INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA

Desde el principio y paso a paso

Aprendizaje ***Problem Solving*** *basado en las pruebas Canguro y AMC*

Gerard Romo Garrido

Toomates Coolección vol. 4

Toomates Coolección

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "**licencias digitales**" con las que las editoriales pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo libro, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.
Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de licencias digitales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía**.
El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las editoriales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de unos libros de texto que actualmente son muy mediocres, y no mediante retorcidas técnicas comerciales.
 Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas.

¡Libérate de la tiranía y mediocridad de las editoriales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos

Toomates Coolección **Problem Solving** (en español):
Geometría Axiomática , Problemas de Geometría 1 , Problemas de Geometría 2
Introducción a la Geometría , Álgebra , Teoría de números , Combinatoria , Probabilidad
Trigonometría , Desigualdades , Números complejos , Funciones

Toomates Coolección **Llibres de Text** (en catalán):
Nombres (Preàlgebra) , Àlgebra , Proporcionalitat , Mesures geomètriques , Geometria analítica
Combinatòria i Probabilitat , Estadística , Trigonometria , Funcions , Nombres Complexos ,
Àlgebra Lineal , Geometria Lineal , Càlcul Infinitesimal , Programació Lineal , Mates amb Excel

Toomates Coolección **Compendiums**:
Ámbito PAU: Catalunya TEC Cat CCSS Valencia Galicia País Vasco Portugal A B Italia UK
Ámbito Canguro: ESP CAT FR USA UK AUS
Ámbito USA: Mathcounts AMC 8 AMC 10 AMC 12 AIME USAJMO USAMO Putnam
Ámbito español: OME OMEFL OMEC OMEA OMEM CDP
Ámbito internacional: IMO OMI IGO SMT INMO CMO REOIM Arquimede HMMT BMO
Ámbito Pruebas acceso: ACM4 , CFGS , PAP
Recopilatorios Pizzazz!: Book A Book B Book C Book D Book E Pre-Algebra Algebra
Recopilatorios AHSME: Book 1 Book 2 Book 3 Book 4 Book 5 Book 6 Book 7 Book 8 Book 9

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales, para facilitar su edición. Descarga en los siguientes enlaces la versión "**.doc**" de este documento:
www.toomates.net/biblioteca/Geometria01.doc → **http://www.toomates.net/biblioteca/Geometria15.doc**

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a **toomates@gmail.com**

¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.

Consulta el **Catálogo de libros** de la biblioteca Toomates Coolección en http://www.toomates.net/biblioteca.htm

Encontrarás muchos más materiales para el aprendizaje de las matemáticas en **www.toomates.net**

Visita mi **Canal de Youtube**: **https://www.youtube.com/c/GerardRomo**

Versión de este documento: **20/11/2023**

Índex.

Presentación.

Este libro es un recopilatorio de problemas de las pruebas Canguro y AMC, ordenado por temas y dificultad. El objetivo es ofrecer al estudiante un material claro y sistemático para acompañarlo en un aprendizaje autónomo de introducción a la geometría. Naturalmente, las matemáticas no funcionan mediante compartimentos estancos, por lo que es inevitable que en la resolución de algún problema puedan aparecer conceptos propios de un tema aún no trabajado.

Al principio de cada tema se presenta una lista de los conceptos y teoremas utilizados, que el estudiante deberá conocer. El objetivo es que el estudiante tenga una lista clara y ordenada de los conceptos involucrados en el tema, por lo que no se acompaña de ningún tipo de demostración. Para profundizar en estos conceptos se invita al estudiante a consultar el libro Geometría Axiomática de esta misma colección, en donde se encontrará su desarrollo completo y riguroso de cada uno de estos elementos geométricos. Los códigos que aparecen en muchas de las definiciones y teoremas son referencias a este libro.

Los temas del 11 en adelante se consideran de nivel avanzado, son propios de las pruebas AMC pero están fuera del ámbito de las pruebas Canguro.

En este libro se recogen aquellos problemas y ejercicios de Geometría más fáciles, pero que pueden ser muy útiles para aquellos estudiantes que empiezan a resolver problemas de geometría sin agobios. La continuación natural de este libro sería Problemas de Geometría, en donde se encuentran problemas de dificultad más elevada.

Las técnicas trigonométricas aplicadas a la geometría no aparecen en este libro porque están desarrolladas en un volumen específico de esta colección:
http://www.toomates.net/biblioteca/ProblemasTrigonometria.pdf

La mayoría de los problemas vienen acompañados con una indicación de su dificultad:

MF: Muy fácil , **F**: Fácil , **M**: Dificultad Media , **D**: Difícil , **MD**: Muy difícil.

Naturalmente, esta indicación es muy subjetiva, y con ella el autor solo pretende ofrecer una referencia previa para ayudar a escoger los problemas más adecuados en el momento del aprendizaje.

Todos los problemas se ofrecen con sus respectivas soluciones, detalladas y paso a paso. Con ellas, el autor no pretende exhibir erudición, sino ser una ayuda. No son necesariamente las óptimas o las más bellas, ni están exentas de posibles errores. Estaré muy agradecido en recibir cualquier tipo de corrección, sugerencia o comentario constructivo en toomates@gmail.com

Es absolutamente fundamental para aprender matemáticas dedicar todo el tiempo necesario a pensar un problema antes de mirar la solución, de este libro o de cualquier otra fuente de internet.

¡Muy importante! Este documento se encuentra siempre en proceso de desarrollo, por lo que constantemente se está actualizando con nuevos ejercicios y revisiones. ¡No utilices una versión anticuada! Descarga de http://www.toomates.net/biblioteca/Geometria.pdf la versión más actualizada de este documento.

¿Buscas trigonometría avanzada? ¡Este no es el lugar adecuado!
En este libro he introducido las herramientas más básicas de la trigonometría: Área de un triángulo mediante trigonometría (★39) y los teoremas del Seno (★40) y del Coseno (★41), pero no es un libro pensado para trabajar las técnicas digamos avanzadas de la trigonometría.
Estas técnicas se recogen en un documento propio:
www.toomates.net/biblioteca/ProblemasTrigonometria.pdf
y en los documentos de problemas de geometría:
www.toomates.net/biblioteca/ProblemasGeometria.pdf
www.toomates.net/biblioteca/ProblemasGeometria2.pdf

1 El razonamiento matemático. Lógica.

1.1 MF

Tenemos algunos cuadrados y triángulos en la mesa. Algunos de ellos son azules y el resto rojos. Algunos son grandes y el resto pequeños. Además, sabemos que:

1) Si la figura es grande, es un cuadrado;
2) Si la figura es azul, es un triángulo.

¿Cuál de las afirmaciones siguientes es verdadera?

(A) Todas las figuras rojas son cuadrados
(B) Todos los cuadrados son grandes
(C) Todas las figuras pequeñas son azules
(D) Todos los triángulos son azules
(E) Todas las figuras azules son pequeñas.

Cangur B1 2020 #23, Canguro N5 2020 #23, Kangourou Junior 2020 #20

1.2 F

Los nietos preguntaron a la abuela qué edad tenía. La abuela les pidió que adivinaran su edad. El primer nieto dijo que tenía 75 años, el segundo dijo 78 y el tercero 81. Resultó que uno de ellos se equivocó en un año, otro en 2 años y el tercero en 4 años. ¿Qué edad tenía la abuela?

(A) Solo puede ser que tenga 76 años.
(B) Solo puede ser que tenga 77 años.
(C) Solo puede ser que tenga 79 años.
(D) Solo puede ser que tenga 80 años.
(E) Hay más de una edad cumpliendo el enunciado.

Cangur B1 2022 #15, Kangaroo Junior 2022 #18

1.3 MF

Los habitantes de una ciudad siempre hablan haciendo preguntas. Hay dos clases de habitantes: Los positivos, que siempre hacen preguntas con respuesta sí, y los negativos, que siempre hacen preguntas con respuesta no. Nos hemos encontrado dos habitantes de esta ciudad, Alberto y Berta, y ella nos ha preguntado: “¿Somos los dos negativos?”. ¿Podemos saber qué clase de habitantes son?

(A) Ambos son positivos.
(B) Ambos son negativos.
(C) Alberto es positivo y Berta negativa.
(D) Alberto es negativo y Berta positiva.
(E) No tenemos suficiente información para saberlo.

Cangur B1 2022 #29

1.4 MD

Cinco canguros hembra, de nombre A, B, C, D y E, tienen un hijo cada una , de nombres x, y, z, t y v. En la primera imagen del grupo (figura 1) exactamente dos de los canguritos están justo al lado de su madre. En la segunda imagen (figura 2) son tres los que están junto a su madre. ¿De quién es hijo el cangurito x?

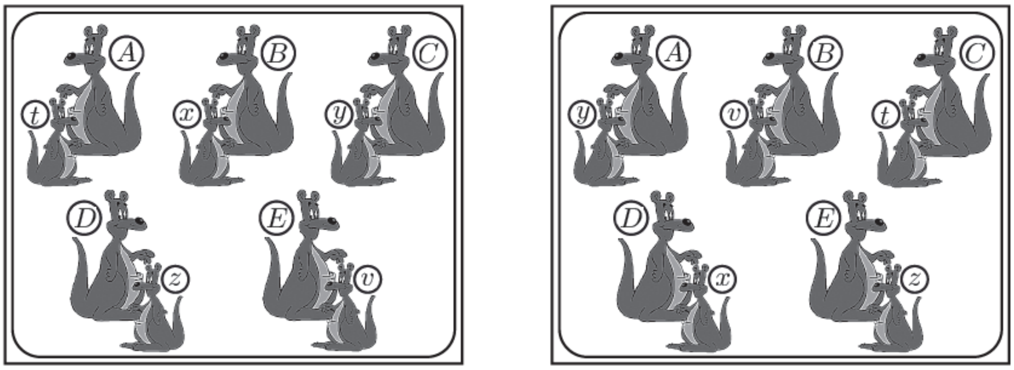


Figura 1 Figura 2

(A) De A (B) De B (C) De C (D) De D (E) De E

Cangur B2 2022 #26, Kangaroo Student 2022 #24

1.5 MF

¿Quién es la madre de la hija de la madre de la madre de Ana?

(A) hermana de Ana (B) sobrina de Ana (C) madre de Ana (D) tía de Ana (E) abuela de Ana

Canguro N5 2020 #3, Cangur B1 2020 #3, Kangaroo Junior 2020 #2

1.6 MF

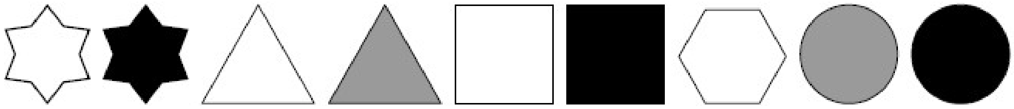
Bernat compró 5 paquetes de caramelos y los puso en un bote vacío. Si en el bote ahora hay 102 caramelos, determina la afirmación que seguro es cierta:

(A) En ningún paquete había más de 21 caramelos.
(B) Al menos uno de los paquetes contenía menos de 21 caramelos.
(C) En uno de los paquetes había exactamente 21 caramelos.
(D) Al menos uno de los paquetes tenía más de 21 caramelos.
(E) En cada paquete había como mínimo 20 caramelos.

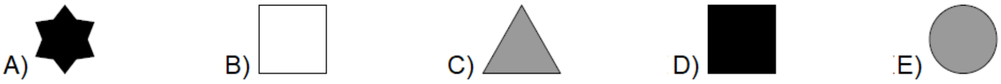
Cangur B1 2020 #8

1.7 M

Adrián y Belén intentan averiguar cuál de las siguientes figuras es la favorita de Carlos.



Adrián sabe que Carlos le ha dicho a Belén su forma favorita, pero no su color. Belén sabe que Carlos le ha dicho a Adrián su color favorito, pero no su forma. Entonces se produce la siguiente conversación:
Adrián: "No conozco la figura favorita de Carlos y sé que Belén tampoco puede conocerla".
Belén: "Al principio no conocía la figura favorita de Carlos, pero ahora ya lo sé "
Adrián: "Ahora también yo lo sé ".
¿Cuál es la figura favorita de Carlos?



Canguro 2020 N6 #30, Cangur 2020 B2 #30

2 Análisis de figuras en el plano.

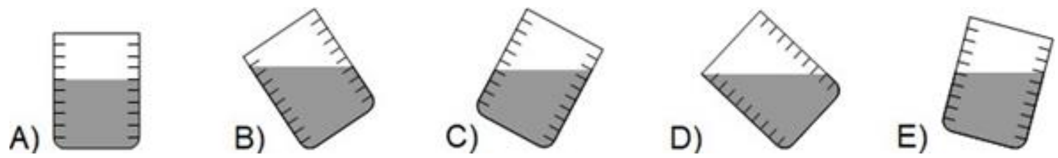
2.1 MF

Un peluquero inglés quiere escribir la palabra SHAVE en una pizarra de tal manera que un cliente sentado de espaldas a ella la vea correctamente en el espejo que tiene enfrente. ¿Cómo debe escribirla el peluquero en la pizarra?

Canguro N5 2019 #3, Cangur B1 2019 #3

2.2 MF

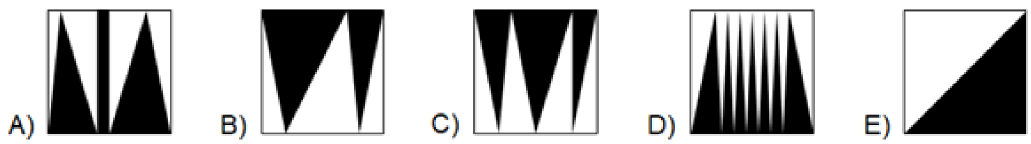
En las respuestas aparecen cinco vasos idénticos que contienen agua, teniendo cuatro de ellos la misma cantidad. ¿Cuál contiene una cantidad diferente?



Canguro N5 2019 #5, Cangur B1 2019 #5

2.3 MF

Los cinco cuadrados de las respuestas son iguales y en cada uno de ellos se ha sombreado una zona determinada. ¿En qué cuadrado la zona sombreada tiene mayor área?



Canguro N5 2019 #9, Cangur B1 2019 #9

2.4 MF

La bandera de Canguria es un rectángulo con dimensiones en la proporción 3 : 5. La bandera se divide en cuatro rectángulos de igual área, como se muestra.

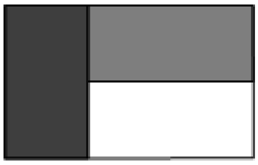
¿Cuál es la proporción de las longitudes de los lados del rectángulo blanco?

(A) 1 : 3 B) 1 : 4 C) 2 : 7 D) 3 : 10 E) 4 : 15

Canguro N5 2019 #13, Cangur B1 2019 #13

2.5 [MF]

La bandera de Cangurolandia es un rectángulo que se divide en tres rectángulos iguales más pequeños, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la proporción de las longitudes de los lados del rectángulo blanco?

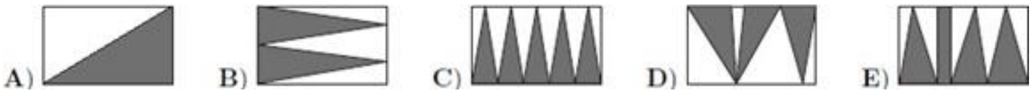


(A) 1 : 2   B) 2 : 3   C) 2 : 5   D) 3 : 7   E) 4 : 9

Canguro N6 2019 #1, Cangur B2 2019 #1

2.6 [MF]

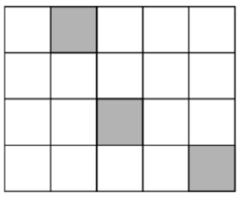
Se sombrea un rectángulo de cinco maneras diferentes, como se muestra abajo. ¿En qué figura es mayor el área de la parte sombreada?



Canguro N6 2019 #3, Cangur B2 2019 #3

2.7 [F]

En la siguiente figura se han sombreado 3 recuadros. ¿Cuál es el mínimo número de recuadros adicionales que tenemos que sombrear para que la figura resultante tenga dos rectas de simetría?



(A) 4   (B) 5   (C) 6   (D) 7   (E) 8

AMC 12A 2020 #6

2.8 [M]

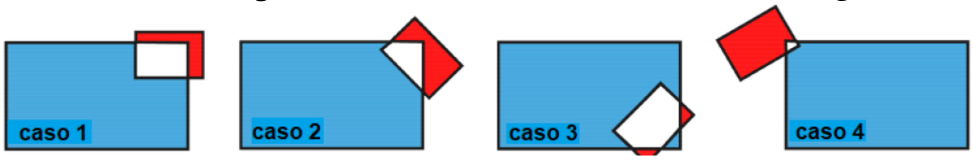
Dado un conjunto de cuatro rectas diferentes en el plano, sea N el número de puntos diferentes que pertenecen a dos o más rectas de dicho conjunto. ¿Cuál es la suma de todos los posibles valores de N?

(A) 14   (B) 16   (C) 18   (D) 19   (E) 21

AMC 12A 2019 #8

2.9 [M]

Un rectángulo grande y otro pequeño se superponen. Las figuras muestran 4 casos diferentes. Denotamos por G el área de la parte del rectángulo grande que no es común a los dos rectángulos, y denotamos por P el área del rectángulo pequeño que no es común a los dos. De las siguientes afirmaciones sobre la cantidad G-P, ¿cuál es cierta?

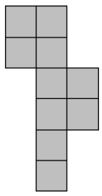


(A) G-P es mayor en el caso 1 (B) G-P es mayor en el caso 2
(C) G-P es mayor en el caso 3 (D) G-P es mayor en el caso 4
(E) G-P es igual en todos los casos

Canguro N6 2020 #11, Cangur B2 2020 #11

2.10 [MF]

Se muestra a la derecha una figura formada por diez cuadrados de 1 cm de lado.



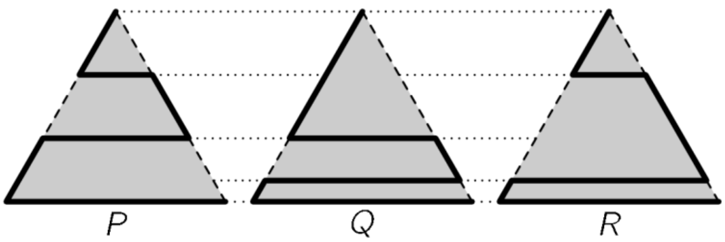
¿Cuántos centímetros mide su perímetro?

(A) 14 (B) 18 (C) 30 (D) 32 (E) 40

Canguro N5 2020 #1, Cangur E4 2020 #1

2.11 [MF]

Un parque tiene la forma de un triángulo equilátero. Un gato quiere caminar por uno de los tres caminos indicados (líneas más gruesas) desde la esquina superior a la esquina inferior derecha. Las longitudes de los caminos son P, Q y R, como se muestra.



¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre las longitudes de los recorridos es verdadera?

(A) $P < Q < R$ (B) $P < R < Q$ (C) $P < Q = R$ (D) $P = R < Q$ (E) $P = Q = R$

Cangur B1 2021 #3, Kangaroo Junior 2021 #3

2.12 MF

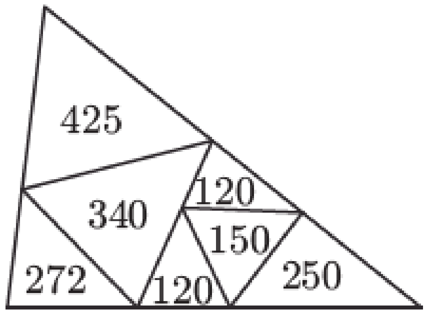
Kate cocina un pan que mide 20 por 18 pulgadas. Este pan se corta en piezas que miden 2 por 2 pulgadas. ¿Cuántas piezas de pan se van a obtener?

(A) 90   (B) 100   (C) 180   (D) 200   (E) 360

AMC 12B 2018 #1

2.13 MF

Un triángulo grande se divide en triángulos más pequeños como se muestra. El número dentro de cada pequeño triángulo indica su perímetro.



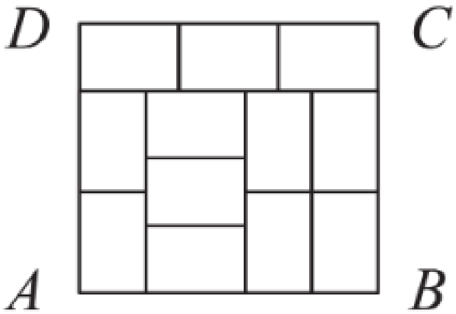
¿Cuál es el perímetro del triángulo grande?

(A) 1017   (B) 682   (C) 703   (D) 697   (E) Ninguno de los valores anteriores

Cangur B2 2021 #15, Kangaroo Student 2021 #15

2.14 MF

La imagen muestra un rectángulo grande ABCD dividido en 12 rectángulos pequeños idénticos. ¿Cuál es la razón AD/DC?

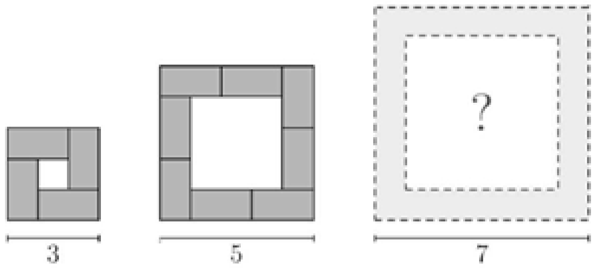


(A) 8/9   (B) 5/6   (C) 7/8   (D) 2/3   (E) 9/8

Cangur B1 2022 #11, Kangaroo Junior 2022 #16

2.15 MF

Juana dispone de unas mesas de medida 2×1 y las coloca en función del número de participantes de cada reunión. Las imágenes muestran la vista superior de la disposición de las mesas para una reunión pequeña, mediana y grande. ¿Cuántas mesas se utilizaron para la reunión grande?

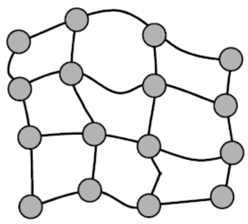


(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16 (E) 18

Cangur B1 2022 #4, Kangaroo Junior 2022 #5

2.16 MF

El mapa muestra una región con 16 ciudades conectadas por carreteras. El Gobierno quiere construir centrales eléctricas en algunas de las ciudades. Cada planta de energía puede proporcionar suficiente electricidad para la ciudad donde está ubicada y cualquier ciudad conectada a esa ciudad por una sola carretera. ¿Cuál es el menor número de centrales eléctricas que se necesita construir?

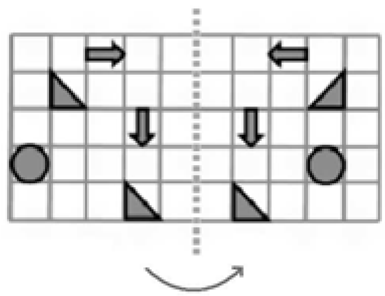


(A) 3 (B) 7 (C) 4 (D) 6 (E) 5

Cangur B2 2022 #14, Kangaroo Student 2022 #16

2.17 MF

Algunas formas se dibujan en una hoja de papel. El maestro dobló el lado izquierdo del papel sobre la línea gruesa. ¿Cuántas de las formas del lado izquierdo se superponen exactamente encima de una forma del lado derecho?

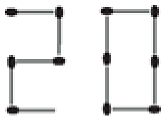


(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 4 (E) 2

Cangur B1 2022 #3, Kangaroo Junior 2022 #4

2.18 MF

Carola está formando el número de cuatro dígitos 2022 usando algunos fósforos de una caja. La caja originalmente contenía 30 fósforos. Ella ya comenzó y formó los dos primeros dígitos, como se muestra en el diagrama. ¿Cuántos fósforos quedarán en la caja cuando haya terminado de formar el 2022?

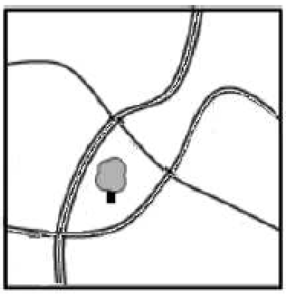


(A) 20   (B) 21   (C) 5   (D) 9   (E) 10

Cangur B1 2022 #1, Kangaroo Junior 2022 #2

2.19 M

Hay tres caminos a través de nuestro parque en la ciudad. Se planta un árbol en medio del parque, como se muestra en la siguiente figura.



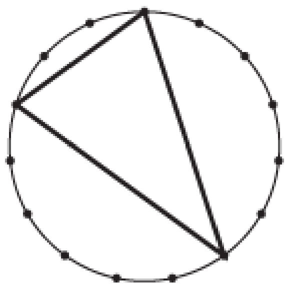
¿Cuál es la menor cantidad de árboles que se deben sembrar para que haya la misma cantidad de árboles a ambos lados de cada uno de los caminos?

(A) 1   (B) 2   (C) 3   (D) 4   (E) 5

Cangur B1 2022 #19, Kangaroo Junior 2022 #19

2.20 M

En un círculo 15 puntos están igualmente espaciados. Podemos formar triángulos uniendo cualquiera de estos tres puntos. Contamos dos triángulos como iguales si son congruentes, es decir, uno es una rotación y/o un reflejo del otro. ¿Cuántos triángulos diferentes se pueden dibujar?

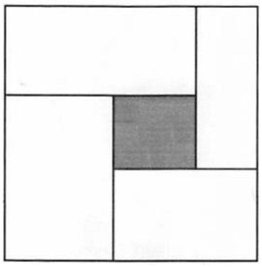


(A) 455   (B) 23   (C) 19   (D) 46   (E) 91

Cangur B2 2021 #25, Kangaroo Student 2021 #26

2.21 F

Cinco rectángulos, A, B, C, D y E están colocados en el cuadrado de la imagen. Estos rectángulos tienen dimensiones 1×6, 2×4, 5×6, 2×7 y 2×3, respectivamente. La figura no está representada a escala. Determina cuál de los cinco rectángulos es el que aparece sombreado en la parte central.

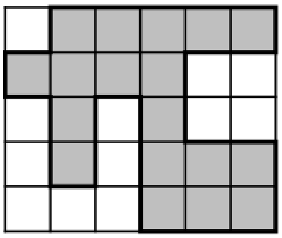


(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

AMC 12A 2022 #3

2.22 MF

El rectángulo de la figura está dividido en 30 cuadrados iguales.



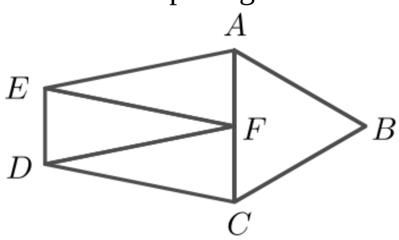
Si el perímetro de la figura gris mide 240 cm, ¿Cuál es el área del rectángulo grande?

(A) 480 cm² (B) 1080 cm² (C) 2430 cm² (D) 750 cm² (E) 1920 cm²

Cangur B1 2023 #6, Canguro N5 2023 #6

2.23 F

El pentágono ABCDE de la figura está dividido en cuatro triángulos de igual perímetro. El triángulo ABC es equilátero y AEF, EFD i FDC son triángulos isósceles idénticos. Determina la razón entre el perímetro del pentágono ABCDE y el del triángulo ABC.

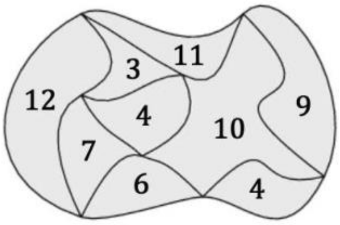


(A) 2 (B) 3/2 (C) 4/3 (D) 5/3 (E) 5/2

Cangur B1 2023 #15, Canguro N5 2023 #15

2.24 F

La figura muestra el plano de un parque. Este parque está dividido en regiones, cuyo perímetro se indica con el número que hay en su interior. Determina el perímetro exterior del parque, en las mismas unidades que todos los datos.



(A) 32   (B) 28   (C) 26   (D) 22   (E) Ninguno de los anteriores

Cangur B1 2023 #29, Canguro N5 2023 #28

2.25 MF

Los lados de un cuadrado miden 1 cm de largo. Si consideramos todos los vértices, ¿cuántos puntos en el plano están exactamente a 1 cm de distancia de dos vértices cualesquiera?

(A) 4   (B) 6   (C) 8   (D) 10   (E) 12

Canguro N3 2023 #15, Cangur E2 2023 #24, Cangur E3 2023 #15, Kanguru Kadett 2023 #15

3 Rectas, segmentos y ángulos.

3.1 Rectas y segmentos.

Resumen teórico.

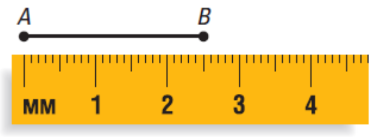
★1 Dos puntos diferentes A y B determinan una única recta, que denotaremos por $\overleftrightarrow{AB}$. Observamos que $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BA}$.

★2 Diremos que dos rectas son paralelas cuando no tengan ningún punto en común.

★3 El segmento $\overline{AB}$ consiste en los puntos A y B (que se llamarán extremos) y todos los puntos de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ que están entre A y B.

★4 La semirrecta $\overrightarrow{AB}$ consiste en: El punto A (que se llamará extremo) y todos los puntos de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ que están a un mismo lado que B respecto de A.

★5 Medida de segmentos.
Supondremos que disponemos de algún tipo de medida de la longitud de segmentos, por ejemplo, mediante una regla graduada:



Esta medida nos permite comparar segmentos, y en particular diremos que dos segmentos son congruentes cuando midan lo mismo, es decir, cuando tengan la misma longitud, y escribiremos $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

3.1.1 [F]

Mike ha marcado los puntos A, B, C y D en una línea recta, como se muestra en el diagrama.

La distancia entre A y C es de 12cm y entre B y D, 18cm. ¿Cuál es la distancia entre el punto medio de AB y el punto medio de CD?

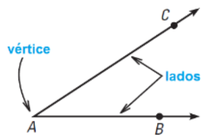
(A) 15 cm (B) 12 cm (C) 18 cm (D) 6 cm (E) 9 cm

Cangur B2 2022 #10, Kangaroo Student 2022 #10

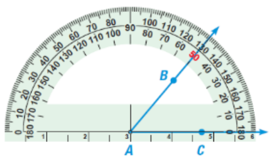
3.2 Ángulos.

Resumen teórico.

★6 Un ángulo es un par de semirrectas diferentes $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ (a las que llamaremos lados del ángulo) con un extremo común A (al que llamaremos vértice del ángulo). Se denotará por $\angle BAC$ o $\angle CAB$ (observamos que el extremo común siempre se escribe en la posición central).



★7 Ángulos congruentes.
Vamos a suponer que disponemos de algún tipo de medida de la amplitud de ángulos, por ejemplo, mediante un transportador de ángulos:



Diremos que dos ángulos son congruentes cuando tengan la misma amplitud, y escribiremos $\angle ABC \cong \angle DEF$.

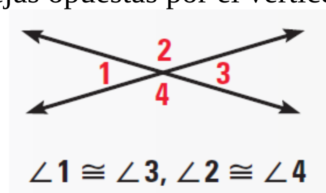
★8 Clasificación de los ángulos.
En función de su medida, los ángulos pueden ser: Agudos (miden menos de 90º), Rectos (miden exactamente 90º), Obtusos (miden más de 90º) y Planos (Miden 180º)

★9 Ángulos adyacentes.
Dos ángulos son adyacentes cuando comparten un mismo vértice y un lado común, pero no comparten puntos interiores.

★10 Ángulos suplementarios.
Diremos que dos ángulos adyacentes son suplementarios entre los dos formen un ángulo plano.

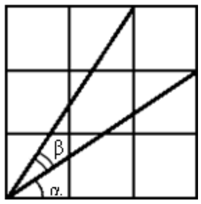
★11 Ángulos complementarios.
Diremos que dos ángulos adyacentes son complementarios cuando entre los dos formen un ángulo recto.

★12 Ángulos opuestos por el vértice.
Dos rectas que se cortan en un punto O determinan cuatro ángulos, que serán congruentes dos a dos, por parejas opuestas por el vértice.



3.2.1 MF

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta para los ángulos de la figura?



(A) $\alpha = \beta$ (B) $2\alpha + \beta = 90°$ (C) $\alpha + \beta = 60°$ (D) $2\beta + \alpha = 90°$ (E) $\alpha + \beta = 45°$

Canguro N5 2019 #8, Cangur B1 2019 #8

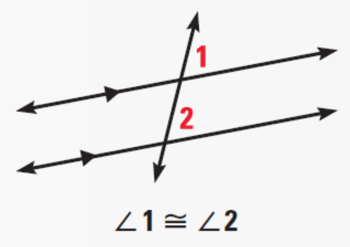
3.3 Ángulos determinados por rectas paralelas y perpendiculares.

Resumen teórico.

★13 Rectas perpendiculares.
Diremos que dos rectas son perpendiculares cuando determinen cuatro ángulos congruentes.

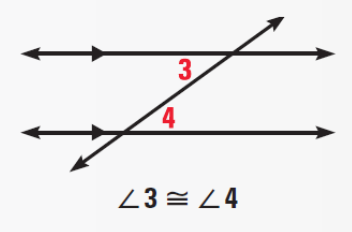
★14 Dos rectas perpendiculares comunes a una tercera son paralelas entre ellas.

★15 Ángulos correspondientes congruentes por paralelismo.
Dos rectas paralelas cortadas por una recta transversal determinan ángulos correspondientes congruentes:



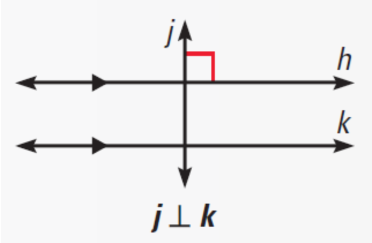
Recíprocamente, si una recta transversal determina ángulos correspondientes congruentes, las dos rectas cortadas por dicha transversal serán paralelas.

★16 Ángulos internos alternos por paralelismo.
Dos rectas paralelas cortadas por una recta transversal determinan ángulos internos alternos congruentes:



Recíprocamente, si una recta transversal determina ángulos internos alternos congruentes, las dos rectas cortadas por dicha transversal serán paralelas.

★17 Dadas dos rectas paralelas cortadas por una recta transversal, si la recta transversal es perpendicular a una de las rectas paralelas, también lo será a la otra.



★18 Definición. Mediatriz de un segmento.
La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular a dicho segmento que pasa por su punto medio. Todo segmento tiene una única mediatriz.

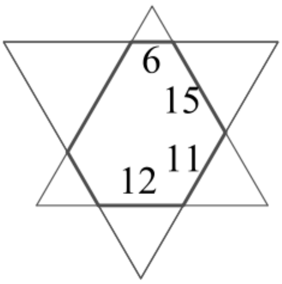
★19 Un punto pertenece a la mediatriz de un segmento si y solo si es equidistante a sus extremos.

★20 Definición. Bisectriz de un ángulo.
Dado un ángulo $\angle ABC$, una bisectriz de $\angle ABC$ es una semirrecta $\overrightarrow{BD}$ tal que $\angle ABD \cong \angle DBC$.

★21 Los puntos de la bisectriz de un ángulo equidistan de los lados de dicho ángulo.

3.3.1 F

Dos triángulos equiláteros diferentes se han superpuesto formando un hexágono con lados opuestos paralelos. Conocemos la longitud de cuatro de los lados de este hexágono, tal y como se muestra en la imagen. Determina el perímetro del hexágono.



(A) 64 (B) 66 (C) 68 (D) 70 (E) 72

Cangur B2 2023 #8, Canguro N6 2023 #7

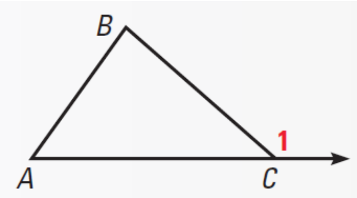
4 Triángulos.

4.1 Ángulos de un triángulo. Clasificación de los triángulos.

Resumen teórico.

★22 Suma de los ángulos de un triángulo.
La suma de los tres ángulos de un triángulo es 180º.

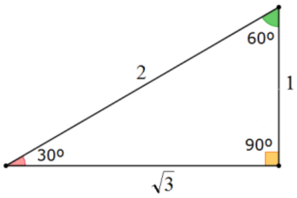
★23 Teorema del ángulo exterior.
La medida del ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes.



★24 Caracterización de un triángulo isósceles.
Un triángulo tiene dos lados iguales si y solo si tiene dos ángulos iguales.

★25 Caracterización de un triángulo equilátero.
Un triángulo tiene los tres lados iguales si y solo si tiene los tres ángulos iguales (60º).

★26 Un triángulo ΔABC tiene ángulos 30º-60º-90º si y sólo si sus lados mantienen una proporción $1:\sqrt{3}:2$.



★27 Un triángulo ΔABC tiene ángulos 45º-45º-90º si y sólo si es un triángulo rectángulo isósceles.

★28 En un triángulo 45º-45º-90º la hipotenusa es $\sqrt{2}$ veces la longitud de un cateto.

4.1.1 MF

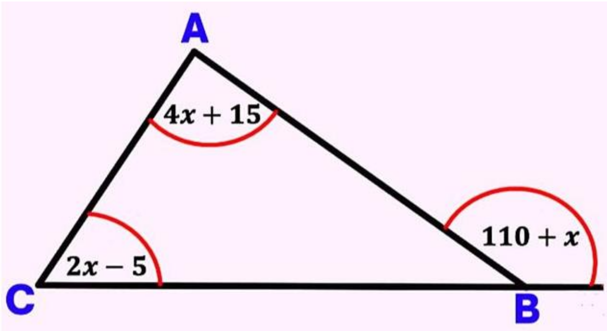
Un triángulo isósceles tiene un lado de 20 cm de longitud. De los otros dos lados, uno es igual a 2/5 del otro. ¿Cuál de los siguientes valores es el perímetro del triángulo?

(A) 36 cm (B) 48 cm (C) 60 cm (D) 90 cm (E) 120 cm

Canguro N5 2020 #14, Cangur B1 2020 #14

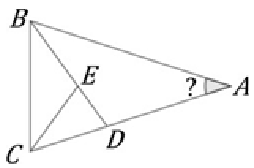
4.1.2 MF

Resuelve en x:



4.1.3 F

Un triángulo isósceles ΔABC, con AB = AC, se puede descomponer en tres triángulos isósceles, tal y como se muestra en la figura. Se cumple que AD = DB, CE = CD y BE = EC. Determina la medida del ángulo $\angle BAC$.

