PROBLEMAS DE LAS OLIMPIADAS IBEROAMERICANAS DE MATEMÁTICAS (OIM)
Antonio Roberto Martínez Fernández

1. **(1ª OIM, 1985, Paipa y Villa de Leyva, Colombia)** Hallar todas las ternas de enteros (a, b, c) tales que:

$$\begin{aligned} a+b+c &= 24, \\ a^2+b^2+c^2 &= 210, \\ abc &= 440. \end{aligned}$$

2. **(1ª OIM, 1985, Paipa y Villa de Leyva, Colombia)** Sea P un punto interior del triángulo equilátero ABC tal que: $PA = 5$, $PB = 7$ y $PC = 8$. Hallar la longitud de un lado del triángulo ABC.

3. **(1ª OIM, 1985, Paipa y Villa de Leyva, Colombia)** Hallar las raíces r_1, r_2, r_3 y r_4 de la ecuación $4x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 5 = 0$, sabiendo que son reales, positivas y que:

$$\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8} = 1.$$

4. **(1ª OIM, 1985, Paipa y Villa de Leyva, Colombia)** Si x es distinto de 1, y es distinto de 1, $x \neq y$ y además

$$\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{xz - y^2}{1 - y},$$

demuestre que ambas fracciones son iguales a $x + y + z$.

5. **(1ª OIM, 1985, Paipa y Villa de Leyva, Colombia)** A cada entero positivo n se le asigna un entero no negativo $f(n)$ de tal manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

   - $f(rs) = f(r) + f(s)$,
   - $f(n) = 0$, siempre que la cifra de las unidades de n sea 3,
   - $f(10) = 0$.

   Hallar $f(1985)$. Justificar la respuesta.

6. **(1ª OIM, 1985, Paipa y Villa de Leyva, Colombia)** Dado el triángulo acutángulo ABC, se consideran los puntos D, E y F de las rectas BC, CA y AB, respectivamente. Si las rectas AD, BE y CF pasan todas por el centro O de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, cuyo radio es R, demostrar que

$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{2}{R}.$$

7. **(2ª OIM, 1987, Salto y Paysandú, Uruguay)** Hallar las funciones $f(x)$ tales que

$$f(x)^2 f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 64x$$

para todo x distinto de 0, 1 y -1.

8. **(2ª OIM, 1987, Salto y Paysandú, Uruguay)** En un triángulo ABC, M y N son los puntos medios de los lados AC y AB, respectivamente; y P es el punto de intersección de BM y CN. Demostrar que si es posible inscribir una circunferencia en el cuadrilátero $ANMP$, entonces el triángulo ABC es isósceles.

9. **(2ª OIM, 1987, Salto y Paysandú, Uruguay)** Demostrar que si m, n, r son enteros positivos no nulos tales que

$$1 + m + n\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^{2r-1},$$

entonces m es un cuadrado perfecto.

10. **(2ª OIM, 1987, Salto y Paysandú, Uruguay)** Se define una sucesión p_n de la siguiente manera: $p_1 = 2$ y, para todo n mayor o igual que 2, p_n es el mayor divisor primo de $p_1 p_2 \ldots p_{n-1} + 1$. Demostrar que $p_n \neq 5$.

11. **(2ª OIM, 1987, Salto y Paysandú, Uruguay)** Sean r, s, t las raíces de la ecuación $x(x-2)(3x-7) = 2$.

    (a) Demostrar que r, s, t son positivos.

    (b) Calcular $\arctan r + \arctan s + \arctan t$.

    (Se denota por $\arctan x$ el arco comprendido entre 0 y π cuya tangente es x.)

12. **(2ª OIM, 1987, Salto y Paysandú, Uruguay)** Sea $ABCD$ un cuadrilátero plano convexo. Sean P, Q puntos de AD y BC, respectivamente, tales que

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AB}{DC} = \frac{BQ}{QC}.$$

Demostrar que los ángulos que forma la recta PQ con la rectas AB y CD son iguales.

13. **(3ª OIM, 1988, Lima, Perú)** Las medidas de los ángulos de un triángulo están en progresión aritmética y las longitudes de las alturas también están en progresión aritmética. Demostrar que el triángulo es equilátero.

14. **(3ª OIM, 1988, Lima, Perú)** Sean a, b, c, d, p, q números naturales que cumplen

$$ad - bc = 1 \quad \text{y} \quad \frac{a}{b} > \frac{p}{q} > \frac{c}{d}.$$

Demostrar que:

    (a) $q \geq b + d$.

(b) Si $q = b + d$, entonces $p = a + c$.

15. **(3ª OIM, 1988, Lima, Perú)** Demostrar que entre todos los triángulos cuyos vértices distan 3, 5 y 7 de un punto dado, P, el que tiene mayor perímetro tiene a P como incentro.

16. **(3ª OIM, 1988, Lima, Perú)** Sea ABC un triángulo cuyos lados son a, b, c. Se divide cada lado de ABC en n segmentos iguales. Sea S la suma de los cuadrados de las distancias de cada vértice a cada uno de los puntos de división del lado opuesto, distintos de los vértices. Demostrar que
$$\frac{S}{a^2 + b^2 + c^2}$$
es un número racional.

17. **(3ª OIM, 1988, Lima, Perú)** Considérense las expresiones de la forma $x + yt + zt^2$, con x, y, z racionales y $t^3 = 2$. Demostrar que si $x + yt + zt^2 \neq 0$, entonces existen u, v, w racionales tales que
$$(x + yt + zt^2)(u + vt + wt^2) = 1.$$

18. **(3ª OIM, 1988, Lima, Perú)** Considérense los conjuntos de n números naturales diferentes de cero en los cuales no hay tres elementos en progresión aritmética. Demostrar que en uno de esos conjuntos la suma de los inversos de sus elementos es máxima.

19. **(4ª OIM, 1989, La Habana, Cuba)** Determinar todas las ternas de números reales que satisfacen el sistema de ecuaciones siguiente:
$$\begin{cases} x + y - z = -1, \\ x^2 - y^2 + z^2 = 1, \\ -x^3 + y^3 + z^3 = -1. \end{cases}$$

20. **(4ª OIM, 1989, La Habana, Cuba)** Sean x, y, z tres números reales tales que $0 < x < y < z < \pi/2$. Demostrar la siguiente desigualdad:
$$\frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{sen} x \cos y + 2 \operatorname{sen} y \cos z > \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2y + \operatorname{sen} 2z.$$

21. **(4ª OIM, 1989, La Habana, Cuba)** Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo. Demostrar que
$$\left| \frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} \right| < \frac{1}{16}.$$

22. **(4ª OIM, 1989, La Habana, Cuba)** La circunferencia inscrita en el triángulo ABC es tangente a los lados AC y BC en los puntos M y N, respectivamente. Las bisectrices de A y B cortan a MN en los puntos P y Q, respectivamente. Sea O el incentro del triángulo ABC. Demostrar que
$$\overline{MP} \cdot \overline{OA} = \overline{BC} \cdot \overline{OQ}.$$

23. **(4ª OIM, 1989, La Habana, Cuba)** Sea la función f definida por

$$f(1) = 1, \quad f(2n+1) = f(2n) + 1, \quad f(2n) = 3f(n).$$

Determinar el conjunto de valores que toma f.

24. **(4ª OIM, 1989, La Habana, Cuba)** Mostrar que hay una infinidad de pares de números naturales que satisfacen la ecuación

$$x^2 - 3x - 3y^2 - y + 1 = 0.$$

25. **(5ª OIM, 1990, Valladolid, España)** Sea f una función definida en el conjunto de los números enteros mayores o iguales que cero, que satisface las condiciones siguientes:

   - Si $n = 2^j - 1$ para $j = 0, 1, 2, \ldots$, entonces $f(n) = 0$.
   - Si $n \neq 2^j - 1$ para $j = 0, 1, 2, \ldots$, entonces $f(n+1) = f(n) - 1$.

   (a) Demostrar que para todo entero n, mayor o igual que cero, existe un entero k mayor o igual que cero tal que $f(n) + n = 2^k - 1$.

   (b) Calcular $f(2^{1990})$.

26. **(5ª OIM, 1990, Valladolid, España)** En un triángulo ABC, sea I el centro de la circunferencia inscrita y D, E, F sus puntos de tangencia con los lados BC, AC, AB, respectivamente. Sea P el otro punto de intersección de la recta AD con la circunferencia inscrita. Si M es el punto medio de EF, demostrar que los cuatro puntos P, I, M y D pertenecen a una misma circunferencia o están alineados.

27. **(5ª OIM, 1990, Valladolid, España)** Sea $f(x) = (x+b)^2 - c$ un polinomio con b, c números enteros.

   (a) Si p es un número primo tal que p divide a c y p^2 no divide a c, demostrar que, cualquiera que sea el número entero n, p^2 no divide a $f(n)$.

   (b) Sea q un número primo distinto de 2 que no divide a c. Si q divide a $f(n)$ para algún número entero n, demostrar que para cada entero positivo r existe un número entero n' tal que q^r divide a $f(n')$.

28. **(5ª OIM, 1990, Valladolid, España)** Sea $\mathcal{C}_1$ una circunferencia, AB uno de sus diámetros, t su tangente en B y M otro punto de $\mathcal{C}_1$ distinto de A y de B. Se construye una circunferencia $\mathcal{C}_2$ tangente a $\mathcal{C}_1$ en M y a la recta t.

   (a) Determinar el punto P de tangencia de t y $\mathcal{C}_2$, y hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias $\mathcal{C}_2$ al variar M.

   (b) Demostrar que existe una circunferencia ortogonal a todas las circunferencias $\mathcal{C}_2$.

   Nota: Dos circunferencias son ortogonales si se cortan, y las tangentes respectivas en los puntos de intersección son ortogonales.

29. **(5ª OIM, 1990, Valladolid, España)** Sean A y B los vértices opuestos de un tablero cuadriculado de $n \times n$ casillas ($n \geq 1$), a cada una de las cuales se añade su diagonal en la dirección AB, formándose así $2n^2$ triángulos iguales. Se mueve una ficha recorriendo un camino que va desde A hasta B formado por segmentos del tablero, y se coloca, cada vez que se recorre un segmento, una semilla en cada uno de los triángulos que admiten ese segmento como lado. El camino se recorre de tal forma que no se pasa por ningún segmento más de una vez, y se observa, después del recorrido, que hay exactamente dos semillas en cada uno de los $2n^2$ triángulos del tablero. ¿Para qué valores de n es posible esta situación?

30. **(5ª OIM, 1990, Valladolid, España)** Sea $f(x)$ un polinomio de grado 3 con coeficientes racionales. Probar que si la gráfica de f es tangente al eje X, entonces $f(x)$ tiene sus tres raíces racionales.

31. **(6ª OIM, 1991, Córdoba, Argentina)** A cada vértice de un cubo se le asigna el valor $+1$ o -1, y a cada cara el producto de los valores asignados a sus vértices. ¿Qué valores puede tomar la suma de los catorce números así obtenidos?

32. **(6ª OIM, 1991, Córdoba, Argentina)** Dos rectas perpendiculares dividen un cuadrado en cuatro partes, tres de las cuales tienen cada una un área igual a 1. Demostrar que el área del cuadrado es 4.

33. **(6ª OIM, 1991, Córdoba, Argentina)** Sea F una función creciente definida para todo número real x, $0 \leq x \leq 1$, tal que

$$F(0) = 0, \quad F\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{F(x)}{2}, \quad F(1-x) = 1 - F(x).$$

Encontrar $F\left(\frac{18}{1991}\right)$.

34. **(6ª OIM, 1991, Córdoba, Argentina)** Encontrar un número N de cinco cifras diferentes y no nulas, que sea igual a la suma de todos los números de tres cifras distintas que se pueden formar con las cinco cifras de N.

35. **(6ª OIM, 1991, Córdoba, Argentina)** Sea $P(X, Y) = 2X^2 - 6XY + 5Y^2$. Diremos que un número entero a es un valor de P si existen números enteros b y c tales que $a = P(b, c)$.

    (a) Determinar cuántos elementos de $\{1, 2, \ldots, 100\}$ son valores de P.

    (b) Probar que el producto de valores de P es un valor de P.

36. **(6ª OIM, 1991, Córdoba, Argentina)** Dados tres puntos no alineados M, N y P, sabemos que M y N son los puntos medios de los lados de un triángulo y que P es el punto de intersección de las alturas de dicho triángulo. Construir el triángulo.

37. **(7ª OIM, 1992, Caracas, Venezuela)** Para cada entero positivo n, sea a_n el último dígito del número $1 + 2 + 3 + \cdots + n$. Calcular $a_1 + a_2 + \cdots + a_{1992}$.

38. **(7ª OIM, 1992, Caracas, Venezuela)** Dados n números reales tales que $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ y dada la función

$$f(x) = \frac{a_1}{x+a_1} + \frac{a_2}{x+a_2} + \cdots + \frac{a_n}{x+a_n},$$

determinar la suma de las longitudes de los intervalos, disjuntos dos a dos, formados por todos los valores de x tales que $f(x) > 1$.

39. **(7ª OIM, 1992, Caracas, Venezuela)** En un triángulo equilátero ABC cuyo lado tiene longitud 2, se inscribe una circunferencia Γ.

    (a) Demostrar que para cada punto P de Γ, la suma de los cuadrados de sus distancias a los vértices A, B y C es 5.

    (b) Demostrar que para todo punto P de Γ es posible encontrar un triángulo cuyos lados tienen las longitudes de los segmentos AP, BP y CP, y cuya área es $\sqrt{3}/4$.

40. **(7ª OIM, 1992, Caracas, Venezuela)** Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números enteros que cumplen las condiciones siguientes:

    i) $a_0 = 0$ y $b_0 = 8$.

