COMPENDIUM PAU ITALIA

Esame di Stato Matematica 1999-2023

Gerard Romo Garrido

TooMates Cooleccíón

Toomates Coolección

Los documentos de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "**licencias digitales**" con las que las editoriales pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo libro, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.
Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de licencias digitales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía**.
El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las editoriales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de unos libros de texto que actualmente son muy mediocres, y no mediante retorcidas técnicas comerciales.
 Todos los documentos se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas.

¡Libérate de la tiranía y mediocridad de las editoriales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos

Toomates Coolección **Problem Solving** (en español):
Geometría Axiomática , Problemas de Geometría (vol.1) , Problemas de Geometría (vol.2)
Introducción a la Geometría , Álgebra , Teoría de números , Combinatoria , Probabilidad
Trigonometría , Desigualdades , Números complejos

Toomates Coolección **Llibres de Text** (en catalán):
Nombres (Preàlgebra) , Àlgebra , Proporcionalitat , Mesures geomètriques , Geometria analítica
Compendium ACM4 , Compendium CFGS , Compendium PAP , Combinatòria i Probabilitat
Estadística , Trigonometria , Funcions , Nombres Complexos , Àlgebra Lineal ,
Geometria Lineal , Càlcul Infinitesimal , Programació Lineal , Mates amb Excel

Toomates Coolección **Compendiums**:
Ámbito PAU: Catalunya TEC Catalunya CCSS Galicia País Vasco Portugal A Portugal B Italia
Ámbito Canguro: ESP , CAT , FR , USA , UK , AUS
Ámbito Preolímpico: AMC 8 AMC 10 AMC 12 AIME Archimede HMMT Mathcounts CDP
Ámbito Olímpico español: OME , OMEFL , OMEC , OMEA , OMEM
Ámbito Olímpico Internacional: IGO , IMO , OMI , SMT , USAMO , INMO , CMO , REOIM
Recopilatorios Pizzazz!: Book A Book B Book C Book D Book E Pre-Algebra Algebra
Recopilatorios AHSME: Book 1 Book 2 Book 3 Book 4 Book 5 Book 6 Book 7 Book 8 Book 9

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales, para facilitar su edición.

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a **toomates@gmail.com**

¡No utilices una versión anticuada! Todos estos documentos se mejoran constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.

Encontrarás muchos más materiales para el aprendizaje de las matemáticas en **www.toomates.net**

Visita el **Canal Youtube** de Toomates: **https://www.youtube.com/c/GerardRomo**

Versión de este documento: **26/06/2023**

Índice.

1999	4	Cambio de nombre: "di maturità" a "esame di Stato"
2000	6	
2001	8	Año inicial estructura 2 problemas + máx. 10 "quesiti"
2002	11	
2003	14	
2004	17	
2005	21	
2006	23	
2007	25	
2008	28	
2009	29	
2010	31	
2011	33	
2012	35	
2013	37	
2014	40	Último año "Ordinamento e PNI"
2015	43	
2016	46	
2017	50	
2018	55	
2019	60	Prueba Matemáticas+Física 2 problemas + máx. 8 "quesiti"
2020		Prueba "COVID": interna en cada escuela
2021		Prueba "COVID": interna en cada escuela
2022		Prueba "COVID": interna en cada escuela
2023	64	Enunciados en italiano
	67	Soluciones en italiano
	78	Enunciados y soluciones en español (Por Gerard Romo)

Fuente.

http://www.matematica.it/tomasi/matls/index.htm
En esta página web se pueden encontrar las soluciones de todas estas pruebas.

Observación.

Aunque conservo la nomenclatura "PAU" (Prueba de acceso a la Universidad), cabe reseñar que la prueba italiana "Esame di Stato" no es una prueba de entrada en la Universidad, como en España, sino una prueba de salida del bachillerato.

Sessione ordinaria 1999

ESAME DI STATO LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva:

1. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale derivabile in un punto x_0.

    a. Dire se la condizione $f'(x_0) = 0$ è:

    - necessaria ma non sufficiente,
    - sufficiente ma non necessaria,
    - necessaria e sufficiente

    per concludere che la funzione ha un estremo relativo nel punto x_0. Fornire una esauriente dimostrazione della risposta.

    b. Posto $f(x) = \frac{x^3}{ax+b}$, dove a, b sono parametri reali, determinare tali parametri in modo che la curva γ di equazione cartesiana $y = f(x)$ abbia un estremo relativo nel punto di coordinate $\left(\frac{3}{4}; \frac{27}{32}\right)$.

    c. Controllato che la curva γ cercata si ottiene per $a = 2$, studiare tale curva e disegnarne l'andamento in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

    d. Nello stesso piano (Oxy) disegnare l'andamento della curva γ' di equazione $y = f'(x)$, dopo aver determinato, in particolare, le coordinate dei punti comuni a γ e γ'.

    e. Sussiste un'evidente relazione fra l'andamento di γ e quello di γ'. Quale?

2. In un piano α sono assegnate una circonferenza k di raggio di lunghezza data r ed una parabola p passante per gli estremi A, B di un diametro di k e avente come asse di simmetria l'asse del segmento AB. L'area del segmento parabolico delimitato dalla parabola p e dal segmento AB è $\frac{8}{3}r^2$.

    Dopo aver riferito il piano α ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy):

    a. determinare l'equazione della circonferenza k;
    b. determinare l'equazione della parabola p;
    c. trovare le coordinate dei punti comuni a k e p;
    d. calcolare le aree delle regioni piane in cui la parabola p divide il cerchio delimitato da k;
    e. stabilire per quale valore di r la maggiore di tali aree è uguale a $\frac{32 + 22\pi - 15\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}^2$.

3. Considerato il quadrato ABCD, sull'arco di circonferenza di centro A e raggio AB, contenuto nel quadrato, si prenda un punto T in modo che l'angolo $T\hat{A}B$ misuri 2x radianti. Si conduca quindi per T la retta tangente alla circonferenza e si chiamino P e Q i punti in cui essa seca le rette BC e CD rispettivamente.

   a. Esprimere in funzione di x il rapporto:
   $$f(x) = \frac{\overline{CP} + \overline{CQ}}{\overline{AT}}$$
   b. Studiare la funzione f(x) ottenuta, tenendo conto dei limiti imposti alla variabile x dalla questione geometrica, e disegnarne il grafico in un piano cartesiano ai fini della risoluzione del punto c).
   c. Utilizzare il grafico disegnato per determinare x in modo che il rapporto considerato sia uguale ad un numero reale k assegnato.
   d. Verificare che il rapporto f(x) può essere scritto nella seguente forma:
   $$f(x) = 2 \cdot \frac{\operatorname{sen} 2x + \cos 2x}{\operatorname{sen} 2x + \cos 2x + 1}.$$
   e. Stabilire che risulta:
   $$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1.$$

Durata massima della prova: 5 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva:

1. Sia f(x) una funzione reale di variabile reale, continua su tutto l'asse reale, tale che:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 2 \quad \text{e} \quad \int_0^2 f(x)\,dx = -5 \qquad [1]$$

   a. Di ciascuno dei seguenti integrali:

$$\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx, \quad \int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx, \quad \int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right)dx, \quad \int_0^1 f(2x)\,dx,$$

   dire se le condizioni [1] sono sufficienti per calcolarne il valore e in caso di risposta affermativa qual è questo.

   b. Posto: $f(x) = ax^2 + bx + c$, dove a, b, c sono parametri reali con $a \neq 0$, determinare le curve di equazione $y = f(x)$ che soddisfano alle condizioni [1].
   c. Dimostrare che ognuna delle curve trovate ha uno ed un solo punto di flesso che è centro di simmetria per la curva medesima.
   d. Determinare quella, tra tali curve, che ha il flesso nel punto di ordinata – 4 .
   e. Fra le curve suddette determinare, infine, quelle che hanno punti estremanti e quelle che non ne hanno.

2. Il rettangolo ABCD è tale che la retta che congiunge i punti medi dei suoi lati più lunghi, AB e CD, lo divide in due rettangoli simili a quello dato. Tali lati hanno lunghezza assegnata a.

   a. Determinare la lunghezza dei lati minori del rettangolo.
   b. Sulla retta condotta perpendicolarmente al piano del rettangolo nel punto medio del lato AD prendere un punto V in modo che il piano dei punti V, B, C formi col piano del rettangolo dato un angolo di coseno $\frac{2}{\sqrt{13}}$. Calcolare il volume della piramide di vertice V e base ABCD.
   c. Condotto il piano a parallelo al piano della faccia VAD della piramide, ad una distanza x da questo, in modo però che a sechi la piramide stessa, esprimere in funzione di x l'area del poligono sezione.
   d. Calcolare infine i volumi delle due parti in cui il piano a divide la piramide nel caso in cui $x = \frac{a}{2}$.

3. Il candidato dimostri i seguenti enunciati:
    a. Fra tutti i triangoli rettangoli aventi la stessa ipotenusa, quello isoscele ha l'area massima.
    b. Fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una data sfera, quello di minima area laterale ha il suo vertice distante dalla superficie sferica della quantità $r\sqrt{2}$, se r è il raggio della sfera.

    Il candidato chiarisca, infine, il significato di $n!$ (fattoriale di n) e il suo legame con i coefficienti binomiali.

Durata massima della prova: 5 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

Si consideri la seguente relazione tra le variabili reali x, y:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a},$$

dove a è un parametro reale positivo.

a) Esprimere y in funzione di x e studiare la funzione così ottenuta, disegnandone il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
b) Determinare per quali valori di a la curva disegnata risulta tangente o secante alla retta t di equazione x+y=4.
c) Scrivere l'equazione della circonferenza k che ha il centro nel punto di coordinate (1,1) e intercetta sulla retta t una corda di lunghezza $2\sqrt{2}$.
d) Calcolare le aree delle due regioni finite di piano in cui il cerchio delimitato da k è diviso dalla retta t.
e) Determinare per quale valore del parametro a il grafico, di cui al precedente punto a), risulta tangente alla circonferenza k.

PROBLEMA 2.

Considerato un qualunque triangolo ABC, siano D ed E due punti interni al lato BC tali che:

$$\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EC}.$$

Siano poi M ed N i punti medi rispettivamente dei segmenti AD ed AE.

a) Dimostrare che il quadrilatero DENM è la quarta parte del triangolo ABC.
b) Ammesso che l'area del quadrilatero DENM sia $\frac{45}{2}a^2$, dove a è una lunghezza assegnata, e ammesso che l'angolo $A\hat{B}C$ sia acuto e si abbia inoltre: $\overline{AB}=13\,a$, $\overline{BC}=15\,a$, verificare che tale quadrilatero risulta essere un trapezio rettangolo.
c) Dopo aver riferito il piano della figura, di cui al precedente punto b), ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della parabola, avente l'asse perpendicolare alla retta BC e passante per i punti M, N, C.
d) Calcolare, infine, le aree delle regioni in cui tale parabola divide il triangolo ADC.

557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO.

1. Indicata con f(x) una funzione reale di variabile reale, si sa che f(x) $\rightarrow l$ per x $\rightarrow a$, essendo l ed a numeri reali. Dire se ciò è sufficiente per concludere che f(a) = l e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.
2. Sia f(x) una funzione reale di variabile reale, continua nel campo reale, tale che f(0)=2. Calcolare:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{2\,x\,e^x},$$

dove e è la base dei logaritmi naturali.

3. Si consideri il cubo di spigoli AA', BB', CC', DD', in cui due facce opposte sono i quadrati ABCD e A'B'C'D'. Sia E il punto medio dello spigolo AB. I piani ACC'A' e D'DE dividono il cubo in quattro parti. Dimostrare che la parte più estesa è il quintuplo di quella meno estesa.

4. Un tronco di piramide ha basi di aree B e b ed altezza h. Dimostrare, col metodo preferito, che il suo volume V è espresso dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{3}h\left(B + b + \sqrt{Bb}\right).$$

In ogni caso esplicitare ciò che si ammette ai fini della dimostrazione.

5. Sia f(x) una funzione reale di variabile reale, derivabile in un intervallo [a,b] e tale che, per ogni x di tale intervallo, risulti f '(x) = 0. Dimostrare che f(x) è costante in quell'intervallo.

6. Dimostrare che si ha:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

dove n, k sono numeri naturali qualsiasi, con $n > k > 0$.

7. Fra i triangoli inscritti in un semicerchio quello isoscele ha:
   a) area massima e perimetro massimo;
   b) area massima e perimetro minimo;
   c) area minima e perimetro massimo;
   d) area minima e perimetro minimo.
   Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

8. Considerata la funzione:

$$f(x) = a\,x^3 + 2\,a\,x^2 - 3\,x\,,$$

dove a è un parametro reale non nullo, determinare i valori di a per cui essa ha un massimo e un minimo relativi e quelli per cui non ha punti estremanti.

9. Il limite della funzione $\dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{x}$, quando x tende a $+\infty$,
   a) è uguale a 0;
   b) è uguale ad 1;
   c) è un valore diverso dai due precedenti;
   d) non è determinato.

   Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

10. Si consideri la funzione $\dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x - \cos x}$. Stabilire se si può calcolarne il limite per $x \to +\infty$ e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al teorema di De L'Hôpital.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva k di equazione $y = f(x)$, dove è:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^3 + 2}.$$

a) Determinare per quali valori di x essa è situata nel semipiano $y>0$ e per quali nel semipiano $y<0$.
b) Trovare l'equazione della parabola passante per l'origine O degli assi e avente l'asse di simmetria parallelo all'asse y, sapendo che essa incide ortogonalmente la curva k nel punto di ascissa -1 (*N.B.: si dice che una curva incide ortogonalmente un'altra in un punto se le rette tangenti alle due curve in quel punto sono perpendicolari*).
c) Stabilire se la retta tangente alla curva k nel punto di ascissa -1 ha in comune con k altri punti oltre a quello di tangenza.
d) Determinare in quanti punti la curva k ha per tangente una retta parallela all'asse x.
e) Enunciare il teorema di Lagrange e dire se sono soddisfatte le condizioni perché esso si possa applicare alla funzione $f(x)$ assegnata, relativamente all'intervallo $-\sqrt{2} \le x \le 0$.

PROBLEMA 2

Si considerino le lunghezze seguenti:

$$[1] \qquad a + 2x, \qquad a - x, \qquad 2a - x,$$

dove a è una lunghezza nota non nulla ed x è una lunghezza incognita.

a) Determinare per quali valori di x le lunghezze [1] si possono considerare quelle dei lati di un triangolo non degenere.
b) Stabilire se, fra i triangoli non degeneri i cui lati hanno le lunghezze [1], ne esiste uno di area massima o minima.
c) Verificato che per $x = \frac{a}{4}$ le [1] rappresentano le lunghezze dei lati di un triangolo, descriverne la costruzione geometrica con riga e compasso e stabilire se si tratta di un triangolo rettangolo, acutangolo o ottusangolo.
d) Indicato con ABC il triangolo di cui al precedente punto c), in modo che BC sia il lato maggiore, si conduca per A la retta perpendicolare al piano del triangolo e si prenda su di essa un punto D tale che AD sia lungo a: calcolare un valore approssimato a meno di un grado (sessagesimale) dell'ampiezza dell'angolo formato dai due piani DBC e ABC.

QUESTIONARIO

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

1. Il rapporto fra la base maggiore e la base minore di un trapezio isoscele è 4. Stabilire, fornendone ampia spiegazione, se si può determinare il valore del rapporto tra i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare il trapezio di un giro completo dapprima intorno alla base maggiore e poi intorno alla base minore o se i dati a disposizione sono insufficienti.

2. Due tetraedri regolari hanno rispettivamente aree totali A' e A'' e volumi V' e V''. Si sa che $\frac{A'}{A''} = 2$. Calcolare il valore del rapporto $\frac{V'}{V''}$

3. Considerati i numeri reali a, b, c, d - comunque scelti - se a>b e c>d allora:
   A) a+d > b+c;
   B) a-d > b-c;
   C) ad > bc;
   D) $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.
   Una sola alternativa è corretta: individuarla e motivare esaurientemente la risposta.

1. Si consideri la seguente proposizione: “La media aritmetica di due numeri reali positivi, comunque scelti, è maggiore della loro media geometrica”. Dire se è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta.

2. Determinare, se esistono, i numeri a, b in modo che la seguente relazione:
$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+1}$$
   sia un’identità.

3. Si consideri la funzione:
$$f(x) = (2x-1)^7 (4-2x)^5 .$$
   Stabilire se ammette massimo o minimo assoluti nell’intervallo $\frac{1}{2} \le x \le 2$.

4. Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione f(x) tale che:
$$f(x) = \int_x^{x+1} \ln t \, dt , \quad \text{con } x > 0.$$

5. La funzione reale di variabile reale $f(x)$ è continua nell’intervallo chiuso e limitato [1,3] e derivabile nell’intervallo aperto (1,3). Si sa che $f(1) = 1$ e inoltre $0 \le f'(x) \le 2$ per ogni x dell’intervallo (1,3). Spiegare in maniera esauriente perché risulta $1 \le f(3) \le 5$.

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

6. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani (O*xy*), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2} \ .$$

Tale luogo è costituito da:

A) un punto;
B) due punti;
C) infiniti punti;
D) nessun punto.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

1. La funzione reale di variabile reale f(x), continua per ogni x, è tale che:

$$\int_0^2 f(x)\,dx = a \ , \qquad \int_0^6 f(x)\,dx = b \ ,$$

dove a, b sono numeri reali.

Determinare, se esistono, i valori a, b per cui risulta:

$$\int_0^3 f(2x)\,dx = \ln 2 \qquad e \qquad \int_1^3 f(2x)\,dx = \ln 4 \ .$$

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Si consideri un tetraedro regolare T di vertici A, B, C, D.

a) Indicati rispettivamente con V ed S il volume e l'area totale di T e con r il raggio della sfera inscritta in T, trovare una relazione che leghi V, S ed r.
b) Considerato il tetraedro regolare T' avente per vertici i centri delle facce di T, calcolare il rapporto fra le lunghezze degli spigoli di T e T' e il rapporto fra i volumi di T e T'.
c) Condotto il piano α, contenente la retta AB e perpendicolare alla retta CD nel punto E, e posto che uno spigolo di T sia lungo s, calcolare la distanza di E dalla retta AB.
d) Considerata nel piano α la parabola p avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B ed E, riferire questo piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali e trovare l'equazione di p.
e) Determinare per quale valore di s la regione piana delimitata dalla parabola p e dalla retta EA ha area $\frac{\sqrt{2}}{3}$ cm^2.

PROBLEMA 2

È assegnata la funzione $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+m+|m|}$, dove m è un parametro reale.

a) Determinare il suo dominio di derivabilità.
b) Calcolare per quale valore di m la funzione ammette una derivata che risulti nulla per $x = 1$.
c) Studiare la funzione f(x) corrispondente al valore di m così trovato e disegnarne il grafico γ in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver stabilito quanti sono esattamente i flessi di γ ed aver fornito una spiegazione esauriente di ciò.
d) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico γ, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 1$.

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Dopo aver fornito la definizione di “rette sghembe”, si consideri la seguente proposizione: «Comunque si prendano nello spazio tre rette x, y, z, due a due distinte, se x ed y sono sghembe e, così pure, se sono sghembe y e z allora anche x e z sono sghembe». Dire se è vera o falsa e fornire un’esauriente spiegazione della risposta.
2. Un piano interseca tutti gli spigoli laterali di una piramide quadrangolare regolare: descrivere le caratteristiche dei possibili quadrilateri sezione a seconda della posizione del piano rispetto alla piramide.
3. Dal punto A, al quale è possibile accedere, è visibile il punto B, al quale però non si può accedere in alcun modo, così da impedire una misura diretta della distanza AB. Dal punto A si può però accedere al punto P, dal quale, oltre ad A, è visibile B in modo che, pur rimanendo impossibile misurare direttamente la distanza PB, è tuttavia possibile misurare la distanza AP. Disponendo degli strumenti di misura necessari e sapendo che P non è allineato con A e B, spiegare come si può utilizzare il teorema dei seni per calcolare la distanza AB.
4. Il dominio della funzione $f(x) = \ln\left\{\sqrt{x+1} - (x-1)\right\}$ è l’insieme degli x reali tali che:

   A) $-1<x\leq 3$; B) $-1\leq x<3$; C) $0<x\leq 3$; D) $0\leq x<3$.

   Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta effettuata.
5. La funzione $2x^3-3x^2+2$ ha un solo zero reale, vale a dire che il suo grafico interseca una sola volta l’asse delle ascisse. Fornire un’esauriente dimostrazione di questo fatto e stabilire se lo zero della funzione è positivo o negativo.
6. La derivata della funzione $f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt$ è la funzione $f\,'(x) = 2x e^{-x^4}$. Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l’affermazione.
7. Considerati i primi n numeri naturali a partire da 1:

   $$1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n-1,\ n,$$

   moltiplicarli combinandoli due a due in tutti i modi possibili. La somma dei prodotti ottenuti risulta uguale a:

   A) $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$; B) $\frac{1}{3}n(n^2-1)$; C) $\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)$; D) $\frac{1}{24}n(n^2-1)(3n+2)$.

   Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

8. x ed y sono due numeri naturali dispari tali che $x - y = 2$. Il numero $x^3 - y^3$:
   A) è divisibile per 2 e per 3.
   B) è divisibile per 2 ma non per 3.
   C) è divisibile per 3 ma non per 2.
   D) non è divisibile né per 2 né per 3.

   Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.
9. Si consideri una data estrazione in una determinata Ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibili cinquine che contengono i numeri 1 e 90.
10. Il valore dell'espressione $\log_2 3 \cdot \log_3 2$ è 1. Dire se questa affermazione è vera o falsa e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sia *f* la funzione definita da: $f(x) = 2x - 3x^3$

1. Disegnate il grafico *G* di *f*.
2. Nel primo quadrante degli assi cartesiani, considerate la retta $y = c$ che interseca *G* in due punti distinti e le regioni finite di piano *R* e *S* che essa delimita con G. Precisamente: *R* delimitata dall'asse y, da *G* e dalla retta $y = c$ e *S* delimitata da *G* e dalla retta $y = c$.
3. Determinate *c* in modo che *R* e *S* siano equivalenti e determinate le corrispondenti ascisse dei punti di intersezione di *G* con la retta $y = c$;
4. determinate la funzione *g* il cui grafico è simmetrico di *G* rispetto alla retta $y = \frac{4}{9}$

PROBLEMA 2

ABC è un triangolo rettangolo di ipotenusa *BC*.

1. Dimostrate che la mediana relativa a *BC* è congruente alla metà di *BC*.
2. Esprimete le misure dei cateti di *ABC* in funzione delle misure, supposte assegnate, dell'ipotenusa e dell'altezza ad essa relativa.
3. Con $BC = \sqrt{3}$ *metri*, determinate il cono ***K*** di volume massimo che si può ottenere dalla rotazione completa del triangolo attorno ad uno dei suoi cateti e la capacità in *litri* di ***K***.
4. Determinate la misura approssimata, in radianti ed in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale del cono ***K***.

QUESTIONARIO

1. Trovate due numeri reali *a* e *b*, a≠ b, che hanno somma e prodotto uguali.

2. Provate che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.

3. Date un esempio di funzione *f(x)* con un massimo relativo in *(1, 3)* e un minimo relativo in *(-1, 2)*.
4. Dimostrate che l'equazione $e^x + 3x = 0$ ammette una e una sola soluzione reale.

<u>M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO</u>

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

5. Di una funzione *g(x)* , non costante, si sa che:

$$\lim_{x \alpha \ 2} g(x) = 3 \ \text{ e } \ g(2) = 4$$

   Trovate una espressione di g(x) .
6. Verificate che le due funzioni $f(x) = 3\log x$ e $g(x) = \log(2x)^3$ hanno la stessa derivata. Quale giustificazione ne date?
7. Un triangolo ha due lati e l'angolo da essi compreso che misurano rispettivamente *a, b* e δ. Quale è il valore di δ che massimizza l'area del triangolo?
8. La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi *sessagesimali*, *i radianti*, i gradi *centesimali*. Quali ne sono le definizioni?
9. Calcolate:

$$\int_0^1 arcsenx dx$$

10. Considerate gli insiemi $A = \{1,2,3,4\}$ e $\mathrm{B} = \{\mathrm{a, b, c}\}$; quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?

Durata massima della prova: 6 ore
E' consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

<u>Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO</u>

CORSO SPERIMENTALE

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sia γ la curva d'equazione:

$$y = ke^{-\lambda x^2}$$

ove *k* e λ sono parametri positivi.

