PAU ITALIA

Matematica Maturità 2024

Gerard Romo Garrido

Toomates Coolección vol. 34

Toomates

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "**licencias digitales**" con las que las editoriales pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo libro, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.
Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de licencias digitales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía**.
El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las editoriales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de unos libros de texto que actualmente son muy mediocres, y no mediante retorcidas técnicas comerciales.
 Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas. **¡Libérate de la tiranía y mediocridad de las editoriales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos**

Problem Solving (en español):
Geometría Axiomática Problemas de Geometría 1 Problemas de Geometría 2 Introducción a la Geometría
Álgebra Teoría de números Combinatoria Probabilidad Trigonometría Desigualdades
Números complejos Funciones

Libros de texto (en catalán):
Nombres (Preàlgebra) Àlgebra Proporcionalitat Mesures geomètriques Geometria analítica
Combinatòria i Probabilitat Estadística Trigonometria Funcions Nombres Complexos
Àlgebra Lineal Geometria Lineal Càlcul Infinitesimal Programació Lineal Mates amb Excel

PAU españolas:
Cataluña TEC Cataluña CCSS Valencia Galicia País Vasco Baleares

PAU internacionales:
Portugal Italia Francia Pearson Edexcel International A Level Cambridge International A Level
International Baccalaureate (IB)

Pruebas de acceso:
ACM4 CFGS PAP

Competiciones matemáticas:
Canguro: España Cataluña Francia USA Reino Unido Austria
USA: Mathcounts AMC 8 10 12 AIME USAJMO USAMO TSTST TST ELMO Putnam
España: OME OMEFL OMEC OMEA OMEM CDP
Europa: OMI Arquimede HMMT BMO Balkan MO JBMO
Internacional: IMO IGO SMT INMO CMO HMMT
AHSME: Book 1 Book 2 Book 3 Book 4 Book 5 Book 6 Book 7 Book 8 Book 9

Otros materiales:
Pizzazz!: Book A Book B Book C Book D Book E Pre-Algebra Algebra , REOIM

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales para facilitar su edición. Descarga en los siguientes enlaces la versión "**.doc**" de este documento:
http://www.toomates.net/biblioteca/Italia2024.doc

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a **toomates@gmail.com**
¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.

Consulta el **catálogo de libros** completo en **http://www.toomates.net**
Descarga toda la biblioteca Toomates en un solo archivo **Aquí** MEGA
Visita mi **Canal de Youtube**: **https://www.youtube.com/c/GerardRomo**
Visita mi **blog:** **https://toomatesbloc.blogspot.com/**

Versión de este documento: **30/08/2024**

Este documento forma parte del siguiente bloque:

Información general:

http://www.toomates.net/biblioteca/Italia.pdf

Enunciados y soluciones en español del 2023:

http://www.toomates.net/biblioteca/Italia2023.pdf

Enunciados y soluciones en español del 2024:

http://www.toomates.net/biblioteca/Italia2024.pdf

Compendium de pruebas:

http://www.toomates.net/biblioteca/Italia2.pdf

Sobre la prueba PAU de Italia:
https://youtu.be/XGc80Tz_dd0

Compendiums de pruebas PAU internacionales y privadas:

Portugal: http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal.pdf
Italia: http://www.toomates.net/biblioteca/Italia.pdf
Francia: http://www.toomates.net/biblioteca/Francia.pdf
Pearson Edexcel International A Level: http://www.toomates.net/biblioteca/Edexcel.pdf
Cambridge International A Level: http://www.toomates.net/biblioteca/Cambridge.pdf
International Baccalaureate (IB): http://www.toomates.net/biblioteca/IB.pdf

Compendiums de pruebas PAU españolas:

Cataluña (TEC): http://www.toomates.net/biblioteca/Pautec.pdf
Cataluña (CCSS): http://www.toomates.net/biblioteca/Pauccss.pdf
Valencia: http://www.toomates.net/biblioteca/Valencia.pdf
Galicia: http://www.toomates.net/biblioteca/Galiciapau.pdf
País Vasco: http://www.toomates.net/biblioteca/Paisvascopau.pdf
Baleares: http://www.toomates.net/biblioteca/Balears.pdf

Matematica Maturità 2024

Traducción y soluciones por Gerard Romo Garrido

El estudiante debe resolver 1 de los 2 problemas y 4 de las 8 preguntas.

