NOMBRES COMPLEXOS

Llibre de text

Gerard Romo Garrido

TooMates
Cool·lección

Toomates Cool·lección

Los documentos de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho.
Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "**licencias digitales**" con las que las editoriales pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo libro, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.
Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de licencias digitales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf".

El conocimiento no es una mercancía.

El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las editoriales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de unos libros de texto que actualmente son muy mediocres, y no mediante retorcidas técnicas comerciales.

toomates@gmail.com

Actualmente, **Toomates Cool·lección** consta de los siguientes libros:

Versión de este documento: 28/03/2020

www.toomates.net

Índex

Aquest llibre té la seva continuïtat natural en "Problemas con números complejos":

http://www.toomates.net/biblioteca/ProblemasNumerosComplejos.pdf

1 Operacions amb nombres complexos.

1.1 Concepte de nombre complex. Suma de nombres complexos.

El conjunto C de los números complejos es el conjunto de números más extenso que conocemos (a nivel elemental), y surge por la necesidad de resolver determinadas ecuaciones, pues, en el conjunto de los números reales nos encontramos con que ecuaciones como $x^2+1=0$ no tienen solución.

La solución se encuentra al ampliar el conjunto de los números reales, de manera que esta y otras ecuaciones tengan solución. La principal propiedad es que todo polinomio no constante en una variable con coeficientes en C tiene al menos una raíz en C, y por tanto descompone. **Cardano** fue el primero en manipular $\sqrt{-1}$ como si fuera un número, y **Euler** propuso el símbolo i para denotarlo, el cual se consideraba un número ficticio o imaginario. Pero fue en el siglo XIX cuando, gracias tanto a **Gauss** como a **Hamilton**, se definió de una forma más precisa el conjunto de los números complejos como pares ordenados de números reales (a, b) = a + bi con una serie de propiedades, que pasan por la distributividad del producto respecto a la suma.

Fuente: Documento "Problemas de olimpiadas sobre números complejos" (Paola Posadas Prados)

Suma de nombres complexos.

Per a sumar dos nombres complexos $a=(a_1,a_2), b=(b_1,b_2)$ sumem component a component:

$$a+b=\left(\ a_1+b_1\ ,\ a_2+b_2\ \right)$$

La resta es realitza de manera similar: $a-b=\left(\ a_1-b_1\ ,\ a_2-b_2\ \right)$

1.2 Producte de nombres complexos.

Definim el producte de nombres complexos amb la següent fórmula:

$$a=(a_1,a_2),\, b=(b_1,b_2) \Rightarrow a\,b = (\ a_1b_1 - a_2b_2\ ,\ a_1b_2 + a_2b_1\ )$$

(però aquesta fórmula no es fa servir a la pràctica)

La immersió dels reals dintre dels complexos.

Podem considerar el conjunt de nombres reals dintre del pla complex amb la immersió:

$$x=(x,0)$$

El producte complex és compatible amb aquesta immersió, es a dir, la multiplicació complexa i la multiplicació real són la mateixa quan es treballa amb nombres reals:

$$\left.\begin{array}{l} x=(x,0) \\ y=(y,0) \end{array}\right\} \Rightarrow xy=(x,0)(y,0)=(xy-0\cdot 0, x\cdot 0+0\cdot y)=(xy,0)=xy$$

La unitat imaginària.

Definim la unitat imaginària com $i=(0,1)$. El quadrat de la unitat imaginària és -1:

$$i^2=(0,1)(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1, 0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0)=-1$$

Notació binomial dels nombres complexos.

Tot nombre complex es pot escriure de la forma $a+bi$:

Per exemple: $z=(3,4)=3(1,0)+4(0,1)=3+4i$

La primera part, sense la "i", s'anomena **part real** del nombre complex $\mathrm{Re}(z)$, i la segona part s'anomena **part imaginària** $\mathrm{Im}(z)$.

Mètode pràctic per multiplicar complexos:
La multiplicació de dos nombres complexos es fa de manera semblant a la multiplicació de polinomis: Se situen un sobre l'altre, i es multipliquen factor a factor, aplicant la propietat distributiva i tenint en compte que $i^2=-1$.
Observa detingudament el següent exemple.

Exercici resolt.

Calcula el producte $(3+4i)(2-5i)$

Solució.
El que no farem mai és "tirar de fórmula". Apliquem la propietat distributiva dues vegades i tenim en compte que $i^2=-1$:

$$(3+4i)(2-5i)=3(2-5i)+4i(2-5i)=6-15i+8i-20i^2=6-15i+8i-20(-1)=$$
$$=6-15i+8i+20=26-7i$$

1.2.1

Calcula:

a) $(6-2i)+(2+3i)$ b) $(6-2i)-(2+3i)$ c) $(3+2i)+(-4-3i)$

d) $(3-2i)-(4-3i)$ e) $3(2-i)$ f) $2i(3+4i)$

g) $(2+3i)(1+2i)$ h) $(2-3i)(5+2i)$ i) $(3-2i)(-4+i)$

j) $(2-3i)(3+2i)$ l) $(2-i)^2$ m) $(4+2i)^2$

n) $(1+i)^2(2+3i)$

1.2.2

Calcula $1+i+i^2+i^3+...+i^{2011}$

1.2.3

Quants valors diferents pot prendre $S=i^n+\dfrac{1}{i^n}$?

ASHME 1957 #42

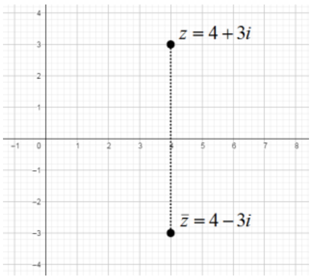
1.3 Divisió de nombres complexos.

El conjugat d'un nombre complex.

Definim el conjugat d'un nombre complex de la següent manera:

$$z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$$

Geomètricament, el conjugat d'un nombre és el seu simètric respecte de l'eix X:



Un nombre complex, multiplicat pel seu conjugat és un nombre real positiu, igual a la suma dels quadrats de les seves components: Per exemple:

$$(2+3i)(2-3i) = 2(2-3i) + 3i(2-3i) = 4 - 6i + 6i - 9i^2 = 4 - 9(-1) = 4 + 9 = 13$$

Divisió de nombres complexos.