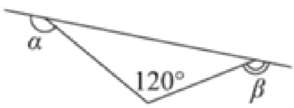


(A) 24º (B) 28º (C) 30º (D) 35º (E) 36º

Cangur E3 2022 #28

4.1.4 MF

Determina la suma $\alpha + \beta$ de los ángulos indicados en la figura.

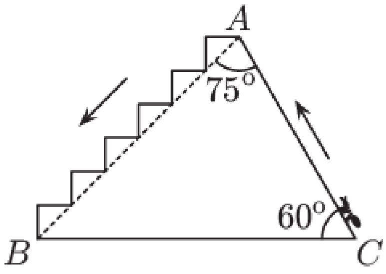


(A) 200º (B) 240º (C) 270º (D) 300º (E) 310º

Cangur E4 2022 #6

4.1.5 F

Una hormiga sube al punto A por el camino CA y baja por las escaleras AB, tal y como se muestra en el dibujo siguiente:



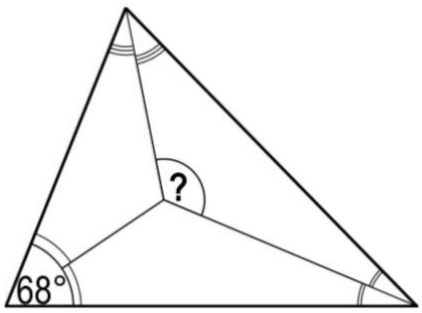
Determina la razón entre las longitudes del camino de subida y del camino de bajada.

(A) √3/3 (B) √2/2 (C) 1 (D) 1/2 (E) 1/3

Cangur B1 2021 #21, Kangaroo Junior 2021 #21

4.1.6 F

Un triángulo tiene un ángulo de 68º. Se trazan las tres bisectrices interiores ¿Cuál es la medida, en grados, del ángulo indicado?

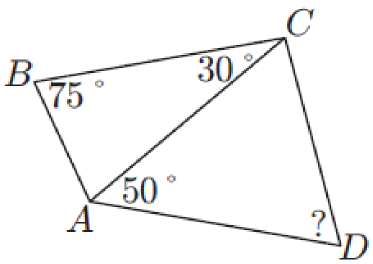


(A) 120º (B) 124º (C) 128º (D) 132º (E) 136º

Canguro N5 2009 #10, Cangur N3 2009 #10, Kangaroo Junior 2009 #12

4.1.7 MF

Algunos de los ángulos del cuadrilátero ABCD están marcados en la figura.
Si BC = AD, determina el ángulo ∠ADC.



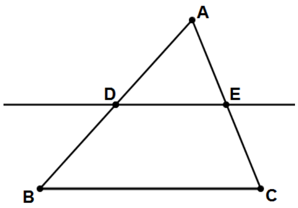
(A) 30º (B) 50º (C) 55º (D) 65º (E) 70º

Cangur N3 2004 #6, Canguro N5 2004 #6, Kangaroo Junior 2004 #6

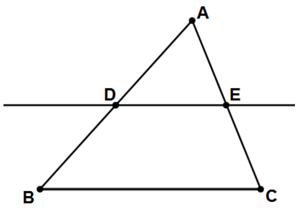
4.2 Conectores de puntos medios.

Resumen teórico.

★29 El conector de puntos medios de un triángulo.
Dado un triángulo ΔABC, si D es el punto medio de $\overline{AB}$ y E es el punto medio de $\overline{AC}$, entonces $DE \parallel BC$, y $DE = \frac{1}{2} BC$

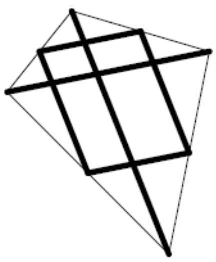


★30 Dado un triángulo ΔABC, y sea D el punto medio de $\overline{AB}$. Si la recta r pasa por D y es paralela a $\overleftrightarrow{BC}$, entonces pasa por el punto medio de $\overline{AC}$, y se cumple $DE = \frac{1}{2} BC$.



4.2.1 [F]

Martín hizo una cometa cortando un listón de madera recto en 6 piezas. Usó dos de ellas, de longitudes 120 cm y 80 cm, como diagonales. Las cuatro piezas restantes conectaban los puntos medios de los lados de la cometa, como se muestra en la figura.



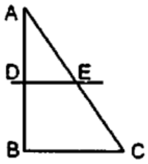
¿Cuánto medía el listón antes de cortarlo?

(A) 300 cm (B) 370 cm (C) 400 cm (D) 410 cm (E) 450 cm

Canguro N5 2020 #9; Cangur B1 2020 #11

4.2.2 MF

El triángulo ABC de la figura es rectángulo en B; $\overline{AB} = 12$ y $\overline{AC} = 20$.



Si D es el punto medio de $\overline{AB}$ y la recta DE es paralela a la BC, entonces $\overline{DE}$ mide

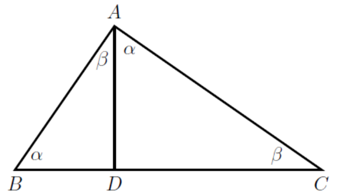
(A) 10 (B) 8 (C) 6 (D) 5 (E) 12

Canguro N4 2012 #4

4.3 Triángulos rectángulos.

Resumen teórico.

★31 Teorema de la altura.
Sea ΔABC un triángulo rectángulo en el vértice A. Trazamos la perpendicular al lado BC por el vértice A:



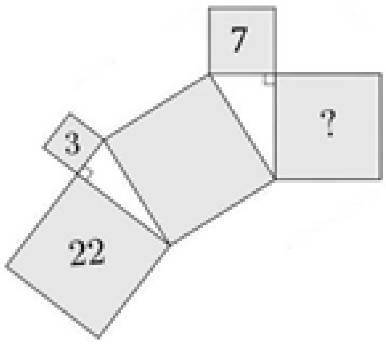
Los triángulos ΔADB y ΔCDA son semejantes, y por tanto $AD^2 = BD \cdot DC$.
También se deduce que $AB^2 = BD \cdot BC$ y $AC^2 = DC \cdot BC$.

★32 Los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios (suman 90º)

★33 Teorema de Pitágoras.
En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es la suma de cuadrados de los catetos. Además, esta condición caracteriza los triángulos rectángulos.

4.3.1 MF

Colocamos cinco cuadrados y dos triángulos rectángulos tal y como se muestra en la figura. Los números 3, 7 i 22 que hay dentro de tres de los cuadrados indican sus respectivas áreas en metros cuadrados. Determina el área del cuadrado con el signo de interrogación.

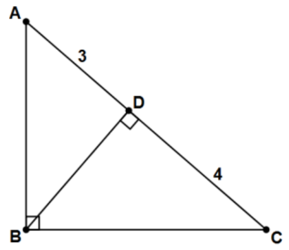


(A) 15 m² (B) 16 m² (C) 17 m² (D) 18 m² (E) 19 m²

Cangur E4 2022 #15, Cangur B1 2022 #10, Kangaroo Junior 2022 #11

4.3.2 F

Sea ΔABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en B. Sea D el pie de la perpendicular por B. Si AD=3 y DC=3, determina el área del triángulo ΔABC.

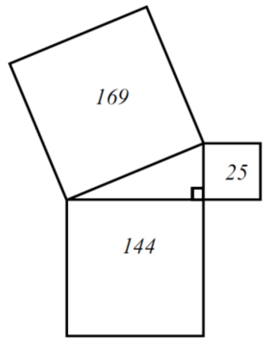


(A) $4\sqrt{3}$ (B) $7\sqrt{3}$ (C) 21 (D) $14\sqrt{3}$ (E) 42

AMC 10A 2009 #10

4.3.3 MF

Dadas las áreas de los tres triángulos de la figura, determina el área del triángulo interior.

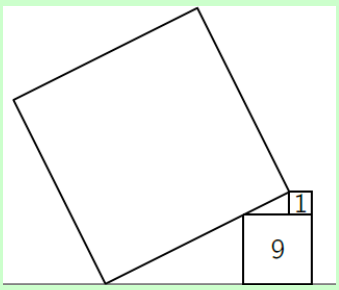


(A) 13 (B) 30 (C) 60 (D) 300 (E) 1800

AMC 8 2003 #6

4.3.4 F **Problema solucionado paso a paso en vídeo.**

Se apoya un cuadrado grande en otros dos cuadrados, como se ve en la imagen.



Los números en los cuadrados pequeños muestran su área. ¿Cuál es el área del cuadrado grande?

(A) 49 (B) 80 (C) 81 (D) 82 (E) 100

Canguro N6 2020 #17, Cangur B2 2020 #17

Solución: https://youtu.be/kYwkWSg3Czo

4.3.5 [MF]

Tres rectas paralelas equiespaciadas cortan una circunferencia, creando tres cuerdas de longitudes 38, 38 y 34. Determina la distancia entre dos rectas adyacentes.

(A) $5\frac{1}{2}$ (B) 6 (C) $6\frac{1}{2}$ (D) 7 (E) $7\frac{1}{2}$

AMC 12B 2021 #8

4.3.6 [MF]

Sea ABCD un cuadrilátero en el que $\angle B$ es recto, la diagonal $\overline{AC}$ es perpendicular a $\overline{CD}$, $AB = 18$, $BC = 21$ y $CD = 14$. Determina el perímetro del cuadrilátero.

AIME I 2006 #1

4.3.7 [F]

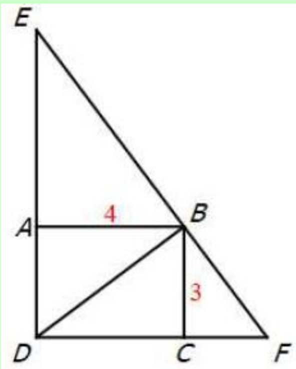
Una liebre y una tortuga compitieron en una carrera de 5 km a lo largo de un camino recto. La liebre, que es cinco veces más rápida que la tortuga, comenzó en dirección perpendicular a la ruta. Después de un rato se dio cuenta de su error y corrió directamente al punto final, llegando a la meta al mismo tiempo que la tortuga. ¿Cuál es la distancia entre el punto donde la liebre se percató de su error y el punto final?

(A) 11 km (B) 12 km (C) 13 km (D) 14 km (E) 15 km

Canguro N5 2020 #22, Cangur B1 2020 #22

4.3.8 [M] **Problema solucionado paso a paso en vídeo.**

Sea ABCD un rectángulo con AB=4 y BC=3. Trazamos el segmento EF que pasa por B de forma que $EF \perp DB$ y los puntos A y C pertenecen a DE y DF, respectivamente. Determina EF.



(A) 9 (B) 10 (C) 125/12 (D) 103/9 (E) 12

AMC 10A 2009 #17

Solución: https://youtu.be/ODObG3urIWA

4.4 Desigualdades en el triángulo.

Resumen teórico.

★34 En todo triángulo la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera es siempre mayor que la longitud del lado restante.

★35 En todo triángulo, el lado mayor determina el ángulo contrario mayor, y el ángulo mayor determina el lado contrario mayor.

4.4.1

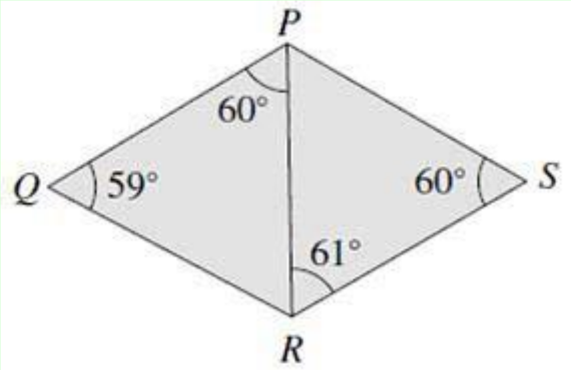
Un triángulo cuyos lados miden números enteros tiene perímetro 8. El área de dicho triángulo es:

(A) $2\sqrt{2}$ (B) $\frac{16}{9}\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{3}$ (D) 4 (E) $4\sqrt{2}$

AHSME 41 #7

4.4.2 M **Problema solucionado paso a paso en vídeo.**

En el triángulo PQR, el ángulo ∠PQR es 59º y el ∠RPQ, 60º. En el triángulo PRS, el ángulo ∠PRS es 61º y el ∠RSP, 60º, como se ve en la figura



¿Cuál de los siguientes segmentos es el más largo?

(A) PQ (B) RS (C) PR (D) QR (E) PS

Canguro N5 2013 #17, Cangur N3 2013 #18, Kangaroo Junior 2013 #17

Solución: https://youtu.be/Ff8k_sp4l-Q

4.4.3 F

Los lados de un triángulo tienen como medidas los enteros positivos 13, x e y. Si xy = 105, ¿cuál es el perímetro del triángulo?

(A) 35   (B) 39   (C) 51   (D) 69   (E) 119

Canguro N6 2010 #19, Cangur N4 2010 #19, Kangaroo Student 2010 #19

4.4.4 F

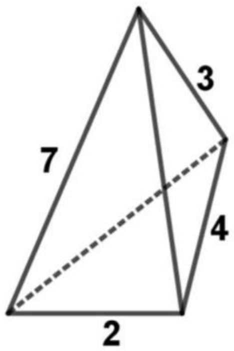
Determina el número de triángulos diferentes de perímetro 10 cm y cuyos lados tienen longitudes números enteros.

(A) 5   (B) 11   (C) 6   (D) 2   (E) Otra cantidad

Cangur B2 2023 #6

4.4.5 F

Una pirámide triangular tiene aristas cuyas longitudes son números enteros. Cuatro de estas longitudes son las que se muestran. ¿Cuál es la suma de las longitudes de las otras dos aristas?



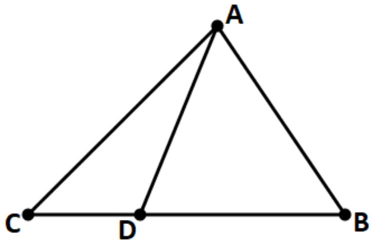
(A) 9   (B) 10   (C) 11   (D) 12 F) 13

Canguro N6 2023 #11, Cangur B2 2023 #11

4.5 Área de triángulos.

Resumen teórico.

★36 Las áreas determinadas por una ceviana son proporcionales a las bases.



$$\frac{[\Delta ACD]}{[\Delta ADB]} = \frac{CD}{DB}$$

★**37** La razón de las áreas de dos triángulos semejantes es igual al cuadrado de su razón de semejanza.

★**38** Fórmula de Heron.
El área de un triángulo de lados a, b, c es

$$[\Delta ABC] = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

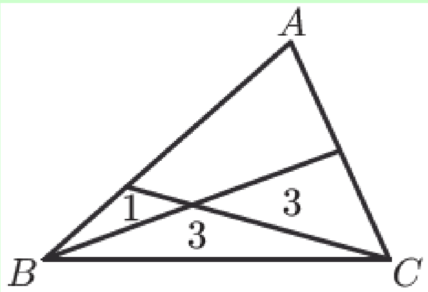
donde s es el semiperímetro: $s = (a+b+c)/2$

★**39** Área mediante trigonometría.

$$[\Delta ABC] = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin(\angle CAB)}{2}$$

4.5.1 [M] Problema solucionado paso a paso en vídeo.

El triángulo ABC está dividido por dos segmentos como se muestra en la figura. Las áreas de los triángulos pequeños son 1, 3 y 3. ¿Cuánto vale el área del triángulo ABC?



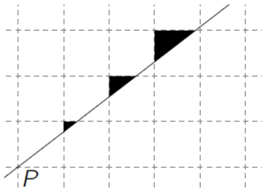
(A) 12   (B) 13,5   (C) 12,5   (D) 14   (E) 13

Cangur B2 2021 #27, Kangaroo Student 2021 #27

Solución: https://youtu.be/hhjaoHf6P4A

4.5.2 F

Se dibuja una recta en un papel cuadriculado y se colorean tres triángulos, como se ve en la figura.



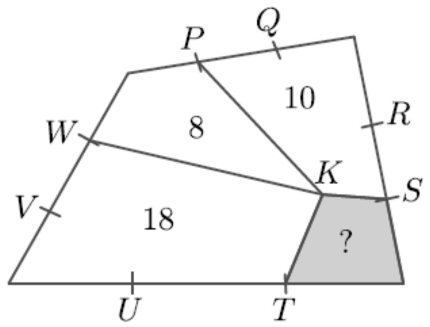
¿Cuál de las siguientes podría ser la razón de las áreas de los triángulos?

(A) 1 : 2 : 3 (B) 1 : 2 : 4 (C) 1 : 3 : 9 (D) 1 : 4 : 8 (E) ninguna de las anteriores

Canguro N6 2020 #22, Cangur B2 2020 #22

4.5.3 M

La figura muestra un cuadrilátero grande divido en cuatro cuadriláteros más pequeños con un vértice común K. Los puntos marcados sobre los lados del cuadrilátero grande dividen los lados respectivos en tres partes iguales. El número que aparece en cada cuadrilátero pequeño indica su área. ¿Cuál es el área del cuadrilátero gris?

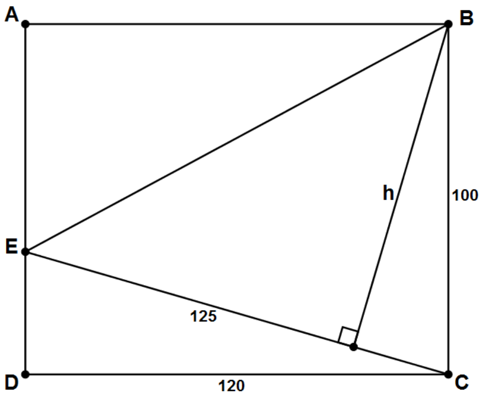


(A) 5 (B) 7 (C) 4 (D) 6.5 (E) 6

Cangur E3 2021 #30

4.5.4 F

En un rectángulo ABCD, con $AB = CD = 120$ y $AD = BC = 100$, marcamos el punto E en el lado AD de forma que $EC = 125$. Determina la altura h por el vértice B del triángulo ΔBEC.



4.5.5 [F]

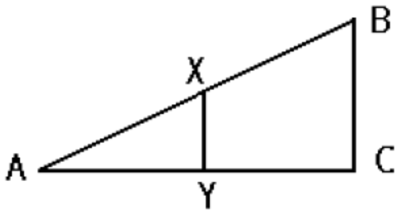
Sean A y B dos puntos del plano separados en 10 unidades. ¿Cuántos puntos hay en el plano tales que el perímetro de ΔABC sea de 50 unidades y el área de ΔABC sea de 100 unidades cuadradas?

(A) 0   (B) 2   (C) 4   (D) 8   (E) una cantidad infinita.

AMC 12B 2019 #6

4.5.6 [F]

ABC es un triángulo rectángulo en C.



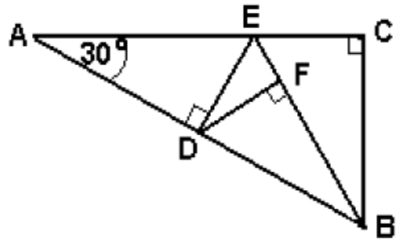
Los puntos X e Y están en los lados AB y AC, respectivamente, de modo que XY es paralela a BC. Si el área del triángulo AXY es igual al área del trapecio BCYX, ¿cuánto vale el cociente AY/AC?

(A) 1/2   (B) $2^{1/2}/(2^{1/2}+1)$ (C) $1/2^{1/2}$ (D) $(2^{1/2}-1)/2^{1/2}$ (E) $2^{1/2}/3^{1/2}$

Canguro N4 2003 #24

4.5.7 [F]

En la figura, DE es la mediatriz de AB, el ángulo ACB es recto y BFD también es recto.



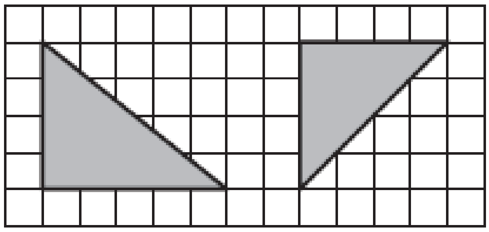
¿Cuánto vale el cociente entre el área del triángulo DEF y la del ABC?

A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{1}{8.\sqrt{3}}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{1}{6.3^{1/2}}$ E) $\frac{1}{9}$

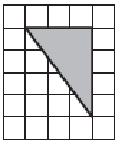
Canguro N4 2003 #25

4.5.8 [MF]

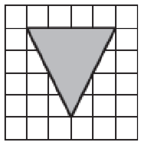
Alina dibujó tres triángulos en una cuadrícula. Exactamente dos de ellos tienen la misma área, exactamente dos de ellos son isósceles y exactamente dos son triángulos rectángulos. Se muestran dos de los triángulos. ¿Cuál podría ser el tercero?



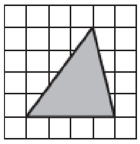
A)



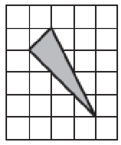
B)



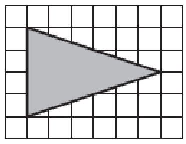
C)



D)



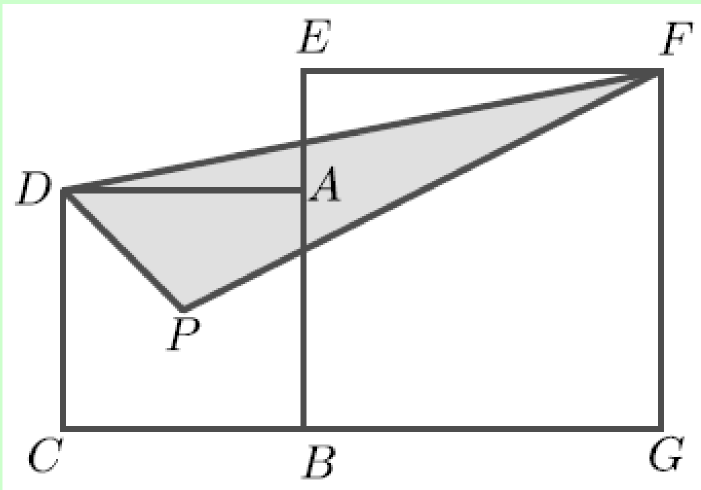
E)



Cangur B1 2021 #9, Kangaroo Junior 2021 #9

4.5.9 [F] **Problema solucionado paso a paso en vídeo.**

Las diagonales de los cuadrados ABCD y EFGB miden 7 cm y 10 cm respectivamente. El punto P es la intersección de las diagonales del cuadrado ABCD. Determina el área del triángulo FPD.



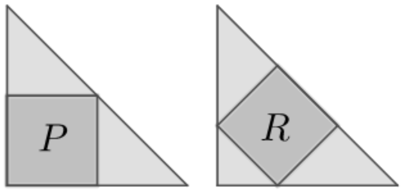
(A) 14,5 cm² (B) 15 cm² (C) 15,75 cm² (D) 16,5 cm² (E) 17,5 cm²

Cangur B1 2022 #16, Kangaroo Junior 2022 #26

Solución: https://youtu.be/ALu1TK3p3gI

4.5.10 F

Dos triángulos rectángulos isósceles congruentes tienen cada uno inscrito un cuadrado, como se muestra en el diagrama. El cuadrado marcado con P tiene un área de 45. ¿Cuál es el área del cuadrado marcado con R?

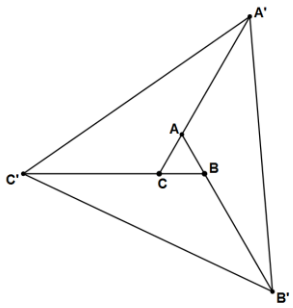


(A) 35   (B) 40   (C) 45   (D) 50   (E) 60

Cangur B1 2022 #21, Kangaroo Junior 2022 #23

4.5.11 F

Sea ΔABC un triángulo equilátero. Extendemos el lado $\overline{AB}$ más allá de B hasta un punto B' tal que $BB' = 3 \cdot AB$. De la misma manera, extendemos el lado $\overline{BC}$ más allá de C hasta un punto C' tal que $CC' = 3 \cdot BC$ y extendemos el lado $\overline{CA}$ más allá de A hasta un punto A' tal que $AA' = 3 \cdot CA$. Determina la razón entre el área de $\Delta A'B'C'$ y el área de ΔABC.

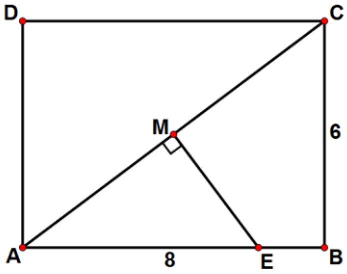


(A) 9   (B) 16   (C) 25   (D) 36   (E) 37

AMC 12B 2017 #15

4.5.12 F

Sea ABCD un rectángulo con AB=8 y AC=6. Sea M el punto medio de su diagonal AC, y sea E el punto del lado AB tal que $ME \perp AC$. Determina el área del triángulo ΔAME.

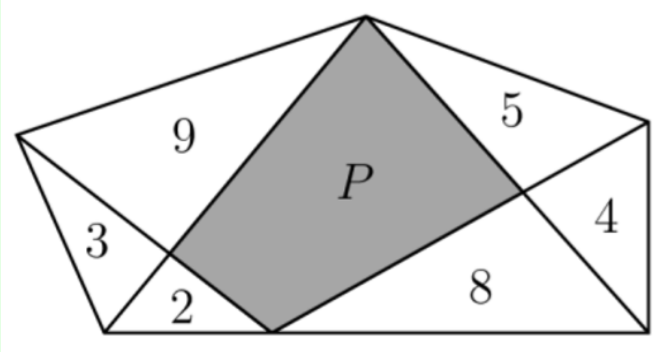


(A) 65/8   (B) 25/3   (C) 9   (D) 75/8   (E) 85/8

AMC 10B 2009 #18

4.5.13 [M] **Problema solucionado paso a paso en vídeo .**

Un pentágono se divide en partes más pequeñas, como se muestra en la figura. Los números situados dentro de los triángulos indican sus respectivas áreas. ¿Cuál es el área P del cuadrilátero sombreado?



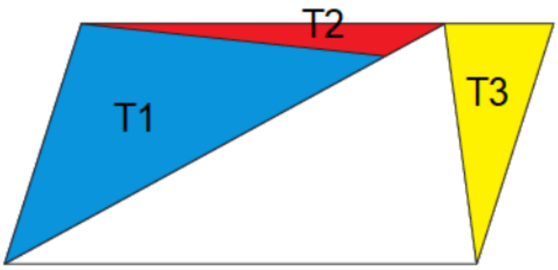
(A) 15 (B) 31/2 (C) 16 (D) 17 (E) Ninguno de los anteriores

Canguro N6 2023 #21, Cangur B2 2023 #19

Solución: https://youtu.be/rZ1CyOnSLHY

4.5.14 [F]

El área de un paralelogramo que se muestra en la imagen es igual a 300 cm² . Las áreas de los triángulos T1 y T3 son 100 cm² y 40 cm² respectivamente. ¿Cuál es el área del triángulo T2? La imagen no está a escala.



(A) 20 cm² (B) 50 cm² (C) 10 cm² (D) 30 cm² (E) 25 cm²

Canguro N4 2023 #19

4.5.15 [F]

Determina la medida angular en grados del ángulo agudo formado por las rectas de pendiente 2 y 1/3.

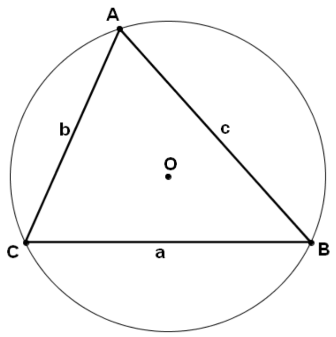
(A) 30 (B) 37.5 (C) 45 (D) 52.5 (E) 60

AMC 12A 2023 #11

4.6 Teorema del seno, del coseno y de Stewart.

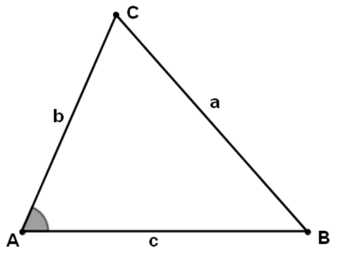
Resumen teórico.

★40 Teorema del seno.
Sea ΔABC un triángulo, O el centro de su circunferencia circunscrita y R el radio de esta circunferencia.



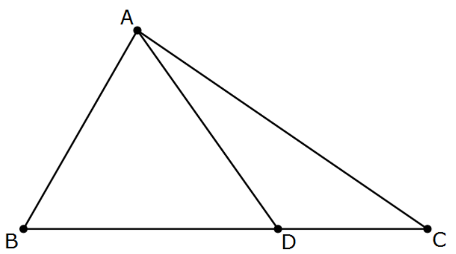
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

★41 El Teorema del coseno.



$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

★42 Teorema de Stewart.
Dada una ceviana $\overline{AD}$ de un triángulo ΔABC, se cumple



$$AD^2\,BC+BD\cdot DC\cdot BC=AC^2BD+AB^2DC$$

4.6.1 F

Sea ΔABC un triángulo cuyos lados están en progresión aritmética, y su lado menor tiene longitud 6. Determina el área de este triángulo si sabemos que uno de sus ángulos mide 120º.

(A) $12\sqrt{3}$ (B) $8\sqrt{6}$ (C) $14\sqrt{2}$ (D) $20\sqrt{2}$ (E) $15\sqrt{3}$

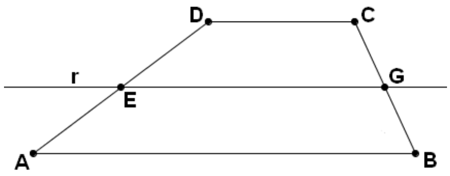
AMC 12B 2023 #17

5 Polígonos.

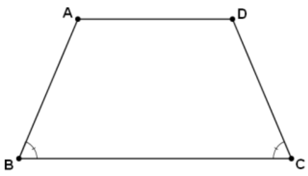
5.1 Cometas, trapecios y paralelogramos.

Resumen teórico.

★43 El conector de puntos medios de un trapecio.
Un trapecio es un cuadrilátero con al menos dos lados opuestos paralelos.
a) Si una recta pasa por el punto medio de un lado de un trapecio y es paralela a la base, entonces también pasa por el punto medio del otro lado, y su longitud es un medio de la semisuma de la suma de las dos bases.
b) La recta que pasa por los dos puntos medios de los lados es paralela a la base.



★44 Definición. Trapecio isósceles.
Las dos condiciones siguientes son equivalentes:
a) Los ángulos en los extremos de una de las dos bases son congruentes.
b) Los lados laterales son congruentes.

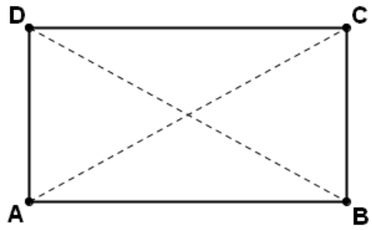


Diremos que un trapecio es isósceles cuando cumpla las dos condiciones anteriores.

★45 Definición. Paralelogramo.
Un paralelogramo es un cuadrilátero en el que los lados opuestos son paralelos.

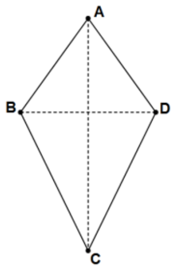
★46 Caracterización de los paralelogramos.
Son equivalentes:
a) El cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo.
b) Cada diagonal determina dos triángulos congruentes.
c) Dos de sus lados opuestos son paralelos y congruentes.
d) Los ángulos opuestos son congruentes.
e) Las diagonales se cortan en sus puntos medios.

★47 Definición. Rectángulo.
Un rectángulo es un cuadrilátero cuyos cuatro ángulos son rectos. Todo rectángulo es un paralelogramo



★48 Caracterización de los rectángulos entre los paralelogramos.
Dado un paralelogramo $ABCD$, son equivalentes:
a) $ABCD$ es un rectángulo.
b) Uno de sus ángulos es recto.
c) Sus dos diagonales son congruentes.

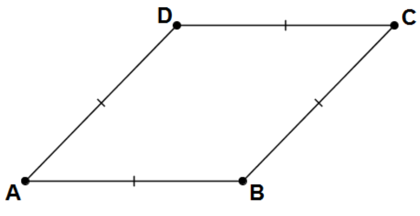
★49 Definición. Cometa.
Una cometa es un cuadrilátero $ABCD$ que tiene dos pares de lados adyacentes congruentes: $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{CD}$.



También lo podemos interpretar como una figura creada mediante dos triángulos isósceles con una base común (base que será la diagonal de la cometa).

★50 Las diagonales de una cometa se cortan en ángulos rectos.

★51 Definición. Rombo.
Un rombo es un cuadrilátero cuyos cuatro lados son congruentes.

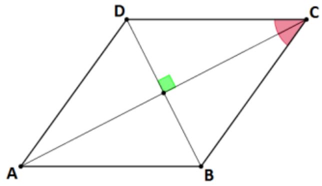


$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{AD}$

★52 Todo rombo es un paralelogramo, sus diagonales se cortan perpendicularmente, y sus diagonales son bisectrices de los ángulos internos.

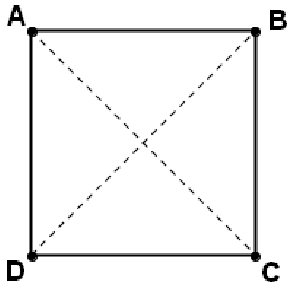
★53 Dado un paralelogramo ABCD, son equivalentes:

a) ABCD es un rombo
b) Dos de sus lados consecutivos son congruentes
c) Sus diagonales son perpendiculares.
d) Una de sus diagonales es la bisectriz de su ángulo interno.



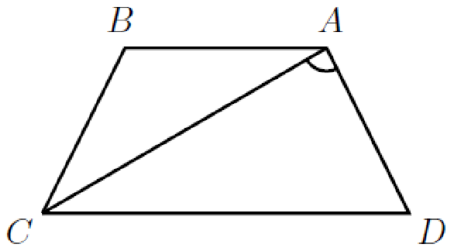
★54 Definición. Cuadrado.

Un cuadrado es un cuadrilátero con los cuatro lados y los cuatro ángulos iguales, es decir, es un rombo y un rectángulo al mismo tiempo. Las diagonales de un cuadrado son congruentes, perpendiculares y bisectrices de los ángulos internos del cuadrado.



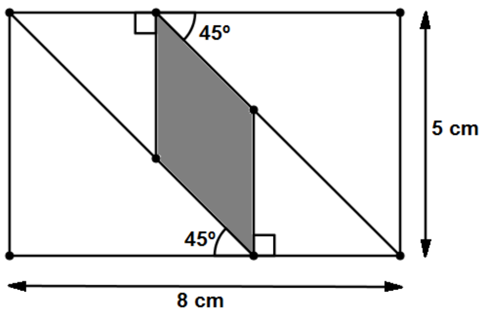
5.1.1 [F]

El trapecio isósceles ABCD es tal que AD = AB = BC = 1 y DC = 2, donde AB es paralelo a DC. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle CAD$?



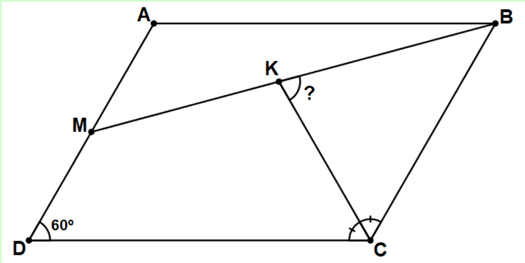
5.1.2 [MF]

Determina las medidas del paralelogramo interior:



5.1.3 [D] Problema solucionado paso a paso en vídeo

En la siguiente figura, ABCD es un paralelogramo. Sabemos que $\angle D = 60^{\circ}$, $AD = 2$ y $AB = \sqrt{3}+1$. Sea M el punto medio de AD. El segmento CK es la bisectriz del ángulo en C. Determina el ángulo $\angle CKB$.



IGO 2018 Elementary Level #3

Solución: https://youtu.be/XXXX

5.2 Polígonos regulares.

5.2.1 MF

Sea ABCDEF un hexágono regular de lado 1. Denotamos por X, Y, Z los respectivos puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$. Determina el área del hexágono cuyo interior es la intersección de los interiores de ΔACE y ΔXYZ .

(A) $\frac{3}{8}\sqrt{3}$ (B) $\frac{7}{16}\sqrt{3}$ (C) $\frac{15}{32}\sqrt{3}$ (D) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (E) $\frac{9}{16}\sqrt{3}$

5.2.2 M

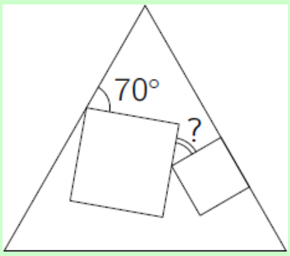
Dado un octógono regular ABCDEFGH de área n, y siendo m el área del cuadrilátero ACEG, determina m/n.

(A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ (E) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

AMC 12A 2020 #14

5.2.3 F **Problema solucionado paso a paso en vídeo.**

Se dibujan dos cuadrados de diferente tamaño dentro de un triángulo equilátero. Un lado de uno de estos cuadrados se encuentra en uno de los lados del triángulo, como se muestra en la figura.



¿Cuál es la medida del ángulo marcado con el signo de interrogación?

(A) 25° (B) 30° (C) 35° (D) 45° (E) 50°

Canguro N5 2020 #17, Cangur B1 2020 #17

Solución: https://youtu.be/nnuwAevj0Eg

5.2.4 MF

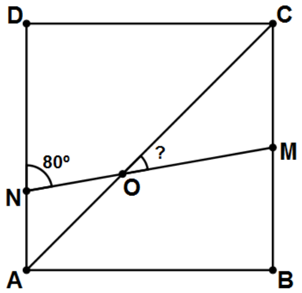
Se considera el cuadrado de vértices A, B, C, D marcados en el sentido del movimiento de las agujas del reloj. Con otro punto E se construye el triángulo equilátero de vértices A, E, C en el mismo sentido. ¿Cuánto mide el ángulo ∠CBE en grados?

(A) 30 (B) 45 (C) 135 (D) 145 (E) 150

Canguro N5 2019 #11, Cangur B1 2019 #11

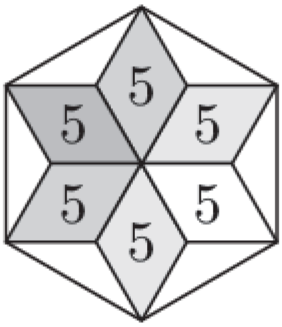
5.2.5 MF

En la figura, ABCD es un cuadrado y $\angle OND = 80^{\circ}$. Determina el ángulo $\angle COM$.