Problema 1.

Consideremos la función $f_{a,b}(x)=\dfrac{a\,x^3+b}{x^2}$, con $a,b\in IR$.

a) Determina los valores de los parámetros de forma que la recta t, de ecuación $7x+y-12=0$, sea tangente a la gráfica de $f_{a,b}(x)$ en el punto P de abscisa $x=1$.

Supongamos a partir de ahora que $a=1$ y $b=4$.

b) Estudia la función $f(x)=\dfrac{x^3+4}{x^2}$ y representa su gráfica γ. Determina la ecuación de la recta tangente a la curva γ y que pasa por el punto P.

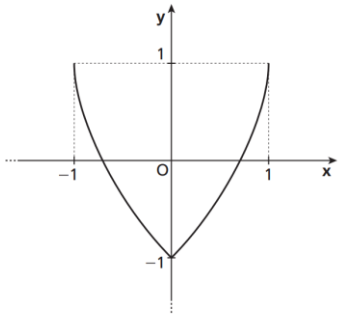
c) Al variar el parámetro real m, determina el número de puntos de intersección entre la recta de ecuación $y-5=m(x-1)$ y la curva γ.

d) Sea $S(k)$, con $k>\dfrac{3}{2}$, el área de la región cerrada del plano determinada por la curva γ, su asíntota oblicua, la recta t y la recta de ecuación $x=k$. Calcula $\lim\limits_{k\to+\infty} S(k)$, y escribe una interpretación geométrica del resultado obtenido.

Problema 2.

Consideremos la familia de funciones $f_n(x)=\sqrt[n]{x^2}-\sqrt{ax^2+bx+1}$, con $n\in IN$, $n>1$, $a,b\in IR$, $a<0$.

a) Demuestra que, para cualquier valor de n, la función f_n no es derivable en el punto de abscisa $x=0$. Determina el valor de n para el cual la gráfica de f_n presenta un “punto anguloso”. Para ciertos valores de los parámetros a,b, la gráfica α que se presenta en la imagen siguiente representa la función $f_2(x)=|x|-\sqrt{ax^2+bx+1}$. Determina los parámetros a,b, considerando que f_2 está definida en $[-1,1]$, y que su gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas.



En adelante vamos a suponer $a=-1, b=0$.

b) Estudia la función $g(x)=|x|+\sqrt{1-x^2}$, verificando que no es derivable en los extremos del dominio y en el punto de abscisa $x=0$. Sea β su gráfica. Representa gráficamente $\gamma=\alpha\cup\beta$.

c) La recta r, de ecuación $x=k$, con $-1<k<1$, intersecta γ en los puntos P y Q. Demuestra que la medida del segmento PQ es máxima cuando r es el eje de simetría de γ.

d) Comprueba que la función $H(x)=\frac{1}{2}\left(\arcsin(x)+x\sqrt{1-x^2}\right)$ es una primitiva de la función $h(x)=\sqrt{1-x^2}$. Con el método que se considere más oportuno, calcula el área de la región delimitada por γ .

Preguntas.

1

Dado un triángulo ABC, rectángulo en B, demuestra que dicho triángulo es isósceles si y solo si la altura BH relativa a la hipotenusa es congruente con media hipotenusa.

2

Se lanza cinco veces una moneda trucada cuya probabilidad de obtener cara es p.
a) Determina la probabilidad de obtener cara exactamente dos veces.
b) Determina el valor de p si sabemos que la probabilidad de obtener cara exactamente 2 veces es máxima.

3

En el espacio de coordenadas cartesianas ortogonales Oxyz, sea el plano $\pi: 3x-2y+5=0$.
a) Determinar las coordenadas del punto H, proyección ortogonal de P=(4,2,1) sobre el plano π.
b) Determinar la intersección de la recta $s:\begin{cases} x-y+1=0 \\ z-2=0 \end{cases}$ con el plano π.