1. Si studi e si disegni γ;
2. si determini il rettangolo di area massima che ha un lato sull'asse x e i vertici del lato opposto su γ;
3. sapendo che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$ e assumendo $\lambda = \frac{1}{2}$, si trovi il valore da attribuire a *k* affinché l'area compresa tra γ e l'asse x sia 1;
4. per i valori di *k* e λ sopra attribuiti, γ è detta *curva standard degli errori* o *delle probabilità* o *normale di Gauss* (da *Karl Friedrich Gauss, 1777-1855*). Una *media* $\mu \neq 0$ e uno *scarto quadratico medio* $\sigma \neq 1$ come modificano l'equazione e il grafico?

PROBLEMA 2

Sia *f* la funzione così definita:

$$f(x) = sen\frac{\pi}{a}x\cos\frac{\pi}{2b}x + x$$

con *a* e *b* numeri reali diversi da zero.

1. Si dimostri che, comunque scelti *a* e *b*, esiste sempre un valore di x tale che $f(x) = \frac{a+b}{2}$
2. Si consideri la funzione *g* ottenuta dalla *f* ponendo *a = 2b =2*. Si studi g e se ne tracci il grafico.
3. Si consideri per x > 0 il primo punto di massimo relativo e se ne fornisca una valutazione approssimata applicando un metodo iterativo a scelta.

<u>Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO</u>

CORSO SPERIMENTALE

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi *sessagesimali*, *i radianti*, i gradi *centesimali*. Quali ne sono le definizioni?
2. Si provi che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.
3. Un solido viene trasformato mediante una similitudine di rapporto 3. Come varia il suo volume? Come varia l'area della sua superficie?
4. Dati gli insiemi $A = \{1,2,3,4\}$ e $\mathrm{B} = \{\mathrm{a, b, c}\}$ quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?
5. Dare un esempio di funzione g, non costante, tale che:
$$\lim_{x \to 2} g(x) = 3 \text{ e } g(2) = 4$$
6. Dare un esempio di funzione *f(x)* con un massimo relativo in *(1, 3)* e un minimo relativo in *(-1, 2)*.
7. Tra i triangoli di base assegnata e di uguale area, dimostrare che quello isoscele ha perimetro minimo.
8. Si trovino due numeri reali a e b, $a \neq b$, che hanno somma e prodotto uguali.
9. Si dimostri che l'equazione $e^x + 3x = 0$ ammette una e una sola soluzione e se ne calcoli un valore approssimato utilizzando un metodo iterativo a scelta.
10. Nel piano è data la seguente trasformazione:
$$x \to x\sqrt{3} - y$$
$$y \to x + y\sqrt{3}$$

Di quale trasformazione si tratta?

Durata massima della prova: 6 ore
E' consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e cinque quesiti scelti nel questionario.

PROBLEMA 1

Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy, ortogonale e monometrico, si consideri la regione *R*, finita, delimitata dagli assi coordinati e dalla parabola λ d'equazione: $y = 6 - x^2$.

1. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di *R* attorno all'asse *y*.
2. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di *R* attorno alla retta $y = 6$.
3. Si determini il valore di *k* per cui la retta $y = k$ dimezza l'area di *R*.
4. Per $0 < t < \sqrt{6}$ sia $A(t)$ l'area del triangolo delimitato dagli assi e dalla tangente a λ nel suo punto di ascissa *t*. Si determini $A(1)$.
5. Si determini il valore di *t* per il quale $A(t)$ è minima.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione *f* definita sull'intervallo $[0\,;+\infty[$ da:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\log x) + 1 \quad se \quad x > 0 \end{cases}$$

e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy, ortogonale e monometrico.

1. Si stabilisca se *f* è *continua* e *derivabile* in 0.
2. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha, sull'intervallo $[0\,;+\infty[$, un'unica radice reale.
3. Si disegni C e si determini l'equazione della retta *r* tangente a C nel punto di ascissa $x = 1$.
4. Sia *n* un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di *n*, l'area A_n del dominio piano delimitato dalla curva C, dalla retta tangente *r* e dalle due rette: $x = \frac{1}{n}$ e $x = 1$.
5. Si calcoli il limite per $n \to +\infty$ di A_n e si interpreti il risultato ottenuto.

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare $sen 18°$, $sen 36°$.
2. Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di *0,4 litri*, quali devono essere le sue dimensioni in *centimetri*, affinché sia minima la quantità di materiale necessario per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).
3. Si dimostri che la curva $y = x \, sen \, x$ è tangente alla retta $y = x$ quando $sen \, x = 1$ ed è tangente alla retta $y = -x$ quando $sen \, x = -1$
4. Si dimostri che tra tutti i rettangoli di dato perimetro, quello di area massima è un quadrato.
5. Il numero *e* di *Nepero* [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)]: come si definisce? Perché la derivata di e^x è e^x ?
6. Come si definisce $n!$ (*n* fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perchè?
7. Se $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3$, per quanti numeri reali *k* è $f(k) = 2$? Si illustri il ragionamento seguito.
8. I centri delle facce di un cubo sono i vertici di un ottaedro. E' un ottaedro regolare? Quale è il rapporto tra i volumi dei due solidi?
9. Si calcoli, senza l'aiuto della calcolatrice, il valore di:
$$sen^2(35°) + sen^2(55°)$$
ove le misure degli angoli sono in gradi sessagesimali.
10. Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione $f(x) = arctg \, x - arctg \, \frac{x-1}{x+1}$ è costante, indi si calcoli il valore di tale costante.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Un filo metallico di lunghezza λ viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

b) la somma delle due aree sia minima?

c) la somma delle due aree sia massima?

Una aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

PROBLEMA 2

Si considerino le funzioni *f* e *g* determinate da $f(x) = \log x$ e $g(x) = ax^2$, essendo a un parametro reale e il logaritmo in base *e*.

1. Si discuta, al variare di a, l'equazione $\log x = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di a i grafici di *f* e *g* sono tra loro tangenti.
2. Si calcoli, posto $a = 1$, l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni f e g e dalle rette $x = 1$ e $x = 2$.
3. Si studi la funzione $h(x) = \log x - ax^2$ scegliendo per a un valore numerico maggiore di $\frac{1}{2e}$ e se ne disegni il grafico.

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64[a] casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.
2. I poliedri regolari – noti anche come *solidi platonici* – sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?
3. Un foglio di carta deve contenere: un'area di stampa di *50 cm*^{2}, margini superiore e inferiore di *4 cm* e margini laterali di *2 cm*. Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che si può utilizzare?
4. La capacità di un serbatoio è pari a quella del cubo inscritto in una sfera di un metro di diametro. Quanti sono, approssimativamente, i litri di liquido che può contenere il serbatoio?
5. Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in N$.
6. L'equazione risolvente un dato problema è: $k\cos 2x - 5k + 2 = 0$ dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15° < x < 45°$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.
7. La funzione $f(x) = x^3 - 2x^2$ soddisfa le condizioni del teorema di *Lagrange* nell'intervallo $[0,1]$? Se si, trova il punto ξ che compare nella formula
$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$
8. La funzione $f(x) = tgx$ assume valori di segno opposto negli estremi dell'intervallo $I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$, eppure non esiste alcun $x \in I$ tale che $f(x) = 0$. È così? Perché?
9. Della funzione $f(x)$ si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che: $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Puoi determinare $f(x)$?
10. La funzione $f(x) = a \operatorname{sen} x + b \cos x$ ha un estremo relativo per $x = \frac{4\pi}{3}$ ed è $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1$. Si trovino *a* e *b* e si dica quale è il periodo di $f(x)$.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Sessione ordinaria 2007

Seconda prova scritta

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Si considerino i triangoli la cui base è $AB = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $C\hat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo $A\hat{B}C$.

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da *C*.
2. Si rappresenti γ, tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
3. Si determini l'ampiezza dell'angolo $A\hat{B}C$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati *AC* e *BC* e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
4. Si provi che se $A\hat{B}C = 36°$ allora è $AC = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

PROBLEMA 2

Si consideri un cerchio *C* di raggio r.

1. Tra i triangoli isosceli inscritti in *C* si trovi quello di area massima.
2. Si denoti con S_n l'area del poligono regolare di *n* lati inscritto in *C*. Si dimostri che $S_n = \dfrac{n}{2} r^2 sen \dfrac{2\pi}{n}$ e si trovi un'analoga espressione per l'area del poligono regolare di *n* lati circoscritto a *C*.
3. Si calcoli il limite di S_n per $n \to \infty$.
4. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.

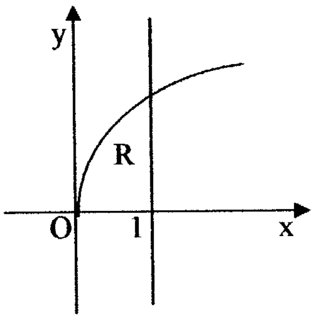
M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. La regione R delimitata dal grafico di $y = 2\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta x = 1 (in figura) è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di S.



2. Le misure dei lati di un triangolo sono 40, 60 e 80 cm . Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.
3. Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:
$$x^3 - x^2 - k + 1 = 0$$
4. Un serbatoio di olio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 1 metro. Si dica quanti litri di olio il serbatoio può contenere.
5. Si mostri che la funzione $y = x^3 + 8$ soddisfa le condizioni del *teorema del valor medio* (o *teorema di Lagrange*) sull'intervallo [-2, 2]. Si determinino i valori medi forniti dal teorema e se ne illustri il significato geometrico.
6. Si sa che il prezzo p di un abito ha subìto una maggiorazione del 6% e, altresì, una diminuzione del 6%; non si ha ricordo, però, se sia avvenuta prima l'una o l'altra delle operazioni. Che cosa si può dire del prezzo finale dell'abito?
7. Se $f(x)$ è una funzione reale dispari (ossia il suo grafico cartesiano è simmetrico rispetto all'origine), definita e integrabile nell'intervallo [-2, 2], che dire del suo integrale esteso a tale intervallo?
Quanto vale nel medesimo intervallo l'integrale della funzione $3+ f(x)$?
8. Si risolva l'equazione: $4\binom{n}{4} = 15\binom{n-2}{3}$
9. Si calcoli l'integrale indefinito $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ e, successivamente, si verifichi che il risultato di $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ è in accordo con il suo significato geometrico.
10. Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani* e a *paralleli*, a *latitudini* e a *longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera S e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta r passante per il centro di S, come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

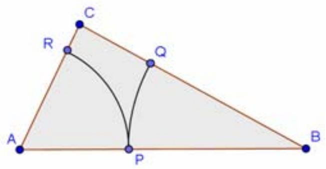
Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Il triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa AB = a e l'angolo $C\hat{A}B = \frac{\pi}{3}$.

a) Si descriva, internamente al triangolo, con centro in B e raggio x, l'arco di circonferenza di estremi P e Q rispettivamente su AB e su BC. Sia poi R l'intersezione con il cateto CA dell'arco di circonferenza di centro A e raggio AP. Si specifichino le limitazioni da imporre ad x affinché la costruzione sia realizzabile.



b) Si esprima in funzione di x l'area S del quadrilatero mistilineo PQCR e si trovi quale sia il valore minimo e quale il valore massimo di S(x).

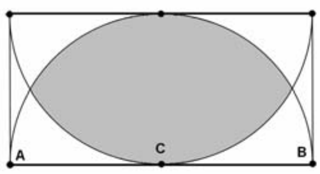
c) Tra i rettangoli con un lato su AB e i vertici del lato opposto su ciascuno dei due cateti si determini quello di area massima.

d) Il triangolo ABC è la base di un solido W. Si calcoli il volume di W sapendo che le sue sezioni, ottenute tagliandolo con piani perpendicolari ad AB, sono tutti quadrati.

PROBLEMA 2

Assegnato nel piano il semicerchio Γ di centro C e diametro AB = 2 , si affrontino le seguenti questioni:

a) Si disegni nello stesso semipiano di Γ un secondo semicerchio Γ_1 tangente ad AB in C e di uguale raggio 1. Si calcoli l'area dell'insieme piano intersezione dei due semicerchi Γ e Γ_1



b) Si trovi il rettangolo di area massima inscritto in Γ.

c) Sia P un punto della semicirconferenza di Γ, H la sua proiezione ortogonale su AB. Si ponga $P\hat{C}B = x$ e si esprimano in funzione di x le aree S_1 e S_2 dei triangoli APH e PCH.

Si calcoli il rapporto $f(x) = \frac{S_1(x)}{S_2(x)}$

d) Si studi *f(x)* e se ne disegni il grafico prescindendo dai limiti geometrici del problema.

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si consideri la seguente proposizione: " Se due solidi hanno uguale volume, allora, tagliati da un fascio di piani paralleli, intercettano su di essi sezioni di uguale area". Si dica se essa è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.
2. Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio, si provi che $sen\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$
3. Fra le casseruole, di forma cilindrica, aventi la stessa superficie S (quella laterale più il fondo) qual è quella di volume massimo?
4. Si esponga la regola del marchese *de L'Hôpital* (1661 – 1704) e la si applichi per dimostrare che è: $\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{x^{2008}}{2^x} = 0$
5. Si determini un polinomio *P(x)* di terzo grado tale che:
$$P(0) = P'(0) = 0,\ P(1) = 0 \quad e \quad \int_0^1 P(x)dx = \frac{1}{12}$$
6. Se $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$ con $n>3$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?
7. Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:
$$x^3 - 3x^2 + k = 0.$$
8. Sia f la funzione definita da $f(x) = \pi^x - x^\pi$. Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x = \pi$.
9. Sia $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$; esiste $\lim_{x \mapsto 1} f(x)$? Si giustifichi la risposta.
10. Secondo il codice della strada il segnale di "salita ripida" (fig. a lato) preavverte di un tratto di strada con pendenza tale da costituire pericolo. La pendenza vi è espressa in percentuale e nell'esempio è 10%.
Se si sta realizzando una strada rettilinea che, con un percorso di 1,2 km, supera un dislivello di 85 m, qual è la sua inclinazione (in gradi sessagesimali)? Quale la percentuale da riportare sul segnale?

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Sessione ordinaria 2009
Seconda prova scritta

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

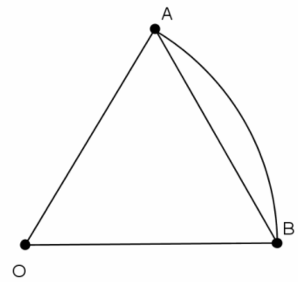
Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

È assegnato il settore circolare *AOB* di raggio r e ampiezza x (r e x sono misurati, rispettivamente, in *metri* e *radianti*).

1. Si provi che l'area S compresa fra l'arco e la corda *AB* è espressa, in funzione di x, da $S(x) = \frac{1}{2} r^2 (x - \operatorname{sen} x)$ con $x \in [0,\ 2\pi]$.
2. Si studi come varia $S(x)$ e se ne disegni il grafico (avendo posto $r = 1$).
3. Si fissi l'area del settore *AOB* pari a 100 m^2. Si trovi il valore di r per il quale è minimo il perimetro di *AOB* e si esprima il corrispondente valore di x in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).



4. Sia $r = 2$ e $x = \frac{\pi}{3}$. Il settore AOB è la base di un solido *W* le cui sezioni ottenute con piani ortogonali ad *OB* sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di *W*.

PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si tracci il grafico G_f della funzione $f(x) = \log x$ (*logaritmo naturale*)

1. Sia *A* il punto d'intersezione con l'asse *y* della tangente a G_f in un suo punto *P*. Sia *B* il punto d'intersezione con l'asse *y* della parallela per *P* all'asse x. Si dimostri che, qualsiasi sia *P*, il segmento *AB* ha lunghezza costante. Vale la stessa proprietà per il grafico G_g della funzione $g(x) = \log_a x$ con a reale positivo diverso da 1?
2. Sia δ l'inclinazione sull'asse x della retta tangente a G_g nel suo punto di ascissa 1. Per quale valore della base a è $\delta = 45°$? E per quale valore di a è $\delta = 135°$?
3. Sia **D** la regione del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati, da G_f e dalla retta d'equazione $y = 1$. Si calcoli l'area di **D**.
4. Si calcoli il volume del solido generato da **D** nella rotazione completa attorno alla retta d'equazione $x = -1$.

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

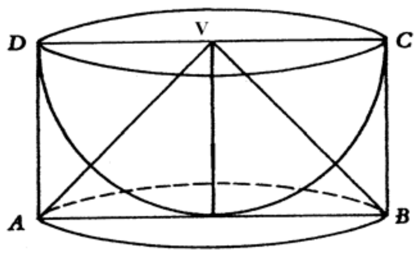
CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si trovi la funzione $f(x)$ la cui derivata è $\operatorname{sen} x$ e il cui grafico passa per il punto (0, 2).
2. Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Tra le possibili *applicazioni* (o *funzioni*) di A in B, ce ne sono di *suriettive*? Di *iniettive*? Di *biiettive*?
3. Per quale o quali valori di k la curva d'equazione $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ ha una sola tangente orizzontale?
4. *"Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni"*. Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.
5. Si considerino le seguenti espressioni:
   $$\frac{0}{1};\ \frac{0}{0};\ \frac{1}{0};\ 0^0$$
   A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.
6. Si calcoli: $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.
7. Si dimostri l'identità $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$ con n e k naturali e $n > k$.
8. Si provi che l'equazione:
   $$x^{2009} + 2009x + 1 = 0$$
   ha una sola radice compresa fra -1 e 0.
9. Nei *"Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze"*, Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio r e il cilindro ad essa circoscritto. La *scodella* si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro.
   Si dimostri, utilizzando il principio di *Cavalieri*, che la *scodella* ha volume pari al cono di vertice V in figura.



10. Si determini il periodo della funzione $f(x) = \cos 5x$.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sia *ABCD* un quadrato di lato 1, *P* un punto di *AB* e γ la circonferenza di centro *P* e raggio *AP*. Si prenda sul lato *BC* un punto *Q* in modo che sia il centro di una circonferenza λ passante per *C* e tangente esternamente a γ.

1. Se $AP = x$, si provi che il raggio di λ in funzione di x è dato da $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$.
2. Riferito il piano ad un sistema di coordinate *Oxy*, si tracci, indipendentemente dalle limitazioni poste ad x dal problema geometrico, il grafico di $f(x)$. La funzione $f(x)$ è invertibile? Se sì, quale è il grafico della sua inversa?
3. Sia $g(x) = \left|\frac{1-x}{1+x}\right|$, $x \in R$; quale è l'equazione della retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto R (0, 1)? E nel punto S (1, 0)? Cosa si può dire della tangente al grafico di $g(x)$ nel punto S?
4. Si calcoli l'area del triangolo mistilineo *ROS*, ove l'arco *RS* appartiene al grafico di $f(x)$ o, indifferentemente, di $g(x)$.

PROBLEMA 2

Nel piano, riferito a coordinate cartesiane *Oxy*, si consideri la funzione *f* definita da $f(x) = b^x$ ($b > 0$, $b \neq 1$).

1. Sia G_b il grafico di $f(x)$ relativo ad un assegnato valore di b. Si illustri come varia G_b al variare di b.
2. Sia *P* un punto di G_b . La tangente a G_b in *P* e la parallela per *P* all'asse *y* intersecano l'asse *x* rispettivamente in *A* e in B. Si dimostri che, qualsiasi sia *P*, il segmento *AB* ha lunghezza costante. Per quali valori di *b* la lunghezza di *AB* è uguale a 1?
3. Sia *r* la retta passante per *O* tangente a G_e (e = numero di *Nepero*). Quale è la misura in radianti dell'angolo che la retta *r* forma con il semiasse positivo delle ascisse?
4. Si calcoli l'area della regione del primo quadrante delimitata dall'asse *y*, da G_e e dalla retta d'equazione $y = e$.

Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Sia $p(x)$ un polinomio di grado n. Si dimostri che la sua derivata n-esima è $p^{(n)}(x) = n!\ a_n$ dove a_n è il coefficiente di x^n.

2. Siano ABC un triangolo rettangolo in A, r la retta perpendicolare in B al piano del triangolo e P un punto di r distinto da B. Si dimostri che i tre triangoli PAB, PBC, PCA sono triangoli rettangoli.

3. Sia γ il grafico di $f(x) = e^{3x}+1$. Per quale valore di x la retta tangente a γ in $(x, f(x))$ ha pendenza uguale a 2?

4. Si calcoli: $\lim\limits_{x\to\infty} 4x\sin\dfrac{1}{x}$

5. Un serbatoio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 80 cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?

6. Si determini il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\cos x}$.

7. Per quale o quali valori di k la funzione

$$h(x)=\begin{cases} 3x^2-11x-4, & x\le 4 \\ kx^2-2x-1, & x>4 \end{cases}$$

   è continua in $x = 4$?

8. Se $n > 3$ e $\binom{n}{n-1}$, $\binom{n}{n-2}$, $\binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?

9. Si provi che non esiste un triangolo ABC con $AB = 3$, $AC = 2$ e $A\hat{B}C = 45°$. Si provi altresì che se $AB = 3$, $AC = 2$ e $A\hat{B}C = 30°$, allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.

10. Si consideri la regione delimitata da $y=\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$ e si calcoli il volume del solido che essa genera ruotando di un giro completo intorno all'asse y.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Si considerino le funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da:

$$f(x) = x^3 - 4x \qquad \text{e} \qquad g(x) = sen\pi x$$

1. Fissato un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy, si studino f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g.
2. Si calcolino le ascisse dei punti di intersezione di G_f con la retta $y = -3$. Successivamente, si considerino i punti di G_g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo $[-6; 6]$ e se ne indichino le coordinate.
3. Sia R la regione del piano delimitata da G_f e G_g sull'intervallo $[0; 2]$. Si calcoli l'area di R.
4. La regione R rappresenta la superficie libera dell'acqua contenuta in una vasca. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y la misura della profondità dell'acqua nella vasca è data da $h(x) = 3 - x$. Quale integrale definito dà il volume dell'acqua? Supposte le misure in metri, quanti litri di acqua contiene la vasca?

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita sull'insieme $\boldsymbol{R}$ dei numeri reali da

$$f(x) = (ax + b)\ e^{-\frac{x}{3}} + 3$$

dove a e b sono due reali che si chiede di determinare sapendo che f ammette un massimo nel punto d'ascissa 4 e che $f(0) = 2$.

1. Si provi che $a = 1$ e $b = -1$.
2. Si studi su $\boldsymbol{R}$ la funzione $f(x) = (x - 1)\ e^{-\frac{x}{3}} + 3$ e se ne tracci il grafico Γ nel sistema di riferimento Oxy.
3. Si calcoli l'area della regione di piano del primo quadrante delimitata da Γ, dall'asse y e dalla retta $y = 3$.
4. Il profitto di una azienda, in milioni di euro, è stato rappresentato nella tabella sottostante designando con x_i l'anno di osservazione e con y_i il corrispondente profitto.

Anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65

Si cerca una funzione che spieghi il fenomeno dell'andamento del profitto giudicando accettabile una funzione g definita su $\boldsymbol{R}^+$ se per ciascun x_i, oggetto dell'osservazione, si ha: $|g(x_i) - y_i| \leq 10^{-1}$. Si verifichi, con l'aiuto di una calcolatrice, che è accettabile la funzione f del punto 2 e si dica, giustificando la risposta, se è vero che, in tal caso, l'evoluzione del fenomeno non potrà portare a profitti inferiori ai 3 milioni di euro.

Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

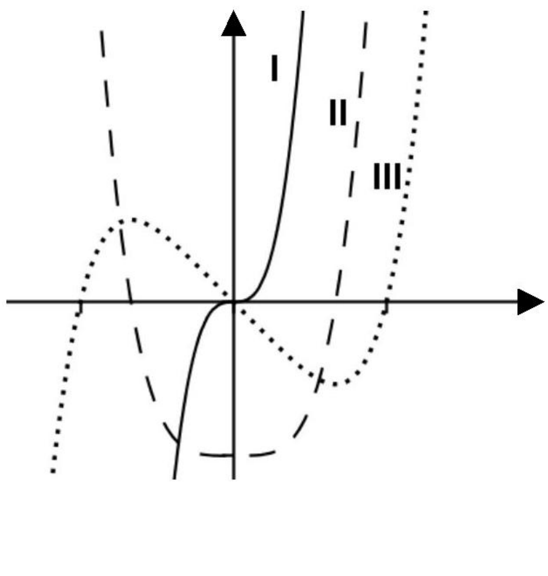
CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Un serbatoio ha la stessa capacità del cilindro di massimo volume inscritto in una sfera di raggio 60 cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?
2. Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate (4; 0).
3. Sia R la regione delimitata dalla curva $y = x^3$, dall'asse x e dalla retta $x = 2$ e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y. Si calcoli il volume di W.
4. Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi n.
5. Si trovi l'area della regione delimitata dalla curva $y = \cos x$ e dall'asse x da $x = 1$ a $x = 2$ *radianti*.
6. Si calcoli
$$\lim_{x \to a} \frac{tgx - tga}{x - a}$$
7. Si provi che l'equazione: $x^{2011} + 2011x + 12 = 0$ ha una sola radice compresa fra -1 e 0.
8. In che cosa consiste il problema della *quadratura del cerchio*? Perchè è così spesso citato?
9. Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.
10. Nella figura a lato, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione f, un altro lo è della funzione derivata f' e l'altro ancora di f''.
Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?



	f	f'	f''
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II

Si motivi la risposta.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Sessione ordinaria 2012
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Siano f e g le funzioni definite, per tutti gli x reali, da

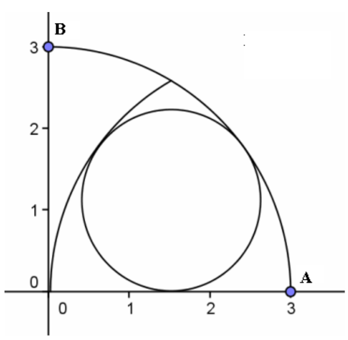
$$f(x)=\left|27x^3\right| \quad e \quad g(x)=sen\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$$

1. Qual è il periodo della funzione g? Si studino f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy.
2. Si scrivano le equazioni delle rette r e s tangenti, rispettivamente, a G_f e a G_g nel punto di ascissa $x=\frac{1}{3}$. Qual è l'ampiezza, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto formato da r e da s?
3. Sia R la regione delimitata da G_f e da G_g. Si calcoli l'area di R.
4. La regione R, ruotando attorno all'asse x, genera il solido S e, ruotando attorno all'asse y, il solido T. Si scrivano, spiegandone il perchè, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di S e di T.

PROBLEMA 2

Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy sono assegnati l'arco di circonferenza di centro O e estremi A(3, 0) e B(0, 3) e l'arco L della parabola d'equazione $x^2=9-6y$ i cui estremi sono il punto A e il punto (0, 3/2).

1. Sia r la retta tangente in A a L. Si calcoli l'area di ciascuna delle due parti in cui r divide la regione R racchiusa tra L e l'arco AB.
2. La regione R è la base di un solido W le cui sezioni, ottenute tagliando W con piani perpendicolari all'asse x, hanno, per ogni $0 \le x \le 3$, area $S(x)=e^{5-3x}$. Si determini il volume di W.
3. Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione di R intorno all'asse x.
4. Si provi che l'arco L è il luogo geometrico descritto dai centri delle circonferenze tangenti internamente all'arco AB e all'asse x. Infine, tra le circonferenze di cui L è il luogo dei centri si determini quella che risulta tangente anche all'arco di circonferenza di centro A e raggio 3, come nella figura a lato.



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Cosa rappresenta il limite seguente e qual è il suo valore?

$$\lim_{h \to 0} \frac{5\left(\frac{1}{2}+h\right)^4 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^4}{h}$$

2. Si illustri il significato di *asintoto* e si fornisca un esempio di funzione *f(x)* il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.

3. La posizione di una particella è data da $s(t) = 20\,(2e^{-\frac{t}{2}} + t - 2)$. Qual è la sua accelerazione al tempo $t = 4$?

4. Quale è la capacità massima, in litri, di un cono di apotema 1 metro?

5. Siano dati nello spazio *n* punti $P_1, P_2, P_3, \ldots.\ P_n$. Quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due? Quanti i triangoli che hanno per vertici questi punti (supposto che nessuna terna sia allineata)? Quanti i tetraedri (supposto che nessuna quaterna sia complanare)?

6. Sia $f(x) = 5 sen x \cos x + \cos^2 x - sen^2 x - \frac{5}{2} sen 2x - \cos 2x - 17$; si calcoli $f'(x)$.

7. E' dato un tetraedro regolare di spigolo *l* e altezza *h*. Si determini l'ampiezza dell'angolo α formato da *l* e da *h*.

8. Qual è il valor medio di $f(x) = \frac{1}{x}$ da $x = 1$ a $x = \mathrm{e}$?

9. Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C.) consiste, assegnati nel piano due punti A e B, situati dalla stessa parte rispetto ad un retta r, nel determinare il cammino minimo che congiunge A con B toccando r. Si risolva il problema nel modo che si preferisce.

10. Quale delle seguenti funzioni è positiva per ogni *x* reale?

    A) $\cos(sen(x^2+1))$ B) $sen(\cos(x^2+1))$ C) $sen(\ln(x^2+1))$ D) $\cos(\ln(x^2+1))$

    Si giustifichi la risposta.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Sessione ordinaria 2013
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

La funzione f è definita da $f(x)=\int_0^x \left[\cos\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]dt$ per tutti i numeri reali x appartenenti all'intervallo chiuso $[0,9]$.

1. Si calcolino $f'(\pi)$ e $f'(2\pi)$ ove f' indica la derivata di f.
2. Si tracci, in un sistema di coordinate cartesiane, il grafico Σ di $f'(x)$ e da esso si deduca per quale o quali valori di x, $f(x)$ presenta massimi o minimi. Si tracci altresì l'andamento di $f(x)$ deducendolo da quello di $f'(x)$.
3. Si trovi il valor medio di $f'(x)$ sull'intervallo $[0,2\pi]$.
4. Sia R la regione del piano delimitata da Σ e dall'asse x per $0\le x\le 4$; R è la base di un solido W le cui sezioni con piani ortogonali all'asse x hanno, per ciascun x, area $A(x)=3\,sen\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.
   Si calcoli il volume di W.

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita, per tutti gli x reali, da $f(x)=\frac{8}{4+x^2}$

1. Si studi f e se ne disegni il grafico Φ in un sistema di coordinate cartesiane Oxy. Si scrivano le equazioni delle tangenti a Φ nei punti $P(-2;1)$ e $Q(2;1)$ e si consideri il quadrilatero convesso che esse individuano con le rette OP e OQ. Si provi che tale quadrilatero è un rombo e si determinino le misure, in gradi e primi sessagesimali, dei suoi angoli.
2. Sia Γ la circonferenza di raggio 1 e centro $(0;1)$. Una retta t, per l'origine degli assi, taglia Γ oltre che in O in un punto A e taglia la retta d'equazione $y=2$ in un punto B. Si provi che, qualunque sia t, l'ascissa x di B e l'ordinata y di A sono le coordinate $(x;\mathrm{y})$ di un punto di Φ.
3. Si consideri la regione R compresa tra Φ e l'asse x sull'intervallo $[0,2]$. Si provi che R è equivalente al cerchio delimitato da Γ e si provi altresì che la regione compresa tra Φ e tutto l'asse x è equivalente a quattro volte il cerchio.
4. La regione R, ruotando attorno all'asse y, genera il solido W. Si scriva, spiegandone il perchè, ma senza calcolarlo, l'integrale definito che fornisce il volume di W.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

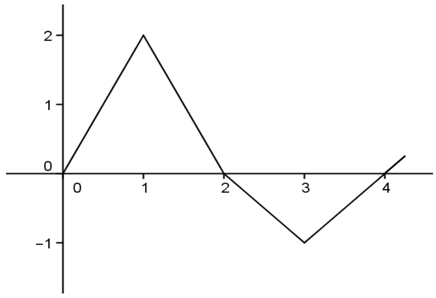
Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Un triangolo ha area 3 e due lati che misurano 2 e 3. Qual è la misura del terzo lato? Si giustifichi la risposta.
2. Si calcoli il dominio della funzione

$$f(x) = \sqrt{1-\sqrt{2-\sqrt{3-x}}}$$

3. Si considerino, nel piano cartesiano, i punti $A(2;-1)$ e $B(-6;-8)$. Si determini l'equazione della retta passante per *B* e avente distanza massima da *A*.
4. Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza *h* e i lati *a* e *b* delle due basi. Si esprima il volume V del tronco in funzione di *a*, *b* e *h*, illustrando il ragionamento seguito.
5. In un libro si legge: "*Due valigie della stessa forma sembrano "quasi uguali", quanto a capacità, quando differiscono di poco le dimensioni lineari: non sembra che in genere le persone si rendano ben conto che ad un aumento delle dimensioni lineari (lunghezza, larghezza, altezza) del 10% (oppure del 20% o del 25%) corrispondono aumenti di capacità (volume) di circa 33% (oppure 75% o 100% : raddoppio)*". È così? Si motivi esaurientemente la risposta.
6. Con le cifre da 1 a 7 è possibile formare $7! = 5040$ numeri corrispondenti alle permutazioni delle 7 cifre. Ad esempio i numeri 1234567 e 3546712 corrispondono a due di queste permutazioni. Se i 5040 numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente qual è il numero che occupa la settima posizione e quale quello che occupa la 721-esima posizione?
7. Un foglio rettangolare, di dimensioni a e b, ha area $1\,m^2$ e forma tale che, tagliandolo a metà (parallelamente al lato minore) si ottengono due rettangoli simili a quello di partenza. Quali sono le misure di a e b?
8. La funzione f ha il grafico in figura. Se $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, per quale valore positivo di x, g ha un minimo? Si illustri il ragionamento seguito.



9. Si calcoli:

$$\lim_{x\to 0} 4\,\frac{senx\cos x - senx}{x^2}$$

Sessione ordinaria 2013
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

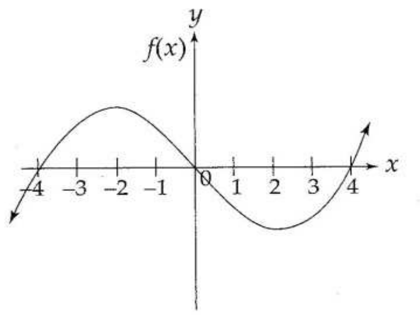
M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

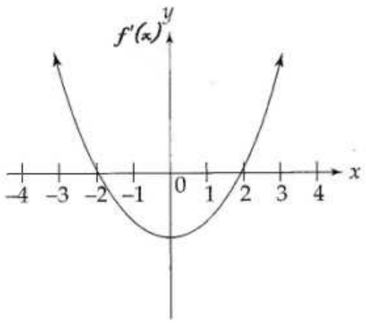
CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

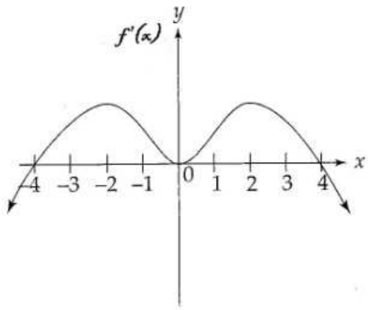
Tema di: MATEMATICA

10. Se la figura a lato rappresenta il grafico di $f(x)$, quale dei seguenti potrebbe essere il grafico di $f'(x)$? Si giustifichi la risposta.

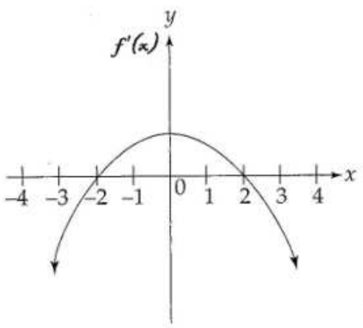




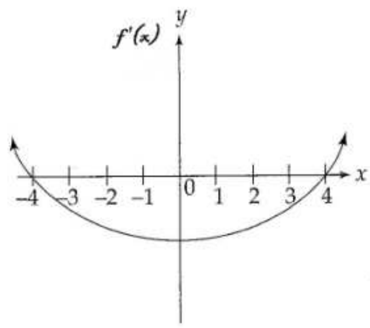
A)



C)



B)



D)

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Sessione ordinaria 2014
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

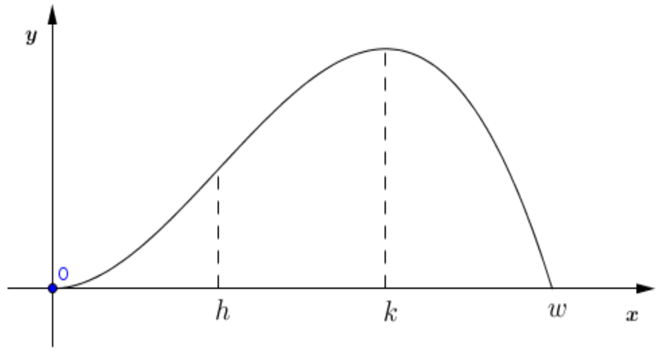
Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Nella figura a lato è disegnato il grafico Γ di $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ con f funzione definita sull'intervallo $[0, w]$ e ivi continua e derivabile. Γ è tangente all'asse x nell'origine O del sistema di riferimento e presenta un flesso e un massimo rispettivamente per $x=h$ e $x=k$.



1) Si determinino $f(0)$ e $f(k)$; si dica se il grafico della funzione f presenta punti di massimo o di minimo e se ne tracci il possibile andamento.
2) Si supponga, anche nei punti successivi 3 e 4, che $g(x)$ sia, sull'intervallo considerato, esprimibile come funzione polinomiale di terzo grado. Si provi che, in tal caso, i numeri h e k dividono l'intervallo $[0, w]$ in tre parti uguali.
3) Si determini l'espressione di $g(x)$ nel caso $w=3$ e $g(1)=\frac{2}{3}$ e si scrivano le equazioni delle normali a Γ nei punti in cui esso è tagliato dalla retta $y=\frac{2}{3}$.
4) Si denoti con R la regione che Γ delimita con l'asse x e sia W il solido che essa descrive nella rotazione completa attorno all'asse y. Si spieghi perchè il volume di W si può ottenere calcolando:

$$\int_0^3 (2\pi x)\,g(x)\,dx$$

Supposte fissate in decimetri le unità di misura del sistema monometrico Oxy, si dia la capacità in litri di W.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

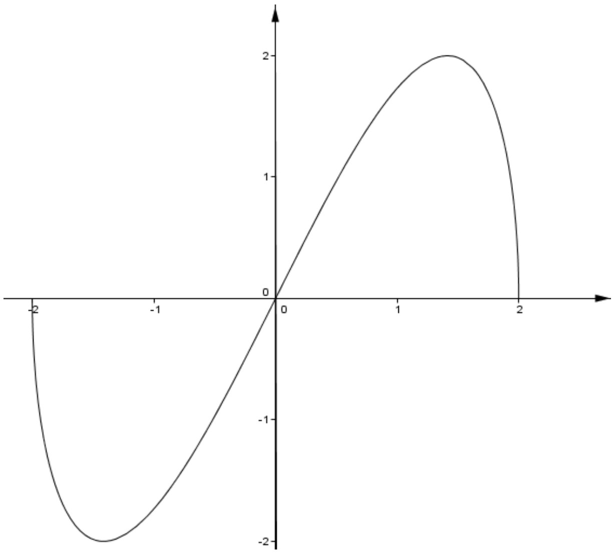
Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

PROBLEMA 2

A lato è disegnato il grafico Γ della funzione

$$f(x) = x\sqrt{4-x^2}$$



1. Si calcolino il massimo e il minimo assoluti di $f(x)$.
2. Si dica se l'origine O è centro di simmetria per Γ e si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'angolo che la tangente in O a Γ forma con la direzione positiva dell'asse x.
3. Si disegni la curva d'equazione $y^2 = x^2(4-x^2)$ e si calcoli l'area della parte di piano da essa racchiusa.
4. Sia $h(x) = sen(f(x))$ con $0 \le x \le 2$. Quanti sono i punti del grafico di $h(x)$ di ordinata 1? Il grafico di $h(x)$ presenta punti di minimo, assoluti o relativi? Per quali valori reali di k l'equazione $h(x) = k$ ha 4 soluzioni distinte?

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

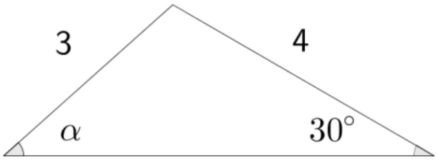
CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Nel triangolo disegnato a lato, qual è la misura, in gradi e primi sessagesimali, di α?



2. Si spieghi perchè non esistono poliedri regolari le cui facce siano esagoni.
3. Nello sviluppo di $\left(2a^2 - 3b^3\right)^n$ compare il termine $-1080\,a^4b^9$. Qual è il valore di n?
4. Un solido Ω ha per base la regione R delimitata dal grafico di $f(x) = e^{1/x}$ e dall'asse x sull'intervallo $[-2, -1]$. In ogni punto di R di ascissa x, l'altezza del solido è data da $h(x) = \frac{1}{x^2}$. Si calcoli il volume del solido.
5. Dei numeri 1,2,3.......6000, quanti non sono divisibili né per 2, né 3 né per 5?
6. Un'azienda commercializza il suo prodotto in lattine da 5 litri a forma di parallelepipedo a base quadrata. Le lattine hanno dimensioni tali da richiedere la minima quantità di latta per realizzarle. Quali sono le dimensioni, arrotondate ai mm, di una lattina?
7. Il valor medio della funzione $f(x) = x^3$ sull'intervallo chiuso $[0, k]$ è 9. Si determini k.
8. Del polinomio di quarto grado $P(x)$ si sa che assume il suo massimo valore 3 per $x = 2$ e $x = 3$ e, ancora, che $P(1) = 0$. Si calcoli $P(4)$.
9. Si determini il dominio della funzione:
$$f(x) = \sqrt{3 - \log_2(x + 5)}$$
10. Si determinino i valori reali di x per cui:
$$\left(\frac{1}{5}\left(x^2 - 10x + 26\right)\right)^{x^2 - 6x + 1} = 1$$

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Sessione ordinaria 2015
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO

LI03, EA09 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

(Testo valevole anche per la corrispondente sperimentazione quadriennale)

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Il piano tariffario proposto da un operatore telefonico prevede, per le telefonate all'estero, un canone fisso di 10 euro al mese, più 10 centesimi per ogni minuto di conversazione. Indicando con x i minuti di conversazione effettuati in un mese, con $f(x)$ la spesa totale nel mese e con $g(x)$ il costo medio al minuto:

1. individua l'espressione analitica delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ e rappresentale graficamente; verifica che la funzione $g(x)$ non ha massimi né minimi relativi e dai la tua interpretazione dell'andamento delle due funzioni alla luce della situazione concreta che esse rappresentano.
2. Detto x_0 il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, determina x_1 tale che:

$$g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2}$$

Traccia il grafico della funzione che esprime x_1 in funzione di x_0 e discuti il suo andamento. Che significato ha il suo asintoto verticale?

Sul suo sito web l'operatore telefonico ha pubblicato una mappa che rappresenta la copertura del segnale telefonico nella zona di tuo interesse:

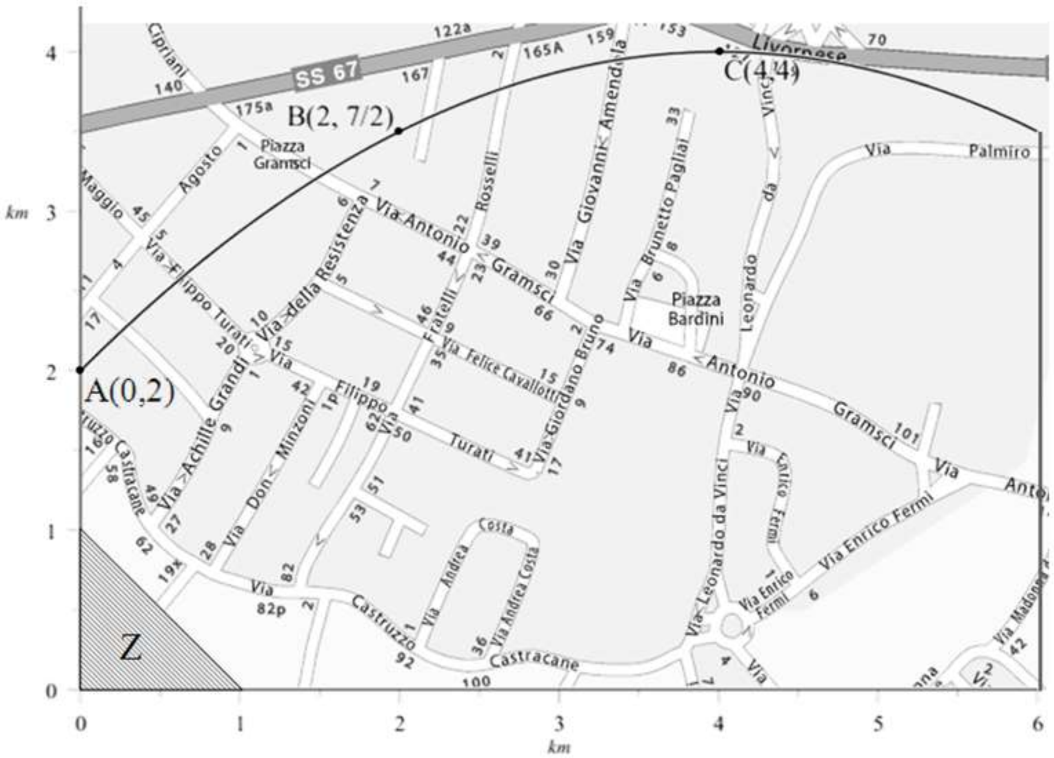


Figura 1

La zona è delimitata dalla curva passante per i punti *A*, *B* e *C*, dagli assi x e y, e dalla retta di equazione $x = 6$; la porzione etichettata con la "Z", rappresenta un'area non coperta dal segnale telefonico dell'operatore in questione.

3. Rappresenta il margine superiore della zona con una funzione polinomiale di secondo grado, verificando che il suo grafico passi per i tre punti *A*, *B* e *C*. Sul sito web dell'operatore compare la seguente affermazione: "*nella zona rappresentata nella mappa risulta coperto dal segnale il 96% del territorio*"; verifica se effettivamente è così.

L'operatore di telefonia modifica il piano tariffario, inserendo un sovrapprezzo di 10 centesimi per ogni minuto di conversazione successivo ai primi 500 minuti.

4. Determina come cambiano, di conseguenza, le caratteristiche delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, riguardo agli asintoti, alla monotonia, continuità e derivabilità, individua eventuali massimi e minimi assoluti della funzione $g(x)$ e della sua derivata e spiegane il significato nella situazione concreta.

PROBLEMA 2

La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3, 3]$, il grafico Γ, disegnato in figura 2. Γ presenta tangenti orizzontali per $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Le aree delle regioni *A*, *B*, *C* e *D* sono rispettivamente 2, 3, 3 e 1. Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$ tale che $g(3) = -5$.

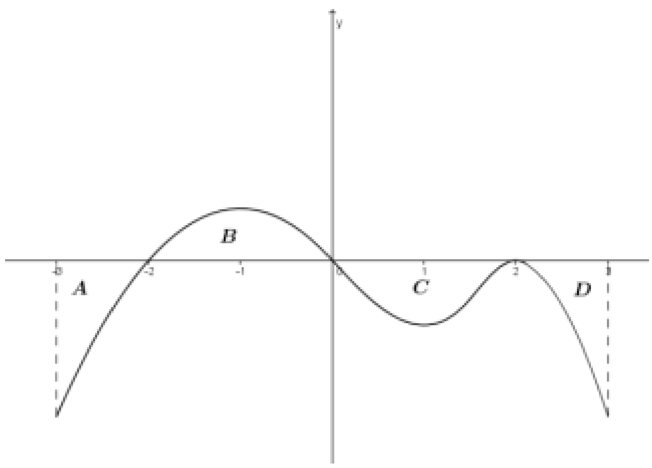


Figura 2

1. Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.

2. Individua i valori di $x \in [-3, 3]$, per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di *x* per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.

3. Calcola $g(0)$ e, se esiste, il $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1+g(x)}{2x}$.

4. Sia $h(x) = 3 \cdot f(2x + 1)$, determina il valore di $\int_{-2}^{1} h(x)dx$.

QUESTIONARIO

1. Determinare l'espressione analitica della funzione $y = f(x)$ sapendo che la retta $y = -2x + 5$ è tangente al grafico di *f* nel secondo quadrante e che $f'(x) = -2x^2 + 6$.

