PAU ITALIA

Matematica Maturità 2023

Gerard Romo Garrido

Toomates Coolección vol. 34

Toomates

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "**licencias digitales**" con las que las editoriales pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo libro, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.
Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de licencias digitales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf".

El conocimiento no es una mercancía.

El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las editoriales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de unos libros de texto que actualmente son muy mediocres, y no mediante retorcidas técnicas comerciales.

 Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas. **¡Libérate de la tiranía y mediocridad de las editoriales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos**

Problem Solving (en español):
Geometría Axiomática   Problemas de Geometría 1   Problemas de Geometría 2   Introducción a la Geometría
Álgebra   Teoría de números   Combinatoria   Probabilidad   Trigonometría   Desigualdades
Números complejos   Funciones

Libros de texto (en catalán):
Nombres (Preàlgebra)   Àlgebra   Proporcionalitat   Mesures geomètriques   Geometria analítica
Combinatòria i Probabilitat   Estadística   Trigonometria   Funcions   Nombres Complexos
Àlgebra Lineal   Geometria Lineal   Càlcul Infinitesimal   Programació Lineal   Mates amb Excel

PAU españolas:
Cataluña TEC   Cataluña CCSS   Valencia   Galicia   País Vasco   Baleares

PAU internacionales:
Portugal   Italia   Francia   Pearson Edexcel International A Level   Cambridge International A Level
International Baccalaureate (IB)

Pruebas de acceso:
ACM4   CFGS   PAP

Competiciones matemáticas:
Canguro: España   Cataluña   Francia   USA   Reino Unido   Austria
USA: Mathcounts   AMC 8   10   12   AIME   USAJMO   USAMO   TSTST   TST   ELMO   Putnam
España: OME   OMEFL   OMEC   OMEA   OMEM   CDP
Europa: OMI   Arquimede   HMMT   BMO   Balkan MO   JBMO
Internacional: IMO   IGO   SMT   INMO   CMO   HMMT
AHSME: Book 1   Book 2   Book 3   Book 4   Book 5   Book 6   Book 7   Book 8   Book 9

Otros materiales:
Pizzazz!: Book A   Book B   Book C   Book D   Book E   Pre-Algebra   Algebra , REOIM

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales para facilitar su edición. Descarga en los siguientes enlaces la versión "**.doc**" de este documento:

http://www.toomates.net/biblioteca/Italia2023.doc

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a **toomates@gmail.com**
¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.

Consulta el **catálogo de libros** completo en **http://www.toomates.net**
Descarga toda la biblioteca Toomates en un solo archivo **Aquí** MEGA
Visita mi **Canal de Youtube**: **https://www.youtube.com/c/GerardRomo**
Visita mi **blog: https://toomatesbloc.blogspot.com/**

Versión de este documento: **30/08/2024**

Este documento forma parte del siguiente bloque:

Información general:

http://www.toomates.net/biblioteca/Italia.pdf

Enunciados y soluciones en español del 2023:

http://www.toomates.net/biblioteca/Italia2023.pdf

Enunciados y soluciones en español del 2024:

http://www.toomates.net/biblioteca/Italia2024.pdf

Compendium de pruebas:

http://www.toomates.net/biblioteca/Italia2.pdf

Sobre la prueba PAU de Italia:
https://youtu.be/XGc80Tz_dd0

Compendiums de pruebas PAU internacionales y privadas:

Portugal: http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal.pdf
Italia: http://www.toomates.net/biblioteca/Italia.pdf
Francia: http://www.toomates.net/biblioteca/Francia.pdf
Pearson Edexcel International A Level: http://www.toomates.net/biblioteca/Edexcel.pdf
Cambridge International A Level: http://www.toomates.net/biblioteca/Cambridge.pdf
International Baccalaureate (IB): http://www.toomates.net/biblioteca/IB.pdf

Compendiums de pruebas PAU españolas:

Cataluña (TEC): http://www.toomates.net/biblioteca/Pautec.pdf
Cataluña (CCSS): http://www.toomates.net/biblioteca/Pauccss.pdf
Valencia: http://www.toomates.net/biblioteca/Valencia.pdf
Galicia: http://www.toomates.net/biblioteca/Galiciapau.pdf
País Vasco: http://www.toomates.net/biblioteca/Paisvascopau.pdf
Baleares: http://www.toomates.net/biblioteca/Balears.pdf