4

Demuestra que la ecuación $x^3+x-\cos x=0$ admite una única solución positiva.

5

Determina la función polinomial de grado cuarto $y=p(x)$ sabiendo que, en un sistema de referencia cartesiano, su gráfica cumple las siguientes condiciones:
- Es tangente al eje X en el origen.
- Pasa por el punto (1,0)
- Tiene un punto estacionario en (2,-2)

6

Consideremos la función integral $F(x)=\int_a^x \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\,dt$, con $x \geq a$, en donde a indica un parámetro real positivo. Determina el máximo valor de a para el cual $F\left(\frac{2}{\pi}\right)=-\frac{1}{2}$.

7

El próximo 5 de julio la Tierra alcanzará el afelio, el punto de su órbita más lejano al Sol, aproximadamente $1{,}52\times10^{11}$ m. Por el contrario, el perihelio es el punto más cercano al Sol, que son aproximadamente $1{,}47\times10^{11}$ m. Determina, en un sistema de referencia apropiado, la ecuación que representa la trayectoria de la Tierra alrededor del Sol.

8

Escribe Carlo Emilio Gadda en uno de sus relatos de L'adalgisa – Disegni milanesi "Las habitaciones del servicio, el baño, el pasillo y la antesala de uno de los dos baños estaban pavimentadas con baldosas rojas de pequeño formato: hexagonales [...] La apotema de aquellas baldosas medía 5,196 centímetros, mientras que el radio del círculo circunscrito alcanzaba los 60 milímetros.

Determina la relación exacta entre el radio del círculo circunscrito y la apotema (o sea, el radio del círculo inscrito) para un hexágono regular. Comprueba el resultado obtenido a la luz de las medidas indicadas por el escritor. Explica por qué, utilizando baldosas hexagonales regulares todas congruentes, es posible pavimentar un suelo. ¿Con cuales otros polígonos regulares, todos congruentes, es posible pavimentar un suelo? Razona la respuesta.

Soluciones.

Problema 1.

a)

$$7x+y-12=0 \Rightarrow y=g(x)=-7x+12 \Rightarrow \begin{cases} g(1)=-7+12=5=f_{a,b}(1) \\ g'(x)=-7 \Rightarrow g'(1)=-7=f'_{a,b}(1) \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} a\,x^3+b \to 3ax^2 \\ x^2 \to 2x \end{matrix}\right\} \Rightarrow f'_{a,b}(x)=\frac{3ax^2\cdot x^2-\left(ax^3+b\right)2x}{x^4}=\frac{3ax^4-2ax^4-2bx}{x^4}=\frac{ax^4-2bx}{x^4}=$$

$$=\frac{ax^3-2b}{x^3} \quad (x\neq 0)$$

$$-7=f'_{a,b}(1)=\frac{a\cdot 1^3-2b}{1^3}\Rightarrow -7=a-2b$$

$$5=f_{a,b}(1)=\frac{a\cdot 1^3+b}{1^2}=a+b$$

$$\left.\begin{matrix} 5=a+b \\ -7=a-2b \end{matrix}\right\} \Rightarrow a=1, b=4$$

b)

Punto de corte eje Y: $f(0)=\frac{0^3+4}{0^2}=4$

Puntos de corte eje X: $0=f(x)=\frac{x^3+4}{x^2}\Rightarrow x^3+4=0\Rightarrow x=\sqrt[3]{-4}\cong$ -1.5874

Asíntotas verticales (discontinuidades de salto infinito) en $x^2=0\Rightarrow x=0$.

Comportamiento en el infinito: Asíntota oblicua $y=x$.