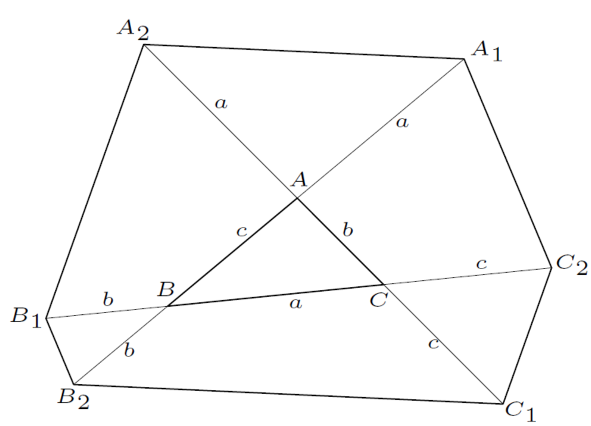
    ii) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$ y $b_{n+2} = 2b_{n+1} - b_n$.

    iii) $a_n^2 + b_n^2$ es un cuadrado perfecto para todo n.

    Determinar por lo menos dos valores del par (a_{1992}, b_{1992}).

41. **(7ª OIM, 1992, Caracas, Venezuela)** Sea Γ una circunferencia, y sean h y m números positivos tales que existe un trapecio $ABCD$ inscrito en Γ, de altura h y tal que la suma de las bases $AB + CD$ es m. Construir el trapecio $ABCD$.

42. **(7ª OIM, 1992, Caracas, Venezuela)** A partir del triángulo T de vértices A, B y C se ha construído el hexágono H de vértices A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 y C_2 tal como muestra la figura:



Demostrar que el área del hexágono H es mayor o igual que trece veces el área del triángulo T.

43. **(8ª OIM, 1993, México D.F., México)** Un número natural es *capicúa* si al escribirlo en notación decimal se puede leer de igual forma de izquierda a derecha como de derecha a izquierda. Por ejemplo, 8, 23432, 6446. Sean $x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots$ todos los números capicúas. Para cada i, sea $y_i = x_{i+1} - x_i$. ¿Cuántos números primos distintos tiene el conjunto $\{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$?

44. **(8ª OIM, 1993, México D.F., México)** Demostrar que para cualquier polígono convexo de área 1, existe un paralelogramo de área 2 que lo contiene.

45. **(8ª OIM, 1993, México D.F., México)** Sea $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ tales que:

    i) Si $x < y$, entonces $f(x) < f(y)$.

    ii) $f(yf(x)) = x^2 f(xy)$ para todos los $x, y \in \mathbb{N}^*$.

46. **(8ª OIM, 1993, México D.F., México)** Sea ABC un triángulo equilátero y Γ su círculo inscrito. Si D y E son puntos de los lados AB y AC, respectivamente, tales que DE es tangente a Γ, demostrar que

$$\frac{AD}{DB} + \frac{AE}{EC} = 1.$$

47. **(8ª OIM, 1993, México D.F., México)** Sean P y Q dos puntos distintos en el plano. Denotaremos por $m(PQ)$ la mediatriz del segmento PQ. Sea $\mathcal{S}$ un subconjunto finito del plano, con más de un elemento, que satisface las siguientes propiedades:

    i) Si P y Q están en $\mathcal{S}$, entonces $m(PQ)$ intersecta a $\mathcal{S}$.

    ii) Si P_1Q_1, P_2Q_2 y P_3Q_3 son tres segmentos diferentes cuyos extremos son puntos de $\mathcal{S}$, entonces no existe ningún punto de $\mathcal{S}$ en la intersección de $m(P_1Q_1)$, $m(P_2Q_2)$ y $m(P_3Q_3)$.

    Determinar el número de puntos que puede tener $\mathcal{S}$.

48. **(8ª OIM, 1993, México D.F., México)** Dos números enteros no negativos a y b son *cuates* si $a + b$ tiene sólamente ceros y unos en su expresión decimal. Sean A y B dos conjuntos infinitos de enteros no negativos tales que B es el conjunto de todos los números que son cuates de todos los elementos de A, y A es el conjunto de todos los números que son cuates de todos los elementos de B.

    Demostrar que en uno de los dos conjuntos, A o B, hay infinitos pares de números x e y tales que $x - y = 1$.

49. **(9ª OIM, 1994, Fortaleza, Brasil)** Se dice que un número natural n es *sensato* si existe un entero r, con $1 < r < n - 1$, tal que la representación de n en base r tiene todas sus cifras iguales. Por ejemplo, 62 y 15 son sensatos, ya que $62 = 222_{(5}$ y $15 = 33_{(4}$. Demostrar que 1993 no es sensato, pero que 1994 sí lo es.

50. **(9ª OIM, 1994, Fortaleza, Brasil)** Sea un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, cuyos vértices se denotan consecutivamente por A, B, C y D. Se supone que existe una semicircunferencia con centro en AB tangente a los otros tres lados del cuadrilátero.

    (a) Demostrar que $AB = AD + BC$.

    (b) Calcular, en función de $x = AB$ e $y = CD$, el área máxima que puede alcanzar un cuadrilátero que satisface las condiciones del enunciado.

51. **(9ª OIM, 1994, Fortaleza, Brasil)** En cada casilla de un tablero $n \times n$ hay una lámpara. Al ser tocada una lámpara cambian de estado ella misma y todas las lámparas situadas en la fila y la columna que ella determina (las que están encendidas se apagan y las apagadas se encienden). Inicialmente todas están apagadas. Demostrar que siempre es posible, con una sucesión adecuada de toques, que todo el tablero quede encendido, y encontrar, en función de n, el mínimo número de toques para que se enciendan todas las lámparas.

52. **(9ª OIM, 1994, Fortaleza, Brasil)** Se dan los puntos A, B y C sobre una circunferencia Γ de manera que el triángulo ABC es acutángulo. Sea P un punto interior a Γ. Se trazan las rectas AP, BP y CP que cortan de nuevo a la circunferencia en X, Y y Z. Determinar el punto P para que el triángulo XYZ sea equilátero.

53. **(9ª OIM, 1994, Fortaleza, Brasil)** Sean n y r dos enteros positivos. Se desea construir r subconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_r$ de $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, cada uno de ellos con k elementos exactamente y tales que, para cada número entero x, $0 \le x \le n-1$, existen x_1 en A_1, x_2 en A_2, …, x_r en A_r (un elemento en cada conjunto) con $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_r$.

    Hallar el menor valor posible de k en función de n y r.

54. **(9ª OIM, 1994, Fortaleza, Brasil)** Demostrar que todo número natural $n \le 2^{1\,000\,000}$ puede ser obtenido a partir de 1 haciendo menos de 1 100 000 sumas; más precisamente, hay una sucesión finita de números naturales $x_0, x_1, \ldots, x_k$, con $k < 1\,100\,000$, $x_0 = 1$, $x_k = n$, tal que, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, existen r, s, con $0 \le r < i$, $0 \le s < i$, y $x_i = x_r + x_s$.

55. **(10ª OIM, 1995, Región V, Chile)** Determine los posibles valores de la suma de los dígitos de todos los cuadrados perfectos.

56. **(10ª OIM, 1995, Región V, Chile)** Sea n un número entero mayor que 1. Determinar los números reales $x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 1$ y $x_{n+1} > 0$ que satisfacen las condiciones siguientes:

    i) $\sqrt{x_1} + \sqrt[3]{x_2} + \cdots + \sqrt[n+1]{x_n} = n\sqrt{x_{n+1}}$.

    ii) $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = x_{n+1}$.

57. **(10ª OIM, 1995, Región V, Chile)** Sean r y s dos rectas ortogonales y que no están en el mismo plano. Sea AB su perpendicular común, donde A pertenece a r y B pertenece a s. Se considera la esfera de diámetro AB. Los puntos M, de la recta r, y N, de la recta s, son variables, con la condición de que MN sea tangente a la esfera en un punto T. Determinar el lugar geométrico de T.

Nota: El plano que contiene a B y a r es perpendicular a s.

58. **(10ª OIM, 1995, Región V, Chile)** En un tablero de $m \times m$ casillas se colocan fichas. Cada ficha colocada en el tablero *domina* todas las casillas de la fila $(-)$, columna $|$, y diagonal $\backslash$ a la que pertenece(*). Determinar el menor número de fichas que deben colocarse para que queden "dominadas" todas las casillas del tablero.

    (*) *Nota:* Obsérvese que la ficha no "domina" la diagonal $/$.

59. **(10ª OIM, 1995, Región V, Chile)** La circunferencia inscrita en el triángulo ABC es tangente a BC, CA y AB en D, E y F, respectivamente. Supongamos que dicha circunferencia corta de nuevo a AD en su punto medio X, es decir, $AX = XD$. Las rectas XB y XC cortan de nuevo a la circunferencia inscrita en Y y Z, respectivamente. Demostrar que $EY = FZ$.

60. **(10ª OIM, 1995, Región V, Chile)** Una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es *circular* si para cada $p \in \mathbb{N}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq p$ y

    $$f^n(p) = \underbrace{f\left(f\left(\ldots f(p)\right)\right)}_{n \text{ veces}} = p.$$

    La función tiene *grado de repulsión* k, $0 < k < 1$, si para cada $p \in \mathbb{N}$, es $f^i(p) \neq p$ para todo $i \leq [kp]$ (*).

    Determinar el mayor grado de repulsión que puede tener una función circular.

    (*) *Nota:* $[x]$ indica la parte entera de x.

61. **(11ª OIM, 1996, San José, Costa Rica)** Sea n un número natural. Un cubo de arista n puede ser dividido en 1996 cubos cuyas aristas son también números naturales. Determinar el menor valor posible de n.

62. **(11ª OIM, 1996, San José, Costa Rica)** Sea M el punto medio de la mediana AD del triángulo ABC (D pertenece al lado BC). La recta BM corta al lado AC en el punto N. Demostrar que AB es tangente a la circunferencia circunscrita al triángulo NBC si, y sólamente si, se cumple la igualdad

    $$\frac{BM}{MN} = \frac{(BC)^2}{(BN)^2}.$$

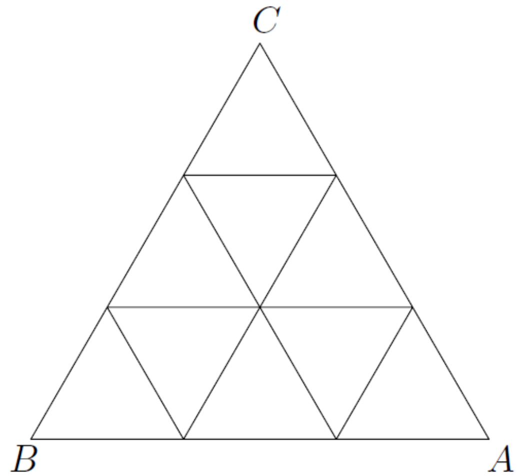
63. **(11ª OIM, 1996, San José, Costa Rica)** Tenemos un tablero cuadriculado de k^2-k+1 filas y $k^2 - k + 1$ columnas, donde $k = p + 1$ y p es un número primo. Para cada primo p, hay que dar un método para distribuir números 0 y 1, un número en cada casilla del tablero, de modo que en cada fila haya exactamente k números 0, en cada columna haya exactamente k números 0 y además no haya ningún rectángulo de lados paralelos a los lados del tablero con números 0 en sus vértices.

64. **(11ª OIM, 1996, San José, Costa Rica)** Dado un núemro natural $n \geq 2$, considérense todas las fracciones de la forma $\dfrac{1}{ab}$, donde a y b son números naturales primos entre sí y tales que

    $$a < b < n, \quad a + b > n.$$

Demostrar que para cada n la suma de estas fracciones es $1/2$.

65. **(11ª OIM, 1996, San José, Costa Rica)** Tres fichas A, B y C están situadas una en cada vértice de un triángulo equilátero de lado n. Se ha dividido el triángulo en triángulos equiláteros más pequeños, de lado 1. La figura muestra el caso $n = 3$:



Inicialmente todas las líneas de la figura están pintadas de azul. Las fichas se desplazan por líneas, pintando de rojo su trayectoria, de acuerdo con las dos reglas siguientes:

i) Primero se mueve A, después B, y después C, después A, y así sucesivamente, por turnos. En cada turno cada ficha recorre un lado de un triángulo pequeño, de un extremo a otro.

ii) Ninguna ficha puede recorrer un lado de un triángulo pequeño que ya esté pintado en rojo, pero puede descansar en un extremo pintado, incluso si ya hay otra ficha esperando allí su turno.

Demostrar que para todo entero $n > 0$ es posible pintar de rojo todos los lados de todos los triángulos pequeños.

66. **(11ª OIM, 1996, San José, Costa Rica)** Se tienen n puntos distintos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ en el plano, y a cada punto A_i se ha asignado un número real λ_i distinto de cero, de manera que

$$\overline{A_iA_j}^2 = \lambda_i + \lambda_j \quad \text{para todos los } i, j \text{ con } i \neq j.$$

Demostrar que:

(a) $n \leq 4$.

(b) Si $n = 4$, entonces $\dfrac{1}{\lambda_1} + \dfrac{1}{\lambda_2} + \dfrac{1}{\lambda_3} + \dfrac{1}{\lambda_4} = 0$.

67. **(12ª OIM, 1997, Guadalajara, México)** Sea $r \geq 1$ un número real que cumple la siguiente propiedad: *Para cada pareja de números enteros positivos m y n, con n múltiplo de m, se tiene que $[nr]$ es múltiplo de $[mr]$*. Probar que r es un número entero.

Nota: Si x es un número real, denotamos por $[x]$ la parte entera de x.

68. **(12ª OIM, 1997, Guadalajara, México)** Con centro en el incentro I de un triángulo ABC se traza una circunferencia que corta en dos puntos a cada uno de los tres lados del triángulo: al segmento BC en D y P (siendo D el más cercano a B); al segmento CA en E y Q (siendo E el más cercano a Q); y al segmento AB en F y R (siendo F el más cercano a A).

    Sea S el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero $EQFR$. Sea T el punto de intersección del cuadrilátero $FRDP$. Sea U el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero $DPEQ$.

    Demostrar que las circunferencias circunscritas a los triángulos FRT, DPU y EQS tienen un único punto común.