2. Dimostrare che il volume del tronco di cono è espresso dalla formula:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r),$$

dove *R* ed *r* sono i raggi e *h* l'altezza.

3. Lanciando una moneta sei volte qual è la probabilità che si ottenga testa "al più" due volte? Qual è la probabilità che si ottenga testa "almeno" due volte?

4. Di quale delle seguenti equazioni differenziali la funzione $y = \frac{\ln(x)}{x}$ è soluzione?

$$y'' + 2 \cdot \frac{y'}{x} = y$$

$$y' + x \cdot y'' = 1$$

$$x \cdot y' = \frac{1}{x} + y$$

$$x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + \frac{2}{x} = y$$

5. Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nell'origine al piano di equazione $x + y - z = 0$.

6. Sia *f* la funzione, definita per tutti gli *x* reali, da

$$f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + (x-5)^2,$$

determinare il minimo di *f*.

7. Detta *A(n)* l'area del poligono regolare di *n* lati inscritto in un cerchio *C* di raggio *r*, verificare che $A(n) = \frac{n}{2}r^2 sen\frac{2\pi}{n}$ e calcolarne il limite per $n \to \infty$.

8. I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, 6 cm, 6 cm e 5 cm. Preso a caso un punto *P* all'interno del triangolo, qual è la probabilità che *P* disti più di 2 cm da tutti e tre i vertici del triangolo?

9. Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \le x \le 1 \\ x^2 - kx + k & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

determinare il parametro *k* in modo che nell'intervallo $[0, 2]$ sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.

10. Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \in \Re, x \ge 0)$ divide in due porzioni il rettangolo ABCD avente vertici *A* (1, 0), *B* (4, 0), *C* (4, 2) e *D* (1, 2). Calcolare il rapporto tra le aree delle due porzioni.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Sessione ordinaria 2016
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO
LI03, EA09 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

(Testo valevole anche per la corrispondente sperimentazione quadriennale)

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

L'amministratore di un piccolo condominio deve installare un nuovo serbatoio per il gasolio da riscaldamento. Non essendo soddisfatto dei modelli esistenti in commercio, ti incarica di progettarne uno che risponda alle esigenze del condominio.

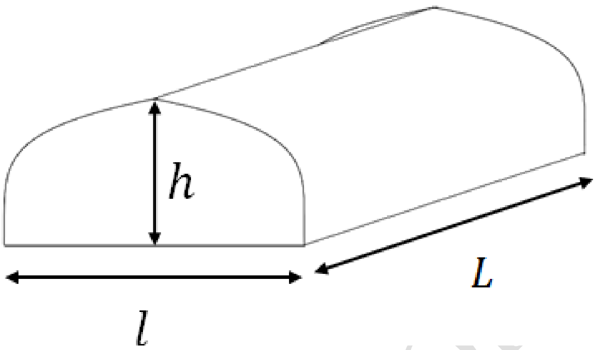


Figura 1

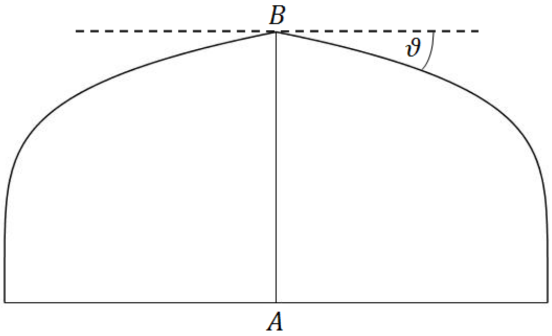


Figura 2

Allo scopo di darti le necessarie informazioni, l'amministratore ti fornisce il disegno in figura 1, aggiungendo le seguenti indicazioni:

- la lunghezza L del serbatoio deve essere pari a otto metri;
- la larghezza l del serbatoio deve essere pari a due metri;
- l'altezza h del serbatoio deve essere pari a un metro;
- il profilo laterale (figura 2) deve avere un punto angoloso alla sommità, per evitare l'accumulo di ghiaccio durante i mesi invernali, con un angolo $\vartheta \geq 10°$;
- la capacità del serbatoio deve essere pari ad almeno 13 m^3, in modo da garantire al condominio il riscaldamento per tutto l'inverno effettuando solo due rifornimenti di gasolio;
- al centro della parete laterale del serbatoio, lungo l'asse di simmetria (segmento AB in figura 2) deve essere installato un indicatore graduato che riporti la percentuale di riempimento V del volume del serbatoio in corrispondenza del livello z raggiunto in altezza dal gasolio.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

1. Considerando come origine degli assi cartesiani il punto A in figura 2, individua tra le seguenti famiglie di funzioni quella che meglio può descrivere il profilo laterale del serbatoio per $x \in [-1, 1]$, k intero positivo, motivando opportunamente la tua scelta:

$$f(x) = (1 - |x|)^{\frac{1}{k}}$$

$$f(x) = -6|x|^3 + 9kx^2 - 4|x| + 1$$

$$f(x) = cos\left(\frac{\pi}{2}x^k\right)$$

2. Determina il valore di k che consente di soddisfare i requisiti richiesti relativamente all'angolo ϑ e al volume del serbatoio.
3. Al fine di realizzare l'indicatore graduato, determina l'espressione della funzione $V(z)$ che associa al livello z del gasolio (in metri) la percentuale di riempimento V del volume da riportare sull'indicatore stesso.

Quando consegni il tuo progetto, l'amministratore obietta che essendo il serbatoio alto un metro, il valore z del livello di gasolio, espresso in centimetri, deve corrispondere alla percentuale di riempimento: cioè, ad esempio, se il gasolio raggiunge un livello z pari a 50 cm vuol dire che il serbatoio è pieno al 50%; invece il tuo indicatore riporta, in corrispondenza del livello 50 cm, una percentuale di riempimento 59,7%.

4. Illustra gli argomenti che puoi usare per spiegare all'amministratore che il suo ragionamento è sbagliato; mostra anche qual è, in termini assoluti, il massimo errore che si commette usando il livello z come indicatore della percentuale di riempimento, come da lui suggerito, e qual è il valore di z in corrispondenza del quale esso si verifica.

PROBLEMA 2

Nella figura 1 è rappresentato il grafico Γ della funzione continua $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, derivabile in $]0, +\infty)$, e sono indicate le coordinate di alcuni suoi punti.

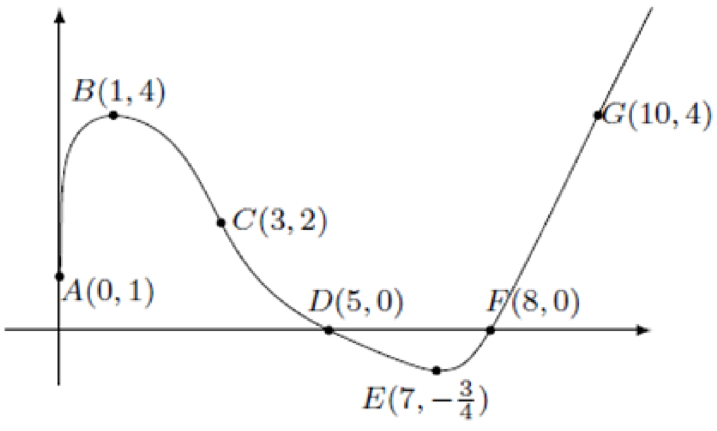


Figura 1

È noto che Γ è tangente all'asse y in A, che B ed E sono un punto di massimo e uno di minimo, che C è un punto di flesso con tangente di equazione $2x + y - 8 = 0$.

Nel punto D la retta tangente ha equazione $x + 2y - 5 = 0$ e per $x \geq 8$ il grafico consiste in una semiretta passante per il punto G. Si sa inoltre che l'area della regione delimitata dall'arco $ABCD$, dall'asse x e dall'asse y vale 11, mentre l'area della regione delimitata dall'arco DEF e dall'asse x vale 1.

1. In base alle informazioni disponibili, rappresenta indicativamente i grafici delle funzioni

$$y = f'(x)$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

Quali sono i valori di $f'(3)$ e $f'(5)$? Motiva la tua risposta.

2. Rappresenta, indicativamente, i grafici delle seguenti funzioni:

$$y = |f'(x)|$$

$$y = |f(x)|'$$

$$y = \frac{1}{f(x)}$$

specificando l'insieme di definizione di ciascuna di esse.

3. Determina i valori medi di $y = f(x)$ e di $y = |f(x)|$ nell'intervallo [0,8], il valore medio di $y = f'(x)$ nell'intervallo [1,7] e il valore medio di $y = F(x)$ nell'intervallo [9,10].

4. Scrivi le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione $F(x)$ nei suoi punti di ascisse 0 e 8, motivando le risposte.

QUESTIONARIO

1. È noto che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Stabilire se il numero reale u, tale che

$$\int_{-\infty}^{u} e^{-x^2} dx = 1$$

è positivo oppure negativo. Determinare inoltre i valori dei seguenti integrali, motivando le risposte:

$$A = \int_{-u}^{u} x^7 e^{-x^2} dx \qquad B = \int_{-u}^{u} e^{-x^2} dx \qquad C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2} dx$$

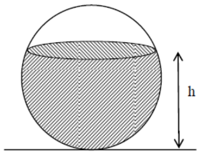
2. Data una parabola di equazione

$$y = 1 - ax^2, \qquad \text{con } a > 0$$

si vogliono inscrivere dei rettangoli, con un lato sull'asse x, nel segmento parabolico delimitato dall'asse x. Determinare a in modo tale che il rettangolo di area massima sia anche il rettangolo di perimetro massimo.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

3. Un recipiente sferico con raggio interno r è riempito con un liquido fino all'altezza h. Utilizzando il calcolo integrale, dimostrare che il volume del liquido è dato da: $V = \pi \cdot (rh^2 - \frac{h^3}{3})$.



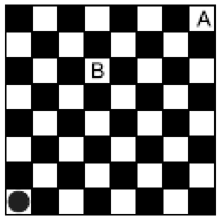
4. Un test è costituito da 10 domande a risposta multipla, con 4 possibili risposte di cui solo una è esatta. Per superare il test occorre rispondere esattamente almeno a 8 domande. Qual è la probabilità di superare il test rispondendo a caso alle domande?

5. Una sfera, il cui centro è il punto $K(-2, -1, 2)$, è tangente al piano Π avente equazione $2x - 2y + z - 9 = 0$. Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera?

6. Si stabilisca se la seguente affermazione è vera o falsa, giustificando la risposta:

   "Esiste un polinomio $P(x)$ tale che: $|P(x) - \cos(x)| \le 10^{-3}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$".

7. Una pedina è collocata nella casella in basso a sinistra di una scacchiera, come in figura. Ad ogni mossa, la pedina può essere spostata o nella casella alla sua destra o nella casella sopra di essa. Scelto casualmente un percorso di 14 mosse che porti la pedina nella casella d'angolo opposta A, qual è la probabilità che essa passi per la casella indicata con B?



8. Data la funzione $f(x)$ definita in $\mathbb{R}$, $f(x) = e^x(2x + x^2)$, individuare la primitiva di $f(x)$ il cui grafico passa per il punto $(1, 2e)$.

9. Date le rette:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \qquad \qquad \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

   e il punto $P(1, 0, -2)$ determinare l'equazione del piano passante per P e parallelo alle due rette.

10. Sia f la funzione così definita nell'intervallo $]1, +\infty)$:

$$f(x) = \int_e^{x^2} \frac{t}{\ln t} dt$$

   Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $\sqrt{e}$.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Sessione ordinaria 2017
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

I043 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO
LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

(Testo valevole anche per la corrispondente sperimentazione quadriennale)

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Si può pedalare agevolmente su una bicicletta a ruote quadrate? A New York, al MoMath-Museum of Mathematics si può fare, in uno dei padiglioni dedicati al divertimento matematico (figura 1). È però necessario che il profilo della pedana su cui il lato della ruota può scorrere soddisfi alcuni requisiti.

In figura 2 è riportata una rappresentazione della situazione nel piano cartesiano Oxy: il quadrato di lato $DE = 2$ (in opportune unità di misura) e di centro C rappresenta la ruota della bicicletta, il grafico della funzione $f(x)$ rappresenta il profilo della pedana.

Figura 1

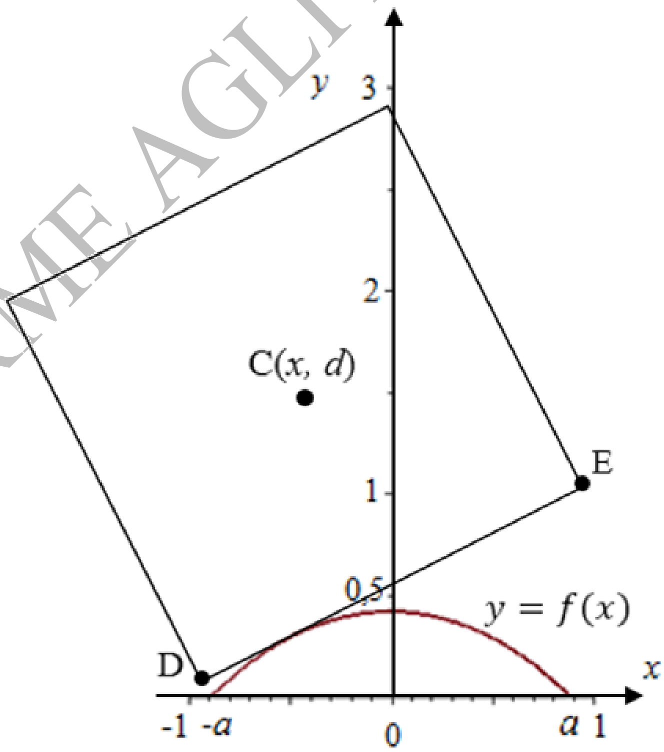


Figura 2

1) Sulla base delle informazioni ricavabili dal grafico in figura 2, mostra, con le opportune argomentazioni, che la funzione:

$$f(x) = \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

rappresenta adeguatamente il profilo della pedana per $x \in [-a\,;\,a]$; determina inoltre il valore degli estremi a e $-a$ dell'intervallo.

Per visualizzare il profilo completo della pedana sulla quale la bicicletta potrà muoversi, si affiancano varie copie del grafico della funzione $f(x)$ relativo all'intervallo $[-a\,;\ a]$, come mostrato in figura 3.

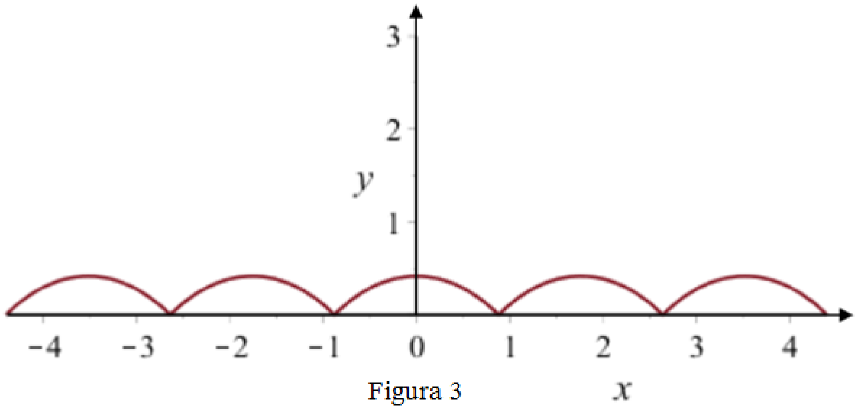


Figura 3

2) Perché la bicicletta possa procedere agevolmente sulla pedana è necessario che:

- a sinistra e a destra dei punti di non derivabilità i tratti del grafico siano ortogonali;
- la lunghezza del lato della ruota quadrata risulti pari alla lunghezza di una "gobba", cioè dell'arco di curva di equazione $y = f(x)$ per $x \in [-a;\ a]$.

Stabilisci se tali condizioni sono verificate.[1]

3) Considerando la similitudine dei triangoli rettangoli ACL e ALM in figura 4, e ricordando il significato geometrico della derivata, verifica che il valore dell'ordinata d del centro della ruota si mantiene costante durante il moto. Pertanto, al ciclista sembra di muoversi su una superficie piana.

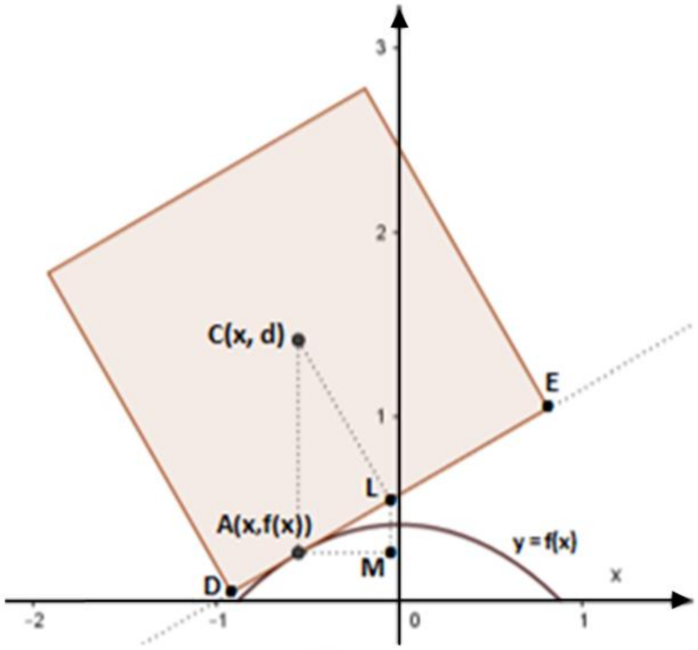


Figura 4

[1]In generale, la lunghezza dell'arco di curva avente equazione $y = \varphi(x)$ compreso tra le ascisse x_1 e x_2 è data da $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\, dx$.

Anche il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \text{per } x \in \left[-\frac{ln(3)}{2}; \frac{ln(3)}{2}\right]$$

se replicato varie volte, può rappresentare il profilo di una pedana adatta a essere percorsa da una bicicletta con ruote molto particolari, aventi la forma di un poligono regolare.

4) Individua tale poligono regolare, motivando la risposta.

PROBLEMA 2

Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo $T = 4$ il cui grafico, nell'intervallo $[0; 4]$, è il seguente:

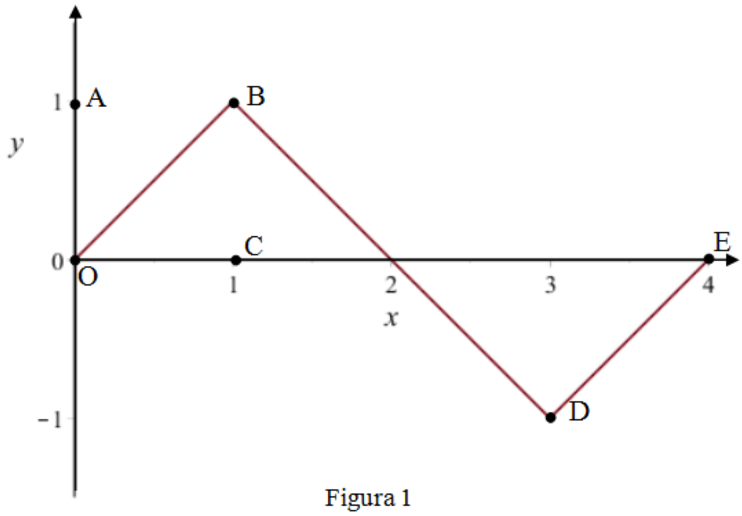


Figura 1

Come si evince dalla figura 1, i tratti OB, BD, DE del grafico sono segmenti i cui estremi hanno coordinate: $O(0,0),\ B(1,1),\ D(3,-1),\ E(4,0)$.

1) Stabilisci in quali punti del suo insieme di definizione la funzione f è continua e in quali è derivabile e verifica l'esistenza dei limiti: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$; qualora esistano, determinane il valore. Rappresenta inoltre, per $x \in [0; 4]$, i grafici delle funzioni:

$$g(x) = f'(x)$$

$$h(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

2) Considera la funzione:

$$s(x) = sen(bx)$$

con b costante reale positiva; determina b in modo che $s(x)$ abbia lo stesso periodo di $f(x)$.

Dimostra che la porzione quadrata di piano $OABC$ in figura 1 viene suddivisa dai grafici di $f(x)$ e $s(x)$ in 3 parti distinte e determina le probabilità che un punto preso a caso all'interno del quadrato $OABC$ ricada in ciascuna delle 3 parti individuate.

3) Considerando ora le funzioni:

$$f(x)^2 \quad \text{e} \quad s(x)^2$$

discuti, anche con argomentazioni qualitative, le variazioni (in aumento o in diminuzione) dei 3 valori di probabilità determinati al punto precedente.

4) Determina infine il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse y della porzione di piano compresa tra il grafico della funzione h per $x \in [0;3]$ e l'asse delle x.

QUESTIONARIO

1. Definito il numero E come:

$$E = \int_0^1 xe^x dx,$$

dimostrare che risulta:

$$\int_0^1 x^2e^x dx = e - 2E,$$

ed esprimere

$$\int_0^1 x^3e^x dx$$

in termini di e ed E.

2. Una torta di forma cilindrica è collocata sotto una cupola di plastica di forma semisferica. Dimostrare che la torta occupa meno dei 3/5 del volume della semisfera.

3. Sapendo che:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+2b}-6}{x} = 1$$

determinare i valori di a e b.

4. Per sorteggiare numeri reali nell'intervallo $[0,2]$ viene realizzato un generatore di numeri casuali che fornisce numeri distribuiti, in tale intervallo, con densità di probabilità data dalla funzione:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3$$

Quale sarà il valore medio dei numeri generati?
Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia 4/3?
Qual è la probabilità che il secondo numero estratto sia minore di 1?

5. Dati i punti $A(-2,3,1)$, $B(3,0,-1)$, $C(2,2,-3)$, determinare l'equazione della retta r passante per A e per B e l'equazione del piano π perpendicolare ad r e passante per C.

6. Determinare il numero reale a in modo che il valore di

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-x}{x^a}$$

sia un numero reale non nullo.

7. Determinare le coordinate dei centri delle sfere di raggio $\sqrt{6}$ tangenti al piano π di equazione:

$$x+2y-z+1=0$$

nel suo punto P di coordinate $(1,0,2)$.

8. Un dado ha la forma di un dodecaedro regolare con le facce numerate da 1 a 12. Il dado è truccato in modo che la faccia contrassegnata dal numero 3 si presenti con una probabilità p doppia rispetto a ciascun'altra faccia. Determinare il valore di p in percentuale e calcolare la probabilità che in 5 lanci del dado la faccia numero 3 esca almeno 2 volte.

9. Dimostrare che l'equazione:

$$arctg(x)+x^3+e^x=0$$

ha una e una sola soluzione reale.

10. Data la funzione:

$$f(x)=|4-x^2|$$

verificare che essa non soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-3;3]$ e che comunque esiste almeno un punto dell'intervallo $[-3;3]$ in cui la derivata prima di $f(x)$ si annulla. Questo esempio contraddice il teorema di Rolle? Motivare la risposta in maniera esauriente.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 257 Art. 18 comma 8).
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Sessione ordinaria 2018
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

I043 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO
LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE
LI15 - SCIENTIFICO - SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO

(Testo valevole anche per la corrispondenti sperimentazioni quadriennali)

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Devi programmare il funzionamento di una macchina che viene adoperata nella produzione industriale di mattonelle per pavimenti. Le mattonelle sono di forma quadrata di lato 1 (in un'opportuna unità di misura) e le fasi di lavoro sono le seguenti:

- si sceglie una funzione $y = f(x)$ definita e continua nell'intervallo [0,1], che soddisfi le condizioni:

  a) $f(0) = 1$;

  b) $f(1) = 0$;

  c) $0 < f(x) < 1$ per $0 < x < 1$.

- La macchina traccia il grafico Γ della funzione $y = f(x)$ e i grafici simmetrici di Γ rispetto all'asse y, all'asse x e all'origine O, ottenendo in questo modo una curva chiusa Λ, passante per i punti (1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1), simmetrica rispetto agli assi cartesiani e all'origine, contenuta nel quadrato Q di vertici (1,1), (-1,1), (-1,-1), (1,-1).
- La macchina costruisce la mattonella colorando di grigio l'interno della curva chiusa Λ e lasciando bianca la parte restante del quadrato Q; vengono quindi mostrate sul display alcune mattonelle affiancate, per dare un'idea dell'aspetto del pavimento.