Monotonía:

Suponiendo $x\neq 0$, $f'(x)=\frac{x^3-8}{x^3}=0 \Leftrightarrow x^3-8=0 \Leftrightarrow x=2$

Haciendo un estudio por intervalos de la primera derivada, llegamos a demostrar que

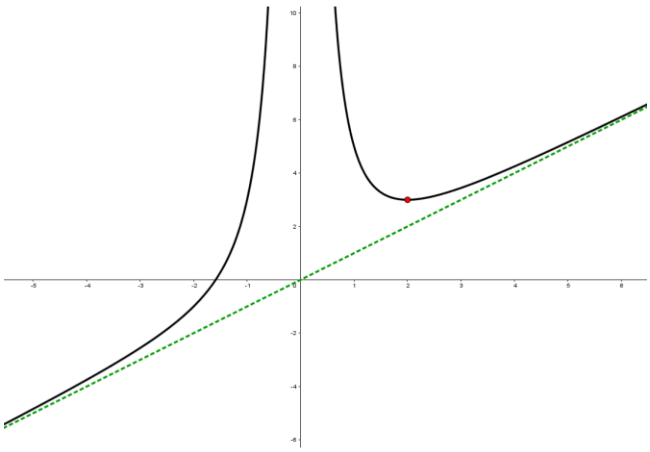
$x\in(-\infty,0)\to$ f creciente

$x\in(0,2)\to$ f decreciente

$x\in(2,+\infty)\to$ f creciente

Y por tanto la función tiene un mínimo relativo en $(2,3)$.

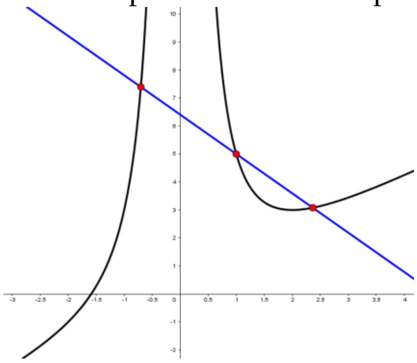
Mediante un estudio de la segunda derivada observaremos que la gráfica siempre es convexa (doblada hacia arriba).



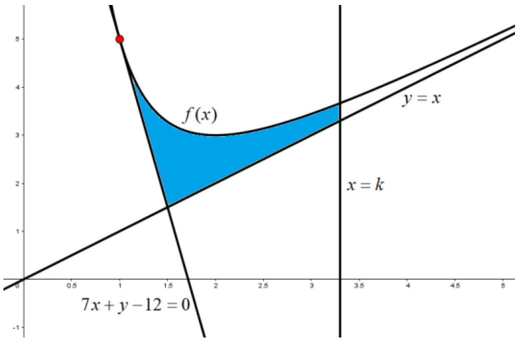
La ecuación de la recta tangente a la curva γ y que pasa por el punto P es precisamente la recta del primer apartado, $7x+y-12=0$.

c) La recta $y-5=m(x-1)$ pasa por el punto (1,5), y tiene pendiente m. Este punto pertenece a la gráfica de la función: $f(1)=\dfrac{1^3+4}{1^2}=5$, luego al menos tendrá un punto de corte con la gráfica.
Este punto será único si esta recta es tangente a la gráfica de la función en este punto P, es decir, cuando la recta es exactamente la recta del apartado a, es decir, cuando la pendiente es $m=-7$

Visualmente observamos que para $m\neq -7$ siempre tendremos tres puntos de corte.



d)



$$S(k)=\int_1^{3/2}\frac{x^3+4}{x^2}-(-7x+12)dx+\int_{3/2}^{k}\frac{x^3+4}{x^2}-x\,dx$$

$$\int_1^{3/2}\frac{x^3+4}{x^2}-(-7x+12)dx=\frac{1}{3}$$

$$\int_{3/2}^{k}\frac{x^3+4}{x^2}-x\,dx=4\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{k}\right)$$

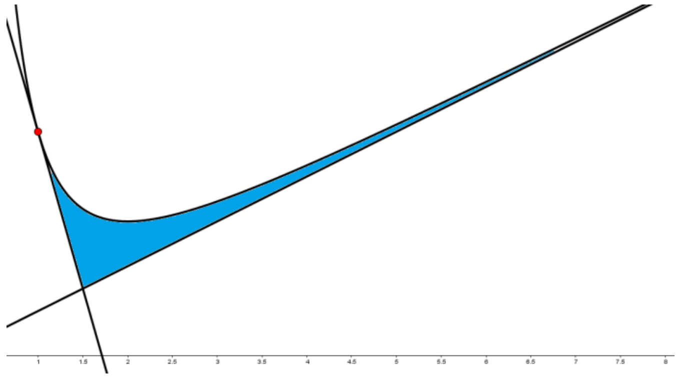
Luego

$$S(k)=\frac{1}{3}+4\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{k}\right)=3-\frac{4}{k}$$

Y por tanto, finalmente,

$$\lim_{k\to+\infty}S(k)=\lim_{k\to+\infty}3-\frac{4}{k}=3$$

Este valor corresponde al área total entre la recta $7x+y-12=0$, la gráfica de la función, su asíntota oblicua, cuando prolongamos estas dos últimas hasta el infinito.