69. **(12ª OIM, 1997, Guadalajara, México)** Sea $n \geq 2$ un número entero y $D_n$el conjunto de puntos (x, y) del plano cuyas coordenadas son números enteros con $-n \leq x \leq n$ y $-n \leq y \leq n$.

    (a) Se dispone de tres colores; cada uno de los puntos de D_n se colorea con uno de ellos. Demostrar que sin importar cómo se haya hecho esta coloración, siempre hay dos puntos de D_n del mismo color tales que la recta que los contiene no pasa por ningún otro punto de D_n.

    (b) Encontrar la forma de colorear los puntos de D_n utilizando cuatro colores de manera que si una recta contiene exactamente dos puntos de D_n, entonces esos dos puntos tienen colores distintos.

70. **(12ª OIM, 1997, Guadalajara, México)** Sea n un entero positivo. Consideremos la suma $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$, donde los valores que pueden tomar las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ son únicamente 0 y 1. Sea $I(n)$ el número de $2n$-adas $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ para las cuales el valor de la suma es un número impar, y sea $P(n)$ el número de las $2n$-adas para las cuales dicha suma toma un valor par. Demostrar que

$$\frac{P(n)}{I(n)} = \frac{2^n + 1}{2^n - 1}.$$

71. **(12ª OIM, 1997, Guadalajara, México)** En un triángulo acutángulo ABC, sean AE y BF dos alturas y sea H el ortocentro. La recta simétrica de AE respecto de la bisectriz (interior) del ángulo A, y la recta simétrica de BF respecto de la bisectriz (interior) del ángulo B se cortan en un punto O. Las rectas AE y AO cortan por segunda vez a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en los puntos M y N, respectivamente.

    Sea P la intersección de BC con HN; R la intersección de BC con OM; y S la intersección de HR con OP.

    Demostrar que $AHSO$ es un paralelogramo.

72. **(12ª OIM, 1997, Guadalajara, México)** Sea $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_{1997}\}$ un conjunto de 1997 puntos en el interior de un círculo de radio 1, siendo P_1 el centro del círculo. Para cada $k = 1, 2, \ldots, 1997$, sea x_k La distancia de P_k al punto de $\mathcal{P}$ más próximo a P_k y distinto de P_k. Demostrar que

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{1997}^2 \leq 9.$$

73. **(13ª OIM, 1998, Puerto Plata, República Dominicana)** Se dan 98 puntos sobre una circunferencia. María y José juegan alternativamente de la siguiente forma: cada uno de ellos traza un segmento uniendo dos de los puntos dados que no hayan sido unidos entre sí anteriormente. El juego termina cuando los 98 puntos han sido usados como extremos de un segmento al menos una vez. El vencedor es la persona que dibuja el último trazo.

    Si José inicia el juego, ¿quién puede asegurarse la victoria?

74. **(13ª OIM, 1998, Puerto Plata, República Dominicana)** La circunferencia inscrita en el triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en los puntos D, E y F, respectivamente. AD corta a la circunferencia en un segundo punto Q. Demostrar que la recta EQ pasa por el punto medio de AF si, y sólamente si, $AC = BC$.

75. **(13ª OIM, 1998, Puerto Plata, República Dominicana)** Hallar el mínimo número natural n con la siguiente propiedad: entre cualesquiera n números distintos, pertenecientes al conjunto $\{1, 2, \ldots, 999\}$, se pueden elegir cuatro números diferentes a, b, c, d tales que $a + 2b + 3c = d$

76. **(13ª OIM, 1998, Puerto Plata, República Dominicana)** Alrededor de una mesa redonda están sentados representantes de n países ($n \geq 2$), de modo que satisfacen la siguiente condición: si dos personas son del mismo país, entonces sus respectivos vecinos de la derecha no pueden ser de un mismo país. Determinar, para cada n, el número máximo de personas que puede haber alrededor de la mesa.

77. **(13ª OIM, 1998, Puerto Plata, República Dominicana)** Hallar el máximo valor posible de n para que existan puntos distintos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ en el plano, y números reales $r_1, r_2, \ldots, r_n$, de modo que la distancia entre cualesquiera dos puntos diferentes P_i y P_j sea $r_i + r_j$.

78. **(13ª OIM, 1998, Puerto Plata, República Dominicana)** Sea λ la raíz positiva de la ecuación $t^2 - 1998t - 1 = 0$. Se define la sucesión $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ por

    $$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = [\lambda x_n], \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

    Hallar el resto de la división de x_{1998} por 1998.

    Nota: Los corchetes indican parte entera.

79. **(14ª OIM, 1999, La Habana, Cuba)** Hallar todos los enteros positivos que son menores que 1000 y cumplen la siguiente condición: el cubo de la suma de sus dígitos es igual al cuadrado de dicho entero.

80. **(14ª OIM, 1999, La Habana, Cuba)** Dadas dos circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, decimos que $\mathcal{C}_1$ biseca a $\mathcal{C}_2$ si la cuerda común es un diámetro de $\mathcal{C}_2$. Considérense dos circunferencias fijas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ no concéntricas.

    (a) Probar que existen infinitas circunferencias Γ tales que Γ biseca a $\mathcal{C}_1$ y Γ biseca a $\mathcal{C}_2$.

    (b) Determinar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias Γ.

81. **(14ª OIM, 1999, La Habana, Cuba)** Sean n puntos distintos $P_1, P_2, \dots, P_n$ sobre una recta del plano ($n \geq 2$). Se consideran las circunferencias de diámetro P_iP_j ($1 \leq i < j \leq n$) y coloreamos cada circunferencia con uno de k colores dados. Llamamos (n, k)-nube a esta configuración.

    Para cada entero positivo k, determinar todos los n para los cuales se cumple que toda (n, k)-nube contiene dos circunferencias tangentes exteriormente del mismo color.

    Nota: Para evitar ambigüedades, los puntos que pertenecen a más de una circunferencia no llevan color.

82. **(14ª OIM, 1999, La Habana, Cuba)** Sea B un entero mayor que 10 tal que cada uno de sus dígitos pertenece al conjunto $\{1, 3, 7, 9\}$. Demostrar que B tiene un factor primo mayor o igual que 11.

83. **(14ª OIM, 1999, La Habana, Cuba)** Un triángulo acutángulo ABC está inscrito en una circunferencia de centro O. Las alturas del triángulo son AD, BE y CF. La recta EF corta a la circunferencia en P y Q.

    (a) Probar que OA es perpendicular a PQ.

    (b) Si M es el punto medio de BC, probar que $\overline{AP}^2 = 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{OM}$.

84. **(14ª OIM, 1999, La Habana, Cuba)** Sean A y B puntos del plano y C un punto de la mediatriz de AB. Se construye una sucesión $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ de la siguiente manera: $C_1 = C$ y, para $n \geq 1$, si C_n no pertenece al segmento AB, C_{n+1} es el circuncentro del triángulo ABC_n.

    Determinar todos los puntos C tales que la sucesión $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ está definida para todo n y es periódica a partir de un cierto punto.

    Nota: Una sucesión $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ es periódica a partir de un cierto punto si existen enteros positivos k y p tales que $C_{n+p} = C_n$ para todo $n \geq k$.

85. **(15ª OIM, 2000, Caracas, Venezuela)** Se construye un polígono regular de n lados ($n \geq 3$) y se numeran sus vértices de 1 a n. Se trazan todas las diagonales del polígono. Demostrar que si n es impar, se puede asignar a cada lado y a cada diagonal un número entero de 1 a n, tal que se cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

    i) El número asignado a cada lado o diagonal sea distinto a los asignados a los vértices que une.

    ii) Para cada vértice, todos los lados y diagonales que comparten dicho vértice tengan números diferentes.

86. **(15ª OIM, 2000, Caracas, Venezuela)** Sean S_1 y S_2 dos circunferencias, de centros O_1 y O_2, respectivamente, secantes en M y N. La recta t es la tangente común a S_1 y S_2 más cercana a M. Los puntos A y B son los respectivos puntos de contacto de t con S_1 y S_2, C el punto diametralmente opuesto a B y D el punto de intersección de la recta O_1O_2 con la recta perpendicular a la recta AM trazada por B. Demostrar que M, D y C están alineados.

87. **(15ª OIM, 2000, Caracas, Venezuela)** Encontrar todas las soluciones de la ecuación

$$(x+1)^y - x^z = 1$$

para x, y, z enteros mayores que 1.

88. **(15ª OIM, 2000, Caracas, Venezuela)** De una progresión aritmética infinita $1, a_1, a_2, \ldots$ de números reales se eliminan términos, obteniéndose una progresión geométrica infinita $1, b_1, b_2, \ldots$, de razón q. Encontrar los posibles valores de q.

89. **(15ª OIM, 2000, Caracas, Venezuela)** Hay un montón de 2000 piedras. Dos jugadores se turnan para retirar piedras, alternadamente, de acuerdo con las siguientes reglas:

    i) En cada jugada se pueden retirar 1, 2, 3, 4 o 5 piedras del montón.

    ii) En cada jugada se prohíbe que el jugador retire la misma cantidad de piedras que retiró su oponente en la jugada previa.

    Pierde el jugador que en su turno no pueda realizar una jugada válida. Determinar qué jugador tiene estrategia ganadora y encontrarla.

90. **(15ª OIM, 2000, Caracas, Venezuela)** Un hexágono convexo se denomina *bonito* si tiene cuatro diagonales de longitud 1, cuyos extremos incluyen todos los vértices del hexágono.

    (a) Dado cualquier número k, mayor que 0 y menor que 1, encontrar un hexágono bonito de área k.

    (b) Demostrar que el área de cualquier hexágono bonito es menor que $3/2$.

91. **(16ª OIM, 2001, Minas, Uruguay)** Decimos que un número natural n es *charrúa* si satisface simultáneamente las siguientes condiciones:

    i) Todos los dígitos de n son mayores que 1.

    ii) Siempre que se multipliquen cuatro dígitos de n, se obtiene un divisor de n.

    Demostrar que para cada número natural k existe un número charrúa con más de k dígitos.

92. **(16ª OIM, 2001, Minas, Uruguay)** La circunferencia inscrita en el triángulo ABC tiene centro O y es tangente a los lados BC, AC y AB en los puntos X, Y y Z, respectivamente. Las rectas BO y CO cortan a la recta YZ en los puntos P y Q, respectivamente.

    Demostrar que si los segmentos XP y XQ tienen la misma longitud, entonces el triángulo ABC es isósceles.

93. **(16ª OIM, 2001, Minas, Uruguay)** Sea S un conjunto de n elementos y $S_1, S_2, \ldots, S_k$ subconjuntos de S $(k \geq 2)$ tales que cada uno de ellos tiene por lo menos r elementos.

    Demostrar que existen i y j, con $1 \leq i < k \leq k$, tales que la cantidad de elementos comunes de S_i y S_j es mayor o igual que

$$r - \frac{nk}{4(k-1)}.$$

94. **(16ª OIM, 2001, Minas, Uruguay)** Determinar el número máximo de progresiones aritméticas crecientes de tres términos que puede tener una sucesión $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ de $n > 3$ números reales.

95. **(16ª OIM, 2001, Minas, Uruguay)** En un tablero de 2000×2001 las casillas tienen coorenadas (x, y) con x, y enteros, $0 \leq x \leq 1999$, $0 \leq y \leq 2000$. Una nave en el tablero se mueve de la siguiente manera: antes de cada movimiento, la nave está en posición (x, y) y tiene una velocidad (h, v), donde h y v son enteros. La nave escoge una nueva velocidad (h', v') de forma que $h' - h$ sea igual a -1, 0 o 1; y $v' - v$ sea igual a -1, 0 o 1. La nueva posición de la nave será (x', y'), donde x' es el resto de dividir $x + h'$ por 2000, e y' es el resto de dividir $y + v'$ por 2001.

    Hay dos naves en el tablero: la marciana y la terrestre, que quiere atrapar a la marciana. Inicialmente, cada nave está en una casilla del tablero y tiene velocidad $(0, 0)$. Primero se mueve la nave terrestre y continúan moviéndose alternadamente.

    ¿Existe una estrategia que siempre le permita a la nave terrestre atrapar a la nave marciana, cualesquiera que sean las posiciones iniciales?

    Nota: La nave terrestre, que siempre ve a la marciana, atrapa a la marciana si después de un movimiento suyo cae en la misma posición de la marciana.

96. **(16ª OIM, 2001, Minas, Uruguay)** Demostrar que es imposible cubrir un cuadrado de lado 1 con cinco cuadrados iguales de lado menor que 1/2.

97. **(17ª OIM, 2002, San Salvador, El Salvador)** Los números enteros del 1 al 2002, ambos inclusive, se escriben en una pizarra en orden creciente $1, 2, \ldots, 2002$. Luego se borran los que ocupan el primer lugar, cuarto lugar, séptimo lugar, etc., es decir, los que ocupan los lugares de la forma $3k + 1$.

    En la nueva lista se borran los números que ocupan los lugares de la forma $3k + 1$. Se repite este proceso hasta que se borran todos los números de la lista. ¿Cuál fue el último número que se borró?

98. **(17ª OIM, 2002, San Salvador, El Salvador)** Dado cualquier conjunto de 9 puntos en el plano, de los cuales no hay 3 colineales, demuestre que para cada punto P del conjunto, el número de triángulos que tienen como vértices a tres de los ocho puntos restantes y a P en su interior, es par.

99. **(17ª OIM, 2002, San Salvador, El Salvador)** Un punto P es interior al triángulo equilátero ABC tal que $\widehat{APC} = 120°$. Sean M la intersección de CP con AB y N la intersección de CP con BC. Hallar el lugar geométrico del circuncentro del triángulo MBN al variar P.

100. **(17ª OIM, 2002, San Salvador, El Salvador)** En un triángulo escaleno ABC se traza la bisectriz interior BD, con D sobre AC. Sean E y F, respectivamente, los pies de las perpendiculares trazadas desde A y C hacia la recta BD, y M el punto sobre el lado BC tal que DM es perpendicular a BC. Demuestre que $\widehat{EMD} = \widehat{DMF}$.