5.2.6 MF

Seis rombos congruentes, cada uno de un área de 5 cm^2, forman una estrella. Las puntas de la estrella se unen para dibujar un hexágono regular, como se muestra.



¿Cuál es el área del hexágono?

(A) 45 cm^2 (B) 48 cm^2 (C) 60 cm^2 (D) 36 cm^2 (E) 40 cm^2

Cangur E4 2021 #10, Cangur B1 2021 #6, Kangaroo Junior 2021 #7

5.2.7 MF

Sea ABCDEF un hexágono regular de lado 2. Sea G el punto medio del lado $\overline{AB}$, y sea H el punto medio del lado $\overline{DE}$. Determina el perímetro de GCHF.

(A) $4\sqrt{3}$ (B) 8 (C) $4\sqrt{5}$ (D) $4\sqrt{7}$ (E) 12

AMC 12B 2022 #10

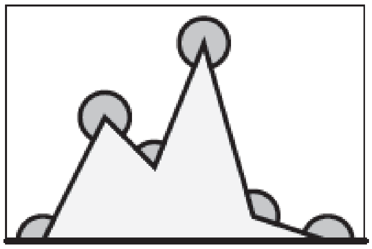
5.3 Ángulos en figuras poligonales.

Resumen teórico.

★55 La suma de los ángulos internos de un polígono de n lados es igual a $180º(n-2)$. En particular, la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es siempre igual a 360º.

5.3.1 MF

¿Cuál es la suma de los seis ángulos marcados en la figura?

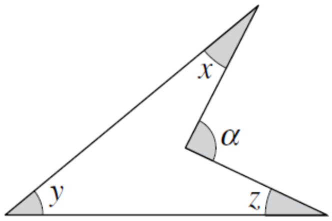


(A) 900º (B) 1120º (C) 360º (D) 1080º (E) 1440º

Cangur B1 2021 #19, Kangaroo Junior 2021 #19

5.3.2 MF

En el siguiente cuadrilátero, $x = 22º$, $y = 39º$, $z = 23º$. Determina el ángulo α.

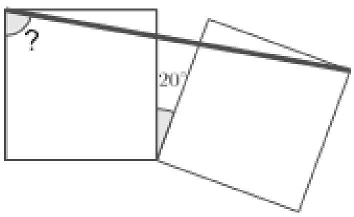


(A) 94º (B) 90º (C) 88º (D) 84º (E) 82º

Kangourou J 2014 #15

5.3.3 F

Los dos cuadrados de la figura son iguales, y conocemos el ángulo que forman el lado de uno con el lado del otro, que es de 20º. Determina el valor del ángulo indicado en la figura con un signo de interrogación.

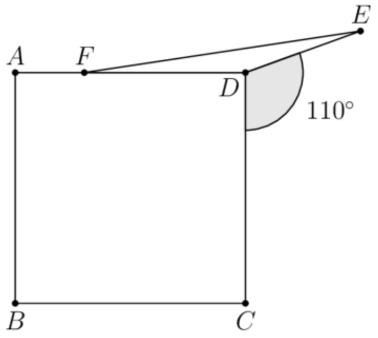


(A) 70º (B) 75º (C) 78º (D) 80º (E) 85º

Cangur E3 2022 #17, Cangur E4 2022 #13

5.3.4 MF

Tal y como aparece en la imagen, el punto E pertenece al semiplano opuesto determinado por la recta CD desde el punto A de forma que $\angle CDE = 110º$. El punto F pertenece a $\overline{AD}$ de forma que DE=DF, y ABCD es un cuadrado. Determina la medida en grados de $\angle AFE$.

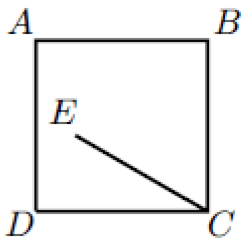


(A) 160 (B) 164 (C) 166 (D) 170 (E) 174

AMC 12A Fall 2021 #6

5.3.5 MF

El ángulo $\angle EAB = 75º$, el ángulo $\angle ABE = 30º$ y los lados del cuadrado miden 10 cm.



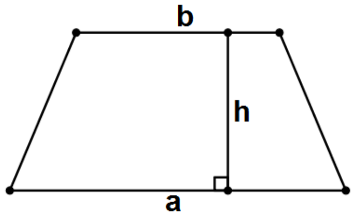
La longitud del segmento EC es:

(A) 8 cm. (B) 9 cm. (C) 9,5 cm. (D) 10 cm. (E) 11 cm.

Canguro N1 2007 #26, Cangur N1 2007 #26

5.4 Áreas de figuras poligonales.

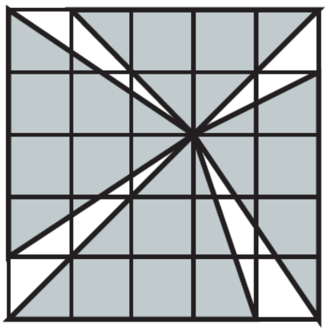
★56 Fórmula del área de un trapecio isósceles.



$$Área = \frac{(a+b)\cdot h}{2}$$

5.4.1 F

En la figura, hallar el cociente entre el área de la parte clara y la de la parte oscura.

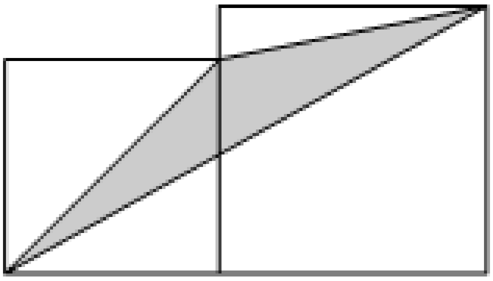


(A) 1/4 (B) 1/5 (C) 1/6 (D) 2/5 (E) 2/7

Cangur N1 2004 #21 ,Canguro N1 2004 #21

5.4.2 M

Se muestran dos cuadrados adyacentes con longitudes de lado a y b (a < b).
¿Cuál es el área del triángulo sombreado?

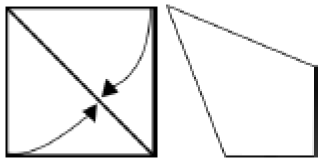


(A) $\sqrt{a\cdot b}$ (B) $\frac{1}{2}\cdot a^2$ (C) $\frac{1}{2}\cdot b^2$ (D) $\frac{1}{4}\left(a^2+b^2\right)$ (E) $\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$

Canguro N6 2019 #18, Cangur B2 2019 #18

5.4.3 F

Clara cogió un papel cuadrado de lado 1 y lo dobló de tal manera que hizo coincidir dos de sus lados en la diagonal (ver figura), obteniendo un cuadrilátero.



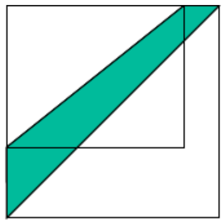
¿Cuál es el área de este cuadrilátero?

(A) $2-\sqrt{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\sqrt{2}-1$ (D) $\dfrac{7}{10}$ (E) $\dfrac{3}{5}$

Canguro N6 2020 #27, Cangur B2 2020 #27

5.4.4 F

Las longitudes de los lados de un jardín rectangular se amplían en un 20% y en un 50%, respectivamente, y se convierte en un jardín cuadrado, como se muestra en la imagen.



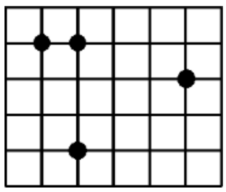
Si el área sombreada entre las dos diagonales es 30 m^2, ¿cuál era el área del jardín original?

(A) 60 m^2 (B) 65 m^2 (C) 70 m^2 (D) 75 m^2 (E) 80 m^2

Canguro N6 2020 #23, Cangur B2 2020 #23

5.4.5

En la cuadrícula formada por cuadrados con longitud de lado 1, se han marcado cuatro puntos, como se ve en la figura.



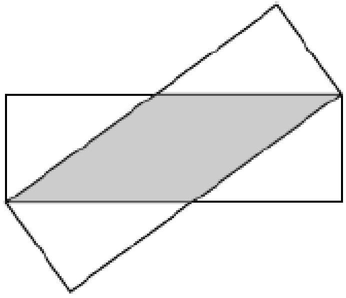
Se calculan las áreas de los triángulos cuyos vértices son tres de los cuatro puntos dados; ¿cuánto vale el área más pequeña?

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\dfrac{3}{2}$ (D) 2 (E) $\dfrac{5}{2}$

Canguro N5 2020 #10, Cangur B1 2020 #10

5.4.6 M

Dos rectángulos idénticos con lados de 3 cm y 9 cm se superponen como en la figura.



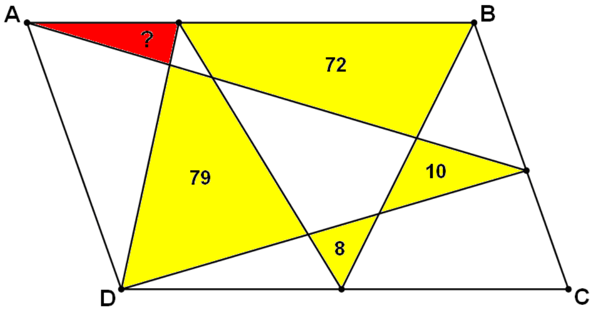
¿Cuál es el área, en cm^2, de la zona común de los dos rectángulos?

(A) 12 (B) 13,5 (C) 14 (D) 15 (E) 16

Canguro N5 2020 #23, Cangur B1 2020 #24

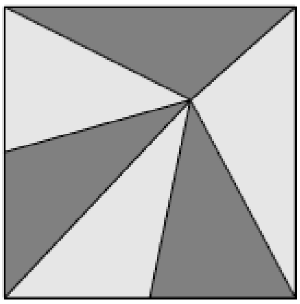
5.4.7 D

En el siguiente paralelogramo ABCD, las áreas de las regiones amarillas son 8, 10, 72 y 79. Determina el área del triángulo rojo.



5.4.8 F

Una vidriera cuadrada de 81 dm^2 está hecha de seis triángulos de igual área (ver figura).



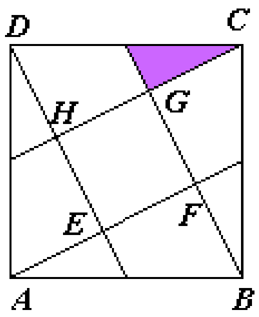
Una mosca está en el punto donde se encuentran los seis triángulos. ¿A qué distancia de la parte inferior de la ventana está la mosca?

(A) 3 dm (B) 5 dm (C) 5,5 dm (D) 6 dm (E) 7,5 dm

Canguro N5 2020 #20, Cangur B1 2020 #20

5.4.9 F

El área del cuadrado ABCD es igual a 5. La figura EFGH es un cuadrado de área igual a 1. Determina el área del triángulo marcado.

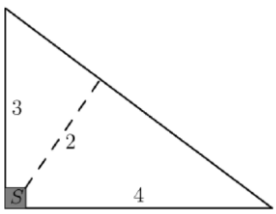


(A) 1/4   (B) 1/3   (C) 1/2   (D) 3/4   (E) 1

Cangur N4 1999 #30

5.4.10 F

Un granjero llamado Pitágoras cultiva un campo en forma de triángulo rectángulo, con catetos de longitud 3 y 4. En la esquina que forma un ángulo recto ha dejado sin cultivar un pequeño cuadrado S cuya forma, desde el aire, se asemeja al símbolo de ángulo recto. Cultiva el resto del campo. La menor distancia entre S y la hipotenusa es 2. Determina la fracción cultivada del campo.

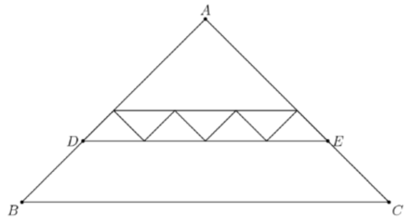


(A) $\frac{25}{27}$ (B) $\frac{26}{27}$ (C) $\frac{73}{75}$ (D) $\frac{145}{147}$ (E) $\frac{74}{75}$

AMC 12A 2018 #17

5.4.11 F

Todos los triángulos que parecen en el esquema inferior son semejantes al triángulo isósceles ΔABC, con $AB = AC$. Cada uno de los 7 triángulos pequeños tiene área 1, y ΔABC tiene área 40. Determina el área del trapecio DBCE.

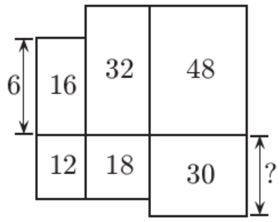


(A) 16   (B) 18   (C) 20   (D) 22   (E) 24

AMC 12A 2018 #8

5.4.12 MF

La imagen muestra seis rectángulos. El rectángulo superior izquierdo tiene una altura de 6 cm. Los números dentro los rectángulos indican sus áreas en cm2. Determina la altura del rectángulo del extremo inferior derecho.

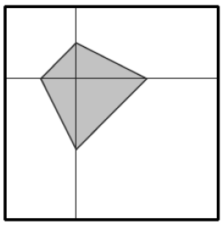


(A) 5 cm   (B) 6 cm   (C) 4 cm   (D) 7,5 cm   (E) 10 cm

Cangur B1 2021 #4, Kangaroo Junior 2021 #4

5.4.13 MF

Un cuadrado grande se divide en dos cuadrados desiguales y dos rectángulos iguales, como se muestra. Los vértices del cuadrilátero sombreado son los puntos medios de los lados de los dos cuadrados. El área del cuadrilátero sombreado es 3. ¿Cuál es el área de la parte no sombreada del cuadrado grande?

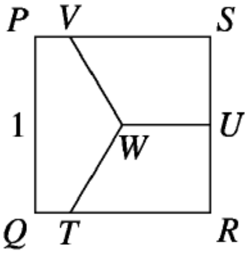


(A) 12   (B) 15   (C) 18   (D) 21   (E) 24

Cangur B2 2022 #12, Kangaroo Student 2022 #14

5.4.14 F

El diagrama muestra el cuadrado PQRS de lado 1. El punto medio de RS está marcado como U y el centro del cuadrado está marcado como W. Los segmentos de línea TW, UW y V W dividen el cuadrado en tres regiones de igual área. ¿Cuál es la longitud de SV?

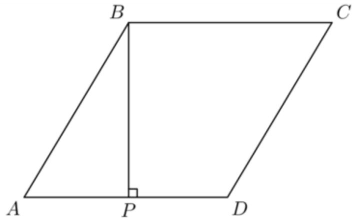


(A) 1/2   (B) 2/3   (C) 3/4   (D) 4/5   (E) 5/6

Cangur B1 2022 #18, Kangaroo Junior 2022 #20

5.4.15 MF

Sea ABCD un rombo y P un punto perteneciente al lado $\overline{AD}$ tal que $BP \perp AD$, $AP = 3$ y $PD = 2$. Determina el área de ABCD.

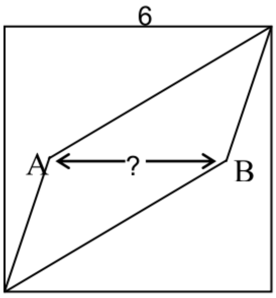


(A) $3\sqrt{5}$ (B) 10 (C) $6\sqrt{5}$ (D) 20 (E) 25

AMC 12B 2022 #2, AMC 10B 2022 #2

5.4.16 F

En un cuadrado de lado 6 cm los puntos A y B están situados en la paralela media (ver la figura). Se unen A y B con los vértices, tal como se indica en la figura, y el cuadrado queda dividido en tres partes de la misma área. ¿Cuál es la longitud del segmento AB?

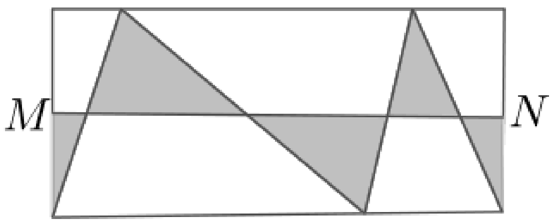


(A) 3,6 cm (B) 3,8 cm (C) 4,0 cm (D) 4,2 cm (E) 4,4 cm

Canguro N3 2004 #20, Cangur N2 2004 #20, Kangaroo Cadet 2004 #20

5.4.17 F

Los puntos M y N son los puntos medios de dos lados opuestos del triángulo de la figura. ¿Qué fracción del área del rectángulo es de color gris?

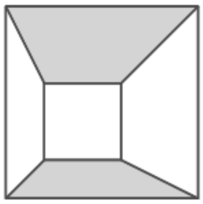


(A) 1/6 (B) 1/5 (C) 1/4 (D) 1/3 (E) 1/2

Cangur B1 2023 #14, Canguro N5 2023 #14

5.4.18 F

El lado del cuadrado grande la figura mide 10 cm y el del pequeño 4 cm. Los lados de los dos cuadrados son paralelos. Determina el porcentaje del área sombreada respecto del área del cuadrado grande.

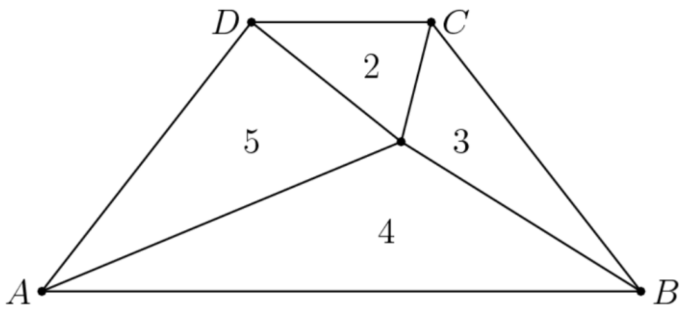


(A) El 30%   (B) El 40%   (C) El 42%   (D) El 45%   (E) No hay suficiente información para determinarlo.

Cangur B1 2023 #4, Canguro N5 2023 #4

5.4.19 M

Sea ABCD un trapecio isósceles con bases paralelas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ con $AB > CD$. Los segmentos desde un punto del interior de ABCD a los vértices dividen el trapecio en cuatro triángulos cuyas áreas son 2, 3, 4 y 5, empezando en el triángulo con base $\overline{CD}$ y avanzando en el sentido horario, tal y como se muestra en el diagrama. Determina la razón AB/CD.



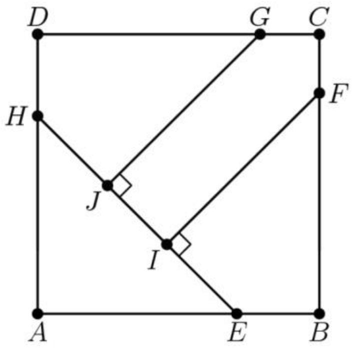
(A) 3   (B) $2+\sqrt{2}$ (C) $1+\sqrt{6}$ (D) $2\sqrt{3}$ (E) $3\sqrt{2}$

AMC 12B 2021 #17

5.5 Problemas con figuras poligonales.

5.5.1 D

En un cuadrado ABCD, los puntos E y H pertenecen a $\overline{AB}$ y $\overline{DA}$, respectivamente, y $AE = AH$. Los puntos F y G pertenecen a $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, y los puntos I y J pertenecen a $\overline{EH}$ de forma que $\overline{FI} \perp \overline{EH}$ y $\overline{GJ} \perp \overline{EH}$, tal y como se muestra en la figura:



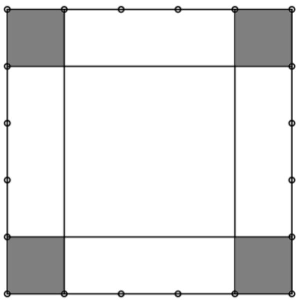
El triángulo ΔAEH, los cuadriláteros BFIE y DHJG y el pentágono FCGJI todos tienen área 1. Determina FI^2.

(A) $\dfrac{7}{3}$ (B) $8-4\sqrt{2}$ (C) $1+\sqrt{2}$ (D) $\dfrac{7}{4}\sqrt{2}$ (E) $2\sqrt{2}$

AMC 12B 2020 #18

5.5.2

Se cortan las esquinas cuadradas de una pulgada de lado de un cuadrado que hace cinco pulgadas de lado. ¿Cuál es el área del cuadrado más grande que se puede trazar en el interior de la figura resultante?

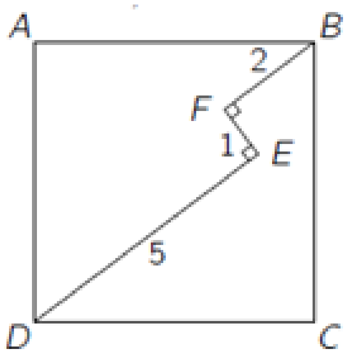


(A) 9 (B) $12\frac{1}{2}$ (C) 15 (D) $15\frac{1}{2}$ (E) 17

AMC 8 2015 #25

5.5.3 M

Una poligonal DEFB, con $DE \perp EF$ y $EF \perp FB$, se encuentra dentro del cuadrado ABCD, como se muestra en la figura. Dado que DE = 5, EF = 1 y FB = 2, ¿cuál es la longitud del lado del cuadrado?

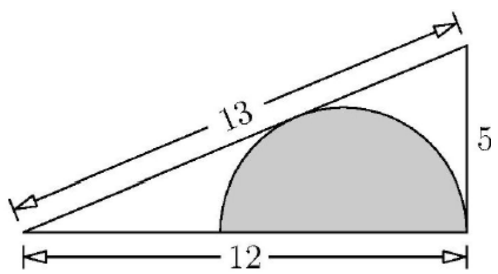


(A) $3\sqrt{2}$ (B) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{11}{2}$ (D) $5\sqrt{2}$ (E) ninguno de los anteriores

Canguro N6 2019 #27, Cangur B2 2019 #27

5.5.4 M

En el esquema se muestra un triángulo rectángulo con lados 5, 12 y 13. Determina el radio de la semicircunferencia inscrita.



(A) 7/3 (B) 10/3 (C) 12/3 (D) 13/3 (E) 17/3

Kangaroo Junior 2012 #15

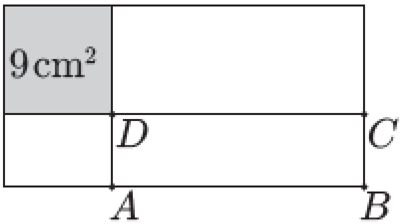
5.5.5 F

Sea ABCDEF un hexágono equiangular tal que $AB = 6$, $BC = 8$, $CD = 10$, $DE = 12$. Denotamos por d el diámetro de la circunferencia más grande que podemos trazar en el interior del hexágono. Determina d^2.

AIME I 2018 #8

5.5.6 MF

Un rectángulo con perímetro 30 cm se divide en cuatro partes por una línea vertical y una línea horizontal. Una de las partes es un cuadrado de área 9 cm^2, como se muestra en la figura.



¿Cuál es el perímetro del rectángulo ABCD?

(A) 21cm (B) 14 cm (C) 16 cm (D) 24 cm (E) 18 cm

Cangur B1 2021 #8, Kangaroo Junior 2021 #8

5.5.7 MF **Problema solucionado paso a paso en vídeo .**

Sea ABCD un trapecio isósceles con lados paralelos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ con $BC < AD$ y $AB = CD$. Sea P un punto del plano tal que $PA = 1$, $PB = 2$, $PC = 3$ y $PD = 4$. Determina BC / AD .

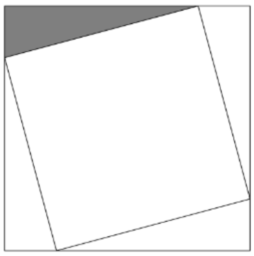
(A) 1/4 (B) 1/3 (C) 1/2 (D) 2/3 (E) 3/4

AMC 12A 2022 #20, AMC 10A 2022 #23

Solución: https://youtu.be/Bi5j4OtJBz8

5.5.8 MF

Un cuadrado de área 2 está inscrito en un cuadrado de área 3, creando cuatro triángulos congruentes, tal y como se muestra en la imagen. Determina la razón del lado corto al lado largo del triángulo sombreado.



(A) 1/5 (B) 1/4 (C) $2-\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (E) $\sqrt{2}-1$

AMC 12A 2023 #9

6 Circunferencias.

6.1 Ángulos inscritos en una circunferencia.

Resumen teórico.

★57 La mediatriz de toda cuerda de una circunferencia pasa por su centro.

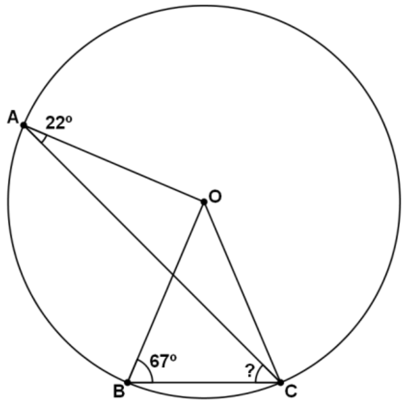
★58 Teorema del ángulo central.
En una circunferencia, el ángulo correspondiente al centro es el doble del correspondiente a la circunferencia, cuando los ángulos tienen como base la misma circunferencia.

★59 Dos ángulos inscritos en una circunferencia abarcando cuerdas congruentes serán congruentes.

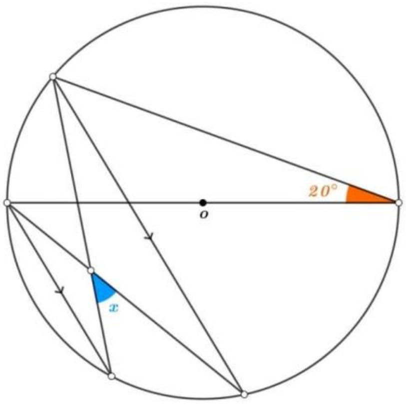
★60 Teorema de Tales.
Dada una circunferencia de diámetro $\overline{AB}$, todo ángulo $\angle ACB$ será recto si y sólo si está inscrito en dicha circunferencia.

6.1.1 F

Determina el ángulo indicado:

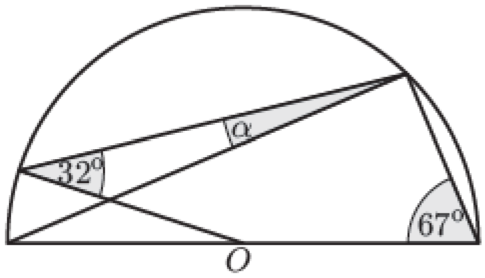


6.1.2 F



6.1.3 [F]

La figura muestra un semicírculo con centro en el punto O. Se conocen dos ángulos, de 32º y 67º. Determina el ángulo α.



(A) 16º (B) 11º (C) 9º (D) 17º 30’ (E) 18º

Cangur E4 2021 #22, Cangur B1 2021 #16 , Cangur E3 2021 #22

6.1.4 [M]

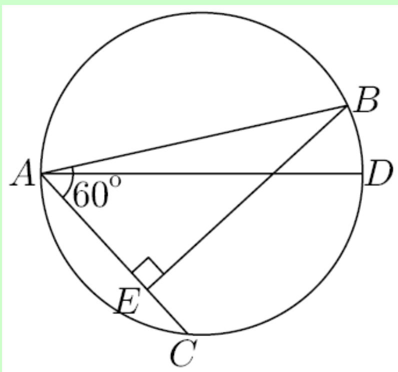
Sea $\overline{AB}$ el diámetro de una circunferencia de radio $5\sqrt{2}$. Sea $\overline{CD}$ una cuerda que corta $\overline{AB}$ en el punto E tal que $BE = 2\sqrt{5}$ y $\angle AEC = 45º$. Determina $CE^2 + DE^2$.

(A) 96 (B) 98 (C) $44\sqrt{5}$ (D) $70\sqrt{2}$ (E) 100

AMC 12B 2020 #12

6.1.5 [M] **Problema solucionado paso a paso en vídeo.**

En una circunferencia de diámetro AD hemos trazado dos cuerdas, AB y AC, de forma que ∠BAC = 60º. Trazamos BE perpendicular a AC y resulta que el segmento EC mide 3 cm. Determina la longitud del segmento BD (no dibujado en la figura).



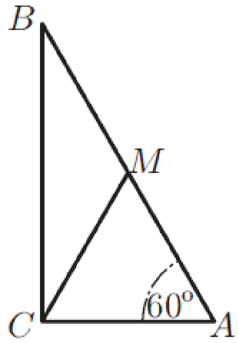
(A) 3√2 (B) 2√3 (C) 2 (D) 3 (E) √3

Cangur B1 2018 #30, Kangaroo Junior 2018 #30

Solución: https://youtu.be/KFJG_eW0rzU

6.1.6 F

El triángulo ABC es rectángulo, M es el punto medio de la hipotenusa y el ángulo $\angle A = 60º$. Determina la medida del ángulo $\angle BMC$.



(A) 105º (B) 108º (C) 110º (D) 120º (E) 125º

Cangur N4 2010 #7, Kangaroo Student 2010 #7

6.2 Recta tangente a una circunferencia.

Resumen teórico.

★61 Diremos que una recta es tangente a una circunferencia cuando tenga un único punto de contacto con ella, al que llamaremos punto de tangencia.

★62 Toda recta tangente es perpendicular al radio en su punto de contacto.

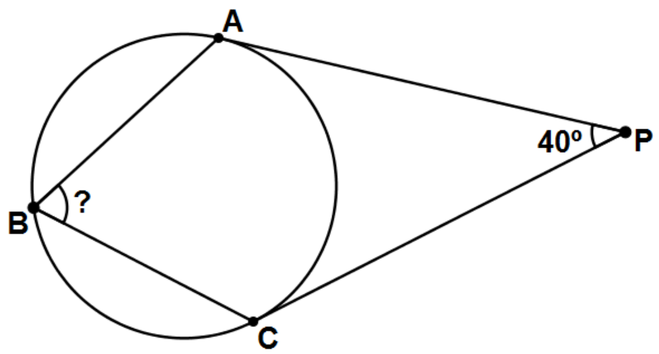
★63 La perpendicular a una recta tangente por su punto de tangencia pasa por el centro de la circunferencia.

★64 Los segmentos tangentes concurrentes en un mismo punto exterior de la circunferencia son congruentes.

★65 Caracterización angular de una recta tangente.
Dado un triángulo ΔABC y un punto P exterior al triángulo, PA es tangente a la circunferencia circunscrita a ΔABC si y sólo si $\angle PAB = \angle ACB$.

6.2.1 MF

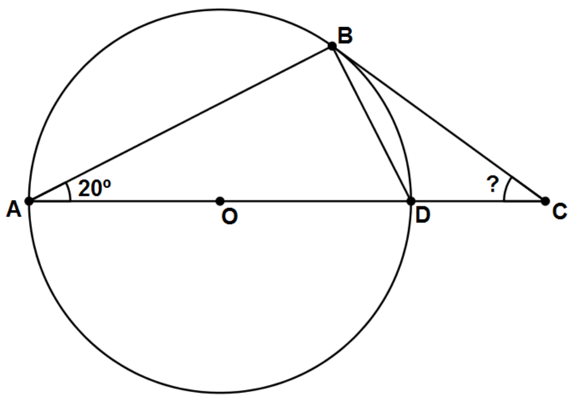
En la figura, A y C son puntos de tangencia. Halle la medida del ángulo inscrito $\angle ABC$ en la circunferencia.



(A) 80º (B) 60º (C) 65º (D) 55º (E) 70º

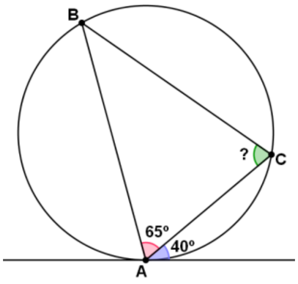
6.2.2 MF

Determina el ángulo $\angle BCA$, donde BC es tangente a la circunferencia.



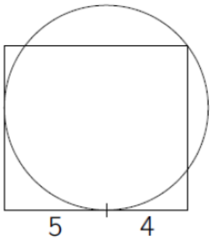
6.2.3 MF

Determina el ángulo indicado



6.2.4 F

Tenemos un rectángulo y una circunferencia, la cual es tangente a dos de los lados del rectángulo y pasa por uno de sus vértices, como se muestra en la figura.



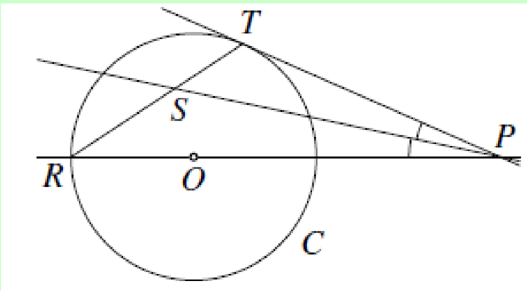
Uno de los puntos de contacto divide a uno de los lados del rectángulo en dos segmentos de longitudes 5 y 4, respectivamente. ¿Cuál es el área del rectángulo?

(A) 27π (B) 25π (C) 72 (D) 63 (E) ninguno de los anteriores

Canguro N6 2020 #19, Cangur B2 2020 #19

6.2.5 F **Problema solucionado paso a paso en vídeo.**

En la figura, PT es tangente a una circunferencia C de centro O y PS es la bisectriz del ángulo ∠TPR.



Calcular la medida del ángulo ∠TSP.

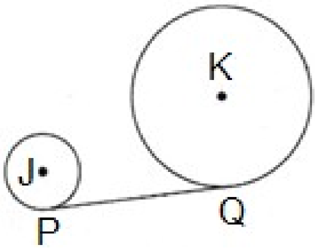
(A) 30º (B) 45º (C) 60º (D) 75º (E) Depende de la posición del punto P

Canguro N5 2014 #27, Cangur N3 2014 #27, Kangaroo Junior 2014 #28

Solución: https://youtu.be/mC9lDdWLmNY

6.2.6 MF

En la figura, el punto J es el centro de la circunferencia de radio 5 cm y K es el centro de la circunferencia de radio 12 cm. La distancia de J a K es 25 cm. El segmento PQ es tangente a ambas circunferencias, como se ve en la figura.



La longitud de PQ, en cm, es

(A) 13   (B) 18   (C) 20   (D) 24   (E) 25

Canguro N4 2020 #27

6.2.7 MF

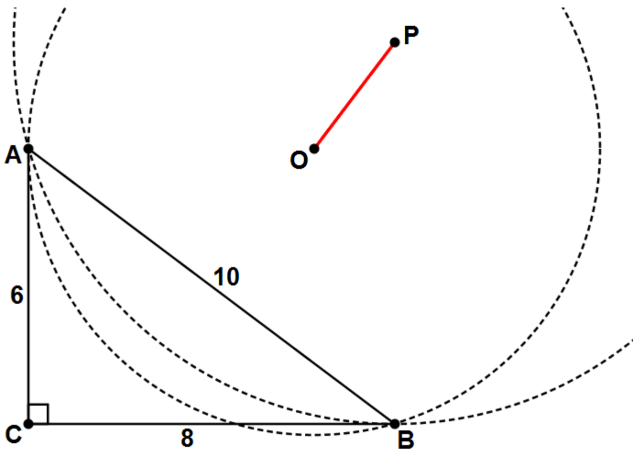
Consideremos dos circunferencias concéntricas de radio 17 y 19. La circunferencia mayor tiene una cuerda, la mitad de la cual está en el interior de la circunferencia menor. Determina la longitud de la cuerda en la circunferencia mayor.

(A) $12\sqrt{2}$ (B) $10\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{17\cdot 19}$ (D) 18   (E) $8\sqrt{6}$

AMC 12A Fall 2021 #11

6.2.8 M

Sea ΔABC un triángulo rectángulo con lados $BC=6$, $AC=8$ y $AB=10$. Trazamos una circunferencia centrada en O tangente a BC por B y que pasa por A, y una circunferencia centrada en P tangente a AC por A y que pasa por B. Determina OP.

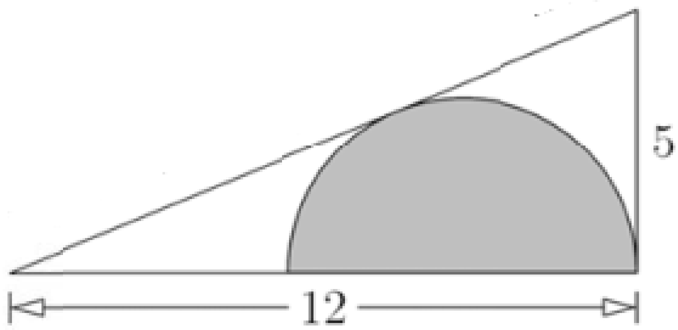


(A) 23/8   (B) 29/10   (C) 35/12   (D) 73/25   (E) 3

AMC 12B Fall 2021 #22

6.2.9 F

La figura muestra un triángulo rectángulo de catetos 5 cm y 12 cm



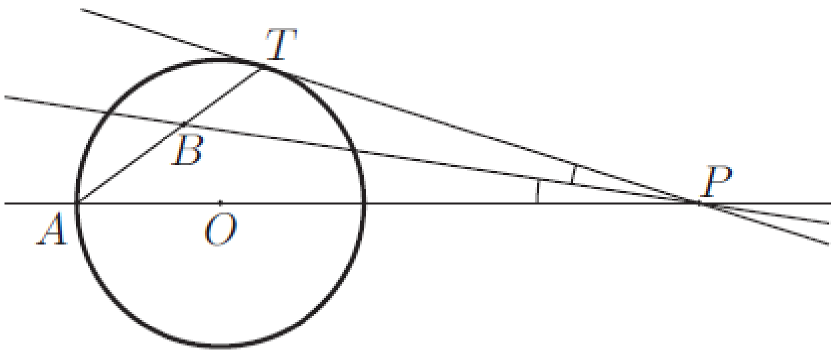
¿Cuántos cm mide el radio del semicírculo inscrito?

(A) 7/3 (B) 10/3 (C) 12/3 (D) 13/3 (E) 17/3

Canguro N5 2012 #15, Cangur N3 2012 #15, Kangaroo Junior 2012 #17

6.2.10 F

En la figura, la recta PT es tangente a la circunferencia de centro O, y PB es la bisectriz del ángulo ∠TPA. Determina el ángulo ∠ABP.