La divisió de nombres complexos té associada la fórmula:

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{a_1 a_2 + a_2 b_2}{a^2 + b^2}, \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a^2 + b^2} \right)$$

Però aquesta fórmula no s'utilitza mai.

Mètode pràctic per dividir complexos.

Per a fer la divisió de dos nombres complexos s’han de multiplicar numerador i denominador pel conjugat del denominador. Observa els següents exemples.

Exercici resolt.

Calcula $\frac{5+4i}{3-2i}$

Solució.

$$\frac{5+4i}{3-2i} = \frac{(5+4i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = (*)$$

$$(5+4i)(3+2i) = 5(3+2i) + 4i(3+2i) = 15 + 10i + 12i + 8i^2 = 15 + 10i + 12i - 8 = 7 + 22i$$

$$(3-2i)(3+2i) = 3^2 - (2i)^2 = 9 - 4i^2 = 9 + 4 = 13$$

$$(*) = \frac{7+22i}{13} = \frac{7}{13} + \frac{22}{13}i$$

Exercici resolt.

Calcula $\frac{2+5i}{3-i}$

Solució.

Multipliquem i dividim pel conjugat del denominador:

$$\frac{2+5i}{3-i}=\frac{2+5i}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i}=(*)$$

$$(2+5i)(3+i)=2(3+i)+5i(3+i)=6+2i+15i+5i^2=6+2i+15i-5=1+17i$$

$$(3-i)(3+i)=3^2-i^2=9-(-1)=10$$

$$(*)=\frac{1+17i}{10}=\frac{1}{10}+\frac{17}{10}i$$

2 Notació polar i operacions en polars.

2.1 Mòdul d'un nombre complex.

Donat un nombre complex $z = a + bi$, definim el seu **mòdul** $|z|$, com

$$z = \sqrt{a^2 + b^2}$$

El mòdul d'un nombre complex ens indica com està de lluny de l'origen $(0,0)$.

Relació entre el mòdul i el conjugat.

$$|z|^2 = z\,\bar{z}$$

En efecte, si

$z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi \Rightarrow z\,\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - abi + abi - bi^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\,\bar{z}}$

2.1.1

Calcula el mòdul dels següents nombres complexos:

a) $9 + 9i$ b) $5 + 5i\sqrt{3}$ c) $6i$ d) $-3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}$ e) $-6\sqrt{3} + 6i$

f) -2 g) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ h) $-3 - 3i$ i) $-5i$ j) $2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$

k) 6 l) $3 + 4i$

Algunes propietats del mòdul.

a) $|z| \geq 0$, i $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

b) $|z\,w| = |z||w|$

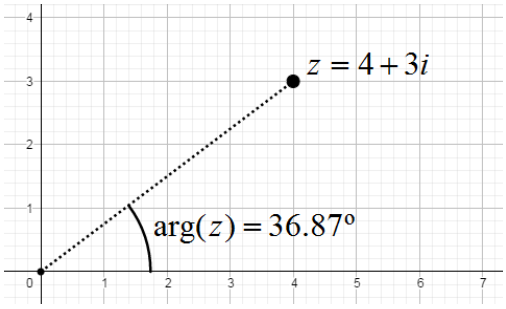
c) $|z^n| = |z|^n$

d) $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$

e) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (desigualtat triangular)

2.2 Argument d'un nombre complex.

Tot nombre complex $z \neq 0$ té associat un nombre $0 \leq \arg(z) < 360^o$, anomenat **argument** de z, que indica l'angle que determina aquest nombre respecte l'eix real.



L'argument d'un nombre complex $z = a + bi$ es troba resolent l'equació

$$\tan(\alpha) = \frac{b}{a}$$

tenint en compte el quadrant en el què està z

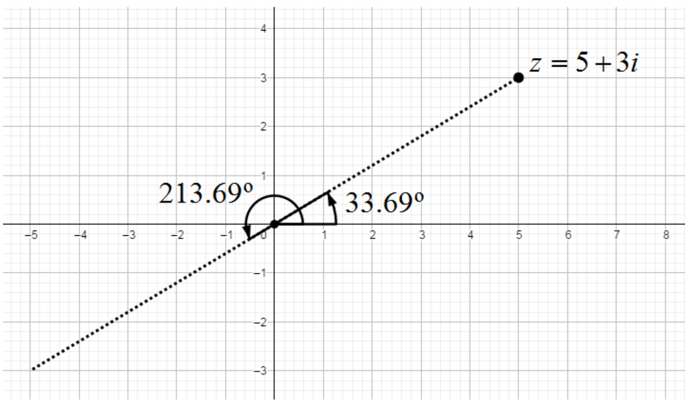
Exercici resolt.

Calcula l'argument del nombre complex $5+3i$

Solució.

$$z = 5+3i \Rightarrow \text{ equació: } \tan(\alpha) = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha = \begin{cases} 33.69^o \\ 180^o + 33.69^o = 213.69^o \end{cases}$$

I d'aquestes dues possibilitats ens quedem amb la primera perquè $5+3i$ està situat al primer quadrant, i l'angle 213.69º correspon a un punt situat al tercer quadrant.
$\arg(z) = 33.69^o$



Exercici resolt.

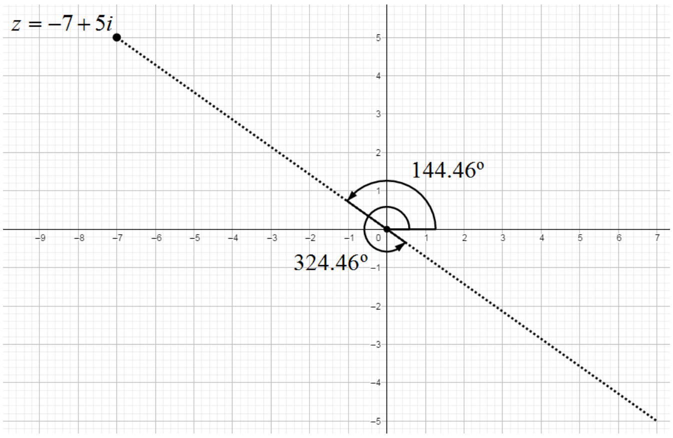
Calcula l'argument del nombre complex $-7+5i$

Solució.

$$z=-7+5i \Rightarrow \text{ equació: } \tan(\alpha)=\frac{5}{-7} \Rightarrow \alpha=\begin{cases} -35.54^{o}=360^{o}-35.54^{o}=324.46^{o} \\ 180^{o}+(-35.54^{o})=144.46^{o} \end{cases}$$

I d'aquestes dues possibilitats ens quedem amb la segona perquè $-7+5i$ està situat al segon quadrant, i l'angle 324.46º correspon a un punt situat al quart quadrant.