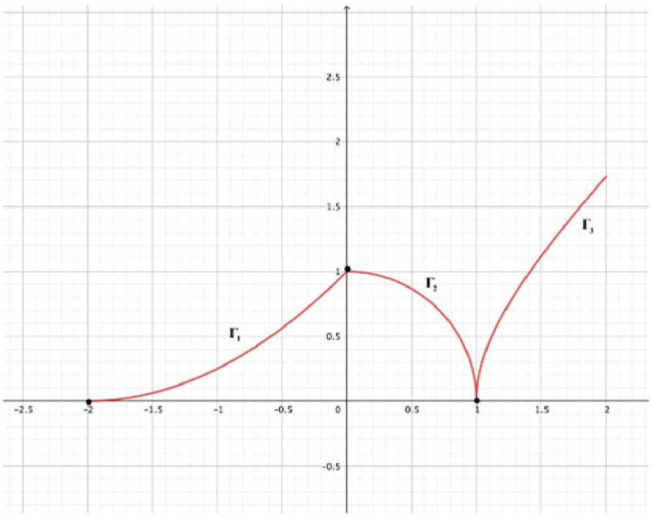
Matematica Maturità 2023

Traducción y soluciones por Gerard Romo Garrido

Fuente de inspiración para algunas soluciones: Documento de Marta Calanchi, Giuseppe Molteni (Dipartamento di Matematica Università degli Studi di Milano)

Problema 1

Se muestra en la imagen la gráfica de una función continua $y = f(x)$, y es la unión de un arco de parábola Γ_1, un arco de circunferencia Γ_2 y un arco de hipérbole Γ_3.



a) Escribe una expresión analítica de la función f definida a trozos en el intervalo $[-2,2]$, utilizando las ecuaciones:

$$y = a(x+2)^2 \qquad x^2 + y^2 + b = 0 \qquad x^2 - y^2 + c = 0$$

determinando los valores de los parámetros reales a, b, c.
Estudia la derivabilidad de la función f y escribe las ecuaciones de las posibles rectas tangentes en los puntos de abscisa

$$x = -2 \qquad x = 0 \qquad x = 1 \qquad x = 2$$

b) A partir de la gráfica de la función f, deduce la gráfica de su derivada f', y determina los intervalos de concavidad y convexidad de $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)dt$.

c) Si consideramos la función $y = \frac{1}{4}(x+2)^2$, definida en el intervalo $[-2;0]$, cuya gráfica Γ_1 es la gráfica representada, razona por qué esta función es invertible y escribe la expresión analítica de su función inversa h. Estudia la derivabilidad de h y represéntala gráficamente.

d) Sea S la región limitada por el segundo cuadrante, comprendida entre la gráfica Γ_1 y los ejes de coordenadas. Determina el valor del parámetro real k para el cual la recta de ecuación $x = k$ divide S en dos regiones equivalentes.

Problema 2

Fijado un parámetro real a, con $a \neq 0$, se consideran la función f_a definida de la siguiente manera:

$$f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a}$$

cuya gráfica se denotará por Ω_a.

a) Al variar el parámetro a, determina el dominio de f_a, estudia las posibles discontinuidades y escribe las ecuaciones de todas sus asíntotas.

b) Demuestra que, para $a \neq 1$, todas las gráficas Ω_a cortan sus respectivas asíntotas horizontales en un mismo punto y comparten la misma recta tangente en el origen.

c) Determina la monotonía de la función f_a para $a < 1$. Estudia la función $f_{-1}(x)$ y representa la gráfica Ω_{-1}.

d) Determina el área de la región limitada por la gráfica Ω_{-1}, su la recta tangente en el origen y la recta $x = \sqrt{3}$.

Preguntas.

1

Sea ABC un triángulo rectángulo en A. Sea O el centro del cuadrado BCDE construido sobre su hipotenusa, por la parte opuesta al vértice A. Demuestra que O es equidistante de las rectas AB y AC.

2

En un dado trucado, con las caras numeradas del 1 al 6, las caras pares tienen todas el doble de probabilidad que las caras impares. Calcula la probabilidad de obtener, tirando una vez el dado, respectivamente:
- Un número primo.
- Un número mayor o igual a 3.
- Un número menor o igual a 3.

3

Sea r la recta que pasa por los puntos $A = (1,-2,0)$ y $B = (2,3,-1)$. Determina la ecuación cartesiana de la superficie esférica de centro $C = (1,-6,7)$ y tangente a r.

4

Entre todos los paralelepípedos de base cuadrada y un volumen fijo V, demuestra si aquél de área total mínima también tiene la diagonal de longitud mínima.

5

Determina la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = \sqrt{25 - x^2}$ en su punto de abscisa 3, utilizando dos métodos diferentes.

6

Determinar los valores de los parámetros reales a y b para los cuales

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - (a x^3 + bx)}{x^3} = 1$$

7

Consideramos la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \arctan x & x < 0 \\ ax + b & x \geq 0 \end{cases}$$

Determinar los valores de los parámetros reales a y b para los cuales la función es derivable. ¿Existe un intervalo en IR en el que la función f cumpla la hipótesis del teorema de Rolle? Justifica la respuesta.

8

Dada la función

$$f_a(x) = x^5 - 5ax + a$$

Definida en el conjunto de números reales, determinar los valores del parámetro $a > 0$ para los cuales la función posee tres ceros reales distintos.

Soluciones.