(A) 120º (B) 125º (C) 135º (D) 140º (E) Depende de la posición del punto P

Cangur N3 2014 #27, Kangaroo Junior 2014 #28

6.2.11 F

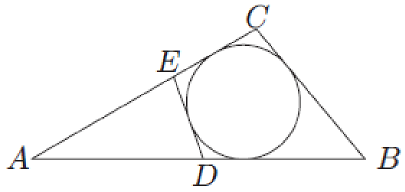
Los lados PQ, QR, RS, ST, TU, y UP de un hexágono son tangentes a una circunferencia inscrita. Las longitudes de los lados PQ, QR, RS, ST y TU son 4, 5, 6, 7 y 8, respectivamente. ¿Cuánto mide el lado UP?

(A) 9 (B) 8 (C) 7 (D) 6 (E) No se puede calcular a partir de esos datos

Cangur N4 2011 #26, Canguro N6 2011 #18, Kangaroo Student 2011 #18

6.2.12 F

Se inscribe un círculo en el triángulo ABC (ver figura), y |AC| = 5, |AB| = 6, |BC| = 3. El segmento ED es tangente al círculo. El perímetro del triángulo ADE es

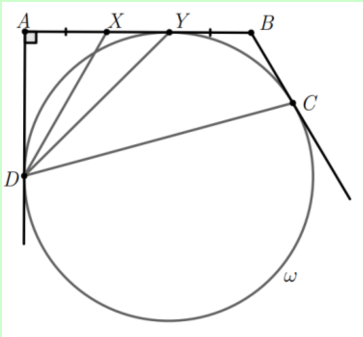


(A) 7   (B) 4   (C) 9   (D) 6   (E) 8

Canguro N4 2008 #25, Cangur N4 2008 #25, Kangaroo Student 2008 #25

6.2.13 F **Problema solucionado paso a paso en vídeo**

En la siguiente figura tenemos $AX = BY$. Demuestra que $\angle XDA = \angle CDY$.

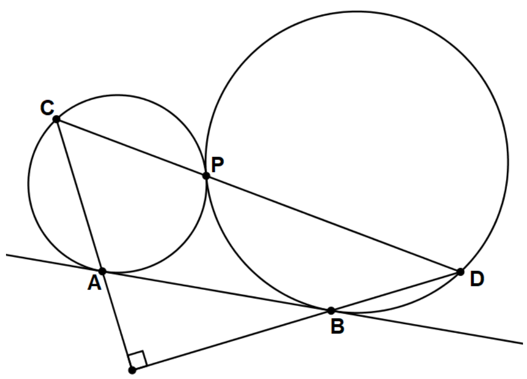


IGO 2022 Intermediate level #1

Solución: https://youtu.be/4AXu5DnC-z4

6.2.14 F

Dos circunferencias S_1 y S_2 son tangentes en P. Una recta tangente común, que no pasa por P, toca S_1 en A y S_2 en B. Sean C y D puntos en S_1 y S_2, respectivamente, exteriores al triángulo APB de forma que P pertenece a la recta CD. Demuestra que AC es perpendicular a BD.



BMO 2019 Round 1 #3

6.3 Área y perímetro de figuras circulares.

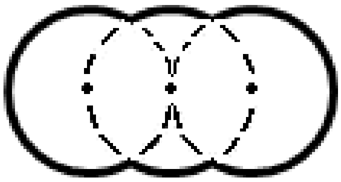
Resumen teórico.

★66 Área y perímetro de la circunferencia.

$$A = \pi r^2 \ , \ l = 2\pi r$$

6.3.1MF

La figura de la derecha está construida con arcos de tres circunferencias iguales de radio R, que tienen sus centros alineados. La circunferencia del medio pasa por los centros de las otras dos, como se muestra. ¿Cuál es el perímetro de la figura?

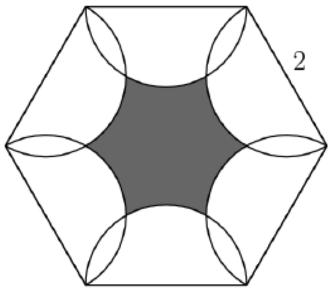


(A) $\frac{10\pi R}{3}$ (B) $\frac{5\pi R}{3}$ (C) $\frac{2\pi R\sqrt{3}}{3}$ (D) $2\pi R\sqrt{3}$ (E) $4\pi R$

Canguro N5 2019 #17, Cangur B1 2019 #17

6.3.2 M

La siguiente figura representa seis semicírculos en el interior de un hexágono regular de lado 2, de forma que los diámetros de los semicírculos coinciden con los lados del hexágono. Determina el área de la región sombreada (el interior del hexágono pero fuera de los semicírculos).

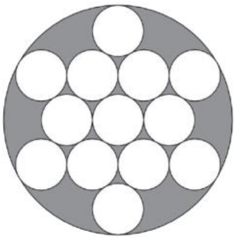


(A) $6\sqrt{3} - 3\pi$ (B) $\frac{9\sqrt{3}}{2} - 2\pi$ (C) $\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}$ (D) $3\sqrt{3} - \pi$ (E) $\frac{9\sqrt{3}}{2} - \pi$

AMC 12B 2020 #11

6.3.3 M

En la siguiente figura se muestran 13 círculos de radio 1 en el interior de un círculo más grande. Todos los puntos de corte son puntos de tangencia. Determina el área de la región sombreada, que se encuentra en el interior del círculo mayor y en el exterior de los círculos de radio 1.

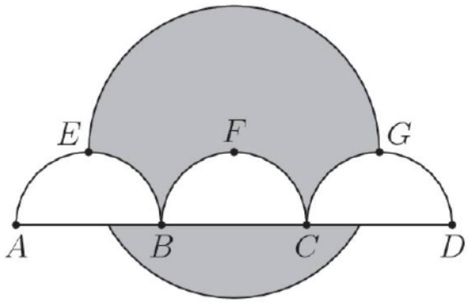


(A) $4\pi\sqrt{3}$ (B) 7π (C) $\pi\left(3\sqrt{3}+2\right)$ (D) $10\pi\left(\sqrt{3}-1\right)$ (E) $\pi\left(\sqrt{3}+6\right)$

AMC 12A 2019 #10

6.3.4 F

Como se muestra en la figura, un segmento $\overline{AD}$ se divide en tres segmentos iguales mediante los puntos B y C, de forma que $AB = BC = CD = 2$. Trazamos tres semicírculos de radio 1, AEB. BFC y CGD, con sus diámetros en $\overline{AD}$, que son tangentes a la recta EG en E, F y G, respectivamente. Un círculo de radio 2 tiene su centro en F.



El área de la región sombreada en la figura, interna de este círculo pero externa a los tres semicírculos, se puede expresar de la forma

$$\frac{a}{b}\cdot\pi-\sqrt{c}+d$$

Donde a, b, c y d son enteros positivos y a y b son coprimos. Determina $a+b+c+d$.

(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

AMC 12B 2019 #15

6.3.5 F

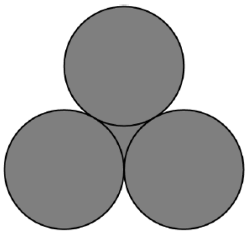
Supongamos que un círculo tiene una cuerda de longitud 10, y que la distancia del centro del círculo a la cuerda es 5. ¿Cuál es el área del círculo?

(A) 25π (B) 50π (C) 75π (D) 100π (E) 125π

AMC 12B 2018 #4

6.3.6 M

Sean tres circunferencias de radio 2 mutuamente tangentes. Determina el área rotal de los círculos y de la región interior delimitada por ellos, tal y como aparece en la figura:

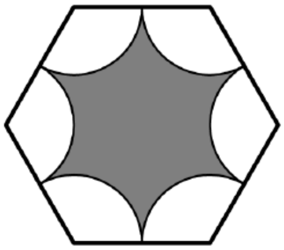


(A) $10\pi + 4\sqrt{3}$ (B) $13\pi - \sqrt{3}$ (C) $12\pi + \sqrt{3}$ (D) $10\pi + 9$ (E) 13π

AMC 10B 2012 #16

6.3.7 M

Sea un hexágono regular de lado 6. Trazamos arcos de radio 3 con centro en cada uno de estos vértices, creando unos sectores circulares como se muestran en la figura. Determina el área de la región sombreada de la figura, interior del hexágono pero exterior a los sectores circulares.

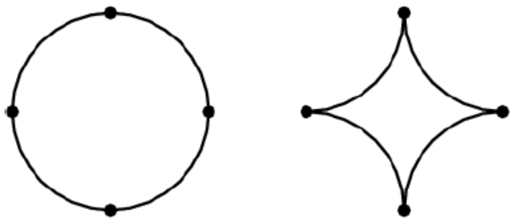


(A) $27\sqrt{3} - 9\pi$ (B) $27\sqrt{3} - 6\pi$ (C) $54\sqrt{3} - 18\pi$ (D) $54\sqrt{3} - 12\pi$ (E) $108\sqrt{3} - 9\pi$

AMC 10A 2014 #12

6.3.8 M

Cortamos una circunferencia de radio 2 en cuatro arcos congruentes. Unimos estos cuatro arcos formando la estrella que aparece en la figura. Determina la razón entre el área de la estrella y el área de la circunferencia original.

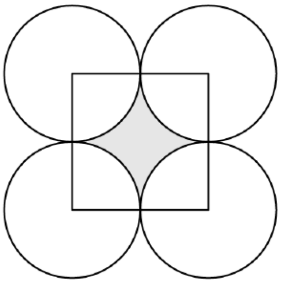


(A) $\frac{4-\pi}{\pi}$ (B) $\frac{1}{\pi}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$ (D) $\frac{\pi-1}{\pi}$ (E) $\frac{3}{\pi}$

AMC 8 2012 #24

6.3.9 M

En la siguiente figura se muestran cuatro circunferencias de radio 3, cuyos centros forman un cuadrado. Determina el valor más aproximado a su área.

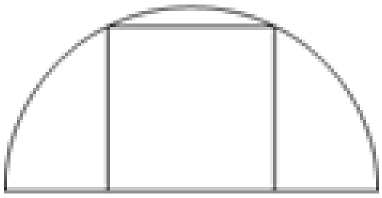


(A) 7.7   (B) 12.1   (C) 17.2   (D) 18   (E) 27

AJHSME 1992 #24

6.3.10 MF

Un cuadrado tiene dos de sus vértices en una semicircunferencia y los otros dos en el diámetro de la misma, como se muestra en la figura.



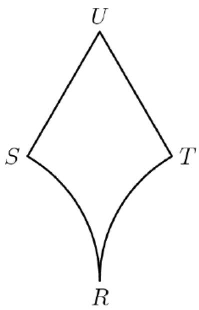
El radio de la circunferencia es de 1 cm. ¿Cuál es el área del cuadrado?

(A) 4/5 cm^2 (B) $\pi/4$ cm^2 (C) 1 cm^2 (D) 4/3 cm^2 (E) $2/\sqrt{3}$ cm^2

Canguro N5 2019 #21, Cangur B1 2019 #21

6.3.11 M

En la siguiente figura, $\overline{US}$ y $\overline{UT}$ son segmentos de longitud 2, y $\angle TUS = 60^\circ$. Los arcos SR y TR son ambos un sexto de una circunferencia de radio 2. Determina el área de la región interior de la figura.

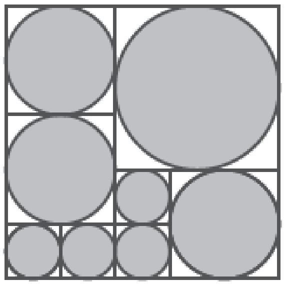


(A) $3\sqrt{3}-\pi$ (B) $4\sqrt{3}-\dfrac{4\pi}{3}$ (C) $2\sqrt{3}$ (D) $4\sqrt{3}-\dfrac{2\pi}{3}$ (E) $4+\dfrac{4\pi}{3}$

AMC 8 2017 #25

6.3.12 MF

Un cuadrado grande se divide en cuadrados más pequeños, como se muestra. Un círculo sombreado está inscrito dentro de cada uno de los cuadrados más pequeños.

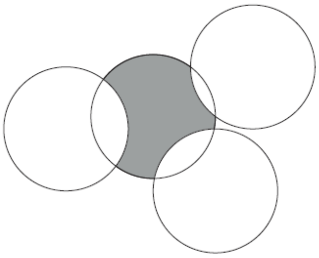


(A) $2\pi/9$ (B) $5\pi/16$ (C) $3/4$ (D) $3/\pi$ (E) $\pi/4$

Cangur B2 2021 #5, Kangaroo Student 2021 #4

6.3.13 MF

Cuatro círculos, cada uno de radio 1, se intersecan como se muestra.



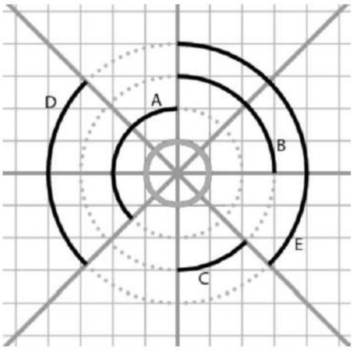
¿Cuál es el perímetro de la región sombreada?

(A) π (B) $3\pi/2$ (C) $5\pi/3$ (D) 2π (E) π^2

Cangur B2 2022 #5, Kangaroo Student 2022 #7

6.3.14 F

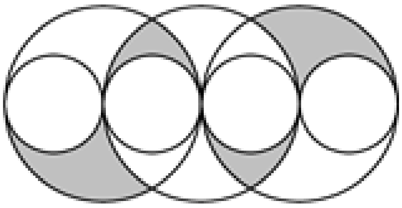
Cuatro rectas se cortan formando ocho ángulos iguales. ¿Cuál arco negro tiene la misma longitud que el círculo pequeño gris?



Cangur B2 2022 #9, Kangaroo Student 2022 #11

6.3.15 F

La figura muestra tres círculos grandes e iguales y cuatro círculos pequeños, también todos iguales. El radio de los círculos pequeños es 1 cm. Determina la medida, en centímetros cuadrados, del área gris.

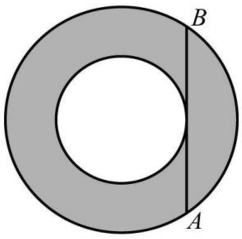


(A) π (B) 2π (C) 3π (D) 4π (E) 6π

Cangur B1 2022 #7, Kangaroo Junior 2022 #13

6.3.16 F

En el dibujo, la cuerda AB es tangente a la circunferencia concéntrica de menor radio. Si AB = 16, ¿cuál es el área de la región gris?

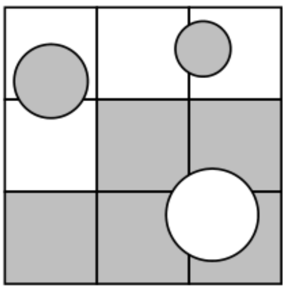


(A) 32π (B) 63π (C) 64π (D) 32π (E) 256π

Canguro N6 2010 #12, Cangur N4 2010 #12, Kangaroo Student 2010 #12

6.3.17 MF

Un cuadrado de 30 cm de lado se divide en nueve cuadrados pequeños iguales. El cuadrado grande contiene tres círculos de radio 3 cm, 4 cm y 5 cm, tal y como se ve en la figura:



¿Cuál es el área de la parte gris de la figura?

(A) 400 cm² (B) $(400+50\pi)$ cm² (C) $(500-25\pi)$ cm² (D) 500 cm² (E) $(500+25\pi)$ cm²

Cangur B1 2023 #19, Canguro N5 2023 #19

6.4 Problemas con figuras circulares.

6.4.1 MF

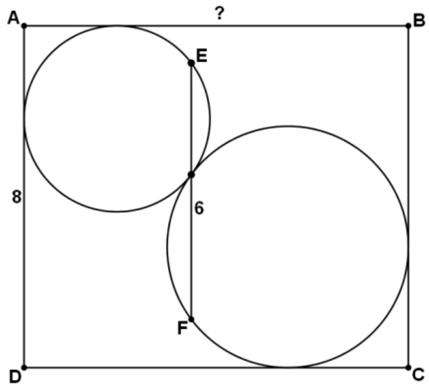
Se marcan dos puntos en un disco que gira alrededor de su centro. Uno de ellos está 3 cm más alejado que el otro del centro del disco, y se mueve a una velocidad constante que es 2,5 veces mayor que la del otro. ¿Cuál es la distancia desde el centro del disco hasta ese punto más alejado?

(A) 10 cm (B) 9 cm (C) 8 cm (D) 6 cm (E) 5 cm

Canguro N5 2019 #22, Cangur B1 2019 #22

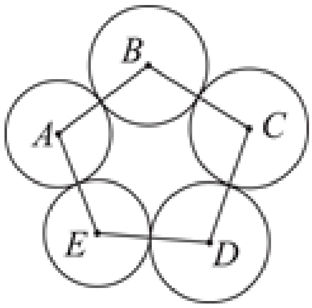
6.4.2 F

En la siguiente figura, $AD = 8$, $EF = 6$ y $EF \,//\, AD$. Determina AB.



6.4.3 F

Tenemos cinco círculos con centros en los puntos A, B, C, D y E, respectivamente, tal y como se muestra en la imagen.



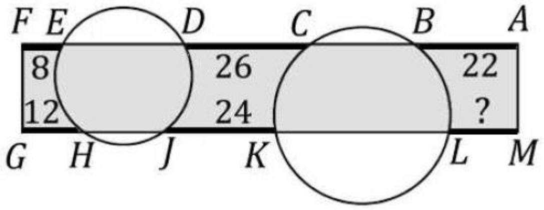
Trazamos los segmentos que conectan los centros de los círculos adyacentes. Sabemos que AB = 16 cm, BC = 14 cm, CD = 17 cm, DE = 13 cm i AE = 14 cm. ¿Qué punto es el centro del radio mayor?

(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

Canguro B1 2022 #25, Kangaroo Junior 2022 #28

6.4.4 F

Dos círculos cortan un rectángulo AFMG, como se muestra. Los segmentos de línea fuera de los círculos tienen longitud AB = 22, CD = 26, EF = 8, GH = 12 i JK = 24. Determina la longitud de LM.

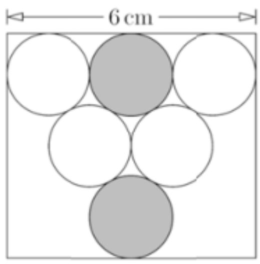


(A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 18 (E) 20

Cangur B2 2022 #26, Kangaroo Student 2022 #30

6.4.5 F

El rectángulo de la figura, de 6 cm de largo, contiene un “triángulo equilátero" de círculos tangentes, como se ve en la figura.



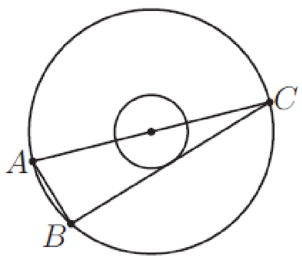
¿Cuál es la menor distancia entre los dos círculos grises?

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $2\sqrt{3}-2$ (D) $\pi/2$ (E) 2

Canguro N5 2012 #13, Kangaroo Junior 2012 #15, Cangur N3 2012 #13

6.4.6 F

Los radios de dos círculos concéntricos están en la proporción 1:3



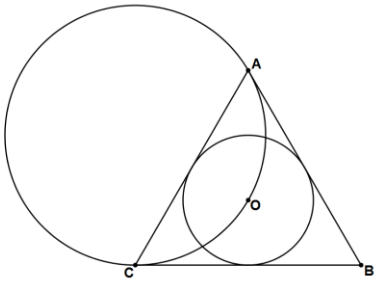
AC es un diámetro del círculo grande; BC es una cuerda tangente al círculo pequeño y la longitud del segmento AB es 12. El radio del círculo grande es

(A) 13 (B) 18 (C) 21 (D) 24 (E) 26

Cangur N4 2014 #13, Canguro N6 2014 #13, Kangaroo Student 2014 #13

6.4.7 F

Sea ΔABC un triángulo equilátero de lado 6, y sea O el centro de su circunferencia inscrita. Determina el área de la circunferencia que pasa por A, O y C.

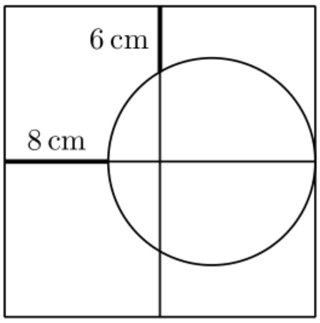


(A) 9π (B) 12π (C) 18π (D) 24π (E) 27π

AMC 12B Fall 2021 #9

6.4.8 F

El cuadrado grande del esquema se divide en cuatro cuadrados más pequeños. La circunferencia es tangente al lado derecho del cuadrado grande en su punto medio. Determina la longitud del cuadrado grande.

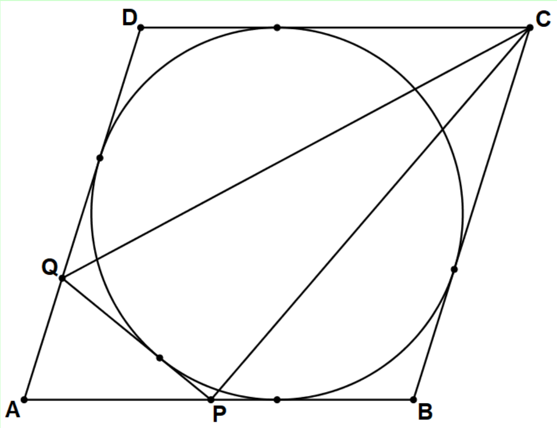


(A) 18 cm (B) 20 cm (C) 24 cm (D) 28 cm (E) 30 cm

Cangur B2 2023 #26, Canguro N6 2023 #26

6.4.9 [D] Problema solucionado paso a paso en vídeo

Sea una circunferencia inscrita en un rombo ABCD. Sean P y Q puntos en los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$, respectivamente, de forma que $\overline{PQ}$ es tangente a la circunferencia. Demuestra que el área del triángulo CPQ es constante, independientemente de los puntos P y Q tomados.



Canadian Mathematical Olympiad 2020 #2

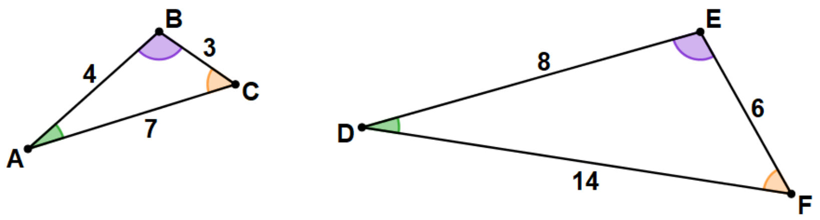
Solución: https://youtu.be/uCckJfNZugo

7 Semejanza y congruencia.

7.1 Semejanza y congruencia de triángulos.

Resumen teórico.

¶67 Definición. Triángulos semejantes.
Diremos que dos triángulos son semejantes cuando tengan sus ángulos respectivamente iguales y sus lados correspondientes sean proporcionales. Para indicar que dos figuras son semejantes utilizaremos el símbolo $\approx$.



En la imagen superior, los dos triángulos son semejantes, $\Delta ACB \approx \Delta DFE$, porque sus ángulos correspondientes son iguales:

$$\angle BAC = \angle EDF \ , \ \angle ACB = \angle DFE \ , \ \angle ABC = \angle DEF$$

y porque, además, sus lados correspondientes son proporcionales:

$$\frac{AC}{DF} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} \ , \ \frac{AB}{DE} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \ , \ \frac{BC}{EF} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

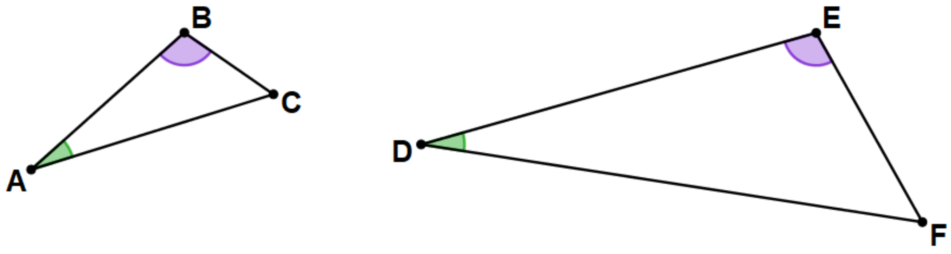
Vale la pena remarcar que cuando escribimos $\Delta ACB \approx \Delta DFE$, los vértices respectivos están en orden: A se corresponde con D, C se corresponde con F y B se corresponde con E.

Al valor común $\frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ se le suele llamar “**razón de semejanza**” entre las dos figuras. En el caso anterior, la razón de semejanza es $\frac{1}{2}$, por lo que decimos que el triángulo de la izquierda es igual al triángulo de la derecha “reducido” a la mitad.

Podemos decir que, en general, dos triángulos semejantes son iguales, solo que uno es más grande que el otro.

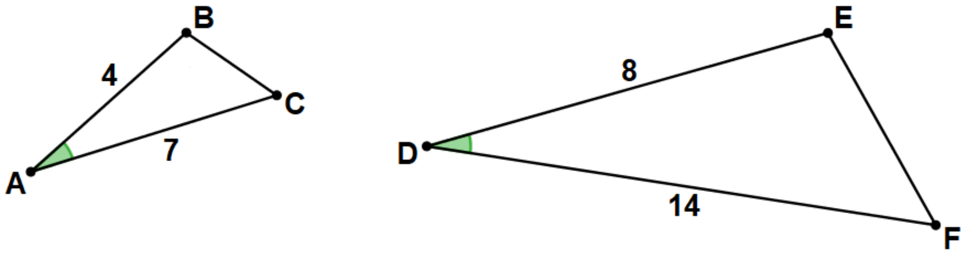
En principio, para verificar si dos triángulos son o no semejantes, tendríamos que comprobar seis condiciones, tres con los ángulos y tres con los lados. Afortunadamente, los tres criterios siguientes nos permiten reducir considerablemente el número de comprobaciones.

¶68 Criterio AA de semejanza.
Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.



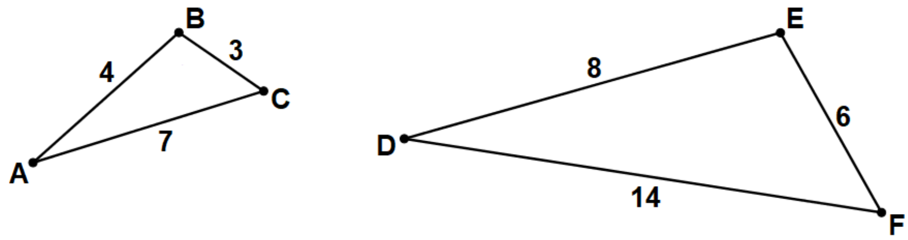
$\Delta ACB \approx \Delta DFE$ porque $\angle BAC = \angle EDF$ y $\angle ABC = \angle DEF$

¶69 Criterio SAS de semejanza.
Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales e iguales el ángulo que forman.



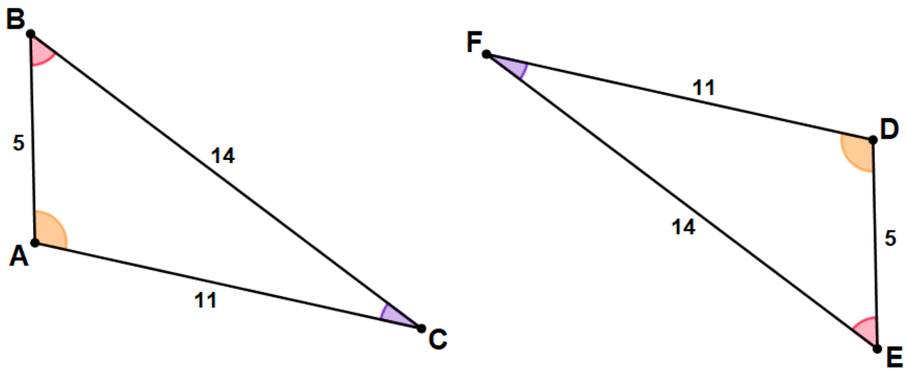
$\Delta ACB \approx \Delta DFE$ porque $\angle BAC = \angle EDF$, $\dfrac{AC}{DF} = \dfrac{7}{14} = \dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

¶70 Criterio SSS de semejanza.
Dos triángulos son semejantes si sus lados son proporcionales.



$\Delta ACB \approx \Delta DFE$ porque $\dfrac{AC}{DF} = \dfrac{7}{14} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{BC}{EF} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

¶71 Definición. Triángulos congruentes.
Diremos que dos triángulos son congruentes cuando tengan sus tres ángulos correspondientes iguales y sus tres lados correspondientes iguales. Así pues, la congruencia es un caso particular de semejanza, es una semejanza con razón de semejanza igual a 1. Para indicar que dos figuras son congruentes utilizaremos el símbolo $\equiv$.



En la imagen superior, los dos triángulos son congruentes, $\Delta ABC \approx \Delta DEF$, porque sus ángulos correspondientes son iguales:

$$\angle BAC = \angle EDF \ , \ \angle ACB = \angle DFE \ , \ \angle ABC = \angle DEF$$

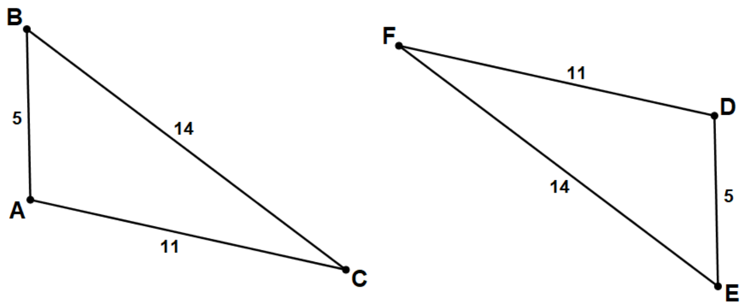
y porque, además, sus lados correspondientes son iguales:

$$AB = DE \ , \ AC = DF \ , \ BC = EF$$

Como en el caso de la semejanza, los tres criterios siguientes nos permiten reducir las comprobaciones para verificar si dos triángulos son o no son congruentes.

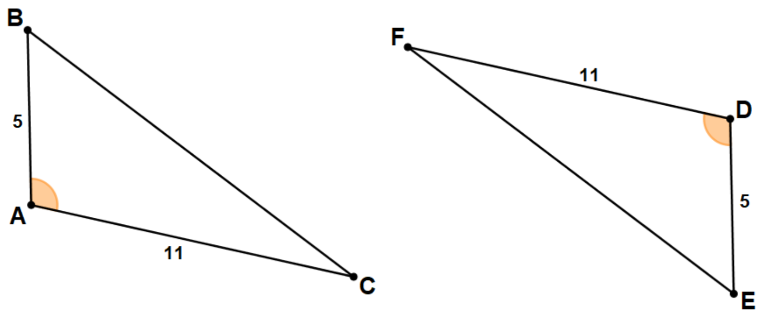
Podemos decir que, desde un punto de vista geométrico, dos triángulos congruentes son idénticos.

¶72 Criterio SSS de congruencia.
Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres lados respectivamente iguales.



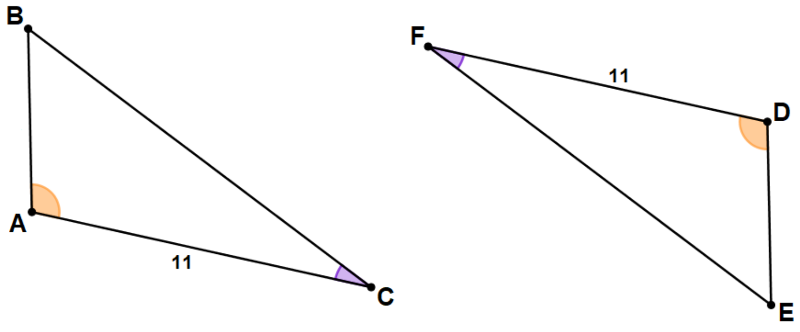
$\Delta ABC \approx \Delta DEF$ porque $AB = DE$, $AC = DF$ y $BC = EF$

¶73 Criterio SAS de congruencia.
Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos respectivamente iguales.



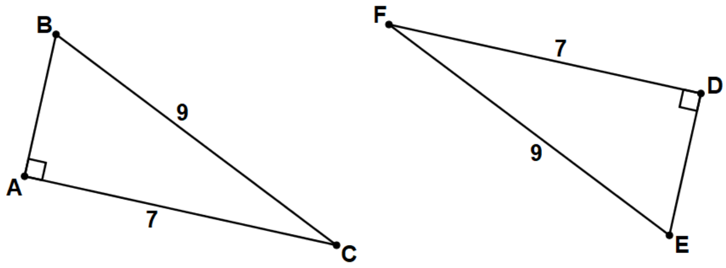
$\Delta ABC \approx \Delta DEF$ porque $AB = DE$, $AC = DF$ y $\angle BAC = \angle EDF$

¶74 Criterio ASA de congruencia.
Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales un lado y los dos ángulos adyacentes a ese lado.



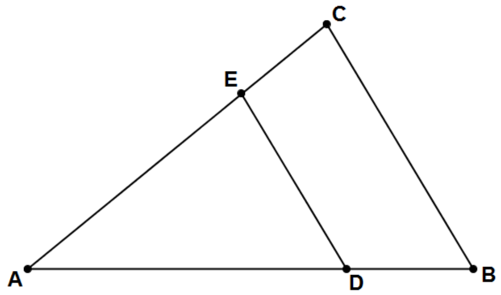
$\Delta ABC \approx \Delta DEF$ porque $AC = DF$, $\angle ACB = \angle DFE$ y $\angle BAC = \angle EDF$

¶**75** Criterio HL de congruencia de triángulos rectángulos.
Dos triángulos rectángulos serán congruentes cuando tengan la hipotenusa y un cateto respectivamente iguales.



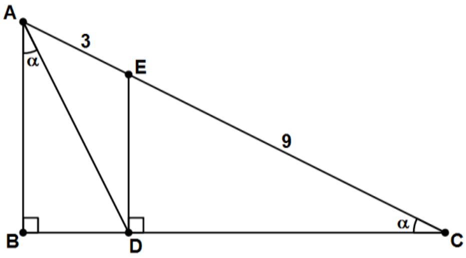
En la imagen superior, los triángulos rectángulos ΔABC y ΔDEF son congruentes porque son iguales sus hipotenusas: $BC = EF = 9$ y son iguales uno de sus catetos respectivos: $AC = DF = 7$.

¶**76** Triángulos en posición de Tales.
Dado un triángulo ΔABC y puntos D en $\overline{AB}$ y E en $\overline{AC}$.
$DE \,//\, BC \Leftrightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$ y en dicho caso los triángulos ΔABC y ΔADE son semejantes.



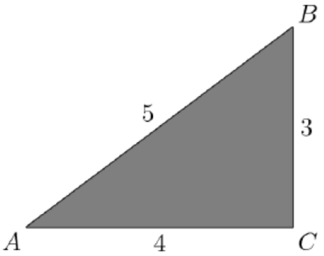
7.1.1 F

Determina el área del triángulo ΔEDC



7.1.2 F

Doblamos un triángulo de papel de longitudes 3, 4 y 5 pulgadas de forma que el punto A coincida con el punto B. ¿Cuál es la longitud en pulgadas del doblez?

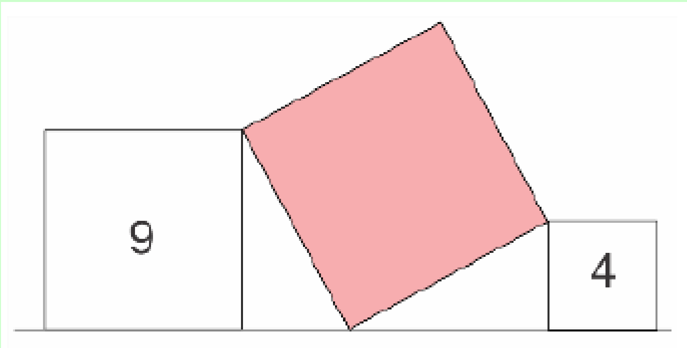


(A) $1+\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\frac{7}{4}$ (D) $\frac{15}{8}$ (E) 2

AMC 12A 2018 #11

7.1.3 F **Problema solucionado paso a paso en vídeo.**

Un cuadrado grande toca otros dos cuadrados, tal y como aparece en la imagen.



Los números que aparecen en los cuadrados pequeños indican sus respectivas áreas. Determina el área del cuadrado grande.

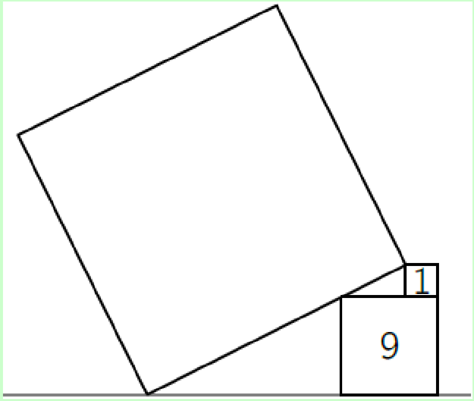
(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

Kangaroo Student 2020 #18

Solución: https://youtu.be/AiLzX2dG8MI

7.1.4 F **Problema solucionado paso a paso en vídeo.**

Se apoya un cuadrado grande en otros dos cuadrados, como se ve en la imagen. Los números en los cuadrados pequeños muestran su área. ¿Cuál es el área del cuadrado grande?



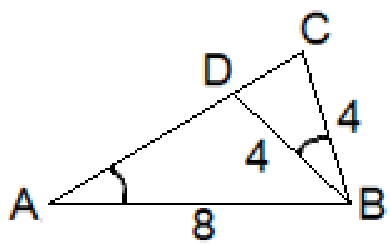
(A) 49 (B) 80 (C) 81 (D) 82 (E) 100

Canguro N6 2020 #17, Cangur B2 2020 #17

Solución: https://youtu.be/nnuwAevj0Eg

7.1.5 MF

En la figura, ∠BAC =∠DBC, DB=CB=4 y AB=8 .