Il manuale d'uso riporta un esempio del processo realizzativo di una mattonella semplice:

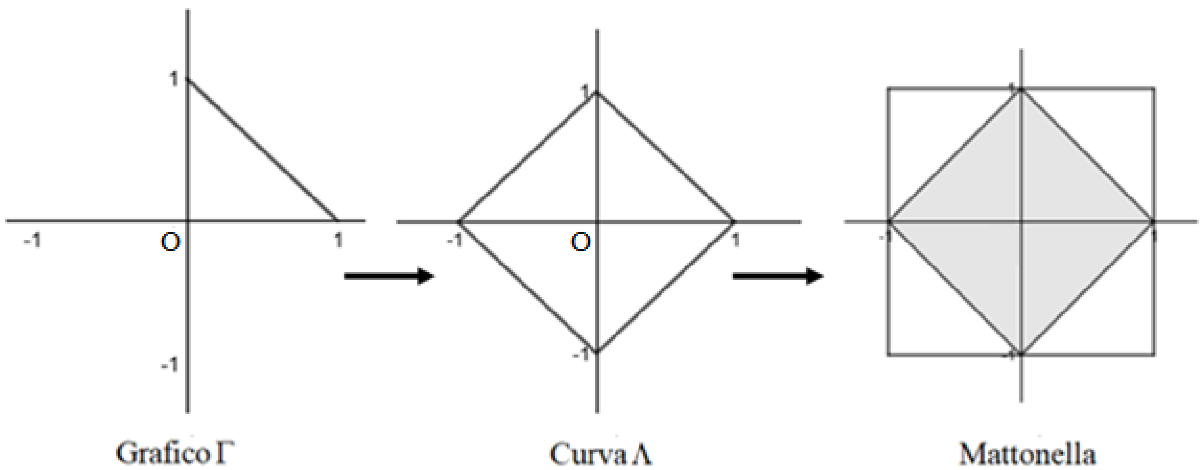


Figura 1

La pavimentazione risultante è riportata di seguito:

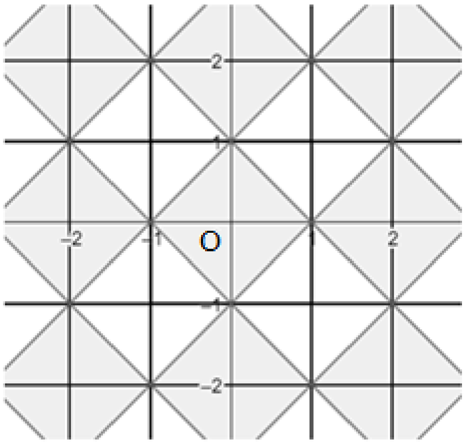


Figura 2

1. Con riferimento all'esempio, determina l'espressione della funzione $y = f(x)$ e l'equazione della curva Λ, così da poter effettuare una prova e verificare il funzionamento della macchina.

Ti viene richiesto di costruire una mattonella con un disegno più elaborato che, oltre a rispettare le condizioni a), b) e c) descritte in precedenza, abbia $f'(0) = 0$ e l'area della parte colorata pari al 55% dell'area dell'intera mattonella. A tale scopo, prendi in considerazione funzioni polinomiali di secondo grado e di terzo grado.

2. Dopo aver verificato che non è possibile realizzare quanto richiesto adoperando una funzione polinomiale di secondo grado, determina i coefficienti $a, b, c, d \in \Re$ della funzione $f(x)$ polinomiale di terzo grado che soddisfa le condizioni poste. Rappresenta infine in un piano cartesiano la mattonella risultante.

Vengono proposti a un cliente due tipi diversi di disegno, derivanti rispettivamente dalle funzioni $a_n(x) = 1 - x^n$ e $b_n(x) = (1-x)^n$, considerate per $x \in [0,1]$, con n intero positivo.

3. Verifica che al variare di n tutte queste funzioni rispettano le condizioni a), b) e c). Dette $A(n)$ e $B(n)$ le aree delle parti colorate delle mattonelle ottenute a partire da tali funzioni a_n e b_n, calcola $\lim_{n\to+\infty} A(n)$ e $\lim_{n\to+\infty} B(n)$ ed interpreta i risultati in termini geometrici.

Il cliente decide di ordinare 5.000 mattonelle con il disegno derivato da $a_2(x)$ e 5.000 con quello derivato da $b_2(x)$. La verniciatura viene effettuata da un braccio meccanico che, dopo aver depositato il colore, torna alla posizione iniziale sorvolando la mattonella lungo la diagonale. A causa di un malfunzionamento, durante la produzione delle 10.000 mattonelle si verifica con una probabilità del 20% che il braccio meccanico lasci cadere una goccia di colore in un punto a caso lungo la diagonale, macchiando così la mattonella appena prodotta.

4. Fornisci una stima motivata del numero di mattonelle che, avendo una macchia nella parte non colorata, risulteranno danneggiate al termine del ciclo di produzione.

PROBLEMA 2

Consideriamo la funzione $f_k : \Re \to \Re$ così definita:

$$f_k(x) = -x^3 + kx + 9$$

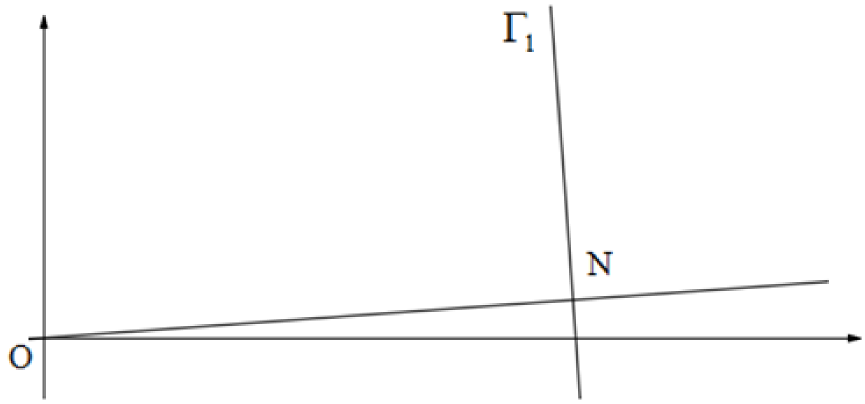
con $k \in Z$.

1. Detto Γ_k il grafico della funzione, verifica che per qualsiasi valore del parametro k la retta r_k , tangente a Γ_k nel punto di ascissa 0 e la retta s_k , tangente a Γ_k nel punto di ascissa 1, si incontrano in un punto M di ascissa $\frac{2}{3}$.

2. Dopo aver verificato che $k = 1$ è il massimo intero positivo per cui l'ordinata del punto M è minore di 10, studia l'andamento della funzione $f_1(x)$, determinandone i punti stazionari e di flesso e tracciandone il grafico.

3. Detto T il triangolo delimitato dalle rette r_1 , s_1 e dall'asse delle ascisse, determina la probabilità che, preso a caso un punto $P(x_p, y_p)$ all'interno di T, questo si trovi al di sopra di Γ_1 (cioè che si abbia $y_p > f_1(x)$ per tale punto P).

4. Nella figura è evidenziato un punto $N \in \Gamma_1$ e un tratto del grafico Γ_1. La retta normale a Γ_1 in N (vale a dire la perpendicolare alla retta tangente a Γ_1 in quel punto) passa per l'origine degli assi O. Il grafico Γ_1 possiede tre punti con questa proprietà. Dimostra, più in generale, che il grafico di un qualsiasi polinomio di grado $n > 0$ non può possedere più di $2n - 1$ punti nei quali la retta normale al grafico passa per l'origine.



QUESTIONARIO

1. Dimostrare che il volume di un cilindro inscritto in un cono è minore della metà del volume del cono.

2. Si dispone di due dadi uguali non bilanciati a forma di tetraedro regolare con le facce numerate da 1 a 4. Lanciando ciascuno dei due dadi, la probabilità che esca 1 è il doppio della probabilità che esca 2, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 3, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 4. Se si lanciano i due dadi contemporaneamente, qual è la probabilità che escano due numeri uguali tra loro?

3. Determinare i valori di k tali che la retta di equazione $y = -4x + k$ sia tangente alla curva di equazione $y = x^3 - 4x^2 + 5$.

4. Considerata la funzione $f(x) = \dfrac{3x - e^{sen\,x}}{5 + e^{-x} - \cos x}$, determinare, se esistono, i valori di $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, giustificando adeguatamente le risposte fornite.

5. Con una staccionata lunga 2 metri si vuole recintare una superficie avente la forma di un rettangolo sormontato da una semicirconferenza, come in figura:

   Determinare le dimensioni dei lati del rettangolo che consentono di recintare la superficie di area massima.

6. Determinare l'equazione della superficie sferica S, con centro sulla retta r: $\begin{cases} x = t \\ y = t \quad t \in R \\ z = t \end{cases}$ tangente al piano $\pi : 3x - y - 2z + 14 = 0$ nel punto T(-4,0,1).

7. Determinare a in modo che

$$\int_a^{a+1} (3x^2 + 3)\,dx$$

   sia uguale a 10.

Sessione ordinaria 2018
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

8. In un gioco a due giocatori, ogni partita vinta frutta 1 punto e vince chi per primo raggiunge 10 punti. Due giocatori che in ciascuna partita hanno la stessa probabilità di vincere si sfidano. Qual è la probabilità che uno dei due giocatori vinca in un numero di partite minore o uguale a 12?
9. Sono dati, nello spazio tridimensionale, i punti $A(3,1,0)$, $B(3,-1,2)$, $C(1,1,2)$. Dopo aver verificato che ABC è un triangolo equilatero e che è contenuto nel piano α di equazione $x+y+z-4=0$, stabilire quali sono i punti P tali che $ABCP$ sia un tetraedro regolare.
10. Determinare quali sono i valori del parametro $k \in \Re$ per cui la funzione $y(x)=2e^{kx+2}$ è soluzione dell'equazione differenziale $y''-2y'-3y=0$.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 350 Art. 18 comma 8).
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO
LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE
LI15 - SCIENTIFICO - SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO
(Testo valevole anche per le corrispondenti sperimentazioni internazionali e quadriennali)

Tema di: MATEMATICA e FISICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti.

PROBLEMA 1

Si considerino le seguenti funzioni:

$$f(x) = ax^2 - x + b \qquad\qquad g(x) = (ax + b)\, e^{2x - x^2}\,.$$

- Provare che, comunque siano scelti i valori di a e b in $\mathbb{R}$ con $a \neq 0$, la funzione g ammette un massimo e un minimo assoluti. Determinare i valori di a e b in corrispondenza dei quali i grafici delle due funzioni f e g si intersecano nel punto $A(2, 1)$.

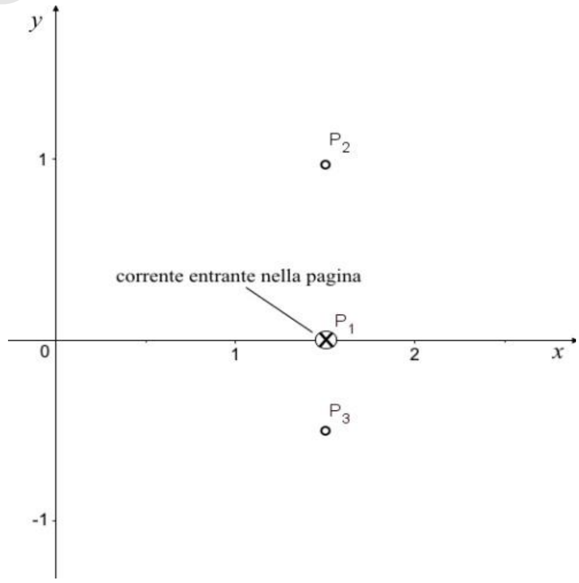
- Si assuma, d'ora in avanti, di avere $a = 1$ e $b = -1$. Studiare le due funzioni così ottenute, verificando che il grafico di g ammette un centro di simmetria e che i grafici di f e g sono tangenti nel punto $B(0, -1)$. Determinare inoltre l'area della regione piana S delimitata dai grafici delle funzioni f e g.

- Si supponga che nel riferimento Oxy le lunghezze siano espresse in metri (m). Si considerino tre fili conduttori rettilinei disposti perpendicolarmente al piano Oxy e passanti rispettivamente per i punti:

  $P_1\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $P_2\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ e $P_3\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

  I tre fili sono percorsi da correnti continue di intensità $i_1 = 2{,}0$ A, i_2 e i_3. Il verso di i_1 è indicato in figura mentre gli altri due versi non sono indicati.

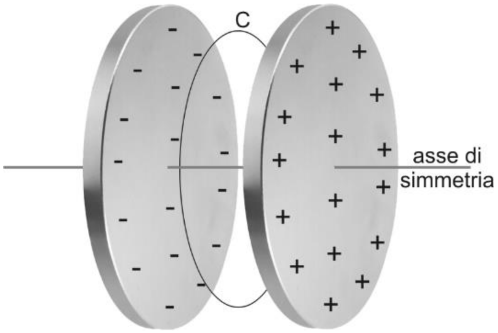
  Stabilire come varia la circuitazione del campo magnetico, generato dalle correnti i_1, i_2 e i_3, lungo il contorno di S, a seconda dell'intensità e del verso di i_2 e i_3.



- Si supponga, in assenza dei tre fili, che il contorno della regione S rappresenti il profilo di una spira conduttrice di resistenza $R = 0{,}20\ \Omega$. La spira è posta all'interno di un campo magnetico uniforme di intensità $B = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ T perpendicolare alla regione S. Facendo ruotare la spira intorno all'asse x con velocità angolare ω costante, in essa si genera una corrente indotta la cui intensità massima è pari a 5,0 mA. Determinare il valore di ω.

PROBLEMA 2

Un condensatore piano è formato da due armature circolari di raggio R, poste a distanza d, dove R e d sono espresse in metri (m). Viene applicata alle armature una differenza di potenziale variabile nel tempo e inizialmente nulla.



All'interno del condensatore si rileva la presenza di un campo magnetico $\vec{B}$. Trascurando gli effetti di bordo, a distanza r dall'asse di simmetria del condensatore, l'intensità di $\vec{B}$, espressa in tesla (T), varia secondo la legge:

$$|\vec{B}| = \frac{kt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}\, r \qquad \text{con } r \le R$$

dove a e k sono costanti positive e t è il tempo trascorso dall'istante iniziale, espresso in secondi (s).

- Dopo aver determinato le unità di misura di a e k, spiegare perché nel condensatore è presente un campo magnetico anche in assenza di magneti e correnti di conduzione. Qual è la relazione tra le direzioni di $\vec{B}$ e del campo elettrico $\vec{E}$ nei punti interni al condensatore?

- Si consideri, tra le armature, un piano perpendicolare all'asse di simmetria. Su tale piano, sia C la circonferenza avente centro sull'asse e raggio r. Determinare la circuitazione di $\vec{B}$ lungo C e da essa ricavare che il flusso di $\vec{E}$, attraverso la superficie circolare delimitata da C, è dato da

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{2k\pi r^2}{\mu_0 \varepsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{t^2+a^2}} + \frac{1}{a}\right)$$

  Calcolare la d.d.p. tra le armature del condensatore.
  A quale valore tende $|\vec{B}|$ al trascorrere del tempo? Giustificare la risposta dal punto di vista fisico.

- Per $a > 0$, si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(t) = -\frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}$. Verificare che la funzione $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} - \frac{1}{a}$ è la primitiva di f il cui grafico passa per l'origine. Studiare la funzione F, individuandone eventuali simmetrie, asintoti, estremi. Provare che F presenta due flessi nei punti di ascisse $t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$ e determinare le pendenze delle rette tangenti al grafico di F in tali punti.

- Con le opportune motivazioni, dedurre il grafico di f da quello di F, specificando cosa rappresentano le ascisse dei punti di flesso di F per la funzione f. Calcolare l'area della regione compresa tra il grafico di f, l'asse delle ascisse e le rette parallele all'asse delle ordinate passanti per gli estremi della funzione. Fissato $b > 0$, calcolare il valore di $\int_{-b}^{b} f(t)\, dt$.

QUESITI

1. Una data funzione è esprimibile nella forma $f(x) = \frac{p(x)}{x^2+d}$, dove $d \in \mathbb{R}$ e $p(x)$ è un polinomio. Il grafico di f interseca l'asse x nei punti di ascisse 0 e $12/5$ ed ha come asintoti le rette di equazione $x = 3$, $x = -3$ e $y = 5$. Determinare i punti di massimo e di minimo relativi della funzione f.

2. È assegnata la funzione

$$g(x) = \sum_{n=1}^{1010} x^{2n-1} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots + x^{2017} + x^{2019}$$

Provare che esiste un solo $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $g(x_0) = 0$. Determinare inoltre il valore di

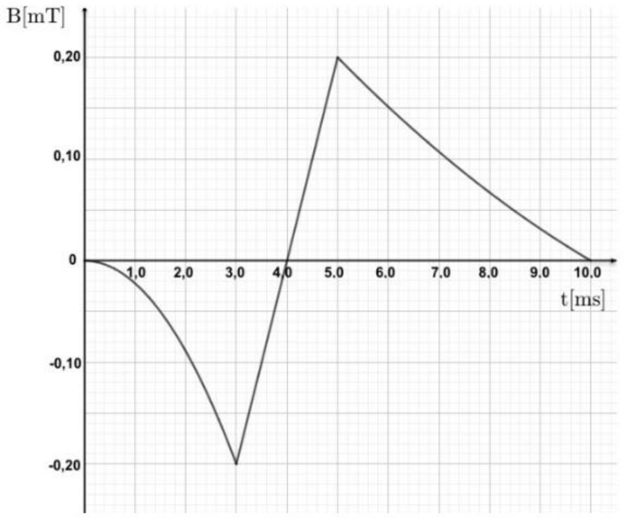
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{1{,}1^{\,x}}$$

3. Tra tutti i parallelepipedi rettangoli a base quadrata, con superficie totale di area *S*, determinare quello per cui la somma delle lunghezze degli spigoli è minima.

4. Dati i punti $A(2,0,-1)$ e $B(-2,2,1)$, provare che il luogo geometrico dei punti P dello spazio, tali che $\overline{PA} = \sqrt{2}\,\overline{PB}$, è costituito da una superficie sferica *S* e scrivere la sua equazione cartesiana. Verificare che il punto $T(-10,8,7)$ appartiene a *S* e determinare l'equazione del piano tangente in T a *S*.

5. Si lanciano 4 dadi con facce numerate da 1 a 6.
   - Qual è la probabilità che la somma dei 4 numeri usciti non superi 5?
   - Qual è la probabilità che il prodotto dei 4 numeri usciti sia multiplo di 3?
   - Qual è la probabilità che il massimo numero uscito sia 4?

6. Una spira di rame, di resistenza $R = 4{,}0\ \text{m}\Omega$, racchiude un'area di $30\ \text{cm}^2$ ed è immersa in un campo magnetico uniforme, le cui linee di forza sono perpendicolari alla superficie della spira. La componente del campo magnetico perpendicolare alla superficie varia nel tempo come indicato in figura. Spiegare la relazione esistente tra la variazione del campo che induce la corrente e il verso della corrente indotta. Calcolare la corrente media che passa nella spira durante i seguenti intervalli di tempo:
   a) da 0,0 ms a 3,0 ms;
   b) da 3,0 ms a 5,0 ms;
   c) da 5,0 ms a 10 ms.



7. In laboratorio si sta osservando il moto di una particella che si muove nel verso positivo dell'asse x di un sistema di riferimento ad esso solidale. All'istante iniziale, la particella si trova nell'origine e in un intervallo di tempo di 2,0 ns percorre una distanza di 25 cm. Una navicella passa con velocità $v = 0{,}80\ c$ lungo la direzione x del laboratorio, nel verso positivo, e da essa si osserva il moto della stessa particella. Determinare le velocità medie della particella nei due sistemi di riferimento. Quale intervallo di tempo e quale distanza misurerebbe un osservatore posto sulla navicella?

8. Un protone penetra in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme di modulo $|\vec{B}| = 1{,}00\ \mathrm{mT}$. Esso inizia a muoversi descrivendo una traiettoria ad elica cilindrica, con passo costante $\Delta x = 38{,}1\ \mathrm{cm}$, ottenuta dalla composizione di un moto circolare uniforme di raggio $r = 10{,}5\ \mathrm{cm}$ e di un moto rettilineo uniforme. Determinare il modulo del vettore velocità e l'angolo che esso forma con $\vec{B}$.

COSTANTI FISICHE		
carica elementare	e	$1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$
massa del protone	m_p	$1{,}673 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
velocità della luce	c	$2{,}998 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}$

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 205 Art. 17 comma 9).
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Ministero dell'istruzione e del merito

A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

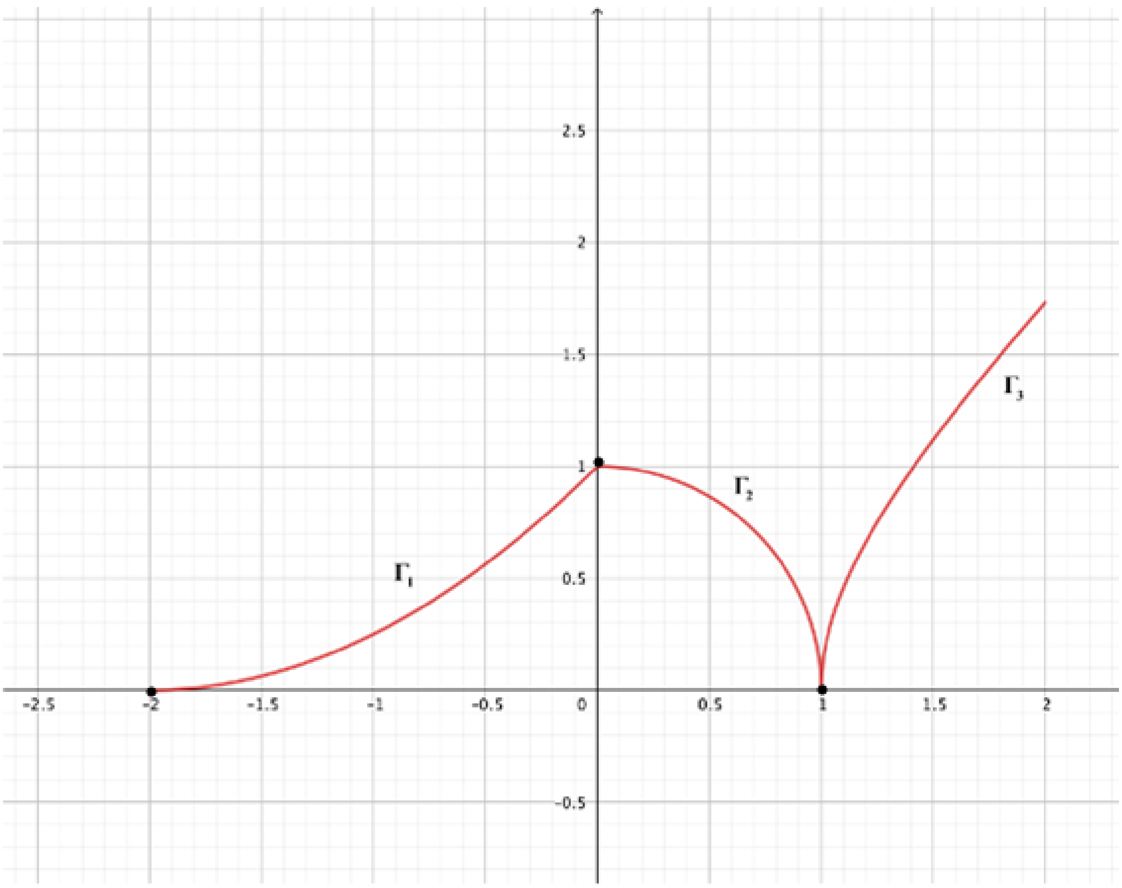
Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:
LI02, LI03, LI15, LI1S, LI22, LI23, LI31, LI32, LIA2, LIAO,
LIB2, LIC2, LID2, LII2, LII3, LII4, LIIS, LIS2, EA02, EA10

Disciplina: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Il grafico in figura, rappresentativo della funzione continua $y = f(x)$, è unione dell'arco di parabola Γ_1, dell'arco di circonferenza Γ_2 e dell'arco di iperbole Γ_3.



a) Scrivere un'espressione analitica della funzione f definita a tratti nell'intervallo $[-2; 2]$, utilizzando le equazioni:

$$y = a(x+2)^2 \qquad x^2 + y^2 + b = 0 \qquad x^2 - y^2 + c = 0$$

e individuare i valori opportuni per i parametri reali *a, b, c.*

Studiare la derivabilità della funzione f e scrivere le equazioni delle eventuali rette tangenti nei punti di ascissa

$$x = -2 \quad x = 0 \quad x = 1 \quad x = 2$$

Ministero dell'istruzione e del merito

A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:
LI02, LI03, LI15, LI1S, LI22, LI23, LI31, LI32, LIA2, LIAO,
LIB2, LIC2, LID2, LII2, LII3, LII4, LIIS, LIS2, EA02, EA10

Disciplina: MATEMATICA

b) A partire dal grafico della funzione f, dedurre quello della sua derivata f' e individuare gli intervalli di concavità e convessità di $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)dt$.

c) Si consideri la funzione $y = \frac{1}{4}(x+2)^2$, definita nell'intervallo $[-2; 0]$, di cui Γ_1 è il grafico rappresentativo. Spiegare perché essa è invertibile e scrivere l'espressione analitica della sua funzione inversa h. Studiare la derivabilità di h e tracciarne il grafico.

d) Sia S la regione limitata del secondo quadrante, compresa tra il grafico Γ_1 e gli assi cartesiani. Determinare il valore del parametro reale k affinché la retta di equazione $x = k$ divida S in due regioni equivalenti.