$\arg(z)=144.46^{o}$



2.2.1

Calcula l'argument dels següents nombres complexos:

a) $9+9i$ b) $5+5i\sqrt{3}$ c) $6i$ d) $-3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}$ e) $-6\sqrt{3}+6i$

f) -2 g) $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ h) $-3-3i$ i) $-5i$ j) $2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}$

k) 6 l) $3+4i$

2.2.2

Determina el mòdul i l'argument dels següents nombres complexos:

a) $2+2i$ b) 3 c) $10-10i$ d) $-\sqrt{5}i$

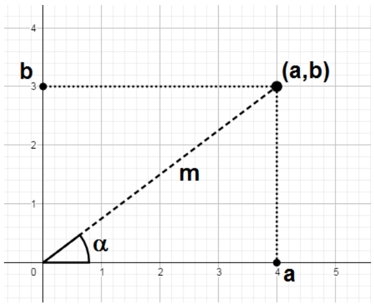
e) $-1+i$ f) $-\pi$ g) $\frac{-1}{2}-\frac{1}{2}i$ h) $6i$

i) $3-3i$ j) $4i$ k) -2

2.3 Notació polar de nombres complexos.

Tot nombre complex $a+bi$ diferent de zero queda determinat pel seu mòdul m i el seu argument α. És el que s'anomena **notació polar** d'un nombre complex.

$$a+bi=m(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$



De binomial a polar:

$$m=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\tan\alpha=\frac{a}{b}$$

De polar a binomial:

$$a=m\cos\alpha$$

$$b=m\sin\alpha$$

Exercici resolt.

Expressa en forma polar el nombre complex $z=1-\sqrt{3}i$

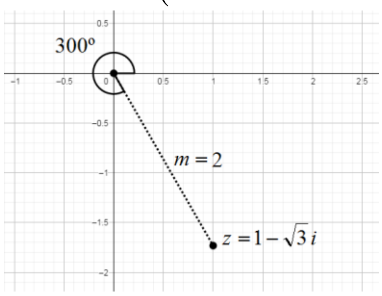
Solució.

$$m=\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$

$$\tan\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\arctan\left(-\sqrt{3}\right)=-60^\circ=300^\circ\\180+(-60^\circ)=120^\circ\end{cases}$$

La part real de $z=1-\sqrt{3}i$ és positiva, i la part imaginària és negativa, per tant està situat al quart quadrant, i per tant, el valor correcte és el primer: $\alpha=-60^\circ=300^\circ$

$$z=1-\sqrt{3}i=2(\cos 300^\circ+i\sin 300^\circ)$$



2.3.1

Escriu els següents nombres en forma polar:

a) $1+i$ b) $-\sqrt{3}+i$ c) $\sqrt{3}+3i$ d) $3+2i$

e) $8-6i$ f) $-15-8i$

2.3.2

Escriu els següents nombres en forma binomial:

a) $\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ$ b) $3\sqrt{2}(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ)$ c) $5(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ)$

d) $4\sqrt{3}(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)$ e) $12(\cos 210^\circ + i\sin 210^\circ)$

2.3.3

Expressa els següents nombres complexos en forma trigonomètrica.

a) $3+3i$ b) $1+\sqrt{3}i$ c) $-2\sqrt{3}-2i$ d) $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

e) -8 f) $-2i$ g) $-12+5i$ h) $-4-3i$

2.4 Multiplicació de complexos en polars.

$$\left.\begin{array}{l} a = r(\cos\alpha + \sin\alpha i) \\ b = s(\cos\beta + \sin\beta i) \end{array}\right\} \Rightarrow ab = rs(\cos(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+\beta) i)$$

Per multiplicar en polars multipliquem els mòduls i sumem els arguments.

Demostració.

$$\left.\begin{array}{l} a = r_\alpha = r(\cos\alpha + \sin\alpha i) \\ b = s_\beta = s(\cos\beta + \sin\beta i) \end{array}\right\} \Rightarrow ab = r(\cos\alpha + \sin\alpha i)s(\cos\beta + \sin\beta i) =$$

$$= rs(\cos\alpha + \sin\alpha i)(\cos\beta + \sin\beta i) = (*)$$

$$\begin{aligned} &(\cos\alpha + \sin\alpha i)(\cos\beta + \sin\beta i) = \cos\alpha(\cos\beta + \sin\beta i) + \sin\alpha i(\cos\beta + \sin\beta i) = \\ &= \cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta i + \sin\alpha i\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta(i^2) = \\ &= \cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta i + \sin\alpha i\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + (\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) i = \\ &= \cos(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+\beta) i \end{aligned}$$

$$(*) = rs(\cos(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+\beta) i) = (rs)_{\alpha+\beta}$$

Per tant, el resultat de multiplicar dos nombres complexos és un altre nombre complex, el mòdul del qual és el producte de mòduls i l'argument és la suma d'arguments.

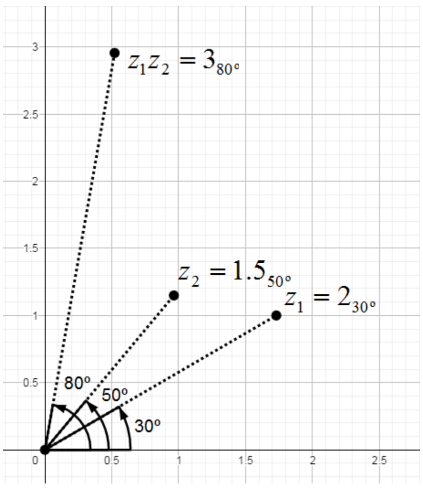
Exercici resolt.