101. **(17ª OIM, 2002, San Salvador, El Salvador)** La sucesión de números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ se define como

$$a_1 = 56 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = a_n - \frac{1}{a_n}$$

para cada entero $n \geq 1$. Demuestre que existe un número entero k, $1 \leq k \leq 2002$, tal que $a_k < 0$.

102. **(17ª OIM, 2002, San Salvador, El Salvador)** Un policía intenta capturar a un ladrón en un tablero 2001×2001. Ellos juegan alternadamente. Cada jugador, en su turno, debe moverse una casilla en uno de los tres siguientes sentidos:

$$\downarrow \text{ (abajo);} \quad \rightarrow \text{ (derecha);} \quad \nwarrow \text{ (diagonal superior izquierda).}$$

Si el policía se encuentra en la casilla de la esquina inferior derecha, puede usar su jugada para pasar directamente a la casilla de la esquina superior izquierda (el ladrón no puede hacer esta jugada). Inicialmente el policía está en la casilla central y el ladrón está en la casilla vecina diagonal superior derecha al policía. El policía comienza el juego. Demuestre que:

(a) El ladrón consigue moverse por lo menos 10000 veces sin ser capturado.

(b) El policía posee una estrategia para capturar al ladrón.

Nota: El policía captura al ladrón cuando entra en la casilla en la que está el ladrón. Si el ladrón entra en la casilla del policía, no se produce captura.

103. **(18ª OIM, 2003, Mar del Plata, Argentina)**

(a) Se tienen dos sucesiones, cada una con 2003 enteros consecutivos, y un tablero de 2 filas y 2003 columnas.

			...		
			...		

Decida si siempre es posible distribuir los números de la primera sucesión en la primera fila y los de la segunda sucesión en la segunda fila, de tal manera que los resultados obtenidos al sumar los dos números de cada columna formen una nueva sucesión de 2003 números consecutivos.

(b) ¿Y si se reemplaza 2003 por 2004?

Tanto en (a) como en (b), si la respuesta es afirmativa, explique cómo distribuiría los números y, si es negativa, justifique el porqué.

104. **(18ª OIM, 2003, Mar del Plata, Argentina)** Sean C y D dos puntos de la semicircunferencia de diámetro AB tales que B y C están en semiplanos distintos respecto de la recta AD. Denotemos por M, N y P los puntos medios de AC, DB y CD, respectivamente. Sean O_A y O_B los circuncentros de los triángulos ACP y BDP. Demuestre que las rectas O_AO_B y MN son paralelas.

105. **(18ª OIM, 2003, Mar del Plata, Argentina)** Pablo estaba copiando el siguiente problema: *Considere todas las sucesiones de 2004 números reales* $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2003})$ *tales que*

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ 0 &\le x_1 \le 2x_0 \\ 0 &\le x_2 \le 2x_1 \\ &\vdots \\ 0 &\le x_{2003} \le 2x_{2002}. \end{aligned}$$

Entre todas estas sucesiones, determinar aquella para la cual la siguiente expresión toma su mayor valor: $S = \dots$. Cuando Pablo iba a copiar la expresión de S le borraron la pizarra. Lo único que pudo recordar es que S era de la forma

$$S = \pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_{2002} + x_{2003},$$

donde el último término, x_{2003}, tenía coeficiente $+1$, y los anteriores tenían coeficiente $+1$ o -1. Demuestre que Pablo, a pesar de no tener el enunciado completo, puede determinar con certeza la solución del problema.

106. **(18ª OIM, 2003, Mar del Plata, Argentina)** Sea $M = \{1, 2, \dots, 49\}$ el conjunto de los primeros 49 enteros positivos. Determine el máximo entero k tal que el conjunto M tiene un subconjunto de k elementos en el que no hay 6 números consecutivos. Para este valor máximo de k, halle la cantidad de subconjuntos de M, de k elementos, que tienen la propiedad mencionada.

107. **(18ª OIM, 2003, Mar del Plata, Argentina)** En el cuadrado $ABCD$, sean P y Q puntos pertenecientes a los lados BC y CD, respectivamente, distintos de los extremos, tales que $BP = CQ$. Se consideran puntos X e Y, $X \neq Y$, pertenecientes a los segmentos AP y BQ, respectivamente. Demuestre que, cualesquiera que sean X e Y, existe un triángulo cuyos lados tienen las longitudes de BX, XY y DY.

108. **(18ª OIM, 2003, Mar del Plata, Argentina)** Se definen las sucesiones $(a_n)_{n\ge 0}$, $(b_n)_{n\ge 0}$ por:

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 4 \quad \text{y}$$

$$a_{n+1} = a_n^{2001} + b_n, \quad b_{n+1} = b_n^{2001} + a_n \quad \text{para } n \ge 0.$$

Demuestre que 2003 no divide a ninguno de los términos de estas sucesiones.

109. **(19ª OIM, 2004, Castellón, España)** Se deben colorear casillas de un tablero de 1001×1001, de acuerdo a las reglas siguientes:

- Si dos casillas tienen un lado en común, entonces al menos una de ellas se debe colorear.
- De cada seis casillas consecutivas de una fila o de una columna, siempre se deben colorear al menos dos de ellas que sean adyacentes.

Determinar el número mínimo de casillas que se deben colorear.

110. **(19ª OIM, 2004, Castellón, España)** Se considera en el plano una circunferencia de centro O y radio r y un punto A exterior a ella. Sea M un punto de la circunferencia y N el punto diametralmente opuesto a M. Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por A, M y N al variar M.

111. **(19ª OIM, 2004, Castellón, España)** Sean n y k enteros positivos tales que o bien n es impar o bien n y k son pares. Probar que existen enteros a y b tales que:

$$mcd(a,n) = mcd(b,n) = 1 \quad \text{y} \quad k = a + b.$$

112. **(19ª OIM, 2004, Castellón, España)** Determinar todas las parejas (a, b), donde a, b son enteros positivos de dos dígitos cada uno, tales que $100a + b$ y $201a + b$ son cuadrados perfectos de cuatro dígitos.

113. **(19ª OIM, 2004, Castellón, España)** Dado un triángulo escaleno ABC, se llaman A', B' y C' a los puntos de intersección de las bisectrices interiores de los ángulos A, B y C con los lados opuestos, respectivamente. Sean: A'' la intersección de BC con la mediatriz de AA'; B'' la intersección de AC con la mediatriz de BB'; y C'' la intersección de AB con la mediatriz de CC'.

    Probar que A'', B'' y C'' son colineales.

114. **(19ª OIM, 2004, Castellón, España)** Para un conjunto H de puntos del plano, se dice que un punto P del plano es un *punto de corte* de H si existen cuatro puntos distintos A, B, C y D en H tales que las rectas AB y CD son distintas y se cortan en P.

    Dado un conjunto finito A_0 de puntos en el plano, se construye una sucesión de conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ de la siguiente manera: para cualquier $j \geq 0$, A_{j+1} es la unión de A_j con el conjunto de todos los puntos de corte de A_j.

    Demostrar que si la unión de todos los conjuntos de la sucesión es un conjunto finito, entonces para cualquier $j \geq 1$ se tiene que $A_j = A_1$.

115. **(20ª OIM, 2005, Cartagena de Indicas, Colombia)** Determine todas las ternas de números reales (x, y, z) que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} xyz &= 8, \\ x^2y + y^2z + z^2x &= 73, \\ x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 &= 73. \end{aligned}$$

116. **(20ª OIM, 2005, Cartagena de Indicas, Colombia)** Una pulga salta sobre puntos enteros de una recta numérica. En su primer movimiento salta desde el punto 0 y cae en el punto 1. Luego, si en un movimiento la pulga saltó desde el punto a y cayó en el punto b, en el siguiente movimiento salta desde el punto b y cae en uno de los puntos $b + (b - a) - 1$, $b + (b - a)$, $b + (b - a) + 1$.

    Demuestre que si la pulga ha caído dos veces sobre el punto n, para n entero positivo, entonces ha debido hacer al menos t movimientos, donde t es el mayor entero positivo mayor o igual que $2\sqrt{n}$.

117. **(20ª OIM, 2005, Cartagena de Indicas, Colombia)** Sea p un número primo mayor que 3. Si
$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} = \frac{n}{m},$$
donde el máximo común divisor de n y m es 1, demuestre que p^3 divide a n.

118. **(20ª OIM, 2005, Cartagena de Indicas, Colombia)** Dados dos enteros positivos a y b, se denota por $a \bigtriangledown b$ el residuo que se obtiene al dividir a por b. Este residuo es uno de los números $0, 1, \ldots, b-1$. Encuentre todas las parejas de números (a, p) tales que p es primo y se cumple que
$$(a \bigtriangledown p) + (a \bigtriangledown 2p) + (a \bigtriangledown 3p) + (a \bigtriangledown 4p) = a + p.$$

119. **(20ª OIM, 2005, Cartagena de Indicas, Colombia)** Sea O el circuncentro de un triángulo acutángulo ABC y A_1 un punto en el arco menor BC de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Sean A_2 y A_3 puntos en los lados AB y AC, respectivamente, tales que $\angle BA_1A_2 = \angle OAC$ y $\angle CA_1A_3 = \angle OAB$. Demuestre que la recta A_2A_3 pasa por el ortocentro del triángulo ABC.

120. **(20ª OIM, 2005, Cartagena de Indicas, Colombia)** Dado un entero positivo n, en un plano se consideran $2n$ puntos alineados $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$. Cada punto se colorea de azul o de rojo mediante el siguiente procedimiento: En el plano se trazan n circunferencias con diámetros de extremos A_i y A_j, disjuntas dos a dos. Cada A_k, $1 \leq k \leq 2n$, pertenece exactamente a una circunferencia. Se colorean los puntos de modo que los dos puntos de una circunferencia lleven el mismo color.

    Determine cuántas coloraciones distintas de los $2n$ puntos se pueden obtener al variar las n circunferencias y la distribución de los colores.

121. **(21ª OIM, 2006, Guayaquil, Ecuador)** Sea $n > 1$ un entero impar. Sean P_0 y P_1 dos vértices consecutivos de un polígono regular de n lados. Para cada $k \geq 2$, se define P_k como el vértice del polígono dado que se encuentra en la mediatriz de P_{k-1} y P_{k-2}.

    Determine para qué valores de n la sucesión $P_0, P_1, P_2, \ldots$ recorre todos los vértices del polígono.

122. **(21ª OIM, 2006, Guayaquil, Ecuador)** Dada una circunferencia $\mathcal{C}$, considere un cuadrilátero $ABCD$ con sus cuatro lados tangentes a $\mathcal{C}$, con AD tangente a $\mathcal{C}$ en P y CD tangente a $\mathcal{C}$ en Q. Sean X e Y los puntos donde BD corta a $\mathcal{C}$, y M el punto medio de XY. Demuestre que $\angle AMP = \angle CMQ$.

123. **(21ª OIM, 2006, Guayaquil, Ecuador)** Determine todas las parejas (a, b) de enteros positivos tales que $2a + 1$ y $2b - 1$ sean primos relativos y $a + b$ divida a $4ab + 1$.

124. **(21ª OIM, 2006, Guayaquil, Ecuador)** Los números $1, 2, 3, \ldots, n^2$ se colocan en las casillas de una cuadrícula de $n \times n$, en algún orden, un número por casilla. Una ficha se encuentra inicialmente en la casilla con el número n^2. En cada paso, la ficha puede avanzar a cualquiera de las casillas que comparten un lado con la casilla donde se encuentra.

Primero, la ficha viaja a la casilla con el número 1, y para ello toma uno de los caminos más cortos (con menos pasos) entre la casilla con el número n^2 y la casilla con el número 1. Desde la casilla con el número 1 viaja a la casilla con el número 2, desde allí a la casilla con el número 3, y así sucesivamente, hasta que regresa a la casilla inicial, tomando en cada uno de sus viajes el camino más corto. El recorrido completo le toma a la ficha N pasos.

Determine el menor y el mayor valor posible de N.

125. **(21ª OIM, 2006, Guayaquil, Ecuador)** Se consideran n números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n$ no necesariamente distintos. Sea d la diferencia entre el mayor y el menor de ellos y sea

$$s = \sum_{i<j} |a_i - a_j|.$$

Demuestre que $(n-1)d \leq s \leq n^2 d/4$ y determine las condiciones que deben cumplir estos n números para que se verifique cada una de las igualdades.

126. **(21ª OIM, 2006, Guayaquil, Ecuador)** En el triángulo escaleno ABC, con $\angle BAC = 90°$, se consideran las circunferencias inscrita y circunscrita. La recta tangente en A a la circunferencia circunscrita corta a la recta BC en M. Sean S y R los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los catetos AC y AB, respectivamente. La recta RS corta a la recta BC en N. Las rectas AM y SR Se cortan en U. Demuestre que el triángulo UMN es isósceles.

127. **(22ª OIM, 2007, Coimbra, Portugal)** Dado un entero positivo m, se define la sucesión $\{a_n\}$ de la siguiente manera:

$$a_1 = \frac{m}{2}, \quad a_{n+1} = a_n \lceil a_n \rceil, \quad \text{si } n \geq 1.$$

Determinar todos los valores de m para los cuales a_{2007} es el primerentero que aparece en la sucesión:

Nota: Para un número real x se define $\lceil x \rceil$ como el menor entero que es mayor o igual a x. Por ejemplo: $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil 2007 \rceil = 2007$.

128. **(22ª OIM, 2007, Coimbra, Portugal)** Sean ABC un triángulo con incentro I y Γ una circunferencia de centro I, de radio mayor al de la circunferencia inscrita y que no pasa por ninguno de los vértices. Sean X_1 el punto de intersección de Γ con la recta AB más cercano a B; X_2, X_3 los puntos de intersección de Γ con la recta BC, siendo X_2 más cercano a B; y X_4 el punto de intersección de Γ con la recta CA más cercano a C. Sea K el punto de intersección de las rectas X_1X_2 y X_3X_4. Demostrar que AK corta al segmento X_2X_3 en su punto medio.