Problema 1.

a) Γ_1 es un arco de parábola de ecuación $y = a(x+2)^2$ que sabemos que pasa por el punto (0,1), y por tanto $1 = a(0+2)^2 \Leftrightarrow a = 1/4$

Γ_2 es un arco de circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + b = 0$ que sabemos que pasa por el punto (0,1), y por tanto

$0^2 + 1^2 + b = 0 \Leftrightarrow b = -1$

La función en este intervalo será

$x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2}$

tomamos la raíz positiva porque vemos que el arco está por encima del eje X.

Γ_3 es un arco de hipérbola de ecuación $x^2 - y^2 + c = 0$ que sabemos que pasa por el punto (1,0), y por tanto

$1^2 - 0^2 + c = 0 \Rightarrow c = -1$

La función en este intervalo será

$x^2 - y^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2-1} \Rightarrow y = \sqrt{x^2-1}$

De nuevo hemos tomado la raíz positiva porque visualmente vemos que la gráfica está por encima del eje X.

Así pues, la expresión analítica de la función f será

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+2)^2 & -2 \le x \le 0 \\ \sqrt{1-x^2} & 0 < x \le 1 \\ \sqrt{x^2-1} & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

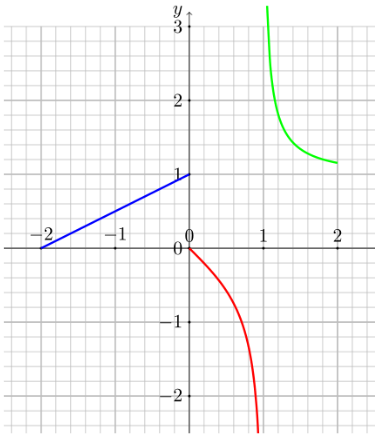
Visualmente vemos que la función no será derivable en $x = 0$ ni en $x = 1$. Esto se puede demostrar analíticamente derivando la función por trozos y comprobando que no coinciden las derivadas laterales:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+2) & -2 < x < 0 \\ -x/\sqrt{1-x^2} & 0 < x < 1 \\ x/\sqrt{x^2-1} & 1 < x < 2 \end{cases}$$

Los valores $x = -2$ y $x = 2$ son puntos frontera del dominio de la función, y por tanto la función tampoco es derivable en estos puntos.

Así pues, no tiene sentido hablar de recta tangente en ninguno de los cuatro puntos indicados en el enunciado: $x = -2, 0, 1, 2$.

b) Estudiando la monotonía de la función, y la expresión analítica de la derivada podemos deducir que la gráfica de f es:



La función f es continua en todo su dominio $[-2,2]$, luego, aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo sabemos que $F(x)=\int_{-2}^{x} f(t)dt$ es derivable y $F'(x)=f(x)$.
Luego para estudiar la curvatura de $F(x)$ estudiaremos su segunda derivada, que es $F''(x)=f'(x)$.

En el intervalo $(-2,0)$, $f'(x)=\frac{1}{2}(x+2)$ y no es ni cóncava ni convexa, pues es recta.

En el intervalo $(0,1)$, $f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$
Es una función estrictamente negativa, y por tanto cóncava.

En el intervalo $(1,2)$, $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
Es una función estrictamente positiva, y por tanto convexa.

c) Sea $f(x)=\frac{1}{4}(x+2)^2$, definida en $-2\le x\le 0$.

$y=\frac{1}{4}(x+2)^2 \Leftrightarrow 4y=(x+2)^2 \Leftrightarrow x+2=\pm\sqrt{4y}$
De las dos opciones, tomaremos la positiva porque es la única que satisface que pasa por el punto (0,1):
$0+2=\sqrt{4\cdot 1}$
Así pues, $x=\sqrt{4y}-2=2\sqrt{y}-2$ es la expresión analítica de la inversa de f en el intervalo $(-2,0)$.
También podríamos haber razonado que la función en este intervalo es estrictamente creciente, y por tanto invertible.
Así pues, $h(x)=2\sqrt{x}-2$

d) Vemos que la gráfica de f no cambia de signo en el intervalo $[-2,0]$. Queremos resolver la ecuación

$$\int_{-2}^{k}\frac{1}{4}(x+2)^2dx=\int_{k}^{0}\frac{1}{4}(x+2)^2dx \Leftrightarrow \frac{1}{4}\int_{-2}^{k}(x+2)^2dx=\frac{1}{4}\int_{k}^{0}(x+2)^2dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{-2}^{k}(x+2)^2dx=\int_{k}^{0}(x+2)^2dx \quad (*)$$

Sea $F(x)=\int (x+2)^2dx \underset{\substack{u=x+2\\ u'=1}}{=} \int u^2du=\frac{u^3}{3}+K=\frac{(x+2)^3}{3}+K$

Así pues,

$$\int_{-2}^{k}(x+2)^2dx=F(k)-F(-2)=\frac{(k+2)^3}{3}-\frac{(-2+2)^3}{3}=\frac{(k+2)^3}{3}$$

$$\int_k^0 (x+2)^2 dx = F(0) - F(k) = \frac{(0+2)^3}{3} - \frac{(k+2)^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{(k+2)^3}{3}$$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{(k+2)^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{(k+2)^3}{3} \Leftrightarrow \frac{2(k+2)^3}{3} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow 2(k+2)^3 = 8 \Leftrightarrow (k+2)^3 = 4$$

$$\Leftrightarrow k+2 = \sqrt[3]{4} \Leftrightarrow k = \sqrt[3]{4} - 2$$

Problema 2.

a) Todas estas funciones tienen asíntota horizontal $y=1$, independientemente del valor de a.