Calcula el producte de $z_1 = 2(\cos 30^o + i\sin 30^o)$ i $z_2 = 1.5(\cos 50^o + i\sin 50^o)$

Solució:

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = 2(\cos 30^o + i\sin 30^o) \\ z_2 = 1.5(\cos 50^o + i\sin 50^o) \end{array}\right\} \Rightarrow z_1 z_2 = (2\cdot 1.5)(\cos(30^o+50^o) + i\sin(30^o+50^o)) =$$

$$= 3(\cos 80^o + i\sin 80^o)$$



Exercici resolt.

Calcula el producte de $3(\cos 45º + i\sin 45º)$ i $2(\cos 135º + i\sin 135º)$

Solució:

$$3(\cos 45º + i\sin 45º)\cdot 2(\cos 135º + i\sin 135º) = 6(\cos 180º + i\sin 180º) =$$
$$= 6(-1 + i\cdot 1) = -6$$

2.5 Divisió de complexos en polars.

$$\left.\begin{array}{l} a = r(\cos\alpha + \sin\alpha i) \\ b = s(\cos\beta + \sin\beta i) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{b} = \left(\frac{r}{s}\right)(\cos(\alpha-\beta) + \sin(\alpha-\beta)i)$$

Per dividir en polars dividim els mòduls i restem els arguments.

Exercici resolt.

Calcula la divisió $\frac{10_{-60^{\circ}}}{5_{150^{\circ}}}$. Expressa el resultat en forma binomial

Solució:

$$\frac{10_{-60^{\circ}}}{5_{150^{\circ}}} = \left(\frac{10}{5}\right)_{-60-150} = 2_{-210^{\circ}} = 2_{150^{\circ}}$$

$$2_{150^{\circ}} \Rightarrow \begin{cases} a = 2\cos 150^{\circ} = -\sqrt{3} \\ b = 2\sin 150^{\circ} = 1 \end{cases} \Rightarrow 2_{150^{\circ}} = -\sqrt{3} + 1i = -\sqrt{3} + i$$

Exercici resolt.

Calcula la divisió de $z = -10 - 10i$ entre $w = -2 + 2i$ passant els nombres a forma polar, i presenta el resultat en forma binomial.

Solució:

Passem els dos nombres a forma polar:

$$z = -10 - 10i \Rightarrow \begin{cases} m = \sqrt{(-10)^2 + (-10)^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \\ \tan\alpha = \dfrac{-10}{-10} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 45^{\circ} \ \ \textit{quadrant I} \\ \alpha = 225^{\circ} \ \textit{quadrant III} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow z = \left(10\sqrt{2}\right)_{225^{\circ}}$$

$$w = -2 + 2i \Rightarrow \begin{cases} m = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ \tan\alpha = \dfrac{2}{-2} = -1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 135^{\circ} \ \ \textit{quadrant II} \\ \alpha = 315^{\circ} \ \textit{quadrant IV} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow z = \left(2\sqrt{2}\right)_{135^{\circ}}$$

Fem la divisió en polars:

$$\frac{z}{w} = \frac{\left(10\sqrt{2}\right)_{225^{\circ}}}{\left(2\sqrt{2}\right)_{135^{\circ}}} = \left(\frac{10\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)_{225^{\circ}-135^{\circ}} = 5_{90^{\circ}}$$

Convertim el resultat a forma binomial:

$$5_{90^{\circ}} \Rightarrow \begin{cases} a = 5\cos 90 = 0 \\ b = 5\sin 90 = 1 \end{cases} \Rightarrow 5_{90^{\circ}} = 0 + 5i = 5i$$

2.6 Potències de complexos. La fórmula de Moire.

Fórmula de Moire.

$$a = r(\cos\alpha + \sin\alpha i) \Rightarrow a^n = (r^n)(\cos(n\alpha) + \sin(n\alpha) i)$$

Per elevar en polars elevem el mòdul i multipliquem l' argument.

Demostració. Només cal aplicar la fórmula del producte:

$$z = r(\cos\alpha + \sin\alpha i) \Rightarrow z^2 = z\,z = (r\,r)(\cos(\alpha+\alpha) + \sin(\alpha+\alpha) i) = r^2(\cos(2\alpha) + \sin(2\alpha) i)$$

$$z^3 = z\,z^2 = (r\,r^2)(\cos(\alpha+2\alpha) + \sin(\alpha+2\alpha) i) = r^3(\cos(3\alpha) + \sin(3\alpha) i),$$

i així successivament.

Exercici resolt.

Calcula $(1+\sqrt{3}i)^8$ i expressa el resultat en forma binòmica.

Solució:

En primer lloc passem el nombre a forma polar:

$$m = \sqrt{1+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \quad , \qquad \tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \begin{cases} \arctan(\sqrt{3}) = 60^o \\ 180 + 60^o = 240^o \end{cases}$$

El nombre $1+\sqrt{3}i$ està al primer quadrant, per tant l'angle correcte és $\alpha = 60^o$.

$$z = (1+\sqrt{3}i)^8 = (2(\cos 60^o + \sin 60^o))^8 = (2^8)(\cos 8\cdot 60^o + \sin 8\cdot 60^o) =$$

$$= 256(\cos 480^o + \sin 480^o) = 256(\cos 120^o + \sin 120^o)$$

Passem el resultat a forma binomial:

$$256(\cos 120^o + \sin 120^o) \Rightarrow \begin{cases} a = 256\cos 120^o = -128 \\ b = 256\sin 120^o = 128\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow -128 + 128\sqrt{3}i$$

Exercici resolt.