Problema 2.

a1) Sea $f_n(x)=\sqrt[n]{x^2}-\sqrt{ax^2+bx+1}$.

La parte de la derecha, $\sqrt{ax^2+bx+1}$ tiene por dominio el intervalo $ax^2+bx+1\geq 0$, y puesto que $a<0$, esta última función es una parábola con las ramas hacia abajo cuyo dominio es un intervalo que incluye el 0. Sus puntos de no derivabilidad son los extremos, es decir, las dos soluciones de $ax^2+bx+1=0$.
Luego esta parte no da problemas alrededor de $x=0$.

Veamos la parte de la izquierda: $g_n(x)=\sqrt[n]{x^2}=x^{2/n}$

Si $n=2$, $g_n(x)=\sqrt[n]{x^2}=|x|$ y la función tiene un "punto anguloso" en $x=0$.

Si $n>2$, $g'_n(x)=(2/n)x^{2/n-1}$ y entonces $2/n<1\Rightarrow 2/n-1<0$, y por tanto $\lim_{x\to 0} g'_n(x)=\infty$, es decir, la función tiene pendiente infinita (recta tangente vertical) en $x=0$, y por lo tanto no es derivable.

a2) Ya hemos visto que para $n=2$, $f_n(x)=|x|-\sqrt{ax^2+bx+1}$ y la gráfica de la función tiene un "punto anguloso".

a3) Buscamos una parábola ax^2+bx+1, con $a<0$ y cuyo dominio sea $[-1,1]$. Claramente será $-(x-1)(x+1)=-x^2+1\Rightarrow a=-1, b=0$, $f(x)=|x|-\sqrt{-x^2+1}$

b) Sea $g(x)=|x|+\sqrt{1-x^2}$

Dominio de definición: $1-x^2\geq 0 \Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$

$$\text{Si } x>0\Rightarrow g(x)=x+\sqrt{1-x^2}\Rightarrow g'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)=1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} g'(x)=\lim_{x\to 0^+} 1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=1-\frac{0}{\sqrt{1-0^2}}=1$$

$$\text{Si } x<0\Rightarrow g(x)=-x+\sqrt{1-x^2}\Rightarrow g'(x)=-1+\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)=-1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0^-} g'(x)=\lim_{x\to 0^-} -1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=-1-\frac{0}{\sqrt{1-0^2}}=-1$$

Y puesto que $\lim_{x\to 0^+} f(x)\neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$, la función no es derivable en $x=0$.

Veamos que tampoco es derivable en los extremos de definición:

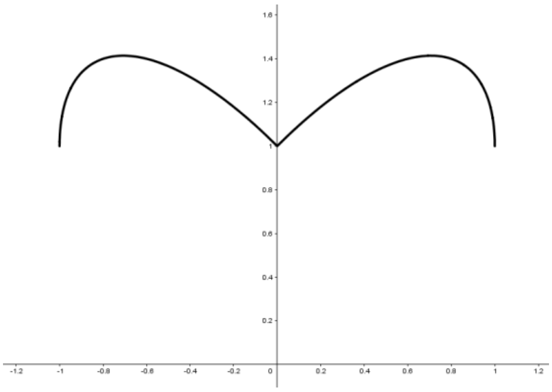
$$\lim_{x\to 1^-} g'(x)=\lim_{x\to 1^-} 1-\frac{1}{\sqrt{1-1^2}}=1-\frac{1}{\sqrt{0}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} g'(x)=\lim_{x\to -1^+} -1-\frac{1}{\sqrt{1-(-1)^2}}=1-\frac{1}{\sqrt{0}}=-\infty$$