129. **(22ª OIM, 2007, Coimbra, Portugal)** Dos equipos, A y B, disputan el territorio limitado por una circunferencia.

A tiene n banderas azules y B tiene n banderas blancas ($n \geq 2$, fijo). Juegan alternadamente y A comienza el juego. Cada equipo, en su turno, coloca una de sus banderas en un punto de la circunferencia que no se haya usado en una jugada anterior. Cada bandera, una vez colocada, no se puede cambiar de lugar.

Una vez colocadas las $2n$ banderas se reparte el territorio entre los dos equipos. Un punto del territorio es del equipo A si la bandera más próxima a él es azul, y es del equipo B si la bandera más próxima a él es blanca. Si la bandera azul más próxima a un punto está a la misma distancia que la bandera blanca más próxima a ese punto, entonces el punto es neutro (no es de A ni de B). Un equipo gana el juego si sus puntos cubren un área mayor que el área cubierta por los puntos del otro equipo. Hay empate si ambos cubren áreas iguales.

Demostrar que, para todo n, el equipo B tiene una estrategia para ganar el juego.

130. **(22ª OIM, 2007, Coimbra, Portugal)** En un tablero cuadriculado de tamaño 19×19, una ficha llamada *dragón* da saltos de la siguiente manera: se desplaza 4 casillas en una dirección paralela a unos de los lados del tablero y 1 casilla en dirección perpendicular a la anterior.

    Se sabe que, con este tipo de saltos, el dragón puede moverse de cualquier casilla a cualquier otra.

    La *distancia dragoniana* entre dos casillas es el menor número de saltos que el dragón debe dar para moverse de una casilla a otra.

    Sea C una casilla situada en una esquina del tablero y sea V la casilla vecina a C que la toca en un único punto.

    Demostrar que existe alguna casilla X del tablero tal que la distancia dragoniana de C a X es mayor que la distancia dragoniana de C a V.

131. **(22ª OIM, 2007, Coimbra, Portugal)** Un número natural n es *atrevido* si el conjunto de sus divisores, incluyendo al 1 y al n, se puede dividir en tres subconjuntos tales que la suma de los elementos de cada subconjunto es la misma en los tres. ¿Cuál es la menor cantidad de divisores que puede tener un número atrevido?

132. **(22ª OIM, 2007, Coimbra, Portugal)** Sea $\mathcal{F}$ la familia de todos los hexágonos convexos H que satisfacen las siguientes condiciones:

    i) los lados opuestos de H son paralelos;

    ii) tres vértices cualesquiera de H se pueden cubrir con una franja de ancho 1.

    Determinar el menor número real ℓ tal que cada uno de los hexágonos de la familia $\mathcal{F}$ se puede cubrir con una franja de ancho ℓ.

    Nota: una franja de ancho ℓ es la región del plano comprendida entre dos rectas paralelas que están a distancia ℓ (incluídas ambas rectas paralelas).

133. **(23ª OIM, 2008, Salvador de Bahía, Brasil)** Se distribuyen los números $1, 2, 3, \ldots, 2008^2$ en un tablero 2008×2008, de modo que en cada casilla haya un número distinto. Para cada fila y cada columna del tablero se calcula la diferencia entre el mayor y el menor de sus elementos. Sea S la suma de los 4016 números obtenidos. Determine el mayor valor posible de S.

134. **(23ª OIM, 2008, Salvador de Bahía, Brasil)** Sean ABC un triángulo escaleno y r la bisectriz externa del ángulo $\angle ABC$. Se consideran P y Q, los pies de las perpendiculares a la recta r que pasan por A y C, respectivamente. Las rectas CP y AB se intersecan en M y las rectas AQ y BC se intersecan en N. Demuestre que las rectas AC, MN y r tienen un punto en común.

135. **(23ª OIM, 2008, Salvador de Bahía, Brasil)** Sean m y n enteros tales que el polinomio $P(x) = x^3 + mx + n$ tiene la siguiente propiedad: si x e y son enteros y 107 divide a $P(x) - P(y)$, entonces 107 divide a $x - y$. Demuestre que 107 divide a m.

136. **(23ª OIM, 2008, Salvador de Bahía, Brasil)** Demuestre que no existen enteros positivos x e y tales que

$$x^{2008} + 2008! = 21^y.$$

137. **(23ª OIM, 2008, Salvador de Bahía, Brasil)** Sea ABC un triángulo, y X, Y, Z puntos sobre los lados BC, AC, AB, respectivamente. Sean A', B', C' los circuncentros correspondientes a los triángulos AZY, BXZ, CYX, respectivamente. Demuestre que

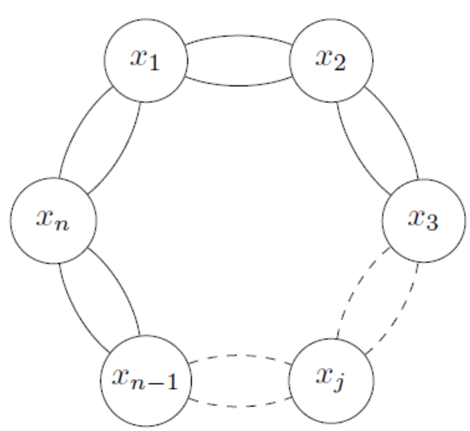
$$(A'B'C') \geq \frac{(ABC)}{4}$$

y que la igualdad se cumple si, y sólo si, las rectas AA', BB', CC' tienen un punto en común.

Observación: para un triángulo cualquiera RST, denotamos su área por (RST).

138. **(23ª OIM, 2008, Salvador de Bahía, Brasil)** En un partido de *biribol* se enfrentan dos equipos de cuatro personas cada uno. Se organiza un torneo de biribol en el que participan n personas, que forman equipos para cada partido (los equipos no son fijos). Al final del torneo se observó que cada dos personas disputaron exactamente un partido en equipos rivales. ¿Para qué valores de n es posible organizar un torneo con tales características?

139. **(24ª OIM, 2009, Santiago de Querétaro, México)** Sea n un natural mayor que 2. Supongamos que n islas están ubicadas en un círculo y que entre cada dos islas vecinas hay dos puentes como en la figura:



Comenzando en la isla x_1, ¿de cuántas maneras se pueden recorrer los $2n$ puentes pasando por cada puente exactamente una vez?

140. **(24ª OIM, 2009, Santiago de Querétaro, México)** Para cada entero positivo n se define $a_n = n+m$, donde m es el mayor entero tal que $2^{2^m} \leq n2^n$. Determinar qué enteros positivos no aparecen en la sucesión a_n.

141. **(24ª OIM, 2009, Santiago de Querétaro, México)** Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias de centros O_1 y O_2 con el mismo radio, que se cortan en A y en B. Sea P un punto sobre el arco AB de $\mathcal{C}_2$ que está dentro de $\mathcal{C}_1$. La recta AP corta a $\mathcal{C}_1$ en C, la recta CB corta a $\mathcal{C}_2$ en D y la bisectriz de $\angle CAD$ interseca a $\mathcal{C}_1$ en E y a $\mathcal{C}_2$ en L. Sea F el punto simétrico a D con respecto al punto medio de PE. Demostrar que existe un punto X que satisface $\angle XFL = \angle XCD = 30°$ y $CX = O_1O_2$.

142. **(24ª OIM, 2009, Santiago de Querétaro, México)** Sea ABC un triángulo con $AB \neq AC$. Sean I el incentro de ABC y P el otro punto de intersección de la bisectriz exterior del ángulo A con el circuncírculo de ABC. La recta PI interseca por segunda vez al circuncírculo de ABC en el punto J. Demostrar que los circuncírculos de los triángulos JIB y JIC son tangentes a IC y a IB, respectivamente.

143. **(24ª OIM, 2009, Santiago de Querétaro, México)** La sucesión a_n está definida por

$$a_1 = 1, \quad a_{2k} = 1 + a_k \quad \text{y} \quad a_{2k+1} = \frac{1}{a_{2k}}, \quad \text{para todo entero } k \geq 1.$$

Demostrar que todo número racional positivo aparece exactamente una vez en esta sucesión.

144. **(24ª OIM, 2009, Santiago de Querétaro, México)** Alrededor de una circunferencia se marcan 6000 puntos y cada uno se colorea con uno de 10 colores dados, de manera tal que entre cualesquiera 100 puntos consecutivos siempre figuran los 10 colores. Hallar el menor valor k con la siguiente propiedad: Para toda coloración de este tipo existen k puntos consecutivos entre los cuales figuran los 10 colores.

145. **(25ª OIM, 2010, Asunción, Paraguay)** Se tienen diez monedas indistinguibles puestas en línea. Se sabe que dos de ellas son falsas y ocupan posiciones consecutivas en la línea. Para cada conjunto de posiciones, se puede preguntar cuántas monedas falsas contiene. ¿Es posible determinar cuáles son las monedas falsas efectuando únicamente dos de estas preguntas, sin conocer la respuesta de la primera antes de formular la segunda?

146. **(25ª OIM, 2010, Asunción, Paraguay)** Determinar si existen números enteros positivos a y b tales que todos los términos de la sucesión definida por $x_1 = 2010$, $x_2 = 2011$,

$$x_{n+2} = x_n + x_{n+1} + a\sqrt{x_n x_{n+1} + b}, \quad n \geq 1,$$

sean enteros.

147. **(25ª OIM, 2010, Asunción, Paraguay)** La circunferencia Γ inscrita al triángulo escaleno ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en los puntos D, E y F, respectivamente. La recta EF corta a la recta BC en G. La circunferencia de diámetro GD corta a Γ en R ($R \neq D$). Sean P y Q ($P \neq R$, $Q \neq R$) las intersecciones de BR y CR con Γ, respectivamente. Las rectas BQ y CP se cortan en X. La circunferencia circunscrita a CDE corta al segmento QR en M y la circunferencia circunscrita a BDF corta al segmento PR en N. Demostrar que las rectas PM, QN y RX son concurrentes.

148. **(25ª OIM, 2010, Asunción, Paraguay)** Las medias aritmética, geométrica y armónica de dos números enteros positivos distintos son números enteros. Hallar el menor valor posible para la media aritmética.

     Nota: Si a y b son números positivos, sus medias aritmética, geométrica y armónica son, respectivamente: $\frac{a+b}{2}$, $\sqrt{ab}$ y $\frac{2ab}{a+b}$.

149. **(25ª OIM, 2010, Asunción, Paraguay)** Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico cuyas diagonales AC y BD son perpendiculares. Sean O el circuncentro de $ABCD$, K la intersección de las diagonales, $L \neq O$ la intersección de las circunferencias circunscritas a OAC y OBD, y G la intersección de las diagonales del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos medios de $ABCD$. Probar que O, K, L y G están alineados.

150. **(25ª OIM, 2010, Asunción, Paraguay)** Alrededor de una mesa circular sobre la que hay 28 floreros se sientan 12 personas. Dos personas pueden verse si, y sólo si, no hay ningún florero alineado con ellas. Probar que existen al menos dos personas que pueden verse.

151. **(26ª OIM, 2011, San José, Costa Rica)** En la pizarra está escrito el número 2. Ana y Bruno juegan alternadamente, comenzando por Ana. Cada uno en su turno sustituye el número escrito por el que se obtiene al aplicar exactamente una de las siguientes operaciones: multiplicarlo por 2, o multiplicarlo por 3, o sumarle 1. El primero que obtenga un resultado mayor o igual a 2011 gana. Hallar cuál de los dos tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia.

152. **(26ª OIM, 2011, San José, Costa Rica)** Encontrar todos los enteros positivos n para los cuales existen tres números enteros no nulos x, y, z tales que

$$x + y + z = 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{n}.$$

153. **(26ª OIM, 2011, San José, Costa Rica)** Sean ABC un triángulo y sean X, Y, Z los puntos de tangencia de su circunferencia inscrita con los lados BC, CA, AB, respectivamente. Suponga que $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ son circunferencias con cuerdas YZ, ZX, XY, respectivamente, tales que $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ se corten sobre la recta CZ y que $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_3$ se corten sobre la recta BY. Suponga que $\mathcal{C}_1$ corta a las cuerdas XY y ZX en J y M, respectivamente; que $\mathcal{C}_2$ corta a las cuerdas YZ y XY en L e I, respectivamente; y que $\mathcal{C}_3$ corta a las cuerdas YZ y ZX en K y N, respectivamente. Demostrar que I, J, K, L, M, N están sobre una misma circunferencia.

154. **(26ª OIM, 2011, San José, Costa Rica)** Sea ABC un triángulo acutángulo, con $AC \neq BC$, y sea O su circuncentro. Sean P y Q puntos tales que $BOAP$ y $COPQ$ son paralelogramos. Demostrar que Q es el ortocentro de ABC.

155. **(26ª OIM, 2011, San José, Costa Rica)** Sean $x_1, \ldots, x_n$ números reales positivos. Demostrar que existen $a_1, \ldots, a_n \in \{-1, 1\}$ tales que

$$a_1x_1^2 + \cdots + a_nx_n^2 \geq (a_1x_1 + \cdots + a_nx_n)^2.$$

156. **(26ª OIM, 2011, San José, Costa Rica)** Sean k y n enteros positivos, con $k \geq 2$. En una línea recta se tienen kn piedras de k colores diferentes de tal forma que hay n piedras de cada color. Un *paso* consiste en intercambiar de posición dos piedras adyacentes. Encontrar el menor entero positivo m tal que siempre es posible lograr, con a lo sumo m pasos, que las n piedras de cada color queden seguidas si:

    (a) n es par,

    (b) n es impar y $k = 3$.

157. **(27ª OIM, 2012, Cochabamba, Bolivia)** Sobre un rectángulo $ABCD$ se dibujan triángulos equiláteros BCX y DCY de modo que cada uno comparte puntos con el interior del rectángulo. La recta AX corta a la recta CD en P. La recta AY corta a la recta BC en Q. Demostrar que el triángulo APQ es equilátero.

