11}{5}\right)\right]^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}x_S - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}x_S - \frac{4}{5}\right)^2}$$

więc

$$x_S^2 + (-x_S - 3)^2 = \left(\frac{2}{5}x_S - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}x_S - \frac{4}{5}\right)^2$$

Stąd otrzymujemy

$$x_S^2 + (x_S + 3)^2 = \frac{4}{25}(x_S - 4)^2 + \frac{1}{25}(x_S - 4)^2$$

$$2x_S^2 + 6x_S + 9 = \frac{1}{5}(x_S - 4)^2$$

$$9x_S^2 + 38x_S + 29 = 0$$

$$x_S = -1 \vee x_S = -\frac{29}{9}$$

Ponieważ $-\frac{29}{9} < -3$, a druga współrzędna punktu S ma być ujemna, więc $x_S = -1$, czyli

$S = (-1, -2)$. Obliczamy promień okręgu: $r = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.

Okrąg $\mathcal{O}$ ma równanie $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$.

Sposób II (poprzez współczynniki kierunkowe)

Środek symetrii równoległoboku jest punktem przecięcia przekątnych równoległoboku.

Zatem punkt M jest środkiem odcinka AC oraz środkiem odcinka BD . Stosujemy wzory na współrzędne środka odcinka i obliczamy współrzędne wierzchołka B :

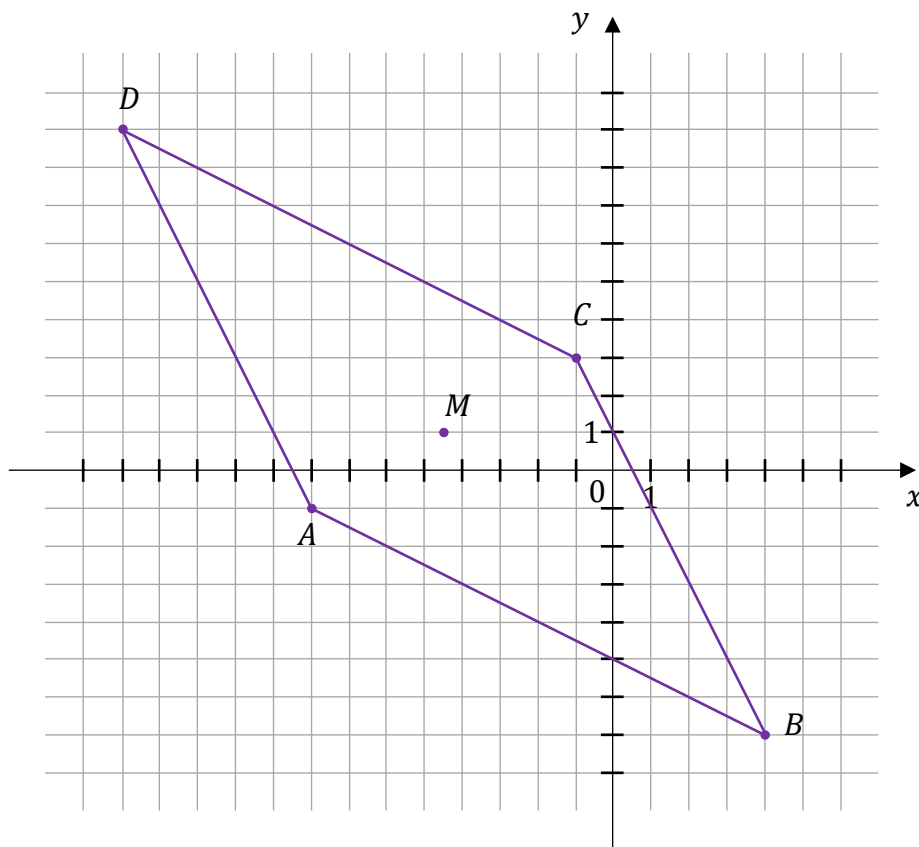
$$\frac{x_B + (-13)}{2} = -\frac{9}{2} \wedge \frac{y_B + 9}{2} = 1$$

$$B = (4, -7)$$

Stosujemy wzory na współrzędne środka odcinka i obliczamy współrzędne wierzchołka C :

$$\frac{-8 + x_C}{2} = -\frac{9}{2} \wedge \frac{-1 + y_C}{2} = 1$$

$$C = (-1, 3)$$



Obliczamy współczynnik kierunkowy a_{AB} prostej AB : $a_{AB} = \frac{-7 - (-1)}{4 - (-8)} = -\frac{1}{2}$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy a_{BC} prostej BC : $a_{BC} = \frac{3 - (-7)}{-1 - 4} = -2$.

Oznaczmy miarę kąta ABC równoległoboku przez 2α . Obliczamy tangens tego kąta, korzystając z interpretacji geometrycznej współczynnika kierunkowego prostej oraz wzoru na tangens różnicy kątów:

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{a_{AB} - a_{BC}}{1 + a_{AB} \cdot a_{BC}}$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{-\frac{1}{2} - (-2)}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2)} = \frac{3}{4}$$

Korzystamy ze wzoru na tangens podwojonego kąta i otrzymujemy

$$\frac{3}{4} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$3 \operatorname{tg}^2 \alpha + 8 \operatorname{tg} \alpha - 3 = 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-8 - 10}{6} = -3 \quad \vee \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{-8 + 10}{6} = \frac{1}{3}$$

Ponieważ kąt ABC równoległobku jest ostry, więc $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$.

Oznaczmy środek okręgu $\mathcal{O}$ przez S . Obliczamy współczynnik kierunkowy a_{BS} prostej BS , korzystając z interpretacji geometrycznej współczynnika kierunkowego prostej oraz wzoru na tangens sumy kątów:

$$a_{BS} = \frac{a_{BC} + \operatorname{tg} \alpha}{1 - a_{BC} \cdot \operatorname{tg} \alpha}$$

$$a_{BS} = \frac{-2 + \frac{1}{3}}{1 - (-2) \cdot \frac{1}{3}} = -1$$

Wyznaczamy równanie prostej BS : $y = -1 \cdot (x - 4) + (-7)$, czyli $y = -x - 3$. Zatem $S = (x_S, -x_S - 3)$.

Niech r będzie długością promienia okręgu $\mathcal{O}$. Ponieważ okrąg przechodzi przez początek układu współrzędnych, więc $r = \sqrt{x_S^2 + (-x_S - 3)^2}$. Ponadto

$$\frac{r}{|BS|} = \sin \alpha$$

więc

$$\frac{r}{|BS|} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$|BS|^2 = r^2 \cdot 10$$

$$(x_S - 4)^2 + (-x_S - 3 - (-7))^2 = r^2 \cdot 10$$

$$(x_S - 4)^2 + (-x_S + 4)^2 = [x_S^2 + (-x_S - 3)^2] \cdot 10$$

$$18x_S^2 + 76x_S + 58 = 0$$

$$9x_S^2 + 38x_S + 29 = 0$$

$$x_S = -1 \vee x_S = -\frac{29}{9}$$

Ponieważ $-\frac{29}{9} < -3$, a druga współrzędna punktu S ma być ujemna, więc $x_S = -1$, czyli

$S = (-1, -2)$. Obliczamy promień okręgu: $r = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.

Okrąg $\mathcal{O}$ ma równanie $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 5$.

Sposób III (z własności dwusiecznej)

Środek symetrii równoległoboku jest punktem przecięcia przekątnych równoległoboku.

Zatem punkt M jest środkiem odcinka AC oraz środkiem odcinka BD . Stosujemy wzory na współrzędne środka odcinka i obliczamy współrzędne wierzchołka B :

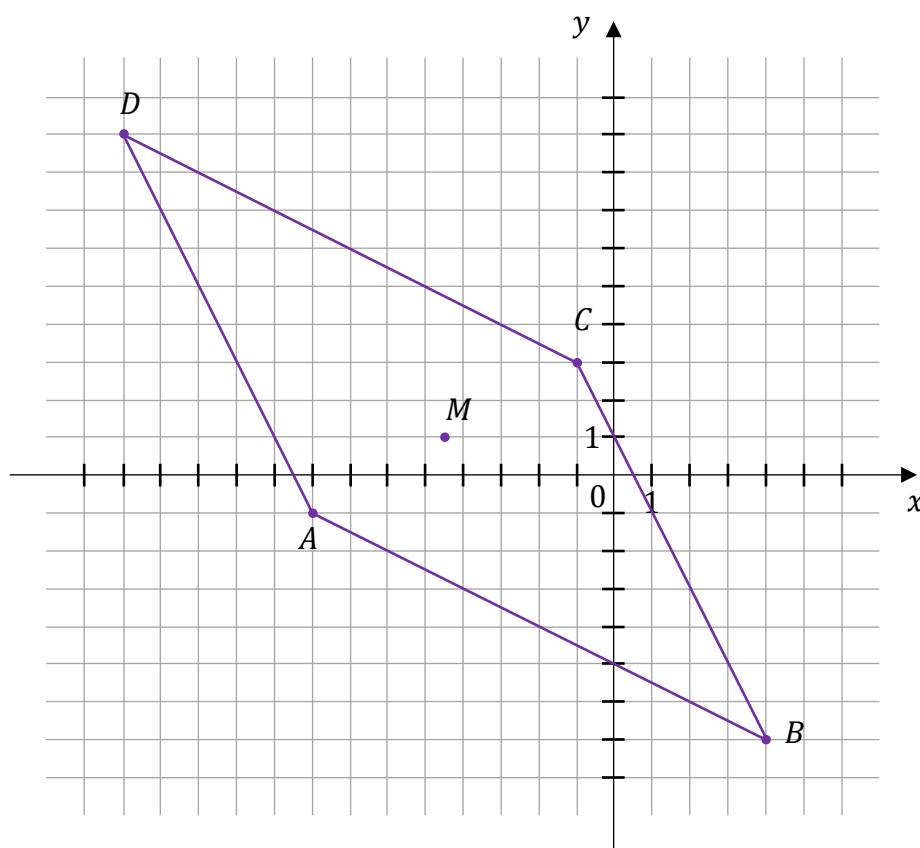
$$\frac{x_B + (-13)}{2} = -\frac{9}{2} \wedge \frac{y_B + 9}{2} = 1$$

$$B = (4, -7)$$

Stosujemy wzory na współrzędne środka odcinka i obliczamy współrzędne wierzchołka C :

$$\frac{-8 + x_C}{2} = -\frac{9}{2} \wedge \frac{-1 + y_C}{2} = 1$$

$$C = (-1, 3)$$



Wyznaczamy równanie prostej AB : $y = \frac{-7-(-1)}{4-(-8)} \cdot (x+8) + (-1)$, czyli $y = -\frac{1}{2}x - 5$.

Wyznaczamy równanie prostej BC : $y = \frac{3-(-7)}{-1-4} \cdot (x-4) + (-7)$, czyli $y = -2x + 1$.

Niech $S = (x_S, y_S)$ będzie środkiem okręgu $\mathcal{O}$, a r – długością promienia okręgu $\mathcal{O}$.

Punkt S leży na dwusiecznej kąta ABC równoległoboku $ABCD$, więc odległość punktu S od prostej AB jest równa odległości punktu S od prostej BC . Zatem

$$\frac{|\frac{1}{2}x_S + y_S + 5|}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 1^2}} = \frac{|2x_S + y_S - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

$$|x_S + 2y_S + 10| = |2x_S + y_S - 1|$$

$$x_S + 2y_S + 10 = 2x_S + y_S - 1 \quad \vee \quad x_S + 2y_S + 10 = -2x_S - y_S + 1$$

$$y_S = x_S - 11 \quad \vee \quad y_S = -x_S - 3$$

Ponieważ punkt $(0, 0)$ leży w równoległoboku $ABCD$, a prosta $y = x - 11$ ma tylko jeden punkt wspólny z równoległobokiem, więc dwusieczna kąta ABC ma równanie $y = -x - 3$.

Stąd $y_S = -x_S - 3$ oraz

$$r = \frac{|2x_S + y_S - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|2x_S - x_S - 3 - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|x_S - 4|}{\sqrt{5}}$$

Okrąg przechodzi przez początek układu współrzędnych, więc $r = \sqrt{x_S^2 + (-x_S - 3)^2}$.

Wobec powyższego otrzymujemy

$$\sqrt{x_S^2 + (-x_S - 3)^2} = \frac{|x_S - 4|}{\sqrt{5}}$$

$$x_S^2 + (x_S + 3)^2 = \frac{(x_S - 4)^2}{5}$$

$$9x_S^2 + 38x_S + 29 = 0$$

$$x_S = -1 \quad \vee \quad x_S = -\frac{29}{9}$$

Ponieważ $-\frac{29}{9} < -3$, a druga współrzędna punktu S ma być ujemna, więc $x_S = -1$, czyli

$S = (-1, -2)$. Obliczamy promień okręgu: $r = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.

Okrąg $\mathcal{O}$ ma równanie $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 5$.

Zadanie 15. (0–6)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 11.6R) stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

Zasady oceniania**Część a)**

2 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – wyznaczenie wysokości graniastosłupa w zależności od długości krawędzi podstawy

$$\text{graniastosłupa, np. } H = \frac{48\sqrt{3} - a^2 \cdot \sqrt{3}}{6a}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Część b)

4 pkt – uzasadnienie, że funkcja V przyjmuje wartość największą dla $a = 4$ oraz obliczenie $V(4) = 16$.

3 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja V przyjmuje wartość największą dla $a = 4$.

2 pkt – obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji V : $a = 4$.

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji V , np. $V'(a) = 6 - \frac{3}{8}a^2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi do części b):**Uwagi:**

1. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja osiąga wartość największą dla wyznaczonej wartości a , przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej

ORAZ:

– opisuje (słownie lub graficznie – np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji V
LUB

– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości a funkcja V ma maksimum lokalne i jest to jednocześnie jej największa wartość,

LUB

– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości a funkcja V ma maksimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.

Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku (np. znakami „+” i „-”) znak pochodnej.

2. Jeżeli zdający przedstawi niepełne uzasadnienie, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za poprawne wyznaczenie pochodnej, 1 punkt za obliczenie miejsca zerowego pochodnej, 1 punkt za obliczenie długości krawędzi podstawy oraz objętości graniastosłupa o największej objętości).

3. Jeżeli zdający nie uzasadnia istnienia największej wartości funkcji, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za poprawne wyznaczenie pochodnej, 1 punkt za obliczenie miejsca zerowego pochodnej).

Przykładowe pełne rozwiązanie

a)

Rozpatrzmy dowolny z rozważanych graniastosłupów. Oznaczmy przez H jego wysokość.

Pole powierzchni całkowitej tej bryły jest równe $24\sqrt{3}$, więc

$$24\sqrt{3} = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3aH$$

Stąd

$$H = \frac{48\sqrt{3} - a^2 \cdot \sqrt{3}}{6a}$$

Zatem objętość V graniastosłupa jest równa

$$V = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{48\sqrt{3} - a^2 \cdot \sqrt{3}}{6a} = 6a - \frac{1}{8}a^3$$

To należało wykazać.

b)

Obliczamy argument, dla którego funkcja V określona wzorem $V(a) = 6a - \frac{1}{8}a^3$ dla $a \in (0, 4\sqrt{3})$ osiąga wartość największą.

Wyznaczamy pochodną funkcji V : $V'(a) = 6 - \frac{3}{8}a^2$ dla $a \in (0, 4\sqrt{3})$.

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji V :

$$V'(a) = 0$$

$$6 - \frac{3}{8}a^2 = 0$$

$$a = -4 \notin (0, 4\sqrt{3}) \quad \vee \quad a = 4 \in (0, 4\sqrt{3})$$

Badamy znak pochodnej:

$$V'(a) < 0$$

$$6 - \frac{3}{8}a^2 < 0 \quad \wedge \quad a \in (0, 4\sqrt{3})$$

$$a \in (4, 4\sqrt{3})$$

więc $V'(a) < 0$ dla $a \in (4, 4\sqrt{3})$ oraz $V'(h) > 0$ dla $a \in (0, 4)$.

Zatem funkcja V jest rosnąca w przedziale $(0, 4]$ i malejąca w przedziale $[4, 4\sqrt{3})$.

Stąd funkcja V osiąga wartość największą dla $a = 4$. Wtedy

$$V(4) = 6 \cdot 4 - \frac{1}{8} \cdot 4^3 = 16$$

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

PESEL

Miejsce na naklejkę.

Sprawdź, czy kod na naklejce to

M-100.

Jeżeli tak – przyklej naklejkę.

Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Symbol arkusza

MMAP-R0-**100**-2506

DATA: 6 czerwca 2025 r.

GODZINA ROZPOCZĘCIA: 9:00

CZAS TRWANIA: 180 minut

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: 50

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

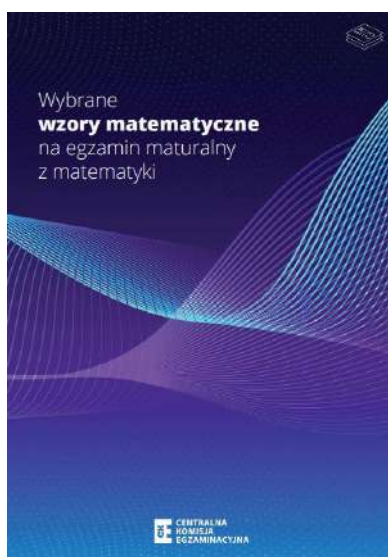
1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.





Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 29 stron (zadania 1–12). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
5. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
8. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, z cyrkla i linijki oraz z kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



**Zadania egzaminacyjne są wydrukowane
na następnych stronach.**

Zadanie 1. (0–3)

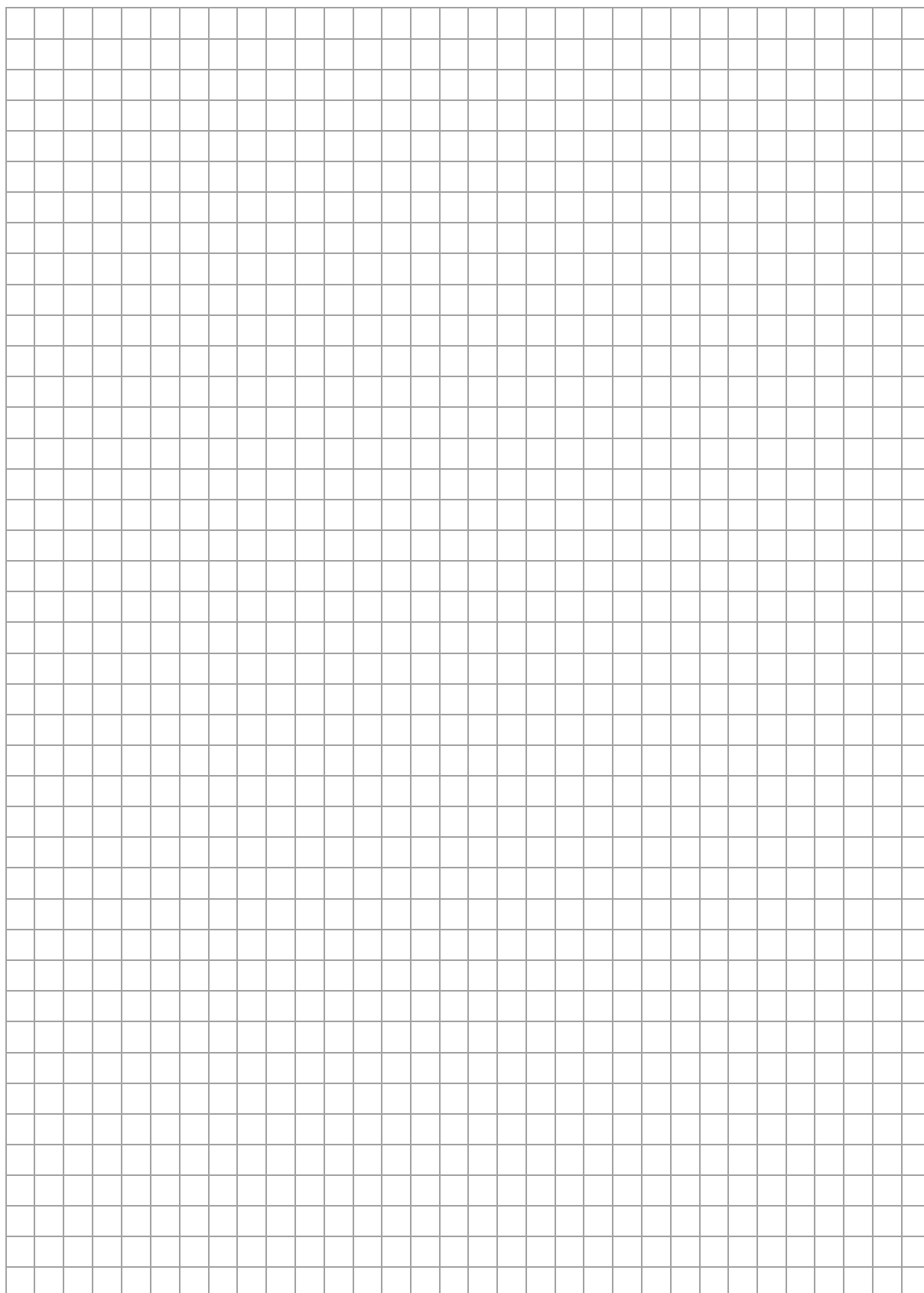
Sklep AGD prowadzi sprzedaż wysyłkową pralek. Prawdopodobieństwo uszkodzenia podczas transportu pralki wysłanej przez ten sklep do klienta jest równe 0,02.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że spośród 10 pralek wysłanych dziesięciu klientom przez ten sklep co najwyżej jedna ulegnie uszkodzeniu podczas transportu. Wynik zapisz w postaci ułamka dziesiętnego w zaokrągleniu do części tysięcznych. Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Zadanie 2. (0–3)

Wykaż, że jeżeli $a = \log_2 14$ oraz $b = \log_{\sqrt{2}} 27$, to $\log_7 54 = \frac{b+2}{2a-2}$.



Zadanie 3. (0–3)

Rozważamy wszystkie liczby naturalne sześciocyfrowe, w których zapisie dziesiętnym iloczyn cyfr jest liczbą parzystą mniejszą od 5.