PROBLEMA 2

Fissato un parametro reale *a*, con $a \neq 0$, si consideri la funzione f_a così definita:

$$f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a}$$

il cui grafico sarà indicato con Ω_a.

a) Al variare del parametro *a*, determinare il dominio di f_a, studiarne le eventuali discontinuità e scrivere le equazioni di tutti i suoi asintoti.

b) Mostrare che, per $a \neq 1$, tutti i grafici Ω_a intersecano il proprio asintoto orizzontale in uno stesso punto e condividono la stessa retta tangente nell'origine.

c) Al variare di $a < 1$, individuare gli intervalli di monotonia della funzione f_a. Studiare la funzione $f_{-1}(x)$ e tracciarne il grafico Ω_{-1}.

d) Determinare l'area della regione limitata compresa tra il grafico Ω_{-1}, la retta ad esso tangente nell'origine e la retta $x = \sqrt{3}$.

Ministero dell'istruzione e del merito

A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:
LI02, LI03, LI15, LI1S, LI22, LI23, LI31, LI32, LIA2, LIAO, LIB2, LIC2, LID2, LII2, LII3, LII4, LIIS, LIS2, EA02, EA10

Disciplina: MATEMATICA

QUESITI

1. Sia *ABC* un triangolo rettangolo in *A*. Sia *O* il centro del quadrato *BCDE* costruito sull'ipotenusa, dalla parte opposta al vertice *A*.
   Dimostrare che *O* è equidistante dalle rette *AB* e *AC*.

2. Un dado truccato, con le facce numerate da 1 a 6, gode della proprietà di avere ciascuna faccia pari che si presenta con probabilità doppia rispetto a ciascuna faccia dispari. Calcolare le probabilità di ottenere, lanciando una volta il dado, rispettivamente:
   - un numero primo
   - un numero almeno pari a 3
   - un numero al più pari a 3

3. Considerata la retta r passante per i due punti $A(1,-2,0)$ e $B(2,3,-1)$, determinare l'equazione cartesiana della superficie sferica di centro $C(1,-6,7)$ e tangente a r.

4. Tra tutti i parallelepipedi a base quadrata di volume V, stabilire se quello di area totale minima ha anche diagonale di lunghezza minima.

5. Determinare l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y=\sqrt{25-x^2}$ nel suo punto di ascissa 3, utilizzando due metodi diversi.

6. Determinare i valori dei parametri reali *a* e *b* affinché:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x-(ax^3+bx)}{x^3}=1$$

7. Si consideri la funzione:

$$f(x)=\begin{cases}-1+arctan\, x & x<0\\ ax+b & x\geq 0\end{cases}$$

   Determinare per quali valori dei parametri reali *a*, *b* la funzione è derivabile. Stabilire se esiste un intervallo di $\mathbb{R}$ in cui la funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Motivare la risposta.

8. Data la funzione $f_a(x)=x^5-5ax+a$, definita nell'insieme dei numeri reali, stabilire per quali valori del parametro $a>0$ la funzione possiede tre zeri reali distinti.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico. (Nota MIM n. 9305 del 20 marzo 2023).
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla consegna della traccia.

Esame di Stato 2022/2023

Soluzione Problema 1

Marta Calanchi, Giuseppe Molteni

Dipartimento di Matematica Università degli Studi di Milano

22 giugno 2023

Parte a.
Il grafico mostra che $f(-2) = 0$, $f(0) = 1$ ed $f(1) = 0$. Questo implica che i punti $(-2, 0)$ e $(0, 1)$ appartengono all'arco di parabola Γ_1, che i punti $(0, 1)$ ed $(1, 0)$ appartengono all'arco di circonferenza Γ_2 e che $(1, 0)$ appartiene all'arco di iperbole Γ_3.

Le equazioni che descrivono in coordinate cartesiane gli archi Γ_1, Γ_2 e Γ_3 sono forniti nel testo e sono rispettivamente:

$$\Gamma_1 : \quad y = a(x + 2)^2, \qquad \Gamma_2 : \quad x^2 + y^2 + b = 0, \qquad \Gamma_3 : \quad x^2 - y^2 + c = 0.$$

Si può ottenere il valore di a a partire dalla informazione secondo cui $(0, 1) \in \Gamma_1$: pertanto

$$1 = a(0 + 2)^2 \quad \Longrightarrow \quad a = 1/4.$$

Analogamente si può ottenere b dal fatto che $(1, 0) \in \Gamma_2$:

$$1^2 + 0^2 + b = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = -1,$$

e infine si può ottenere c dal fatto che $(1, 0) \in \Gamma_3$:

$$1^2 - 0^2 + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad c = -1.$$

Queste procedure determinano univocamente le equazioni degli archi, che quindi sono:

$$\Gamma_1 : \quad y = \frac{1}{4}(x + 2)^2, \qquad \Gamma_2 : \quad x^2 + y^2 - 1 = 0, \qquad \Gamma_3 : \quad x^2 - y^2 - 1 = 0.$$

Per ottenere l'espressione analitica di f occorre ricavare il valore di y da ciascuna di queste equazioni, tenendo presente che il grafico mostra come $f(x)$ (e quindi l'y cercata) sia a valori non negativi. Ne segue che:

$$f : [-2, 2] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x + 2)^2 & \text{se } x \in [-2, 0) \\ \sqrt{1 - x^2} & \text{se } x \in [0, 1) \\ \sqrt{x^2 - 1} & \text{se } x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Le funzioni che definiscono i valori di f negli intervalli aperti $(-2, 0)$, $(0, 1)$ ed $(1, 2)$ sono un polinomio per il primo intervallo e radici di un polinomio negli altri due intervalli. I polinomi esprimono funzioni derivabili ovunque e la funzione radice $\sqrt{x}$ è derivabile per $x > 0$. I polinomi $1 - x^2$ ed $x^2 - 1$ (che appaiono nelle due radici) non si annullano nei punti degli intervalli aperti menzionati. Dal teorema di derivazione per funzioni composte segue che quindi f è derivabile in $(-2, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2)$, con derivata data da:

$$f' : (-2, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x + 2) & \text{se } x \in (-2, 0) \\ \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} & \text{se } x \in (0, 1) \\ \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} & \text{se } x \in (1, 2). \end{cases}$$

I punti estremi -2 e 2 appartengono al dominio ma non ne sono interni, quindi in tali punti la funzione non può essere derivabile. Per essi si può eventualmente introdurre una derivata destra in -2 e sinistra in 2, definite da:

$$f'(-2^+) := \lim_{h\to 0^+} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} \quad \text{ed} \quad f'(2^-) := \lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}.$$

Questi valori possono essere calcolati a partire da queste espressioni, ottenendo

$$\begin{aligned} f'(-2^+) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{4}(-2+h+2)^2 - \frac{1}{4}(-2+2)^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{4}h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{4}h = 0. \end{aligned}$$

ed

$$\begin{aligned} f'(2^-) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{(2+h)^2-1}-\sqrt{2^2-1}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{3+4h+h^2}-\sqrt{3}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{3+4h+h^2-3}{h(\sqrt{3+4h+h^2}+\sqrt{3})} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{4+h}{\sqrt{3+4h+h^2}+\sqrt{3}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Agli stessi valori si può arrivare più velocemente determinando i limiti di $f'(x)$ per $x \to -2^+$ e per $x \to 2^-$, avendo cura di adottare per f' l'espressione corretta. Si ha così:

$$f'(-2^+) = \lim_{x\to -2^+} f'(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{1}{2}(x+2) = 0,$$

ed

$$f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

In tali punti possiamo quindi individuare rispettivamente una retta tangente destra al punto $(-2,0)$, di equazione

$$y = f(-2) + f'(-2^+)(x-(-2)) \qquad \Longrightarrow \qquad y = 0 + 0(x-2) \qquad \Longrightarrow \qquad y = 0$$

ed una retta tangente sinistra al punto $(2,0)$, di equazione

$$y = f(2) + f'(2^-)(x-2) \qquad \Longrightarrow \qquad y = \sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}(x-2) \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

I punti $x=0$ e $x=1$ sono interni al dominio, ma l'espressione analitica della derivata è diversa nei loro intorni sinistri e destri; per stabilire la derivabilità di f in tali punto conviene anzitutto indagare i valori dei quattro limiti seguenti:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2}(x+2) = 1, \quad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty.$$

Il fatto che $f'(0^-)$ ed $f'(0^+)$ abbiano valore finito ma diverso dimostra che f non è derivabile in $x = 0$ ma in tal punto ammette comunque derivate sinistra e destra con valori 1 e 0, rispettivamente.
Possiamo quindi introdurre una retta tangente sinistra al punto $(0,0)$, con equazione

$$y = f(0) + f'(0^-)(x-0) \qquad \Longrightarrow \qquad y = 1 + \frac{1}{2}x$$

ed una retta tangente destra al punto $(0,0)$, con equazione

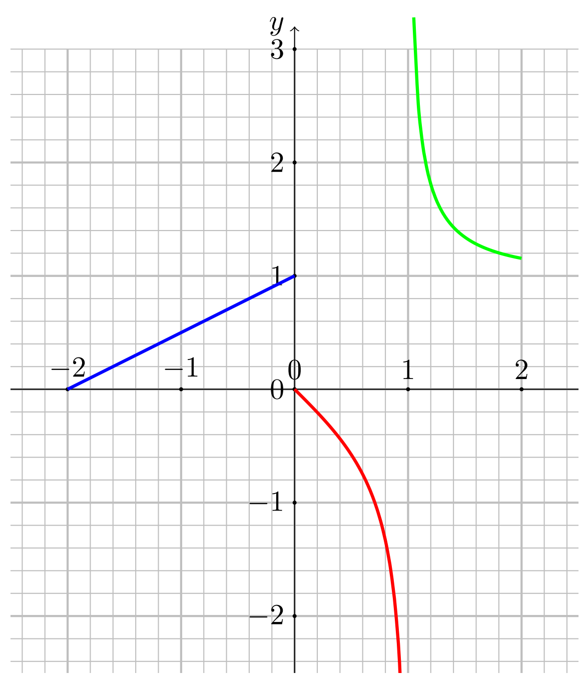
$$y = f(0) + f'(0^+)(x-0) \qquad \Longrightarrow \qquad y = 1 + 0\ x \qquad \Longrightarrow \qquad y = 1.$$

Il fatto che $f'(1^-)$ ed $f'(0^+)$ non abbiano valore finito dimostra che f non è derivabile in $x = 0$ e che in tal punto non ammette né derivata sinistra né destra.

Parte b. abbiamo già verificato che la derivata è data dalla seguente espressione,

$$f' \colon (-2,0) \cup (0,1) \cup (1,2) \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+2) & \text{se } x \in (-2,0) \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{se } x \in (0,1) \\ \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} & \text{se } x \in (1,2). \end{cases}$$

il cui grafico è riportato di seguito.



Dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [-2,2]$. La convessità di F può quindi essere dedotta dal segno di F'', ovvero di f' nel dominio $(-2,0) \cup (0,1) \cup (1,2)$, e dalla continuità di F' nei punti di bordo. Dal grafico di f' segue quindi che F è sia concava che convessa in $[-2,0]$; concava e non convessa in $[0,1]$ ed infine convessa ma non concava in $[1,2]$.
Parte c.
Il grafico mostra che la funzione $y = \frac{1}{4}(x+2)^2$ è iniettiva su $[-2,0]$ perché strettamente monotona crescente. Essa risulta quindi invertibile sul proprio codominio, ovvero su $[0,1]$ così che

$h\colon [0,1] \to [-2,0] \subset \mathbb{R}$ esiste. Tenuto conto x deve essere preso in $[-2,0]$ si ha che

$$y = \frac{1}{4}(x+2)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad |x+2| = 2\sqrt{y} \qquad \Longrightarrow \qquad x = 2\sqrt{y} - 2.$$

Perciò i valori della mappa h sono dati da $h(z) = 2\sqrt{z} - 2$.

Parte d.
Le aree delle porzioni di grafico che insistono sugli intervalli $[-2,k]$ e $[k,0]$ sono misurate dagli integrali

$$\int_{-2}^{k} \frac{1}{4}(x+2)^2 \,\mathrm{d}x, \qquad \int_{k}^{0} \frac{1}{4}(x+2)^2 \,\mathrm{d}x.$$

La condizione che determina k è l'uguaglianza di queste espressioni, per cui si deve avere

$$\begin{aligned}
&\int_{-2}^{k} \frac{1}{4}(x+2)^2 \,\mathrm{d}x = \int_{k}^{0} \frac{1}{4}(x+2)^2 \,\mathrm{d}x \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{1}{12}(x+2)^3\Big|_{-2}^{k} = \frac{1}{12}(x+2)^3\Big|_{k}^{0} \\
\Longleftrightarrow \quad & (x+2)^3\Big|_{-2}^{k} = (x+2)^3\Big|_{k}^{0} \\
\Longleftrightarrow \quad & (k+2)^3 - 0^3 = (0+2)^3 - (k+2)^3 \\
\Longleftrightarrow \quad & 2(k+2)^3 = 2^3 \\
\Longleftrightarrow \quad & k = \sqrt[3]{4} - 2.
\end{aligned}$$

Esame di Stato 2022/2023

Soluzione Problema 2

Marta Calanchi, Giuseppe Molteni

Dipartimento di Matematica Università degli Studi di Milano

22 giugno 2023

Parte a.
La funzione $f_a(x)$ è razionale (ovvero quoziente di polinomi), quindi risulta continua (anzi, derivabile ad ogni ordine) in tutto il suo dominio, che coincide con $\mathbb{R}$ privato dei punti dove si annulla il denominatore (purché negli stessi punti non si annulli pure il numeratore, cosa che andrà controllata caso per caso). L'espressione che definisce f_a può anche essere scritta come

$$f_a(x) = 1 + a\frac{1-x}{x^2-a},$$

cosa che consente di concentrare l'attenzione sulla più semplice espressione $\frac{1-x}{x^2-a}$. Il numeratore di questa espressione si annulla per $x = 1$. Il denominatore non presenta radici nel caso $a < 0$, mentre si annulla per $x = \pm\sqrt{a}$ per $a > 0$. Quindi, se $a < 0$ la funzione risulta definita e continua su $\mathbb{R}$. Se $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ la funzione risulta definita e continua in $(-\infty, -\sqrt{a}) \cup (-\sqrt{a}, \sqrt{a}) \cup (\sqrt{a}, +\infty)$. Se invece $a = 1$ l'espressione diventa

$$f_1(x) = 1 + \frac{1-x}{x^2-1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

da cui segue immediatamente che in tal caso f_a è definita in $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ con una discontinuità eliminabile in 1, motivo per cui può essere anche considerata come definita in $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Dalla espressione

$$f_a(x) = 1 + a\frac{1-x}{x^2-a}$$

si ricava immediatamente che tali funzioni presentano un asintoto orizzontale di equazione $y = 1$ sia a $-\infty$ che a $+\infty$. Questi sono gli unici asintoti di f_a nel caso $a < 0$.
Nel caso $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ si hanno invece anche gli asintoti verticali di equazione $x = \pm\sqrt{a}$.
Infine, nel caso $a = 1$ oltre agli asintoti orizzontali è presente anche il solo asintoto verticale $x = -1$.

Parte b. L'asintoto orizzontale ha equazione $y = 1$. Il grafico Ω_a interseca tale retta se e solo vi sono soluzioni per l'equazione

$$f_a(x) = 1 \iff 1 + a\frac{1-x}{x^2-a} = 1 \iff \frac{1-x}{x^2-a} = 0$$

e questo è appunto quel che accade per $x = 1$, a prescindere dal valore assunto dal parametro a (si noti che per semplificare l'equazione si è usata l'ipotesi fornita dal testo secondo cui $a \neq 0$).
Per verificare che la retta tangente ad Ω_a nel punto di ascissa 0 basta verificare che sia $f_a(0)$ che $f'_a(0)$ non dipendono da a. In effetti si ha che $f_a(0) = 0$ e che

$$f'_a(x) = a\frac{x^2-2x+a}{(x^2-a)^2} \qquad \Longrightarrow \qquad f'_a(0) = 1.$$

Parte c.
Gli intervalli di monotonia possono essere dedotti dal segno della derivata prima, la quale è:

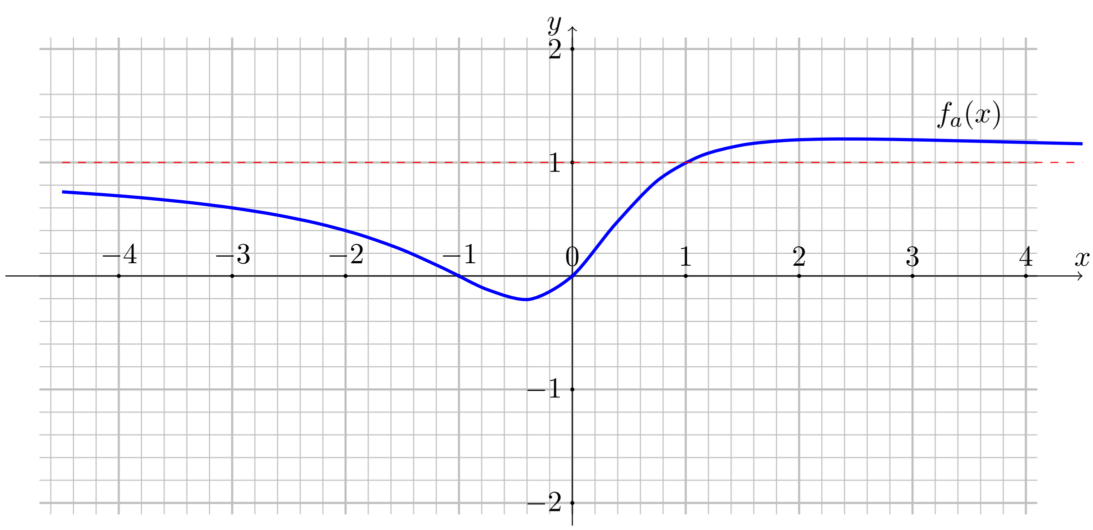
$$f'_a(x) = a\frac{x^2-2x+a}{(x^2-a)^2}.$$

Il denominatore, essendo un quadrato, non altera il segno di f'_a, tuttavia la presenza di zeri del denominatore influenza il dominio della funzione stessa. Per tale motivo conviene studiare separatamente i casi $a < 0$ ed $a \in (0, 1)$.
Assumiamo $a < 0$. Allora non vi sono asintoti verticali ed il segno di f'_a coincide con l'opposto del segno di $x^2 - 2x + a$. Tale polinomio presenta due radici distinte in $1 - \sqrt{1-a}$ ed $1 + \sqrt{1+a}$ ed è negativo tra di esse. Ne segue che in tal caso $f_a(x)$ presenta tre intervalli di monotonia dati da: $(-\infty, 1 - \sqrt{1-a})$, dove $f_a(x)$ risulta strettamente decrescente; $(1 - \sqrt{1-a}, 1 + \sqrt{1-a})$, dove $f_a(x)$ risulta strettamente crescente ed infine $(1 + \sqrt{1-a}, +\infty)$, dove $f_a(x)$ risulta di nuovo strettamente decrescente.
Assumiamo invece che a sia in $(0, 1)$. In tal caso si deve tener conto della presenza dei due asintoti verticali in $\pm\sqrt{a}$, e del fatto che ora il segno di f'_a coincide con quello di $x^2 - 2x + a$. Le du radici sono ancora $1 \pm \sqrt{1-a}$. La radice $1 + \sqrt{1-a}$ è chiaramente maggiore di 1, e in modo analogo è chiaro pure che $1 - \sqrt{1-a}$ è positivo (e quindi maggiore di $-\sqrt{a}$). Verifichiamo inoltre che la radice $1 - \sqrt{1-a}$ è pure minore di $\sqrt{a}$. Infatti si ha che

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{1-a} < \sqrt{a} &\iff \quad 1 < \sqrt{a} + \sqrt{1-a} \\ &\iff \quad 1 < a + 1 - a + 2\sqrt{a}\sqrt{1-a} \\ &\iff \quad 0 < 2\sqrt{a}\sqrt{1-a} \end{aligned}$$

che è effettivamente soddisfatta. Da tutto ciò segue che gli intervalli di monotonia di f_a sono i seguenti:
$(-\infty, -\sqrt{a})$, dove f_a è strettamente crescente,
$(-\sqrt{a}, 1 - \sqrt{1-a})$, dove f_a è strettamente crescente,
$(1 - \sqrt{1-a}, \sqrt{a})$, dove f_a è strettamente decrescente,
$(\sqrt{a}, 1 + \sqrt{1-a})$, dove f_a è strettamente decrescente,
$(1 + \sqrt{1-a}, +\infty)$, dove f_a è strettamente crescente.

Il grafico di $f_a(x)$ per $a = -1$ è mostrato di seguito.



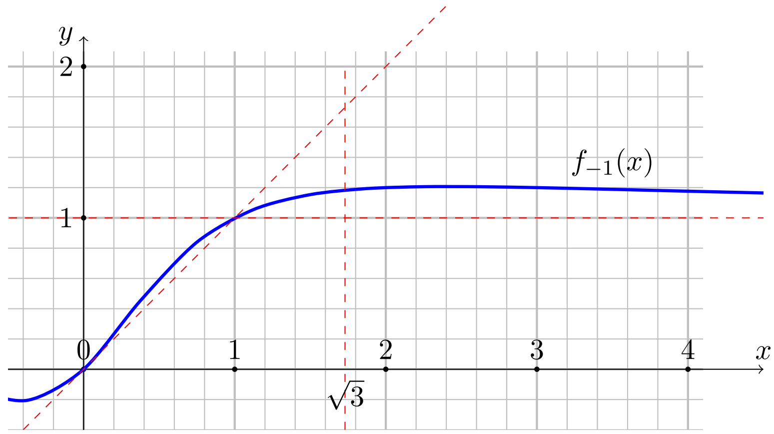
Parte d.
Anzitutto occorre determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $f_{-1}(x) = \frac{x^2+x}{x^2+1}$ nel punto di ascissa $x = 1$. Dato che $f_{-1}(0) = 0$ e che $f'_{-1}(x) = -\frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}$ così che $f'_{-1}(0) = 1$ si ha che la retta cercata è quella di equazione:

$$y = f_{-1}(0) + f'_{-1}(0)(x - 0) \quad \Longrightarrow \quad y = 0 + 1 \cdot (x - 0) \quad \Longrightarrow \quad y = x.$$

Il grafico di f_{-1} interseca tale retta nei punti la cui ascissa soddisfa l'equazione

$$f_{-1}(x) = x \iff \frac{x^2+x}{x^2+1} = x \iff x^2 + x = x(x^2+1) \iff x^3 - x^2 = 0 \iff x^2(x-1) = 0$$

quindi oltre al punto di ascissa $x = 0$ (ascissa del punto di tangenza) vi è un'unica altra intersezione, che ha $x = 1$ e quindi ordinata 1 (dovendo stare sulla retta di equazione $y = x$). Aggiungendo la retta $y = x$ al grafico di f_{-1}, si osserva che $f_{-1}(x) > x$ per $x < 1$ ed $f_{-1}(x) < x$ per $x > 1$.