158. **(27ª OIM, 2012, Cochabamba, Bolivia)** Un entero positivo es *bisumado* si se puede escribir como suma de dos enteros positivos que tengan la misma suma de sus dígitos. Por ejemplo, 2012 es bisumado pues $2012 = 2005 + 7$ y tanto 2005 como 7 tienen suma de dígitos igual a 7. Encontrar todos los enteros positivos que **no** son bisumados.

159. **(27ª OIM, 2012, Cochabamba, Bolivia)** Sea n un entero positivo. Dado un conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de enteros entre 0 y $2^n - 1$ inclusive, a cada uno de sus 2^n subconjuntos se les asigna la suma de sus elementos; en particular, el conjunto vacío tiene suma 0. Si estas 2^n sumas dejan distintos residuos al dividirlas entre 2^n, se dice que el conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es n-completo. Determinar, para cada n, la cantidad de conjuntos n-completos.

160. **(27ª OIM, 2012, Cochabamba, Bolivia)** Sean a, b, c, d números enteros positivos tales que $a - b + c - d$ es impar y divide a $a^2 - b^2 + c^2 - d^2$. Demostrar que $a - b + c - d$ divide a $a^n - b^n + c^n - d^n$ para todo entero positivo n.

161. **(27ª OIM, 2012, Cochabamba, Bolivia)** Sea ABC un triángulo y sean P y Q los puntos de intersección de la paralela a BC por A con las bisectrices exteriores de los ángulos $\angle B$ y $\angle C$, respectivamente. La perpendicular a BP por P y la perpendicular a CQ por Q se intersecan en R. Si I es el incentro de ABC, mostrar que $AI = AR$.

162. **(27ª OIM, 2012, Cochabamba, Bolivia)** Demostrar que para todo entero positivo n existen n enteros positivos consecutivos tales que ninguno de ellos es divisible por la suma de sus dígitos.

163. **(28ª OIM, 2013, Ciudad de Panamá, Panamá)** Un conjunto S de enteros positivos se llama *canalero* si para cualesquiera tres números $a, b, c \in S$, todos diferentes, se cumple que a divide a bc, b divide a ac y c divide a ab.

   (a) Demostrar que, para cualquier conjunto finito de enteros positivos $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, existen infinitos enteros positivos k tales que el conjunto $\{kc_1, kc_2, \ldots, kc_n\}$ es canalero.

   (b) Demostrar que, para cualquier entero $n \geq 3$, existe un conjunto canalero que tiene exactamente n elementos y ningún entero mayor que 1 divide a todos sus elementos.

164. **(28ª OIM, 2013, Ciudad de Panamá, Panamá)** Sean X, Y los extremos de un diámetro de una circunferencia Γ y N el punto medio de uno de los arcos XY de Γ. Sean A y B dos puntos en el segmento XY. Las rectas NA y NB cortan nuevamente a Γ en los puntos C y D, respectivamente. Las tangentes a Γ en C y D se cortan en P. Sea M el punto de intersección del segmento XY con el segmento NP. Demostrar que M es el punto medio del segmento AB.

165. **(28ª OIM, 2013, Ciudad de Panamá, Panamá)** Sea $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ con $n > 5$. Demostrar que existe un conjunto finito B de enteros positivos distintos tal que $A \subseteq B$ y tiene la propiedad
$$\prod_{x \in B} x = \sum_{x \in B} x^2,$$
es decir, el producto de los elementos de B es igual a la suma de los cuadrados de los elementos de B.

166. **(28ª OIM, 2013, Ciudad de Panamá, Panamá)** Sean Γ una circunferencia de centro O, AE un diámetro de Γ y B el punto medio de uno de los arcos AE de Γ. El punto $D \neq E$ está sobre el segmento OE. El punto C es tal que el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo con AB paralelo a CD y BC paralelo a AD. Las rectas EB y CD se cortan en el punto F. La recta OF corta al arco menor EB de Γ en el punto I.

   Demostrar que la recta EI es la bisectriz del ángulo BEC.

167. **(28ª OIM, 2013, Ciudad de Panamá, Panamá)** Sean A y B dos conjuntos tales que:

   (i) $A \cup B$ es el conjunto de los enteros positivos.

   (ii) $A \cap B$ es el vacío.

   (iii) Si dos enteros positivos tienen como diferencia a un primo mayor que 2013, entonces uno de ellos está en A y el otro en B.

   Hallar todas las posibilidades para los conjuntos A y B.

168. **(28ª OIM, 2013, Ciudad de Panamá, Panamá)** Una *configuración* en un conjunto finito S de puntos del plano entre los cuales no hay tres colineales y a cada punto se le asigna algún color, de modo que si un triángulo cuyos vértices están en S tiene un ángulo mayor o igual a 120°, entonces exactamente dos de sus vértices son de un mismo color.

   Hallar el número máximo de puntos que puede tener una configuración.

169. **(29ª OIM, 2014, San Pedro Sula, Honduras)** Para cada entero positivo n, se define $s(n)$ como la suma de los dígitos de n. Determine el menor entero positivo k tal que

$$s(k) = s(2k) = s(3k) = \cdots = s(2013k) = s(2014k).$$

170. **(29ª OIM, 2014, San Pedro Sula, Honduras)** Halle todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes reales tales que $P(2014) = 1$ y, para algún entero c, se cumple que

$$xP(x - c) = (x - 2014)P(x).$$

171. **(29ª OIM, 2014, San Pedro Sula, Honduras)** Sobre una circunferencia se marcan 2014 puntos. Sobre cada uno de los segmentos cuyos extremos son dos de los 2014 puntos, se escribe un número real no negativo. Se sabe que para cualquier polígono convexo cuyos vértices son algunos de los 2014 puntos, la suma de los números escritos en sus lados es menor o igual que 1. Determine el máximo valor posible de la suma de todos los números escritos.

172. **(29ª OIM, 2014, San Pedro Sula, Honduras)** Se tienen N monedas, de las cuales $N - 1$ son auténticas de igual peso y una es falsa, de peso diferente a las demás. El objetivo es, utilizando exclusivamente una balanza de dos platos, hallar la moneda falsa y determinar si es más pesada o más liviana que las auténticas. Cada vez que se pueda deducir que una o varias monedas son auténticas, entonces todas estas monedas se separan inmediatamente y no se pueden usar en las siguientes pesadas. Determine todos los N para los que se puede lograr con certeza el objetivo. (Se pueden hacer tantas pesadas como se desee.)

173. **(29ª OIM, 2014, San Pedro Sula, Honduras)** Sea ABC un triángulo acutángulo y H el punto de intersección de sus alturas. La altura desde A corta a BC en D. Sean M y N los puntos medios de BH y CH, respectivamente. DM y DN intersectan a AB y AC en X e Y, respectivamente. Si XY intersecta a BH en P y a CH en Q, demuestre que H, P, D y Q están en una misma circunferencia.

174. **(29ª OIM, 2014, San Pedro Sula, Honduras)** Dado un conjunto X y una función $f : X \to X$, denotamos, para cada $x \in X$, $f^1(x) = f(x)$ y, para cada $j \geq 1$, $f^{j+1}(x) = f(f^j(x))$. Decimos que $a \in X$ es un punto fijo de f si $f(a) = a$. Para cada número real x, definimos $\pi(x)$ como la cantidad de primos positivos menores o iguales que x. Dado un número entero positivo n, decimos que $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ es *catracha* si $f^{f(k)}(k) = k$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pruebe que:

    (a) Si f es catracha, entonces f tiene al menos $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ puntos fijos.

    (b) Si $n \geq 36$, existe una función catracha con exactamente $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ puntos fijos.

175. **(30ª OIM, 2015, Mayagüez, Puerto Rico)** El número 125 se puede representar como suma de varios números naturales que son mayores que 1 y coprimos dos a dos. Encuentre el máximo número de sumandos que puede tener tal representación.

176. **(30ª OIM, 2015, Mayagüez, Puerto Rico)** Una recta r contiene los puntos A, B, C y D en ese orden. Sea P un punto fuera de r tal que $\angle APB = \angle CPD$. Pruebe que la bisectriz de $\angle APD$ corta a r en un punto G tal que

$$\frac{1}{GA} + \frac{1}{GC} = \frac{1}{GB} + \frac{1}{GD}.$$

177. **(30ª OIM, 2015, Mayagüez, Puerto Rico)** Sean α y β las raíces del polinomio $x^2 - qx + 1$, donde q es un número racional mayor que 2. Se define $s_1 = \alpha + \beta$, $t_1 = 1$ y, para cada entero $n \geq 2$,

$$s_n = \alpha^n + \beta^n, \quad t_n = s_{n-1} + 2s_{n-2} + \cdots + (n-1)s_1 + n.$$

Demuestre que, para todo n impar, t_n es el cuadrado de un número racional.

178. **(30ª OIM, 2015, Mayagüez, Puerto Rico)** En el triángulo acutángulo ABC, el punto D es el pie de la perpendicular desde A sobre el lado BC. Sea P un punto del segmento AD. Las rectas BP y CP cortan a los lados AC y AB en E y F, respectivamente. Sean J y K los pies de las perpendiculares desde E y F sobre AD, respectivamente. Demuestre que

$$\frac{FK}{KD} = \frac{EJ}{JD}.$$

179. **(30ª OIM, 2015, Mayagüez, Puerto Rico)** Determine todos los pares (a, b) de números enteros que verifican

$$\big(b^2 + 7(a-b)\big)^2 = a^3 b.$$

180. **(30ª OIM, 2015, Mayagüez, Puerto Rico)** Beto juega con su computadora al siguiente juego: inicialmente su computadora elige al azar 30 números del 1 al 2015, y Beto los escribe en un pizarrón (puede haber números repetidos); en cada paso, Beto elige un entero positivo k y algunos de los números escritos en el pizarrón, y le resta a cada uno de ellos el número k, con la condición de que los números resultantes sigan siendo no negativos. El objetivo del juego es lograr que en algún momento los 30 números resultantes sean iguales a 0, en cuyo caso el juego termina. Determine el menor número n tal que, independientemente de los números que inicialmente eligió su computadora, Beto pueda terminar el juego en a lo sumo n pasos.

181. **(31ª OIM, 2016, Antofagasta, Chile)** Determinar todos los números primos positivos p, q, r, k tales que

$$pq + qr + rp = 12k + 1.$$

182. **(31ª OIM, 2016, Antofagasta, Chile)** Encontrar todas las soluciones reales positivas del sistema de ecuaciones

$$x = \frac{1}{y^2 + y - 1}, \quad y = \frac{1}{z^2 + z - 1}, \quad z = \frac{1}{x^2 + x - 1}.$$

183. **(31ª OIM, 2016, Antofagasta, Chile)** Sea ABC un triángulo acutángulo cuya circunferencia circunscrita es Γ. Las tangentes a Γ por B y C se cortan en P. Sobre el arco AC que no contiene a B se toma un punto M, distinto de A y C, tal que la recta AM corta a la recta BC en K. Sean R el punto simétrico de P con respecto a la recta AM y Q el punto de intersección de las rectas RA y PM. Sean J el punto medio de BC y L el punto donde la recta paralela por A a la recta PR corta a la recta PJ. Demostrar que los puntos L, J, A, Q y K están sobre una misma circunferencia.

184. **(31ª OIM, 2016, Antofagasta, Chile)** Determine el mayor número de alfiles que se pueden colocar en un tablero de ajedrez de 8×8, de forma que no haya dos alfiles en la misma casilla y cada alfil sea amenazado como máximo por uno de los otros alfiles.

    Nota: Un alfil amenaza a otro si ambos se encuentran en dos casillas distintas de una misma diagonal. El tablero tiene por diagonales las dos diagonales principales y las paralelas a ellas.

185. **(31ª OIM, 2016, Antofagasta, Chile)** Las circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ se cortan en dos puntos distintos A y K. La tangente común a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ más cercana a K toca a $\mathcal{C}_1$ en B y a $\mathcal{C}_2$ en C. Sean P el pie de la perpendicular desde B sobre AC, y Q el pie de la perpendicular desde C sobre AB. Si E y F son los puntos simétricos de K respecto de las rectas PQ y BC, probar que los puntos A, E y F son colineales.

186. **(31ª OIM, 2016, Antofagasta, Chile)** Sean k un entero positivo y $a_1, a_2, \ldots, a_k$ dígitos. Probar que existe un entero positivo n tal que los últimos $2k$ dígitos de 2^n son, en este orden, $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k$, para ciertos dígitos $b_1, b_2, \ldots, b_k$.

187. **(32ª OIM, 2017, Puerto Iguazú, Argentina)** Para cada entero positivo n, sea $S(n)$ la suma de sus dígitos. Decimos que n tiene la propiedad P si los términos de la sucesión infinita $n, S(n), S(S(n)), S(S(S(n))), \ldots,$ son todos pares, y decimos que n tiene la propiedad I si los términos de esta sucesión son todos impares. Demostrar que entre todos los enteros positivos n tales que $1 \leq n \leq 2017$ son más los que tienen la propiedad I que los que tienen la propiedad P.

188. **(32ª OIM, 2017, Puerto Iguazú, Argentina)** Sean ABC un triángulo acutángulo y Γ su circunferencia circunscrita. Sea D un punto en el segmento BC, distinto de B y de C, y sea M el punto medio de AD. La recta perpendicular a AB que pasa por D corta a AB en E y a Γ en F, con el punto D entre E y F. Las rectas FC y EM se cortan en el punto X. Si $\angle DAE = \angle AFE$, demostrar que la recta AX es tangente a Γ.

189. **(32ª OIM, 2017, Puerto Iguazú, Argentina)** Consideramos las configuraciones de números enteros

$$\begin{array}{ccccc}
a_{1,1} & & & & \\
a_{2,1} & a_{2,2} & & & \\
a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & & \\
a_{2017,1} & a_{2017,2} & a_{2017,3} & \cdots & a_{2017,2017}
\end{array}$$

con $a_{i,j} = a_{i+1,j} + a_{i+1,j+1}$ para todos los i, j tales que $1 \leq j \leq i \leq 2016$.

Determinar la máxima cantidad de enteros impares que puede contener una tal configuración.