$x^2-a=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{a}$, y por tanto el dominio de la función f_a será $IR-\{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$ siempre que estén definidos los valores $\{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$, es decir, para todo $a \geq 0$. Si $a<0$ el dominio es todo IR.

Primer caso: $a>0$

$$f_a(x)=\frac{x^2-ax}{x^2-a}=\frac{x(x-a)}{(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})}$$

Estudiemos las posibles indeterminaciones $0/0$:

$a=\sqrt{a} \Leftrightarrow a^2=a \Leftrightarrow 0=a^2-a=a(a-1) \Leftrightarrow a=\{0,1\}$

Aparecerá una indeterminación 0/0 cuando $a=1$, y en este caso tenemos

$$f_1(x)=\frac{x^2-x}{x^2-1}=\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\begin{cases}\dfrac{x}{(x+1)} & si\ x\neq 1\\ \text{no def.} & si\ x=1\end{cases}$$

La función tiene una discontinuidad evitable en $x=1$.

La función tiene una asíntota vertical en $x=-1$.

Si $a\neq 1$, la función no tiene ninguna indeterminación 0/0. En este caso, la función tiene asíntotas verticales en $x=\sqrt{a}$ y $x=-\sqrt{a}$.

Segundo caso: $a=0$

$$f_0(x)=\frac{x^2}{x^2}=\begin{cases}1 & si\ x\neq 0\\ \text{no def.} & si\ x=0\end{cases}$$

La función tiene una discontinuidad evitable en $x=1$.

La función no presenta ninguna asíntota vertical.

Tercer caso: $x=-1$.

En este caso el denominador no se anula nunca y por tanto no aparece ninguna indeterminación 0/0. La función no presenta ninguna asíntota vertical.

b) Observamos que si $a\neq 1$, se cumple siempre

$$f_a(1)=\frac{1^2-a\cdot 1}{1^2-a}=\frac{1-a}{1-a}=1$$

Y por tanto siempre corta su asíntota vertical en el punto (1,1).

$$f'_a(x)=\frac{(2x-a)(x^2-a)-(x^2-ax)2x}{(x^2-a)^2}=\frac{2x^3-2ax-ax^2+a^2-2x^3+2ax^2}{(x^2-a)^2}=(*)$$

$x^2-ax \to 2x-a$

$x^2-a \to 2x$

$$(*)=\frac{ax^2-2ax+a^2}{(x^2-a)^2}=a\frac{x^2-2x+a}{(x^2-a)^2}$$

La recta tangente será de la forma $y=Ax+B$, con

$$A=f'_a(0)=\frac{a^2}{a^2}=1$$

$$B=f(0)-1\cdot 0=\frac{0^2-a\cdot 0}{0^2-a}=0$$

Y la recta tangente es $y=x$, que no depende del valor de a.

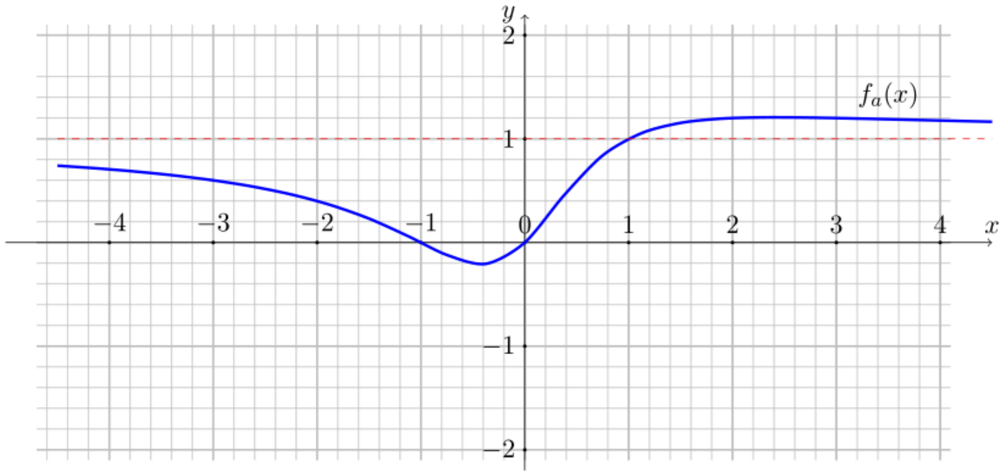
c)
Debemos estudiar el signo de la función