La regione ha quindi area data da:

$$\int_0^1 \Big(\frac{x^2+x}{x^2+1} - x\Big)\,\mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{3}} \Big(x - \frac{x^2+x}{x^2+1}\Big)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big(1 - x + \frac{x-1}{x^2+1}\Big)\,\mathrm{d}x - \int_1^{\sqrt{3}} \Big(1 - x + \frac{x-1}{x^2+1}\Big)\,\mathrm{d}x$$
$$= \Big(x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log(x^2+1) - \operatorname{atan}(x)\Big)\Big|_0^1 - \Big(x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log(x^2+1) - \operatorname{atan}(x)\Big)\Big|_1^{\sqrt{3}}$$
$$= \Big(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log 2 - \operatorname{atan} 1\Big) - \Big(\sqrt{3} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\log 4 - \operatorname{atan}(\sqrt{3})\Big) + \Big(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log 2 - \operatorname{atan} 1\Big)$$
$$= \frac{5}{2} - 2\operatorname{atan} 1 - \sqrt{3} + \operatorname{atan}(\sqrt{3})$$
$$= \frac{5}{2} - 2\frac{\pi}{4} - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$$
$$= \frac{5}{2} - \sqrt{3} - \frac{\pi}{6}.$$

Esame di Stato 2022/2023

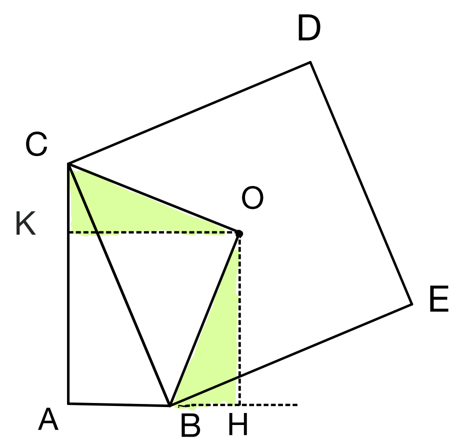
Soluzione Quesiti

Marta Calanchi, Giuseppe Molteni

Dipartimento di Matematica Università degli Studi di Milano

22 giugno 2023

Quesito 1.
Sia H la proiezione di O sulla retta AB e sia K la proiezione di O sulla retta AC.



Gli angoli EBH ed ABC sono complementari a $90°$ poiché la loro somma con l'angolo CBE, di $90°$, dà l'angolo piatto ABH. Anche l'angolo ACB è complementare a $90°$ con l'angolo CAB, così che gli angoli ACB ed EBH sono tra loro congruenti.
Ma allora anche gli angoli OBH ed OCK sono tra loro congruenti poiché $OBH = OBE + EBH = 45° + EBH = 45° + ACB = 45° + KCB = BCO + BCK = OCK$. I triangoli BHO ed CKO sono simili poiché sono entrambi retti ed hanno gli angoli OBH ed OCK congruenti. Le ipotenuse OB e OC sono congruenti poiché entrambi di lunghezza pari a metà della diagonale del quadrato. I triangoli BHO e CKO sono quindi in realtà congruenti tra loro. Ne segue che i lati OH e OK sono congruenti. La tesi è quindi dimostrata.

Quesito 2. Indichiamo con x il valore comune della probabilità delle facce $1, 3, 5$. Il testo afferma che anche le facce $2, 4, 6$ hanno tra loro la medesima probabilità ma pari a $2x$. Dalla relazione sulla probabilità secondo cui la somma di tutte le probabilità deve essere 1 si ottiene che

$$1 = P(\text{“1”}) + P(\text{“2”}) + P(\text{“3”}) + P(\text{“4”}) + P(\text{“5”}) + P(\text{“6”}) = x + 2x + x + 2x + x + 2x = 9x$$

e che quindi $x = 1/9$. abbiamo quindi che:

$$P(\text{“primo”}) = P(2,3,5) = P(\text{“2”}) + P(\text{“3”}) + P(\text{“5”}) = 2x + x + x = 4x = 4/9;$$
$$P(\text{“} \geq 3\text{”}) = P(3,4,5,6) = P(\text{“3”}) + P(\text{“4”}) + P(\text{“5”}) + P(\text{“6”}) = x + 2x + x + 2x = 6x = 6/9;$$
$$P(\text{“} \leq 3\text{”}) = P(1,2,3) = P(\text{“1”}) + P(\text{“2”}) + P(\text{“3”}) = x + 2x + x = 4x = 4/9.$$

Quesito 3.
La retta r passante per i punti $A = (1, -2, 0)$ e $B = (2, 3, -1)$ ha equazione parametrica data da

$$\underline{x} = A + t(B - A) \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x = 1 + t \cdot (2 - 1) = 1 + t \\ y = -2 + t \cdot (3 - (-2)) = -2 + 5t \\ z = 0 + t \cdot (-1 - 0) = -t. \end{cases}$$

La sfera S di centro $C = (1, -6, -7)$ e raggio R ha equazione

$$(x - 1)^2 + (y + 6)^2 + (z - 7)^2 = R^2.$$

L'intersezione fra r ed S porta alla equazione

$$(1 + t - 1)^2 + (-2 + 5t + 6)^2 + (t + 7)^2 = R^2 \qquad \text{ovvero} \qquad 27t^2 + 54t + 65 - R^2 = 0.$$

Si ha tangenza se e solo se questa equazione ha le due soluzioni di fatto coincidenti, cosa che richiede che

$$54^2 - 4 \cdot 27(65 - R^2) = 0 \quad \iff \quad R^2 = 38 \quad \iff \quad R = \sqrt{38}.$$

(La soluzione $-\sqrt{38}$ è esclusa poiché abbiamo dichiarato che R è il raggio della sfera, e quindi è necessariamente positivo).

Quesito 4.
Indichiamo con x la lunghezza del lato della base ed h quella della altezza, così che le dimensioni del parallelepipedo sono x, x ed h. L'area è allora $2x^2 + 4xh$ e la lunghezza della diagonale è invece $\sqrt{2x^2 + h^2}$. Il volume è invece $V = x^2h$ ed è per ipotesi costante, per cui possiamo usare questa relazione per esprimere h in funzione di x, ottenendo $h = V/x^2$. In termini di x e del parametro fisso V l'area totale è quindi

$$2x^2 + \frac{4V}{x}.$$

Tale funzione di x presenta chiaramente un minimo (diverge sia per $x \to 0^+$ sia per $x \to +\infty$ ed è continua in $(0, +\infty)$). Il punto di minimo è ottenuto annullando la derivata in x, quindi

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2x^2 + \frac{4V}{x}\right) = 4x - \frac{4V}{x^2} \quad \iff \quad x^3 = V \quad \iff \quad x = \sqrt[3]{V}.$$

Avendo determinato x, abbiamo che $h = V/x^2 = V/(\sqrt[3]{V})^2 = \sqrt[3]{V}$. (Quindi il parallelepipedo che minimizza l'area totale è il cubo di volume V).
Procediamo in modo analogo per la diagonale la cui lunghezza in termini di x e del parametro costante V risulta

$$\sqrt{2x^2 + \frac{V^2}{x^4}}.$$

Anche tale funzione di x presenta chiaramente un minimo (diverge sia per $x \to 0^+$ sia per $x \to +\infty$ ed è continua in $(0, +\infty)$). Il punto di minimo è ottenuto annullando la derivata in x, quindi

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{2x^2 + \frac{V^2}{x^4}}\right) = \frac{4x - 4V^2/x^5}{2\sqrt{2x^2 + \frac{V^2}{x^4}}} \quad \iff 4x = 4V^2/x^5 \quad \iff x^6 = V^2 \quad \iff x = \sqrt[3]{V}.$$

Come nel caso precedente quindi abbiamo che anche in questo caso $h = \sqrt[3]{V}$. Concludiamo quindi che effettivamente il parallelepipedo di area totale minima e quello di diagonale minima a volume fissato V coincidono (e sono il cubo di volume assegnato V).

Quesito 5.
Quale primo metodo possiamo utilizzare il fatto che l'equazione della retta tangente al grafico di una funzione f nel punto di ascissa x_0 è $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Nel caso in esame $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ ed $x_0 = 3$. Quindi

$$f(3) = \sqrt{25 - 3^2} = 4 \quad \text{e} \quad f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} \qquad \Longrightarrow f'(3) = \frac{-3}{4}$$

e così l'equazione è $y = 4 - \frac{3}{4}(x - 3) = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$.
Come secondo metodo imponiamo che la semicirconferenza $x^2 + y^2 - 25 = 0$, $y \geq 0$ che coincide con il grafico per f abbia con la retta r passante per $(x_0, f(x_0))$ una intersezione doppia. Il punto per il quale deve passare il fascio di rette è $(3, 4)$. Le rette del fascio sono quindi quelle individuate da $y = 4 + m(x - 3)$ al variare del parametro m (oltre alla retta verticale $x = 3$ che però non è certamente quella tangente). Le intersezioni sono quindi date dall'equazione

$$x^2 + (4 + m(x - 3))^2 = 25 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (m^2 + 1)x^2 + (8m - 6m^2)x + 9m^2 - 24m - 9 = 0.$$

Imponendo che questa equazione in x abbia le sue due radici coincidenti (e che quindi il discriminante del polinomio sia nullo) si ottiene che

$$\begin{aligned}(8m - 6m^2)^2 - 4(m^2 + 1)(9m^2 - 24m - 9) = 0 &\Longleftrightarrow \qquad 64m^2 + 96m + 36 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \qquad 4(4m + 3)^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \qquad m = -\frac{3}{4},\end{aligned}$$

come nel metodo precedente.

Quesito 6.
Si vuole determinare a e b così che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - (ax^3 + bx)}{x^3} \text{ esista e valga 1.}$$

Calcoliamo il valore del limite utilizzando il teorema di de l'Hôpital secondo cui in presenza di una forma di indecisione $0/0$, se il limite del quoziente delle derivate esiste (in $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$) allora questo coincide con il valore del limite originario. In questo cosa si ha che posto $f(x) := \sin x - (ax^3 + bx)$ ed $g(x) = x^3$ si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 3ax^2 - b}{3x^2}.$$

qualora b non fosse -1 il limite risulterebbe divergente, quindi affinché il valore del limite sia 1 è necessario che $b = 1$. Sotto tale ipotesi il limite diventa

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 3ax^2 - 1}{3x^2}$$

che presenta ancora una forma di indecisione $0/0$. Una ulteriore applicazione del Teorema di de l'Hôpital porta a considerare

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\sin x - 6ax}{6x}$$

che è ancora una forma di indecisione $0/0$. Una ulteriore (e ultima!) applicazione del Teorema di de l'Hôpital porta a considerare

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\cos x - 6a}{6} = \frac{-1 - 6a}{6}.$$

Visto che si vuole che il limite valga 1 questo impone ad a di valere $-7/6$. La risposta è quindi $a = -7/6$, $b = 1$.

Quesito 7.
La funzione f è definita a tratta come

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \operatorname{atan} x & \text{se } x \leq 0 \\ ax + b & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Si vuole determinare a e b affinché f risulti derivabile in $x = 0$. Perché sia derivabile è necessario che sia continua e che quindi i limiti di $f(x)$ per $x \to 0^-$ e per $x \to 0^+$ esistano e coincidano. Dalle espressioni esplicite per $x < 0$ ed $x > 0$ questo equivale ad imporre che

$$-1 = \lim_{x \to 0^-} -1 + \operatorname{atan} x = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} ax + b = b$$

cosa che chiaramente determina che $b = 1$. La derivata di f esiste sicuramente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, con valore dato da

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + x^2} & \text{se } x < 0 \\ a & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Questa espressione mostra che $f'(0^-) := \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 1$ esiste ed altrettanto fa $f'(0^+) := \lim_{x \to 0^+} f'(x) = a$. Perché f sia derivabile è necessario che questi valori coincidano, e che quindi $a = 1$. Sotto l'ipotesi che $a = 1$ e $b = 1$ la funzione risultante è effettivamente continua in 0 ed ha derivate sinistra e destra in 0 coincidenti, quindi è effettivamente derivabile in 0.
Il teorema di Rolle assume che la funzione definita nell'intervallo $[\alpha, \beta]$ sia continua in tale intervallo, derivabile in (α, β) e assuma il medesimo valore in α e β. La funzione appena individuata risulta derivabile (e quindi automaticamente continua) in tutto $\mathbb{R}$. Tuttavia il calcolo precedente mostra che la sua derivata è positiva in tutto $\mathbb{R}$. La funzione è quindi strettamente crescente. In particolare è iniettiva così che la terza ipotesi del teorema non è mai soddisfatta comunque si prendano α e β. (E d'altra parte non potrebbe essere diversamente visto che se valessero tutte le ipotesi del teorema allora da esso seguirebbe l'esistenza di un punto a derivata nulla, cosa che sappiamo non esistere).

Quesito 8.
La funzione $f_a(x) = 5x^5 - 5ax + a$ è polinomiale di grado dispari con x^5 quale termine principale all'infinito. Ne segue che $\lim_{x \to -\infty} f_a(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f_a(x) = +\infty$. Inoltre $f_a'(x) = 5x^4 - 5a$ si annulla unicamente in $x = \pm\sqrt[4]{a}$ e assume valori positivi in $(-\infty, -\sqrt[4]{a})$, negativi in $(-\sqrt{4}a, \sqrt{4}a)$ e di nuovo positivi in $(\sqrt{4}a, +\infty)$. Quindi f_a presenta un massimo relativo in $x = -\sqrt{4}a$ ed un minimo relativo in $x = \sqrt{4}a$. Inoltre $f_a(0) = a > 0$, quindi f ha un unico zero nella regione $x < 0$, così che essa avrà almeno tre radici distinte se e solo se il valore nel minimo risulterà negativo. Così

$$\begin{aligned} f_a \text{ ha almeno tre radici distinte} &\iff f_a(\sqrt{4}a) < 0 \\ &\iff a\sqrt[4]{a} - 5a\sqrt[4]{a} + a < 0 \\ &\iff -4a\sqrt[4]{a} + a < 0 \\ &\iff \sqrt[4]{a} > 1/4 \\ &\iff a > 1/4^4 = 1/256. \end{aligned}$$

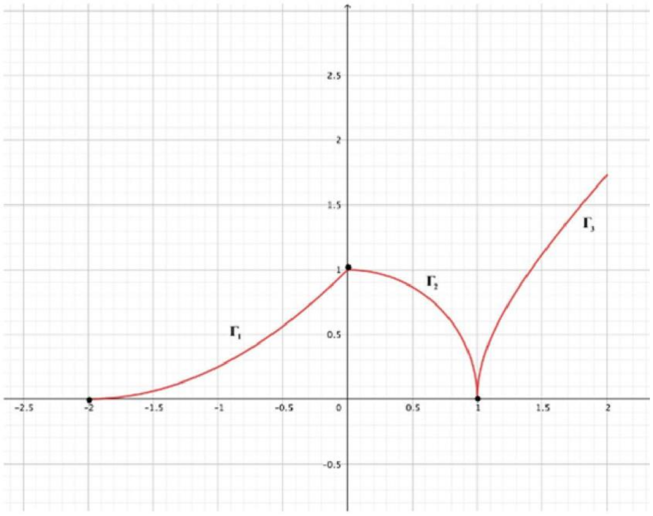
Matematica Maturità 2023

Traducción y soluciones por Gerard Romo Garrido

Fuente de inspiración para algunas soluciones: Documento de Marta Calanchi, Giuseppe Molteni (Dipartamento di Matematica Università degli Studi di Milano)

Problema 1

Se muestra en la imagen la gráfica de una función continua $y = f(x)$, y es la unión de un arco de parábola Γ_1, un arco de circunferencia Γ_2 y un arco de hipérbole Γ_3.



a) Escribe una expresión analítica de la función f definida a trozos en el intervalo $[-2,2]$, utilizando las ecuaciones:

$$y = a(x+2)^2 \qquad x^2 + y^2 + b = 0 \qquad x^2 - y^2 + c = 0$$

determinando los valores de los parámetros reales a, b, c.
Estudia la derivabilidad de la función f y escribe las ecuaciones de las posibles rectas tangentes en los puntos de abscisa

$$x = -2 \qquad x = 0 \qquad x = 1 \qquad x = 2$$

b) A partir de la gráfica de la función f, deduce la gráfica de su derivada f', y determina los intervalos de concavidad y convexidad de $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)dt$.

c) Si consideramos la función $y = \frac{1}{4}(x+2)^2$, definida en el intervalo $[-2;0]$, cuya gráfica Γ_1 es la gráfica representada, razona por qué esta función es invertible y escribe la expresión analítica de su función inversa h. Estudia la derivabilidad de h y represéntala gráficamente.

d) Sea S la región limitada por el segundo cuadrante, comprendida entre la gráfica Γ_1 y los ejes de coordenadas. Determina el valor del parámetro real k para el cual la recta de ecuación $x = k$ divide S en dos regiones equivalentes.

Problema 2

Fijado un parámetro real a, con $a \neq 0$, se consideran la función f_a definida de la siguiente manera:

$$f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a}$$

cuya gráfica se denotará por Ω_a.

a) Al variar el parámetro a, determina el dominio de f_a, estudia las posibles discontinuidades y escribe las ecuaciones de todas sus asíntotas.

b) Demuestra que, para $a \neq 1$, todas las gráficas Ω_a cortan sus respectivas asíntotas horizontales en un mismo punto y comparten la misma recta tangente en el origen.

c) Determina la monotonía de la función f_a para $a < 1$. Estudia la función $f_{-1}(x)$ y representa la gráfica Ω_{-1}.

d) Determina el área de la región limitada por la gráfica Ω_{-1}, su la recta tangente en el origen y la recta $x = \sqrt{3}$.

Preguntas.

1

Sea ABC un triángulo rectángulo en A. Sea O el centro del cuadrado BCDE construido sobre su hipotenusa, por la parte opuesta al vértice A. Demuestra que O es equidistante de las rectas AB y AC.

2

En un dado trucado, con las caras numeradas del 1 al 6, las caras pares tienen todas el doble de probabilidad que las caras impares. Calcula la probabilidad de obtener, tirando una vez el dado, respectivamente:
- Un número primo.
- Un número mayor o igual a 3.
- Un número menor o igual a 3.

3

Sea r la recta que pasa por los puntos $A=(1,-2,0)$ y $B=(2,3,-1)$. Determina la ecuación cartesiana de la superficie esférica de centro $C=(1,-6,7)$ y tangente a r.

4

Entre todos los paralelepípedos de base cuadrada y un volumen fijo V, demuestra si aquél de área total mínima también tiene la diagonal de longitud mínima.

5

Determina la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y=\sqrt{25-x^2}$ en su punto de abscisa 3, utilizando dos métodos diferentes.

6

Determinar los valores de los parámetros reales a y b para los cuales

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\left(a\,x^3+bx\right)}{x^3}=1$$

7

Consideramos la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}-1+\arctan x & x<0\\ ax+b & x\geq 0\end{cases}$$

Determinar los valores de los parámetros reales a y b para los cuales la función es derivable. ¿Existe un intervalo en IR en el que la función f cumpla la hipótesis del teorema de Rolle? Justifica la respuesta.

8

Dada la función

$$f_a(x)=x^5-5a\,x+a$$

Definida en el conjunto de números reales, determinar los valores del parámetro $a>0$ para los cuales la función posee tres ceros reales distintos.

Soluciones.

Problema 1.

a) Γ_1 es un arco de parábola de ecuación $y = a(x+2)^2$ que sabemos que pasa por el punto (0,1), y por tanto

$1 = a(0+2)^2 \Leftrightarrow a = 1/4$

Γ_2 es un arco de circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + b = 0$ que sabemos que pasa por el punto (0,1), y por tanto

$0^2 + 1^2 + b = 0 \Leftrightarrow b = -1$

La función en este intervalo será

$x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2}$

tomamos la raíz positiva porque vemos que el arco está por encima del eje X.

Γ_3 es un arco de hipérbola de ecuación $x^2 - y^2 + c = 0$ que sabemos que pasa por el punto (1,0), y por tanto

$1^2 - 0^2 + c = 0 \Rightarrow c = -1$

La función en este intervalo será

$x^2 - y^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2-1} \Rightarrow y = \sqrt{x^2-1}$

De nuevo hemos tomado la raíz positiva porque visualmente vemos que la gráfica está por encima del eje X.

Así pues, la expresión analítica de la función f será

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}(x+2)^2 & -2 \le x \le 0 \\ \sqrt{1-x^2} & 0 < x \le 1 \\ \sqrt{x^2-1} & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

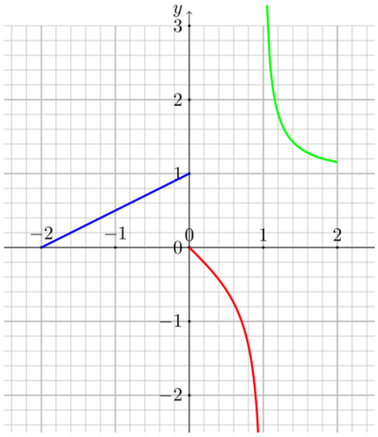
Visualmente vemos que la función no será derivable en $x = 0$ ni en $x = 1$. Esto se puede demostrar analíticamente derivando la función por trozos y comprobando que no coinciden las derivadas laterales:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(x+2) & -2 < x < 0 \\ -x/\sqrt{1-x^2} & 0 < x < 1 \\ x/\sqrt{x^2-1} & 1 < x < 2 \end{cases}$$

Los valores $x = -2$ y $x = 2$ son puntos frontera del dominio de la función, y por tanto la función tampoco es derivable en estos puntos.

Así pues, no tiene sentido hablar de recta tangente en ninguno de los cuatro puntos indicados en el enunciado: $x = -2, 0, 1, 2$.

b) Estudiando la monotonía de la función, y la expresión analítica de la derivada podemos deducir que la gráfica de f es:



La función f es continua en todo su dominio $[-2,2]$, luego, aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo sabemos que $F(x)=\int_{-2}^{x} f(t)dt$ es derivable y $F'(x)=f(x)$. Luego para estudiar la curvatura de $F(x)$ estudiaremos su segunda derivada, que es $F''(x)=f'(x)$.

En el intervalo $(-2,0)$, $f'(x)=\frac{1}{2}(x+2)$ y no es ni cóncava ni convexa, pues es recta.

En el intervalo $(0,1)$, $f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

Es una función estrictamente negativa, y por tanto cóncava.

En el intervalo $(1,2)$, $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

Es una función estrictamente positiva, y por tanto convexa.

c) Sea $f(x)=\frac{1}{4}(x+2)^2$, definida en $-2\le x\le 0$.

$y=\frac{1}{4}(x+2)^2 \Leftrightarrow 4y=(x+2)^2 \Leftrightarrow x+2=\pm\sqrt{4y}$

De las dos opciones, tomaremos la positiva porque es la única que satisface que pasa por el punto (0,1):

$0+2=\sqrt{4\cdot 1}$

Así pues, $x=\sqrt{4y}-2=2\sqrt{y}-2$ es la expresión analítica de la inversa de f en el intervalo $(-2,0)$. También podríamos haber razonado que la función en este intervalo es estrictamente creciente, y por tanto invertible.

Así pues, $h(x)=2\sqrt{x}-2$

d) Vemos que la gráfica de f no cambia de signo en el intervalo $[-2,0]$. Queremos resolver la ecuación

$$\int_{-2}^{k}\frac{1}{4}(x+2)^2dx=\int_{k}^{0}\frac{1}{4}(x+2)^2dx \Leftrightarrow \frac{1}{4}\int_{-2}^{k}(x+2)^2dx=\frac{1}{4}\int_{k}^{0}(x+2)^2dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{-2}^{k}(x+2)^2dx=\int_{k}^{0}(x+2)^2dx \quad (*)$$

Sea $F(x)=\int (x+2)^2dx \underset{\substack{u=x+2\\ u'=1}}{=} \int u^2du=\frac{u^3}{3}+K=\frac{(x+2)^3}{3}+K$

Así pues,

$$\int_{-2}^{k}(x+2)^2dx=F(k)-F(-2)=\frac{(k+2)^3}{3}-\frac{(-2+2)^3}{3}=\frac{(k+2)^3}{3}$$

$$\int_{k}^{0}(x+2)^2dx=F(0)-F(k)=\frac{(0+2)^3}{3}-\frac{(k+2)^3}{3}=\frac{8}{3}-\frac{(k+2)^3}{3}$$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{(k+2)^3}{3}=\frac{8}{3}-\frac{(k+2)^3}{3} \Leftrightarrow \frac{2(k+2)^3}{3}=\frac{8}{3} \Leftrightarrow 2(k+2)^3=8 \Leftrightarrow (k+2)^3=4$$

$$\Leftrightarrow k+2=\sqrt[3]{4} \Leftrightarrow k=\sqrt[3]{4}-2$$

Problema 2.

a) Todas estas funciones tienen asíntota horizontal $y=1$, independientemente del valor de a.