190. **(32ª OIM, 2017, Puerto Iguazú, Argentina)** Sean ABC un triángulo acutángulo con $AC > AB$ y O su circuncentro. Sea D un punto en el segmento BC tal que O está en el interior del triángulo ADC y $\angle DAO + \angle ADB = \angle ADC$. Llamamos P y Q a los circuncentros de los triángulos ABD y ACD, respectivamente, y M al punto de intersección de las rectas BP y CQ. Demostrar que las rectas AM, PQ y BC son concurrentes.

    Nota: El circuncentro de un triángulo es el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo.

191. **(32ª OIM, 2017, Puerto Iguazú, Argentina)** Dado un entero positivo n, se escriben todos sus divisores enteros positivos en un pizarrón. Ana y Beto juegan el siguiente juego: Por turnos, cada uno va a pintar uno de esos divisores de rojo o azul. Pueden elegir el color que deseen en cada turno, pero sólo pueden pintar números que no hayan sido pintados con anterioridad. El juego termina cuando todos los números han sido pintados. Si el producto de los números pintados de rojo es un cuadrado perfecto, o si no hay ningún número pintado de rojo, gana Ana; de lo contrario, gana Beto. Si Ana tiene el primer turno, determinar para cada n quién tiene estrategia ganadora.

192. **(32ª OIM, 2017, Puerto Iguazú, Argentina)** Sean $n > 2$ un entero positivo par y $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ números reales tales que $a_{k+1} - a_k \leq 1$ para todo k con $1 \leq k \leq n-1$. Sea A el conjunto de pares (i, j) con $1 \leq i < j \leq n$ y $j - i$ par, y sea B el conjunto de pares (i, j) con $1 \leq i < j \leq n$ y $j - i$ impar. Demostrar que

$$\prod_{(i,j)\in A} (a_j - a_i) > \prod_{(i,j)\in B} (a_j - a_i).$$

193. **(33ª OIM, 2018, La Rábida, España–Monte Gordo, Portugal)** Para cada número natural $n \geq 2$, hallar las soluciones enteras del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= (x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n)^{2018}, \\ x_2 &= (x_1 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n)^{2018}, \\ &\vdots \\ x_n &= (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1})^{2018}. \end{aligned}$$

194. **(33ª OIM, 2018, La Rábida, España–Monte Gordo, Portugal)** Sea ABC un triángulo tal que $\angle BAC = 90^\circ$ y $BA = CA$. Sea M el punto medio de BC. Un punto $D \neq A$ es elegido en la semicircunferencia de diámetro BC que contiene a A. La circunferencia circunscrita al triángulo DAM intersecta a las rectas DB y BC en los puntos E y F, respectivamente. Demostrar que $BE = CF$.

195. **(33ª OIM, 2018, La Rábida, España–Monte Gordo, Portugal)** En un plano tenemos n rectas sin que haya dos paralelas, ni dos perpendiculares, ni tres concurrentes. Se elige un sistema de ejes cartesianos con una de las n rectas como eje de las abscisas. Un punto P se sitúa en el origen de coordenadas del sistema elegido y comienza a moverse a velocidad constante por la parte positiva del eje de las abscisas. Cada vez que P llega a la intersección de dos rectas, sigue por la recta recién alcanzada en el sentido que permite que el valor de la abscisa de P sea siempre creciente. Demostrar que se puede elegir el sistema de ejes cartesianos de modo que P pase por puntos de las n rectas.

    Nota: El eje de las abscisas de un sistema de coordenadas del plano es el eje de la primera coordenada o eje de las x.

196. **(33ª OIM, 2018, La Rábida, España–Monte Gordo, Portugal)** Un conjunto X de enteros positivos es *ibérico* si X es un subconjunto de $\{2, 3, 4, \ldots, 2018\}$, y siempre que m y n pertenezcan a X, entonces el $mcd(m, n)$ pertenece también a X. Un conjunto ibérico es *olímpico* si no está contenido en ningún otro conjunto ibérico. Encontrar todos los conjuntos ibéricos olímpicos que contienen al número 33.

197. **(33ª OIM, 2018, La Rábida, España–Monte Gordo, Portugal)** Sea n un entero positivo. Para una permutación $a_1, a_2, \ldots, a_n$, de los números $1, 2, \ldots, n$, definimos

$$b_k = \min_{1 \leq i \leq k} a_i + \max_{1 \leq j \leq k} a_j,$$

    para cada $k = 1, 2, \ldots, n$. Decimos que la permutación $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es *guadiana* si la sucesión $b_1, b_2, \ldots, b_n$ no tiene dos elementos consecutivos iguales. ¿Cuántas permutaciones guadianas existen?

198. **(33ª OIM, 2018, La Rábida, España–Monte Gordo, Portugal)** Sea ABC un triángulo acutángulo con $AC > AB > BC$. Las mediatrices de AC y AB cortan a la recta BC en D y E, respectivamente. Sean P y Q puntos distintos de A sobre las rectas AC y AB, respectivamente, tales que $AB = BP$ y $AC = CQ$, y sea K la intersección de las rectas EP y DQ. Sea M el punto medio de BC. Demostrar que $\angle DKA = \angle EKM$.

199. **(34ª OIM, 2019, Guanajuato, México)** Para cada entero positivo n, sea $s(n)$ la suma de los cuadrados de los dígitos de n. Por ejemplo, $s(15) = 1^2 + 5^2 = 26$. Determina todos los enteros $n \geq 1$ tales que $s(n) = n$.

200. **(34ª OIM, 2019, Guanajuato, México)** Determina todos los polinomios $P(x)$ de grado $n \geq 1$ con coeficientes enteros tales que para todo número real x se cumple

$$P(x) = (x - P(0))(x - P(1))(x - P(2)) \ldots (x - P(n-1)).$$

201. **(34ª OIM, 2019, Guanajuato, México)** Sea Γ el circuncírculo del triángulo ABC. La paralela a AC que pasa por B corta a Γ en D ($D \neq B$) y la paralela a AB que pasa por C corta a Γ en E ($E \neq C$). Las rectas AB y CD se cortan en P, y las rectas AC y BE se cortan en Q. Sea M el punto medio de DE. La recta AM corta a Γ en Y ($Y \neq A$) y a la recta PQ en J. La recta PQ corta al circuncírculo del triángulo BCJ en Z ($Z \neq J$). Si las rectas BQ y CP se cortan en X, demuestra que X pertenece a la recta YZ.

Nota: El circuncírculo de un triángulo es la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo.

202. **(34ª OIM, 2019, Guanajuato, México)** Sea $ABCD$ un trapecio con $AB||CD$ e inscrito en la circunferencia Γ. Sean P y Q dos puntos en el segmento AB (A, P, Q, B están en ese orden y son distintos) tales que $AP = QB$. Sean E y F los segundos puntos de intersección de las rectas CP y CQ con Γ, respectivamente. Las rectas AB y EF se cortan en G. Demuestra que la recta DG es tangente a Γ.

203. **(34ª OIM, 2019, Guanajuato, México)** Don Miguel coloca una ficha en alguno de los $(n+1)^2$ vértices determinados por un tablero de $n \times n$. Una *jugada* consiste en mover la ficha desde el vértice en que se encuentra a un vértice adyacente en alguna de las ocho posibles direcciones: $\uparrow$, $\downarrow$, $\rightarrow$, $\leftarrow$, $\nearrow$, $\searrow$, $\swarrow$, $\nwarrow$, siempre y cuando no se salga del tablero. Un *recorrido* es una sucesión de jugadas tal que la ficha estuvo en cada uno de los $(n+1)^2$ vértices exactamente una vez. ¿Cuál es la mayor cantidad de jugadas diagonales ($\nearrow$, $\searrow$, $\swarrow$, $\nwarrow$) que en total puede tener un recorrido?

204. **(34ª OIM, 2019, Guanajuato, México)** Sean $a_1, a_2, \dots, a_{2019}$ enteros positivos y P un polinomio con coeficientes enteros tal que, para todo entero positivo n,

$$P(n) \text{ divide a } a_1^n + a_2^n + \cdots + a_{2019}^n.$$

Demuestra que P es un polinomio constante.

205. **(35ª OIM, 2020, online, Perú)** Sea ABC un triángulo acutángulo tal que $AB < AC$. Los puntos medios de los lados AB y AC son M y N, respectivamente. Sean P y Q puntos en la recta MN tales que $\angle CBP = \angle ACB$ y $\angle QCB = \angle CBA$. La circunferencia circunscrita del triángulo ABP interseca a la recta AC en D ($D \neq A$) y la circunferencia circunscrita del triángulo AQC interseca a la recta AB en E ($E \neq A$). Demuestre que las rectas BC, DP y EQ son concurrentes.

206. **(35ª OIM, 2020, online, Perú)** Para cada entero positivo n, se define T_n como el menor entero positivo tal que $1+2+\cdots+T_n$ es múltiplo de n. Por ejemplo, $T_5 = 4$ puesto que 1, $1+2$ y $1+2+3$ no son múltiplos de 5, pero $1+2+3+4$ sí es múltiplo de 5.

Determine todos los enteros positivos m tales que $T_m \geq m$.

207. **(35ª OIM, 2020, online, Perú)** Sea $n \geq 2$ un entero. Una sucesión $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ de n números enteros se dice *limeña* si

$$mcd\{a_i - a_j | a_i > a_j \text{ y } 1 \leq i, j \leq n\} = 1.$$

Una *operación* consiste en escoger dos elementos a_k y a_ℓ de una sucesión, con $k \neq \ell$, y reemplazar a_ℓ por $a'_\ell = 2a_k - a_\ell$.

Demuestre que, dada una colección de $2^n - 1$ sucesiones limeñas, cada una formada por n números enteros, existen dos de ellas, digamos β y γ, tales que es posible transformar β en γ mediante un número finito de operaciones.

Aclaración: Si todos los elementos de una sucesión son iguales, entonces esa sucesión no es limeña.

208. **(35ª OIM, 2020, online, Perú)** Demuestre que existe un conjunto $\mathcal{C}$ de 2020 enteros positivos y distintos que cumple simultáneamente las siguientes propiedades:

- Cuando se calcula el máximo común divisor de cada dos elementos de $\mathcal{C}$, se obtiene una lista de números todos distintos.
- Cuando se calcula el mínimo común múltiplo de cada dos elementos de $\mathcal{C}$, se obtiene una lista de números todos distintos.

209. **(35ª OIM, 2020, online, Perú)** Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(xf(x-y)) + yf(x) = x + y + f(x^2),$$

para cualesquiera números reales x, y.

210. **(35ª OIM, 2020, online, Perú)** Sea ABC un triángulo acutángulo y escaleno. Sean H el ortocentro y O el circuncentro del triángulo ABC, y sea P un punto interior del segmento HO. La circunferencia de centro P y radio PA interseca nuevamente a las rectas AB y AC en los puntos R y S, respectivamente. Denotamos por Q el punto simétrico al punto P con respecto a la mediatriz de BC. Demuestre que los puntos P, Q, R y S pertenecen a una misma circunferencia.

211. **(36ª OIM, 2021, online, Costa Rica)** Sea $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_{10}\}$ un conjunto de 10 primos distintos y sea A el conjunto de todos los enteros mayores que 1 tales que en su descomposición en factores primos aparecen únicamente primos de P. Los elementos de A se colorean de tal forma que:

i) cada elemento de P tiene un coloro distinto,

ii) si $m, n \in A$, entonces mn tiene el mismo color de m o n,

iii) para cualquier par de colores distintos $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$, no existen $j, k, m, n \in A$ (no necesariamente distintos), con j, k de color $\mathcal{R}$ y m, n de color $\mathcal{S}$, tales que j divide a m y n divide a k, simultáneamente.

Demuestre que existe un primo de P tal que todos sus múltiplos en A tienen el mismo color.

212. **(36ª OIM, 2021, online, Costa Rica)** Considere un triángulo acutángulo ABC, con $AC > AB$, y sea Γ su circuncírculo. Sean E y F los puntos medios de los lados AC y AB, respectivamente. El circuncírculo del triángulo CEF y Γ se cortan en X y C, con $X \neq C$. La recta BX y la tangente a Γ por A se cortan en Y. Sea P el punto en el segmento AB tal que $YP = YA$, con $P \neq A$, y sea Q el punto donde se cortan AB y la paralela a BC que pasa por Y. Demuestre que F es el punto medio de PQ.

Nota: El circuncírculo de un triángulo es la circunferencia que pasa por sus tres vértices.

213. **(36ª OIM, 2021, online, Costa Rica)** Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una sucesión de enteros positivos y sea $b_1, b_2, b_3, \ldots$ la sucesión de números reales dada por

$$b_n = \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}, \quad \text{para } n \geq 1.$$

Demuestre que si entre cada millón de términos consecutivos de la sucesión $b_1, b_2, b_3, \ldots$ existe al menos uno que es entero, entonces existe algún k tal que $b_k > 2021^{2021}$.

214. **(36ª OIM, 2021, online, Costa Rica)** Sean a, b, c, x, y, z números reales tales que

$$a^2 + x^2 = b^2 + y^2 = c^2 + z^2 = (a+b)^2 + (x+y)^2 = (b+c)^2 + (y+z)^2 = (c+a)^2 + (z+x)^2.$$

Demuestre que $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

215. **(36ª OIM, 2021, online, Costa Rica)** Para cada conjunto finito C de enteros, se define $S(C)$ como la suma de los elementos de C. Encuentre dos conjuntos no vacíos A y B cuya intersección es vacía, cuya unión es el conjunto $\{1, 2, \ldots, 2021\}$ y tales que el producto $S(A)S(B)$ es un cuadrado perfecto.

216. **(36ª OIM, 2021, online, Costa Rica)** Considere un polígono regular de n lados, $n \geq 4$, y sea V un subconjunto de r vértices del polígono. Demuestre que si $r(r-3) \geq n$, entonces existen al menos dos triángulos congruentes cuyos vértices pertenecen a V.