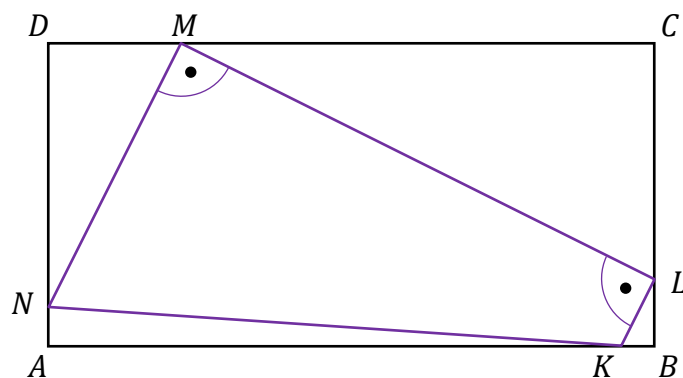
Oblicz, ile jest wszystkich takich liczb sześciocyfrowych. Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, equal-sized squares formed by thin gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

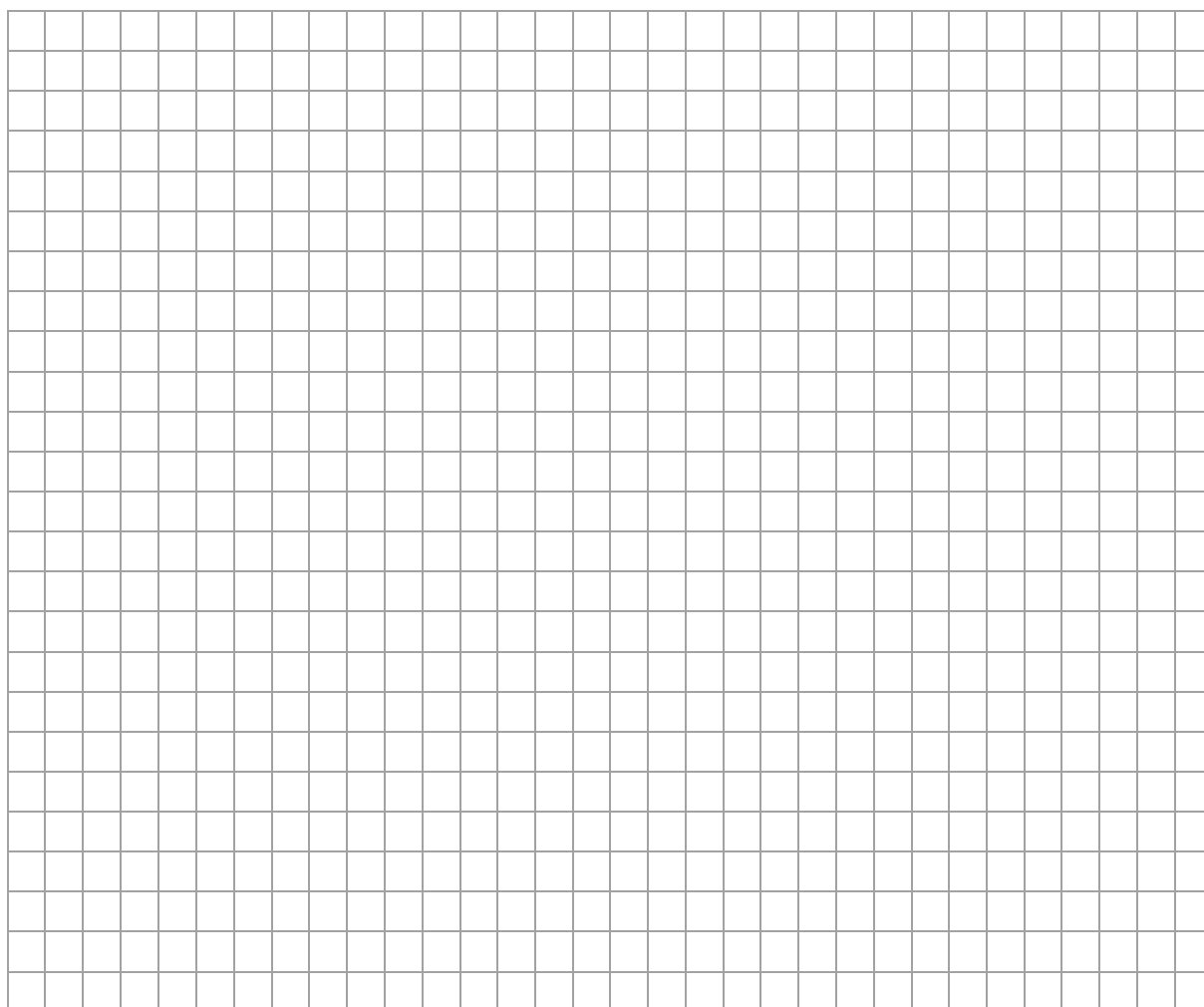
**Kolejne zadania egzaminacyjne są wydrukowane
na następnych stronach.**

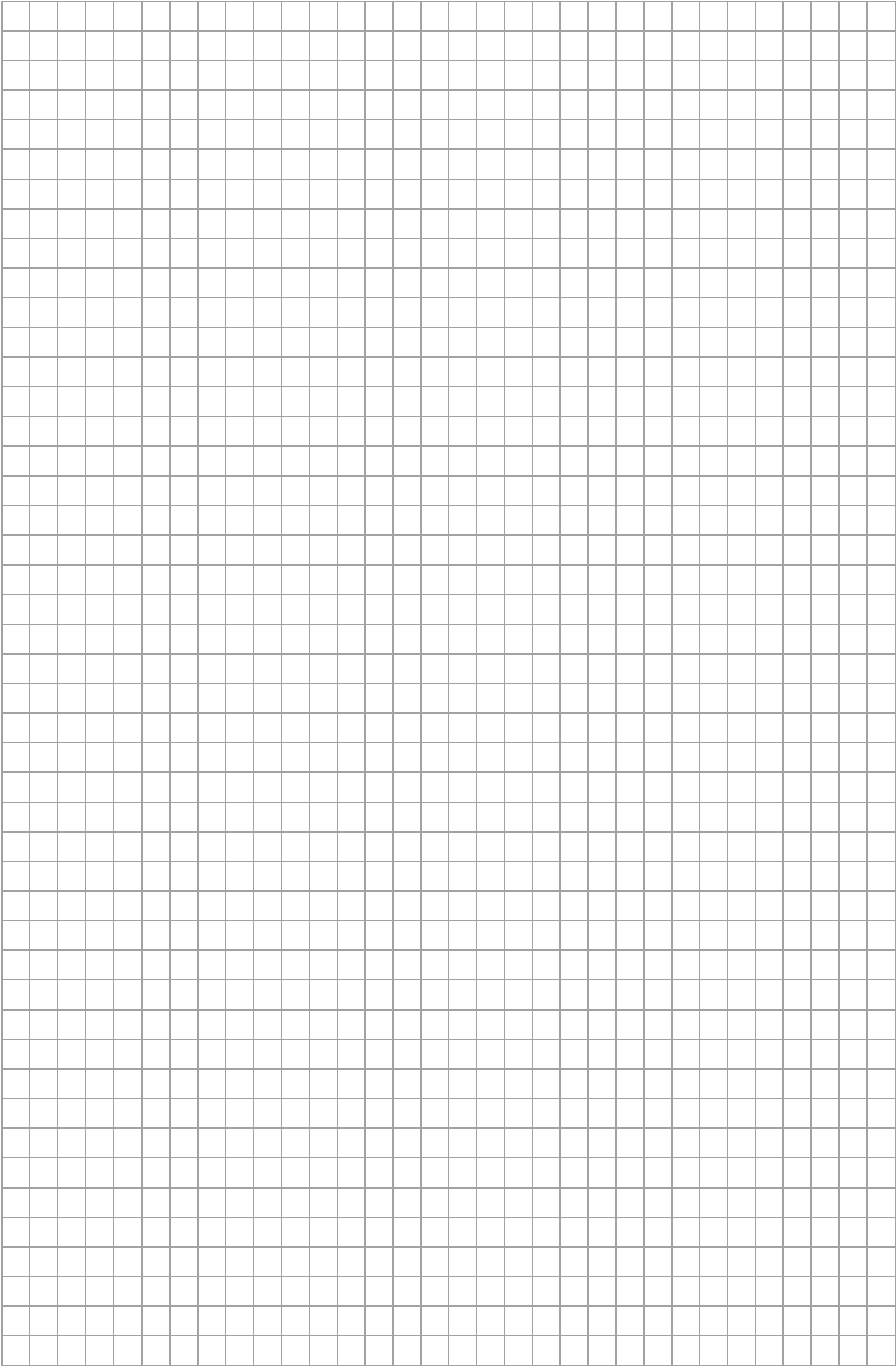
Zadanie 4. (0–3)

Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = 2 \cdot |AD|$. Na bokach AB , BC , CD oraz DA tego prostokąta obrano punkty – odpowiednio – K , L , M oraz N (przy czym każdy z tych punktów leży na dokładnie jednym boku prostokąta $ABCD$). Czworokąt $KLMN$ jest trapezem prostokątnym (zobacz rysunek), a wysokość LM tego trapezu jest równoległa do przekątnej BD prostokąta.



Wykaż, że stosunek pola trójkąta MDN do pola trójkąta KBL jest równy 16.





Zadanie 5. (0–4)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

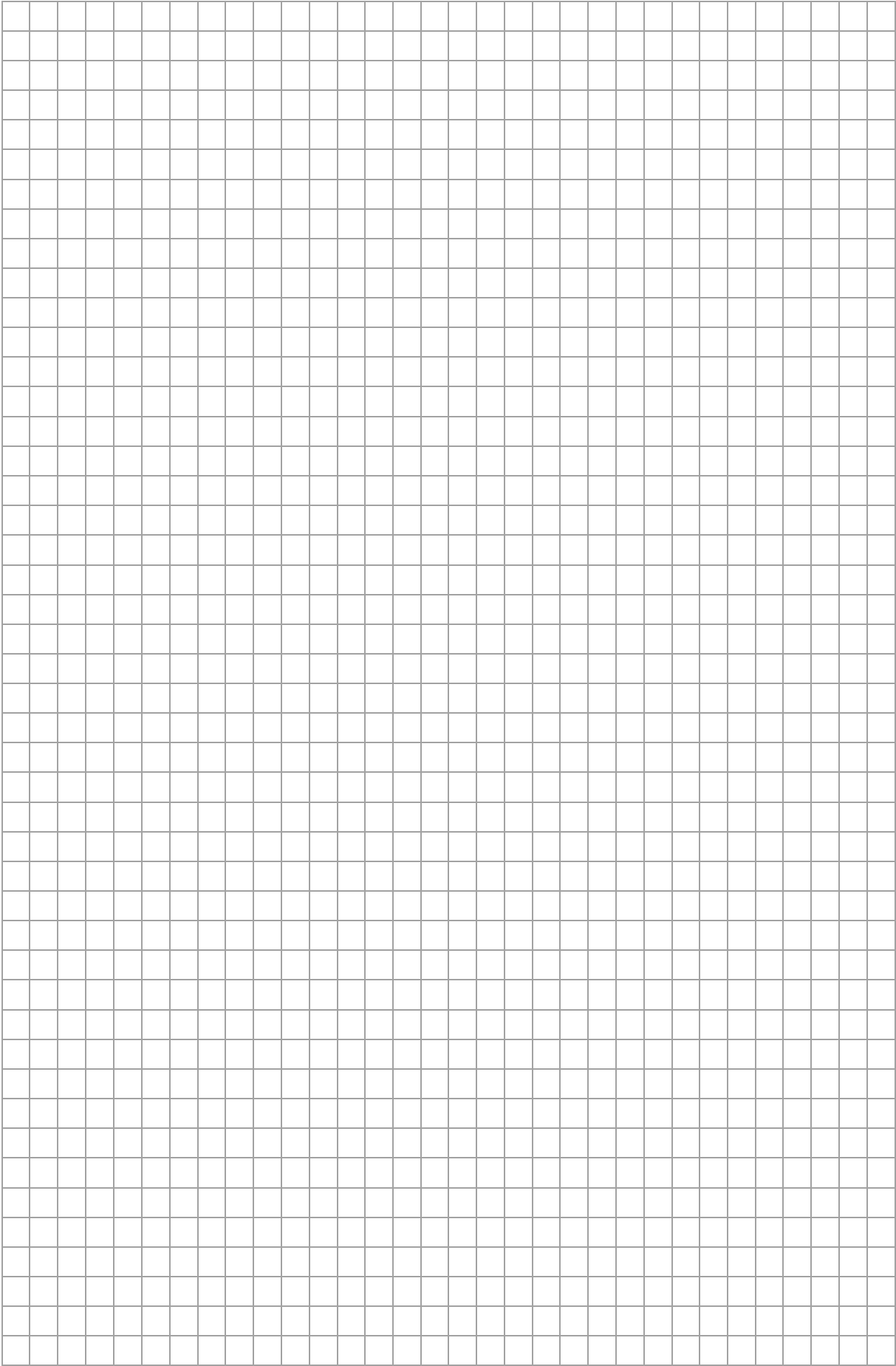
$$x^2 + 2mx + 2m - 1 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek

$$m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$$

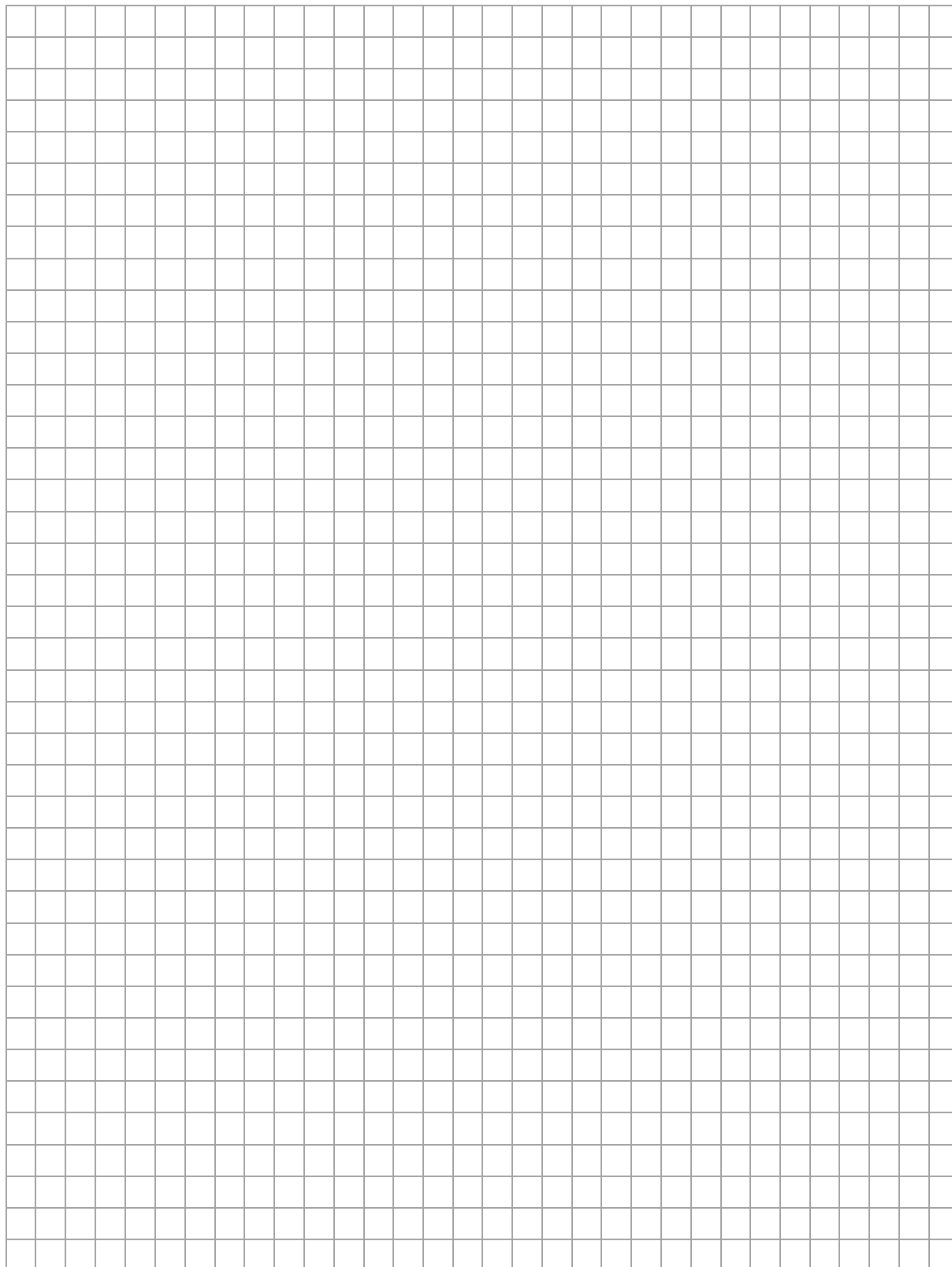
Zapisz obliczenia.

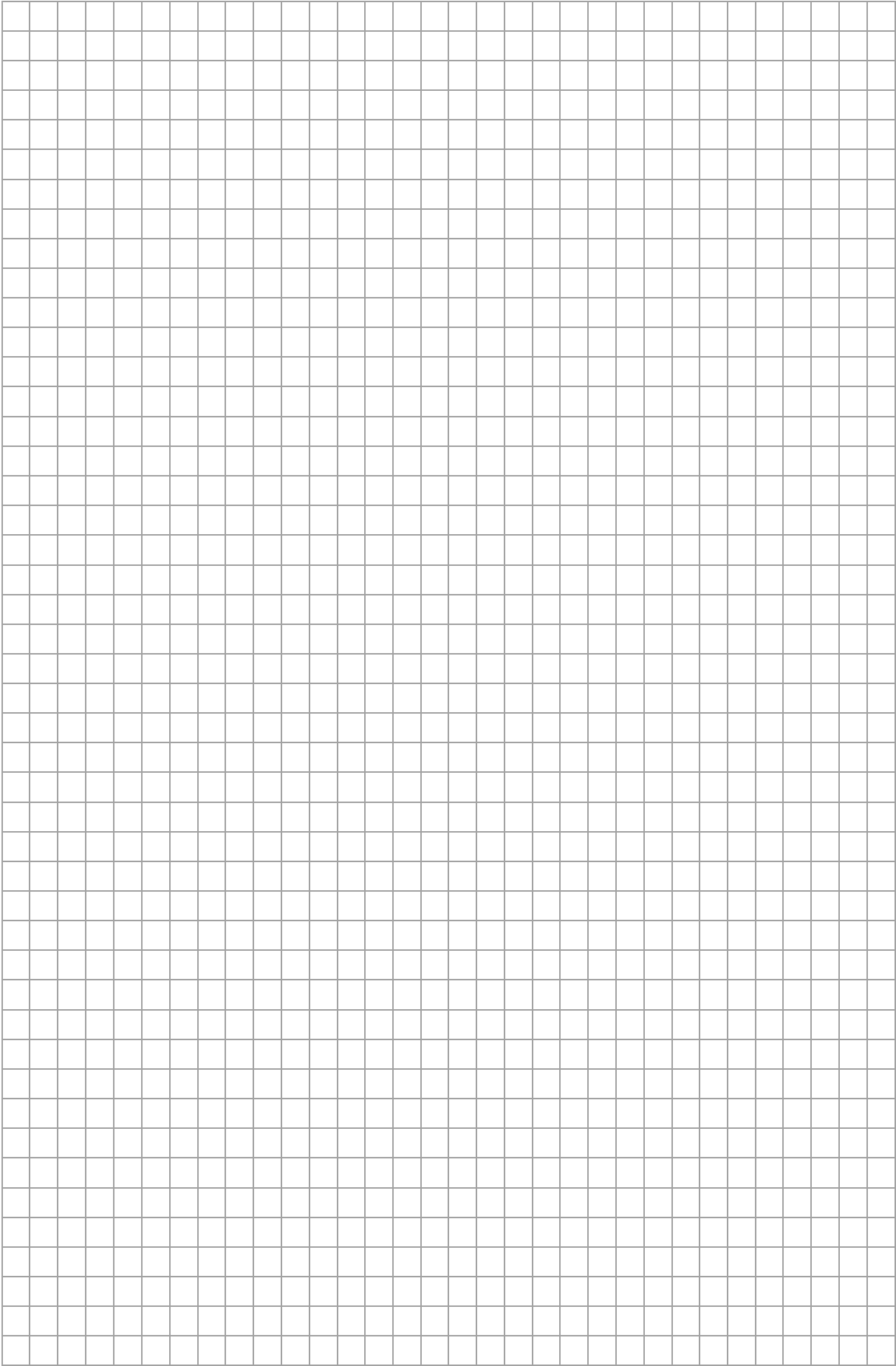
[illegible]



Zadanie 6. (0–4)**Rozwiąż równanie**

$$\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$$

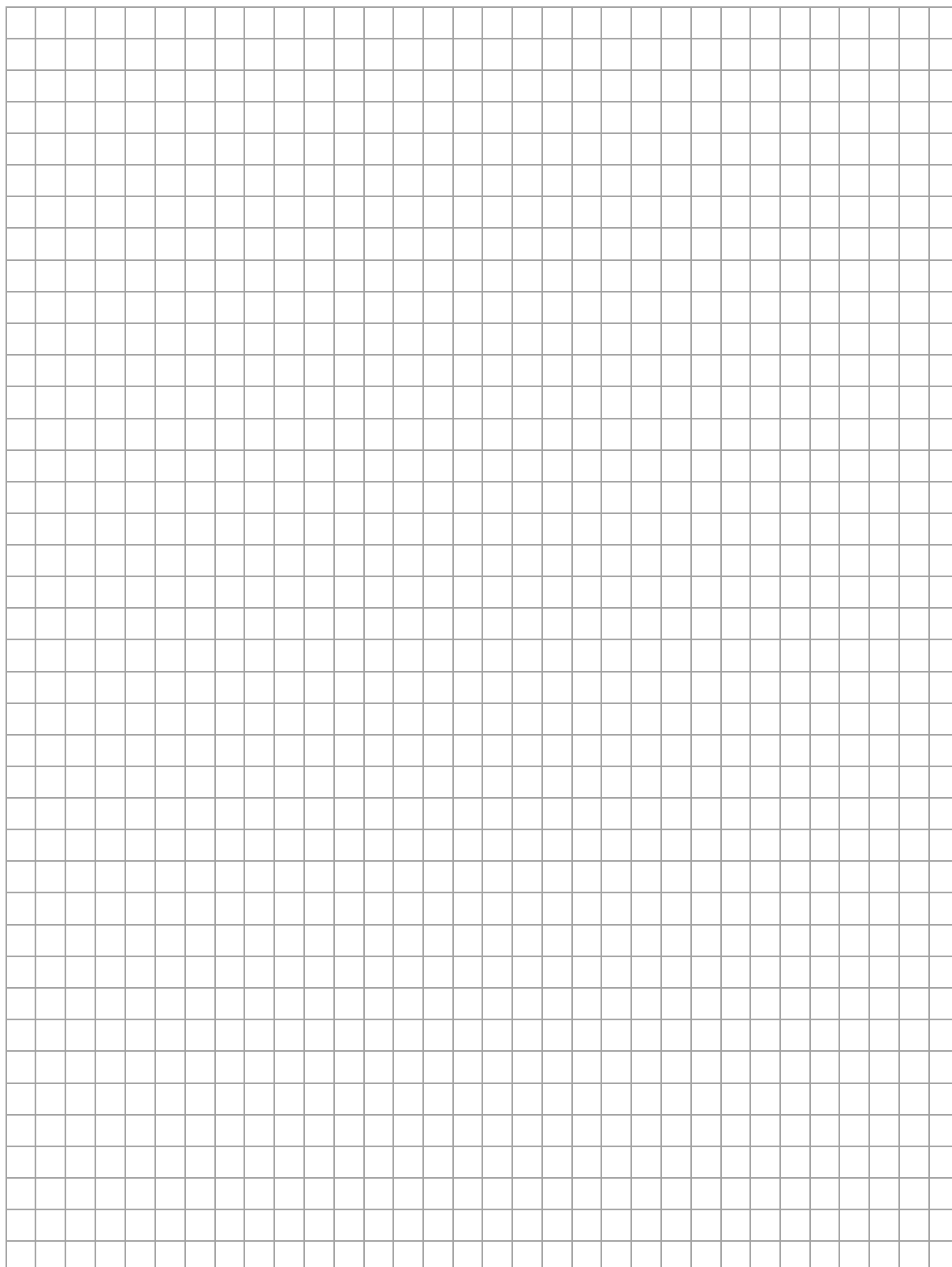
w przedziale $[0, \pi]$. Zapisz obliczenia.