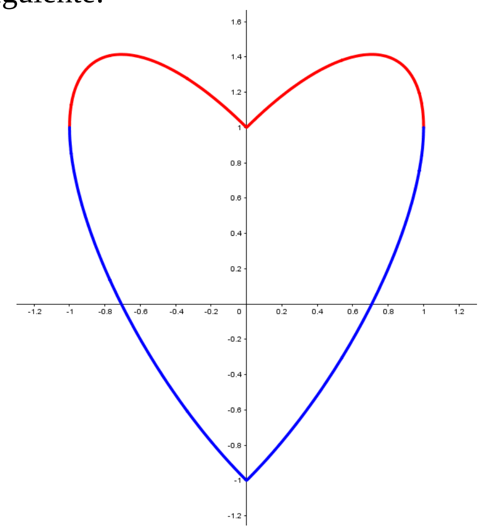
Luego en los extremos de definición tiene asociadas rectas tangentes verticales. No es derivable en esos puntos.

(Me salto ☺el estudio detallado de $g(x)$: Paridad, puntos de corte con los ejes, monotonía, curvatura...)

La gráfica de la función $g(x)$ es la siguiente:



La unión de las dos gráficas es la siguiente:



c) Estudiando detenidamente qué nos preguntan vemos que se trata de determinar el valor máximo de la diferencia de funciones:

$$h(x) = g(x) - f(x) = |x| + \sqrt{1-x^2} - \left(|x| - \sqrt{-x^2+1}\right) = |x| + \sqrt{1-x^2} - |x| + \sqrt{1-x^2} =$$

$$= 2\sqrt{1-x^2}$$

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

El único candidato posible para un extremo relativo es $x = 0$.
Vemos además que esta función es creciente para $x < 0$ y decreciente para $x > 0$, luego se trata de un máximo. Visualmente se ve claramente que $x = 0$ es el eje de simetría de la función.

d) Basta ver que su derivada corresponde a la función dada.

$$\arcsin(x) \to \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$x\sqrt{1-x^2} \to 1\sqrt{1-x^2} + x\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$H'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)==\frac{1}{2}\left(2\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2}}=\frac{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}=$$

$$=\sqrt{1-x^2}$$

Observando la gráfica de γ vemos que debemos calcular

$$\int_{-1}^{1} g(x)-f(x)\,dx=\int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\,dx=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=2(H(1)-H(-1))=(*)$$

En donde aprovecharemos el resultado anterior: $H(x)=\frac{1}{2}\left(\arcsin(x)+x\sqrt{1-x^2}\right)$

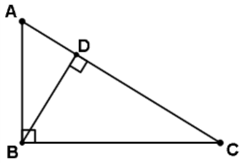
$$H(1)=\frac{1}{2}\left(\arcsin(1)+1\sqrt{1-1^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\arcsin(1)\right)$$

$$H(-1)=\frac{1}{2}\left(\arcsin(-1)+(-1)\sqrt{1-(-1)^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\arcsin(-1)\right)$$

$$(*)=\arcsin(1)-\arcsin(-1)=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$

Preguntas.

1. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en B. Sea D el pie de la perpendicular por B en la hipotenusa AC.



Interpretando convenientemente el enunciado nos piden demostrar

$AB=BC \Leftrightarrow BD=AD=CD$

Supongamos que $BD=AD=CD$. Entonces los triángulos ΔADB y ΔCDB son congruentes por el criterio SAS, pues ambos comparten el ángulo $\angle ADB=\angle CDB=90^{o}$ y los lados $AD=DC$ y $BD=BD$, luego $AB=BC$ tal y como queríamos ver.

Supongamos que $AB=BC$. Entonces $\angle BAD=\angle BCD$ (caracterización de un triángulo isósceles). Puesto que, además, $\angle ADB=\angle CDB=90^{o}$, tenemos $\angle ABD=\angle CBD$. Puesto que $AB=BC$ y $BD=BD$, podemos aplicar el criterio de congruencia SAS para deducir que ΔADB y ΔCDB son congruentes para concluir que $AD=DC$.