$$f'_a(x) = a\frac{x^2 - 2x + a}{(x^2 - a)^2}$$

en donde estamos suponiendo $a < 1$.
El denominador es un cuadrado y por tanto no afectará el signo de la derivada, pero tenemos un factor a multiplicando, por lo que es necesario distinguir cuando $a < 0$.
Primer caso: $a < 0$:
$x^2 - 2x + a = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1-a}$ y puesto que es una parábola con las ramas hacia arriba,
$x^2 - 2x + a < 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{1-a} < x < 1 + \sqrt{1-a}$
Luego $f'_a(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{1-a} < x < 1 + \sqrt{1-a}$
Así pues,
$\left(-\infty, 1 - \sqrt{1-a}\right) \rightarrow$ función decreciente
$\left(1 - \sqrt{1-a}, 1 + \sqrt{1-a}\right) \rightarrow$ función creciente
$\left(1 + \sqrt{1-a}, +\infty\right) \rightarrow$ función decreciente

Segundo caso: $0 < a < 1$:
Ahora debemos tener presente que la función tiene dos asíntotas verticales, en $x = -\sqrt{a}$ y en $x = \sqrt{a}$, por lo que debemos incorporar estos valores a nuestro estudio.
$f'_a(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{1-a} < x < 1 + \sqrt{1-a}$
Después de razonar con estos valores fronteras se llega a la solución:
$\left(-\infty, -\sqrt{a}\right) \rightarrow$ función creciente
$\left(-\sqrt{a}, 1 - \sqrt{1-a}\right) \rightarrow$ función creciente
$\left(1 - \sqrt{1-a}, \sqrt{a}\right) \rightarrow$ función decreciente
$\left(\sqrt{a}, 1 + \sqrt{1-a}\right) \rightarrow$ función decreciente
$\left(1 + \sqrt{1-a}, +\infty\right) \rightarrow$ función creciente

El gráfico de $f_{-1}(x)$ se muestra en la siguiente imagen:



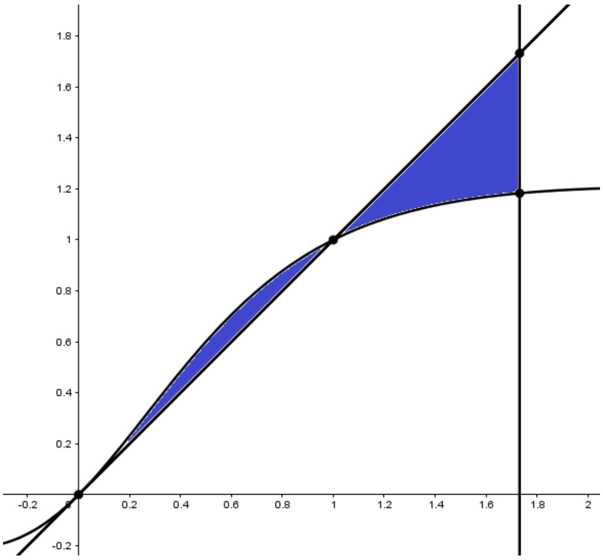
d)

$$f_{-1}(x) = \frac{x^2 - (-1)x}{x^2 - (-1)} = \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} = \frac{x(x+1)}{x^2 + 1}$$

Veamos si hay algún punto de corte con su recta tangente en el origen:

$$\frac{x(x+1)}{x^2+1}=x$$

Tiene dos soluciones: $x=0$ o $\frac{x+1}{x^2+1}=1 \Leftrightarrow x+1=x^2+1 \Leftrightarrow x=x^2 \Leftrightarrow 1=x$



Por lo tanto debemos calcular este área mediante dos integrales:

$$A=\int_0^1 \frac{x(x+1)}{x^2+1}-x\,dx+\left|\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x(x+1)}{x^2+1}-x\,dx\right|=F(1)-F(0)+\left|F(\sqrt{3})-F(1)\right|=$$

$$=F(1)-F(0)+F(1)-F(\sqrt{3})=2F(1)-F(0)-F(\sqrt{3})=(*)$$

$$\frac{x(x+1)}{x^2+1}-x=\frac{x^2+x}{x^2+1}-x=1+\frac{x-1}{x^2+1}-x=1-x+\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}$$

$$F(x)=\int \frac{x(x+1)}{x^2+1}-x\,dx=\int\left(1-x+\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\int \frac{x}{x^2+1}\,dx-\int \frac{1}{x^2+1}\,dx=(**)$$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du=\frac{1}{2}\ln(u)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$$

$$u=x^2+1 \rightarrow u'=2x$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx=\arctan(x)$$

$$(**)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\arctan(x)$$

Así pues,

$$F(1)=1-\frac{1^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(1^2+1\right)-\arctan(1)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}$$

$$F\left(\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{3}^2+1\right)-\arctan(\sqrt{3})=\sqrt{3}-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln 4-\arctan(\sqrt{3})=$$

$$=\sqrt{3}-\frac{3}{2}+\ln 2-\arctan(\sqrt{3})=\sqrt{3}-\frac{3}{2}+\ln 2-\frac{\pi}{3}$$