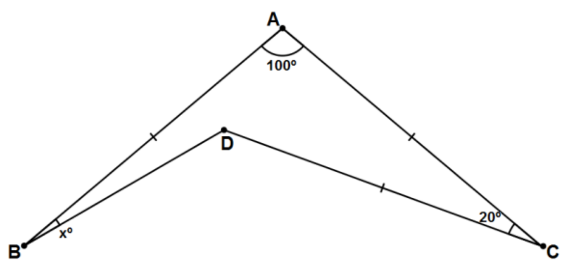
La longitud de AC es

(A) 6 (B) 7 (C) 7,5 (D) 60 (E) 8

Canguro N4 2020 #20

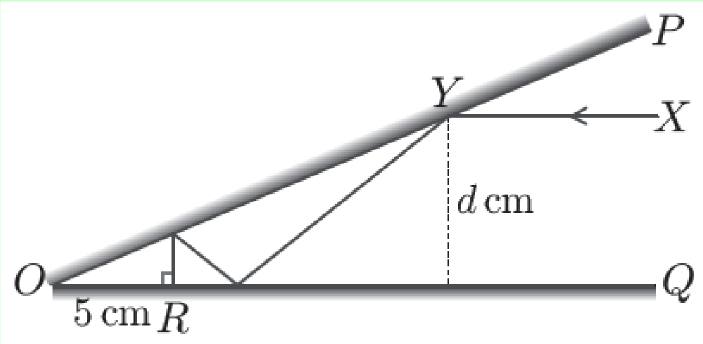
7.1.6 D

Determina el ángulo $\angle ABD$, sabiendo que $AB = AC = CD$, $\angle BAC = 100^{o}$ y $\angle ACD = 20^{o}$.



7.1.7 M **Problema solucionado paso a paso en vídeo.**

Dos espejos planos OP y OQ están inclinados en un ángulo agudo (el diagrama no está a escala). Un rayo de luz XY paralelo a QO refleja OP en Y. El rayo se refleja y golpea el espejo OQ, se refleja de nuevo y golpea el espejo OP y se refleja por tercera vez y golpea el espejo OQ en ángulo recto a R, como se muestra. La distancia OR es 5 cm. El rayo XY está d cm del espejo OQ. Determina d.



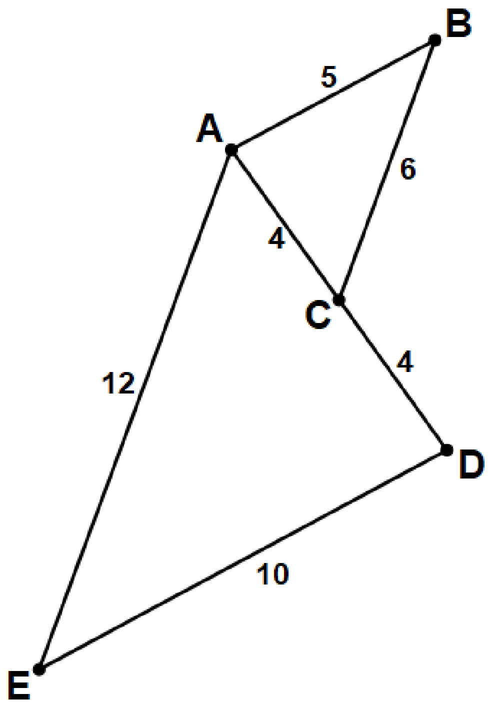
(A) 6 (B) 4 (C) 5 (D) 5,5 (E) 4,5

Cangur B2 2021 #28, Kangaroo Student 2021 #28

Solución: https://youtu.be/sbMQuooM9IA

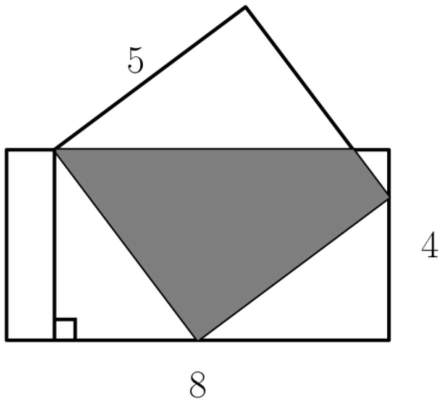
7.1.8 F

En la siguiente figura, demuestra que $AE // BC$ y $AB // DE$.



7.1.9 F

Tenemos un rectángulo con lados de longitud 4 y 8 y un cuadrado de lado 5. Tres de los vértices del cuadrado pertenecen a tres lados diferentes del rectángulo, tal y como se muestra en el siguiente esquema. Determina el área de la región interior común del rectángulo y del cuadrado.

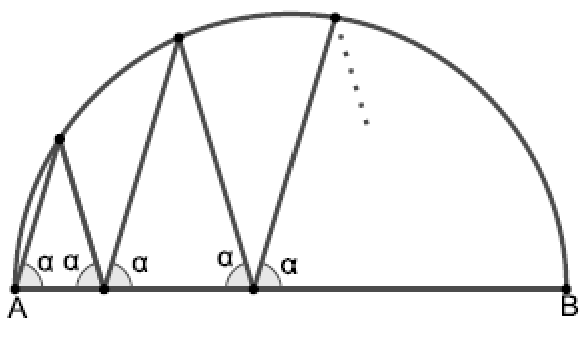


(A) $15\frac{1}{8}$ (B) $15\frac{3}{8}$ (C) $15\frac{1}{2}$ (D) $15\frac{5}{8}$ (E) $15\frac{7}{8}$

AMC 12B 2022 #13, AMC 10B 2022 #16

7.1.10 D

Una línea en zig-zag comienza en el punto A, extremo del diámetro AB de la semicircunferencia de la figura. Cada uno de los ángulos entre la línea en zig-zag y el diámetro AB es igual a α, como se muestra. Después de cuatro vértices en la semicircunferencia, la línea en zig-zag termina en el punto B. ¿Cuánto mide el ángulo α?

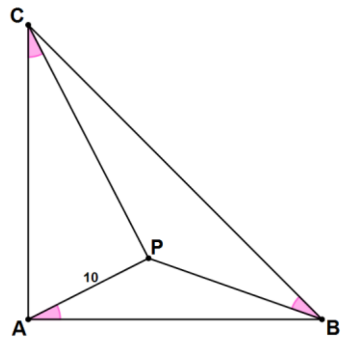


(A) 60° (B) 72° (C) 75° (D) 80° (E) otra respuesta

Canguro N5 2020 #29, Cangur B1 2020 #29

7.1.11

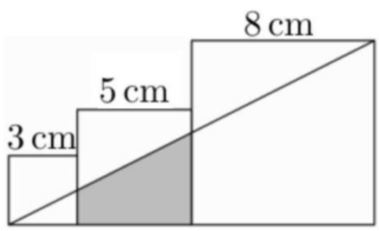
Sea ΔABC un triángulo isósceles con $\angle A = 90º$. Sea P un punto de su interior tal que $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$ y $AP = 10$. Determina el área de ΔABC.



AIME II 2023 #3

7.1.12 F

En la figura se muestran tres cuadrados de lados 3 cm, 5 cm y 8 cm. ¿Cuál es el área del trapecio gris?

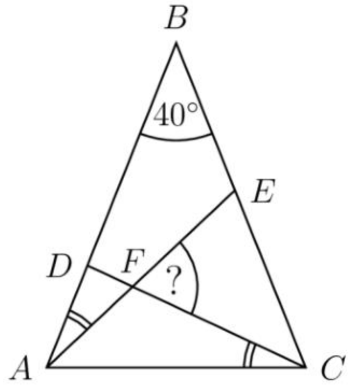


(A) 13 cm² (B) 55/4 cm² (C) 61/4 cm² (D) 65/4 cm² (E) 69/4 cm²

Cangur B1 2023 #12, Canguro N5 2023 #12

7.1.13 F

El triángulo ABC es isósceles con ∠ABC = 40º. Los dos ángulos marcados, ∠EAB y ∠DCA, son iguales. ¿Cuál es el valor del ángulo ∠CFE?

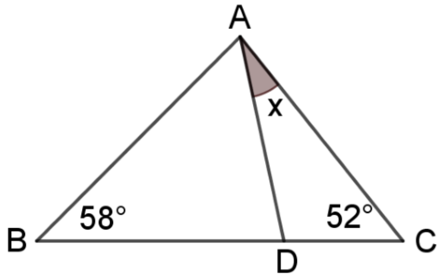


(A) 55º (B) 60º (C) 65º (D) 70º (E) 75º

Canguro N3 2023 #16, Cangur E4 2023 #14

7.1.14 MF

El triángulo ABC tiene $\angle B = 58º$ y $\angle C = 52º$, como se muestra en la figura. El triángulo ABD es semejante al triángulo ABC. ¿Cuántos grados mide el ángulo x? (La figura no está a escala).



(A) 16º (B) 18º (C) 19º (D) 20º (E) 22º

Canguro N4 2023 #12, Cangur E4 2023 #14

7.1.15 M

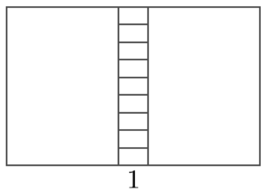
Sea ABCD un cuadrilátero convexo y sea P el punto de corte de las diagonales AC y BD. Supongamos que $\angle DAC = 90º$, $2\angle ADB = \angle ACB$ y $\angle DBC + 2\angle ADC = 180º$. Demuestra que $2AP = BP$.

IGO Intermediate 2018 #2

7.2 Semejanza y congruencia de polígonos.

7.2.1 MF

Un rectángulo se divide en 11 rectángulos tal y como se muestra en la siguiente figura:



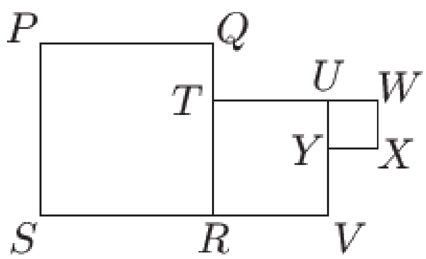
Todos los 11 rectángulos son semejantes al rectángulo grande original. La orientación de los 9 rectángulos más pequeños es la misma que la del original. Si la longitud de la base de los rectángulos pequeños es 1, ¿Cuál es el perímetro del rectángulo grande?

(A) 24 (B) 27 (C) 30 (D) 36 (E) 45

Cangur B2 2022 #20

7.2.2 F

El diagrama muestra tres cuadrados: PQRS, TUV R i UWXY, que se colocan juntos, lado con lado. Los puntos P, T y X están alineados. El área de PQRS es 36 y el área de TUVR es 16. Determina el área del triángulo PXV.

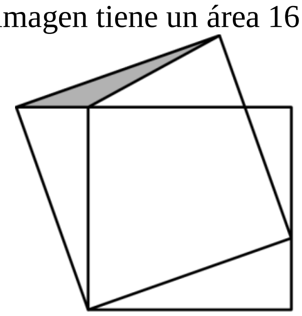


(A) 44/3 (B) 46/3 (C) 16 (D) 18 (E) 53/3

Cangur B2 2021 #20, Kangaroo Student 2021 #20

7.2.3 F

El cuadrado más pequeño de la imagen tiene un área 16 y el triángulo gris tiene área 1.



¿Cuál es el área del cuadrado más grande?

(A) 17 (B) 18 (C) 19 (D) 20 (E) 21

Cangur B1 2021 #25, Kangaroo Junior 2021 #25

8 Geometría analítica de puntos y rectas.

8.1 Puntos en el plano cartesiano.

Resumen teórico.

★77 Distancia entre puntos.

$$\left.\begin{array}{l} A=(a_1,a_2) \\ B=(b_1,b_2) \end{array}\right\} \Rightarrow AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

★78 Punto medio de segmentos.

$$\left.\begin{array}{l} A=(a_1,a_2) \\ B=(b_1,b_2) \end{array}\right\} \Rightarrow M=A+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\left(\frac{a_1+a_2}{2},\frac{b_1+b_2}{2}\right)$$

★79 Fórmula de la lazada o “Shoelace”

Dado un polígono $P_1P_2...P_n$, con $P_k=(x_k,y_k)$, definimos su **área con signo** al número

$$[P_1P_2...P_n]_\pm=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+...+x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1}+x_ny_1-x_1y_n)$$

Si escribimos las coordenadas de los vértices en una matriz $2\times(n+1)$:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & ... & y_n & y_1 \end{pmatrix}$$

La fórmula anterior se reduce a sumar todas las diagonales principales y restar todas las diagonales contrarias:

$$[P_1P_2...P_n]_\pm=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y_1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y_1 \end{pmatrix}$$

Definimos el **área** (o "área sin signo") del polígono como el valor absoluto de su área con signo:

$$[P_1P_2...P_n]=\left|[P_1P_2...P_n]_\pm\right|$$

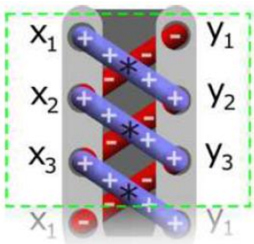
Llamaremos **orientación** del polígono al signo de su área orientada (positiva si los vértices están orientados en el sentido contrario de las agujas del reloj, y negativa si están orientados en el sentido de las agujas del reloj.

Ejemplo:

El área del cuadrilátero de vértices (3,4) , (5,11) , (12,8) , (9,5) y (5,6) será

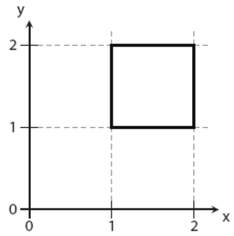
$$A=\frac{1}{2}|3\cdot11+5\cdot8+12\cdot5+9\cdot6+5\cdot4-4\cdot5-11\cdot12-8\cdot9-5\cdot5-6\cdot3|=\frac{60}{2}=30$$

Observación. Esta fórmula también se conoce como “**fórmula de la lazada**” (“Shoelace formula”), por la forma cruzada de asociar coordenadas:

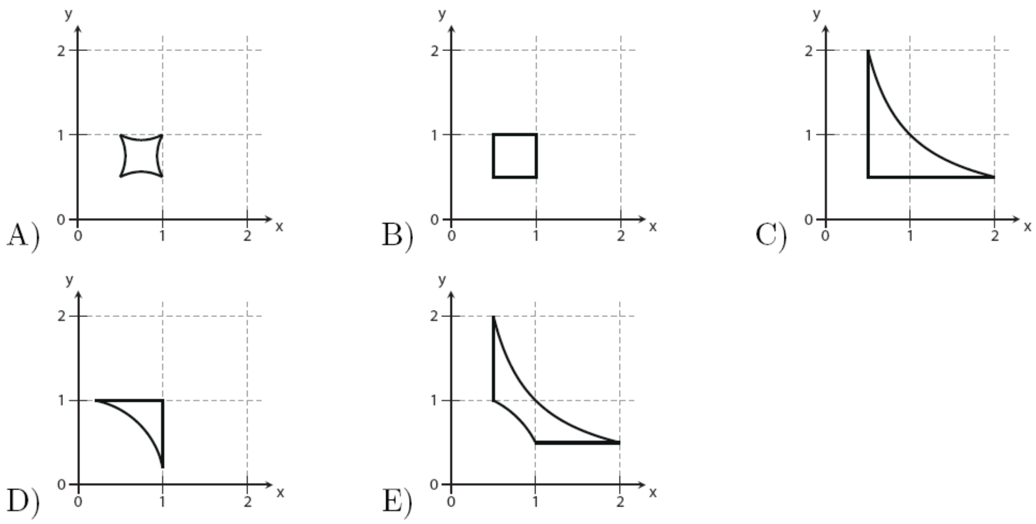


8.1.1

Un cuadrado está situado en un sistema de coordenadas tal y como se muestra en la siguiente figura:



Cada punto (x, y) del cuadrado se transforma en (1/x , 1/y) . ¿Cuál será la figura resultante?



Cangur B2 2022 #24

8.1.2 [MF]

Determina el área del triángulo que tiene los vértices en los puntos de coordenadas (p, q), (3p, q) i (2p, 3q), con p, q > 0.

(A) 3pq (B) pq (C) 4pq (D) pq/2 (E) 2pq

Cangur B2 2021 #9, Kangaroo Student 2021 #9

8.1.3 [F]

Se define la “distancia del taxista” entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) del plano de coordenadas como

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

Determina el número de puntos P de coordenadas enteras cuya “distancia del taxista” entre P y el origen es igual o menor que 20.

(A) 441 (B) 761 (C) 841 (D) 921 (E) 924

AMC 12A 2022 #5

8.2 Rectas en el plano cartesiano.

Resumen teórico.

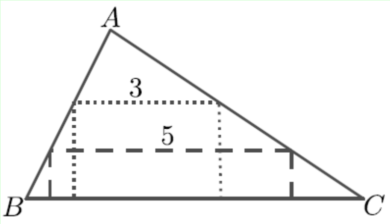
★80 Las ecuaciones de la recta.

★81 Las pendientes de las rectas paralela y perpendicular

Estos conceptos se pueden encontrar en el Tema 2 del libro de Geometría Analítica: www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAnalitica.pdf (en catalán) o en cualquier otro libro de geometría analítica en el plano

8.2.1 MF Problema solucionado paso a paso en vídeo.

Dos rectángulos están inscritos en el triángulo ABC. Las dimensiones de los rectángulos son 1×5 y 2×3, tal y como aparece en la imagen.



Determina la longitud de la altura del triángulo ABC trazada desde el vértice A.

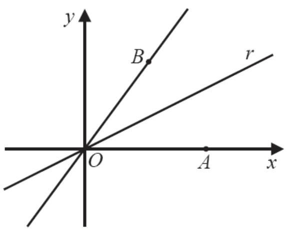
(A) 7/2 (B) 3 (C) 8/3 (D) 6/5 (E) Ninguna de las anteriores

Cangur B2 2022 #19, Kangaroo Student 2022 #24

Solución: https://youtu.be/D6gl2FysYIA

8.2.2 M

En la siguiente figura están representados los puntos A y B, de abscisas positivas, y las rectas OB y r.



Sabemos que:

- El punto A pertenece al eje X.
- La recta OB está definida por la ecuación $y = \frac{4}{3}x$
- La recta r contiene la bisectriz del ángulo $\angle AOB$.

Determina la ecuación reducida de la recta r.

PAU PORTUGAL 635 2019#15

8.2.3 F

Dos rectas ni horizontales ni verticales en el plano cartesiano se cortan formando un ángulo de 45º. Una de ellas tiene una pendiente igual a 6 veces la pendiente de la otra. ¿Cuál es el mayor valor posible del producto de las pendientes de dichas rectas?

(A) 1/6 (B) 2/3 (C) 3/2 (D) 3 (E) 6

AMC 12B 2020 #7

8.2.4 M

La recta l tiene por ecuación $3x-5y+40=0$. Esta recta se somete a una rotación de 45º en el sentido contrario de las agujas del reloj alrededor del punto $(20{,}20)$ para obtener la recta k. Determina la coordenada x del punto de intersección entre k y el eje X.

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

AMC 12A 2020 #12

8.2.5 F

Dos rectas con pendiente 2 y 1/2 se cortan en $(2,2)$. ¿Cuál es el área del triángulo determinado por estas dos rectas y la recta $x+y=10$?

(A) 4 (B) $4\sqrt{2}$ (C) 6 (D) 8 (E) $6\sqrt{2}$

AMC 12A 2019 #5

8.2.6 MF

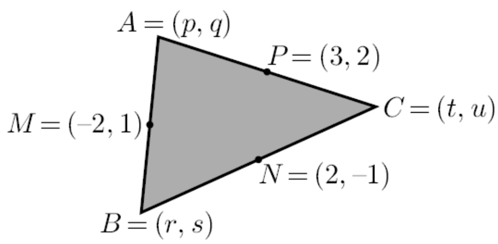
Una recta con pendiente 2 y una recta con pendiente 6 se cortan en el punto (40,30). Determina la distancia entre sus respectivos puntos de corte con el eje X.

(A) 5 (B) 10 (C) 20 (D) 25 (E) 50

AMC 12B 2018 #3

8.2.7 F

Los tres vértices de un triángulo son A = (p,q) , B = (r, s) i C = (t, u), como se muestra en la figura:



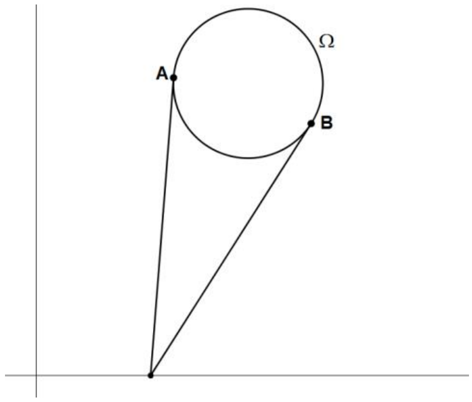
Los puntos medios de los lados del triángulo son los puntos M =(-2 ,1), N = (2,-1) y P = (3, 2). Determina el valor de p + q + r + s + t + u .

A) 3 B) 5 C) 2 D) 5/2 E) Ninguno de estos valores

Cangur B2 2018 #15, Canguro N6 2018 #15

8.2.8 F

Los puntos A=(6,13) y B=(12,11) pertenecen a una misma circunferencia Ω. Supongamos que las tangentes a Ω por A y B se cortan en un punto del eje X. Determina el área de Ω.

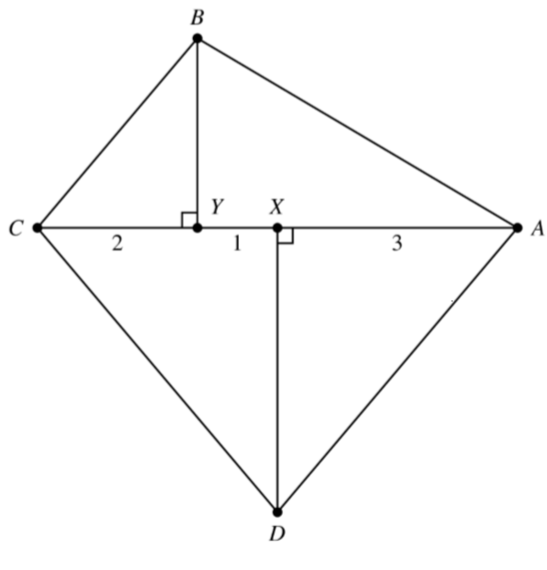


(A) $83\pi/8$ (B) $21\pi/2$ (C) $85\pi/8$ (D) $43\pi/4$ (E) $87\pi/8$

AMC 10B 2019 #23, AMC 12B 2019 #20

8.2.9 M

Sea ABCD un trapecio isósceles con $BC \mathbin{//} AD$ y $AB = CD$. Los puntos X e Y pertenecen a la diagonal AC con X entre A e Y, tal y como se muestra en la figura. Supongamos que $\angle AXD = \angle BYC = 90^{\circ}$, AX=3, XY=1, YC=2. Determina el área de ABCD.



(A) 15 (B) $5\sqrt{11}$ (C) $3\sqrt{35}$ (D) 18 (E) $7\sqrt{7}$

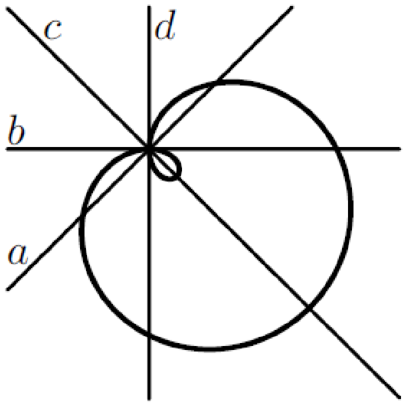
AMC 12A Fall 2021 #21

8.2.10 F

La curva de la figura está descrita por la ecuación

$$\left(x^2 + y^2 - 2x\right)^2 = 2\left(x^2 + y^2\right)$$

¿Cuál de las rectas a,b,c,d, representa el eje "y"?

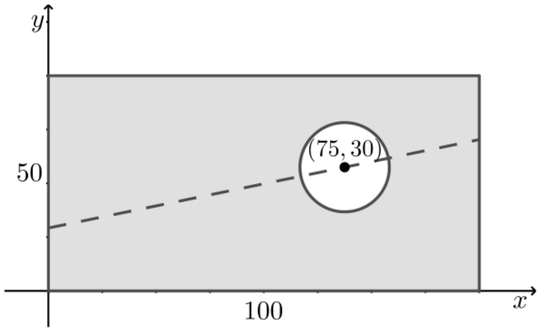


(A) La a   (B) La b   (C) La c   (D) La d   (E) Ninguna de las anteriores

Cangur N4 2015 #29, Canguro N6 2015 #22, Kangaroo Student 2015 #22

8.2.11 F

En un sistema de ejes de coordenadas rectangulares tenemos un rectángulo con vértices en los puntos (0, 0), (100, 0), (100, 50) y (0, 50) del cual hemos recortado un círculo de centro en el punto (75, 30) y radio 10. Determina la pendiente de la recta que pasa por el punto (75, 30) y que divide en dos partes iguales el área del rectángulo agujereado.



(A) 1/5   (B) 1/3   (C) 1/2   (D) 2/5   (E) 2/3

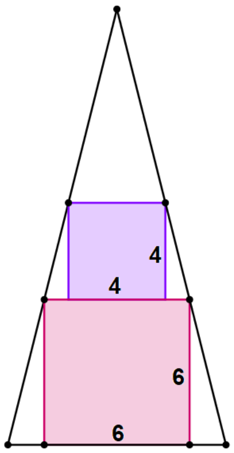
Cangur B1 2023 #23, Canguro N5 2023 #23

8.3 Coordinate Bash.

En inglés se denomina “**coordiante Bash**” (que se podría traducir por “coordenadas y tira millas” o alguna expresión equivalente) al método de resolver un problema de geometría clásica mediante las técnicas de la geometría analítica, es decir, poniendo coordenadas a los puntos y resolviendo el problema mediante ecuaciones. Este método no se considera “elegante” y siempre es preferible utilizar alguna técnica de la geometría digamos clásica (triángulos semejantes, áreas, etc...) pero hay que reconocer que puede ser muy potente para resolver de forma expeditiva y sin complicarnos la vida problemas con rectas o circunferencias sencillas. En esta sección incorporamos algunos problemas resueltos mediante esta técnica.

8.3.1 F

En un triángulo isósceles inscribimos un cuadrado de 6 cm de lado y, sobre él, inscribimos otro cuadrado de 4 cm de lado. ¿Cuál es el área, en cm², del triángulo inicial?

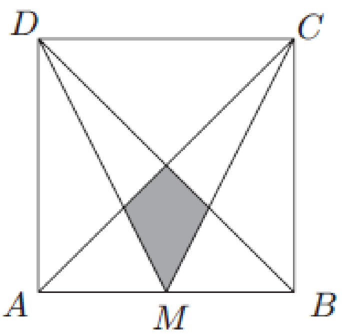


(A) 81 (B) 162 (C) 60 (D) 140 (E) 105

Concurso de Primavera N4 2023 #24

8.3.2 F

El cuadrado ABCD tiene su lado de longitud 1 y M es el punto medio de AB. El área de la región sombreada es

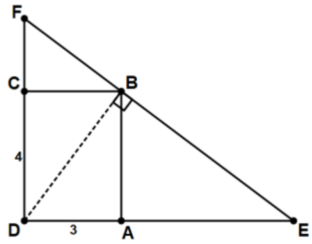


(A) 1/24 (B) 1/16 (C) 1/8 (D) 1/12 (E) 2/13

Canguro N6 2008 #26, Cangur N4 2008 #26, Kangaroo Student 2008 #26

8.3.3 F

Sea ABCD un rectángulo con AB=4 y BC=3. Construimos la recta que pasa por B y es perpendicular a AB, y sean E y F sus respectivos puntos de corte con las rectas AD y DC. Determina la longitud de EF.

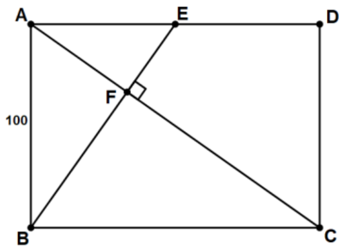


(A) 9   (B) 10   (C) 125/12   (D) 103/9

AMC 10A 2009 #17

8.3.4 F

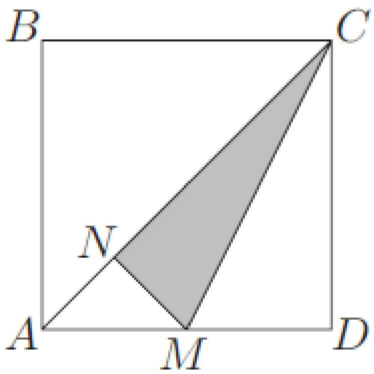
Sea ABCD un rectángulo tal que $AB = 100$. Sea E el punto medio de $\overline{AD}$. Determina la distancia AD sabiendo que AC y BE son perpendiculares.



AIME II 2009 #3

8.3.5 F

En la figura, ABCD es un cuadrado, M es el punto medio de AD y MN es perpendicular a AC.



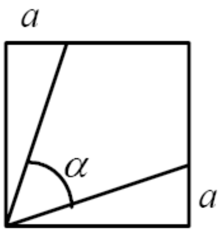
¿Cuánto vale el cociente entre el área del triángulo sombreado MNC y el área del cuadrado?

(A) 1/6   (B) 1/5   (C) 7/36   (D) 3/16   (E) 7/40

Cangur N2 2012 #22, Canguro N3 2012 #22, Kangaroo Cadet 2012 #24

8.3.6 F

Si a es la tercera parte del lado del cuadrado, Determina cos α.

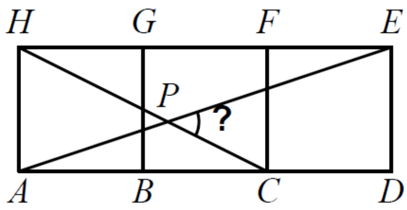


(A) 1/2 (B) 3/5 (C) 4/5 (D) √2/2 (E) √3/2

Cangur N4 2005 #13

8.3.7 F

Se juntan tres cuadrados como se indica en la figura. ¿Cuánto mide el ángulo x de la figura?



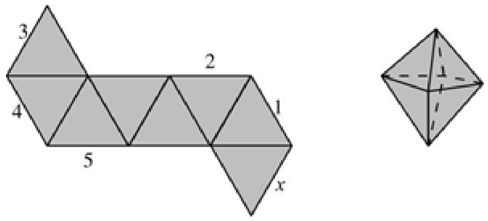
(A) 30º (B) 45º (C) 60º (D) 50º (E) 40º

Canguro N5 2005 #30, Cangur N4 2005 #28, Kangaroo Junior 2005 #30

9 Análisis de figuras en el espacio.

9.1 MF

La figura muestra el desarrollo de un octaedro.



Cuando se pliega para formar el octaedro, ¿cuál de los segmentos numerados coincidirá con el segmento marcado con la x?

(A) 1   (B) 2   (C) 3   (D) 4   (E) 5

Canguro N5 2019 #20, Cangur B1 2019 #14

9.2 MF

¿Cuántos planos pasan exactamente por tres vértices de un cubo?

(A) 1   (B) 2   (C) 4   (D) 8   (E) 12

Canguro N5 2019 #24, Cangur B1 2019 #24

9.3 MF

¿Cuántas aristas tiene una pirámide de 23 caras triangulares?

(A) 23   (B) 24   (C) 46   (D) 48   (E) 69

Canguro N6 2019 #5, Cangur B2 2019 #5

9.4 M

¿Cuántos planos pasan por tres o más vértices de un cubo?

(A) 6   (B) 8   (C) 12   (D) 16   (E) 20

Canguro N6 2019 #24, Cangur B2 2019 #24

9.5 F

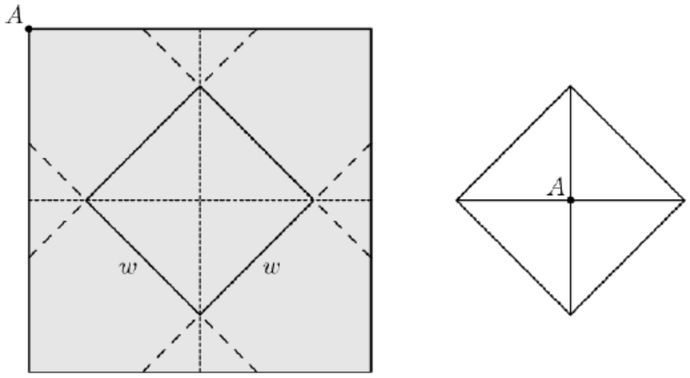
¿Cuántos pares no ordenados de aristas de un cubo determinan un plano?

(A) 12   (B) 28   (C) 36   (D) 42   (E) 66

AMC 12B 2019 #11

9.6 MF

Construimos una caja cerrada de base cuadrada doblando y recortando un cartón cuadrado de la siguiente manera: Se trazan dos rectas por el centro del cuadrado, perpendiculares entre ellas y paralelas a los lados. El centro de la caja será el centro del cuadrado, tal y como aparece en la figura de la izquierda. Las cuatro esquinas del cuadrado de cartón se levantan y se juntan en el centro de la cara superior de la caja, el punto A en la figura de la izquierda. La caja tiene una base de longitud w y altura h. Determina el área del cuadrado de cartón.

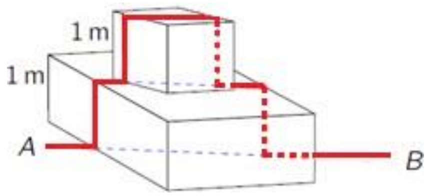


(A) $2(w+h)^2$ (B) $\frac{(w+h)^2}{2}$ (C) $2w^2+4wh$ (D) $2w^2$ (E) w^2h

AMC 12B 2018 #11

9.7 MF

Una hormiga caminaba todos los días en línea recta horizontal del punto A al B, que están separados 5 m. Un día los humanos colocaron en su camino dos extraños obstáculos de paredes verticales y 1 m de altura cada uno. Ahora la hormiga camina a lo largo o por encima de la misma línea recta, salvo que ahora tiene que subir y bajar verticalmente los dos obstáculos, como se ve en la figura.



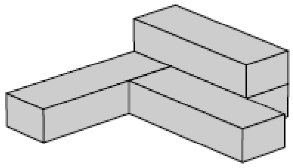
¿Qué distancia recorre ahora?

(A) 7 m (B) 9 m (C) $5+4\sqrt{2}$ m (D) $9-2\sqrt{2}$ m
(E) depende de los ángulos que presenten los obstáculos respecto del camino recto inicial

Canguro N6 2020 #2, Cangur B2 2020 #2

9.8 F

Se pegan cuatro cajas idénticas para formar la pieza que se muestra en la imagen.



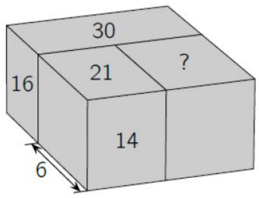
Si se requiere 1 litro de pintura para pintar el exterior de una de esas cajas, ¿cuántos litros de pintura se necesitarán para pintar el exterior de la pieza?

(A) 2,5 (B) 3 (C) 3,25 (D) 3,5 (E) 4

Canguro N6 2020 #13, Cangur B2 2020 #13

9.9 F

A partir de tres paralelepípedos se construye otro más grande, como se ve en la figura. Una arista de uno de ellos mide 6 m y las áreas de algunas de sus caras, en m^2, son 14, 21, 16 y 30, como se muestra en la figura.



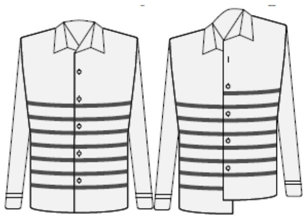
¿Cuál es el área de la cara con el signo de interrogación, en m^2 ?

(A) 18 (B) 24 (C) 28 (D) 30 (E) no se puede calcular

Canguro N6 2020 #20, Cangur B2 2020 #20

9.10 MF

Cuando César usa su camisa nueva abotonada correctamente, como se muestra a la izquierda de la figura, las rayas horizontales forman siete anillos cerrados alrededor de su cuerpo.



Esta mañana se abotonó la camisa incorrectamente, como se ve a la derecha. ¿Cuántos anillos cerrados tiene César alrededor de su cuerpo?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Canguro N5 2020 #4, Cangur E4 2020 #8, Kangaroo Junior 2020 #3

9.11 [MF]

Se construye un cubo grande con 64 cubos pequeños idénticos. Se pintan tres de las caras del cubo grande. ¿Cuál es el mayor número posible de cubos pequeños que tienen exactamente una cara pintada?

(A) 27   (B) 28   (C) 32   (D) 34   (E) 40

Canguro N5 2020 #26, Cangur B1 2020 #26

9.12 [M]

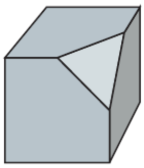
Los vértices, A, B y C, de un triángulo equilátero de lado 1 están en la superficie de una esfera de radio 1 y centro O. Sea D la proyección ortogonal de A sobre el plano, α, determinado por B, C y O. Llamamos N a uno de los cortes con la esfera de la recta perpendicular a α por O. Halla la medida del ángulo $\angle DNO$.

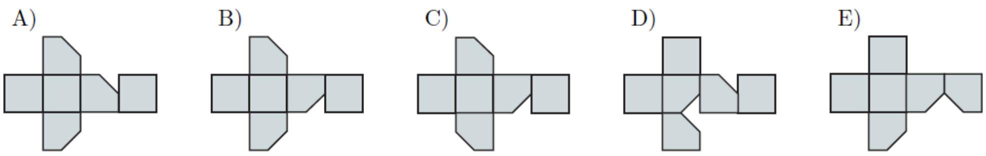
(Nota: la proyección ortogonal de A sobre el plano α es el punto de corte con α de la recta que pasa por A y es perpendicular a α.)

OME 2021 #1

9.13 [MF]

Cortamos un vértice de un cubo. ¿Cuál de los desarrollos que se muestran es el desarrollo del cuerpo resultante?

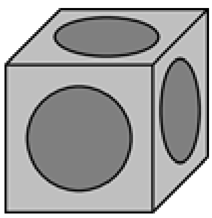




Cangur N1 2004 #18 , Canguro N1 2004 #17

9.14 [F]

Un agujero en forma de hemisferio está tallado en cada cara de un cubo. Los agujeros son idénticos y están centrados en el centro de cada cara. Los agujeros tocan a sus vecinos en un solo punto. El cubo tiene lado 2. ¿Cuál es el diámetro de cada agujero?

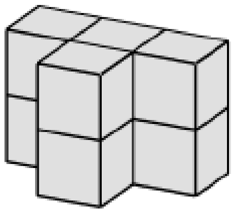


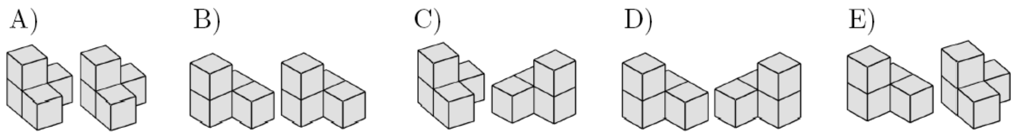
(A) 1   (B) 2   (C) √2   (D) 3/2   (E) √(3/2)

Cangur B1 2022 #30, Kangaroo Junior 2022 #30

9.15 [F]

¿Cuál de los siguientes pares de piezas se pueden juntar para construir la forma que se muestra en el diagrama?