$x^2-a=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{a}$, y por tanto el dominio de la función f_a será $IR-\{\sqrt{a}\,,-\sqrt{a}\}$ siempre que estén definidos los valores $\{\sqrt{a}\,,-\sqrt{a}\}$, es decir, para todo $a\geq 0$. Si $a<0$ el dominio es todo IR.

Primer caso: $a>0$

$$f_a(x)=\frac{x^2-ax}{x^2-a}=\frac{x(x-a)}{\left(x-\sqrt{a}\right)\left(x+\sqrt{a}\right)}$$

Estudiemos las posibles indeterminaciones $0/0$:

$a=\sqrt{a} \Leftrightarrow a^2=a \Leftrightarrow 0=a^2-a=a(a-1) \Leftrightarrow a=\{0\,,1\}$

Aparecerá una indeterminación 0/0 cuando $a=1$, y en este caso tenemos

$$f_1(x)=\frac{x^2-x}{x^2-1}=\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\begin{cases}\dfrac{x}{(x+1)} & si\ x\neq 1\\ \text{no def.} & si\ x=1\end{cases}$$

La función tiene una discontinuidad evitable en $x=1$.

La función tiene una asíntota vertical en $x=-1$.

Si $a\neq 1$, la función no tiene ninguna indeterminación 0/0. En este caso, la función tiene asíntotas verticales en $x=\sqrt{a}$ y $x=-\sqrt{a}$.

Segundo caso: $a=0$

$$f_0(x)=\frac{x^2}{x^2}=\begin{cases}1 & si\ x\neq 0\\ \text{no def.} & si\ x=0\end{cases}$$

La función tiene una discontinuidad evitable en $x=1$.

La función no presenta ninguna asíntota vertical.

Tercer caso: $x=-1$.

En este caso el denominador no se anula nunca y por tanto no aparece ninguna indeterminación 0/0. La función no presenta ninguna asíntota vertical.

b) Observamos que si $a\neq 1$, se cumple siempre

$$f_a(1)=\frac{1^2-a\cdot 1}{1^2-a}=\frac{1-a}{1-a}=1$$

Y por tanto siempre corta su asíntota vertical en el punto (1,1).

$$f'_a(x)=\frac{(2x-a)(x^2-a)-(x^2-ax)2x}{\left(x^2-a\right)^2}=\frac{2x^3-2ax-ax^2+a^2-2x^3+2ax^2}{\left(x^2-a\right)^2}=(*)$$

$x^2-ax\rightarrow 2x-a$

$x^2-a\rightarrow 2x$

$$(*)=\frac{ax^2-2ax+a^2}{\left(x^2-a\right)^2}=a\frac{x^2-2x+a}{\left(x^2-a\right)^2}$$

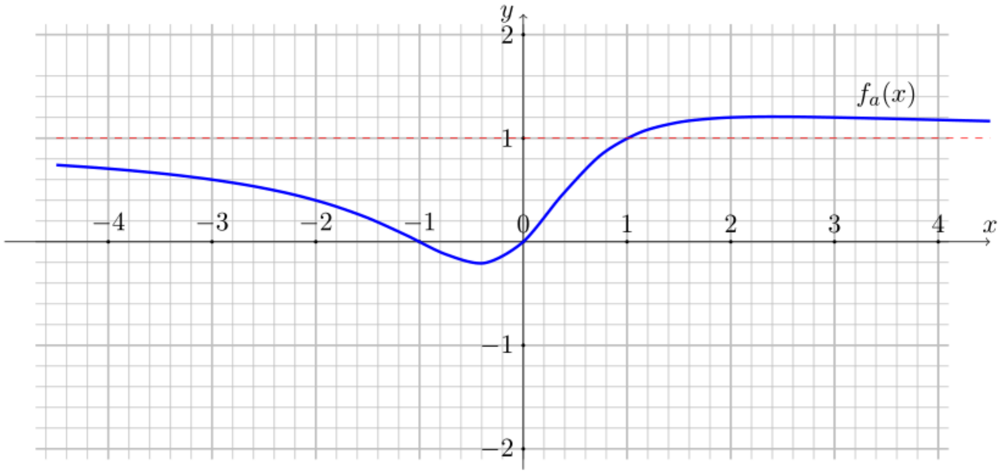
La recta tangente será de la forma $y=Ax+B$, con

$$A = f'_a(0) = \frac{a^2}{a^2} = 1$$
$$B = f(0) - 1 \cdot 0 = \frac{0^2 - a \cdot 0}{0^2 - a} = 0$$
Y la recta tangente es $y = x$, que no depende del valor de a.

c)
Debemos estudiar el signo de la función
$$f'_a(x) = a\frac{x^2 - 2x + a}{(x^2 - a)^2}$$
en donde estamos suponiendo $a < 1$.
El denominador es un cuadrado y por tanto no afectará el signo de la derivada, pero tenemos un factor a multiplicando, por lo que es necesario distinguir cuando $a < 0$.
Primer caso: $a < 0$:
$x^2 - 2x + a = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1-a}$ y puesto que es una parábola con las ramas hacia arriba,
$x^2 - 2x + a < 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{1-a} < x < 1 + \sqrt{1-a}$
Luego $f'_a(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{1-a} < x < 1 + \sqrt{1-a}$
Así pues,
$\left(-\infty, 1 - \sqrt{1-a}\right) \rightarrow \text{función decreciente}$
$\left(1 - \sqrt{1-a}, 1 + \sqrt{1-a}\right) \rightarrow \text{función creciente}$
$\left(1 + \sqrt{1-a}, +\infty\right) \rightarrow \text{función decreciente}$

Segundo caso: $0 < a < 1$:
Ahora debemos tener presente que la función tiene dos asíntotas verticales, en $x = -\sqrt{a}$ y en $x = \sqrt{a}$, por lo que debemos incorporar estos valores a nuestro estudio.
$f'_a(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{1-a} < x < 1 + \sqrt{1-a}$
Después de razonar con estos valores fronteras se llega a la solución:
$\left(-\infty, -\sqrt{a}\right) \rightarrow \text{función creciente}$
$\left(-\sqrt{a}, 1 - \sqrt{1-a}\right) \rightarrow \text{función creciente}$
$\left(1 - \sqrt{1-a}, \sqrt{a}\right) \rightarrow \text{función decreciente}$
$\left(\sqrt{a}, 1 + \sqrt{1-a}\right) \rightarrow \text{función decreciente}$
$\left(1 + \sqrt{1-a}, +\infty\right) \rightarrow \text{función creciente}$

El gráfico de $f_{-1}(x)$ se muestra en la siguiente imagen:



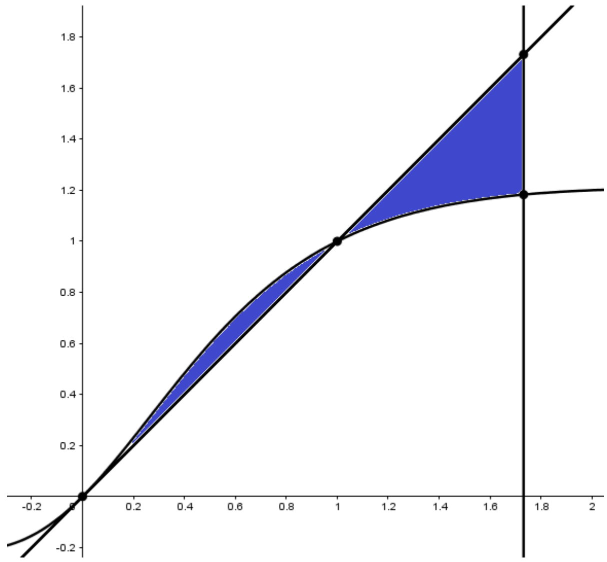
d)

$$f_{-1}(x)=\frac{x^2-(-1)x}{x^2-(-1)}=\frac{x^2+x}{x^2+1}=\frac{x(x+1)}{x^2+1}$$

Veamos si hay algún punto de corte con su recta tangente en el origen:

$$\frac{x(x+1)}{x^2+1}=x$$

Tiene dos soluciones: $x=0$ o $\frac{x+1}{x^2+1}=1 \Leftrightarrow x+1=x^2+1 \Leftrightarrow x=x^2 \Leftrightarrow 1=x$



Por lo tanto debemos calcular este área mediante dos integrales:

$$A=\int_0^1 \frac{x(x+1)}{x^2+1}-x\,dx+\left|\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x(x+1)}{x^2+1}-x\,dx\right|=F(1)-F(0)+\left|F(\sqrt{3})-F(1)\right|=$$

$$=F(1)-F(0)+F(1)-F(\sqrt{3})=2F(1)-F(0)-F(\sqrt{3})=(*)$$

$$\frac{x(x+1)}{x^2+1}-x=\frac{x^2+x}{x^2+1}-x=1+\frac{x-1}{x^2+1}-x=1-x+\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}$$

$$F(x)=\int \frac{x(x+1)}{x^2+1}-x\,dx=\int\left(1-x+\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\int\frac{x}{x^2+1}\,dx-\int\frac{1}{x^2+1}\,dx=(**)$$

$$\int\frac{x}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}\,du=\frac{1}{2}\ln(u)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$$

$$u=x^2+1\rightarrow u'=2x$$

$$\int\frac{1}{x^2+1}\,dx=\arctan(x)$$

$$(**)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\arctan(x)$$

Así pues,

$$F(1)=1-\frac{1^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(1^2+1\right)-\arctan(1)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}$$

$$F\left(\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{3}^2+1\right)-\arctan(\sqrt{3})=\sqrt{3}-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln 4-\arctan(\sqrt{3})=$$

$$=\sqrt{3}-\frac{3}{2}+\ln 2-\arctan(\sqrt{3})=\sqrt{3}-\frac{3}{2}+\ln 2-\frac{\pi}{3}$$

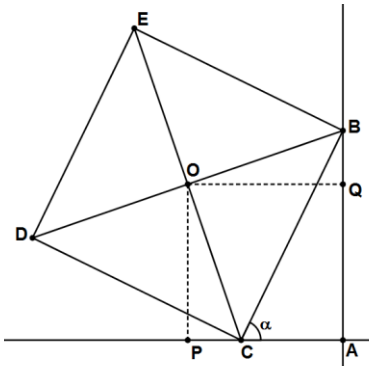
Aquí hemos aplicado que $\frac{1}{2}\ln 4=\frac{1}{2}\ln\left(2^2\right)=\frac{2}{2}\ln(2)=\ln(2)$ y que $\arctan\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{3}$

$$F(0)=0-\frac{0^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(0^2+1\right)-\arctan(0)=0$$

$$(*)=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}\right)-0-\left(\sqrt{3}-\frac{3}{2}+\ln 2-\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=1+\ln 2-\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}+\frac{3}{2}-\ln 2+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{2}-\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}$$

1. Sean P y Q los pies de las perpendiculares por O a AC y a AB, respectivamente. Sea $\alpha = \angle BCA$.



Claramente $\angle OCB = \angle OBC = 45^\circ$ y por tanto

$\angle OCP = 180^\circ - \angle OCB - \angle BCA = 180^\circ - 45^\circ - \alpha = 135^\circ - \alpha$

$\angle OBQ = \angle OBC + \angle CBA = 45^\circ + (90^\circ - \alpha) = 135^\circ - \alpha$

Así pues, $\angle OCP = \angle OBQ$ y por tanto los triángulos rectángulos ΔCPO y ΔBQO son congruentes, por el criterio HL de Congruencia de triángulos rectángulos, pues OB=OC. De donde deducimos que $OP = OQ$, y por tanto las distancias de O a los lados AC y AB son iguales.

2. Sean $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ las probabilidades de cada una de las seis caras.

Sabemos que $P_1 = P_3 = P_5$, $P_2 = P_4 = P_6$, y $P_2 = P_4 = P_6 = 2P_1$. Luego

$P_1 + P_1 + P_1 + 2P_1 + 2P_1 + 2P_1 = 1 \Leftrightarrow 9P_1 = 1 \Rightarrow P_1 = P_3 = P_5 = 1/9$, $P_2 = P_4 = P_6 = 2/9$.

Ahora podemos calcular las probabilidades pedidas:

$$P(\text{un número primo}) = P_2 + P_3 + P_5 = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

$$P(\text{un número} \geq 3) = P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$P(\text{un número} \leq 3) = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

3. Calculamos el punto de corte entre la esfera y la recta.

Vector director de la recta: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (2,3,-1) - (1,-2,0) = (1,5,-1)$

Plano perpendicular a la recta y que pasa por C:

$\vec{n} = \vec{v} = (1,5,-1) \to x + 5y - z = D \to 1 + 5(-6) - 7 = D \to -36 = D$

$x + 5y - z = -36$

Punto de corte P entre el plano y la recta:

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 + 5\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

$1 + \lambda + 5(-2 + 5\lambda) - (-\lambda) = -36 \Rightarrow \lambda = -1$

$$Q = \begin{cases} x = 1 + (-1) = 0 \\ y = -2 + 5(-1) = -7 \Rightarrow Q = (0,-7,1) \\ z = -(-1) = 1 \end{cases}$$

El radio de la circunferencia será la distancia entre el centro C y Q:

$\overrightarrow{CQ} = Q - C = (0,-7,1) - (1,-6,7) = (-1,-1,-6)$

$r = \left|\overrightarrow{CQ}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-6)^2} = \sqrt{1+1+36} = \sqrt{38}$

La ecuación de la esfera es:

$P = (x, y, z) \rightarrow \left|\overrightarrow{CP}\right| = r$

$\overrightarrow{CP} = P - C = (x, y, z) - (1,-6,7) = (x-1, y+6, z-7)$

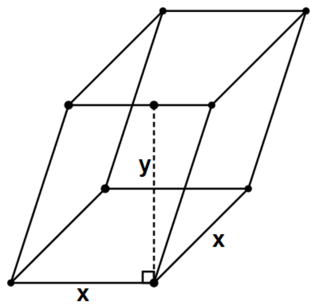
$\left|\overrightarrow{CP}\right| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+6)^2 + (z-7)^2} = \sqrt{38} \Leftrightarrow$

$(x-1)^2 + (y+6)^2 + (z-7)^2 = 38 \Leftrightarrow$

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 12y - 14z + 86 = 38 \Leftrightarrow$

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 12y - 14z + 48 = 0$

4. Digamos que nuestro paralelepípedo tiene una base cuadrada de lado x y una altura y.



El volumen será $V = x^2 y$ que supondremos fijo.

El área total será la suma de dos cuadrados de lado x y cuatro paralelogramos de lado x y altura y, es decir:

$A(x, y) = 2x^2 + 4xy$

$V = x^2 y \Rightarrow y = \dfrac{V}{x^2}$

Escribimos el área como función del lado del cuadrado de la base:

$A(x) = 2x^2 + 4x\dfrac{V}{x^2} = 2x^2 + 4\dfrac{V}{x} = 2x^2 + 4Vx^{-1}$

Luego

$A'(x) = 4x + 4Vx^{-2}(-1) = 4x - 4Vx^{-2} = 4x - \dfrac{4V}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 4x = \dfrac{4V}{x^2} \Leftrightarrow x^3 = V \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{V}$

Tenemos que comprobar que, efectivamente, se trata de un mínimo. Lo haremos aplicando el criterio de la segunda derivada:

$A''(x) = 4 - 4(-2)Vx^{-3} = 4 + 8Vx^{-3} = 4 + \dfrac{8V}{x^3}$

$A''\left(\sqrt[3]{V}\right) = 4 + \dfrac{8V}{V} = 4 + 8 = 12 > 0$. Se trata, efectivamente, de un mínimo.

Para este valor tenemos $y = \dfrac{V}{\left(\sqrt[3]{V}\right)^2} = \dfrac{V}{\sqrt[3]{V^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{V^3}}{\sqrt[3]{V^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{V^3}{V^2}} = \sqrt[3]{V} = x$

Es decir, la figura es un cubo de volumen V.

La diagonal del paralelepípedo se puede considerar un vector tridimensional de coordenadas $\vec{v}=(x,y,x)$, y por lo tanto su longitud será

$$L(x,y)=|\vec{v}|=\sqrt{x^2+y^2+x^2}=\sqrt{2x^2+y^2}$$

Como en el caso anterior, escribimos esta expresión en función de x:

$$V=x^2y\Rightarrow y=\frac{V}{x^2}\Rightarrow y^2=\left(\frac{V}{x^2}\right)^2=\frac{V^2}{x^4}$$

$$L(x)=\sqrt{2x^2+y^2}=\sqrt{2x^2+\frac{V^2}{x^4}}$$

$$L'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2x^2+\frac{V^2}{x^4}}}\left(4x-\frac{4V^2}{x^5}\right)=0\Leftrightarrow 4x-\frac{4V^2}{x^5}=0\Leftrightarrow 4x=\frac{4V^2}{x^5}\Leftrightarrow x^6=V^2\Leftrightarrow x^3=V$$

En donde hemos podido simplificar sin problema porque suponemos que $x,V>0$.

Así pues, llegamos al mismo valor óptimo.

En este segundo caso garantizamos que se trata de un mínimo observando que la función $L(x)$ es continua en $(0,+\infty)$ y su comportamiento en los extremos es divergente:

$$\lim_{x\to 0^+}L(x)=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{2x^2+\frac{V^2}{x^4}}=+\infty \text{ y } \lim_{x\to +\infty}L(x)=\lim_{x\to +\infty}\sqrt{2x^2+\frac{V^2}{x^4}}=+\infty .$$

5. Primer método: Cálculo.

$$f(x)=\sqrt{25-x^2}\rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{25-x^2}}(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}$$

$y=ax+b$,

$$a=f'(3)=\frac{-3}{\sqrt{25-3^2}}=\frac{-3}{\sqrt{25-9}}=\frac{-3}{4}$$

$$b=f(3)-a\cdot 3=\sqrt{25-3^2}=4-\left(\frac{-3}{4}\right)\cdot 3=\frac{25}{4}$$

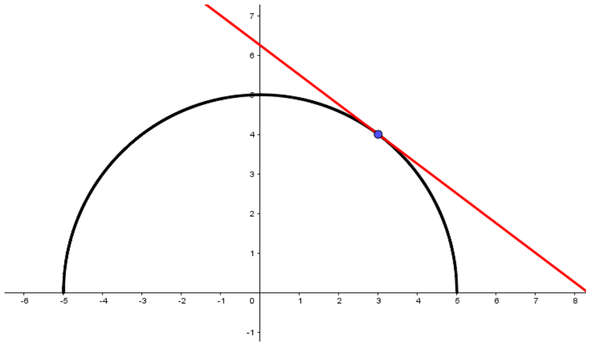
La recta tangente es $y=\frac{-3}{4}x+\frac{25}{4}\Leftrightarrow 4x+3y=25$.

Segundo método. Interpretación geométrica.

$$y=\sqrt{25-x^2}\Rightarrow y^2=25-x^2\Rightarrow y^2+x^2=25\Rightarrow 5=\sqrt{y^2+x^2}$$

$$x=3\rightarrow y=\sqrt{25-3^2}=4$$

La curva es una semicircunferencia centrada en el origen y de radio 5. Queremos encontrar su recta tangente en su punto $(3,4)$.



Tendrá como vector director el vector perpendicular al radio:
$\vec{v} = (3,4)$
$3x + 4y = D \Rightarrow 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = D \Rightarrow 25 = D$
y la recta es $3x + 4y = 25$

6. Estamos claramente ante una indeterminación 0/0, que resolveremos aplicando Hopital:
$\sin x - (a x^3 + bx) \rightarrow \cos x - 3a x^2 - b$
$x^3 \rightarrow 3x^2$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - (a x^3 + bx)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 3a x^2 - b}{3x^2} = (*)$$

Puesto que $\lim_{x\to 0}(\cos x - 3a x^2 - b) = 1 - b$ y $\lim_{x\to 0}(3x^2) = 0$, este último límite divergirá siempre que $b \neq 1$. Así pues, forzosamente, $b = 1$.
Para $b = 1$ seguimos teniendo una indeterminación 0/0, que resolveremos de nuevo por Hopital:

$\cos x - 3a x^2 - 1 \rightarrow -\sin x - 6a x$
$3x^2 \rightarrow 6x$
$$(*) = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x - 6ax}{6x} = (**)$$
De nuevo otra indeterminación 0/0 que resolveremos por Hopital:
$-\sin x - 6a x \rightarrow -\cos x - 6a$
$6x \rightarrow 6$
$$(**) = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x - 6a}{6} = \frac{-1 - 6a}{6}$$
Así pues, llegamos a la ecuación
$$\frac{-1 - 6a}{6} = 1 \Leftrightarrow -1 - 6a = 6 \Leftrightarrow -6a = 7 \Leftrightarrow a = -7/6$$
La solución es $a = -7/6$ y $b = 1$.

7. Si $x \neq 0$ la función es perfectamente continua y derivable.
Veamos en primer lugar la continuidad de la función en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = [-1 + \arctan x]_{x=0} = 1 + \arctan 0 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = [ax + b]_{x=0} = b$$

$$f(0) = [ax + b]_{x=0} = b$$

Luego la función será continua en $x = 0$ siempre que $b = 0$.

Veamos la derivabilidad de esta función en $x = 0$ estudiando sus derivadas laterales:
Por la izquierda de 0: $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \to f'(0) = \dfrac{1}{1+0^2} = 1$
Por la derecha de 0: $f'(x) = a \to f'(0) = a$
Luego la función será derivable en $x = 0$ siempre que $a = 1$.

Vemos que la función resultante es siempre creciente, puesto que su derivada es siempre positiva (la derivada es una función definida a trozos en la que las dos partes son funciones estrictamente positivas). Luego podremos encontrar $x_0 < x_1$ para los que $f(x_0) = f(x_1)$, y por tanto no se cumple una de las condiciones del teorema de Rolle. Además, si se cumplieran las condiciones del teorema de Rolle para ciertos $x_0 < x_1$, entonces existiría un punto intermedio $x_0 < x_2 < x_1$ para el cual $f'(x_2) = 0$, lo cual no es cierto.

8. $f'_a(x) = 5x^4 - 5a = 0 \Leftrightarrow x^4 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{a}$

$$f''_a(x) = 20x^3$$

La segunda derivada es siempre negativa para los valores de x negativos, luego, en particular, para $x = -\sqrt[4]{a}$ la segunda derivada será negativa y por tanto podemos garantizar, por el Criterio de la segunda derivada, que la función tendrá un máximo en $x = -\sqrt[4]{a}$.
De la misma forma, la segunda derivada es siempre positiva para los valores de x positivos, luego la función tendrá un mínimo en $x = \sqrt[4]{a}$.

Además, sabemos que $f_a(0) = a > 0$ y que, por ser una función polinómica de grado impar y su coeficiente principal es 1,
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
Luego podemos garantizar que la función tendrá una única raíz en el intervalo $(-\infty, 0)$.
Con todo esto, la existencia de dos raíces en el intervalo $(0, -\infty)$ es equivalente a que el mínimo en $x = \sqrt[4]{a}$ sea negativo.

$$0 > f_a\left(\sqrt[4]{a}\right) = \left(\sqrt[4]{a}\right)^5 - 5a\sqrt[4]{a} + a = \sqrt[4]{a^5} - 5a\sqrt[4]{a} + a = a\sqrt[4]{a} - 5a\sqrt[4]{a} + a =$$
$$= -4a\sqrt[4]{a} + a = a\left(-4\sqrt[4]{a} + 1\right)$$

Puesto que $a > 0$, la condición anterior es equivalente a

$$-4\sqrt[4]{a} + 1 < 0 \Leftrightarrow -4\sqrt[4]{a} < -1 \Leftrightarrow 4\sqrt[4]{a} > 1 \Leftrightarrow \sqrt[4]{a} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow a > \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{4^4} = \frac{1}{256}$$

Así pues, la solución es $a > \dfrac{1}{256}$.