Por otro lado, siempre ΔCDB y ΔCBA son semejantes por el criterio AA, de donde se deduce que $\angle DBC=\angle BAD$, y en nuestro caso $\angle DBC=\angle BAD=\angle BCD \Rightarrow \angle DBC=\angle BCD$, es decir, ΔCBD es isósceles en D, y por tanto, finalmente $BD=DC=AD$, tal y como queríamos ver.

2. a) Aplicamos la fórmula de la distribución binomial:

$$P(X=2)=\binom{5}{2}p^2(5-p)^{5-2}=10p^2(5-p)^3$$

$$\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{20}{2}=10$$

b) Resolvemos este problema con la técnica de la optimización de funciones.

$$f(p)=10p^2(5-p)^3 \rightarrow f'(p)=20p(1-p)^3+10p^2 3(1-p)^2(-1)=20p(1-p)^3-30p^2(1-p)^2$$

$$10p^2 \rightarrow 20p$$

$$(1-p)^3 \rightarrow 3(1-p)^2(-1)$$

$$f'(p)=20p(1-p)^3-30p^2(1-p)^2=10p(1-p)^2\left(2(1-p)-3p\right)=$$

$$=10p(5-p)^2\left(2-5p\right)=0\Leftrightarrow\begin{cases}p=0\\5-p=0\Rightarrow p=5\\2-5p=0\Rightarrow p=2/5\end{cases}$$

Las primeras dos soluciones no tienen sentido, pues suponemos que $0<p<1$, y mediante un estudio de la primera derivada se comprueba fácilmente que para $p=2/5$ obtenemos la probabilidad máxima.

3. a) Recta perpendicular al plano que pasa por P:

$$r:\begin{cases}x=4+3\lambda\\y=2-2\lambda\\z=1\end{cases}$$

Punto de corte entre esta recta y el plano:

$$3(4+3\lambda)-2(2-2\lambda)+5=0\Rightarrow\lambda=-1\Rightarrow H=(4+3(-1),2-2(-1),1)=(1,4,1)$$

b) Tenemos que resolver el sistema

$$\begin{cases}x-y+1=0\\z-2=0\\3x-2y+5=0\end{cases}$$

cuya solución es (-3,-2, 2)

4. Sea $f(x)=x^3+x-\cos x$

$f(0)=0^3+0-\cos 0=-1<0$

$f(1)=1^3+1-\cos(1)=2-\cos(1)\geq 1$, puesto que $-1\leq\cos(x)\leq 1$.

Luego, aplicando el Teorema de Bolzano, y teniendo en cuenta que f es siempre continua, podemos garantizar que existirá un cero, es decir, una solución de la ecuación, en el intervalo $(0,1)$.

Pero esta función es estrictamente creciente:

$$f'(x)=3x^2+1+\sin x\geq 3x^2+1+(-1)=3x^2>0$$

En donde hemos aplicado que $-1\leq\sin(x)\leq 1$ y $3x^2>0$ siempre.

Luego esta solución debe ser única.

5. La función pedida será de la forma $p(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

- Es tangente al eje X en el origen.

$$p'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$$

$$0=p'(0)=4a\cdot 0^3+3b\cdot 0^2+2c\cdot 0+d\Rightarrow d=0$$

$$0=p(0)=a\cdot 0^4+b\cdot 0^3+c\cdot 0^2+d\cdot 0+e\Rightarrow e=0$$

Así pues, $p(x)=ax^4+bx^3+cx^2$

- Pasa por el punto (1,0)

$$0=p(1)=a\cdot 1^4+b\cdot 1^3+c\cdot 1^2=a+b+c$$

- Tiene un punto estacionario en (2,-2)

$$-2=p(2)=a\cdot 2^4+b\cdot 2^3+c\cdot 2^2=16a+8b+4c\Rightarrow -1=8a+4b+2c$$

$$0=p'(2)=4a\cdot 2^3+3b\cdot 2^2+2c\cdot 2\Rightarrow 0=32a+12b+4c$$

Resolvemos el sistema (mediante Gauss-Jordan)

$$\begin{cases}a+b+c=0\\8a+4b+2c=-1\\32a+12b+4c=0\end{cases}\Rightarrow a=1,b=\frac{-7}{2},c=\frac{5}{2}$$

Luego la función pedida es $p(x) = x^4 + \frac{-7}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2$.