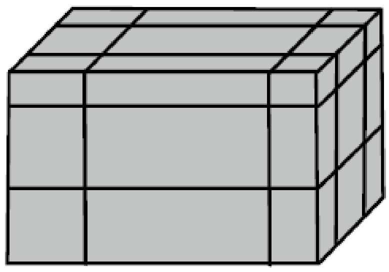




Cangur B2 2022 #16, Kangaroo Student 2022 #22

9.16 [F]

Un paralelepípedo está cortado por seis planos como se muestra. Cada plano es paralelo a una cara, pero su distancia a la cara es aleatoria. Ahora el cuboide está separado en 27 partes más pequeñas. ¿Cuál es la razón entre el área total del paralelepípedo original y la suma de las áreas totales de cada uno de los otros 27 ortoedros pequeños?



(A) 1/2 (B) 1/3 (C) 2/5 (D) 1/4 (E) Ninguna de las anteriores

Cangur B2 2022 #17, Kangaroo Student 2022 #18

9.17 [MF]

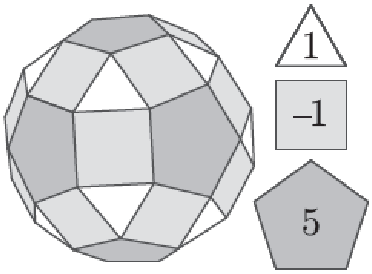
Un cubo con arista 1 se corta en dos ortoedros idénticos. ¿Cuál es el área de la superficie de uno de estos ortoedros?

(A) 2m² (B) 5m² (C) 3/2 m² (D) 3m² (E) 4m²

Cangur B2 2021 #4, Kangaroo Student 2021 #3

9.18 M

El sólido que se muestra en el diagrama tiene 12 caras pentagonales regulares, las otras caras son triángulos equiláteros o cuadrados. Cada cara pentagonal está rodeada por 5 caras cuadradas y cada cara triangular está rodeada por 3 caras cuadradas. John escribe 1 en cada cara triangular, 5 en cada cara pentagonal y −1 en cada cuadrado. ¿Cuál es el total de los números escritos en el sólido?

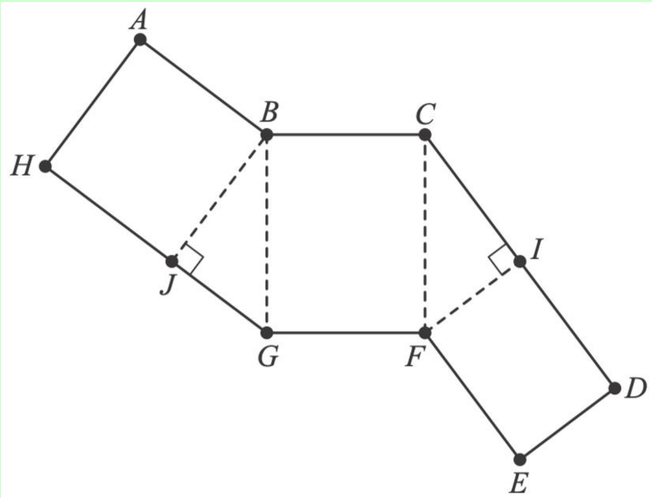


(A) 80   (B) 60   (C) 50   (D) 20   (E) 120

Cangur B2 2021 #24, Kangaroo Student 2021 #25

9.19 F **Problema solucionado paso a paso en vídeo.**

En la siguiente imagen se muestra un polígono ABCDEFGH, con rectángulos y triángulos rectángulos.



Cuando se recorta y se dobla por las líneas punteadas, se forma un prisma triangular. Suponiendo que $AH = EF = 8$ y $GH = 14$, determina el volumen de este prisma.

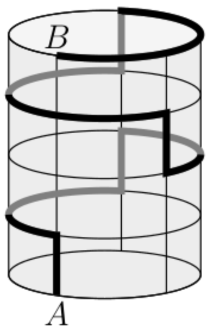
(A) 112   (B) 128   (C) 192   (D) 240   (E) 288

AMC 8 2022 #24

Solución: https://youtu.be/LHwCVSvPsQY

9.20 MF

Una lata cilíndrica tiene una altura de 15 cm y el perímetro de la base circular es 30 cm. Una hormiga camina desde el punto A de la base hasta el punto B del techo. En su camino por la lata, hay intervalos en los que se desplaza horizontalmente y hay otros en los que se desplaza en vertical, marcados con una línea más gruesa (negra en la parte frontal y gris en la parte posterior). Determina la longitud del camino que ha recorrido la hormiga.

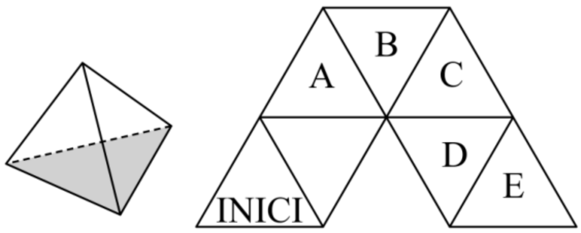


(A) 45 cm (B) 55 cm (C) 60 cm (D) 65 cm (E) 75 cm

Cangur B2 2023 #3, Canguro N6 2023 #3

9.21 F

Una pieza en forma de tetraedro regular tiene una de las caras sombreada. La pieza se sitúa en un tablero haciendo coincidir la cara sombreada con el triángulo “INICI”. Entonces hacemos rodar la pieza de un triángulo al siguiente, rotándolo por una arista. ¿En qué triángulo se parará por primera vez sobre la cara sombreada?

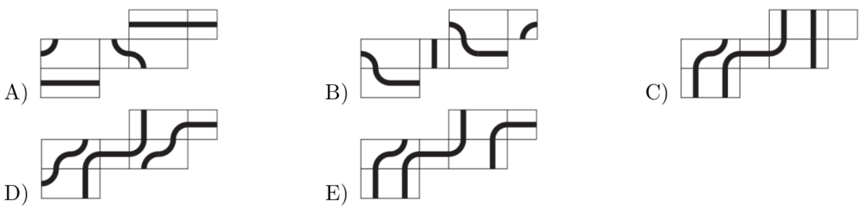


(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

Cangur B2 2023 #24, Canguro N6 2023 #24

9.22 F

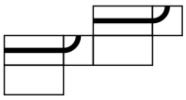
Leo ha dibujado un camino cerrado en un prisma rectangular y después lo ha desplegado. ¿Cuál de los siguientes desarrollos corresponde al prisma de Leo?

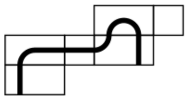


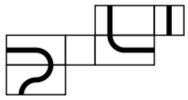
Cangur B2 2023 #18, Canguro N6 2023 #18

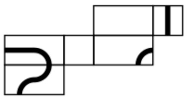
9.23 [F]

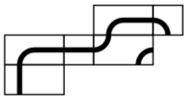
Leo ha dibujado un camino cerrado en un prisma rectangular y lo ha desplegado. ¿Cuál de los desarrollos siguientes no puede ser el de Leo?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

Cangur B1 2023 #26, Canguro N5 2023 #26

10 Superficie y volumen. Problemas métricos en el espacio.

10.1 [M]

Dos conos rectos iguales cada uno de ellos con radio de la base 3 y altura 8 se cortan en ángulo recto por sus ejes de simetría en el punto interior de los conos a distancia 3 de sus respectivas bases. Determina el radio de la esfera más grande que podemos trazar en la zona común de ambos conos.

AIME II 2020 #7

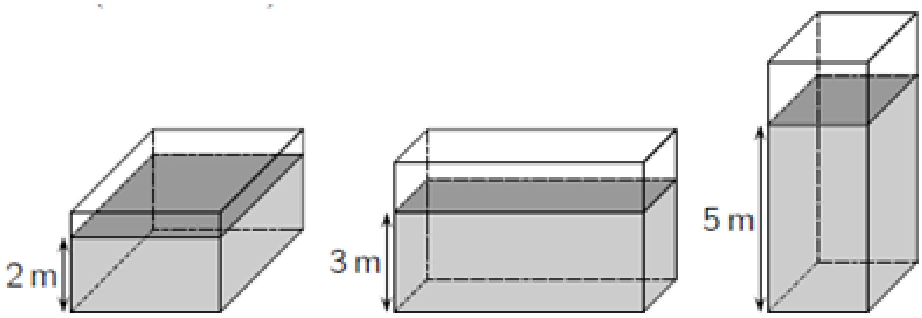
10.2 [MF]

En una mesa plana realizamos dos agujeros redondos de radios 1 y 2, respectivamente, y cuyos centros están separados por una distancia igual a 7. Supongamos que dos esferas del mismo radio $R > 2$ reposan cada una de ellas en un agujero, de forma que las dos esferas son tangentes la una con la otra. Determina el cuadrado del radio de dichas esferas.

AIME I 2020 #6

10.3 [M]

Un contenedor que tiene forma de caja con caras rectangulares está parcialmente lleno con 120 m^3 de agua. La profundidad del agua es de 2 m, 3 m ó 5 m, según la cara de la caja que se encuentre en el suelo, como se muestra en la figura (que no está dibujada a escala). ¿Cuál es el volumen del contenedor?

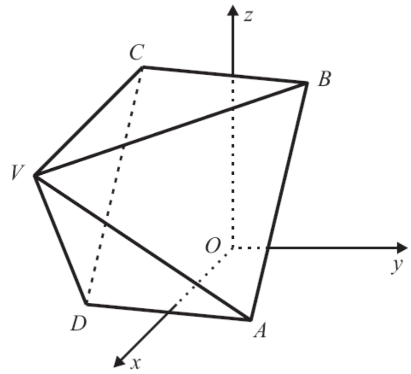


(A) 160 m^3 (B) 180 m^3 (C) 200 m^3 (D) 220 m^3 (E) 240 m^3

Canguro N6 2019 #13, Cangur B2 2019 #13

10.4 F

En la siguiente figura está representada una pirámide cuadrangular regular ABCDV. Los vértices A y C tienen coordenadas $(2,1,0)$ y $(0,-1,2)$, respectivamente. El vértice V tiene coordenadas $(3,-1,2)$.



a) Determina la amplitud del ángulo $\angle VAC$.
b) Determine una ecuación del plano que contiene la base de la pirámide. Presente esa ecuación de la forma $ax+by+cz+d=0$.

PAU PORTUGAL 635 2019 #1

10.5 MF

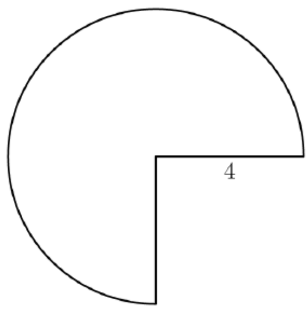
Siete cubos, cuyos volúmenes son 1, 8, 27, 64, 125, 216 y 343 unidades cúbicas, se apilan en vertical formando una torre en la que los volúmenes van en orden decreciente de abajo a arriba. Excepto el cubo de la base, la cara inferior de cada cubo queda en el interior de la cara superior del cubo que tiene debajo. Determina la superficie total de la torre (incluyendo la base) en unidades cuadradas.

(A) 644 (B) 658 (C) 664 (D) 720 (E) 749

AMC 12A 2020 #7

10.6 M

Mediante un sector circular de tres cuartos de círculo de radio 4 construimos la superficie lateral de un cono recto juntando sus dos lados rectos. ¿Cuál es el volumen del cono generado?

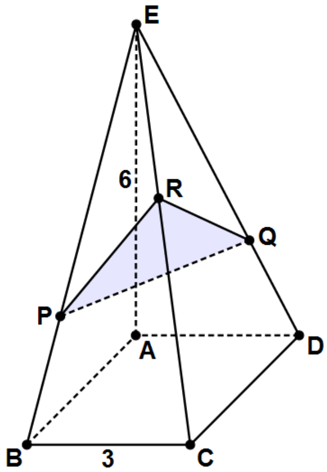


(A) $3\pi\sqrt{5}$ (B) $4\pi\sqrt{3}$ (C) $3\pi\sqrt{7}$ (D) $6\pi\sqrt{3}$ (E) $6\pi\sqrt{7}$

AMC 12B 2020 #9

10.7 F

Una pirámide de base cuadrada ABCDE tiene base ABCD, con 3 cm de lado, y una altura $\overline{AE}$ perpendicular a la base, que mide 6 cm. Sea P el punto en $\overline{BE}$, a un tercio de la distancia de B a E; sea Q el punto en $\overline{DE}$, a un tercio de la distancia de D a E; y sea R el punto en $\overline{CE}$, a dos tercios de la distancia de C a E. Determina el área, en centímetros cuadrados, de ΔPQR.



(A) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{3}$ (E) $3\sqrt{2}$

AMC 12B 2019 #18

10.8 F

Dada una esfera de centro O y radio 6, un triángulo de lados de longitud 15, 15 y 24 está situado en el espacio de forma que sus tres lados son tangentes a la circunferencia. Determina la distancia entre O y el plano determinado por el triángulo.

(A) $2\sqrt{3}$ (B) 4 (C) $3\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{5}$ (E) 5

AMC 12A 2019 #18

10.9 F **Problema solucionado paso a paso en vídeo .**

Un iceberg tiene forma de cubo y el 90% de su volumen está sumergido en el agua. Solo tres aristas del cubo son parcialmente visibles sobre el agua. Las partes visibles de estas aristas miden 24 m, 25 m y 27 m, respectivamente. ¿Cuántos metros mide una arista del iceberg?

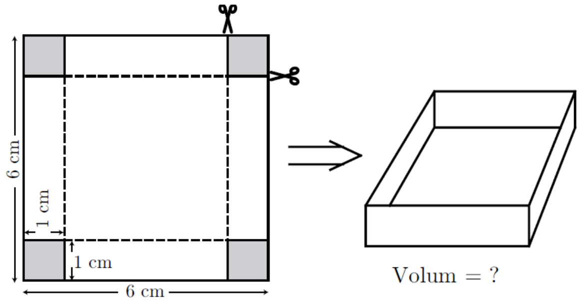
(A) 30 (B) 33 (C) 34 (D) 35 (E) 39

Canguro N6 2020 #28, Cangur N6 2020 #28, Kangaroo Student 2020 #27

Solución: https://youtu.be/tYnjQga5LfY

10.10 MF

¿Cuánto vale el volumen de la caja de la derecha?



(A) 25 cm^3 (B) 36 cm^3 (C) 30 cm^3 (D) 16 cm^3 (E) 24 cm^3

Cangur N1 2004 #10. Canguro N1 2004 #10

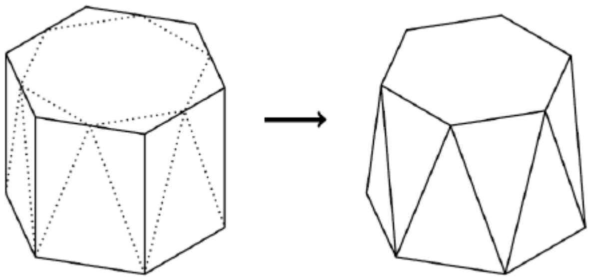
10.11 M

Sea una pirámide recta de base cuadrada con volumen 54 y base de longitud 6. Los cinco vértices de esta pirámide pertenecen a una esfera de radio m/n, donde m y n son enteros positivos y coprimos. Determina $m+n$.

AIME II 2022 #3

10.12 M

Un prisma hexagonal regular tiene sus esquinas superiores recortadas, como se muestra.



La cara superior se convierte en un hexágono regular más pequeño y las 6 caras rectangulares alrededor del medio se convierten en 12 triángulos isósceles de dos tamaños diferentes. ¿Qué fracción del volumen del prisma original se ha perdido?

$(A)\ \frac{1}{6\sqrt{3}} \quad (B)\ \frac{1}{6\sqrt{2}} \quad (C)\ \frac{1}{4\sqrt{3}} \quad (D)\ \frac{1}{6} \quad (E)\ \frac{1}{12}$

Cangur B2 2022 #29

10.13 F

Una hoja de papel rectangular tiene una longitud x y una anchura y, donde x > y. El rectángulo se puede plegar para formar la superficie curva de un cilindro circular de dos formas diferentes. ¿Cuál es la relación entre el volumen del cilindro más alto y el volumen del cilindro más bajo?

(A) $x^2 : y^2$ (B) $y^2 : x^2$ (C) $x : y$ (D) $1 : 1$ (E) $y : x$

Cangur B2 2021 #6, Kangaroo Student 2021 #6

10.14 [F]

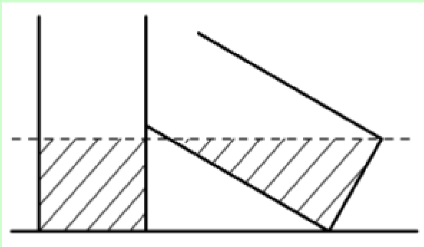
Sea M el punto medio del lado $\overline{AB}$ de un tetraedro regular ABCD. Determina $\cos(\angle CMD)$.

(A) 1/4 (B) 1/3 (C) 2/5 (D) 1/2 (E) $\sqrt{3}/2$

AMC 12A 2022 #12

10.15 [M] **Problema solucionado paso a paso en vídeo.**

Dos cilindros idénticos contienen la misma cantidad de agua. Uno de ellos se inclina hasta que la superficie del agua toca la base del cilindro. En ese momento los niveles de agua de los dos cilindros son iguales. La base de cada cilindro es un círculo de área 3π m^2. Determina la cantidad de agua que contiene cada cilindro.



(A) $3\sqrt{3}\pi$ m^3 (B) 6π m^3 (C) 9π m^3 (D) $3\pi 4$ m^3 (E) Es imposible determinarla con la información dada.

Cangur B2 2023 #29, Canguro N6 2023 #29

Solución: https://youtu.be/ojW36RaPCQ0

11 Rectas y puntos notables del triángulo.

1.1 Mediatrices, circuncírculo y circuncentro.

Resumen teórico.

★**82** Definición: Circuncentro, circunferencia circunscrita, circunradio.
Dado un triángulo ΔABC, las tres mediatrices correspondientes a sus lados se encuentran en un mismo punto, al que llamaremos **circuncentro** del triángulo, y denotaremos con la letra O. El circuncentro de un triángulo es el centro de la llamada "**circunferencia circunscrita**" o circuncírculo: La única circunferencia que pasa a la vez por los tres vértices del triángulo. Llamaremos **circunradio** al radio de la circunferencia circunscrita y el denotaremos por R.

★**83** Circunradio y área del triángulo.

$$[\Delta ABC] = \frac{abc}{4R}$$

Donde a, b y c son los lados del triángulo y R es el circunradio.

11.1.1 F

Dado un triángulo ΔABC con lados $AB = 13$, $AC = 12$ y $BC = 5$, denotamos por O su circuncentro y por I su incentro. Sea M el centro de la circunferencia que es tangente a los lados AC y BC y al circuncírculo de ΔABC. Determina el área del triángulo ΔMOI.

(A) 5/2 (B) 11/4 (C) 3 (D) 13/4 (E) 7/2

AMC 12B 2018 #21

11.1.2 M

Se circunscribe un triángulo mediante una circunferencia de radio r pulgadas. Si el perímetro del triángulo es P pulgadas y el área es K pulgadas cuadradas, entonces $\frac{P}{K}$ es:

(A) independiente del valor de r (B) $\frac{\sqrt{2}}{r}$ (C) $\frac{2}{\sqrt{r}}$ (D) $\frac{2}{r}$ (E) $\frac{r}{2}$

AHSME 1967 #5

11.2 Alturas y ortocentro.

Resumen teórico.

★84 Las alturas de un triángulo son los segmentos perpendiculares a un lado y que pasan por su vértice opuesto. Las alturas pueden estar dentro del triángulo, fuera de él, o incluso coincidir con uno de sus lados.

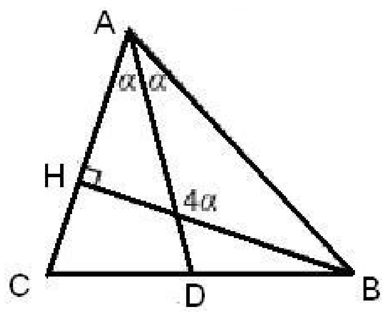
★85 Las tres alturas de un triángulo se cortan en un mismo punto al que llamaremos ortocentro, que se denotará con la letra H.

★86 En todo triángulo, el producto de uno de sus lados multiplicado por su altura correspondiente será igual a dos veces el área del triángulo. Por lo tanto, si el lado es mayor, su altura correspondiente será menor, de lo que se deduce que la altura más larga corresponderá (será perpendicular) al lado más corto, y la altura más corta corresponderá al lado más largo.

★87 Las alturas generan triángulos semejantes.

11.2.1 MF

La figura muestra el triángulo ABC con la altura BH y la bisectriz AD. El ángulo obtuso entre BH y AD es 4 veces el ángulo DAB.



¿Cuánto mide el ángulo CAB?

(A) 30º (B) 45º (C) 60º (D) 75º (E) 90º

Canguro N3 2014 #16, Cangur N2 2014 #16

11.2.2 MF

Si el triángulo PQR tiene lados de longitudes 40, 60 y 80, entonces su altura más corta es k veces su altura más larga. Hallar el valor de k.

(A) 3/5 (B) 7/9 (C) 1/3 (D) 1/2 (E) 5/8

Canguro N4 2014 #29

11.2.3 [M] **Problema solucionado paso a paso en vídeo.**

Dos de las alturas de un triángulo miden 10 y 11 cm, respectivamente. ¿Cuál de las siguientes no puede ser la longitud de la tercera altura?

(A) 5 cm (B) 6 cm (C) 7 cm (D) 10 cm (E) 100 cm

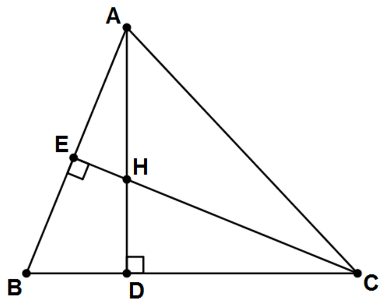
Canguro N5 2016 #26

Solución: https://youtu.be/oFFvkYrKC6A

11.2.4 [MF]

Sea AD la altura del triángulo △ABC, H el ortocentro. Demuestra que

$$BD \cdot DC = AD \cdot DH.$$



11.3 Bisectrices, incírculo e incentro.

Resumen teórico.

Las bisectrices se definieron en ★20.

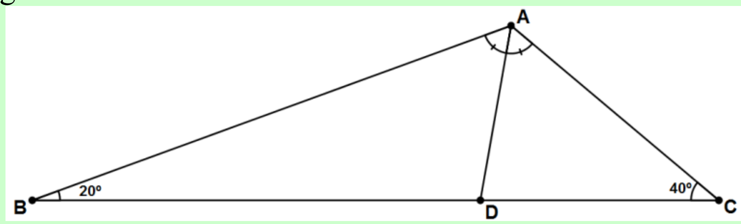
★88 Las tres bisectrices internas de un triángulo se cortan en un mismo punto común al que llamaremos incentro.

★89 El incentro del triángulo es el centro de la llamada circunferencia inscrita: La única circunferencia que está contenida en su interior y para la cual los tres lados del triángulo son tangente.

★90 Teorema de la bisectriz.
La bisectriz de un ángulo divide el lado opuesto en dos segmentos que son proporcionales a sus lados correspondientes. Además, esta propiedad caracteriza la bisectriz de un ángulo.

11.3.1 [F] Problema solucionado paso a paso en vídeo.

En el triángulo ΔABC, el ángulo B es 20º y el ángulo C es 40º. La longitud de la bisectriz del ángulo A es 2. Calcular BC − AB.



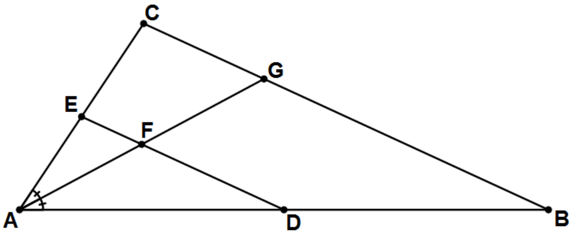
(A) 1 (B) 1,5 (C) 2 (D) 4 (E) Imposible saberlo

Canguro N3 2009 #30, Cangur N1 2009 #30, Kangaroo Cadet 2009 #30

Solución: https://youtu.be/uMCT1hYdCEs

11.3.2 [F]

Sea el triángulo ΔABC con $AB=50$ y $AC=10$ y área 120. Sea D el punto medio de $\overline{AB}$ y E el punto medio de $\overline{AC}$. La bisectriz de $\angle ABC$ corta $\overline{DE}$ y $\overline{BC}$ en F y G, respectivamente. Determina el área del cuadrilátero FDBG.



(A) 60 (B) 65 (C) 70 (D) 75 (E) 80

AMC 12A 2018 #18

11.3.3 M

Sea ΔABC un triángulo con $AC = 24$ pulgadas, $BC = 10$ pulgadas y $AB = 26$ pulgadas. Determina el radio de la circunferencia inscrita.

(A) 26 in (B) 4 in (C) 13 in (D) 8 in (E) Ninguna de las anteriores

AHSME 1950 #35

11.3.4 M

Sabemos que en un triángulo dado, el área es numéricamente igual al perímetro. ¿Cuál es el radio de la circunferencia inscrita?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

AHSME 1970 #27

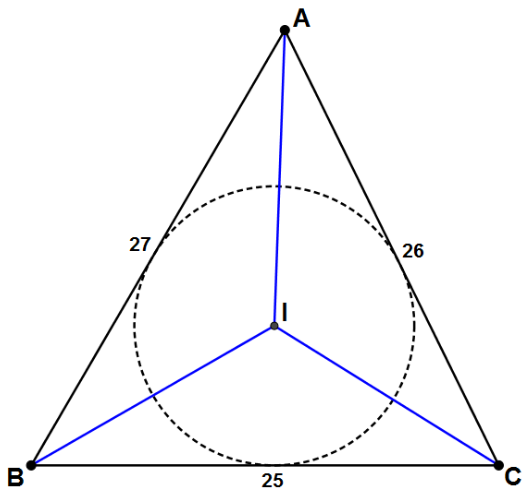
11.3.5 F

Sea ABCD un rectángulo con $AB = 63$ y $BC = 448$. Los puntos E y F pertenecen a AD y BC respectivamente, con $AE = CF = 84$. La circunferencia inscrita al triángulo ΔBEF es tangente a EF en el punto P, y la circunferencia inscrita al triángulo ΔDEF es tangente a EF en el punto Q. Determina PQ.

AIME II 2007 #9

11.3.6 M

Sea ΔABC un triángulo con $AB = 27$, $AC = 26$ y $BC = 25$. Sea I el punto de intersección de las bisectrices interiores de ΔABC. Determina BI .

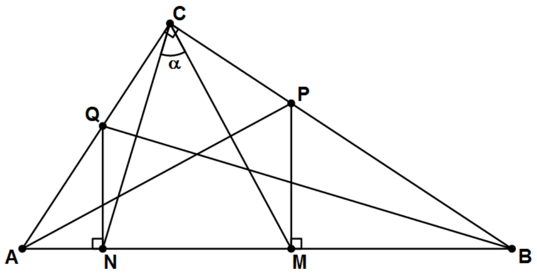


(A) 15 (B) $5+\sqrt{26}+3\sqrt{3}$ (C) $3\sqrt{26}$ (D) $\frac{2}{3}\sqrt{546}$ (E) $9\sqrt{3}$

AMC 12A 2012 #18

11.3.7 F

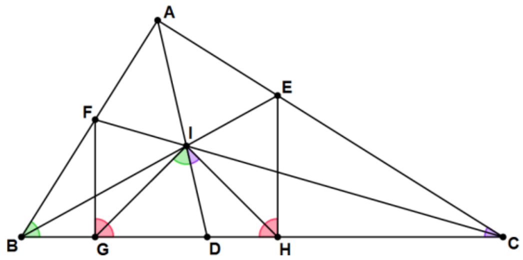
Sea ABC un triángulo rectángulo con el ángulo recto en el vértice C. Sea P el punto de corte de la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ con el segmento BC, y Q el punto de corte de la bisectriz del ángulo $\angle ABC$ con el segmento AC. Sean M y N los puntos de corte con el segmento AB de las rectas perpendiculares al mismo y que pasan por P y Q respectivamente. ¿Cuánto vale el ángulo $\angle MCN$?



OMEFL Aragón 2021 #1

11.3.8 M

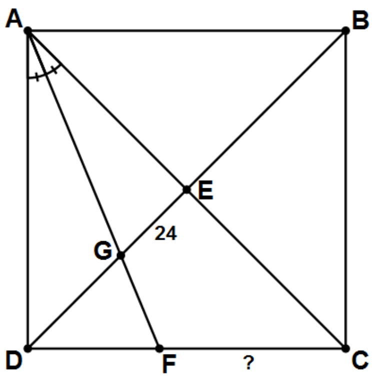
En el triángulo ΔABC con lado mayor BC, las bisectrices se cortan en I. Las rectas AI, BI, CI cortan a BC, CA, AB en los puntos D, E, F, respectivamente. Se consideran puntos G y H en los segmentos BD y CD, respectivamente, tales que $\angle GID = \angle ABC$ y $\angle HID = \angle ACB$. Probar que $\angle BHE = \angle CGF$.



OMEFL Aragón 2021 #5

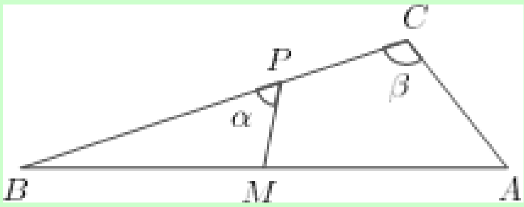
11.3.9 F

Sea E el punto de corte de las diagonales del cuadrado ABCD, y sean F y G los puntos de corte respectivos de la bisectriz del ángulo $\angle DAC$ con el lado CD y la diagonal BD. Suponiendo que $EG = 24$, determina CF.



11.3.10 [M] **Problema solucionado paso a paso en vídeo.**

Los lados del triángulo ABC hacen AB = 12 cm, BC = 10 cm y CA = 4 cm. M es el punto medio del lado AB y P es el punto que cumple CP/PB = 3/7. Si α es la medida del ángulo ∠MPB y ß es la medida del ángulo ∠ACB, determina la razón α/ß.



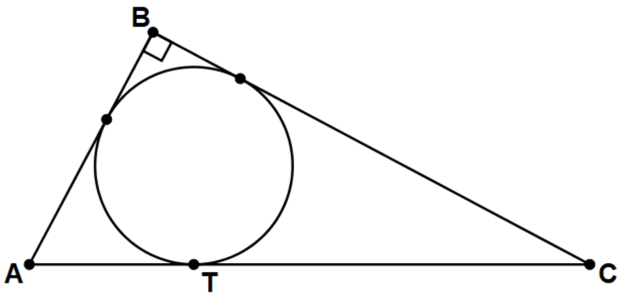
(A) 2/3 (B) 1/2 (C) 3/4 (D) 4/7 (E) 5/7

Cangur B1 2022 #27

Solución: https://youtu.be/DOikSbvRMh8

11.3.11 [F]

Demuestra el "Teorema de Burlet": En un triángulo rectángulo ΔABC, con $\angle B = 90^{o}$, y siendo T el punto de tangencia entre su circunferencia inscrita y el lado AC, se cumple $[\Delta ABC] = AT \cdot TC$



11.4 Medianas y baricentro.

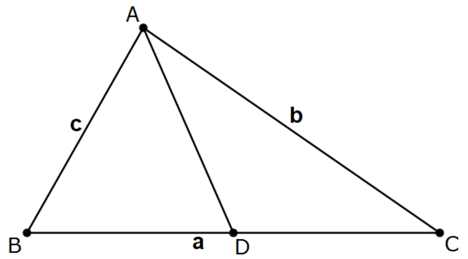
Resumen teórico.

★91 Definición. Medianas. Baricentro.
Las medianas son los segmentos que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto. Las medianas de un triángulo se encuentran en un único punto llamado baricentro, que se denotará con la letra G.

★92 Las medianas dividen el triángulo en triángulos con áreas iguales.

★93 Longitud de la mediana (Aplicación del Teorema de Stewart ★42)

Si $\overline{AD}$ la mediana de un triángulo ΔABC, se cumple



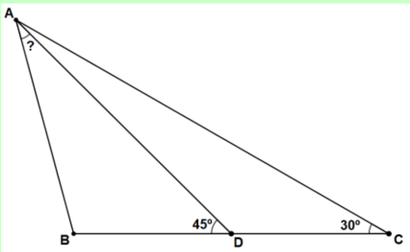
a) $2\left(AD^2 + BD^2\right) = AC^2 + AB^2$ b) $AD = \dfrac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$

★94 Las medianas de un triángulo se cortan en razón 2:1.

★95 La mediana sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide la mitad que dicha hipotenusa.

11.4.1 [M] Problema solucionado paso a paso en vídeo.

En el triángulo ΔABC, el segmento AD es una mediana. El ángulo ∠ACB es de 30º y el ángulo ∠ADB es de 45º. Determina el ángulo ∠BAD.



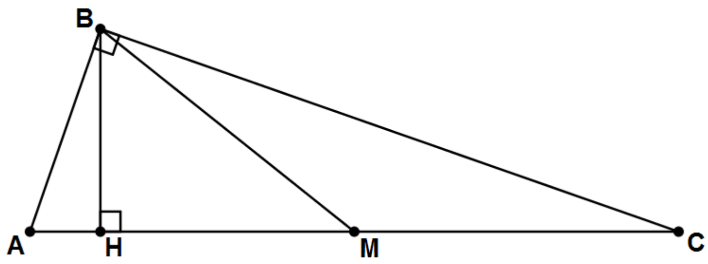
(A) 45º (B) 30º (C) 25º (D) 20º (E) 15º

Cangur N3 2009 #29

Solución: https://youtu.be/1w9AmGVGf4I

11.4.2 F

En un triángulo rectángulo ABC, se trazan la altura BH y la mediana BM desde el vértice B del ángulo recto. Si BM = 2 BH ¿cuánto mide el menor de los ángulos del triángulo?



(A) 15º (B) 24º (C) 30º (D) 45º (E) imposible de determinar

Canguro N4 2008 #14

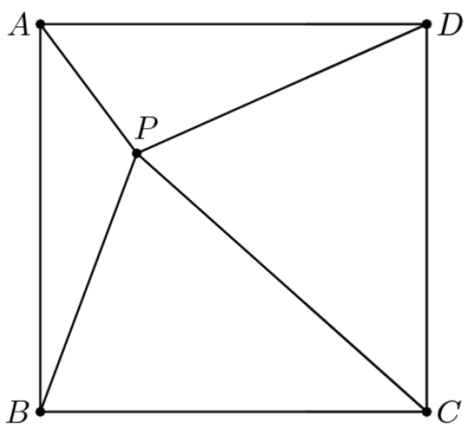
11.4.3 MF

Sea $\overline{AB}$ el diámetro de una circunferencia con $AB = 24$. Si C es un punto, diferente de A o B, que se mueve por dicha circunferencia, el baricentro de ΔABC genera una curva cerrada excepto por dos puntos. Determina el entero positivo más cercano al área de la región rodeada por dicha curva.

(A) 25 (B) 38 (C) 50 (D) 63 (E) 75

11.4.4 F

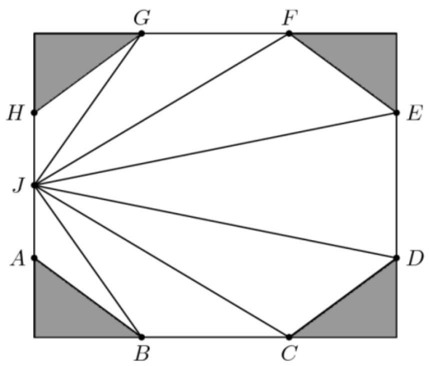
Sea ABCD un cuadrado de lado 30. Sea P un punto en su interior cumpliendo $AP = 12$ y $BP = 26$. Determina el área del cuadrilátero convexo formado por los baricentros de los triángulos ΔABP , ΔBCP , ΔCDP y ΔDAP .



(A) $100\sqrt{2}$ (B) $100\sqrt{3}$ (C) 200 (D) $200\sqrt{2}$ (E) $200\sqrt{3}$

11.4.5 F

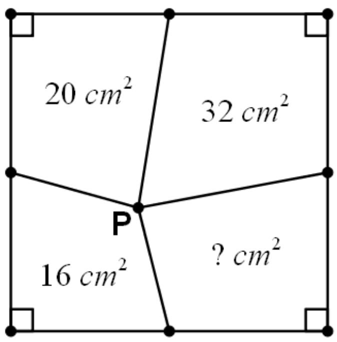
Sea ABCDEFGH el octágono con lados de longitud $AB = CD = EF = GH = 10$ y $BC = DE = FG = HA = 11$ que se ha formado eliminado los triángulos 6-8-10 de las esquinas de un rectángulo 23×27, con lado $\overline{AH}$ en el lado corto del rectángulo, tal y como se indica en la figura. Sea J el punto medio de $\overline{AH}$, y dividimos este octágono en 7 triángulos trazando los segmentos $\overline{JB}$, $\overline{JC}$, $\overline{JD}$, $\overline{JE}$, $\overline{JF}$ y $\overline{JG}$. Determina el área del polígono convexo cuyos vértices son los baricentros de estos 7 triángulos.



AIME II 2018 #9

11.4.6 F

Dado un cuadrado, determinamos en su interior cuatro cuadriláteros marcando un punto interior P y trazando los segmentos que unen dicho punto con los puntos medios de los lados. Dadas el área de tres de dichos cuadriláteros: 16 cm², 20 cm² y 32 cm², tal y como se muestra en el esquema, determina el área del cuarto cuadrilátero.



11.4.7 F **Problema solucionado paso a paso en vídeo.**

En el triángulo ΔABC las medianas $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$ se cortan en G y ΔAGE es equilátero. Entonces $\cos(C)$ se puede escribir como $m\sqrt{p}/n$, donde m y n son enteros positivos coprimos y p es un entero positivo no divisible por el cuadrado de ningún primo. Determina $m+n+p$.