Calcula $(\sqrt{3}+3i)^3$ amb la fórmula de Moire

Solució:

$$\sqrt{3}+3i \Rightarrow \begin{cases} m = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ \tan\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 60^o \textit{ Quadrant I} \\ \alpha = 240^o \textit{ Quadrant III} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3}+3i = (2\sqrt{3})(\cos 60^o + i\sin 60^o)$$

$$(2\sqrt{3}(\cos 60^o + i\sin 60^o))^3 = (2\sqrt{3})^3(\cos 3\cdot 60^o + i\sin 3\cdot 60^o) = (24\sqrt{3})(\cos 180^o + i\sin 180^o)$$

Passem el resultat a forma binomial:

$$(24\sqrt{3})(\cos 180^o + i\sin 180^o) \Rightarrow \begin{cases} a = 24\sqrt{3}\cos 180 = -24\sqrt{3} \\ b = 24\sqrt{3}\sin 180 = 0 \end{cases} \Rightarrow -24\sqrt{3} + 0i = -24\sqrt{3}$$

2.6.1

Calcula les següents potències, i presenta el resultat en forma binòmica.

a) $(1+i)^3$ b) $(1+i)^6$ c) $\left(\sqrt{3}+i\right)^4$ d) $(1-i)^4$ e) $(1+i)^{20}$

2.7 Propietats del mòdul, argument i conjugat.

Propietats de l'argument d'un complex.

a) $\arg(z\,w) = \arg(z) + \arg(w)$

b) $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$

c) $\arg\left(\dfrac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$

Propietats del conjugat.

a) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

b) $\overline{z\,w} = \bar{z}\;\bar{w}$

c) $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}$

d) $\overline{(\bar{z})} = z$

e) $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

f) $\bar{z} = z$ si i només si z és real, és a dir: $\operatorname{Im} z = 0$

g) $\bar{z} = -z$ si i només si z és imaginari pur, és a dir: $\operatorname{Re} z = 0$

h) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$

i) $z - \bar{z} = i(2\operatorname{Im} z)$

j) $z\,\bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$

Propietats del mòdul.

a) $|z| \geq 0$, i $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

b) $|z\,w| = |z||w|$

c) $|z^n| = |z|^n$

d) $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$

e) $|z+w| \leq |z| + |w|$ (desigualtat triangular)

f) $|z|^2 = z\,\bar{z}$

Exercici resolt.

Determina l'argument de $z = \dfrac{-2}{1+\sqrt{3}i}$ aplicant les propietats, sense fer l'operació.

Solució:

$\arg(z) = \arg(-2) - \arg\left(1+\sqrt{3}i\right)$, $\arg(-2) = 180^{\circ}$

Per trobar l'argument de $\arg\left(1+\sqrt{3}i\right)$ resolem l'equació

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \alpha = \begin{cases} 60^{\circ} \\ 180^{\circ}+60^{\circ} = 240^{\circ} \end{cases}$$

i ens quedem amb el resultat 60° perquè $1+\sqrt{3}i$ està al primer quadrant.

Per tant, $\arg\left(1+\sqrt{3}i\right) = 60^{\circ}$, i finalment, $\arg(z) = 180^{\circ} - 60^{\circ} = 120^{\circ}$

2.7.1

Determina l'argument dels complexos següents: a) $z = \dfrac{i}{-2-2i}$ b) $\left(\sqrt{3}-i\right)^6$

2.7.2

Aplicant les propietats de la conjugació, demostra les següents igualtats:

a) $\overline{\bar{z}+3i} = z-3i$

b) $\overline{i\,z} = -i\,\bar{z}$

c) $\overline{(2+i)^2} = 3-4i$

d) $\left|(2\bar{z}+5)(\sqrt{2}-i)\right| = \sqrt{3}\left|2z+5\right|$

Proposición.

Si $f(z)$ es un polinomio de coeficientes reales:

$$f(z)=0 \Rightarrow f(\bar{z})=0$$

Así pues, las raíces de los polinomios con coeficientes reales vienen en pares conjugados (teniendo en cuenta que el conjugado de una raíz real es ella misma).

Demostración.

Sea $f(z)=a_0+a_1z+...+a_nz^n$, con $a_i \in IR$. Puesto que la conjugación se mantiene por suma y producto, y el conjugado de un número real es él mismo,

$f(\bar{z}) = a_0+a_1\bar{z}+...+a_n\bar{z}^n = a_0+a_1\bar{z}+...+a_n\overline{z^n} =$

$\overline{a_0}+\overline{a_1z}+...+\overline{a_nz^n} = \overline{a_0+a_1z+...+a_nz^n} = \overline{0} = 0$

Exercici.

Demostra que $3+2i$ i $3-2i$ són arrels de $x^2-6x+13=0$

2.8 Repàs d'operacions amb polars.

2.8.1

Donats $z = 2\sqrt{3} + 2i$ i $w = -1 + i\sqrt{3}$, calcula, passant a forma polar:

a) $z\,w$, b) w^5 c) $\dfrac{z}{w}$

2.8.2

Calcula:

a) $(3-4i)+(-5+7i)$ b) $(4+2i)-(-1+3i)$ c) $(2+i)(3-2i)$

d) $(3+4i)(3-4i)$ e) $\dfrac{1+3i}{2+i}$ f) $\dfrac{3-2i}{2-3i}$

2.8.3

Calcula:

a) $(6-2i)+(2+3i)$ b) $(6-2i)-(2+3i)$ c) $(3+2i)+(-4-3i)$

d) $(3-2i)-(4-3i)$ e) $3(2-i)$ f) $2i(3+4i)$

g) $(2+3i)(3+2i)$ h) $(2-3i)(5+2i)$ i) $(3-2i)(-4+i)$

j) $(2-i)^2$ k) $(4+2i)^2$ l) $(1+i)^2(2+3i)$

m) $\dfrac{2+3i}{1+i}$ n) $\dfrac{3-2i}{3-4i}$ o) $\dfrac{3-2i}{2+3i}$

3 Arrels de nombres complexos.

3.1 Les arrels n-èsimes de nombres complexos.

Direm que y és una **arrel n-èsima** de z si $y^n = z$.

Tot nombre complex $z = m(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ té exactament n arrels n-èsimes.
Són els nombres complexos que es poden escriure de la forma $\left(\sqrt[n]{m}\right)(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$

$$\text{on} \quad \theta_k = \frac{\alpha + 360k}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{360k}{n} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Exercici resolt.