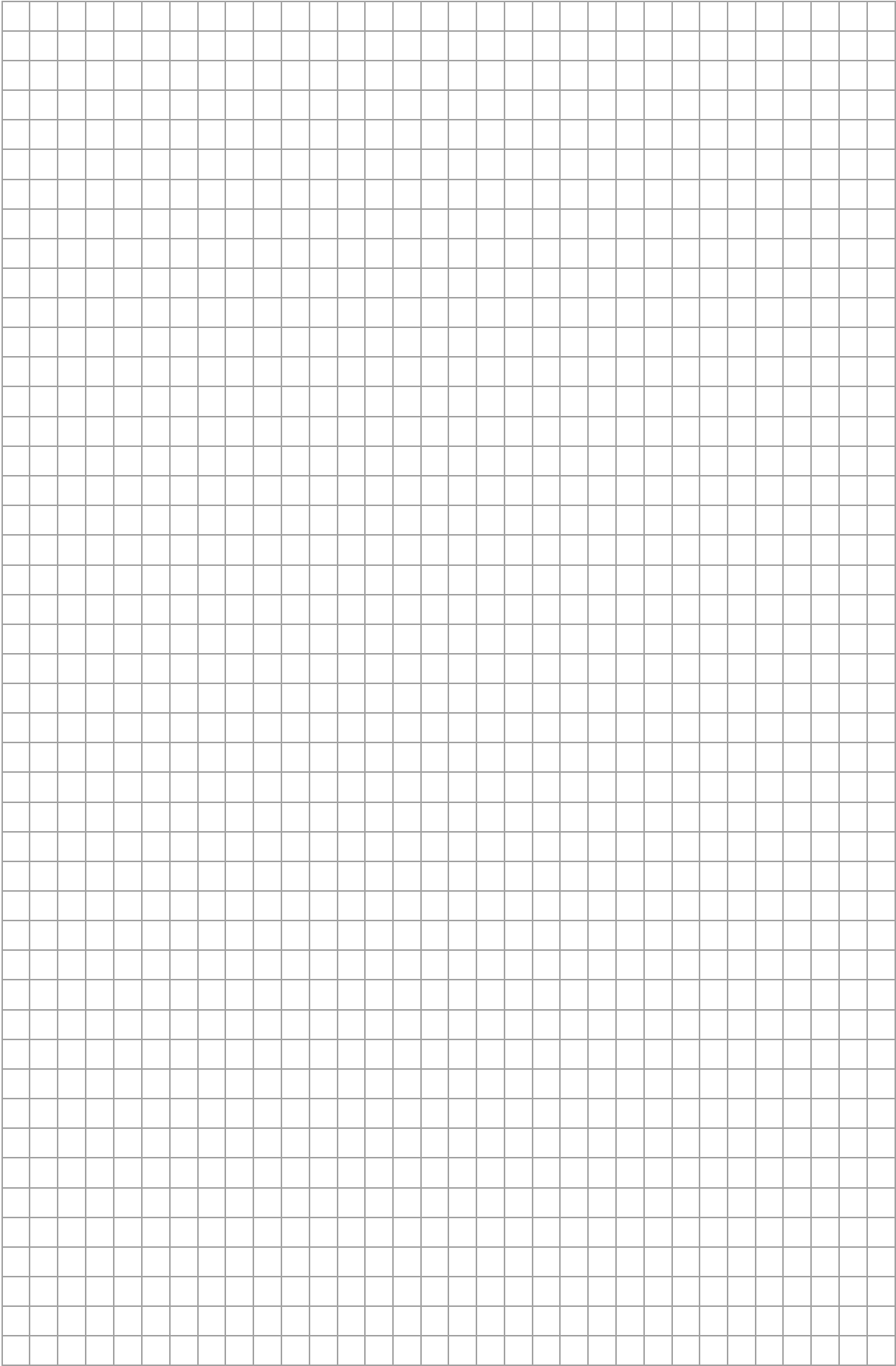


Zadanie 7. (0–4)

Na czworokącie wypukłym $ABCD$ o bokach długości: $|AB| = 3$, $|BC| = 3$, $|CD| = 5$ oraz $|DA| = 8$, opisano okrąg.

Oblicz promień tego okręgu. Zapisz obliczenia.

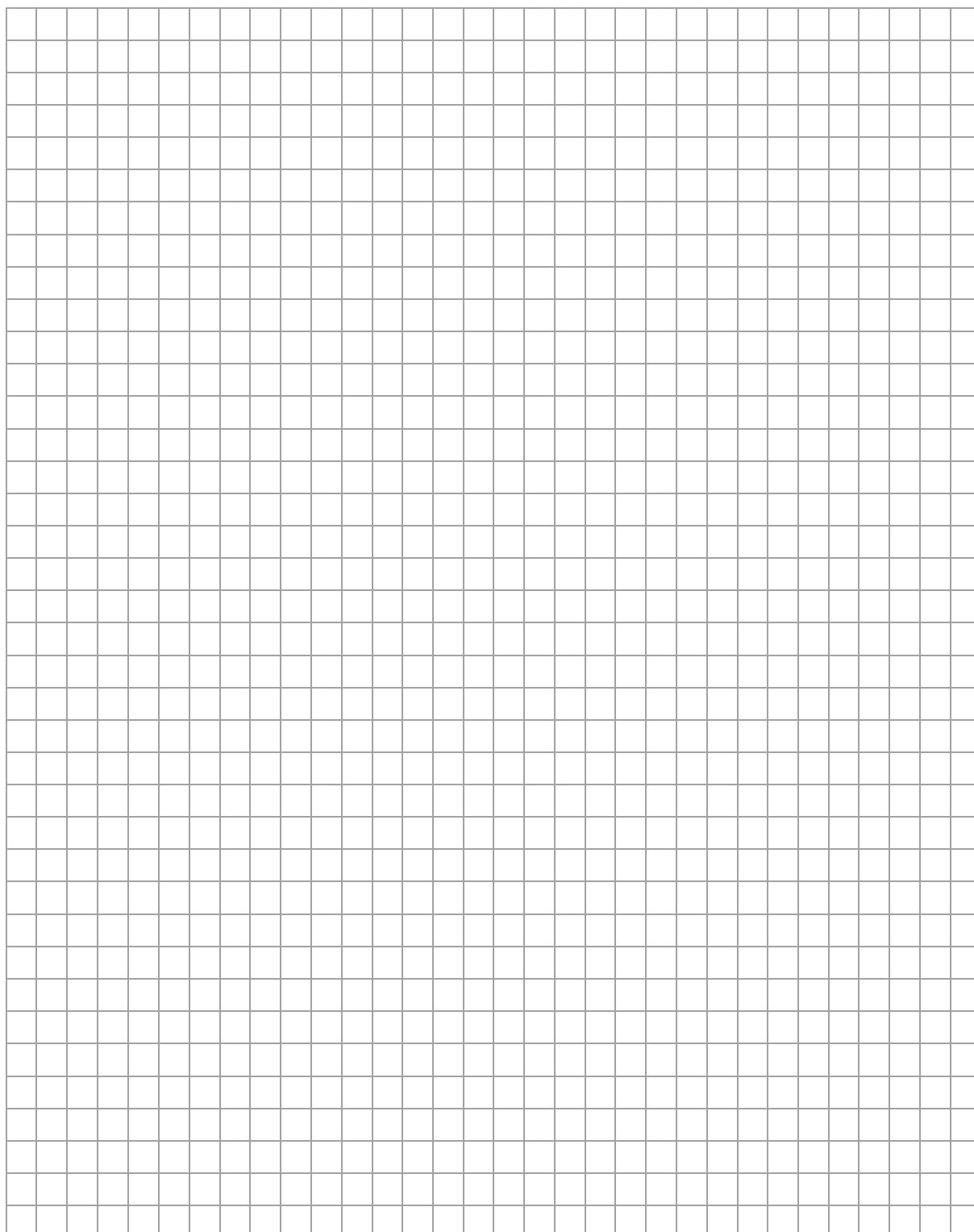


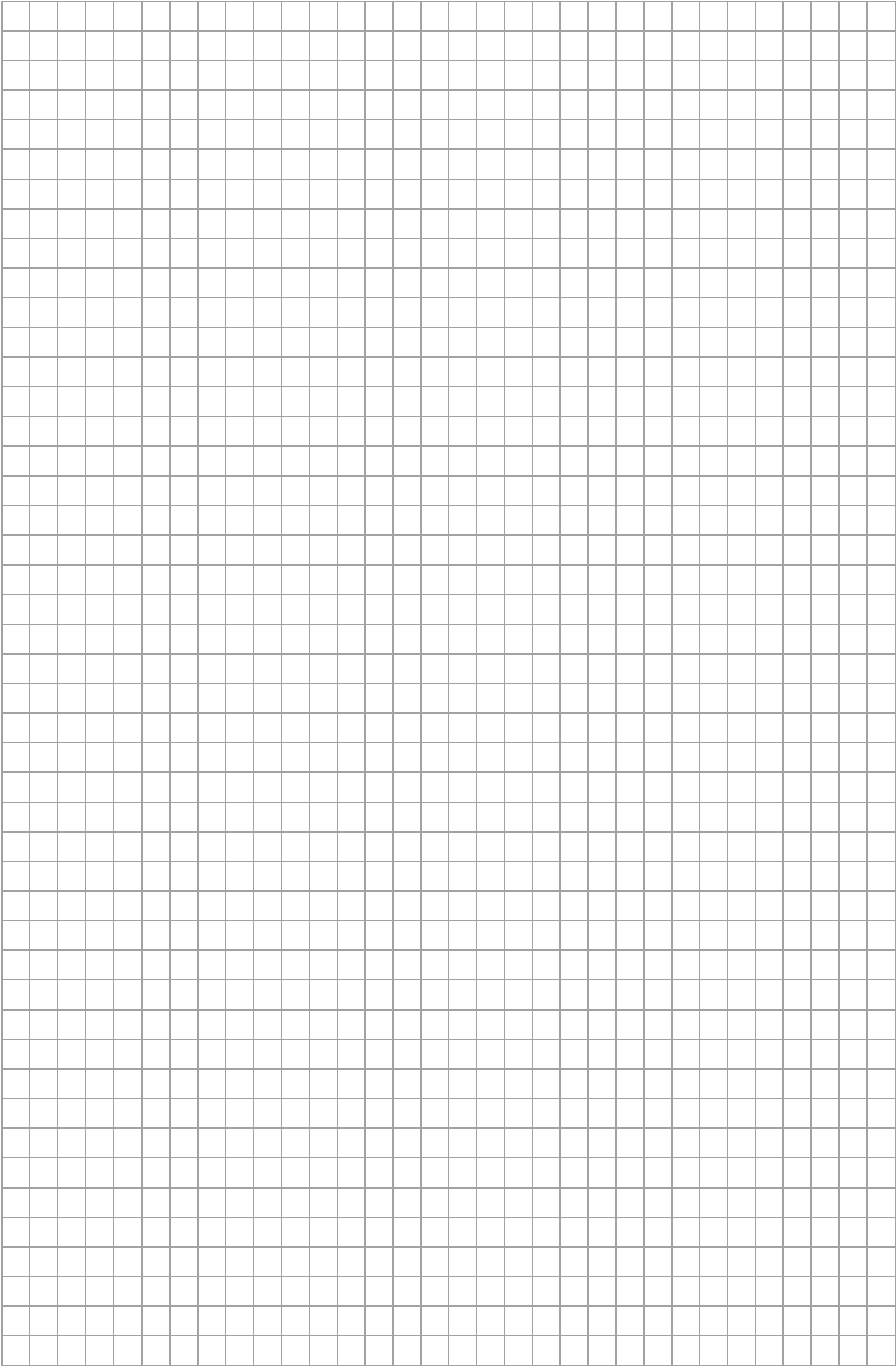


Zadanie 8. (0–4)

Wielomian f zmiennej rzeczywistej x jest określony wzorem $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Liczba (-2) jest miejscem zerowym tego wielomianu. W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) styczna do wykresu wielomianu f w punkcie A o pierwszej współrzędnej równej (-2) przecina ten wykres w punkcie $P = (1, 9)$.

Wyznacz wzór wielomianu f . Zapisz obliczenia.





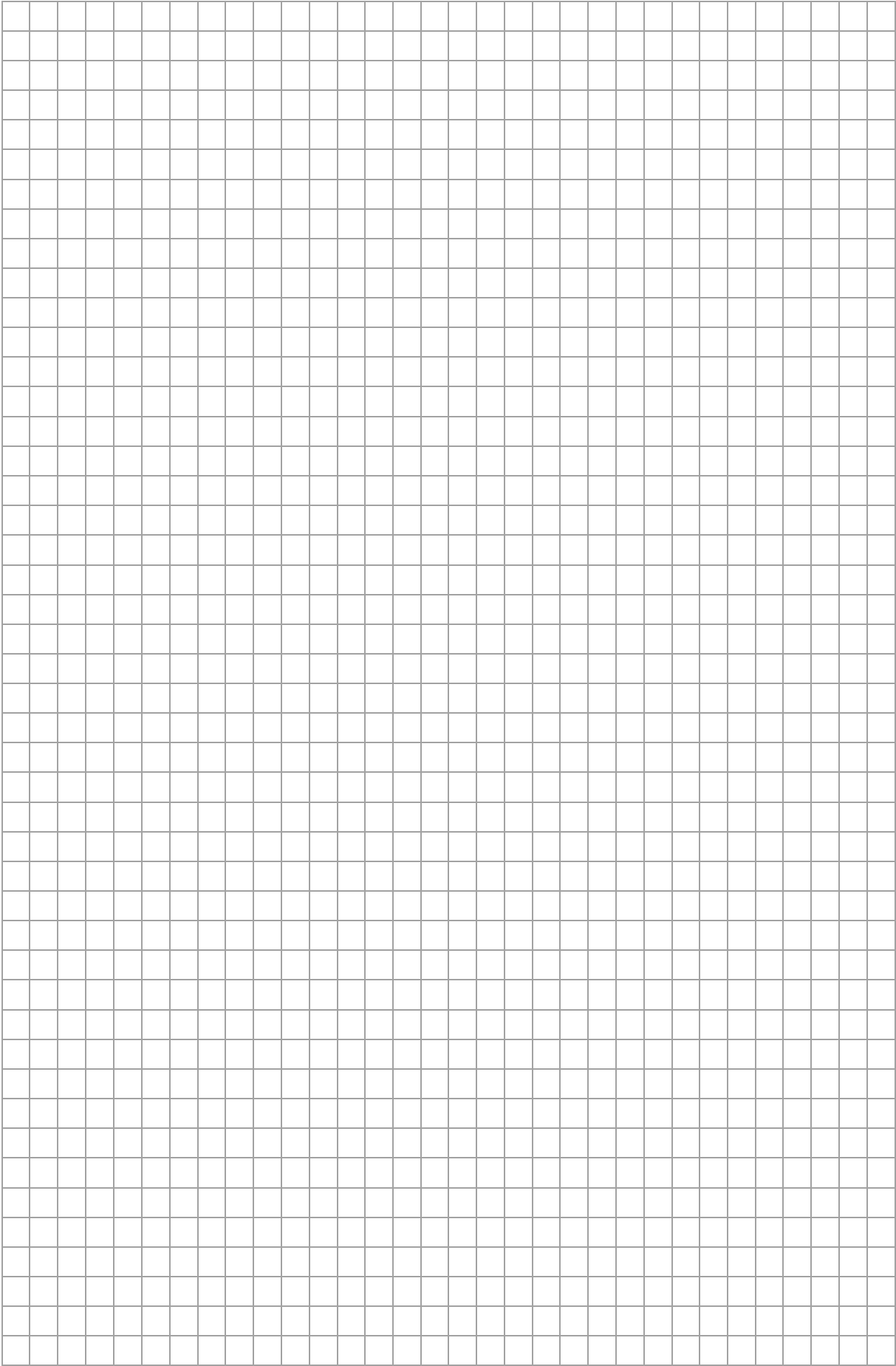
Zadanie 9. (0–5)

Ciąg (a_n) , określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest arytmetyczny i rosnący. W tym ciągu $a_6 = 15$ oraz $a_{15} = a_3 \cdot (a_8 - 6)$.

Ciąg (b_n) , określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest geometryczny i $b_1 = a_{11}$ oraz $b_2 = a_6$.

Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu (b_n) . Zapisz obliczenia.

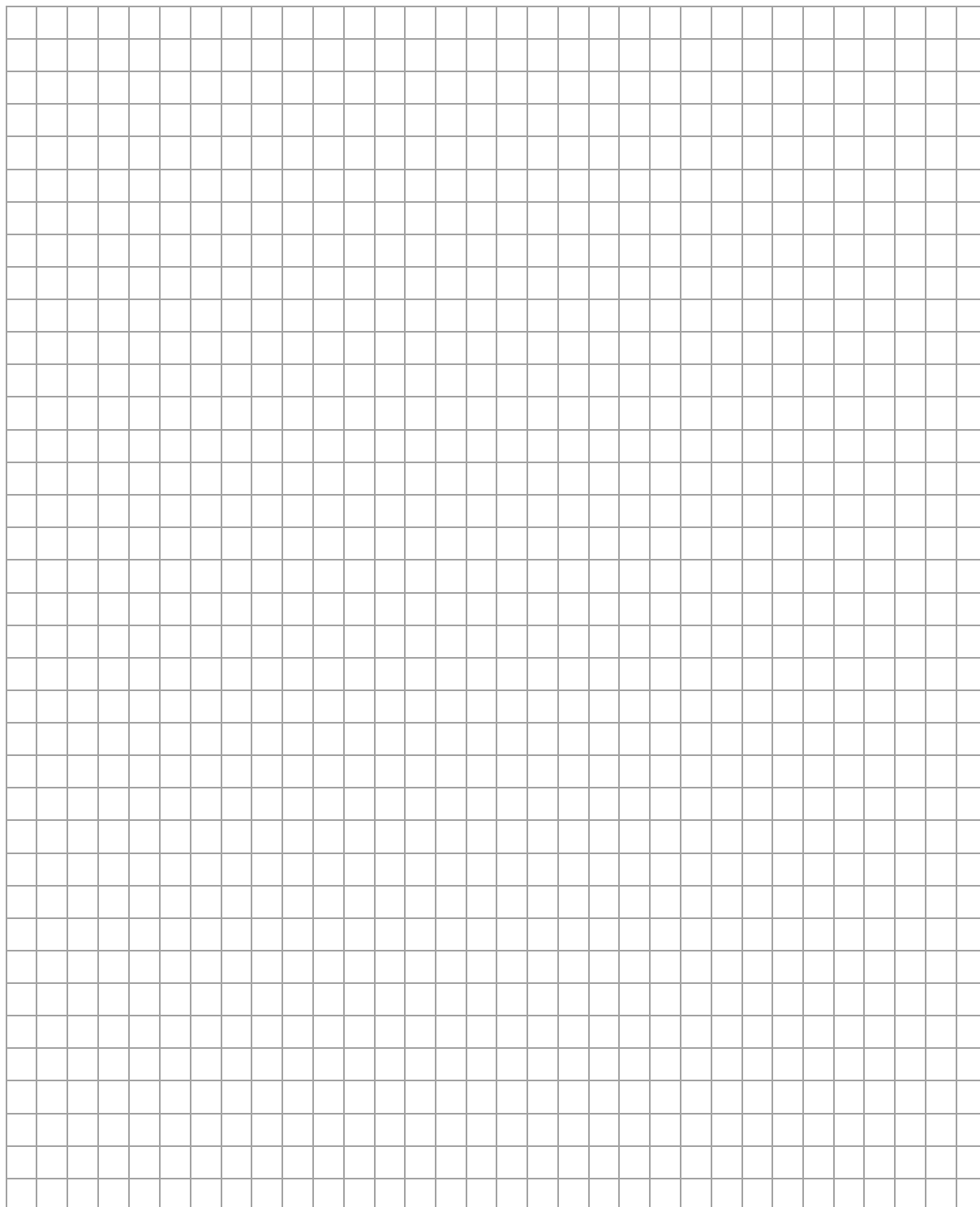
This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

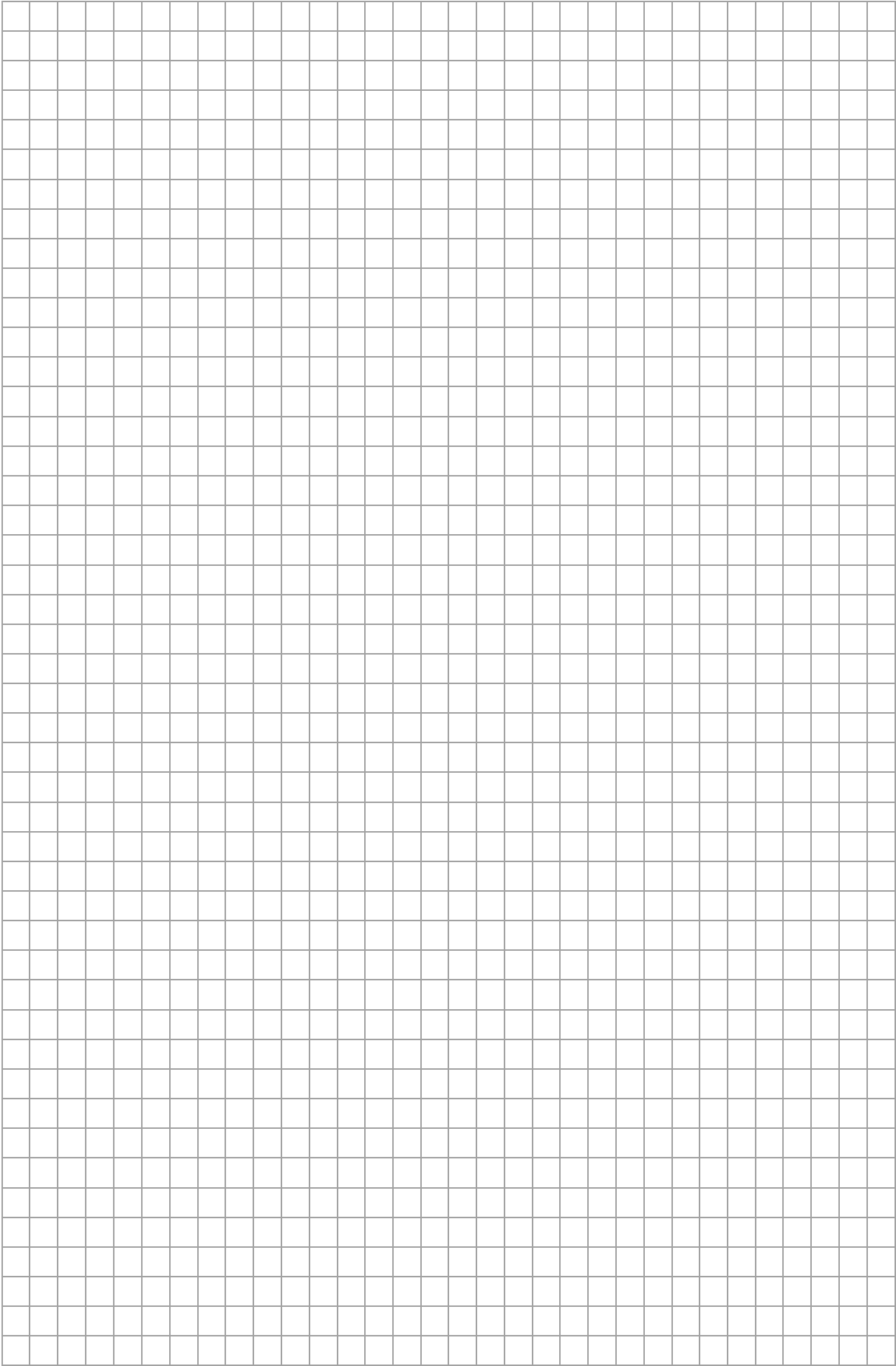


Zadanie 10. (0–5)

Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny $ABCD$ o podstawie ABC . Płaszczyzna zawierająca krawędź AB podstawy i prostopadła do krawędzi bocznej CD przecina tę krawędź w punkcie E , przy czym $\frac{|CE|}{|DE|} = \frac{3}{11}$.