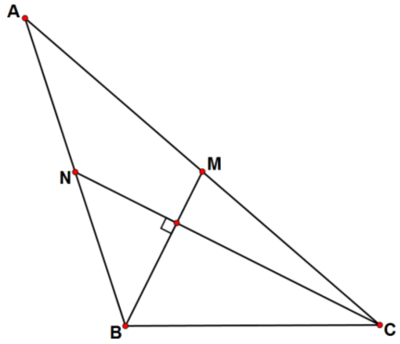
(A) 44 (B) 48 (C) 52 (D) 56 (E) 60

AMC 12B 2022 #19

Solución: https://youtu.be/5L2T5n51lRE

11.4.8 F

En el triángulo ABC, los puntos M y N son los puntos medios respectivos de los lados AC y AB, y las medianas BM y CN son perpendiculares.



El valor de $CA^2 + BA^2$ es:

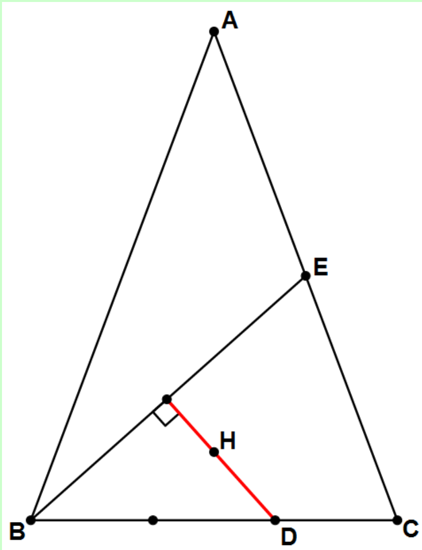
(A) BC^2 (B) $2BC^2$ (C) $3BC^2$ (D) $4BC^2$ (E) $5BC^2$

Canguro N4 2004 #29

11.5 Problemas con rectas y puntos notables del triángulo.

11.5.1 M Problema solucionado paso a paso en vídeo.

Sea ΔABC un triángulo con AB=AC. Sea H el ortocentro de ΔABC. El punto E es el punto medio de AC y el punto D pertenece al lado BC de forma que $3CD = BC$. Demuestra que $BE \perp HD$.

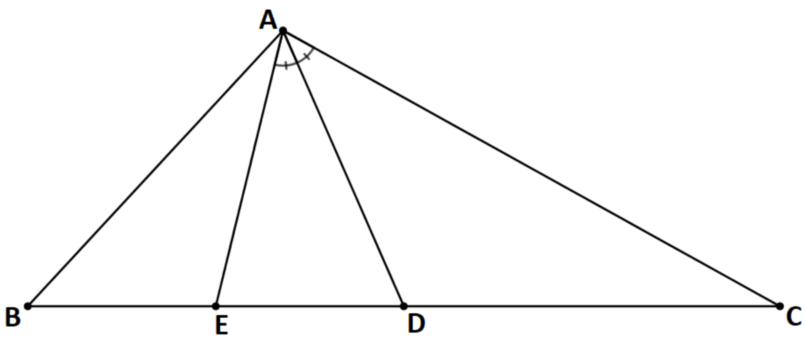


IGO Intermediate 2021 #1

Solución: https://youtu.be/ZTaNTeZD_YM

11.5.2 M

Sea ΔABC un triángulo cumpliendo BC=2AB. Sea D el punto medio de BC y E el punto medio de BD. Demostrar que AD es la bisectriz de $\angle CAE$.



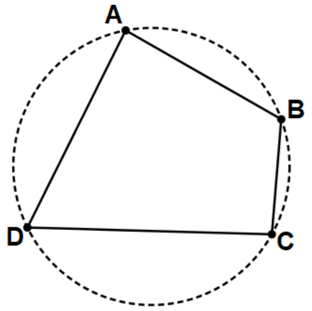
Fuente: Aref Pág. 4

12 Cuadriláteros cíclicos. Potencia de un punto.

12.1 Cuadriláteros cíclicos.

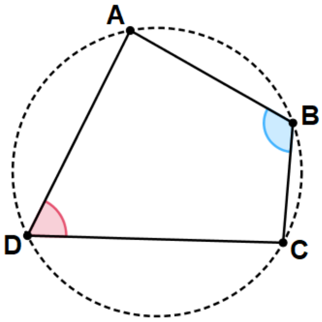
Resumen teórico.

★96 Definición. Cuadrilátero cíclico.
Un cuadrilátero cíclico es aquel que se puede inscribir en una circunferencia, es decir, cuando sus cuatro vértices pertenecen a una misma circunferencia.



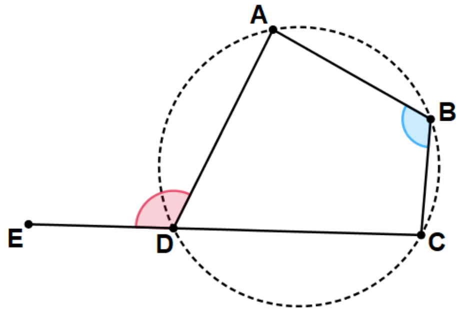
Diremos que cuatro puntos A, B, C y D son **cocíclicos** cuando forman un cuadrilátero cíclico.

★97 Caracterización de cuadriláteros cíclicos mediante vértices opuestos.
Un cuadrilátero es cíclico si y solo si dos de sus ángulos opuestos son suplementarios, es decir, suman 180º:



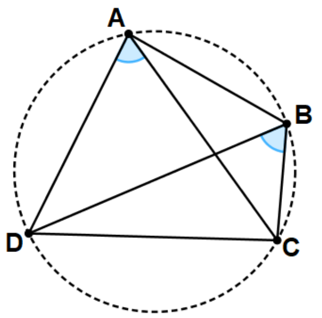
$$\angle ABC + \angle ADC = 180^{\circ}$$

O equivalentemente, cuando un ángulo interno sea igual al ángulo externo del vértice opuesto:



$$\angle ABC = \angle ADE$$

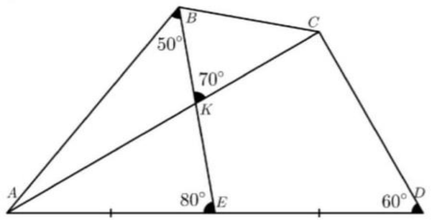
★98 Caracterización de cuadriláteros cíclicos mediante vértices contiguos.
Un cuadrilátero es cíclico si y sólo si los dos ángulos determinados por dos de sus vértices contiguos y el lado opuesto común son congruentes.



$\angle DAC = \angle DBC$

12.1.1 [M]

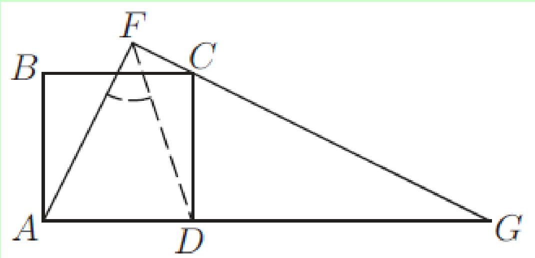
Determina el ángulo $\angle BCA$ en el cuadrilátero de la figura:



Novosibirsk Oral Olympiad in Geometry Grade 8 2021#3

12.1.2 [F] **Problema solucionado paso a paso en vídeo.**

En la figura, el triángulo ΔAFG es rectángulo en el vértice F y ABCD es un cuadrado. Determina el ángulo ∠AFD.



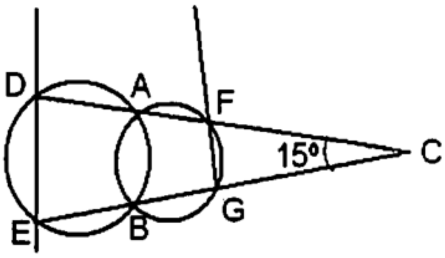
(A) 30º (B) 36º (C) 45º (D) 54º (E) Depende de la posición del punto G.

Cangur B2 2016 #29

Solución: https://youtu.be/Giii6xVZgGY

12.1.3 [F]

Dos circunferencias se cortan en los puntos A y B. Se traza una recta por A y otra por B que se cortan en C formando un ángulo de 15º. La recta por A corta a los dos círculos en D y F, y la recta por B, en E y G, como se ve en la figura.



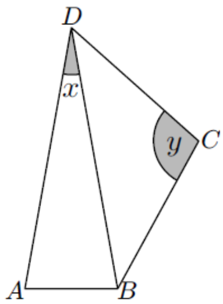
¿Qué ángulo forman las rectas DE y FG?

(A) 10º (B) 15º (C) 20º (D) 30º (E) Son paralelas

Canguro N4 2012 #29

12.1.4 [F]

El cuadrilátero convexo ABCD de la figura tiene área unidad y está construido adjuntando dos triángulos isósceles ABD i BCD. Los valores de los ángulos en gris de la figura son x=∠ADB =20º , y=∠DCB=100º. Determina el valor del producto AC · BD.



$(A)\,\frac{\sqrt{3}}{3}$ $(B)\,\frac{2\sqrt{3}}{3}$ $(C)\,\sqrt{3}$ $(D)\,\frac{4\sqrt{3}}{3}$ $(E)\,1$

Cangur N4 2004 #30, Canguro N6 2004 #30, Kangaroo Student 2004 #30

12.1.5 [M] **Problema solucionado paso a paso en vídeo**

Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB > AC$. La mediatriz de BC corta al lado AB y a la prolongación del lado AC en los puntos P y Q respectivamente. Prueba que las circunferencias circunscritas de los triángulos ABQ y ACP tienen un punto común en la recta PQ.

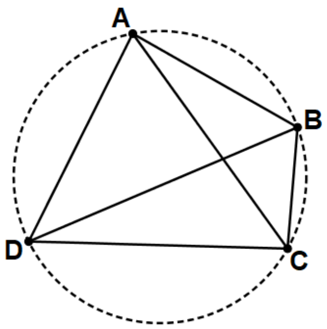
OMEFL Castilla y León 2023 #2

Solución: https://youtu.be/ZOmkMyo7Ugs

12.2 Teorema de Ptolomeo.

Resumen teórico.

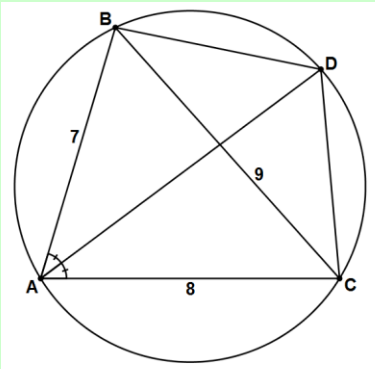
★99 Teorema de Ptolomeo.
Un cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los productos de sus lados opuestos es igual al producto de sus diagonales.



$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

12.2.1 [F] Problema solucionado paso a paso en vídeo.

Sea ΔABC un triángulo cumpliendo $AB = 7$, $AC = 8$ y $BC = 9$. Sea D un punto en la circunferencia circunscrita de ΔABC de forma que AD es la bisectriz interior del ángulo $\angle BAC$. Determina el valor de AD / CD.



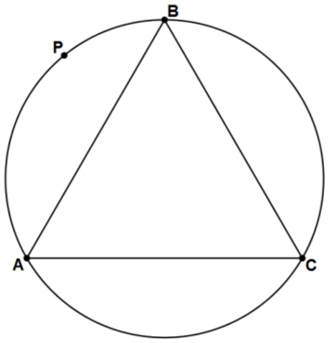
(A) 9/8 (B) 5/3 (C) 17/7 (E) 5/2

AMC 10B 2004 #24

Solución: https://youtu.be/dxVSFfBJBIc

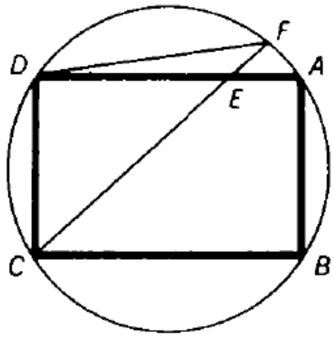
12.2.2 F

Sea ΔABC un triángulo equilátero. Sea P un punto en la circunferencia circunscrita perteneciente al arco menor de AB. Demuestra que $PC = PA + PB$.



12.2.3 F

Sea E un punto en el lado $\overline{AD}$ de un rectángulo ABCD, de forma que $DE = 6$, $DA = 8$ y $DC = 6$. Extendemos el segmento $\overline{CE}$ hasta cortar la circunferencia circunscrita del rectángulo en F. Determina la longitud del segmento $\overline{DF}$.

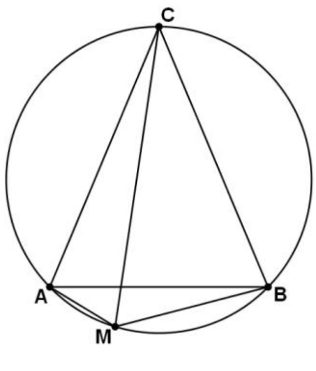


Fuente: Challenging Problems in Geometry (A.S.Posamentier, pág. 44)

12.2.4 MF

Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AC = BC$, y sea M cualquier punto perteneciente al arco menor BC de la circunferencia circunscrita a ΔABC. Demuestra que

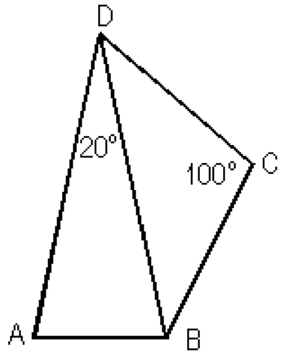
$$\frac{MA + MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$$



Fuente: Mathematical Excalibur, Vol. 18, No. 1, May.-Aug. 13

12.2.5 F

ABCD es un cuadrilátero convexo de área unidad, siendo AB y BD las bases de dos triángulos isósceles ABD y BCD, respectivamente, como se ve en la figura. El producto AC·BD es igual a:

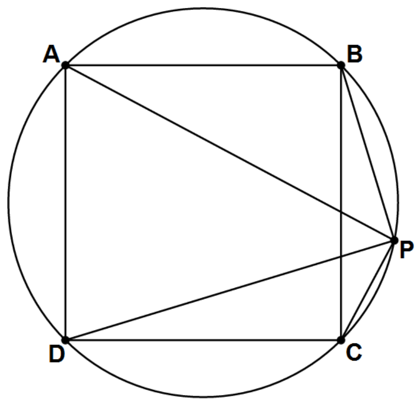


(A) √3/3   (B) 2√3/3   (C) √3   (D) 4√3/3   (E) Otra respuesta

Canguro N6 2004 #30, Cangur N4 2004 #30

12.2.6 M

Sea P un punto en la circunferencia circunscrita de un cuadrado ABCD satisfaciendo $PA \cdot PC = 56$ y $PB \cdot PD = 90$. Determina el área de ABCD.



AIME I 2023 #5

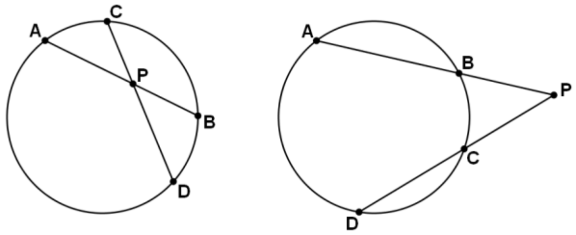
12.3 Potencia de un punto.

Resumen teórico.

★100 Teorema de la potencia (POP).

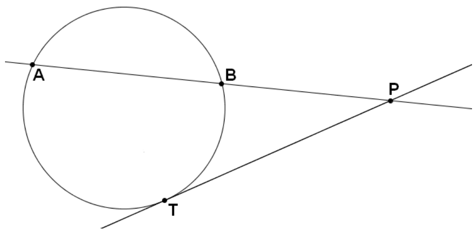
Sean A, B, C y D cuatro puntos cocíclicos. Para cualquier punto P,

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$



Este teorema admite un recíproco, es decir, si existe un punto P para el que se cumple $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, entonces A, B, C y D son cocíclicos (ver GA/10.2.3 para más detalles)

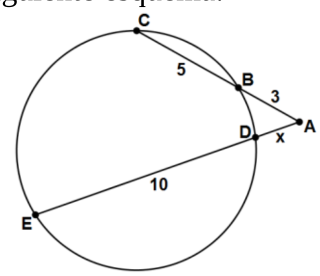
★101 Teorema Tangente-Secante.



TP es tangente a $\varpi \Leftrightarrow TP^2 = AP \cdot BP$

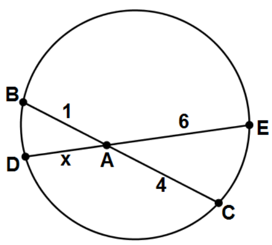
12.3.1 MF

Determina la longitud x en el siguiente esquema:



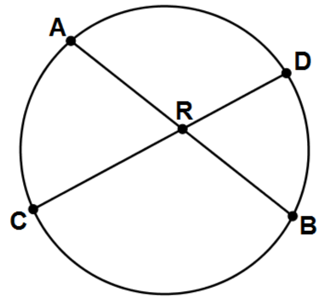
12.3.2 MF

Determina el valor de x en el siguiente esquema:



12.3.3 F

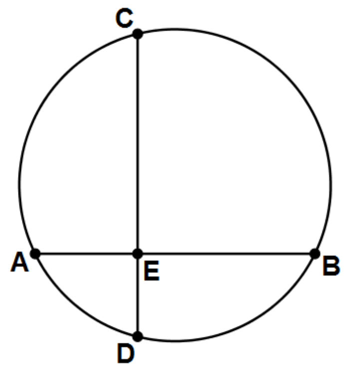
Sean AB y CD cuerdas de una misma circunferencia que se cortan en el punto R. Si $AR:BR=1:4$ y $CR:DR=4:9$, determina la razón $AB:CD$.



ARML

12.3.4 MF

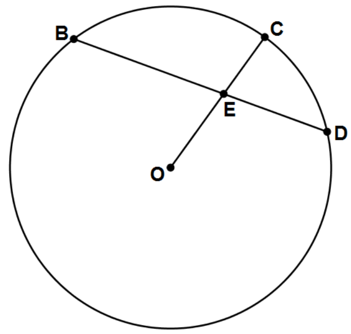
Las cuerdas AB y CD de una circunferencia dada son perpendiculares y se cortan en un ángulo recto en E. Suponiendo que BE=16, DE=4 y AD=5, determina CE.



ARML

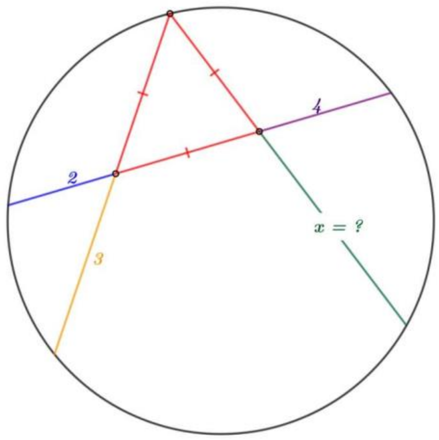
12.3.5 MF

Sea DEB una cuerda de una circunferencia con centro O tal que DE=3 y EB=5. Extendemos OE hasta cortar la circunferencia en C. Suponiendo que EC=1, determinar el radio de la circunferencia.



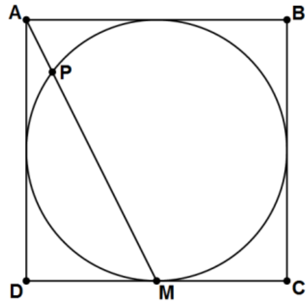
Canadian MO 1971 #1

12.3.6 F



12.3.7 M

En un cuadrado ABCD de lado unidad, trazamos la circunferencia inscrita ω que toca el lado $\overline{CD}$ en M, y sea $P \neq M$ el segundo punto de corte entre ω y $\overline{AM}$. Determina la longitud AP.

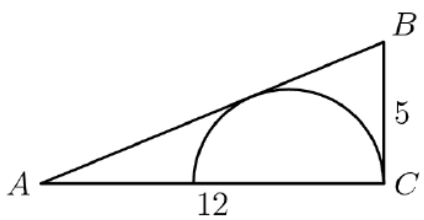


(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{12}$ (B) $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$ (C) $\dfrac{\sqrt{5}}{9}$ (D) $\dfrac{\sqrt{5}}{8}$ (E) $\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$

AMC 12B 2020 #10

12.3.8 M

Sea ΔABC un triángulo rectángulo en C, con $AC = 12$ y $BC = 5$. Trazamos una semicircunferencia inscrita tal y como se muestra en la figura. Determina el radio de esta semicircunferencia.



(A) $\dfrac{7}{6}$ (B) $\dfrac{13}{5}$ (C) $\dfrac{59}{18}$ (D) $\dfrac{10}{3}$ (E) $\dfrac{60}{13}$

AMC 8 2017 #22

12.4 Problemas con figuras inscritas en circunferencias.

12.4.1 [M] Problema solucionado paso a paso en vídeo.

Sea ΔABC un triángulo con lados AB=11, BC=24 y CA=20. La bisectriz de $\angle BAC$ corta $\overline{BC}$ en el punto D, y corta la circunferencia circunscrita de ΔABC en el punto $E \neq A$. La circunferencia circunscrita de ΔBED corta la recta AB en los puntos B y $F \neq B$. Determina CF.

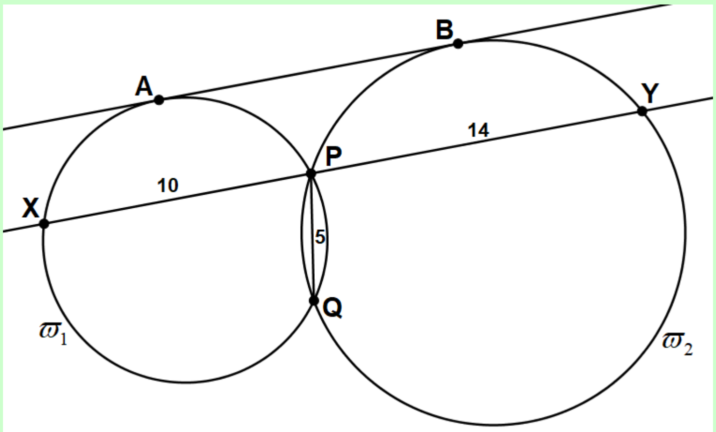
(A) 28 (B) $20\sqrt{2}$ (C) 30 (D) 32 (E) $20\sqrt{3}$

AMC 12B Fall 2021 #24

Solución: https://youtu.be/qBaBlS5tRkk

12.4.2 [M] Problema solucionado paso a paso en vídeo.

Las circunferencias ϖ_1 y ϖ_2 se cortan en dos puntos P y Q, y su recta tangente común más cercana a P corta ϖ_1 y ϖ_2 en los puntos A y B, respectivamente. La recta paralela a AB que pasa por P corta ϖ_1 y ϖ_2 por segunda vez en los puntos X e Y, respectivamente. Suponiendo que PX=10, PY=14 y PQ=5, el área del trapecio XABY se puede escribir como $m\sqrt{n}$, donde m y n son enteros positivos y n no es divisible por el cuadrado de ningún primo. Determina m+n.

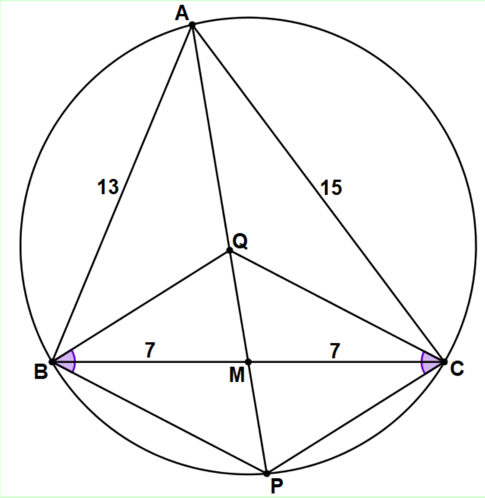


AIME II 2023 #9

Solución: https://youtu.be/5H3I7aEaTGg

12.4.3 [M] **Problema solucionado paso a paso en vídeo.**

Sea un triángulo ΔABC con lados AB=13, BC=14 y CA=15. Sea M el punto medio de $\overline{BC}$. Sea P el punto de su circuncírculo tal que M pertenece a $\overline{AP}$. Entonces existe un único punto Q en el segmento $\overline{AM}$ tal que $\angle PBQ = \angle PCQ$. La longitud AQ se puede escribir como $m/\sqrt{n}$, donde m y n son enteros positivos coprimos. Determina $m+n$.



AIME II 2023 #12

Solución: https://youtu.be/nUx99gNLip4

13 Geometría analítica de cónicas.

13.1 Circunferencias.

13.1.1 F

Sea una circunferencia de radio 5 y centro en el punto (0 ; 0) de un sistema de coordenadas cartesianas. ¿Qué puntos del perímetro de este círculo tienen sus dos coordenadas enteras?

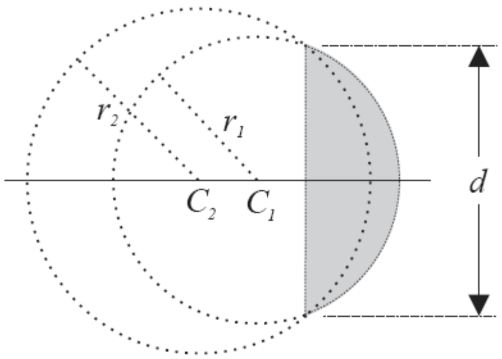
(A) 4   (B) 12   (C) 20   (D) 16   (E) 8

Cangur B2 2022 #21

13.1.2 M

Una lente de contacto es un medio transparente delimitado por dos caras, cada una de ellas parte de una superficie esférica. En la siguiente figura se puede observar una lente de contacto.

En la siguiente figura está representado un corte longitudinal de dos superficies esféricas, una de centro C_1 y radio r_1 y otra de centro C_2 y radio r_2, con $r_2 > r_1$, que sirven de base para la construcción de una lente de contacto, representada como la zona sombreada.



Sea $x = \overline{C_1C_2}$.

Se sabe que el diámetro d de la lente viene dado por

$$\frac{\sqrt{((r_1+r_2)^2 - x^2)\,(x^2 - (r_1-r_2)^2)}}{x}, \text{ con } r_2 - r_1 < x < \sqrt{r_2^2 - r_1^2}$$

Hemos obtenido una lente de contacto a partir de dos superficies esféricas de 7 mm y 8 mm de radio, respectivamente.

El diámetro de dicha lente excede en 9mm la distancia x entre los dos centros de las superficies esféricas.

Determine, recurriendo a las capacidades gráficas de la calculadora, el valor de x, sabiendo que ese valor es único en el intervalo $\left(r_2 - r_1, \sqrt{r_2^2 - r_1^2}\right)$.
No justifique la validez del resultado obtenido por la calculadora.

En su respuesta:

- Presente una ecuación que le permita resolver el problema;
- Reproduzca, en un sistema referencial, los gráficos de las funciones visualizadas en la calculadora que le permiten resolver la ecuación;
- Presente el resultado en milímetros, redondeando a las décimas.

PAU PORTUGAL 635 2019#5

13.1.3 F

Supongamos que los puntos $A = (6,13)$ y $B = (12,11)$ pertenecen a una circunferencia ω. Supongamos, además, que las tangentes a ω por A y por B se cortan en un punto del eje X. Determina el área de ω.

(A) $\frac{83\pi}{8}$ (B) $\frac{21\pi}{2}$ (C) $\frac{85\pi}{8}$ (D) $\frac{43\pi}{4}$ (E) $\frac{87\pi}{8}$

AMC 12B 2019 #20

13.1.4 M

Determina el intervalo que describe el conjunto de valores de a para los cuales las curvas

$$x^2 + y^2 = a^2 \ , \ y = x^2 - a$$

se cortan exactamente en tres puntos del plano cartesiano real.

(A) $a = \frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$ (C) $a > \frac{1}{4}$ (D) $a = \frac{1}{2}$ (E) $a > \frac{1}{2}$

AMC 12A 2018 #16

13.1.5 MF

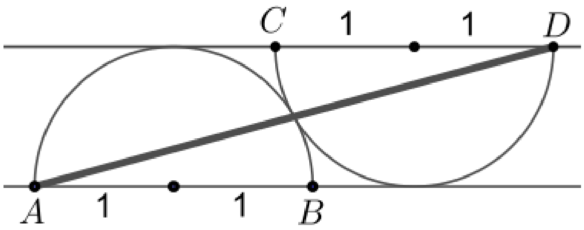
Un círculo con centro (0,0) tiene radio 5. ¿En cuántos puntos del perímetro del círculo ambas coordenadas son números enteros?

(A) 4 (B) 12 (C) 20 (D) 16 (E) 8

Cangur B2 2022 #21, Kangaroo Student 2022 #20

13.1.6 F

La figura muestra dos semicircunferencias iguales, tangentes y de radio 1. Los diámetros, AB y CD, son paralelos. Determina el cuadrado de la distancia AD.



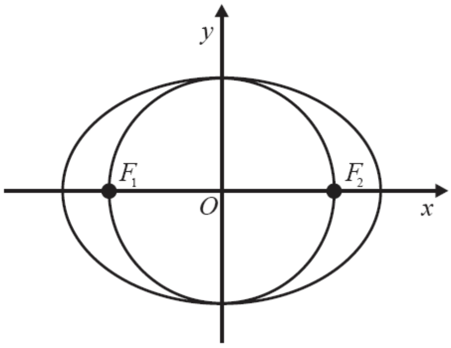
(A) 16 (B) $8+4\sqrt{3}$ (C) 9 (D) 12 (E) $5+2\sqrt{3}$

Cangur B1 2023 #21, Canguro N5 2023 #21

13.2 Elipses.

13.2.1 M

En la figura siguiente están representadas una elipse y una circunferencia, ambas centradas en el origen. Los focos de la elipse, F_1 y F_2 pertenecen al eje X.



Se sabe, además, que:

- La distancia focal y el eje menor de la elipse son iguales al diámetro de la circunferencia.
- El área de la circunferencia es igual a 9π

¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a la ecuación reducida de la elipse?

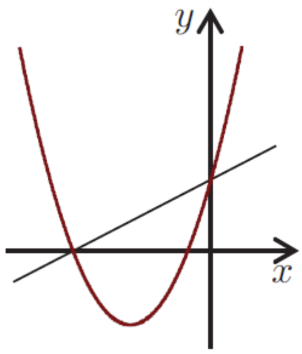
(A) $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$ (B) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{9}=1$ (C) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{20}=1$ (D) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{18}=1$

PAU PORTUGAL 635 2019#9

13.3 Parábolas.

13.3.1 F

La parábola de la figura tiene por ecuación $y = a x^2 + bx + c$.



¿Cuál de las ecuaciones siguientes podría ser la ecuación de la recta de la figura?

(A) y = ax + b   (B) y = bx + c   (C) y = cx + a   (D) y = ax + c   (E) y = cx + b

Cangur B2 2021 #10

13.4 Cónicas en general.

13.4.1 M

La gráfica de $y^4+1=x^4+2y^2$ en el plano coordenado corresponde a

(A) La intersección de dos parábolas.
(B) Dos parábolas disjuntas
(C) La intersección de dos circunferencias
(D) Una circunferencia y una hipérbola
(E) Una circunferencia y dos parábolas.

AMC 12B 2022 #8

14 Transformaciones en el plano.

14.1 D

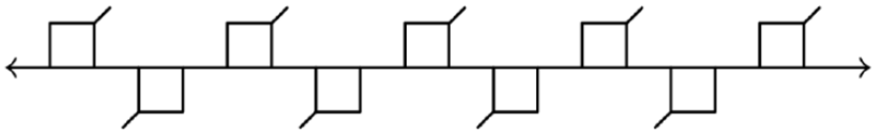
Sea T el triángulo del plano cartesiano con vértices (0,0), (4,0) y (0,3). Consideremos las siguientes cinco isometrías (transformaciones rígidas) del plano: rotaciones de 90º, 180º y 270º en el sentido contrario de las agujas del reloj, simetría respecto del eje X y simetría respecto del eje Y. ¿Cuántas de las 125 secuencias de tres de estas transformaciones (no necesariamente distintas) dejarán T en su posición original? (Por ejemplo, una rotación de 180º, seguida de una reflexión respecto del eje X, y seguida de una reflexión respecto del eje X volverá T a su posición original, pero una rotación de 90º, seguida de una reflexión respecto del eje X y seguida de otra reflexión respecto del eje X no volverá T a su posición original).

(A) 12   (B) 15   (C) 17   (D) 20   (E) 25

AMC 12A 2020 #20

14.2 MF

La siguiente figura muestra una recta l con una pauta regular, infinita y recurrente de cuadrados y segmentos.



¿Cuántas, de entre las siguientes transformaciones rígidas del plano, diferentes de la identidad, transformarán esta figura en sí misma?

- Cierta rotación alrededor de un punto de la recta l.
- Cierta traslación en la dirección paralela a la recta l.
- La reflexión respecto de la recta l.
- Cierta reflexión respecto de una recta perpendicular a la recta l.

(A) 0   (B) 1   (C) 2   (D) 3   (E) 4

AMC 12A 2019 #6

14.3 MF

Determina, entre todas las siguientes transformaciones rígidas (isometrías), la que transforma el segmento $\overline{AB}$ en el segmento $\overline{A'B'}$, de forma que la imagen de $A=(-2,1)$ es $A'=(2,-1)$ y la imagen de $B=(-1,4)$ es $B'=(1,-4)$.

(A) Simetría respecto del eje Y.
(B) Rotación de 90º alrededor del origen y en el sentido contrahorario.
(C) Traslación de 3 unidades hacia la derecha y 5 unidades hacia abajo.
(D) Simetría respecto del eje X.
(E) Rotación de 180º alrededor del origen y en el sentido horario.

AMC 12B 2019 #3

14.4 MF

Dado un punto P(a,b) del plano xy, en primer lugar realizamos una rotación de 90º en el sentido contrahorario alrededor del punto (1,5) y después realizamos una reflexión respecto de la recta $y = -x$. La imagen de P después de estas dos transformaciones es (-6,3). Determina $b - a$.

(A) 1   (B) 3   (C) 5   (D) 7   (E) 9

AMC 12B 2021 #5

14.5 MF

Determina las coordenadas del punto (-1,-2) al ser rotado 270º en sentido antihorario alrededor del punto (3,1).

(A) (-3,-4)   (B) (0,5)   (C) (2,-1)   (D) (4,3)   (E) (6,-3)

AMC 12B 2022 #5

14.6 F

Sea T_k la transformación del plano cartesiano que consiste en una rotación de k grados en el sentido antihorario y después una reflexión respecto del eje Y. Determina el menor entero n tal que la sucesión de transformaciones $T_1, T_2, T_3, ..., T_n$ pasa el punto (1,0) a sí mismo.

(A) 359   (B) 360   (C) 719   (D) 720   (E) 721

AMC 12A 2022 #18

Soluciones.

1.1
Grande → Cuadrado   Triángulo → Pequeño
Así pues:
Azul → Triángulo → Pequeño (E)

1.2
Tomamos el error de 1 año.
Si se lo asignamos al que dice 75:
La abuela puede tener 74, pero entonces no se cumplen las condiciones:
78 → Error 3 años
81→ Error 7 años
La abuela puede tener 76, pero entonces no se cumplen las condiciones.
78 → Error 2 años
81→ Error 5 años
Si se lo asignamos al que dice 78:
La abuela puede tener 77, Sí se cumplen las condiciones.
75 → Error 2 años
81→ Error 4 años
La abuela puede tener 79, y sí se cumplen las condiciones:
75 → Error 4 años
81→ Error 2 años
Si se lo asignamos al que dice 81:
La abuela puede tener 80, pero entonces no se cumplen las condiciones.
75 → Error 5 años
78→ Error 2 años
La abuela puede tener 82, pero entonces no se cumplen las condiciones.
75 → Error 7 años
78→ Error 4 años
Hay dos edades aceptables (E).

Nota: En las soluciones oficiales también aparece (B) como respuesta correcta.

1.3
Supongamos que Berta es positiva. Entonces la respuesta a su pregunta será "sí", es decir, sí son ambos negativos, llegando a contradicción.
Por lo tanto, Berta solo puede ser negativa, y la respuesta a su pregunta será "no", es decir, no son ambos negativos, con lo que forzosamente Alberto será positivo. (C).

1.4
Observamos la siguiente distribución:

	A	C	B	D	E
Figura 1	t	y	x	z	v
Figura 2	y	t	v	x	z

Las madres A y C intercambian entre sí sus hijos, y las madres B, D y E intercambian entre sí sus hijos.

La primera figura tiene dos madres correctas, y la segunda figura tiene tres madres correctas. La única forma de que esto pase es que las madres {A , C} tengan hijos {y, t} , por un lado, y que las madres {B, D , E} tengan hijos {x, z , v}.
Además en la primera figura hay dos parejas correctas, y en la segunda tres, por lo tanto la única posibilidad aceptable es que en la primera imagen las madres A y C estén correctas y que en la segunda imagen las madres B, D y E estén correctas. Así pues, la solución es

A	C	B	D	E
t	y	v	x	z

y la respuesta correcta es D.

1.5
Mediante un pequeño esquema se llega a la conclusión de que es la abuela de Ana (E).

1.6
La B, porque si todos los paquetes hubieran contenido al menos 21 caramelos, en total habría en el bote 21×5=105 caramelos como mínimo.

1.7
La única pieza que cumple estas condiciones es el triángulo gris (C).
Adrián sabe el color, y sabe que Belén conoce la forma, si dice que Belén no puede saber la pieza, seguro que no es blanca, porque si fuera blanca, podría ser el hexágono, y si fuera el hexágono, como es la única pieza deducible sólo por su forma, Belén sabría la pieza que es. Y Adrián asegura que Belén no sabe la pieza. Luego no es blanca.
Ahora Belén dice ahora que sabe la pieza preferida. La única forma que puede ser es el triángulo, y si sabe que es triángulo, no puede ser el triángulo blanco, luego seguro que es el triángulo gris. Es decir, el triángulo gris es la única posibilidad para la cual Belén pudiera saber ya la pieza preferida. Este mismo razonamiento lo hace ahora Adrián, luego él sabe cuál es la pieza preferida.