217. **(37ª OIM, 2022, Bogotá, Colombia)** Sea ABC un triángulo equilátero con circuncentro O y circuncírculo Γ. Sea D un punto en el arco menor BC, con $DB > DC$. La mediatriz de OD corta a Γ en E y F, con E en el arco menor BC. Sea P el punto de corte de BE y CF. Demostrar que PD es perpendicular a BC.

218. **(37ª OIM, 2022, Bogotá, Colombia)** Sea $S = \{13, 133, 1333, \ldots\}$ el conjunto de los enteros positivos de la forma $\overbrace{13\ldots3}^{n \text{ dígitos}}$, con $n \geq 1$. Consideremos una fila horizontal de 2022 casillas, inicialmente vacías. Ana y Borja juegan de la siguiente manera: cada uno, en su turno, escribe un dígito de 0 a 9 en la casilla vacía situada más a la izquierda. Empieza a jugar Ana; luego ambos jugadores se alternan hasta que todas las casillas están llenas. Cuando el juego termina, en la fila se lee, de izquierda a derecha, un número N de 2022 dígitos. Borja gana si N es divisible por alguno de los números que están en S; en caso contrario gana Ana. Determinar cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describirla.

219. **(37ª OIM, 2022, Bogotá, Colombia)** Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

   (i) $f(yf(x)) + f(x-1) = f(x)f(y)$ para todo x, y en $\mathbb{R}$.

   (ii) $|f(x)| < 2022$ para todo x con $0 < x < 1$.

220. **(37ª OIM, 2022, Bogotá, Colombia)** Sea $n > 2$ un entero positivo. Se tiene una fila horizontal de n casillas donde cada casilla está pintada de azul o rojo. Decimos que un *bloque* es una secuencia de casillas consecutivas del mismo color. Arepito el cangrejo está inicialmente parado en la primera casilla, en el extremo izquierdo de la fila. En cada turno, él cuenta la cantidad m de casillas pertenecientes al bloque más grande que contiene la casilla en la que está, y hace una de las siguientes acciones:

- Si la casilla en la que está es azul y hay al menos m casillas a la derecha de él, Arepito se mueve m casillas hacia la derecha.
- Si la casilla en la que está es roja y hay al menos m casillas a la izquierda de él, Arepito se mueve m casillas hacia la izquierda.
- En cualquier otro caso, se queda en la misma casilla y no se mueve más.

Para cada n, determinar el menor entero k para el que existe una coloración inicial de la fila con k casillas azules para la que Arepito pueda llegar a la última casilla, en el extremo derecho de la fila.

221. **(37ª OIM, 2022, Bogotá, Colombia)** Sea ABC un triángulo acutángulo con circuncírculo Γ. Sean P y Q puntos en el semiplano definido por BC que contiene a A, tales que BP y CQ son tangentes a Γ con $PB = BC = CQ$. Sean K y L puntos distintos de A en la bisectriz externa del ángulo $\angle CAB$, tales que $BK = BA$ y $CL = CA$. Sea M el punto de corte de las rectas PK y QL. Demostrar que $MK = ML$.

222. **(37ª OIM, 2022, Bogotá, Colombia)** Sea $\mathbb{Z}^+$ el conjunto de los enteros positivos. Determinar todas las funciones $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ tales que

$$f(a)f(a+b) - ab$$

es un cuadrado perfecto para todo a, b en $\mathbb{Z}^+$.

223. **(38ª OIM, 2023, Río de Janeiro, Brasil)** Sea n un entero positivo. Se realizan las 35 multiplicaciones:

$$1 \cdot n,\ 2 \cdot n,\ \ldots,\ 35 \cdot n.$$

Demuestre que en alguno de estos resultados aparece al menos una vez el dígito 7.

224. **(38ª OIM, 2023, Río de Janeiro, Brasil)** Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los enteros. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que:

$$2023f(f(x)) + 2022x^2 = 2022f(x) + 2023[f(x)]^2 + 1$$

para todo entero x.

225. **(38ª OIM, 2023, Río de Janeiro, Brasil)** Ana y Beto juegan con una balanza de dos platillos. Tienen 2023 pesas etiquetadas con sus pesos, que son los números $1, 2, \ldots, 2023$, sin que ninguno de ellos se repita. Cada jugador, en su turno, elige una pesa que todavía no estaba colocada en la balanza y la coloca en el platillo con menos peso en ese momento. Si la balanza está en equilibrio, la coloca en cualquier platillo. Ana comienza el juego, y siguen de esta manera alternativamente hasta colocar todas las pesas. Ana gana si al finalizar la balanza se encuentra equilibrada, en caso contrario gana Beto. Determine cuál de los jugadores tiene una estrategia ganadora y describa la estrategia.

226. **(38ª OIM, 2023, Río de Janeiro, Brasil)** Sean B y C dos puntos fijos en el plano. Para cada punto A del plano, fuera de la recta BC, sea G el baricentro del triángulo ABC. Determine el lugar geométrico de los puntos A tales que $\angle BAC + \angle BGC = 180°$.

Nota: El lugar geométrico es el conjunto de todos los puntos del plano que satisfacen la propiedad.

227. **(38ª OIM, 2023, Río de Janeiro, Brasil)** Una sucesión $P_1, \ldots, P_n$ de puntos en el plano (no necesariamente distintos) es *carioca* si existe una permutación $a_1, \ldots, a_n$ de los números $1, \ldots, n$ para la cual los segmentos

$$P_{a_1}P_{a_2}, P_{a_2}P_{a_3}, \ldots, P_{a_n}P_{a_1}$$

son todos de la misma longitud.

Determine el mayor número k tal que para cualquier sucesión de k puntos en el plano, se pueden añadir $2023 - k$ puntos de modo que la sucesión de 2023 puntos es carioca.

228. **(38ª OIM, 2023, Río de Janeiro, Brasil)** Sea P un polinomio de grado mayor o igual que 4 con coeficientes enteros. Un entero x se llama *P-representable* si existen números enteros a y b tales que $x = P(a) - P(b)$. Demuestre que, si para todo $N \geq 0$, más de la mitad de los enteros del conjunto $\{0, 1, \ldots, N\}$ son P-representables, entonces todos los enteros pares son P-representables o todos los enteros impares son P-representables.

229. **(39ª OIM, 2024, Tarija, Bolivia)** Para cada entero positivo n, denotamos $d(n)$ a la cantidad de divisores positivos de n. Demostrar que para todo par de enteros positivos (a, b) se cumple que

$$d(a) + d(b) \leq d(mcd(a, b)) + d(mcm(a, b))$$

y determinar los pares de enteros positivos (a, b) para los cuales se cumple la igualdad.

Nota: $mcd(a, b)$ es el máximo común divisor de a y b, y $mcm(a, b)$ es el mínimo común múltiplo de a y b.

230. **(39ª OIM, 2024, Tarija, Bolivia)** Sea ABC un triángulo acutángulo y sean M y N los puntos medios de AB y AC, respectivamente. Dado un punto D interior del segmento BC con $DB < DC$, sean P y Q las intersecciones de DM y DN con AC y AB, respectivamente. Sea $R \neq A$ la intersección del circuncírculo del triángulo PAQ con el circuncírculo del triángulo NAM. Si K es el punto medio de AR, demostrar que $\angle MKN = 2\angle BAC$.

231. **(39ª OIM, 2024, Tarija, Bolivia)** Sea O un punto fijo en el plano. Se tienen 2024 puntos rojos, 2024 puntos amarillos y 2024 puntos verdes en el plano, en donde no hay tres puntos colineales y todos son distintos de O. Se sabe que para cualesquiera dos colores, la envolvente convexa de los puntos de dichos colores contiene a O (en sus lados o interior). Decimos que un punto rojo, un punto amarillo y un punto verde forman un triángulo *boliviano* si dicho triángulo contiene al punto O (en sus lados o interior). Determinar el mayor entero positivo k tal que, sin importar cómo se ubiquen los puntos, siempre hay al menos k triángulos bolivianos.

Nota: La *envolvente convexa* de un conjunto finito S de puntos en el plano, es aquel polígono convexo que contiene a todos los puntos de S (en sus lados o interior) y que tiene todos sus vértices en S.

232. **(39ª OIM, 2024, Tarija, Bolivia)** Se colorean de rojo algunos puntos del plano de manera que si P y Q son dos puntos rojos, y X es un punto tal que el triángulo PQX

tiene ángulos de $30°$, $60°$ y $90°$ (en algún orden), entonces X es también rojo. Si los vértices A, B y C de un triángulo son todos rojos, demostrar que el baricentro del triángulo ABC también es rojo.

Nota: El *baricentro* de un triángulo es el punto de intersección de sus medianas.

233. **(39ª OIM, 2024, Tarija, Bolivia)** Sea $n \geq 2$ un entero y sean $a_1, \ldots, a_n$ enteros positivos fijos (no necesariamente distintos) de manera que ningún entero mayor a 1 los divida a todos. En un pizarrón están escritos los números $a_1, \ldots, a_n$ junto con un entero positivo x. Un movimiento consiste en escoger dos números $a > b$ de los $n+1$ números del pizarrón y reemplazarlos por $a - b$ y $2b$. Encontrar todos los valores posibles de x, en función de $a_1, \ldots, a_n$, para los que es posible lograr que, después de una cantidad finita de movimientos (posiblemente ninguno), todos los números escritos en el pizarrón sean iguales.

234. **(39ª OIM, 2024, Tarija, Bolivia)** Determinar todos los conjuntos infinitos A de enteros positivos con la siguiente propiedad: Si $a, b \in A$ y $a \geq b$, entonces $\left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor \in A$.

    Nota: $\lfloor x \rfloor$ denota al mayor entero menor o igual que x.

235. **(40ª OIM, 2025, La Araucanía, Chile)** Una sucesión de números reales $a_1, a_2, \ldots$ se llama *mapuche* si $a_1 > 0$ y además para todo $n \geq 2$ se tiene que

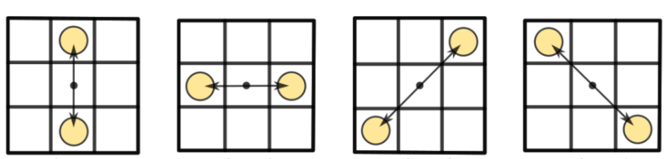
$$a_1 a_2 \cdots a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}.$$

¿Cuál es la máxima cantidad de enteros que puede tener una sucesión mapuche?

Nota. El producto tiene n factores y la suma tiene $n-1$ sumandos.

236. **(40ª OIM, 2025, La Araucanía, Chile)** Se tiene un tablero $n \times n$ dividido en n^2 casillas con $n \geq 3$. Inicialmente, se elige una casilla y se colocan en ella n^2 monedas. Un *movimiento* consiste en elegir una casilla que contenga al menos dos monedas y desplazar dos de ellas hacia dos casillas que sean simétricas con respecto a la casilla elegida y compartan al menos un vértice con ella. En la figura se muestran los cuatro tipos de movimientos posibles.

Si después de varios movimientos resulta que en cada casilla del tablero hay exactamente una moneda, demostrar que la cantidad de movimientos realizados del tipo 3 es igual a la cantidad de movimientos realizados del tipo 4.



Tipo 1 Tipo 2 Tipo 3 Tipo 4

237. **(40ª OIM, 2025, La Araucanía, Chile)** Sean b y n enteros positivos con $b \geq 2$. Se define $s_b(n)$ como la suma de las cifras de n expresado en base b. ¿Existe algún entero $n \geq 2$ tal que

$$s_2(n) \geq s_3(n) \geq \ldots \geq s_{2025}(n)?$$

Nota. Las cifras de n expresado en base b son los números enteros $a_0, a_1, \ldots, a_k$ tales que $n = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \ldots + a_k b^k$ con $a_k \neq 0$ y $0 \leq a_i \leq b-1$ para todo $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$.

238. **(40ª OIM, 2025, La Araucanía, Chile)** Encontrar todas las parejas de números primos (p,q) con $p > q > 1$, tales que

$$(p-q-1)^3 + (p-q)^3 + \ldots + (p-1)^3 + p^3 + \ldots + (p+q)^3 + (p+q+1)^3 = (3pq)^2.$$

Nota. El miembro de la izquierda de la igualdad tiene $2q+3$ sumandos, los cuales son cubos de números consecutivos.

239. **(40ª OIM, 2025, La Araucanía, Chile)** El triángulo ABC es acutángulo con $AB < AC$. Sean ω la circunferencia inscrita del triángulo ABC y Γ su circunferencia circunscrita. Sea D el punto de tangencia de ω con el lado BC y sea L el punto de ω diametralmente opuesto a D. La recta AL corta al lado BC en el punto E. Sea N el punto medio del arco BC de Γ que contiene a A. La recta NL corta de nuevo a ω en el punto K. Demostrar que los puntos A, N, E, K están en una misma circunferencia.

240. **(40ª OIM, 2025, La Araucanía, Chile)** Un sultán tiene capturados a 23 magos y les propone un juego para dejarlos libres. El sultán les dice que va a construir 11 pozos, numerados del 1 al 11, y una torre. Dentro de cada poco pondrá a dos magos y pondrá al restante en la torre. A cada mago en los pozos le pondrá un sombrero de uno de los cuatro colores (conocidos por todos), y al de la torre le pondrá un sombrero de uno de 2025 colores (distintos de los otros cuatro y conocidos por todos). Ningún mango sabrá el color de su sombrero. Una vez dentro del pozo, cada mago sabrá el número del pozi en el que está; además, verá únicamente el sombrero del mago de la torre y el del mago que el que compartirá pozo. El mago de la torre conocerá el número de cada pozo y podrá ver los sombreros de todos los demás magos.

    En un determinado momento, el sultán dará la orden y, simultáneamente, cada mago dirá "El color de mi sombrero es X", donde "X" es el color que quiera. Si al menos un mago dice una frase verdadera, todos los magos ganan y son libres; en otro caso, pierden. Antes de ser puestos en sus lugares y de recibir sus sombreros, los magos dispondrán de un tiempo para planear una estrategia, pero no podrán comunicarse después de esto. ¿Pueden asegurar la victoria sin importar lo que haga el sultán?