**Oblicz stosunek pola powierzchni całkowitej tego ostrosłupa do pola podstawy ABC .
Zapisz obliczenia.**



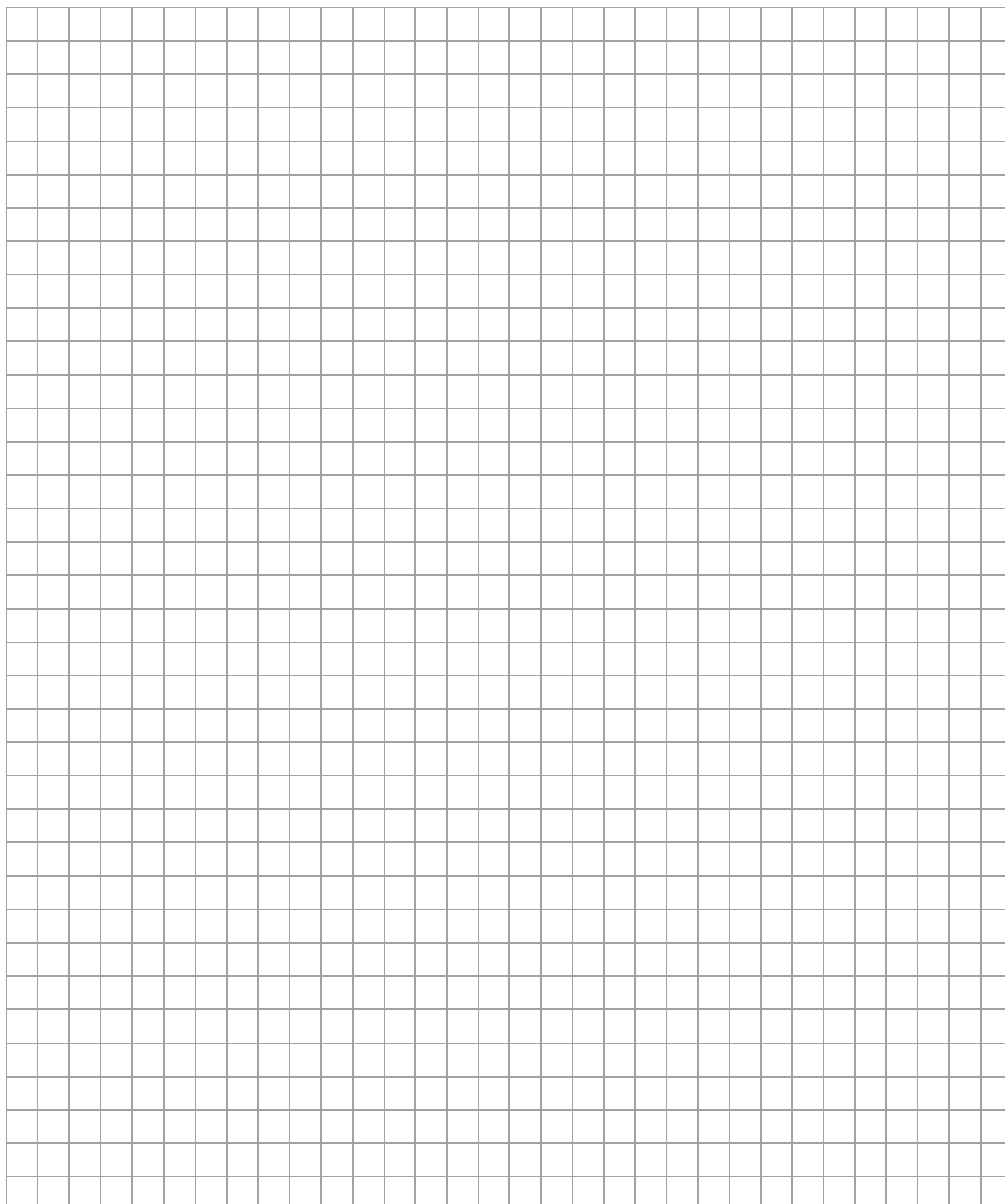


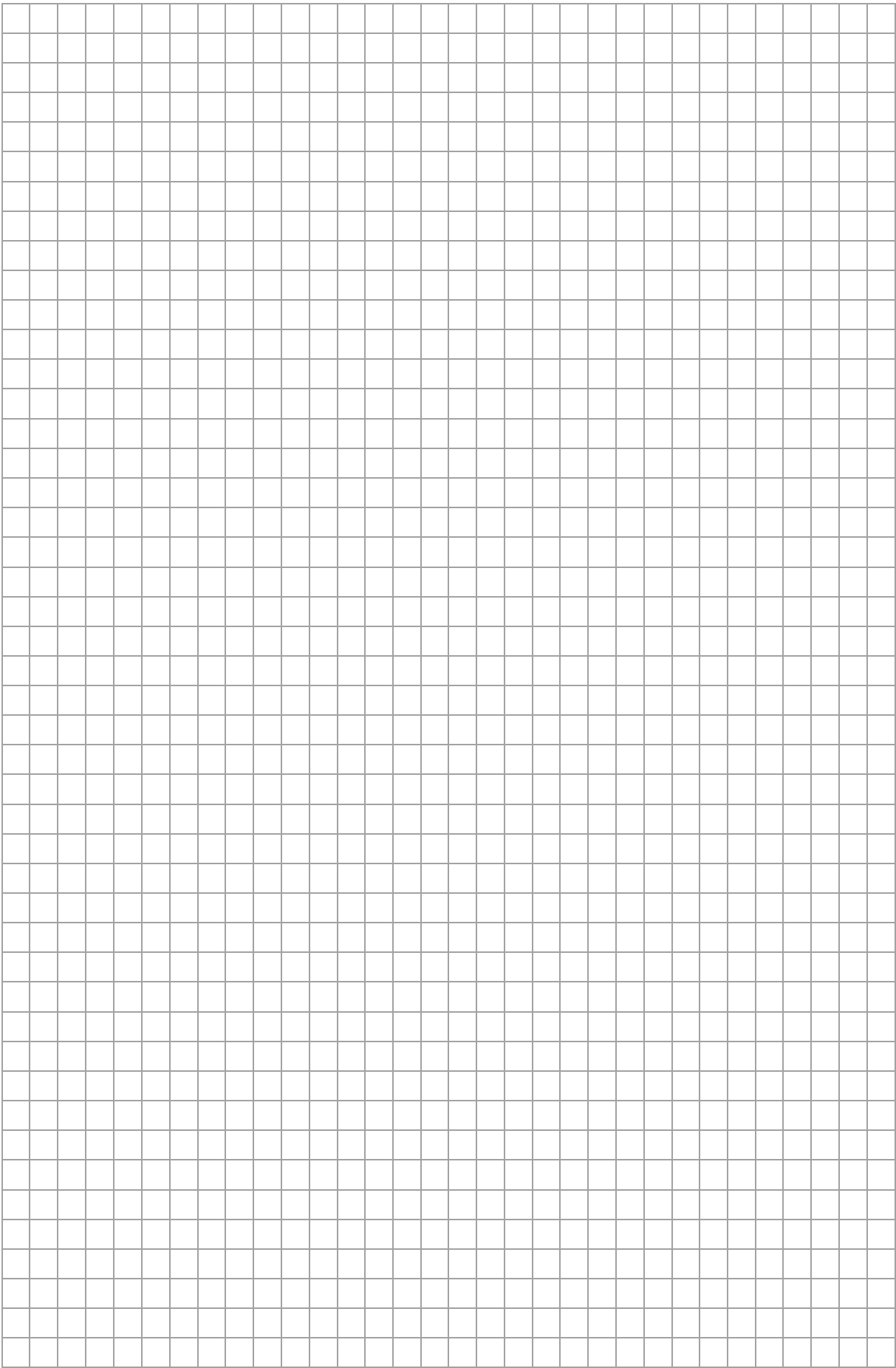
Zadanie 11. (0–6)

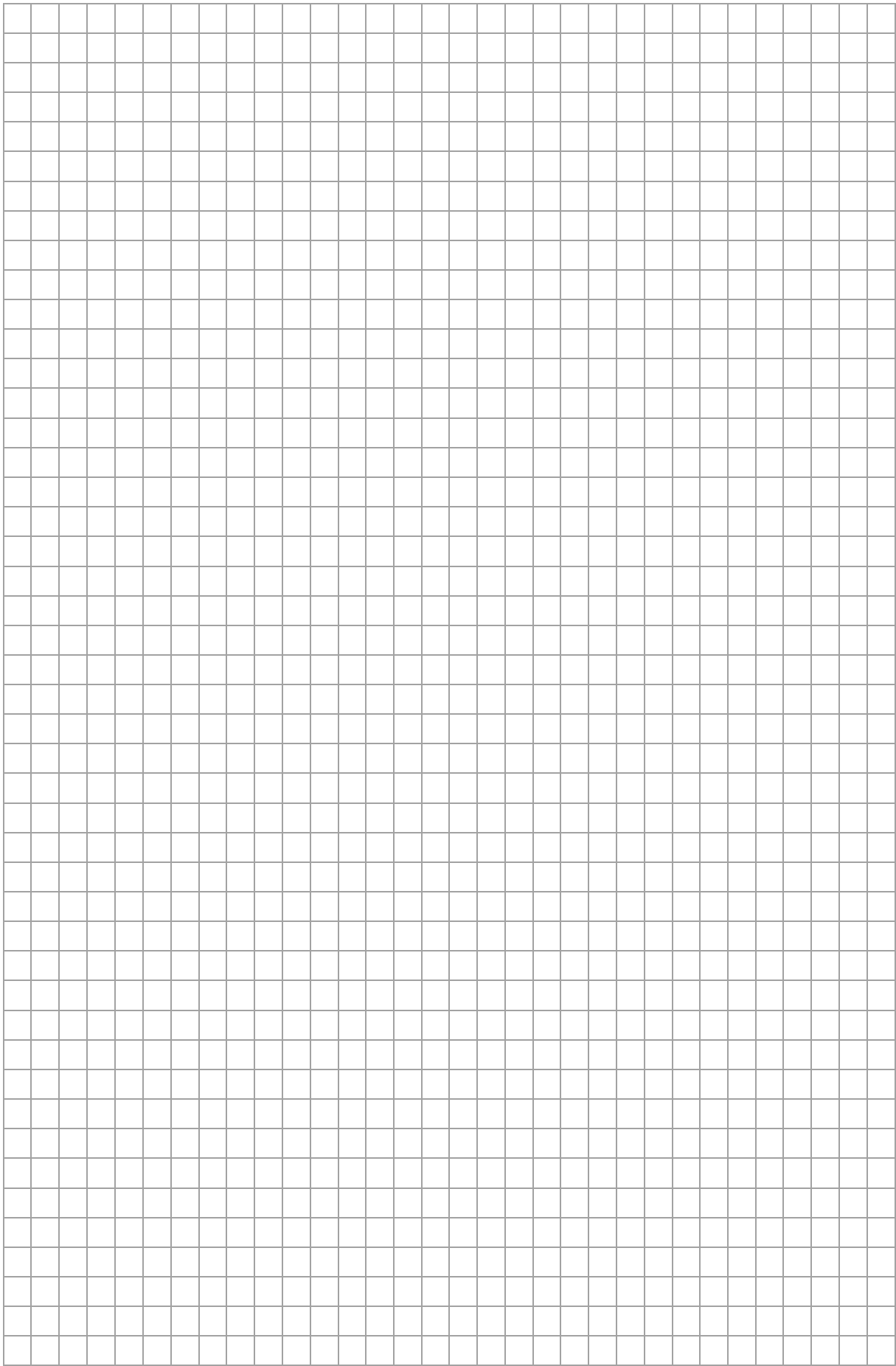
W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest równoległobok $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-8, -1)$ i $D = (-13, 9)$ oraz środka symetrii $M = \left(-\frac{9}{2}, 1\right)$.

Okrąg $\mathcal{O}$ przechodzi przez początek tego układu i jest styczny do prostych zawierających boki AB i BC tego równoległoboku. Druga współrzędna środka okręgu $\mathcal{O}$ jest liczbą ujemną.

Wyznacz równanie okręgu $\mathcal{O}$. Zapisz obliczenia.







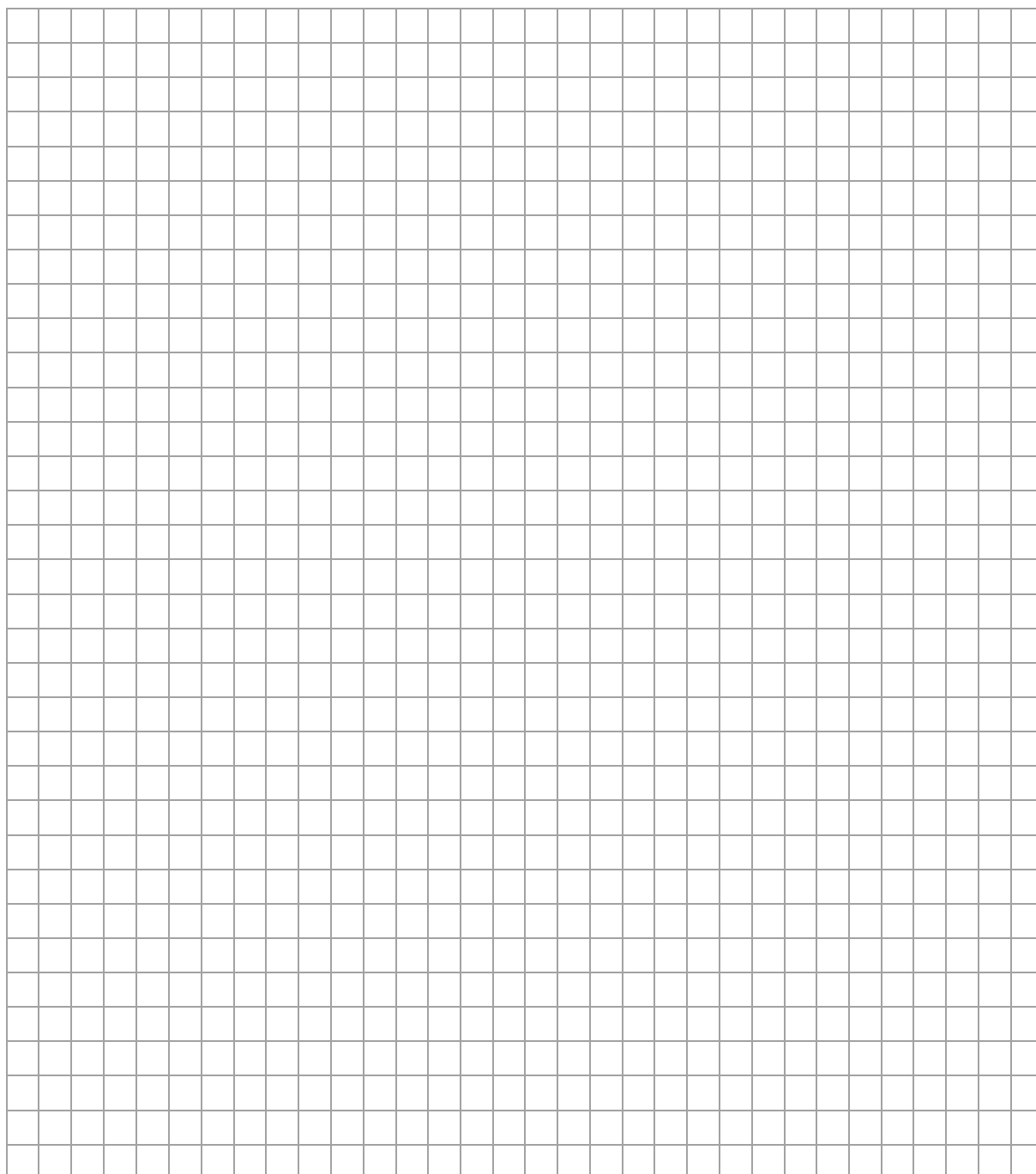
Zadanie 12.

Rozważamy wszystkie graniastosłupy prawidłowe trójkątne o polu powierzchni całkowitej równym $24\sqrt{3}$.

Zadanie 12.1. (0–2)

Wykaż, że objętość V graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi podstawy jest określona wzorem

$$V(a) = 6a - \frac{1}{8}a^3$$



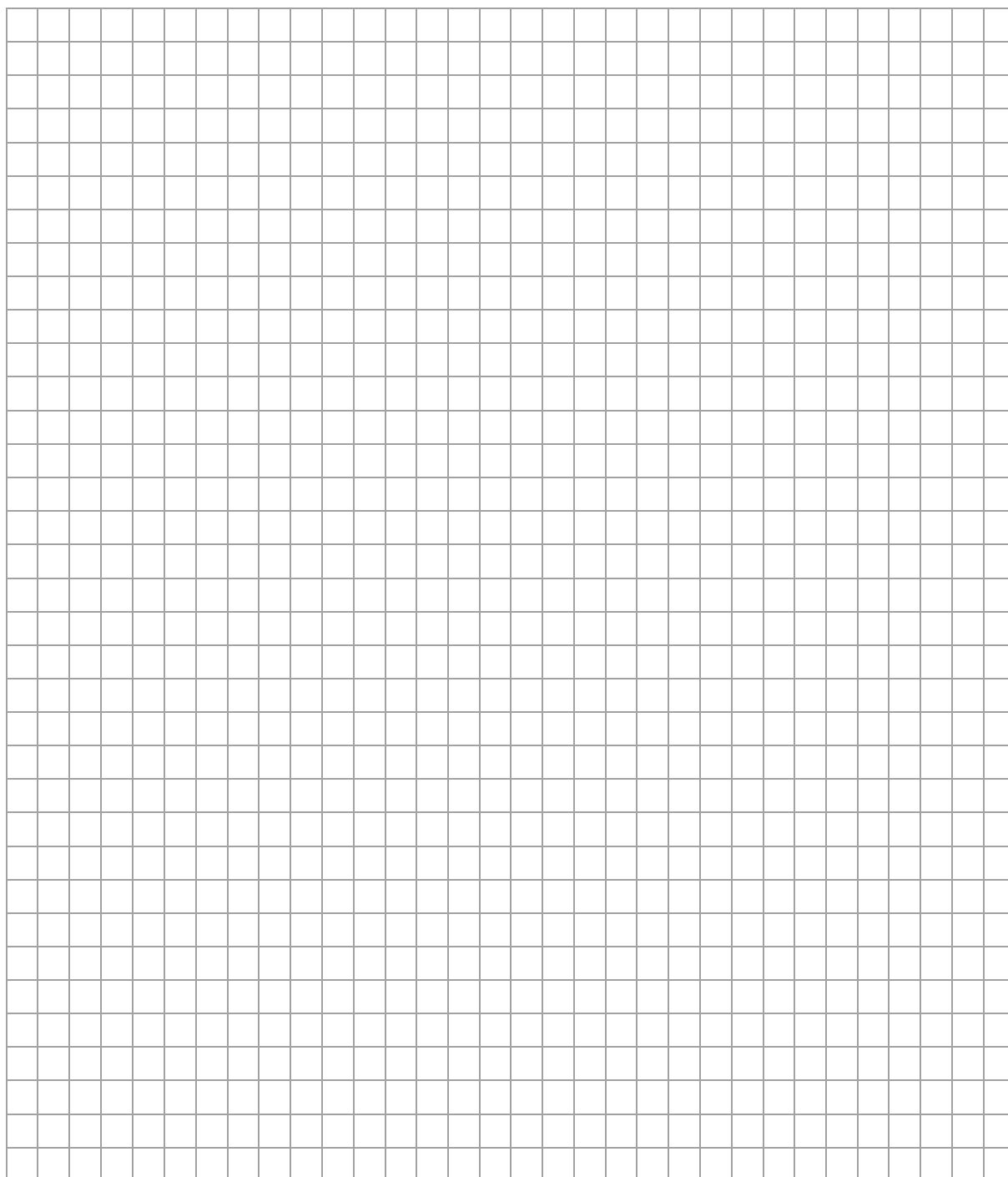
Zadanie 12.2. (0–4)

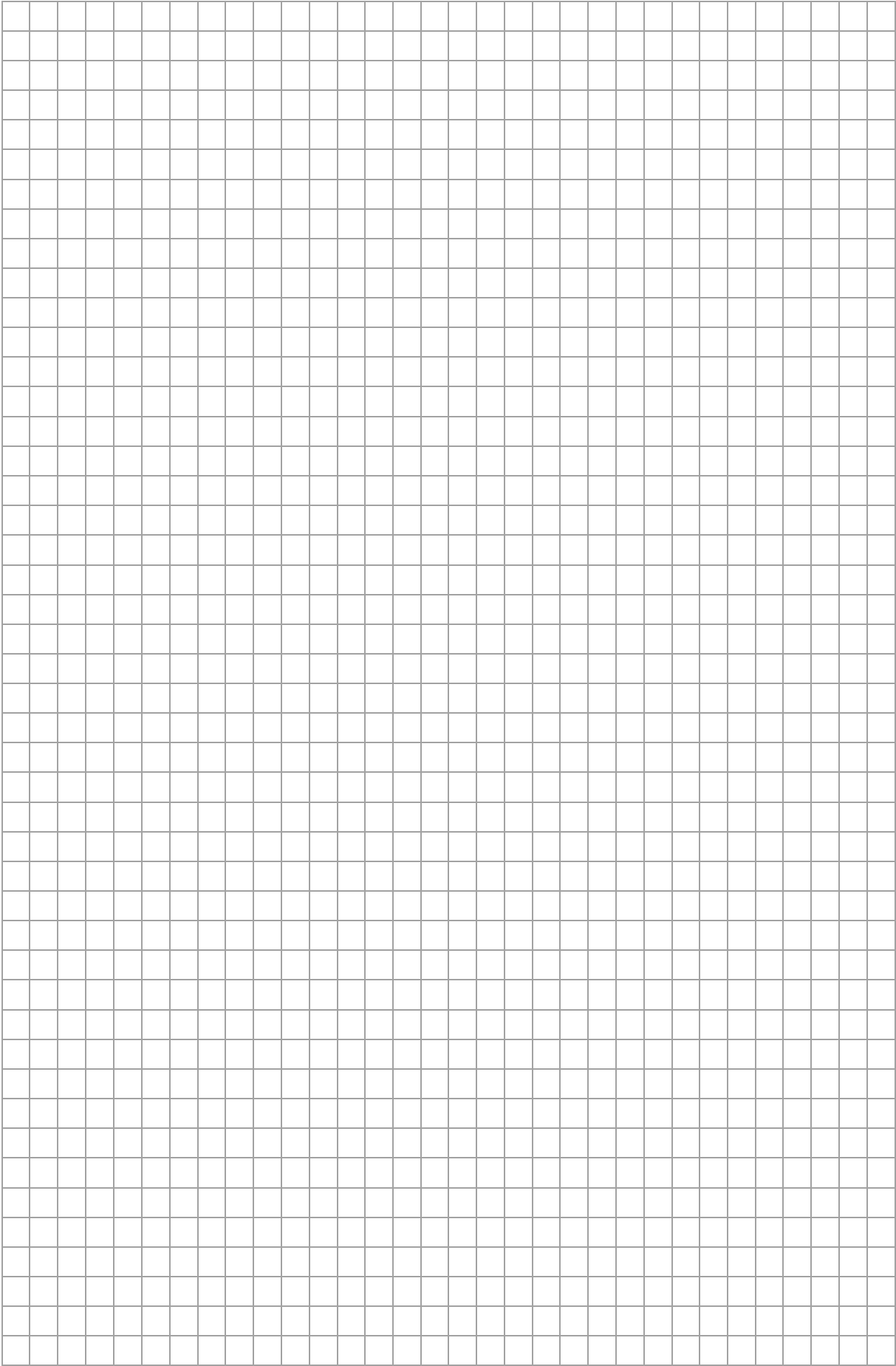
Objętość V graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi podstawy jest określona wzorem

$$V(a) = 6a - \frac{1}{8}a^3$$

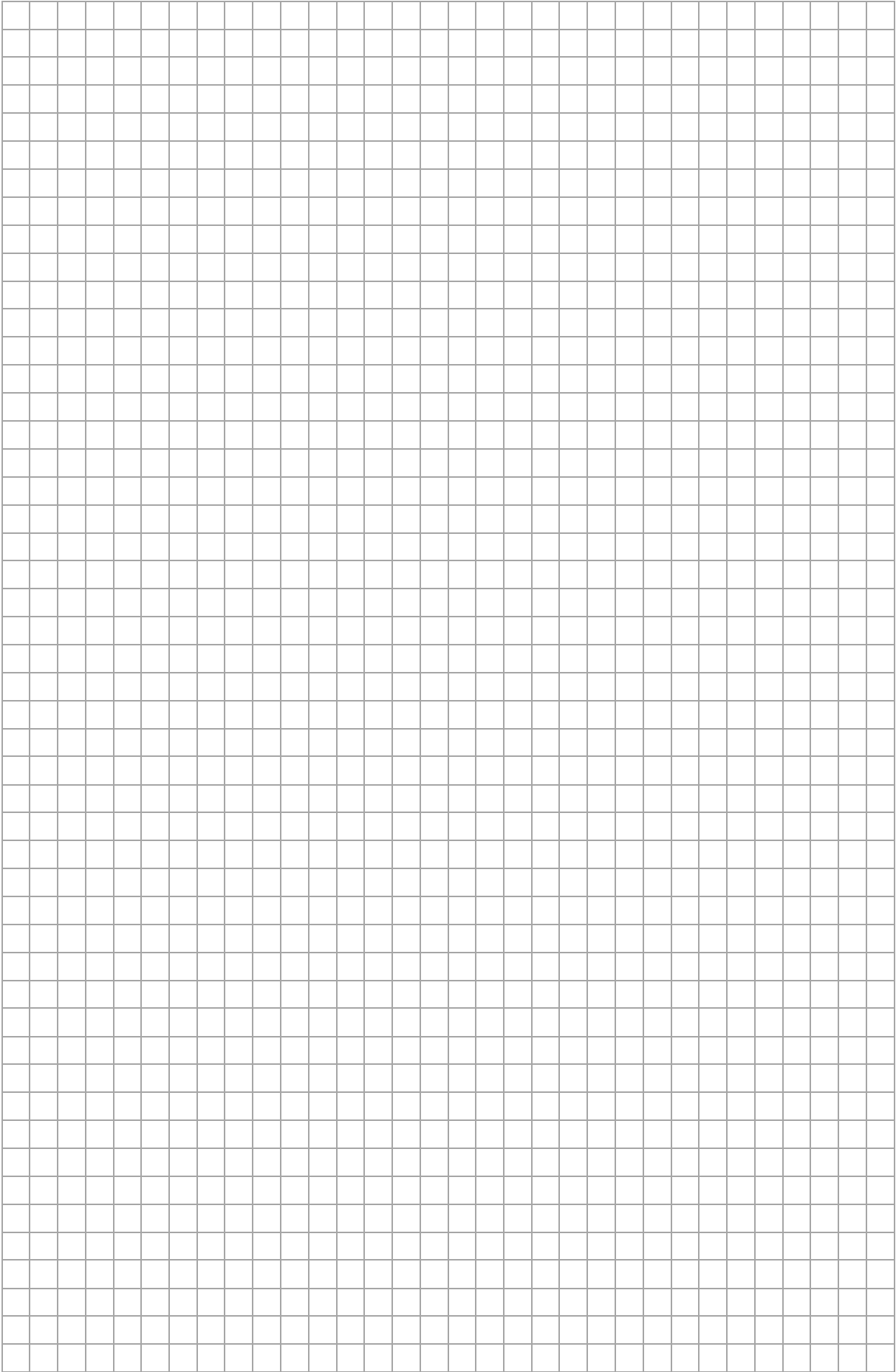
dla $a \in (0, 4\sqrt{3})$.