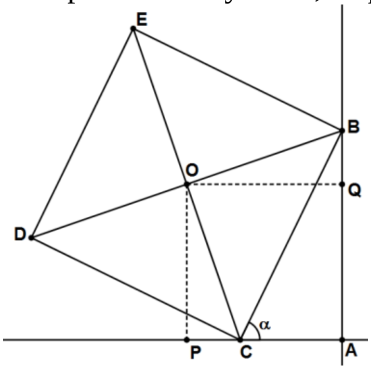
Aquí hemos aplicado que $\frac{1}{2}\ln 4=\frac{1}{2}\ln\left(2^2\right)=\frac{2}{2}\ln(2)=\ln(2)$ y que $\arctan\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{3}$

$$F(0)=0-\frac{0^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(0^2+1\right)-\arctan(0)=0$$

$$(*)=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}\right)-0-\left(\sqrt{3}-\frac{3}{2}+\ln 2-\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=1+\ln 2-\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}+\frac{3}{2}-\ln 2+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{2}-\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}$$

1. Sean P y Q los pies de las perpendiculares por O a AC y a AB, respectivamente. Sea $\alpha = \angle BCA$.



Claramente $\angle OCB = \angle OBC = 45^{o}$ y por tanto

$\angle OCP = 180^{o} - \angle OCB - \angle BCA = 180^{o} - 45^{o} - \alpha = 135^{o} - \alpha$

$\angle OBQ = \angle OBC + \angle CBA = 45^{o} + (90^{o} - \alpha) = 135^{o} - \alpha$

Así pues, $\angle OCP = \angle OBQ$ y por tanto los triángulos rectángulos ΔCPO y ΔBQO son congruentes, por el criterio HL de Congruencia de triángulos rectángulos, pues OB=OC. De donde deducimos que $OP = OQ$, y por tanto las distancias de O a los lados AC y AB son iguales.

2. Sean $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ las probabilidades de cada una de las seis caras.

Sabemos que $P_1 = P_3 = P_5$, $P_2 = P_4 = P_6$, y $P_2 = P_4 = P_6 = 2P_1$. Luego

$P_1 + P_1 + P_1 + 2P_1 + 2P_1 + 2P_1 = 1 \Leftrightarrow 9P_1 = 1 \Rightarrow P_1 = P_3 = P_5 = 1/9$, $P_2 = P_4 = P_6 = 2/9$.

Ahora podemos calcular las probabilidades pedidas:

$$P(\text{un número primo}) = P_2 + P_3 + P_5 = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

$$P(\text{un número} \geq 3) = P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$P(\text{un número} \leq 3) = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

3. Calculamos el punto de corte entre la esfera y la recta.

Vector director de la recta: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (2,3,-1) - (1,-2,0) = (1,5,-1)$

Plano perpendicular a la recta y que pasa por C:

$\vec{n} = \vec{v} = (1,5,-1) \rightarrow x + 5y - z = D \rightarrow 1 + 5(-6) - 7 = D \rightarrow -36 = D$

$x + 5y - z = -36$

Punto de corte P entre el plano y la recta:

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 + 5\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

$1 + \lambda + 5(-2 + 5\lambda) - (-\lambda) = -36 \Rightarrow \lambda = -1$

$$Q = \begin{cases} x = 1 + (-1) = 0 \\ y = -2 + 5(-1) = -7 \Rightarrow Q = (0,-7,1) \\ z = -(-1) = 1 \end{cases}$$

El radio de la circunferencia será la distancia entre el centro C y Q:

$\overrightarrow{CQ} = Q - C = (0,-7,1) - (1,-6,7) = (-1,-1,-6)$

$r = \left|\overrightarrow{CQ}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-6)^2} = \sqrt{1 + 1 + 36} = \sqrt{38}$

La ecuación de la esfera es:

$P=(x,y,z)\to\left|\overrightarrow{CP}\right|=r$

$\overrightarrow{CP}=P-C=(x,y,z)-(1,-6,7)=(x-1,y+6,z-7)$

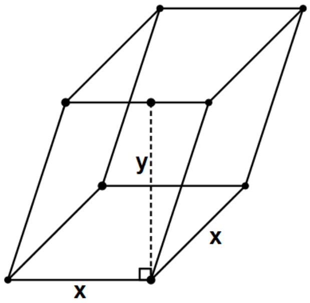
$\left|\overrightarrow{CP}\right|=\sqrt{(x-1)^2+(y+6)^2+(z-7)^2}=\sqrt{38}\Leftrightarrow$