6. Calculamos la integral indefinida de la función mediante el método de substitución.

$$\int \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}dt = \int \cos\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}dt = (*)$$

$$u = \frac{1}{t} = t^{-1} \Rightarrow u' = -1t^{-2} = \frac{-1}{t^2}$$

$$(*) = -1\int \cos\left(\frac{1}{t}\right)\frac{-1}{t^2}dt = -\int \cos(u)du = -\sin u + C = -\sin\left(\frac{1}{t}\right) + C$$

Así pues,

$$F(x) = \int_a^x \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}dt = -\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \left(-\sin\left(\frac{1}{a}\right)\right) = \sin\left(\frac{1}{a}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$-\frac{1}{2} = F\left(\frac{2}{\pi}\right) = \sin\left(\frac{1}{a}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{1}{a}\right) - 1 \Rightarrow \sin\left(\frac{1}{a}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Esta última ecuación tiene por soluciones

$$\frac{1}{a} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} \pi/6 + 2\pi k \\ 5\pi/6 + 2\pi k \end{cases}$$

Y el valor máximo de a se alcanzará cuando el valor de la derecha de la igualdad sea mínimo, es decir, para k=0, y en cuyo caso

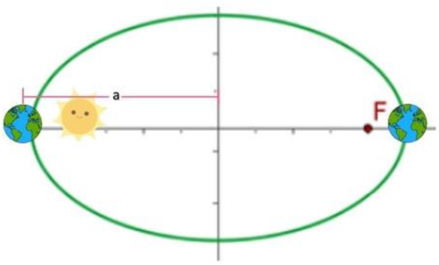
$$\frac{1}{a} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow a = \frac{6}{\pi} > \frac{2}{\pi}$$

Este valor es imposible, porque entonces no tendría sentido $F\left(\frac{2}{\pi}\right)$ ya que se supone $x \geq a$.

$$\frac{1}{a} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow a = \frac{6}{5\pi} < \frac{2}{\pi}$$

Este valor es aceptable, y es el máximo buscado.

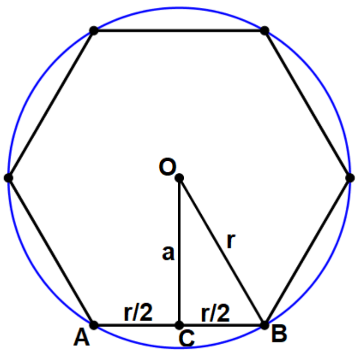
7. Por las leyes de Kepler, sabemos que la trayectoria de la Tierra alrededor del Sol es una elipse con el Sol en uno de los dos focos: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



$x_a = 1{,}52 \times 10^{11}$ m, $x_p = 1{,}47 \times 10^{11}$ m

$$a = \frac{x_a + x_p}{2}, e = \frac{x_a - x_p}{2a}, b = a\sqrt{1-e^2} = a\sqrt{1 - \left(\frac{x_a - x_p}{2a}\right)^2}$$

8. Llamaremos a a la apotema que va desde el centro hasta el punto medio C de uno de los lados AB de la baldosa. Sea r el radio de la circunferencia circunscrita, es decir OB. Sabemos que un hexágono regular se descompone en seis triángulos equiláteros, por lo tanto $r = OB = AB \Rightarrow BC = \frac{r}{2}$:



Ahora podemos aplicar Pitágoras en el triángulo ΔOBC para demostrar que

$$r^2 = a^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3r^2}{4} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}\,r}{2}$$

Veamos la veracidad del texto. Pasando los 60 milímetros a centímetros,

$a = \dfrac{\sqrt{3}\cdot 6}{2} \cong 5.19615$ cm, que coincide con el valor encontrado en el texto.

Solo hay tres polígonos regulares con los que se puede teselar el plano: El triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono regular. Y esto es debido a que solamente en estos polígonos regulares sus ángulos internos (60º, 90º y 120º, respectivamente) son divisores de 360º.