Determina les arrels quartes del nombre $-8 + 8\sqrt{3}i$

Solució:
Passem el nombre a forma polar: $-8 + 8\sqrt{3}i = 16_{120º}$
Les arrels quartes són $y_k = \left(\sqrt[4]{16}\right)_{\theta_k} = 2_{\theta_k}$

$$\theta_k = \frac{120º + 360º\,k}{4} = \frac{120º}{4} + \frac{360º\,k}{4} = 30º + 90º\,k \qquad \leftarrow \text{Simplifica aquí}$$

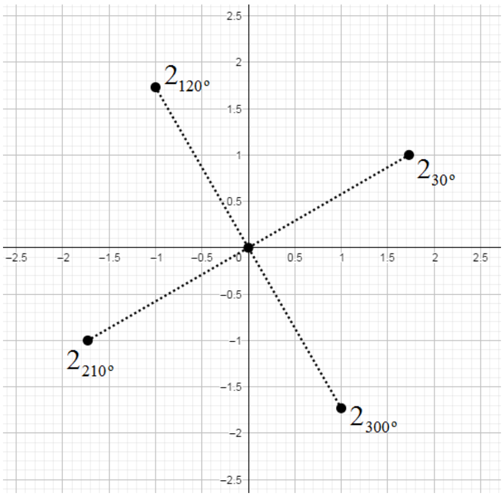
$$\theta_1 = 30º + 90º \cdot 0 = 30º \Rightarrow 2_{30º}$$

$$\theta_2 = 30º + 90º \cdot 1 = 30º + 90º = 120º \Rightarrow 2_{120º}$$

$$\theta_3 = 30º + 90º \cdot 2 = 30º + 180º = 210º \Rightarrow 2_{210º}$$

$$\theta_4 = 30º + 90º \cdot 3 = 30º + 270º = 300º \Rightarrow 2_{300º}$$

Les arrels quartes de $-8 + 8\sqrt{3}i$ són: $\{2_{30º}, 2_{120º}, 2_{210º}, 2_{300º}\}$



Exercici resolt.

Determina les arrels cúbiques de $2-2i$

Solució:

Passem el nombre a forma polar: $2-2i=\left(2\sqrt{2}\right)_{315^{o}}$

Per tant, les arrels cúbiques són $\left(\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\right)_{\theta_k}$, on $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\sqrt{2^2 2}}=\sqrt[3]{\sqrt{2^3}}=\sqrt{\sqrt[3]{2^3}}=\sqrt{2}$

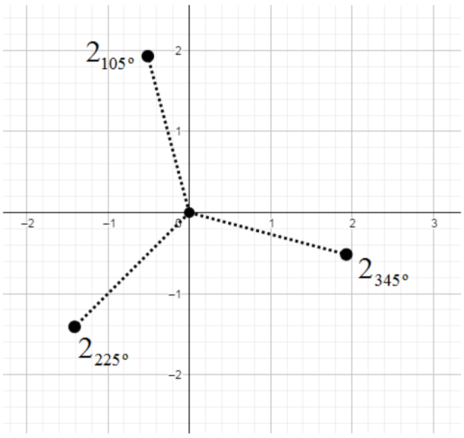
$\theta_k=\dfrac{315^{o}+360^{o}k}{3}=\dfrac{315^{o}}{3}+\dfrac{360^{o}k}{3}=105^{o}+120^{o}k$

$\theta_1=105^{o}+120^{o}\cdot 0=105^{o}\Rightarrow 2_{105^{o}}$

$\theta_2=105^{o}+120^{o}\cdot 1=225^{o}\Rightarrow 2_{225^{o}}$

$\theta_3=105^{o}+120^{o}\cdot 2=345^{o}\Rightarrow 2_{345^{o}}$

Les arrels cúbiques de $2-2i$ són: $\left\{2_{105^{o}}\,,\,2_{225^{o}}\,,\,2_{345^{o}}\right\}$



3.1.1

Determina les arrels de grau cinc de $4-4i$

3.1.2

Determina les tres arrels cúbiques de i

3.1.3 Problema.

Si les sis solucions de $x^6=-64$ s'escriuen de la forma $a+bi$, amb a,b reals, llavors el producte de les seves solucions amb $a>0$ és:

(A) -2 (B) 0 (C) $2i$ (D) 4 (E) 16

AHSME 1990 #22

Solució: PC/#1.15

És problemàtic parlar d'arrels numèriques de nombres complexos, cosa que sí funcionava bé amb nombres reals.
Per exemple, vam definir $\sqrt{4}$ com l'element positiu del conjunt $\{x^2 = 4\}$, però ara, amb complexos, no té sentit parlar de "positius".
Les típiques identitats associades a les arrels dels nombres reals no funcionen amb nombres complexos, com podem veure en aquest exemple:

"*Demostració*" de que $-1=1$:

$$i = i$$

$$\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$$

$$\sqrt{\frac{-1}{1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}}$$

$$\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$$

$$\sqrt{-1}\,\sqrt{-1} = \sqrt{1}\,\sqrt{1}$$

$$-1 = 1$$

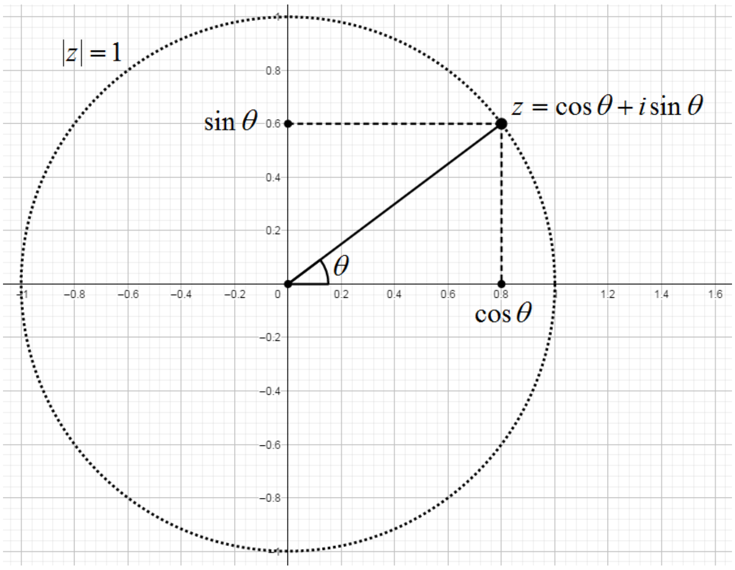
On està el pas erroni?

3.2 La circumferència unitat. La notació exponencial.

Definició. La circumferència unitat. La notació exponencial.