$(x-1)^2+(y+6)^2+(z-7)^2=38\Leftrightarrow$

$x^2+y^2+z^2-2x+12y-14z+86=38\Leftrightarrow$

$x^2+y^2+z^2-2x+12y-14z+48=0$

4. Digamos que nuestro paralelepípedo tiene una base cuadrada de lado x y una altura y.



El volumen será $V=x^2y$ que supondremos fijo.
El área total será la suma de dos cuadrados de lado x y cuatro paralelogramos de lado x y altura y, es decir:

$A(x,y)=2x^2+4xy$

$V=x^2y\Rightarrow y=\dfrac{V}{x^2}$

Escribimos el área como función del lado del cuadrado de la base:

$A(x)=2x^2+4x\dfrac{V}{x^2}=2x^2+4\dfrac{V}{x}=2x^2+4Vx^{-1}$

Luego

$A'(x)=4x+4Vx^{-2}(-1)=4x-4Vx^{-2}=4x-\dfrac{4V}{x^2}=0\Leftrightarrow 4x=\dfrac{4V}{x^2}\Leftrightarrow x^3=V\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{V}$

Tenemos que comprobar que, efectivamente, se trata de un mínimo. Lo haremos aplicando el criterio de la segunda derivada:

$A''(x)=4-4(-2)Vx^{-3}=4+8Vx^{-3}=4+\dfrac{8V}{x^3}$

$A''\left(\sqrt[3]{V}\right)=4+\dfrac{8V}{V}=4+8=12>0$. Se trata, efectivamente, de un mínimo.

Para este valor tenemos $y=\dfrac{V}{\left(\sqrt[3]{V}\right)^2}=\dfrac{V}{\sqrt[3]{V^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{V^3}}{\sqrt[3]{V^2}}=\sqrt[3]{\dfrac{V^3}{V^2}}=\sqrt[3]{V}=x$

Es decir, la figura es un cubo de volumen V.

La diagonal del paralelepípedo se puede considerar un vector tridimensional de coordenadas $\vec{v}=(x,y,x)$, y por lo tanto su longitud será

$L(x,y)=|\vec{v}|=\sqrt{x^2+y^2+x^2}=\sqrt{2x^2+y^2}$

Como en el caso anterior, escribimos esta expresión en función de x:

$V=x^2y\Rightarrow y=\dfrac{V}{x^2}\Rightarrow y^2=\left(\dfrac{V}{x^2}\right)^2=\dfrac{V^2}{x^4}$

$L(x)=\sqrt{2x^2+y^2}=\sqrt{2x^2+\dfrac{V^2}{x^4}}$

$$L'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2x^2+\frac{V^2}{x^4}}}\left(4x-\frac{4V^2}{x^5}\right)=0\Leftrightarrow 4x-\frac{4V^2}{x^5}=0\Leftrightarrow 4x=\frac{4V^2}{x^5}\Leftrightarrow x^6=V^2\Leftrightarrow x^3=V$$

En donde hemos podido simplificar sin problema porque suponemos que $x,V>0$.
Así pues, llegamos al mismo valor óptimo.
En este segundo caso garantizamos que se trata de un mínimo observando que la función $L(x)$ es continua en $(0,+\infty)$ y su comportamiento en los extremos es divergente:

$$\lim_{x\to 0^+} L(x)=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{2x^2+\frac{V^2}{x^4}}=+\infty \text{ y } \lim_{x\to +\infty} L(x)=\lim_{x\to +\infty}\sqrt{2x^2+\frac{V^2}{x^4}}=+\infty .$$

5. Primer método: Cálculo.

$$f(x)=\sqrt{25-x^2}\to f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{25-x^2}}(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}$$

$y=ax+b$,

$$a=f'(3)=\frac{-3}{\sqrt{25-3^2}}=\frac{-3}{\sqrt{25-9}}=\frac{-3}{4}$$

$$b=f(3)-a\cdot 3=\sqrt{25-3^2}=4-\left(\frac{-3}{4}\right)\cdot 3=\frac{25}{4}$$

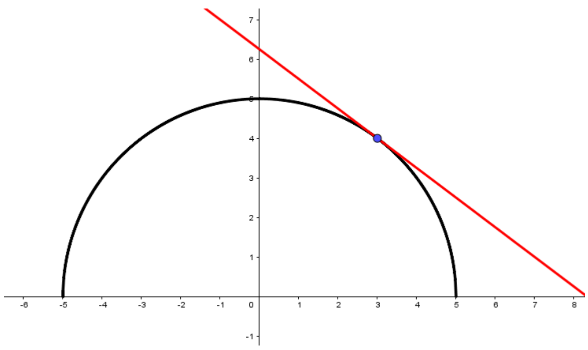
La recta tangente es $y=\frac{-3}{4}x+\frac{25}{4}\Leftrightarrow 4x+3y=25$.

Segundo método. Interpretación geométrica.

$$y=\sqrt{25-x^2}\Rightarrow y^2=25-x^2\Rightarrow y^2+x^2=25\Rightarrow 5=\sqrt{y^2+x^2}$$

$$x=3\to y=\sqrt{25-3^2}=4$$

La curva es una semicircunferencia centrada en el origen y de radio 5. Queremos encontrar su recta tangente en su punto $(3,4)$.