Wyznacz długość krawędzi podstawy tego z rozważanych graniastosłupów, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość. Zapisz obliczenia.





This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.



MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023



MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023



MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023



<i>Rodzaj dokumentu:</i>	Zasady oceniania rozwiązań zadań
<i>Egzamin:</i>	Egzamin maturalny
<i>Przedmiot:</i>	Matematyka
<i>Poziom:</i>	Poziom rozszerzony
<i>Formy arkusza:</i>	MMAU-R0-100, MMAU-R0-200, MMAU-R0-300, MMAU-R0-400, MMAU-R0-700, MMAU-R0-K00, MMAU-R0-Q00, MMAU-R0-100
<i>Termin egzaminu:</i>	6 czerwca 2025 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–3)

Wymagania określone w podstawie programowej ¹	
Wymagania ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. I. Sprawność rachunkowa.	Zdający: XII.R2) stosuje schemat Bernoullego.

Zasady oceniania

- 3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 0,984.
 2 pkt – zapisanie poprawnego prawdopodobieństwa uzyskania co najwyżej jednego sukcesu w dziesięciu próbach Bernoullego, np.

$$P = \binom{10}{0} \cdot (0,98)^{10} + \binom{10}{1} \cdot (0,02)^1 \cdot (1 - 0,02)^9,$$

$$P = (0,98)^{10} + 10 \cdot 0,02 \cdot (0,98)^9$$

- 1 pkt – zapisanie prawdopodobieństwa odniesienia sukcesu (p) i porażki (q) w pojedynczej próbie: $p = 0,02$, $q = 0,98$

ALBO

- zapisanie prawdopodobieństwa w postaci $q^{10} + 10p \cdot q^9$, gdzie p jest prawdopodobieństwem odniesienia sukcesu, q – porażki,

ALBO

- przedstawienie fragmentu drzewa zawierającego wszystkie istotne gałęzie odpowiadające sytuacji wysłania przez sklep dziesięciu pralek, które nie ulegną uszkodzeniu podczas transportu, oraz wszystkie istotne gałęzie odpowiadające sytuacji wysłania przez sklep dziesięciu pralek, z których dokładnie jedna uległa uszkodzeniu podczas transportu,

ALBO

¹Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz.U. z 2024 r. poz. 1019).

- przedstawienie fragmentu drzewa zawierającego gałąź odpowiadającą sytuacji uszkodzenia podczas transportu jednej spośród dziesięciu wysłanych pralek **oraz** określenie na każdym odcinku gałęzi prawdopodobieństwa sukcesu i porażki.
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisze poprawne prawdopodobieństwa

$$P(S_{10}^0) = \binom{10}{0} \cdot (0,02)^0 \cdot (0,98)^{10} \text{ oraz } P(S_{10}^1) = \binom{10}{1} \cdot (0,02)^1 \cdot (0,98)^9, \text{ ale}$$

z dalszego rozwiązania nie wynika, że $P = P(S_{10}^0) + P(S_{10}^1)$, to otrzymuje co najwyżej

1 punkt za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający przyjmuje $p = 0,2$ oraz $q = 0,8$ (albo $p = 0,02$ i $q = 0,8$) i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający przyjmuje $p = 0,98$ i $q = 0,02$, konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, lecz błędnie interpretuje wynik końcowy, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający nie określi sukcesu w pojedynczej próbie, ale z rozwiązania wynika, że poprawnie interpretuje warunki zadania, to może otrzymać **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Sukcesem w pojedynczej próbie Bernoullego jest uszkodzenie pralki podczas transportu.

Określamy prawdopodobieństwo sukcesu (p) i porażki (q) w pojedynczej próbie Bernoullego:

$$p = 0,02, \quad q = 1 - p = 0,98.$$

Niech S_{10}^k oznacza zdarzenie polegające na tym, że wśród dziesięciu wysłanych przez sklep pralek dokładnie k pralek uległo uszkodzeniu podczas transportu ($k \in \{0, 1\}$).

Obliczamy prawdopodobieństwo P zdarzenia polegającego na tym, że wśród dziesięciu wysłanych pralek uszkodzeniu podczas transportu ulegnie co najwyżej jedna:

$$\begin{aligned} P &= P(S_{10}^0) + P(S_{10}^1) = \binom{10}{0} \cdot (0,02)^0 \cdot (0,98)^{10} + \binom{10}{1} \cdot (0,02)^1 \cdot (0,98)^9 = \\ &= (0,98)^9 \cdot (0,98 + 10 \cdot 0,02) = (0,98)^9 \cdot 1,18 \approx 0,984 \end{aligned}$$

Zadanie 2. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu	Zdający: I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi. I.R) stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Zasady oceniania (dla sposobów I-IV)

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – przekształcenie wyrażenia $\frac{\log_{\sqrt{2}} 27 + 2}{2 \log_2 14 - 2}$ lub $\log_7 54$, lub obydwu tych wyrażeń do takiej postaci, z której poprzez jednokrotne zastosowanie wzoru na logarytm iloczynu lub logarytm ilorazu, lub wzoru na zamianę podstawy logarytmu, lub wzoru na logarytm potęgi oraz ewentualne kilkukrotne przekształcenie wyrażenia wymiernego można otrzymać tezę

ALBO

– zapisanie jednego równania z a , b oraz niewiadomą x , np.

$$(a - 1)x = \frac{b}{2} + 1 \quad (\text{dla sposobu III}),$$

ALBO

– zapisanie liczby 2 w postaci $7^{\frac{1}{a-1}}$ oraz liczby 27 w postaci $2^{\frac{b}{2}}$ (dla sposobu IV).

1 pkt – zastosowanie wzoru na zamianę podstawy logarytmu lub na logarytm iloczynu, lub na

$$\log_7 54 = \frac{\log_2 54}{\log_2 7}, \log_7 54 = \frac{\log_{\sqrt{2}} 54}{\log_{\sqrt{2}} 7},$$

$$\log_{\sqrt{2}} 27 + 2 = \log_{\sqrt{2}}(27 \cdot 2), 2 \log_2 14 - 2 = 2 \log_2 \left(\frac{14}{2}\right)$$

ALBO

– zapisanie liczb 7 oraz 27 jako potęg liczby 2: $7 = 2^{a-1}$ i $27 = 2^{\frac{b}{2}}$ oraz zapisanie równania $7^x = 54$ (dla sposobu III),

ALBO

– zapisanie liczby 2 w postaci $7^{\frac{1}{a-1}}$ (dla sposobu IV).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przekształcamy wyrażenie $\log_7 54$, stosując wzór na zamianę podstawy logarytmu, a następnie wzory na logarytm iloczynu oraz logarytm ilorazu:

$$\log_7 54 = \frac{\log_2 54}{\log_2 7} = \frac{\log_2 27 + \log_2 2}{\log_2 14 - \log_2 2} = \frac{\frac{\log_{\sqrt{2}} 27}{\log_{\sqrt{2}} 2} + 1}{a - 1} = \frac{\frac{b}{2} + 1}{a - 1} = \frac{b + 2}{2a - 2}$$

To należało wykazać.

Sposób II

Przekształcamy wyrażenie $\frac{b+2}{2a-2}$, korzystając z założenia oraz ze wzoru zamianę podstawy logarytmu:

$$\frac{b+2}{2a-2} = \frac{\log_{\sqrt{2}} 27 + 2}{2 \log_2 14 - 2} = \frac{\frac{\log_2 27}{\log_2 \sqrt{2}} + 2}{2 \cdot (\log_2 14 - 1)} = \frac{2 \cdot (\log_2 27 + 1)}{2 \cdot (\log_2 14 - 1)} = \frac{\log_2 27 + 1}{\log_2 14 - 1}$$

Stąd i ze wzorów na sumę logarytmów, różnicę logarytmów oraz wzoru na zamianę podstawy logarytmu otrzymujemy dalej

$$\frac{\log_2 27 + 1}{\log_2 14 - 1} = \frac{\log_2 27 + \log_2 2}{\log_2 14 - \log_2 2} = \frac{\log_2 54}{\log_2 7} = \log_7 54$$

Zatem $\log_7 54 = \frac{b+2}{2a-2}$.

To należało wykazać.

Sposób III

Korzystamy z definicji logarytmu oraz z założenia i otrzymujemy $2^a = 14$ oraz

$$(\sqrt{2})^b = 27. \text{ Stąd } 7 = 2^{a-1} \text{ oraz } 27 = 2^{\frac{b}{2}}.$$

Oznaczmy przez x liczbę rzeczywistą taką, że $7^x = 54$. Wtedy

$$2^{(a-1)x} = 2 \cdot 27$$

$$2^{(a-1)x} = 2 \cdot 2^{\frac{b}{2}}$$

$$2^{(a-1)x} = 2^{\frac{b}{2} + 1}$$

Stąd

$$(a-1)x = \frac{b}{2} + 1$$

$$x = \frac{b+2}{2(a-1)}$$

Zatem $\log_7 54 = x = \frac{b+2}{2a-2}$.

To należało wykazać.

Sposób IV

Korzystamy z definicji logarytmu oraz z założenia i otrzymujemy $2^a = 14$ oraz

$(\sqrt{2})^b = 27$. Stąd $7 = 2^{a-1}$, czyli $2 = 7^{\frac{1}{a-1}}$, oraz $27 = 2^{\frac{b}{2}}$. Zatem

$$54 = 27 \cdot 2 = 2^{\frac{b}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{a-1}} = 7^{\frac{b}{2(a-1)}} \cdot 7^{\frac{1}{a-1}} = 7^{\frac{b}{2(a-1)} + \frac{1}{a-1}} = 7^{\frac{b+2}{2a-2}}$$

czyli $\log_7 54 = \frac{b+2}{2a-2}$.

To należało wykazać.

Zadanie 3. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XI.R1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 368 586.

2 pkt – wyznaczenie liczby liczb sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 4 (np. $\binom{6}{2} + 6$)
oraz zapisanie liczby liczb sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 2: 6, **oraz**
wyznaczenie liczby liczb sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 0
(np. $9 \cdot 10^5 - 9^6$).

1 pkt – wyznaczenie liczby liczb sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 4 (np. $\binom{6}{2} + 6$)
oraz zapisanie liczby liczb sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 2: 6
ALBO
– wyznaczenie liczby liczb sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 0, np.:
 $9 \cdot 10^5 - 9^6$, $5 \cdot 9^5 + \binom{5}{2} \cdot 9^4 + \binom{5}{3} \cdot 9^3 + \binom{5}{4} \cdot 9^2 + \binom{5}{5} \cdot 9$, 368 559,
ALBO
– wypisanie wszystkich przypadków, dla których iloczyn cyfr będzie liczbą parzystą
mniejszą od 5: jedna dwójka i pięć jedynek, dwie dwójki i cztery jedynek, jedna
czwórka i pięć jedynek, co najmniej jedno zero.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Iloczyn cyfr liczby naturalnej sześciocyfrowej jest równy 4 tylko wtedy, gdy w zapisie
dziesiętnym tej liczby występują:

- dwie dwójki i cztery jedynek,
- albo
- jedna czwórka i pięć jedynek.

Liczb naturalnych sześciocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie dwie
dwójki i cztery jedynek jest $\binom{6}{2} = 15$.

Liczb naturalnych sześciocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie
jedna czwórka i pięć jedynek jest 6.

Zatem wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 4 jest 21.

Iloczyn cyfr liczby naturalnej sześciocyfrowej jest równy 2 tylko wtedy, gdy w zapisie
dziesiętnym tej liczby występują jedna dwójka i pięć jedynek.

Zatem wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 2 jest 6.

Iloczyn cyfr liczby naturalnej sześciocyfrowej jest równy 0 tylko wtedy, gdy w zapisie dziesiętnym tej liczby występuje na pierwszej pozycji cyfra różna od zera, a na dalszych pozycjach co najmniej jedno zero.

Ponieważ wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych jest $9 \cdot 10^5$, a wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych o wszystkich cyfrach różnych od zera jest 9^6 , więc wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 0 jest $9 \cdot 10^5 - 9^6 = 368\,559$.

Zatem wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych, których iloczyn cyfr jest liczbą parzystą mniejszą od 5 jest $21 + 6 + 368\,559 = 368\,586$.

Uwaga.

Liczbę wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 0 można obliczyć też w następujący sposób.

Wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym cyfra zero występuje dokładnie jeden raz jest $\binom{5}{1} \cdot 9^5 = 295\,245$.

Wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym cyfra zero występuje dokładnie dwa razy jest $\binom{5}{2} \cdot 9^4 = 65\,610$.

Wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym cyfra zero występuje dokładnie trzy razy jest $\binom{5}{3} \cdot 9^3 = 7\,290$.

Wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym cyfra zero występuje dokładnie cztery razy jest $\binom{5}{4} \cdot 9^2 = 405$.

Wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym cyfra zero występuje dokładnie pięć razy jest $\binom{5}{5} \cdot 9^1 = 9$.

Zatem wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym 0 jest

$$295\,245 + 65\,610 + 7\,290 + 405 + 9 = 368\,559$$

Zadanie 4. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.11) przeprowadza dowody geometryczne.

Zasady oceniania (dla sposobów I – III)

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – wyznaczenie długości odcinka CL (lub LB) w zależności od długości odcinka DM ,

np. $|CL| = a - \frac{1}{2} \cdot |DM|$, $|LB| = \frac{1}{2} \cdot |DM|$ **oraz** uzasadnienie, że trójkąty MDN

i KBL są podobne (dla sposobu I)

ALBO

– uzasadnienie, że trójkąty MDN i KBL są podobne **oraz** zapisanie długości odcinków DE oraz FL za pomocą jednej zmiennej (lub zapisanie związku między nimi), np. $|DE| = 2x$ i $|FL| = \frac{1}{2}x$ (dla sposobu II).

ALBO

– wyznaczenie współrzędnych wierzchołków trapezu $KLMN$ w zależności od a oraz parametru c : $K = \left(\frac{5a-c}{2}, 0\right)$ oraz $L = (2a, c-a)$ oraz $M = (2c-2a, a)$ oraz $N = (0, 5a-4c)$ (dla sposobu III).

1 pkt – uzasadnienie, że trójkąty MDN i KBL są podobne (dla sposobów I oraz II)

ALBO

– wyznaczenie długości odcinka CL (lub LB) w zależności od długości odcinka DM , np. $|CL| = a - \frac{1}{2} \cdot |DM|$, $|LB| = \frac{1}{2} \cdot |DM|$ (dla sposobu I),

ALBO

– zapisanie długości odcinków DE oraz FL za pomocą jednej zmiennej (lub zapisanie związku między nimi), np. $|DE| = 2x$ i $|FL| = x$ (dla sposobu II),

ALBO

– umieszczenie prostokąta $ABCD$ w układzie współrzędnych i zapisanie współrzędnych jego wierzchołków, np. $A = (0, 0)$ i $B = (2a, 0)$ i $C = (2a, a)$

i $D = (0, a)$ **oraz** zapisanie równania prostej ML : $y = -\frac{1}{2}x + c$ (dla sposobu III).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania**Sposób I**

Oznaczmy przez a długość boku AD . Wtedy $|AB| = 2a$.

Kąty DMN i BKL są naprzemianległe oraz $MN \parallel KL$, więc te kąty mają równe miary.

Zatem trójkąty prostokątne MDN i KBL są podobne (na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów).

Ponieważ $ML \parallel DB$, więc korzystając z twierdzenia Talesa, otrzymujemy

$$\frac{|DM|}{|LB|} = \frac{|MC|}{|LC|}$$

$$\frac{|DM|}{|LB|} = \frac{2a - |DM|}{a - |LB|}$$

$$|DM| \cdot a - |DM| \cdot |LB| = 2 \cdot |LB| \cdot a - |LB| \cdot |DM|$$

$$|LB| = \frac{1}{2} \cdot |DM|$$

Z warunków zadania wynika, że $MN \perp DB$, więc z rachunku kątów dostajemy $|\angle DNM| = |\angle CDB|$, więc trójkąty prostokątne MDN oraz BCD są podobne (na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów). Zatem $\frac{|DM|}{|DN|} = \frac{|BC|}{|CD|}$, czyli $\frac{|DM|}{|DN|} = \frac{1}{2}$.

Stąd i ze związku $|LB| = \frac{1}{2} \cdot |DM|$ otrzymujemy $|LB| = \frac{1}{4} \cdot |DN|$, co oznacza, że trójkąt MDN jest podobny do trójkąta KBL w skali 4. Ponieważ stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa, więc stosunek pola trójkąta MDN do pola trójkąta KBL jest równy 16. To należało wykazać.

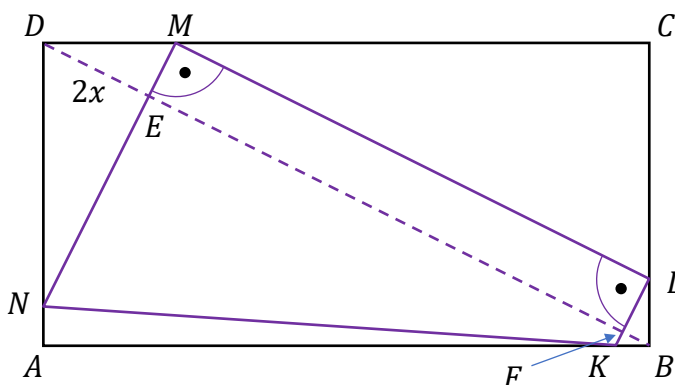
Sposób II

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

E – punkt przecięcia przekątnej DB z bokiem MN trapezu $KLMN$,

F – punkt przecięcia przekątnej DB z bokiem KL trapezu $KLMN$,

$2x$ – długość odcinka DE (zobacz rysunek).



Ponieważ $ML \parallel DB$, więc trójkąty DEM oraz FBL są prostokątne. Trójkąty prostokątne MDE i BDC mają wspólny kąt ostry, więc są podobne (cecha kkk podobieństwa trójkątów).

Zatem $\frac{|ME|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|CD|} = \frac{1}{2}$, więc $|ME| = \frac{1}{2} \cdot |DE| = x$.

Czworokąt $MEFL$ jest prostokątem, więc $|FL| = |ME| = x$.

Z rachunku kątów mamy $|\angle FLB| = |\angle MDE|$, więc trójkąty prostokątne MDE i KLB są podobne (na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów). Zatem $\frac{|FB|}{|FL|} = \frac{|ME|}{|DE|} = \frac{1}{2}$, czyli

$$|FB| = \frac{1}{2} \cdot |FL| = \frac{1}{2}x.$$

Kąty DMN i BKL są naprzemianległe oraz $MN \parallel KL$, więc te kąty mają równe miary. Zatem trójkąty prostokątne MDN i KBL są podobne (na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów). Ponieważ stosunek odpowiednich wysokości tych trójkątów jest równy $\frac{|DE|}{|FB|} = \frac{2x}{\frac{1}{2}x} = 4$, więc trójkąt MDN jest podobny do trójkąta KBL w skali 4.

Ponieważ stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa, więc stosunek pola trójkąta MDN do pola trójkąta KBL jest równy 16. To należało wykazać.

Sposób III

Oznaczmy przez a długość boku AD . Wtedy $|AB| = 2a$.

Umieszczamy prostokąt $ABCD$ w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) tak, że $A = (0, 0)$, $B = (2a, 0)$, $C = (2a, a)$, $D = (0, a)$.

Ponieważ stosunek $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{1}{2}$ oraz $ML \parallel BD$, więc prosta ML ma równanie

$$y = -\frac{1}{2}x + c, \text{ przy pewnym } c \in (a, 2a).$$

Wtedy $M = (2c - 2a, a)$ oraz $L = (2a, c - a)$.

Wyznaczamy równania prostych MN oraz KL , które są prostopadłe do ML :

$$MN: y = 2(x - 2c + 2a) + a$$

$$KL: y = 2(x - 2a) + c - a$$

Stąd $N = (0, 5a - 4c)$ oraz $K = \left(\frac{5a-c}{2}, 0\right)$.

Wyznaczamy długości boków trójkątów MDN i KBL :

$$|ND| = |a - (5a - 4c)| = 4 \cdot |c - a|$$

$$|DM| = |2c - 2a - 0| = 2 \cdot |c - a|$$

$$|KB| = \left|2a - \frac{5a-c}{2}\right| = \frac{1}{2} \cdot |c - a|$$

$$|BL| = |c - a - 0| = |c - a|$$

Wyznaczamy stosunek pól trójkątów MDN i KBL :

$$\frac{P_{\Delta MDN}}{P_{\Delta KBL}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |ND| \cdot |DM|}{\frac{1}{2} \cdot |KB| \cdot |BL|} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot |c - a| \cdot 2 \cdot |c - a|}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot |c - a| \cdot |c - a|} = 16$$

To należało wykazać.

Zadanie 5. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: III.R3) stosuje wzory Viète’a dla równań kwadratowych; III.R5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami [...].

Zasady oceniania

4 pkt – spełnienie następujących trzech warunków:

1) poprawne rozwiązanie warunku $m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$: $m = 2$,

2) poprawne rozwiązanie warunku $\Delta > 0$: $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

LUB

wyznaczenie wszystkich wartości parametru m , dla których $x_1 \neq x_2$: $m \neq 1$,

LUB

sprawdzenie, że dla $m = 2$ są spełnione warunki zadania,

3) zapisanie poprawnej odpowiedzi: $m = 2$.

3 pkt – poprawnie rozwiązany warunek $\Delta > 0$: $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ **oraz** zapisanie równania

z jedną niewiadomą m , np. $m \cdot [(-2m)^2 - 2 \cdot (2m - 1)] = 3m \cdot (2m - 1) + 2$

ALBO

– rozwiązanie warunku $m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$: $m = 2$,

ALBO

– zapisanie, że $x_1 \neq x_2$ dla $m \neq 1$ **oraz** zapisanie równania z jedną niewiadomą m ,

np. $m \cdot [(-2m)^2 - 2 \cdot (2m - 1)] = 3m \cdot (2m - 1) + 2$.

2 pkt – poprawnie rozwiązany warunek $\Delta > 0$: $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ **oraz** przekształcenie warunku

$m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie

zastosowanie wzorów Viète’a, np. $m \cdot [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2] = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą m , np.

$$m \cdot [(-2m)^2 - 2 \cdot (2m - 1)] = 3m \cdot (2m - 1) + 2$$

ALBO

– wyznaczenie pierwiastków trójmianu $x^2 + 2mx + (2m - 1)$: (-1) oraz $1 - 2m$,

oraz zapisanie, że $x_1 \neq x_2$ dla $m \neq 1$.

1 pkt – poprawnie rozwiązany warunek $\Delta > 0$: $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

ALBO

– przekształcenie warunku $m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète’a, np.

$$m \cdot [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2] = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$$

ALBO

– wyznaczenie pierwiastków trójmianu $x^2 + 2mx + (2m - 1)$: (-1) oraz $1 - 2m$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga.

Jeżeli zdający przyjmie, że $x_1^2 + x_2^2$ jest równe $(x_1 + x_2)^2$ oraz doprowadzi rozwiązanie konsekwentnie do końca, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Równanie $x^2 + 2mx + 2m - 1 = 0$ ma dokładnie dwa różne rozwiązania rzeczywiste tylko wówczas, gdy wyróżnik Δ trójkianu kwadratowego $x^2 + 2mx + (2m - 1)$ jest dodatni.