La circumferència unitat la formen els nombres complexos z tals que $|z| = 1$, és a dir, aquells que en forma polar es poden escriure com

$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$



Aquests nombres es poden escriure en "forma exponencial": $z = e^{i\theta}$.

I per tant, tot nombre, encara que estigui fora de la circumferència unitat es pot escriure "**forma exponencial**":

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,e^{i\theta}$$

Proposició.

Si z pertany a la circumferència unitat, $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$

Només cal aplicar la propietat $z\,\bar{z} = |z|^2 = 1^2 = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{z} = z$

3.3 Les arrels n-èsimes de la unitat.

El nombre 1, com qualsevol altre nombre complex, té n arrels n-èsimes diferents, que s'anomenen **les arrels n-èsimes de la unitat**.

Exemple resolt.

Demostra que $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ és una arrel cúbica de la unitat.

Solució:

Es tracta de comprovar que $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3 = 1$

$$1=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3 = \frac{\left(-1+\sqrt{3}i\right)^3}{2^3} = \frac{\left(-1+\sqrt{3}i\right)^3}{8} \Leftrightarrow \left(-1+\sqrt{3}i\right)^3 = 8$$

$$\left(-1+\sqrt{3}i\right)^2 = \left(-1+\sqrt{3}i\right)\left(-1+\sqrt{3}i\right) = 1-\sqrt{3}i-\sqrt{3}i-3 = -2-2\sqrt{3}i$$

$$\left(-1+\sqrt{3}i\right)^3 = \left(-2-2\sqrt{3}i\right)\left(-1+\sqrt{3}i\right) = 2+2\sqrt{3}i-2\sqrt{3}i+2\cdot 3 = 8$$

Les arrels n-èsimes de la unitat es distribueixen uniformement a la circumferència unitat, formant polígons regulars:

a) Arrels quadrades de la unitat: $\theta_k = \dfrac{360k}{2} = 180k \quad k=0,1 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \sin 0^\circ + i\cos 0^\circ = 1 \\ z_2 = \sin 180^\circ + i\cos 180^\circ = -1 \end{cases}$

b) Arrels cúbiques de la unitat: $\theta_k = \dfrac{360k}{3} = 120k \quad k=0,1,2 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \sin 0^\circ + i\cos 0^\circ = 1 \\ z_2 = \sin 120^\circ + i\cos 120^\circ \\ z_3 = \sin 240^\circ + i\cos 240^\circ \end{cases}$

c) Arrels quartes de la unitat: $\theta_k = \dfrac{360k}{4} = 90k \quad k=0,1,2,4 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \sin 0^\circ + i\cos 0^\circ = 1 \\ z_2 = \sin 90^\circ + i\cos 90^\circ = i \\ z_3 = \sin 180^\circ + i\cos 180^\circ = -1 \\ z_4 = \sin 270^\circ + i\cos 270^\circ = -i \end{cases}$

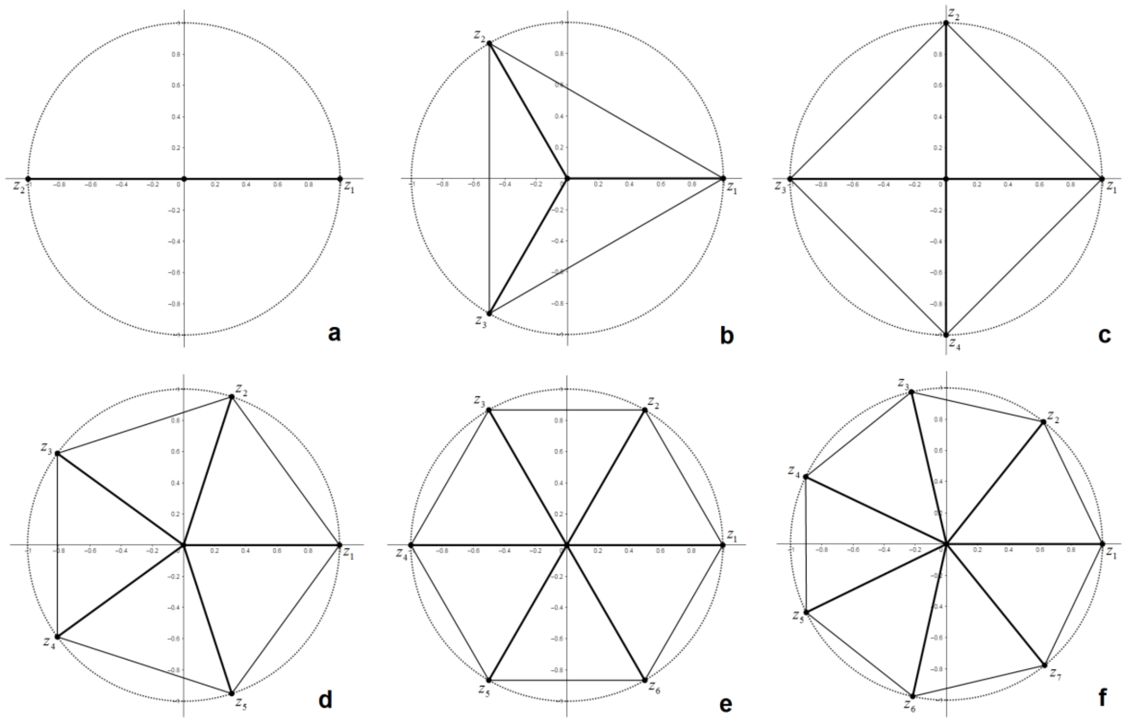
d) Arrels quintes de la unitat: $\theta_k = \dfrac{360k}{5} = 72k \quad k=0,1,2,4,5 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \sin 0^\circ + i\cos 0^\circ = 1 \\ z_2 = \sin 72^\circ + i\cos 72^\circ \\ z_3 = \sin 144^\circ + i\cos 144^\circ \\ z_4 = \sin 216^\circ + i\cos 216^\circ \\ z_5 = \sin 288^\circ + i\cos 288^\circ \end{cases}$

e) Arrels sextes de la unitat:

$$\theta_k = \frac{360k}{6} = 60k \quad k = 0,1,2,4,5,6 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \sin 0^{\circ} + i\cos 0^{\circ} = 1 \\ z_2 = \sin 60^{\circ} + i\cos 60^{\circ} \\ z_3 = \sin 120^{\circ} + i\cos 120^{\circ} \\ z_4 = \sin 180^{\circ} + i\cos 180^{\circ} = -1 \\ z_5 = \sin 240^{\circ} + i\cos 240^{\circ} \\ z_6 = \sin 300^{\circ} + i\cos 300^{\circ} \end{cases}$$

f) Arrels sèptimes de la unitat:

$$\theta_k = \frac{360k}{7} \cong 51.43k \quad k = 0,1,2,4,5,6,7 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \sin 0^{\circ} + i\cos 0^{\circ} = 1 \\ z_2 = \sin 51.42^{\circ} + i\cos 51.42^{\circ} \\ z_3 = \sin 102.86^{\circ} + i\cos 102.86^{\circ} \\ z_4 = \sin 154.29^{\circ} + i\cos 154.29^{\circ} \\ z_5 = \sin 205.71^{\circ} + i\cos 205.71^{\circ} \\ z_6 = \sin 257.14^{\circ} + i\cos 257.14^{\circ} \\ z_7 = \sin 308.57^{\circ} + i\cos 308.57^{\circ} \end{cases}$$



L'arrel n-èsima primitiva.

El complex $w = e^{2\pi i/n}$, s'anomena **arrel n-èsima primitiva**, i la resta de arrels n-èsimes són potències seves:

$$\{w, w^2, w^3, ..., w^{n-1}\}.$$

Proposició.

Si $w \neq 1$ llavors $1 + w + w^2 + w^3 + ... + w^{n-1} = 0$

Demostració.

Apliquem la fórmula de la sèrie geomètrica:

$$1 + w + w^2 + w^3 + ... + w^{n-1} = \frac{w^n - 1}{w - 1} = \frac{1 - 1}{w - 1} = 0$$

Solucions.

1.2.1 a) $8+i$ b) $4-5i$ c) $-1-i$ d) $-1-i$ e) $6-3i$ f) $-8+6i$ g) $-4+7i$ h) $16-11i$ i) $-10+11i$ j) $12-5i$ l) $3-4i$ m) $12+16i$ n) $-6+4i$

1.2.2 0

1.2.3 $n=0 \rightarrow S = i^0 + \frac{1}{i^0} = 1 + \frac{1}{1} = 2$

$n=1 \rightarrow S = i + \frac{1}{i} = i + (-i) = 0$

$n=2 \rightarrow S = i^2 + \frac{1}{i^2} = -1 + \frac{1}{-1} = -2$

$n=3 \rightarrow S = -i + \frac{1}{-i} = -\left(i + \frac{1}{i}\right) = -(i + (-i)) = 0$

Per a $n \geq 4$ es van repetint aquest valors, per tant, $S = \{0, 2, -2\}$

2.1.1 a) $9\sqrt{2}$ b) 10 c) 6 d) 6 e) 12 f) 2 g) 1 h) $3\sqrt{2}$ i) 5 j) 4 k) 6 l) 5

2.2.1 a) 45º b) 60º c) 90º d) 135º e) 150º f) 180º g) -150º h) 130º i) 270º j) 315º k) 0º l) ≈ 53.13º

2.2.2 a) $m = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 45º$ b) $m = 3$, $\alpha = 0º$ c) $m = 10\sqrt{2}$, $\alpha = 315º$ d) $m = \sqrt{5}$, $\alpha = 180º$ e) $m = \sqrt{2}$, $\alpha = 135º$ f) $m = \pi$, $\alpha = 180º$ g) $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha = 225º$ h) $m = 6$, $\alpha = 90º$ i) $m = 3\sqrt{2}$, $\alpha = 315º$ j) $m = 4$, $\alpha = 90º$ k) $m = 2$, $\alpha = 180º$

2.3.1 a) $\sqrt{2}(\cos 45º + i\sin 45º)$ b) $2(\cos 150º + i\sin 150º)$ c) $2\sqrt{3}(\cos 30º + i\sin 30º)$ d) $\sqrt{13}(\cos 33.69º + i\sin 33.69º)$ e) $10(\cos 323.13º + i\sin 323.13º)$ f) $17(\cos 208.07º + i\sin 208.07º)$

2.3.2 a) $-i$ b) $-3+3i$ c) -5 d) $-2\sqrt{3}+6i$ e) $-6\sqrt{3}-6i$

2.3.3 a) $3\sqrt{2}(\cos 45º + i\sin 45º)$ b) $2(\cos 60º + i\sin 60º)$ c) $4(\cos 210º + i\sin 210º)$ d) $2(\cos 315º + i\sin 315º)$ e) $8(\cos 180º + i\sin 180º)$ f) $2(\cos 270º + i\sin 270º)$ g) $\cong 13(\cos 157º23' + i\sin 157º23')$ h) $\cong 5(\cos 216º52' + i\sin 216º52')$

2.6.1 a) $-2+2i$ b) $-8i$ c) $-8+8\sqrt{3}i$ d) -4 e) -1024

2.7.1 a) 225º b) 180º

2.8.1 a) $z\,w = -4\sqrt{3}+4i$ b) $w^5 = -16-16i\sqrt{3}$ c) $z/w = -2i$

2.8.2 a) $-2+3i$ b) $5-i$ c) $8-i$ d) 25 e) $1+i$ f) $\frac{12}{13}+\frac{5}{13}i$

2.8.3 a) $8+i$ b) $4-5i$ c) $-1-i$ d) $-1+i$ e) $6-3i$ f) $-8+6i$ g) $12-5i$ h) $16-11i$ i) $-10+11i$ j) $3-4i$ k) $12+16i$ l) $-6+4i$ m) $\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i$ n) $\frac{17}{25}+\frac{6}{25}i$ o) $-i$

3.1.1 $\left\{\sqrt{2}_{63º}, \sqrt{2}_{135º}, \sqrt{2}_{207º}, \sqrt{2}_{279º}, \sqrt{2}_{351º}\right\}$

3.1.2 $z_0 = \cos 30º + i\sin 30º$, $z_1 = \cos 150º + i\sin 150º$, $z_2 = \cos 270º + i\sin 270º$