Tendrá como vector director el vector perpendicular al radio:
$\vec{v}=(3,4)$
$3x+4y=D\Rightarrow 3\cdot 3+4\cdot 4=D\Rightarrow 25=D$
y la recta es $3x+4y=25$

6. Estamos claramente ante una indeterminación 0/0, que resolveremos aplicando Hopital:

$$\sin x-(ax^3+bx)\to \cos x-3ax^2-b$$

$$x^3\to 3x^2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-(ax^3+bx)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-3ax^2-b}{3x^2}=(*)$$

Puesto que $\lim_{x\to 0}\left(\cos x - 3a\,x^2 - b\right) = 1 - b$ y $\lim_{x\to 0}\left(3x^2\right) = 0$, este último límite divergirá siempre que $b \neq 1$. Así pues, forzosamente, $b = 1$.
Para $b = 1$ seguimos teniendo una indeterminación 0/0, que resolveremos de nuevo por Hopital:

$\cos x - 3a\,x^2 - 1 \to -\sin x - 6a\,x$

$3x^2 \to 6x$

$$(*) = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x - 6ax}{6x} = (**)$$

De nuevo otra indeterminación 0/0 que resolveremos por Hopital:

$-\sin x - 6a\,x \to -\cos x - 6a$

$6x \to 6$

$$(**) = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x - 6a}{6} = \frac{-1-6a}{6}$$

Así pues, llegamos a la ecuación

$$\frac{-1-6a}{6} = 1 \Leftrightarrow -1-6a = 6 \Leftrightarrow -6a = 7 \Leftrightarrow a = -7/6$$

La solución es $a = -7/6$ y $b = 1$.

7. Si $x \neq 0$ la función es perfectamente continua y derivable.
Veamos en primer lugar la continuidad de la función en $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = [-1 + \arctan x]_{x=0} = 1 + \arctan 0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = [ax + b]_{x=0} = b$$

$$f(0) = [ax + b]_{x=0} = b$$

Luego la función será continua en $x = 0$ siempre que $b = 0$.

Veamos la derivabilidad de esta función en $x = 0$ estudiando sus derivadas laterales:
Por la izquierda de 0: $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \to f'(0) = \dfrac{1}{1+0^2} = 1$
Por la derecha de 0: $f'(x) = a \to f'(0) = a$
Luego la función será derivable en $x = 0$ siempre que $a = 1$.

Vemos que la función resultante es siempre creciente, puesto que su derivada es siempre positiva (la derivada es una función definida a trozos en la que las dos partes son funciones estrictamente positivas). Luego podremos encontrar $x_0 < x_1$ para los que $f(x_0) = f(x_1)$, y por tanto no se cumple una de las condiciones del teorema de Rolle. Además, si se cumplieran las condiciones del teorema de Rolle para ciertos $x_0 < x_1$, entonces existiría un punto intermedio $x_0 < x_2 < x_1$ para el cual $f'(x_2) = 0$, lo cual no es cierto.

8. $f'_a(x) = 5x^4 - 5a = 0 \Leftrightarrow x^4 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{a}$

$$f''_a(x) = 20x^3$$

La segunda derivada es siempre negativa para los valores de x negativos, luego, en particular, para $x = -\sqrt[4]{a}$ la segunda derivada será negativa y por tanto podemos garantizar, por el Criterio de la segunda derivada, que la función tendrá un máximo en $x = -\sqrt[4]{a}$.
De la misma forma, la segunda derivada es siempre positiva para los valores de x positivos, luego la función tendrá un mínimo en $x = \sqrt[4]{a}$.

Además, sabemos que $f_a(0) = a > 0$ y que, por ser una función polinómica de grado impar y su coeficiente principal es 1,

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Luego podemos garantizar que la función tendrá una única raíz en el intervalo $(-\infty, 0)$.
Con todo esto, la existencia de dos raíces en el intervalo $(0, -\infty)$ es equivalente a que el mínimo en $x = \sqrt[4]{a}$ sea negativo.

$$0 > f_a\left(\sqrt[4]{a}\right) = \left(\sqrt[4]{a}\right)^5 - 5a\sqrt[4]{a} + a = \sqrt[4]{a^5} - 5a\sqrt[4]{a} + a = a\sqrt[4]{a} - 5a\sqrt[4]{a} + a =$$
$$= -4a\sqrt[4]{a} + a = a\left(-4\sqrt[4]{a} + 1\right)$$

Puesto que $a > 0$, la condición anterior es equivalente a

$$-4\sqrt[4]{a} + 1 < 0 \Leftrightarrow -4\sqrt[4]{a} < -1 \Leftrightarrow 4\sqrt[4]{a} > 1 \Leftrightarrow \sqrt[4]{a} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow a > \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{4^4} = \frac{1}{256}$$

Así pues, la solución es $a > \dfrac{1}{256}$.