Rozwiązujemy warunek $\Delta > 0$:

$$(2m)^2 - 4 \cdot (2m - 1) > 0$$

$$4m^2 - 8m + 4 > 0$$

$$4(m - 1)^2 > 0$$

$$m \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

Przekształcamy warunek $m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a i rozwiązujemy uzyskane równanie z niewiadomą m :

$$m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$$

$$m \cdot [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2] = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$$

$$m \cdot [(-2m)^2 - 2 \cdot (2m - 1)] = 3m \cdot (2m - 1) + 2$$

$$4m^3 - 10m^2 + 5m - 2 = 0$$

$$4m^3 - 8m^2 - 2m^2 + 4m + m - 2 = 0$$

$$4m^2(m - 2) - 2m(m - 2) + (m - 2) = 0$$

$$(m - 2)(4m^2 - 2m + 1) = 0$$

$$m - 2 = 0 \quad \vee \quad 4m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$m = 2$$

Ponieważ $4m^2 - 2m + 1 = 3m^2 + (m - 1)^2 > 0$, więc równanie $4m^2 - 2m + 1 = 0$ nie ma rozwiązań rzeczywistych.

Zatem warunek $m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$ jest spełniony tylko dla $m = 2$.

Ponieważ $2 \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, więc warunki zadania są spełnione tylko dla $m = 2$.

Sposób II

Zauważamy, że liczba (-1) jest rozwiązaniem równania $x^2 + 2mx + 2m - 1 = 0$. Korzystając ze wzorów Viète'a, mamy $x_1 + x_2 = -2m$, czyli $-1 + x_2 = -2m$, więc $x_2 = 1 - 2m$. Zatem $x_1 \neq x_2$ gdy $m \neq 1$.

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m , dla których spełniony jest warunek $m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$:

$$m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$$

$$m \cdot [(-1)^2 + (1 - 2m)^2] = 3m \cdot (-1) \cdot (1 - 2m) + 2$$

$$m \cdot (1 + 1 - 4m + 4m^2) = 6m^2 - 3m + 2$$

$$4m^3 - 10m^2 + 5m - 2 = 0$$

$$4m^3 - 8m^2 - 2m^2 + 4m + m - 2 = 0$$

$$4m^2(m - 2) - 2m(m - 2) + (m - 2) = 0$$

$$(m - 2)(4m^2 - 2m + 1) = 0$$

$$m - 2 = 0 \quad \vee \quad 4m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$m = 2$$

Wyróżnik trójmianu $4m^2 - 2m + 1$ jest ujemny, więc równanie $4m^2 - 2m + 1 = 0$ nie ma rozwiązań rzeczywistych.

Zatem warunek $m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$ jest spełniony tylko dla $m = 2$.

Warunki zadania są spełnione tylko dla $m = 2$.

Zadanie 6. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.R6) rozwiązuje równania trygonometryczne.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$.

3 pkt – rozwiązanie równania $\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$ w zbiorze $\mathbb{R}$, np.:

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \cdot k \text{ lub } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ lub } x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z},$$

ALBO

– spełnienie jednego z kryteriów określonych w zasadach oceniania za 2 punkty **oraz**

$$\text{rozwiązanie równania } \cos(3x) = 0 \text{ w przedziale } [0, \pi]: \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6},$$

ALBO

– spełnienie jednego z kryteriów określonych w zasadach oceniania za 2 punkty **oraz**

$$\text{rozwiązanie równania } \cos x + \cos(3x) = 0 \text{ w przedziale } [0, \pi]: \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4},$$

ALBO

– spełnienie jednego z kryteriów określonych w zasadach oceniania za 2 punkty **oraz**

$$\text{rozwiązanie równania } \cos(2x) = 0 \text{ w przedziale } [0, \pi]: \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4},$$

ALBO

– spełnienie jednego z kryteriów określonych w zasadach oceniania za 2 punkty **oraz**

$$\text{rozwiązanie równania } 4\cos^2 x - 2 = 0 \text{ w przedziale } [0, \pi]: \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4},$$

ALBO

– spełnienie jednego z kryteriów określonych w zasadach oceniania za 2 punkty **oraz**

$$\text{rozwiązanie równania } 2 - 4\sin^2 x = 0 \text{ w przedziale } [0, \pi]: \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}.$$

2 pkt – przekształcenie równoważne równania $\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$ do postaci alternatywy dwóch równań trygonometrycznych, z których jednym jest

$$\cos(3x) = 0, \text{ np.:}$$

$$\cos(3x) = 0 \text{ lub } 2\cos(2x)\cos x = 0,$$

$$\cos(3x) = 0 \text{ lub } \cos x + \cos(3x) = 0,$$

$$\cos(3x) = 0 \text{ lub } (4\cos^2 x - 2)\cos x = 0,$$

ALBO

– przekształcenie równoważne równania $\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$ do postaci alternatywy $\cos(3x) = 0$ lub $\cos(2x) = 0$ lub $\cos x = 0$.

1 pkt – przekształcenie równoważne równania do postaci $2\cos(3x)\cos x + 2\cos^2(3x) = 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przekształcamy równanie $\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$ równoważnie, stosując wzory na cosinus sumy oraz cosinus różnicy argumentów:

$$\cos(3x - x) + 2\cos^2(3x) + \cos(3x + x) = 0$$

$$\cos(3x)\cos x + \sin(3x)\sin x + 2\cos^2(3x) + \cos(3x)\cos x - \sin(3x)\sin x = 0$$

$$2\cos(3x)(\cos x + \cos(3x)) = 0$$

$$\cos(3x) = 0 \quad \vee \quad \cos x + \cos(3x) = 0$$

Rozwiązujemy równanie $\cos(3x) = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$\cos(3x) = 0$$

$$3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \cdot k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stąd otrzymujemy rozwiązania równania $\cos(3x) = 0$ w zbiorze $[0, \pi]$: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$.

Rozwiązujemy równanie $\cos x + \cos(3x) = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$\cos x + \cos(3x) = 0$$

$$\cos(3x) = -\cos x$$

$$\cos(3x) = \cos(\pi + x)$$

$$3x = \pi + x + 2k\pi \quad \vee \quad 3x = -\pi - x + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stąd otrzymujemy rozwiązania równania $\cos x + \cos(3x) = 0$ w zbiorze $[0, \pi]$: $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$.

Zatem rozwiązaniami równania $\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$ w zbiorze $[0, \pi]$ są liczby: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$.

Sposób II

Przekształcamy równanie $\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$ równoważnie, stosując wzór na sumę cosinusów:

$$2\cos\left(\frac{2x+4x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2x-4x}{2}\right) + 2\cos^2(3x) = 0$$

$$2\cos(3x)\cos(-x) + 2\cos^2(3x) = 0$$

$$2\cos(3x)(\cos x + \cos(3x)) = 0$$

$$\cos(3x) = 0 \quad \vee \quad \cos x + \cos(3x) = 0$$

Rozwiązujemy równanie $\cos(3x) = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$\cos(3x) = 0$$

$$3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \cdot k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stąd otrzymujemy rozwiązania równania $\cos(3x) = 0$ w zbiorze $[0, \pi]$: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$.

Rozwiązujemy równanie $\cos x + \cos(3x) = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$\cos x + \cos(3x) = 0$$

$$2 \cos\left(\frac{x+3x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-3x}{2}\right) = 0$$

$$\cos(2x) \cdot \cos(-x) = 0$$

$$\cos(2x) = 0 \quad \vee \quad \cos x = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stąd otrzymujemy rozwiązania równania $\cos x + \cos(3x) = 0$ w zbiorze $[0, \pi]$: $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$.

Zatem rozwiązaniami równania $\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$ w zbiorze $[0, \pi]$ są liczby: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$.

Zadanie 7. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VIII.R1) stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.

Zasady oceniania (dla sposobu I)

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

3 pkt – obliczenie długości jednej z przekątnych czworokąta $ABCD$, np. $d = 7$, $|AC| = \frac{39}{7}$,
ALBO

– obliczenie cosinusa jednego z kątów czworokąta $ABCD$, np. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$,

$$\cos \gamma = -\frac{1}{2}, \cos |\sphericalangle ABC| = -\frac{71}{98}, \cos |\sphericalangle CDA| = \frac{71}{98}.$$

2 pkt – zapisanie równań $d^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos \alpha$ oraz

$$d^2 = 3^2 + 5^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos \alpha$$

ALBO

– zapisanie równań $d^2 = 3^2 + 8^2 + 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos \gamma$ oraz

$$d^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos \gamma,$$

ALBO

– zapisanie równań $|AC|^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos |\sphericalangle ABC|$ oraz

$$|AC|^2 = 8^2 + 5^2 + 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos |\sphericalangle ABC|,$$

ALBO

– zapisanie równań $|AC|^2 = 3^2 + 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos |\sphericalangle CDA|$ oraz

$$|AC|^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos |\sphericalangle CDA|.$$

1 pkt – zapisanie związków $d^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos \alpha$ oraz $\alpha + \gamma = 180^\circ$

ALBO

– zapisanie związków $d^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos \gamma$ oraz $\alpha + \gamma = 180^\circ$,

ALBO

– zapisanie związków $d^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos \alpha$ oraz

$$d^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos \gamma,$$

ALBO

– zapisanie związków $|AC|^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos |\sphericalangle ABC|$ oraz

$$|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA| = 180^\circ,$$

ALBO

– zapisanie związków $|AC|^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos |\sphericalangle CDA|$ oraz

$$|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA| = 180^\circ,$$

ALBO

– zapisanie związków $|AC|^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos |\sphericalangle ABC|$ oraz

$$|AC|^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos |\sphericalangle CDA|.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla sposobu II)

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

3 pkt – obliczenie długości przekątnej AC : $|AC| = \frac{39}{7}$

ALBO

– obliczenie $\cos \delta$: $\cos \delta = \frac{13}{14}$.

2 pkt – zapisanie równań $e^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot (2 \cos^2 \delta - 1)$ oraz $\frac{1}{2}e = \cos \delta$.

1 pkt – zapisanie związków $e^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos |\angle ADC|$ oraz $|\angle ADC| = 2\delta$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla sposobu III)

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

3 pkt – obliczenie długości przekątnej AC : $|AC| = \frac{39}{7}$.

2 pkt – zapisanie, że trójkąt ABC' jest równoboczny.

1 pkt – uzasadnienie, że BD jest dwusieczną kąta ADC oraz zapisanie, że C' leży na odcinku AD .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania**Sposób I**

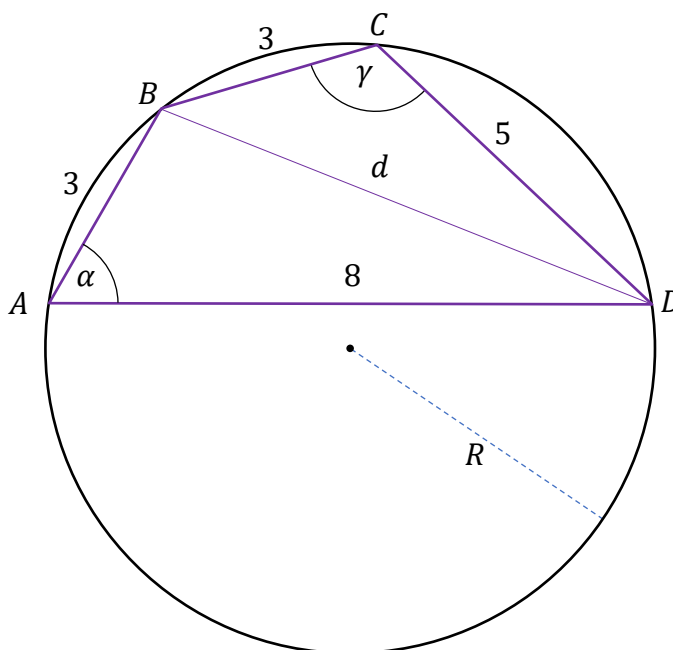
Przyjmijmy następujące oznaczenia:

R – promień okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$,

d – długość przekątnej BD ,

α – miara kąta BAD ,

γ – miara kąta BCD .



Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkątów ABD oraz BCD i otrzymujemy

$$d^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos \alpha \quad \wedge \quad d^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos \gamma$$

Stąd i z twierdzenia o czworokącie wpisanym w okrąg mamy

$$73 - 48 \cos \alpha = 34 - 30 \cos(180^\circ - \alpha)$$

Po zastosowaniu wzorów redukcyjnych otrzymujemy

$$73 - 48 \cos \alpha = 34 + 30 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}$$

Zatem $\alpha = 60^\circ$ i $d^2 = 73 - 48 \cdot \frac{1}{2} = 49$, czyli $d = 7$.

Okrąg opisany na czworokącie $ABCD$ jest jednocześnie okręgiem opisanym na trójkącie ABD . Stosując do tego trójkąta twierdzenie sinusów, otrzymujemy

$$\frac{d}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

$$R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

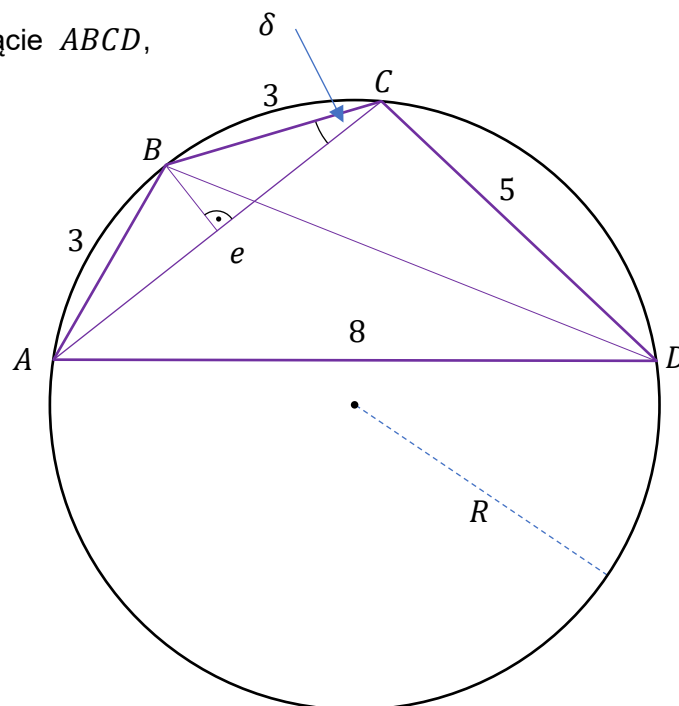
Sposób II

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

R – promień okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$,

e – długość przekątnej AC ,

δ – miara kąta ostrego ACB .



Ponieważ $|AB| = |BC|$, więc $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACB| = \delta$. Kąty wpisane ADB i ACB są oparte na tym samym łuku, więc $|\sphericalangle ADB| = \delta$. Kąty wpisane BAC i BDC są oparte na tym samym łuku, więc $|\sphericalangle BDC| = \delta$.

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta ADC oraz wzór na cosinus podwojonego argumentu i otrzymujemy:

$$e^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos(2\delta)$$

$$e^2 = 89 - 80 \cdot (2 \cos^2 \delta - 1)$$

$$e^2 = 169 - 160 \cos^2 \delta$$

Z trójkąta równoramiennego ACB otrzymujemy $\frac{1}{2}e = \cos \delta$, więc $e = 6 \cos \delta$. Zatem

$$(6 \cos \delta)^2 = 169 - 160 \cos^2 \delta$$

$$196 \cos^2 \delta = 169$$

$$\cos \delta = \frac{13}{14} \quad \vee \quad \cos \delta = -\frac{13}{14}$$

Kąt ACB w trójkącie równoramiennym ABC jest ostry, więc $\cos \delta = \frac{13}{14}$,

czyli $\sin \delta = \frac{3\sqrt{3}}{14}$.

Okrąg opisany na czworokącie $ABCD$ jest jednocześnie okręgiem opisanym na trójkącie ABC . Stosując do tego trójkąta twierdzenie sinusów, otrzymujemy

$$\frac{3}{\sin \delta} = 2R$$

$$\frac{3}{\frac{3\sqrt{3}}{14}} = 2R$$

$$R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

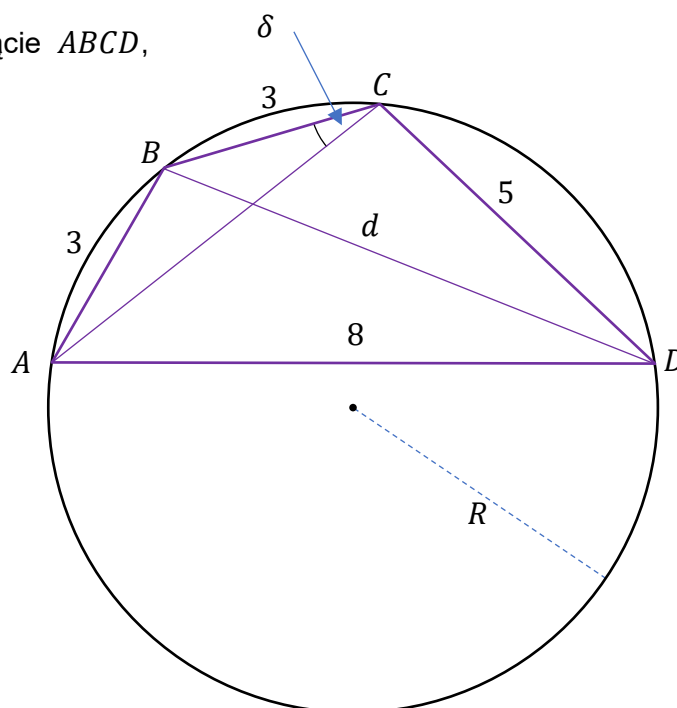
Sposób III

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

R – promień okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$,

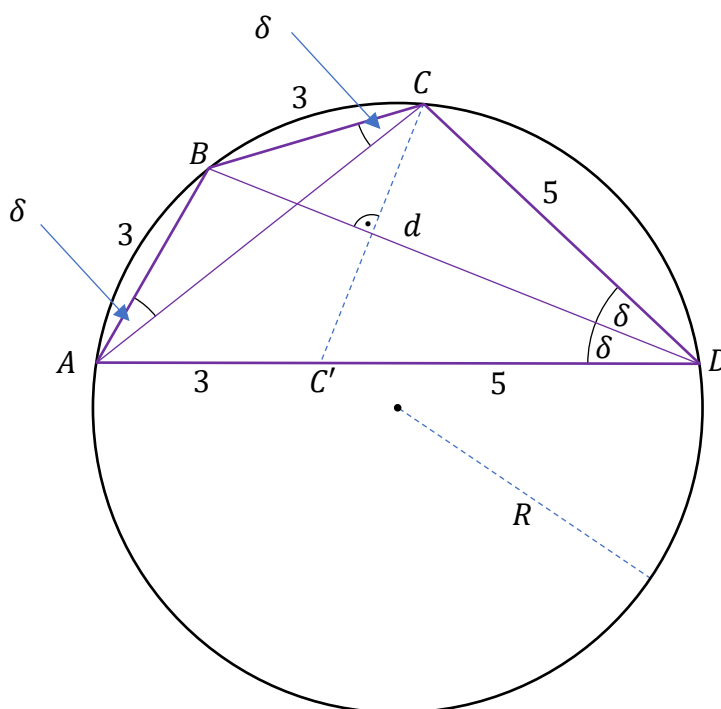
d – długość przekątnej BD ,

δ – miara kąta ostrego ACB .



Ponieważ $|AB| = |BC|$, więc $|\angle BAC| = |\angle ACB| = \delta$. Kąty wpisane ADB i ACB sąparte na tym samym łuku, więc $|\angle ADB| = \delta$. Kąty wpisane BAC i BDC sąoparte na tym samym łuku, więc $|\angle BDC| = \delta$. Zatem BD jest dwusieczną kąta ADC .

Niech C' będzie obrazem punktu C w symetrii osiowej względem prostej BD . Wtedy BD będzie zawierać wysokość trójkąta równoramiennego $CC'D$ i $|C'D| = |CD| = 5$, więc C' będzie leżał na odcinku AD .



Zatem czworokąt $BCDC'$ jest deltoidem i $|BC'| = |BC| = 3$.

Ponieważ $|AC'| = |AD| - |DC'| = 8 - 5 = 3$, więc trójkąt ABC' jest równoboczny, czyli $|\sphericalangle BAD| = 60^\circ$.

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta BAD i otrzymujemy:

$$d^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ$$

$$d = 7$$

Okrąg opisany na czworokącie $ABCD$ jest jednocześnie okręgiem opisanym na trójkącie ABD . Stosując do tego trójkąta twierdzenie sinusów, otrzymujemy

$$\frac{d}{\sin |\sphericalangle BAD|} = 2R$$

$$\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

$$R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

Zadanie 8. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście [...] matematycznym [...].	Zdający: XIII.R3) [...] podaje interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej.

Zasady oceniania (dla sposobów I oraz II)

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik niezależny od a, b, c :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2 \text{ (lub } f(x) = (x+2)(x^2 + x + 1)).$$

3 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą a , które wynika z warunków $f(-2) = 0$ i $f(1) = 9$ oraz $f'(-2) = 3$, np. $9 = 1 + a + (4a - 9) + (4a - 10)$ (dla sposobu I)

ALBO

– zapisanie układu dwóch niezależnych równań z dwiema niewiadomymi d oraz e , np. $3 = (-2)^2 + d \cdot (-2) + e + 0$ i $9 = (1+2)(1^2 + d + e)$ (dla sposobu II),

– zapisanie układu dwóch niezależnych równań z dwiema (spośród a, b oraz c) niewiadomymi, które wynikają z warunków $f(-2) = 0$ i $f(1) = 9$ oraz z warunku $f'(-2) = 3$, np.

$$0 = (-2)^3 + a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + 9 - 1^3 - a \cdot 1^2 - b \cdot 1 \text{ oraz}$$

$$3 = 3 \cdot (-2)^2 + 2a \cdot (-2) + b.$$

2 pkt – wyznaczenie (z warunków $f'(-2) = 3$ i $f(-2) = 0$) b oraz c w zależności od a : $b = 4a - 9$ i $c = 4a - 10$ (dla sposobu I)

ALBO

– wyznaczenie (z warunków $f'(-2) = 3$ i $f(1) = 9$) b oraz c w zależności od a : $b = 4a - 9$ i $c = 17 - 5a$ (dla sposobu II),

ALBO

– zapisanie warunku $f(1) = 9$ w postaci równania z dwiema niewiadomymi d oraz e , np. $9 = (1+2)(1^2 + d + e)$ (dla sposobu II),

ALBO

– zapisanie warunku $f'(-2) = 3$ w postaci równania z dwiema niewiadomymi d oraz e , np. $3 = (-2)^2 + d \cdot (-2) + e + 0$ (dla sposobu II),

ALBO

– zapisanie układu trzech niezależnych równań z trzema niewiadomymi a, b oraz c , które wynikają z warunków $f(-2) = 0$ i $f(1) = 9$ oraz $f'(-2) = 3$, np.

$$0 = (-2)^3 + a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \text{ oraz } 9 = 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \text{ oraz}$$

$$3 = 3 \cdot (-2)^2 + 2a \cdot (-2) + b,$$

ALBO

– obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej: 3 oraz wyznaczenie (z warunków $f(-2) = 0$ i $f(1) = 9$) b w zależności od a : $b = a$.

1 pkt – obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej: 3 (dla sposobów I oraz II),

ALBO

– zapisanie wzoru funkcji f w postaci $f(x) = (x+2)(x^2 + dx + e)$ (dla sposobu II),

ALBO

- zapisanie układu dwóch niezależnych równań z trzema niewiadomymi a, b oraz c , które wynikają z warunków $f(-2) = 0$ i $f(1) = 9$, np.

$$0 = (-2)^3 + a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \text{ oraz } 9 = 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla sposobu III)

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik niezależny od a, b, c :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2 \text{ (lub } f(x) = (x + 2)(x^2 + x + 1)).$$

3 pkt – wyznaczenie równania stycznej, np. $g(x) = 3(x + 2)$, **oraz** zapisanie związków

$$h(-2) = 0 \text{ i } h'(-2) = 0, \text{ **oraz** przedstawienie wielomianu } h \text{ w postaci}$$

$$h(x) = (x + k)(x + 2)^2$$

ALBO

- wyznaczenie wzoru wielomianu h , np. $h(x) = (x - 1)(x + 2)^2$.

2 pkt – obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej: 3 **oraz** zapisanie związków

$$h(-2) = 0 \text{ i } h'(-2) = 0$$

ALBO

- zapisanie związków $h(-2) = 0$ i $h'(-2) = 0$ **oraz** przedstawienie wielomianu h w postaci $h(x) = (x + k)(x + 2)^2$.

1 pkt – obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej: 3

ALBO

- zapisanie związków $h(-2) = 0$ oraz $h'(-2) = 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Wzór wielomianu f ma postać $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ przy pewnych $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Styczna jest prostą, na której leżą punkty $A = (-2, 0)$ i $P = (1, 9)$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy μ tej prostej: $\mu = \frac{9 - 0}{1 - (-2)} = 3$.

Korzystając z geometrycznej interpretacji pochodnej, mamy $f'(-2) = 3$.

Obliczając pochodną wielomianu f , otrzymujemy $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

Zatem $3 = 3 \cdot (-2)^2 + 2a \cdot (-2) + b$. Stąd $b = 4a - 9$.

Ponieważ $f(-2) = 0$, więc $(-2)^3 + a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 0$, czyli

$$-8 + 4a + (4a - 9) \cdot (-2) + c = 0$$

$$c = 4a - 10$$

Ponieważ $f(1) = 9$, więc $9 = 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$, czyli

$$9 = 1 + a + (4a - 9) + (4a - 10)$$

$$a = 3$$

Zatem $b = 4 \cdot 3 - 9 = 3$ oraz $c = 4 \cdot 3 - 10 = 2$.

Wielomian f jest określony wzorem $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$.

Sposób II

Zapisujemy wzór wielomianu f w postaci $f(x) = (x + 2)(x^2 + dx + e)$, gdzie $d, e \in \mathbb{R}$.
Styczna jest prostą, na której leżą punkty $A = (-2, 0)$ i $P = (1, 9)$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy μ tej prostej: $\mu = \frac{9 - 0}{1 - (-2)} = 3$.

Korzystając z geometrycznej interpretacji pochodnej, mamy $f'(-2) = 3$.

Obliczając pochodną wielomianu f , otrzymujemy

$$f'(x) = 1 \cdot (x^2 + dx + e) + (x + 2) \cdot (2x + d)$$

Zatem $3 = (-2)^2 + d \cdot (-2) + e + 0$. Stąd $e = 2d - 1$.

Ponieważ $f(1) = 9$, więc $9 = (1 + 2)(1^2 + d + e)$, czyli

$$9 = 3 \cdot (1 + d + 2d - 1)$$

$$d = 1$$

Zatem $e = 2 \cdot 1 - 1 = 1$.

Wielomian f jest określony wzorem $f(x) = (x + 2)(x^2 + x + 1)$.

Sposób III

Niech $y = g(x)$ będzie równaniem stycznej do wykresu funkcji f w punkcie A . Niech h będzie wielomianem trzeciego stopnia określonym następująco: $h(x) = f(x) - g(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Punkt A leży na wykresach funkcji f oraz g , więc $f(-2) = g(-2)$, czyli $h(-2) = 0$.

Korzystając z geometrycznej interpretacji pochodnej, mamy $f'(-2) = g'(-2)$, więc $h'(-2) = f'(-2) - g'(-2) = 0$. Zatem liczba (-2) jest pierwiastkiem podwójnym wielomianu h , czyli $h(x) = (x + k)(x + 2)^2$ przy pewnym $k \in \mathbb{R}$.

Punkt P leży na wykresach funkcji f oraz g , więc $f(1) = 9$ i $g(1) = 9$. Stąd $h(1) = f(1) - g(1) = 0$. Zatem

$$h(1) = (1 + k)(1 + 2)^2$$

$$0 = (1 + k) \cdot 9$$

$$k = -1$$

czyli $h(x) = (x - 1)(x + 2)^2$.

Styczna jest prostą, na której leżą punkty $A = (-2, 0)$ i $P = (1, 9)$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy μ tej prostej: $\mu = \frac{9 - 0}{1 - (-2)} = 3$. Zatem

$$g(x) = 3(x + 2).$$

Wyznaczamy wzór funkcji f :

$$\begin{aligned} f(x) &= h(x) + g(x) = (x - 1)(x + 2)^2 + 3(x + 2) = (x + 2)(x^2 + 2x - x - 2 + 3) = \\ &= (x + 2)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Zadanie 9. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.R2) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

Zasady oceniania

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{245}{4}$.

4 pkt – obliczenie b_1 oraz q : $b_1 = 35$ oraz $q = \frac{3}{7}$.

3 pkt – obliczenie różnicy ciągu (a_n) : $r = 4$ **oraz** odrzucenie przypadku $r = -5$.

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą r (albo a_1), np.

$$15 + 9r = (15 - 3r)(15 + 2r - 6),$$

$$a_1 + 14 \cdot \frac{15 - a_1}{5} = \left(a_1 + 2 \cdot \frac{15 - a_1}{5}\right) \cdot \left(a_1 + 7 \cdot \frac{15 - a_1}{5} - 6\right).$$

1 pkt – zapisanie układu dwóch niezależnych równań z niewiadomymi a_1 oraz r , np.

$$a_1 + 14r = (a_1 + 2r) \cdot (a_1 + 7r - 6) \text{ i } a_1 + 5r = 15.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Zdający może odrzucić otrzymaną wartość $r = -5$ bez komentarza.

2. Jeżeli zdający nie odrzuci wartości $q = -\frac{3}{2}$ i zastosuje wzór na sumę szeregu

geometrycznego dla $q = -\frac{3}{2}$, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za zapisanie układu równań, 1 punkt za zapisanie równania z jedną niewiadomą, 1 punkt za obliczenie $q = \frac{3}{7}$ oraz sumy dla $q = \frac{3}{7}$).

Przykładowe pełne rozwiązanie

Oznaczmy przez r różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) , natomiast przez q – iloraz ciągu geometrycznego (b_n) .

Ponieważ $a_6 = 15$ oraz $a_{15} = a_3 \cdot (a_8 - 6)$, więc stąd i z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$a_6 + 9r = (a_6 - 3r) \cdot (a_6 + 2r - 6)$$

$$15 + 9r = (15 - 3r)(15 + 2r - 6)$$

$$15 + 9r = (15 - 3r)(2r + 9)$$

$$6r^2 + 6r - 120 = 0$$

$$r^2 + r - 20 = 0$$

$$r = -5 \vee r = 4$$

Ciąg (a_n) jest rosnący, więc $r = 4$.

Zatem $b_1 = a_6 + 5r = 15 + 5 \cdot 4 = 35$, $b_2 = 15$ oraz $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{3}{7}$.

Ponieważ $\left|\frac{3}{7}\right| < 1$, więc suma S wszystkich wyrazów ciągu (b_n) istnieje i jest równa

$$S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{35}{1 - \frac{3}{7}} = \frac{245}{4}$$

Zadanie 10. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: X.5) oblicza objętości i pola graniastosłupów, ostrosłupów [...]. X.R2) wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych [...].

Zasady oceniania (dla sposobów I – III)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 6.

4 pkt – wyznaczenie w zależności od x czterech spośród wielkości 1)-4) określonych w zasadach oceniania za 1 punkt

ALBO

– wyznaczenie pola powierzchni całkowitej ostrosłupa w zależności od x : $126\sqrt{3}x^2$.

3 pkt – wyznaczenie w zależności od x trzech spośród wielkości 1)-4) określonych w zasadach oceniania za 1 punkt.

2 pkt – wyznaczenie w zależności od x dwóch spośród wielkości 1)-4) określonych w zasadach oceniania za 1 punkt.

1 pkt – wyznaczenie w zależności od x jednej z poniższych wielkości 1)-4):

1) długości wysokości ściany bocznej, np. $|BE| = 5\sqrt{3}x$, $|DF| = 5\sqrt{7}x$,

2) długości krawędzi podstawy ABC : $|BC| = 2\sqrt{21}x$,

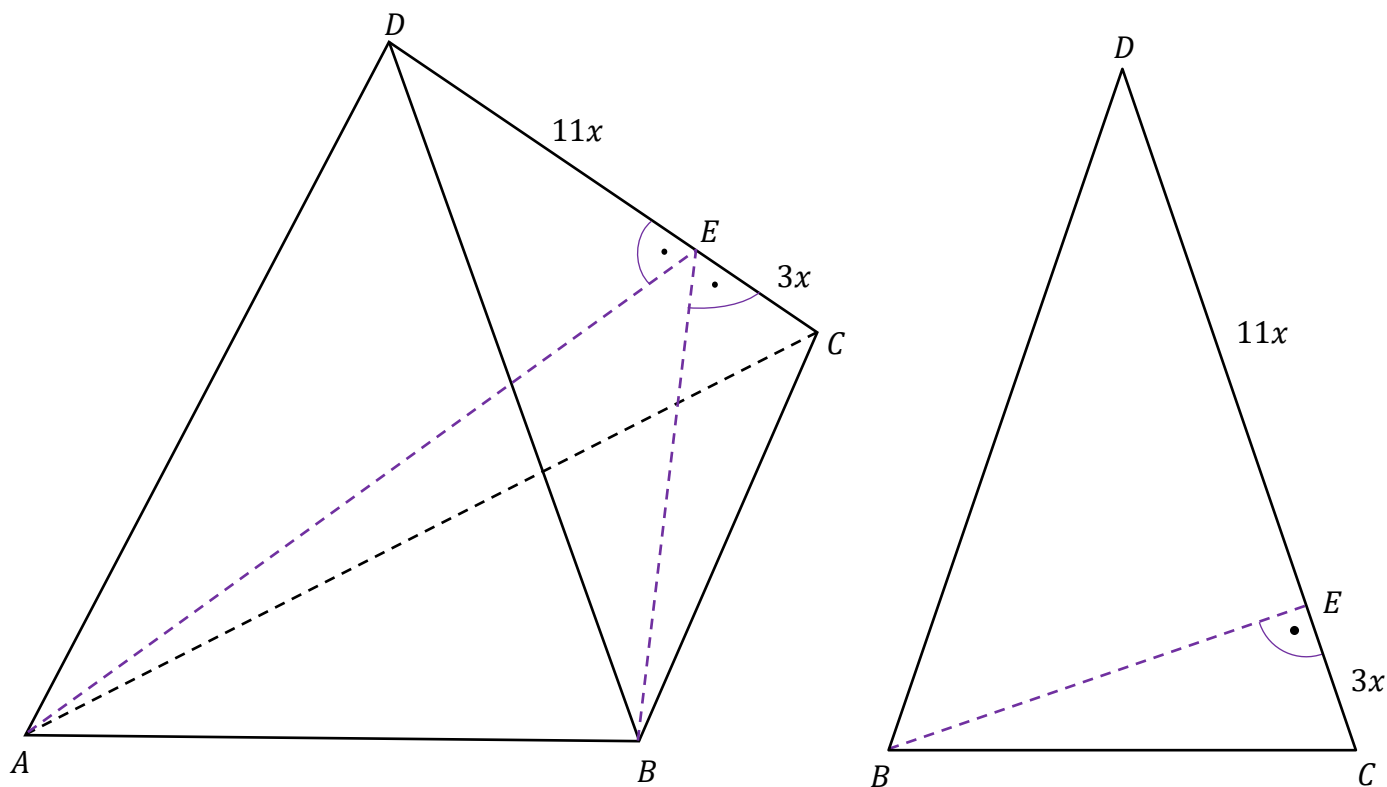
3) pola podstawy ABC : $21\sqrt{3}x^2$,

4) pola ściany bocznej (lub pola powierzchni bocznej): $35\sqrt{3}x^2$ (lub $105\sqrt{3}x^2$).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania**Sposób I**

Ponieważ $\frac{|CE|}{|ED|} = \frac{3}{11}$, więc $|CE| = 3x$ oraz $|ED| = 11x$ przy pewnym $x > 0$ (zobacz rysunki).



Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta BED i otrzymujemy:

$$|BE|^2 + |ED|^2 = |BD|^2$$

$$|BE|^2 + (11x)^2 = (14x)^2$$

$$|BE| = 5\sqrt{3}x$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta BCE i otrzymujemy:

$$|BC|^2 = |CE|^2 + |BE|^2$$

$$|BC|^2 = (3x)^2 + (5\sqrt{3}x)^2$$

$$|BC| = 2\sqrt{21}x$$

Wyznaczamy pole P_b powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego $ABCD$:

$$P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot |BE| = \frac{3}{2} \cdot 14x \cdot 5\sqrt{3}x = 105\sqrt{3}x^2$$

Wyznaczamy pole P_p podstawy ABC :

$$P_p = \frac{|BC|^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{(2\sqrt{21}x)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 21\sqrt{3}x^2$$

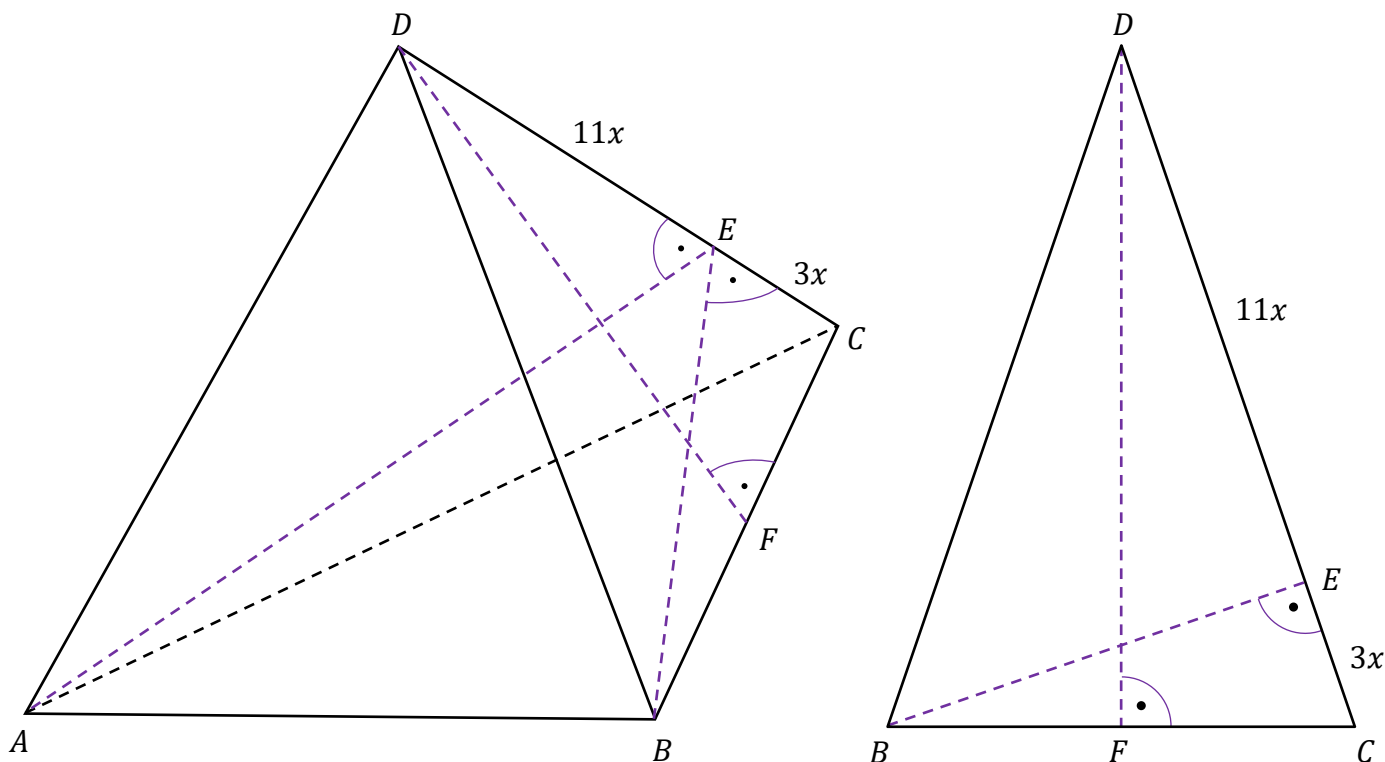
Obliczamy stosunek η pola powierzchni całkowitej ostrosłupa do pola podstawy ABC ostrosłupa:

$$\eta = \frac{P_b + P_p}{P_p} = \frac{105\sqrt{3}x^2 + 21\sqrt{3}x^2}{21\sqrt{3}x^2} = 6$$

Sposób II

Ponieważ $\frac{|CE|}{|ED|} = \frac{3}{11}$, więc $|CE| = 3x$ oraz $|ED| = 11x$ przy pewnym $x > 0$.

Niech F będzie spodkiem wysokości ściany bocznej BCD poprowadzonej z wierzchołka D na krawędź BC (zobacz rysunki).



Z podobieństwa trójkątów prostokątnych CEB oraz CFD otrzymujemy:

$$\frac{|EC|}{|BC|} = \frac{|FC|}{|CD|}$$

$$\frac{3x}{|BC|} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |BC|}{14x}$$

$$|BC| = 2\sqrt{21}x$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta CDF i otrzymujemy:

$$|CD|^2 = |DF|^2 + |FC|^2$$

$$(14x)^2 = |DF|^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{21}x\right)^2$$

$$|DF| = 5\sqrt{7}x$$

Wyznaczamy pole P_b powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego $ABCD$:

$$P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |DF| = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{21}x \cdot 5\sqrt{7}x = 105\sqrt{3}x^2$$

Wyznaczamy pole P_p podstawy ABC :

$$P_p = \frac{|BC|^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{(2\sqrt{21}x)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 21\sqrt{3}x^2$$

Obliczamy stosunek η pola powierzchni całkowitej ostrosłupa do pola podstawy ABC ostrosłupa:

$$\eta = \frac{P_b + P_p}{P_p} = \frac{105\sqrt{3}x^2 + 21\sqrt{3}x^2}{21\sqrt{3}x^2} = 6$$

Sposób III

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

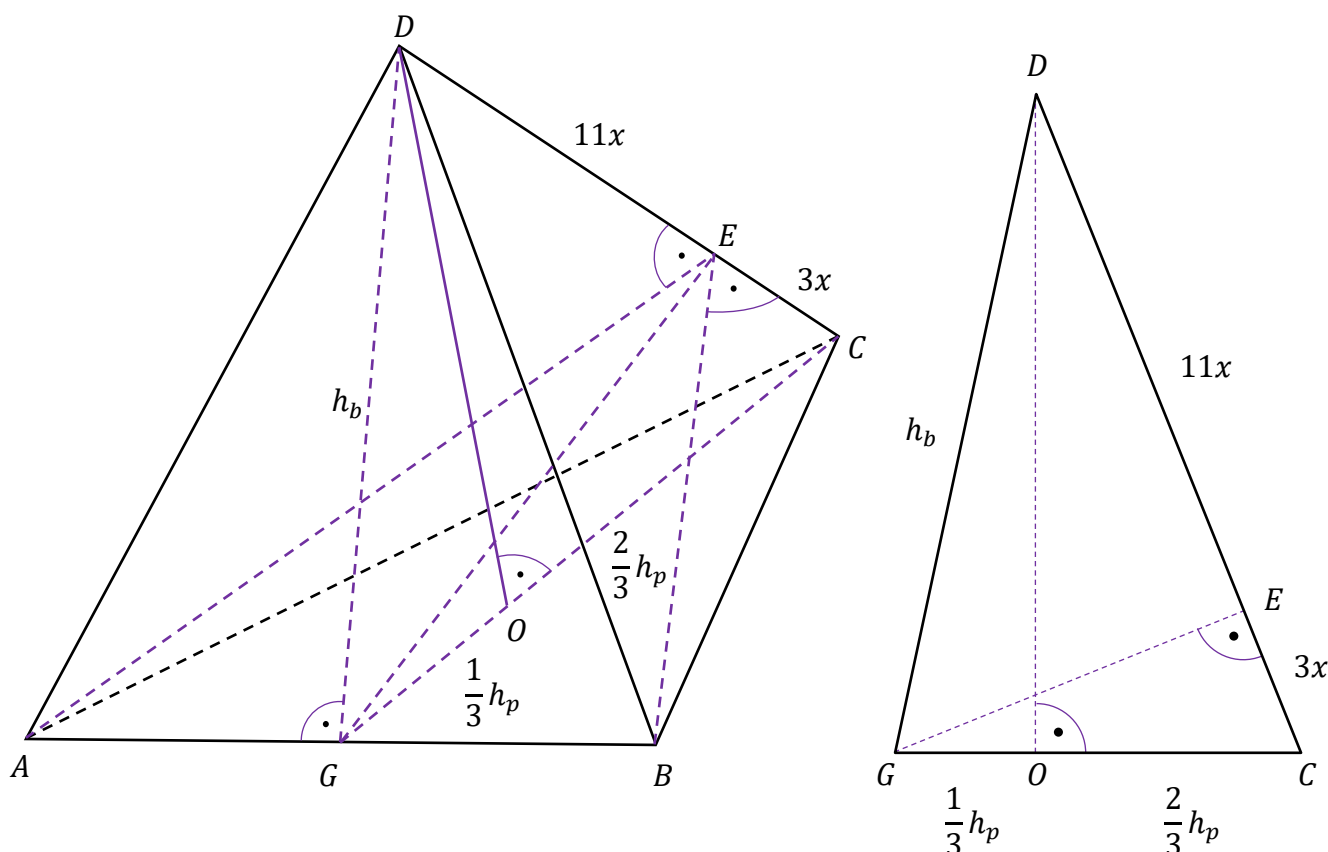
O – spodek wysokości ostrosłupa poprowadzonej z wierzchołka D na podstawę ABC ,

G – środek krawędzi AB ,

a – długość krawędzi podstawy ABC ,

h_b – wysokość ściany bocznej poprowadzonej z wierzchołka D ,

h_p – wysokość podstawy ABC (zobacz rysunki).



Ponieważ $\frac{|CE|}{|ED|} = \frac{3}{11}$, więc $|CE| = 3x$ oraz $|ED| = 11x$ przy pewnym $x > 0$.

Ostrosłup jest prawidłowy, więc punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie równobocznym ABC i jest jednocześnie środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Zatem

$$|OC| = \frac{2}{3}h_p = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ oraz } |OG| = \frac{1}{3}h_p = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Z podobieństwa trójkątów DOC i GEC mamy

$$\frac{|EC|}{|GC|} = \frac{|OC|}{|DC|}$$

$$\frac{3x}{h_p} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{14x}$$

$$\frac{3x}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{14x}$$

$$a = 2\sqrt{21}x$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta GBD i otrzymujemy:

$$|BD|^2 = |DG|^2 + |GB|^2$$

$$(14x)^2 = h_b^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{21}x\right)^2$$

$$h_b = 5\sqrt{7}x$$

Wyznaczamy pole P_b powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego $ABCD$:

$$P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_b = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{21}x \cdot 5\sqrt{7}x = 105\sqrt{3}x^2$$

Wyznaczamy pole P_p podstawy ABC :

$$P_p = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{(2\sqrt{21}x)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 21\sqrt{3}x^2$$

Obliczamy stosunek η pola powierzchni całkowitej ostrosłupa do pola podstawy ABC ostrosłupa:

$$\eta = \frac{P_b + P_p}{P_p} = \frac{105\sqrt{3}x^2 + 21\sqrt{3}x^2}{21\sqrt{3}x^2} = 6$$

Zadanie 11. (0–6)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IX.R1) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu; IX.R4) wyznacza równanie prostej prostopadłej do zadanej prostej i prostej stycznej do zadanego okręgu. VIII.4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombch i trapezach.

Zasady oceniania (dla sposobów I–III)

6 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$.

5 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą – pierwszą lub drugą współrzędną punktu S , np.:

$$\left[x_S - \left(\frac{3}{5}x_S + \frac{8}{5} \right) \right]^2 + \left[-x_S - 3 - \left(-\frac{6}{5}x_S - \frac{11}{5} \right) \right]^2 = x_S^2 + (-x_S - 3)^2$$

(ze związków $r = |ST|$ oraz $r = |SO|$),

$$\begin{aligned} (x_S - 4)^2 + (-x_S - 3 - (-7))^2 &= \\ &= \left(\frac{3}{5}x_S + \frac{8}{5} - 4 \right)^2 + \left(-\frac{6}{5}x_S - \frac{11}{5} - (-7) \right)^2 + x_S^2 + (-x_S - 3)^2 \end{aligned}$$

(ze związków $|BS|^2 = |BT|^2 + r^2$ oraz $r = |SO|$).

4 pkt – wyznaczenie równania dwusiecznej kąta ABC równoległoboku: $y = -x - 3$

ALBO

– zapisanie współrzędnych środka S za pomocą jednej niewiadomej, np.

$$S = (x_S, -x_S - 3).$$

3 pkt – obliczenie współrzędnych punktu E : $E = (-2, 5)$

ALBO

– obliczenie współrzędnych takich punktów P_1 oraz P_2 , że P_1 leży na półprostej $\overrightarrow{BA}$ oraz P_2 leży na półprostej $\overrightarrow{BC}$ oraz $|BP_1| = |BP_2|$,

ALBO

– obliczenie tangensa kąta α : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$ (dla sposobu II),

ALBO

– zapisanie związku $\frac{|\frac{1}{2}x_S + y_S + 5|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{|2x_S + y_S - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$ (dla sposobu III).

2 pkt – wyznaczenie równania prostej BC oraz obliczenie długości odcinka AB :

$$y = -2x + 1 \text{ oraz } |AB| = \sqrt{180}$$

ALBO

– wyznaczenie równania prostej AB oraz obliczenie długości odcinka BC :

$$y = -\frac{1}{2}x - 5 \text{ oraz } |BC| = \sqrt{75},$$

ALBO

– obliczenie współczynników kierunkowych prostych AB oraz BC : $a_{AB} = -\frac{1}{2}$ oraz

$$a_{BC} = -2 \text{ (dla sposobu II),}$$

ALBO

– wyznaczenie równań prostych AB oraz BC , np. $y = -\frac{1}{2}x - 5$ oraz $y = -2x + 1$ (dla sposobu III).

1 pkt – obliczenie współrzędnych wierzchołka B : $B = (4, -7)$

ALBO

– obliczenie współrzędnych wierzchołka C : $C = (-1, 3)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I (poprzez trójkąt równoramienny)

Środek symetrii równoległoboku jest punktem przecięcia przekątnych równoległoboku.

Zatem punkt M jest środkiem odcinka AC oraz środkiem odcinka BD . Stosujemy wzory na współrzędne środka odcinka i obliczamy współrzędne wierzchołka B :

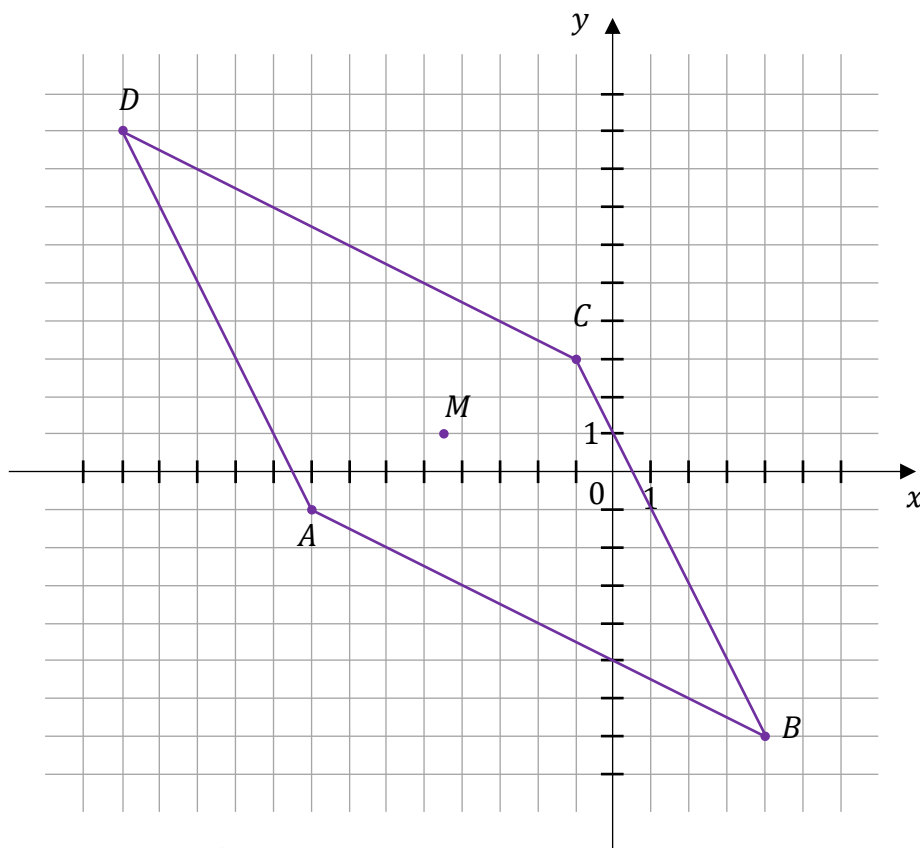
$$\frac{x_B + (-13)}{2} = -\frac{9}{2} \wedge \frac{y_B + 9}{2} = 1$$

$$B = (4, -7)$$

Stosujemy wzory na współrzędne środka odcinka i obliczamy współrzędne wierzchołka C :

$$\frac{-8 + x_C}{2} = -\frac{9}{2} \wedge \frac{-1 + y_C}{2} = 1$$

$$C = (-1, 3)$$



Obliczamy $|AB|$: $|AB| = \sqrt{(4 - (-8))^2 + (-7 - (-1))^2} = \sqrt{180}$.

Wyznaczamy równanie prostej BC : $y = \frac{3 - (-7)}{-1 - 4} \cdot (x - 4) + (-7)$, czyli $y = -2x + 1$.

Niech E będzie punktem na boku BC równoległoboku (lub na przedłużeniu tego boku w stronę C) takim, że $|BE| = |BA|$. Obliczamy współrzędne punktu E :

$$(x - 4)^2 + (y + 7)^2 = 180 \quad \wedge \quad y = -2x + 1$$

$$(x - 4)^2 + (-2x + 7 + 1)^2 = 180 \quad \wedge \quad y = -2x + 1$$

$$5x^2 - 40x - 100 = 0 \quad \wedge \quad y = -2x + 1$$

$$(x, y) = (-2, 5) \quad \vee \quad (x, y) = (10, -19)$$

Punkt $(10, -19)$ nie spełnia warunku narzuconego na E (bowiem $10 > x_B$), więc $E = (-2, 5)$.

Okrąg $\mathcal{O}$ jest styczny do prostych AB oraz BC , więc jego środek S leży na dwusiecznej kąta ABC równoległoboku $ABCD$. Ponieważ trójkąt ABE jest równoramienny, więc środek F odcinka AE leży na prostej BS i odcinek AE jest prostopadły do prostej BS .

Obliczamy współrzędne punktu F :

$$x_F = \frac{x_A + x_E}{2} = \frac{-8 - 2}{2} = -5 \quad \wedge \quad y_F = \frac{y_A + y_E}{2} = \frac{-1 + 5}{2} = 2$$

Wyznaczamy równanie prostej BS : $y = \frac{-7-2}{4-(-5)} \cdot (x-4) + (-7)$, czyli $y = -x - 3$.

Zatem $S = (x_S, -x_S - 3)$.

Niech T będzie punktem styczności okręgu $\mathcal{O}$ z prostą BC .

Wyznaczamy równanie prostej ST : $y = \frac{1}{2} \cdot (x - x_S) + (-x_S - 3)$.

Wyznaczamy współrzędne punktu T :

$$y = \frac{1}{2} \cdot (x - x_S) + (-x_S - 3) \wedge y = -2x + 1$$

$$-2x + 1 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x_S - 3 \wedge y = -2x + 1$$

$$x = \frac{3}{5}x_S + \frac{8}{5} \wedge y = -\frac{6}{5}x_S - \frac{11}{5}$$

czyli $T = \left(\frac{3}{5}x_S + \frac{8}{5}, -\frac{6}{5}x_S - \frac{11}{5}\right)$.

Oznaczmy przez r promień okręgu $\mathcal{O}$. Ponieważ okrąg przechodzi przez początek układu współrzędnych, więc $r = \sqrt{x_S^2 + (-x_S - 3)^2}$. Jednocześnie

$$r = |ST| = \sqrt{\left[x_S - \left(\frac{3}{5}x_S + \frac{8}{5}\right)\right]^2 + \left[-x_S - 3 - \left(-\frac{6}{5}x_S - \frac{11}{5}\right)\right]^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}x_S - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}x_S - \frac{4}{5}\right)^2}$$

więc

$$x_S^2 + (-x_S - 3)^2 = \left(\frac{2}{5}x_S - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}x_S - \frac{4}{5}\right)^2$$

Stąd otrzymujemy

$$x_S^2 + (x_S + 3)^2 = \frac{4}{25}(x_S - 4)^2 + \frac{1}{25}(x_S - 4)^2$$

$$2x_S^2 + 6x_S + 9 = \frac{1}{5}(x_S - 4)^2$$

$$9x_S^2 + 38x_S + 29 = 0$$

$$x_S = -1 \vee x_S = -\frac{29}{9}$$

Ponieważ $-\frac{29}{9} < -3$, a druga współrzędna punktu S ma być ujemna, więc $x_S = -1$, czyli

$S = (-1, -2)$. Obliczamy promień okręgu: $r = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.

Okrąg $\mathcal{O}$ ma równanie $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$.

Sposób II (poprzez współczynniki kierunkowe)

Środek symetrii równoległoboku jest punktem przecięcia przekątnych równoległoboku.

Zatem punkt M jest środkiem odcinka AC oraz środkiem odcinka BD . Stosujemy wzory na współrzędne środka odcinka i obliczamy współrzędne wierzchołka B :

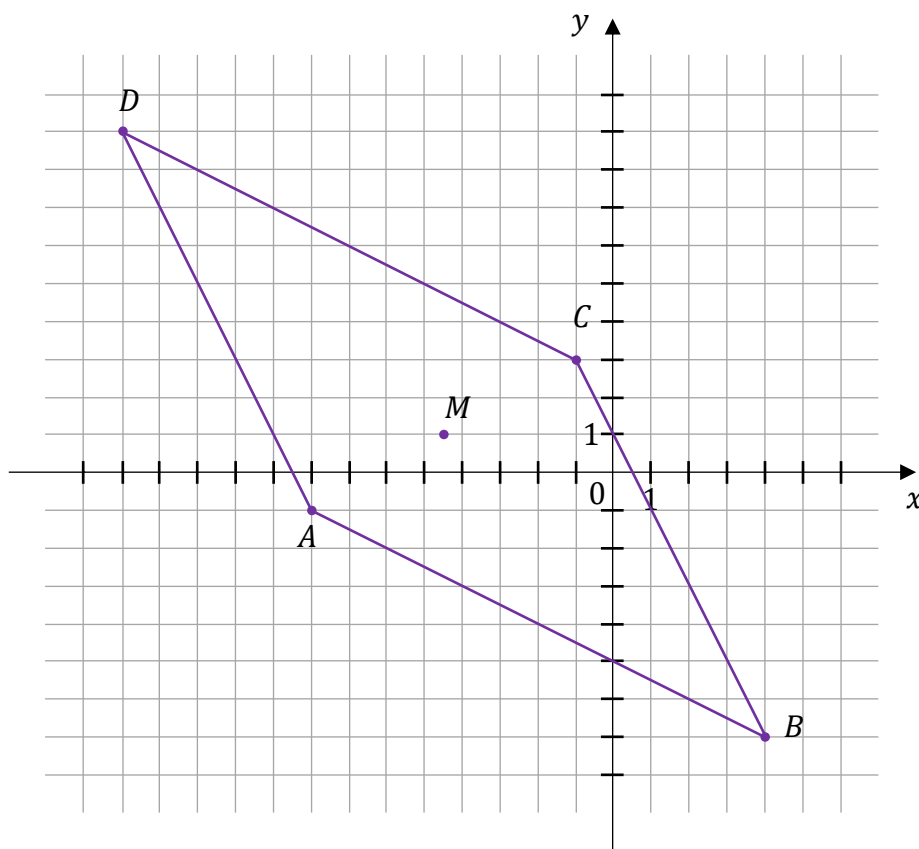
$$\frac{x_B + (-13)}{2} = -\frac{9}{2} \wedge \frac{y_B + 9}{2} = 1$$

$$B = (4, -7)$$

Stosujemy wzory na współrzędne środka odcinka i obliczamy współrzędne wierzchołka C :

$$\frac{-8 + x_C}{2} = -\frac{9}{2} \wedge \frac{-1 + y_C}{2} = 1$$

$$C = (-1, 3)$$



Obliczamy współczynnik kierunkowy a_{AB} prostej AB : $a_{AB} = \frac{-7 - (-1)}{4 - (-8)} = -\frac{1}{2}$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy a_{BC} prostej BC : $a_{BC} = \frac{3 - (-7)}{-1 - 4} = -2$.

Oznaczmy miarę kąta ABC równoległoboku przez 2α . Obliczamy tangens tego kąta, korzystając z interpretacji geometrycznej współczynnika kierunkowego prostej oraz wzoru na tangens różnicy kątów:

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{a_{AB} - a_{BC}}{1 + a_{AB} \cdot a_{BC}}$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{-\frac{1}{2} - (-2)}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2)} = \frac{3}{4}$$

Korzystamy ze wzoru na tangens podwojonego kąta i otrzymujemy

$$\frac{3}{4} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$3 \operatorname{tg}^2 \alpha + 8 \operatorname{tg} \alpha - 3 = 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-8 - 10}{6} = -3 \quad \vee \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{-8 + 10}{6} = \frac{1}{3}$$

Ponieważ kąt ABC równoległobku jest ostry, więc $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$.

Oznaczmy środek okręgu $\mathcal{O}$ przez S . Obliczamy współczynnik kierunkowy a_{BS} prostej BS , korzystając z interpretacji geometrycznej współczynnika kierunkowego prostej oraz wzoru na tangens sumy kątów:

$$a_{BS} = \frac{a_{BC} + \operatorname{tg} \alpha}{1 - a_{BC} \cdot \operatorname{tg} \alpha}$$

$$a_{BS} = \frac{-2 + \frac{1}{3}}{1 - (-2) \cdot \frac{1}{3}} = -1$$

Wyznaczamy równanie prostej BS : $y = -1 \cdot (x - 4) + (-7)$, czyli $y = -x - 3$. Zatem $S = (x_S, -x_S - 3)$.

Niech r będzie długością promienia okręgu $\mathcal{O}$. Ponieważ okrąg przechodzi przez początek układu współrzędnych, więc $r = \sqrt{x_S^2 + (-x_S - 3)^2}$. Ponadto

$$\frac{r}{|BS|} = \sin \alpha$$

więc

$$\frac{r}{|BS|} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$|BS|^2 = r^2 \cdot 10$$

$$(x_S - 4)^2 + (-x_S - 3 - (-7))^2 = r^2 \cdot 10$$

$$(x_S - 4)^2 + (-x_S + 4)^2 = [x_S^2 + (-x_S - 3)^2] \cdot 10$$

$$18x_S^2 + 76x_S + 58 = 0$$

$$9x_S^2 + 38x_S + 29 = 0$$

$$x_S = -1 \vee x_S = -\frac{29}{9}$$

Ponieważ $-\frac{29}{9} < -3$, a druga współrzędna punktu S ma być ujemna, więc $x_S = -1$, czyli

$S = (-1, -2)$. Obliczamy promień okręgu: $r = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.

Okrąg $\mathcal{O}$ ma równanie $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 5$.

Sposób III (z własności dwusiecznej)

Środek symetrii równoległoboku jest punktem przecięcia przekątnych równoległoboku.

Zatem punkt M jest środkiem odcinka AC oraz środkiem odcinka BD . Stosujemy wzory na współrzędne środka odcinka i obliczamy współrzędne wierzchołka B :

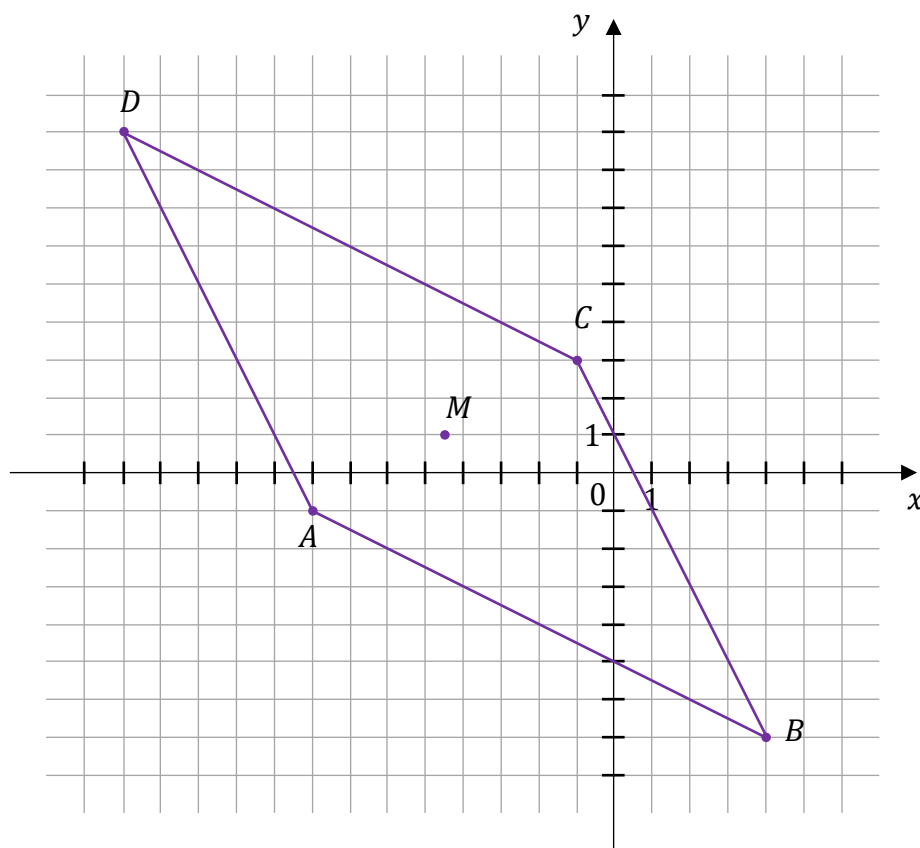
$$\frac{x_B + (-13)}{2} = -\frac{9}{2} \wedge \frac{y_B + 9}{2} = 1$$

$$B = (4, -7)$$

Stosujemy wzory na współrzędne środka odcinka i obliczamy współrzędne wierzchołka C :

$$\frac{-8 + x_C}{2} = -\frac{9}{2} \wedge \frac{-1 + y_C}{2} = 1$$

$$C = (-1, 3)$$



Wyznaczamy równanie prostej AB : $y = \frac{-7-(-1)}{4-(-8)} \cdot (x+8) + (-1)$, czyli $y = -\frac{1}{2}x - 5$.

Wyznaczamy równanie prostej BC : $y = \frac{3-(-7)}{-1-4} \cdot (x-4) + (-7)$, czyli $y = -2x + 1$.

Niech $S = (x_S, y_S)$ będzie środkiem okręgu $\mathcal{O}$, a r – długością promienia okręgu $\mathcal{O}$.

Punkt S leży na dwusiecznej kąta ABC równoległoboku $ABCD$, więc odległość punktu S od prostej AB jest równa odległości punktu S od prostej BC . Zatem

$$\frac{|\frac{1}{2}x_S + y_S + 5|}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 1^2}} = \frac{|2x_S + y_S - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

$$|x_S + 2y_S + 10| = |2x_S + y_S - 1|$$

$$x_S + 2y_S + 10 = 2x_S + y_S - 1 \quad \vee \quad x_S + 2y_S + 10 = -2x_S - y_S + 1$$

$$y_S = x_S - 11 \quad \vee \quad y_S = -x_S - 3$$

Ponieważ punkt $(0, 0)$ leży w równoległoboku $ABCD$, a prosta $y = x - 11$ ma tylko jeden punkt wspólny z równoległobokiem, więc dwusieczna kąta ABC ma równanie $y = -x - 3$.

Stąd $y_S = -x_S - 3$ oraz

$$r = \frac{|2x_S + y_S - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|2x_S - x_S - 3 - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|x_S - 4|}{\sqrt{5}}$$

Okrąg przechodzi przez początek układu współrzędnych, więc $r = \sqrt{x_S^2 + (-x_S - 3)^2}$.

Wobec powyższego otrzymujemy

$$\sqrt{x_S^2 + (-x_S - 3)^2} = \frac{|x_S - 4|}{\sqrt{5}}$$

$$x_S^2 + (x_S + 3)^2 = \frac{(x_S - 4)^2}{5}$$

$$9x_S^2 + 38x_S + 29 = 0$$

$$x_S = -1 \quad \vee \quad x_S = -\frac{29}{9}$$

Ponieważ $-\frac{29}{9} < -3$, a druga współrzędna punktu S ma być ujemna, więc $x_S = -1$, czyli

$S = (-1, -2)$. Obliczamy promień okręgu: $r = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.

Okrąg $\mathcal{O}$ ma równanie $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 5$.

Zadanie 12.1. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: X.5) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów [...].

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – wyznaczenie wysokości graniastosłupa w zależności od długości krawędzi podstawy

$$\text{graniastosłupa, np. } H = \frac{48\sqrt{3} - a^2 \cdot \sqrt{3}}{6a}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Rozpatrzmy dowolny z rozważanych graniastosłupów. Oznaczmy przez H jego wysokość.

Pole powierzchni całkowitej tej bryły jest równe $24\sqrt{3}$, więc

$$24\sqrt{3} = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3aH$$

Stąd

$$H = \frac{48\sqrt{3} - a^2 \cdot \sqrt{3}}{6a}$$

Zatem objętość V graniastosłupa jest równa

$$V = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{48\sqrt{3} - a^2 \cdot \sqrt{3}}{6a} = 6a - \frac{1}{8}a^3$$

To należało wykazać.

Zadanie 12.2. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XIII.R4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu [...]; XIII.R5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji; XIII.R6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

- 4 pkt – uzasadnienie, że funkcja V przyjmuje wartość największą dla $a = 4$ oraz obliczenie $V(4) = 16$.
- 3 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja V przyjmuje wartość największą dla $a = 4$.
- 2 pkt – obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji V : $a = 4$.
- 1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji V , np. $V'(a) = 6 - \frac{3}{8}a^2$.
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja osiąga wartość największą dla wyznaczonej wartości a , przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej
ORAZ:
– opisuje (słownie lub graficznie – np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji V
LUB
– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości a funkcja V ma maksimum lokalne i jest to jednocześnie jej największa wartość,
LUB
– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości a funkcja V ma maksimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.
Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku (np. znakami „+” i „-”) znak pochodnej.
2. Jeżeli zdający przedstawi niepełne uzasadnienie, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za poprawne wyznaczenie pochodnej, 1 punkt za obliczenie miejsca zerowego pochodnej, 1 punkt za obliczenie długości krawędzi podstawy oraz objętości graniastopuła o największej objętości).
3. Jeżeli zdający nie uzasadnia istnienia największej wartości funkcji, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za poprawne wyznaczenie pochodnej, 1 punkt za obliczenie miejsca zerowego pochodnej).

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy argument, dla którego funkcja V określona wzorem $V(a) = 6a - \frac{1}{8}a^3$ dla $a \in (0, 4\sqrt{3})$ osiąga wartość największą.

Wyznaczamy pochodną funkcji V : $V'(a) = 6 - \frac{3}{8}a^2$ dla $a \in (0, 4\sqrt{3})$.

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji V :

$$V'(a) = 0$$

$$6 - \frac{3}{8}a^2 = 0$$

$$a = -4 \notin (0, 4\sqrt{3}) \quad \vee \quad a = 4 \in (0, 4\sqrt{3})$$

Badamy znak pochodnej:

$$V'(a) < 0$$

$$6 - \frac{3}{8}a^2 < 0 \quad \wedge \quad a \in (0, 4\sqrt{3})$$

$$a \in (4, 4\sqrt{3})$$

więc $V'(a) < 0$ dla $a \in (4, 4\sqrt{3})$ oraz $V'(h) > 0$ dla $a \in (0, 4)$.

Zatem funkcja V jest rosnąca w przedziale $(0, 4]$ i malejąca w przedziale $[4, 4\sqrt{3})$.

Stąd funkcja V osiąga wartość największą dla $a = 4$. Wtedy

$$V(4) = 6 \cdot 4 - \frac{1}{8} \cdot 4^3 = 16$$