2.1
C

2.2
Interpretamos los volúmenes como área, tenemos rectángulos y triángulos rectángulos.
Al primero le faltan 4 marcas.
Al segundo le falta $1+\frac{5}{2}=\frac{2}{2}+\frac{5}{2}=\frac{7}{2}=3.5$

Al tercero $2+\frac{4}{2}=2+2=4$

Al tercero $\frac{8}{2}=4$

Al quinto $3+\frac{2}{2}=3+1=4$

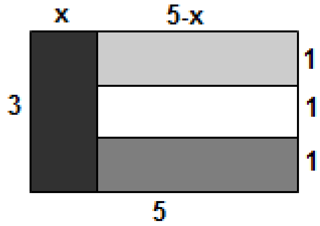
Solución: (B)

2.3

Las áreas de los triángulos entre rectas paralelas son proporcionales a las bases. En todas las figuras las bases, sumadas, completan siempre todo el lado del cuadrado, luego todas las áreas son iguales, excepto en la figura A que tenemos un rectángulo, cuya área será el doble que la del triángulo con su misma base y altura. Así pues, la solución es (A).

2.4

Sea x la anchura del rectángulo de la izquierda. Luego:



Por tener áreas iguales,

$$3x=(5-x)\cdot 1 \Leftrightarrow 3x=5-x \Leftrightarrow 4x=5 \Leftrightarrow x=\frac{5}{4} \Leftrightarrow 5-x=5-\frac{5}{4}=\frac{20-5}{4}=\frac{15}{4} \quad \text{(E)}$$

2.5

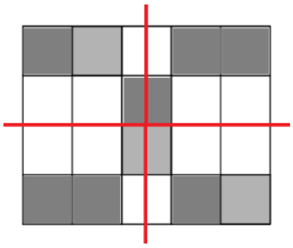
Claramente 1:2 (A)

2.6

Solución: E (Ver Problema 9 del nivel 5)

2.7

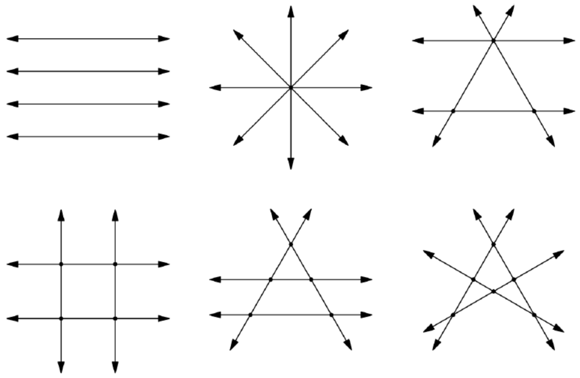
Los ejes de simetría deben ser una recta horizontal y una recta vertical que pasen por el centro de la figura. Completando los recuadros que faltan llegamos a la siguiente figura:



En la que hemos añadido 7 recuadros más (D).

2.8

Vemos que cuatro rectas diferentes en el plano se pueden cortar en 0, 1, 3, 4, 5 o 6 puntos, como se muestra en la siguiente figura:



pero no en 2, luego la solución es $0+1+3+4+5+6=19$ (D)

Observación: En Link podemos encontrar un estudio más riguroso de este problema, en el que se demuestra el máximo de 6 y la imposibilidad del 2.

2.9
El resultado siempre es Área del rectángulo grande menos Área del rectángulo pequeño. (E)

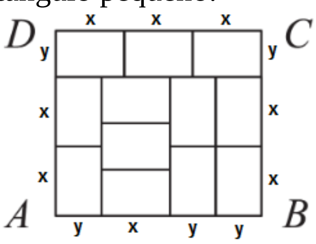
2.10
Basta contarlos: 18 (B)

2.11
Observando atentamente las figuras: (B)

2.12
Son 20/2=10 piezas de largo por 18/2=9 piezas de ancho, en total $10 \cdot 9 = 90$ piezas (A)

2.13
Vemos que para contar únicamente los segmentos exteriores debemos sumar todos los triángulos exteriores y restar los dos triángulos interiores:
425+120+272+120+250-(340+150)=697 (D)

2.14
Sea x, y el ancho y alto de cada rectángulo pequeño:

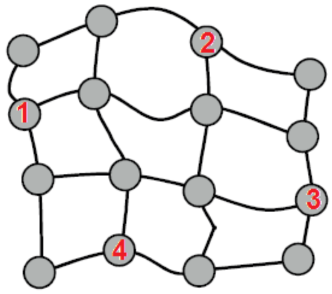


Está claro que $3x = x + 3y \Leftrightarrow 2x = 3y \Leftrightarrow y = \dfrac{2x}{3}$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{2x+y}{3x} = \frac{2x+2x/3}{3x} = \frac{8/3x}{3x} = \frac{8}{9} \quad \text{(A)}$$

2.15
Son 12 por observación detallada de las figuras (B)

2.16
Con tres parece imposible. Con cuatro sí es posible:

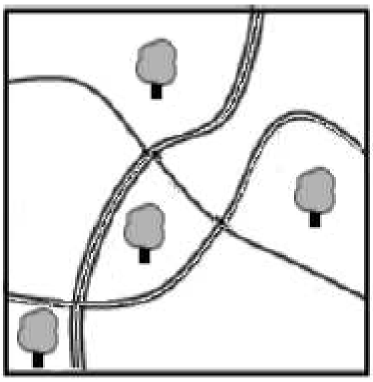


Luego la respuesta correcta es C.

2.17
Observando detalladamente la figura, 3 (B)

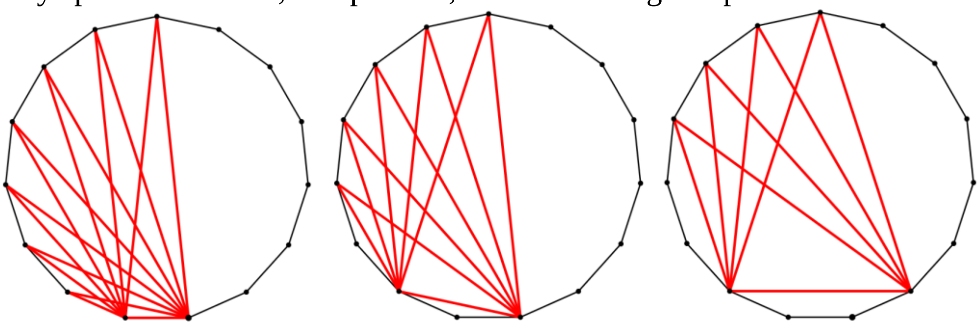
2.18
Lleva 11gastados, necesitará 10 más, un total de 21, luego le sobrarán 9.

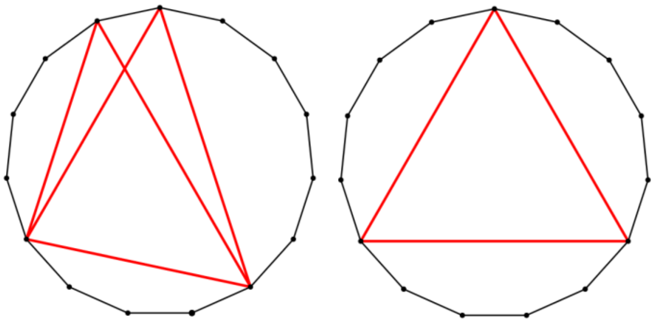
2.19
Añadiendo uno o dos parece imposible. Con tres más encontramos una configuración aceptable:



La respuesta correcta es C

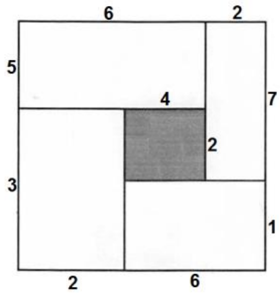
2.20
Cada uno de estos triángulos tendrá uno de sus lados de longitud mínima, es decir, los otros dos lados tendrán longitud mayor o igual que éste. Mediante una rotación si es necesario, podemos suponer que este lado se encuentra en la parte inferior del esquema e inclinado hacia la derecha. Además, mediante una reflexión si es necesario, podemos suponer que este triángulo “apunta” hacia la izquierda, es decir, el tercer vértice está en la parte izquierda del esquema. Con estos principios ya podemos contar, uno por uno, todos los triángulos posibles:





Hay un total de $7+5+4+2+1=19$ triángulos (C)

2.21
El área del cuadrado será la suma de áreas de los cinco rectángulos:
1×6+2×4+5×6+2×7+2×3=64, luego nuestro cuadrado tiene lado $\sqrt{64}=8$.
Jugando con las dimensiones de los rectángulos vemos que una combinación aceptable para que cuadren en un cuadrado de lado 8 es la siguiente:



Es decir, que el rectángulo que queda en la parte central es el 2×4 (B).

2.22
La figura gris tiene un perímetro de 30 segmentos, luego cada segmento representa 240/30=8 cm, y por tanto cada cuadrado tiene un área de 64 cm², luego el área del rectángulo grande es 6×5×64=1920 cm² (E)

2.23
Nos dicen que los triángulos ABC y EAF tienen igual perímetro, es decir:

$$3AB=2AE+AF=2CD+DE$$

Nos piden calcular la razón

$$\frac{AB+BC+CD+DE+EA}{AB+BC+CA}=\frac{2AB+2CD+DE}{3AB}=\frac{2AB+3AB}{3AB}=\frac{5AB}{3AB}=\frac{5}{3} \quad \text{(D)}$$

2.24
Sea P el perímetro exterior del parque.
Sea Q la suma de longitudes de las divisiones interiores del parque.
Está claro que

$$12+11+9+4+6+7+3+4+10=P+2Q \Leftrightarrow 66=P+2Q$$

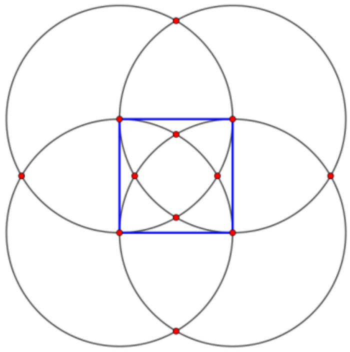
Por otro lado, 3+7+10=Q

$$3+7+10=Q \Leftrightarrow 20=Q$$

Así pues, $66=P+2\cdot 20 \Rightarrow P=66-40=26$ (C).

2.25

Trazando las circunferencias de radio 1 y centro cada vértice podemos contar fácilmente estos puntos:



Hay 12 puntos en total.

3.1.1

Vamos a utilizar la fórmula que permite calcular el punto medio M de un intervalo AB por

$$M = \frac{A+B}{2}$$

En nuestro caso:

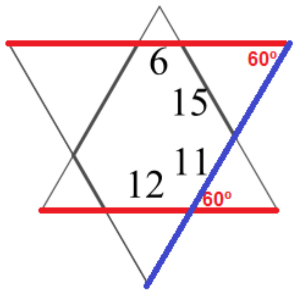
$$\frac{C+D}{2} - \frac{A+B}{2} = \frac{C+D-A-B}{2} = \frac{C-A+D-B}{2} = \frac{12+18}{2} = 15 \quad \text{(A)}$$

3.2.1

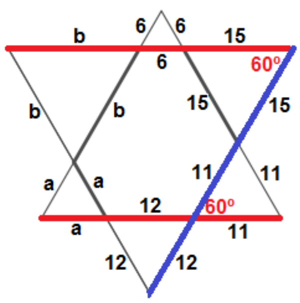
Se ve claramente que el ángulo que falta para completar los 90º es igual a α. Luego la solución es (B)

3.3.1

Los ángulos de un triángulo equilátero son de 60º. Aplicando Ángulos internos alternos por paralelismo (★16) estos 60º los podemos trasladar a todos los demás ángulos:



De esta manera demostramos que todos los triángulos exteriores son también equiláteros, y por tanto todos sus lados son iguales. Ahora podemos copiar las distancias dadas a los lados de los triángulos exteriores:



Con esto vemos que uno de los triángulos tiene lado 6+15+11=32 y el otro 12+11+15=38.
Con estos datos es fácil determinar los segmentos que faltan:
$a = 32 - 12 - 11 = 9$
$b = 38 - 6 - 9 = 23$
y el perímetro es: 15+11+12+9+23=70 (D)

4.1.1
Está claro que los dos lados iguales deben ser de 20, y por tanto el tercero será 2/5 de 20 = 8, luego el perímetro será $20 + 20 + 8 = 48 \quad$ (B)

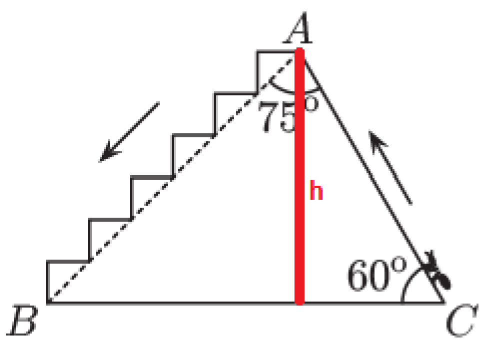
4.1.2

x = 20º

4.1.3
Sea $\alpha = BAC$.
Por ser AD=DB, ΔABD es isósceles, y por lo tanto $\angle DBA = \angle BAD = \alpha$.
Luego $\angle BDC = 2\alpha$.
Por ser CE=CD, ΔCED es isósceles, y por lo tanto $\angle CED = \angle EDC = 2\alpha$, y $\angle ECD = 180^o - 4\alpha$.
Luego $\angle BEC = 180^o - \angle CED = 180^o - 2\alpha$
Por ser BE=EC, ΔBEC es isósceles, y por lo tanto $\angle CBE = \angle BCE = \alpha$.
Finalmente, por ser AB=AC,
$\angle CBA = \angle BCA \Leftrightarrow 2\alpha = \alpha + 180^o - 4\alpha \Leftrightarrow$
$2\alpha = 180^o - 3\alpha \Leftrightarrow 5\alpha = 180^o \Leftrightarrow \alpha = 180^o / 5 = 36^o \quad (E)$

4.1.4
$180^o = (180^o - \alpha) + (180^o - \beta) + 120^o = 180^o - \alpha + 180^o - \beta + 120^o \Leftrightarrow$
$\alpha + \beta = 180^o + 180^o + 120^o - 180^o = 300^o \quad (D)$

4.1.5
Trazamos la altura h por el punto A:



A la derecha nos queda un triángulo rectángulo 30-60-90, cuyos lados mantienen una proporción 1:2:√3,
Luego

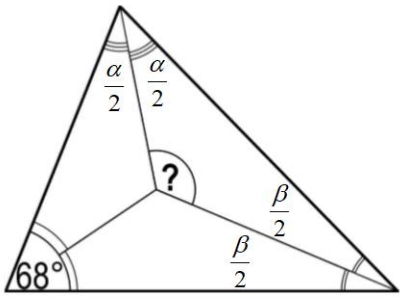
$$\frac{AC}{2} = \frac{h}{\sqrt{3}} \Rightarrow AC = \frac{2}{\sqrt{3}} h$$

A la izquierda nos queda un triángulo rectángulo 45-45-90, y si observamos los peldaños, vemos que los segmentos verticales, unidos, generan un segmento de altura h, y los segmentos

horizontales, unidos, también generan un segmento de altura h, luego la longitud del camino será $2h$.
La razón que nos piden será

$$\frac{2/\sqrt{3}h}{2h}=\frac{2h}{2\sqrt{3}h}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{(A)}$$

4.1.6
Sean α,β los otros dos ángulos de este triángulo.

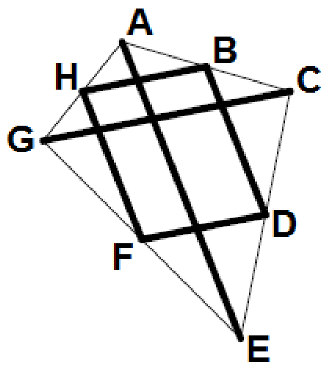


Está claro que $\alpha+\beta+68º=180º \Rightarrow \alpha+\beta=180º-68º \Rightarrow 112º \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{2}=56º$
Por otro lado, aplicando ★22, el ángulo indicado será igual a

$$180º-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}=180º-\frac{\alpha+\beta}{2}=180º-56º=124º \quad \text{(B)}$$

4.1.7
$\angle BAC=180º-\angle ABC-\angle BCA=180º-75º-30º=75º=\angle ABC$, luego ΔABC es un triángulo isósceles, y por tanto $BC=AC=AD$.
Así pues, ΔACD también es isósceles en A, por lo que, finalmente,
$\angle ADC=(180º-DAC)/2=65º$ (D)

4.2.1
Aplicando el Teorema del Conector de Puntos Medios, tendremos

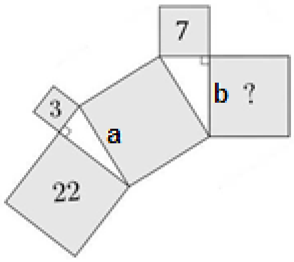


$HB=\frac{1}{2}GC=\frac{80}{2}=40$, $HF=\frac{1}{2}AE=\frac{120}{2}=60$, y por tanto, el total de listón será
$120+2\cdot 60+80+2\cdot 40=400$ (C)

4.2.2
Aplicando Pitágoras, $BC=\sqrt{20^2-12^2}=\sqrt{400-144}=\sqrt{256}=16$

Aplicando el Teorema del Punto Medio, $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{16}{2} = 8$ (B)

4.3.1
Basta aplicar repetidamente el Teorema de Pitágoras, teniendo en cuenta que el área de un cuadrado coincide con el cuadrado de su lado:



$a^2 = 22 + 3 = 25$
$b^2 = 25 - 7 = 18$ (D)

4.3.2
Sea $\alpha = \angle BAD$. Entonces
$$\angle ABD = 180º - \angle BAD - \angle ADB = 180º - \alpha - 90º = 90º - \alpha$$

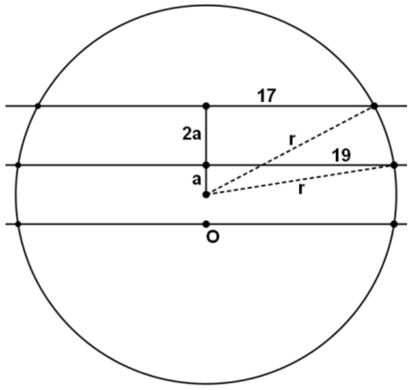
Pero observamos que se cumple
$$90º = \angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 90º - \alpha + \angle DBC \Rightarrow \alpha = \angle DBC .$$
De la misma forma demostramos que $\angle ABD = \angle DCB$, y por tanto, por el criterio AA de semejanza de triángulos, $\Delta ADB \approx \Delta BDC$.

Sea $h = BD$. Aplicando la proporcionalidad de los lados en triángulos semejantes, tenemos que:
$$\frac{3}{h} = \frac{h}{4} \Rightarrow h^2 = 3 \cdot 4 = 12 \Rightarrow h = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$
y por tanto:
$$[\Delta ABC] = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot (3+4) = 7\sqrt{3} \quad \text{(B)}$$

4.3.3
El triángulo interior tiene base 12 y altura 5, luego su área será 30 (B)

4.3.4
Por Pitágoras y proporcionalidad vemos que el lado del cuadrado mayor es
$\sqrt{5} + \sqrt{45} = \sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$, luego el área será $\left(4\sqrt{5}\right)^2 = 16 \cdot 5 = 80$ (B)

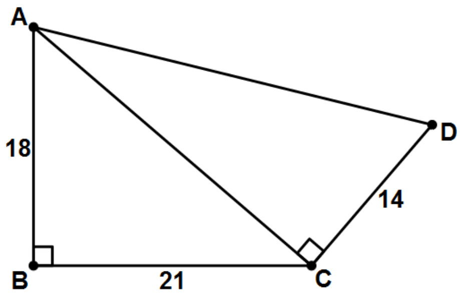
4.3.5
Supongamos que $2a$ es la distancia entre las rectas. Está claro que el centro de la circunferencia debe estar equidistante a las cuerdas de longitudes 38. Sea r el radio de la circunferencia. Aplicando dos veces el Teorema de Pitágoras nos aparecen dos ecuaciones que determinan la distancia buscada:



$$\left.\begin{array}{l} R^2 = (3a)^2 + 17^2 \\ R^2 = a^2 + 19^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 9a^2 - a^2 = 19^2 - 17^2 = (19+17)(19-17) = 36\cdot 2 \Rightarrow a = 3$$

Y por tanto la solución es $2a = 6$ (B)

4.3.6
Construimos el siguiente diagrama:



Basta aplicar Pitágoras dos veces:

$$AC^2 = 21^2 + 18^2$$

$$AD^2 = AC^2 - 14^2 = 21^2 + 18^2 - 14^2 = 961 \Rightarrow AD = \sqrt{961} = 31$$

$$p = 18 + 21 + 14 + 31 = 84$$

4.3.7
La liebre recorrerá 25 km en total. Si x es la distancia que se nos pide, es la hipotenusa de un triángulo de catetos 5 y $\sqrt{x^2 - 5^2}$, luego la ecuación que se nos plantea es:

$$x + \sqrt{x^2 - 25} = 25 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 25} = 25 - x \Leftrightarrow x^2 - 25 = (25 - x)^2 = 25^2 - 50x + x^2$$

$$\Leftrightarrow 50x = 25^2 + 25 = 650 \Rightarrow x = 13 \quad (C)$$

4.3.8
Primera versión. Aplicando el Teorema de la Altura.
Aplicando el Teorema de la Altura en el triángulo rectángulo ΔDBF :

$$CB^2 = DC \cdot CF \Leftrightarrow 3^2 = 4 \cdot CF \Rightarrow CF = 9/4 \Rightarrow DF = 4 + 9/4 = 25/4$$

Aplicando el Teorema de la Altura en el triángulo rectángulo ΔDBE :

$$AB^2 = EA \cdot AD \Leftrightarrow 4^2 = EA \cdot 3 \Rightarrow EA = 16/3 \Rightarrow ED = 3 + 16/3 = 25/3$$

Luego, finalmente,

$$EF^2 = ED^2 + DF^2 = \left(\frac{25}{3}\right)^2 + \left(\frac{25}{4}\right)^2 = 25^2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\right) = 25^2\left(\frac{25}{144}\right) \Rightarrow$$

$$EF = 25\cdot\frac{5}{12} = \frac{125}{12} \quad (C)$$

Segunda versión. Mediante semejanza de triángulos.

Aplicando Pitágoras $DB = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

Está claro que $\Delta ABE \approx \Delta DFE \approx \Delta CFB$ por ser triángulos en posición de Tales.

Por otro lado, $\Delta CFB \approx \Delta FBD$ por ser triángulos rectángulos compartiendo un ángulo agudo.

Y por el mismo motivo, $\Delta CFB \approx \Delta BCD$.

Así pues, $\Delta ABE \approx \Delta BCD$, y por tanto

$$\frac{EB}{AB} = \frac{DB}{CB} \Leftrightarrow \frac{EB}{4} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow EB = \frac{20}{3}$$

De la misma manera, utilizando $\Delta CFB \approx \Delta BCD$,

$$\frac{BF}{BC} = \frac{DB}{DC} \Leftrightarrow \frac{BF}{3} = \frac{5}{4} \Rightarrow BF = \frac{15}{4}$$

Luego, finalmente, $EF = EB + BF = \frac{20}{3} + \frac{15}{4} = \frac{125}{12}$

Tercera versión. Mediante geometría analítica.

La recta DB tiene pendiente 3/4, por lo tanto su recta perpendicular tendrá pendiente -4/3.

La recta EF tendrá por ecuación

$$y = \frac{-4}{3}x + b$$

Y como sabemos que pasa por el punto (4,3) determinamos b:

$$3 = \frac{-4}{3}\cdot 4 + b \Rightarrow b = \frac{25}{3}$$

La recta será $y = \frac{-4}{3}x + \frac{25}{3}$, y por tanto el punto E lo obtenemos evaluando en 0:

$$y = \frac{-4}{3}\cdot 0 + \frac{25}{3} = \frac{25}{3}$$

Y el punto F lo obtenemos resolviendo la ecuación:

$$0 = \frac{-4}{3}x + \frac{25}{3} \Rightarrow x = \frac{25}{4}$$

Ahora solo queda aplicar Pitágoras como en la primera versión.

4.4.1

La única combinación posible $a + b + c = 8$ que satisfaga además la desigualdad triangular es

Luego tomando $a = 3$, $b = 2$, $c = 3$ y aplicando la fórmula de Herón,

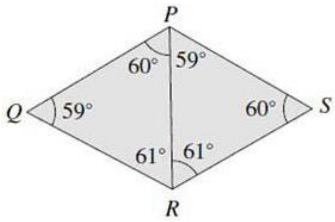
$$[\Delta ABC] = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{4(4-3)(4-2)(4-3)} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\,.$$

4.4.2

Primera versión.

Está claro que ΔPQR y ΔSPR son triángulos semejantes por el criterio AA.

Vemos que $\angle QRP = 180^{\circ} - 59^{\circ} - 60^{\circ} = 61^{\circ}$, y $\angle RPS = 180^{\circ} - 61^{\circ} - 60^{\circ} = 59^{\circ}$.



Ahora aplicamos ★35: Ángulo mayor determina el lado contrario mayor y ángulo menor determina lado contrario menor. En nuestro caso,

En el triángulo ΔPQR : $PQ > QR > PR$

En el triángulo ΔSPR : $PS > PR > RS$

Luego los dos candidatos a segmento más largo son PQ y PS.

Ahora hacemos el siguiente razonamiento: PR es el lado más pequeño de ΔPQR, pero no es el lado más pequeño de ΔSPR, luego el triángulo ΔPQR es mayor que el triángulo ΔSPR, y por tanto el triángulo ΔPQR contendrá el lado mayor, por lo tanto, el lado mayor tendrá que ser forzosamente PQ, y por tanto la respuesta correcta es (A)

Segunda versión.

Con el mismo razonamiento que en la versión anterior, tenemos que decidir entre PQ y PS. Aplicando el Teorema del Seno (★39) en el triángulo ΔPQR,

$$\frac{PQ}{\sin(61^o)} = \frac{PR}{\sin(59^o)} \Rightarrow PQ = \frac{\sin(61^o)}{\sin(59^o)} PR$$

Aplicando el mismo teorema en el triángulo ΔSPR,

$$\frac{PS}{\sin(61^o)} = \frac{PR}{\sin(60^o)} \Rightarrow PS = \frac{\sin(61^o)}{\sin(60^o)} PR$$

Y por tanto

$$PQ > PS \Leftrightarrow \frac{\sin(61^o)}{\sin(59^o)} PR > \frac{\sin(61^o)}{\sin(60^o)} PR \Leftrightarrow \frac{\sin(61^o)}{\sin(59^o)} > \frac{\sin(61^o)}{\sin(60^o)}$$

La función $\sin(x)$ es creciente en $0 \le x \le 90^o$, luego

$$\sin(60^o) > \sin(59^o) \Rightarrow \frac{\sin(61^o)}{\sin(59^o)} > \frac{\sin(61^o)}{\sin(60^o)}$$

Tal y como queríamos ver.

4.4.3

Si x, y son enteros y $xy = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ podemos ir deduciendo, una por una, todos los candidatos posibles para x, y. Si además, x, y , 13 son los lados de un triángulo, deberán cumplir la desigualdades triangular (★34): La suma de dos lados es mayor que el lado restante. En particular, $x + y > 13$. Veamos las posibilidades:

$x = 3 \cdot 5 = 15$, $y = 7 \rightarrow$ cumple las condiciones.

$x = 3$, $y = 5 \cdot 7 \rightarrow$ no cumple las condiciones, pues $x + 13 = 3 + 13 = 16 < 35 = y$

$x = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$, $y = 1 \rightarrow$ no cumple las condiciones, pues $y + 13 = 1 + 13 = 14 < 105 = x$

Observamos que las únicas opciones aceptables son $x=15$, $y=7$; $x=7$, $y=15$. En todo caso, el perímetro es $15+7+13=35$ (A).

4.4.4

Vamos a suponer que los lados están ordenados de mayor a menor: a ≥ b ≥ c. Comprobaremos que se debe cumplir la desigualdad triangular: $a<b+c$

a) $a=9 \Rightarrow b+c=1$ es imposible.
b) $a=8 \Rightarrow b+c=2$ y no se cumple la desigualdad triangular.
c) $a=7 \Rightarrow b+c=3$ y no se cumple la desigualdad triangular.
d) $a=6 \Rightarrow b+c=4$ y no se cumple la desigualdad triangular.
e) $a=5 \Rightarrow b+c=5$ y no se cumple la desigualdad triangular.
f) $a=4 \Rightarrow b+c=6$. Veamos casos:
  f1) $b=5 \Rightarrow c=1$ no se cumple la desigualdad triangular $a+c>b$
  f2) $b=4 \Rightarrow c=2$ es válido.
  f3) $b=3 \Rightarrow c=3$ es válido.
g) $a=3 \Rightarrow b+c=7$. Entonces $b>3$ o $c>3$ y por tanto a ya no es el lado mayor.

Así pues, el número de triángulos aceptables es 2 (D).

4.4.5

Escribimos todas las desigualdades triangulares (★34) que aparecen en los cuatro triángulos definidos por sus caras, en donde hemos llamado a y b a las longitudes desconocidas:

  2<7+a, 7<2+a, a<9,a<7,4<a+3,3<a+4, 7<3+b,3<7+b,b<10,b<6,4<b+2,2<b+4

y las simplificamos:

  5<a, a<9, <<7, 1<a,4<b, b<10, b<6, 2<b

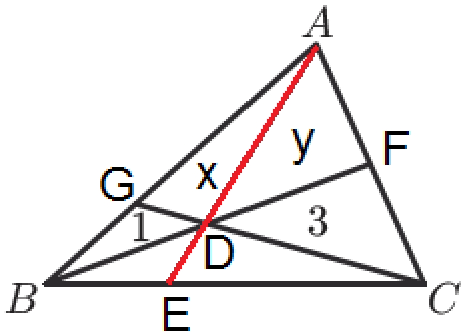
Llegamos a

  5<a<7 y 4<b<6

Que tiene como única solución a=6 y b=5, y por tanto a+b=11

4.5.1

Sea D el punto de intersección de los dos segmentos interiores.
Trazamos la ceviana que pasa por el vértice A y D. Sean E, F y G los puntos de corte entre los segmentos interiores y los lados correspondientes, tal y como se muestra en la siguiente figura:



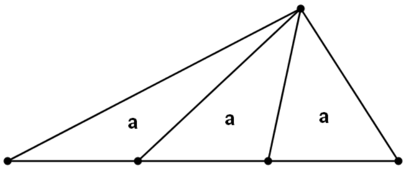
Sean $x=[\Delta ADG]$, $y=[\Delta ADF]$.

$$\frac{GD}{DC}=\frac{x}{y+3}=\frac{1}{3}\Rightarrow 3x=y+3 \quad , \quad \frac{BD}{DF}=\frac{x+1}{y}=\frac{3}{3}\Rightarrow 1 \Rightarrow x+1=y$$

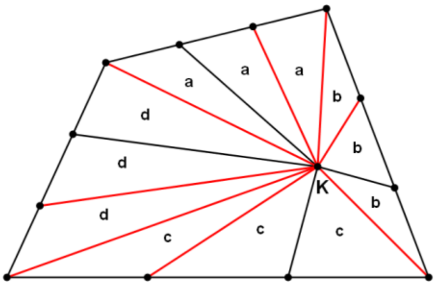
Resolviendo el sistema llegamos a $x=2, y=3$, y por tanto el área total del triángulo grande es $3+3+1+2+3=12$ (A)

4.5.2
Las áreas son proporcionales al cuadrado de los lados. Vemos que el lado superior de estos triángulos sigue una proporción 1:2:3, y por tanto las áreas seguirán una proporción $1:2^2:3^2$, es decir, 1:4:9. (E)

4.5.3
Trazamos los segmentos que unen los puntos de los lados con el punto interior K, y tenemos en cuenta que en un triángulo, si dividimos un lado en tres partes iguales, se generarán tres triángulos con áreas iguales (Elementos 6.1, GA/8.2.6)



Luego estos segmentos generarán cuatro áreas iguales a,b,c,d :



$$\begin{cases} d+a=8 \\ a+a+b+b=10 \\ c+c+d+d=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d+a=8 \\ a+b=5 \\ c+d=9 \end{cases}$$

Y quedemos determinar $b+c$

$$12=-8+5+9=-(d+a)+(a+b)+(c+d)=-d-a+a+b+c+d=b+c$$

Luego el área buscada es 12 (E)

4.5.4
La altura del triángulo ΔBEC por el vértice E es igual a 120, y por tanto

$$[\Delta BEC]=\frac{120\cdot 100}{2}=\frac{125\cdot h}{2}\Leftrightarrow 120\cdot 100=125\cdot h\Leftrightarrow h=\frac{120\cdot 100}{125}=96$$

4.5.5
Sean $a=\overline{BC}$, $b=\overline{AC}$, $c=\overline{AB}=10$.
$50=a+b+c=a+b+10\Rightarrow a+b=40$

Aplicando la fórmula de Herón:

$$s=p/2=25$$

$$100 = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \Rightarrow$$

$$100^2 = 25(25-a)(25-b)(25-10) \Rightarrow (25-a)(25-b) = \frac{100^2}{25\cdot 15} = \frac{80}{3}$$

Llegamos a la ecuación

$$(25-a)(25-(40-a)) = \frac{80}{3} \Leftrightarrow$$

$$(25-a)(a-15) = \frac{80}{3} \Leftrightarrow$$

$$(a-25)(3a-45) = -80 \Leftrightarrow$$

$$3a^2 - 120a + 1125 = -80 \Leftrightarrow$$

$$3a^2 - 120a + 1205 = 0$$

El discriminante de esta ecuación es $\Delta = 120^2 - 4\cdot 3\cdot 1205 = 14400 - 14460 < 0$, negativo, luego no tiene solución: No hay ningún triángulo que cumpla las condiciones del enunciado (A).

4.5.6

$$[\Delta ACB] = [\Delta AXY] + [BCYX] = [\Delta AXY] + [\Delta AXY] = 2[\Delta AXY] \Rightarrow \frac{[\Delta AXY]}{[\Delta ACB]} = \frac{1}{2}$$

Pero por otro lado,

$$\left.\begin{array}{l} [\Delta ACB] = \dfrac{AC\cdot BC}{2} \\ [\Delta AXY] = \dfrac{AY\cdot XY}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{[\Delta AXY]}{[\Delta ACB]} = \frac{AY\cdot XY/2}{AC\cdot BC/2} = \frac{AY\cdot XY}{AC\cdot BC} \Rightarrow \frac{AY\cdot XY}{AC\cdot BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AY}{AC} = \frac{1}{2}\frac{BC}{XY}$$

Observamos también que los triángulos $[\Delta ACB]$ y $[\Delta AYX]$ son semejantes, luego $\dfrac{BC}{XY} = \dfrac{AC}{AY}$ y por tanto, finalmente:

$$\frac{AY}{AC} = \frac{1}{2}\frac{BC}{XY} = \frac{1}{2}\frac{AC}{AY} \Rightarrow \left(\frac{AY}{AC}\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AY}{AC} = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad (C)$$

4.5.7

Es fácil verificar que los triángulos ΔACB, ΔDFE y ΔDEB son 30-60-90. Luego podemos aplicar la proporcionalidad de los lados de estos triángulos: $1:2:\sqrt{3}$

Supongamos que $AC = \sqrt{3}, BC = 1, AB = 2 \Rightarrow [\Delta ABC] = \dfrac{1\cdot\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}/2$

Luego $BD = AB/2 = 1$

Y por tanto, manteniendo las mismas proporciones $1:2:\sqrt{3}$ en el triángulo $[\Delta DEB]$,

$DE = DB/\sqrt{3} = 1/\sqrt{3}$, y por tanto $DF = \dfrac{1}{2}$, y $EF = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

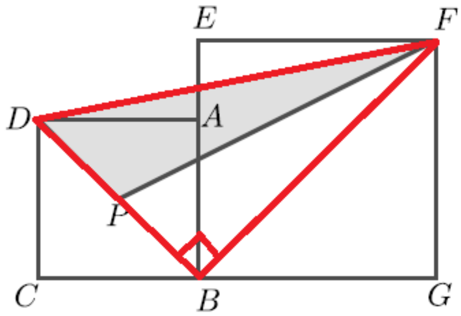
Así pues,

$$[\Delta DEF] = \frac{DF\cdot EF}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{8\sqrt{3}}$$

$$\frac{[\Delta DEF]}{[\Delta ABC]} = \frac{1}{8\sqrt{3}} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{8\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{12} \quad (C)$$

4.5.8
Buscamos un triángulo isósceles, como el segundo, que no sea triángulo rectángulo.
Los candidatos son B, D y E.
El primer triángulo tiene área $4 \cdot 5/2 = 10$, y el segundo tiene área $4 \cdot 4/2 = 8$.
El triángulo B tiene área $4 \cdot 4/2 = 8$ y es un candidato aceptable.
El triángulo D tiene área muy pequeña, y se puede descartar.
El triángulo E tiene área $4 \cdot 6/2 = 12$ y es diferente a los dos presentados, luego se puede descartar.
El único candidato aceptable es (B).

4.5.9
Consideremos el triángulo ΔDBF.



Este triángulo es recto en el vértice B porque

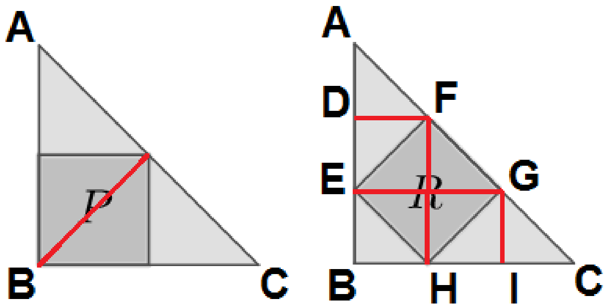
$$\angle DBF = \angle DBA + \angle ABF = 45^o + 45^o = 90^o$$

Luego $[\Delta DBF] = DB \cdot BF / 2 = 7 \cdot 10 / 2 = 35$
Pero el punto P es el punto medio del segmento DB, luego

$$[\Delta DPF] = [\Delta DBF]/2 = 35/2 = 17.5 \quad \text{(E)}$$

4.5.10
Sea T el área del triángulo grande. La figura de la izquierda se puede dividir en cuatro triángulos congruentes, luego

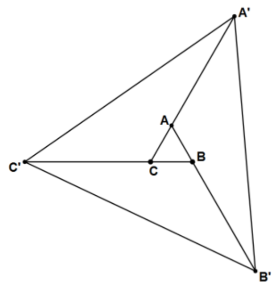
$$P = \frac{1}{2}T \Rightarrow 45 = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 90$$



La figura de la derecha se puede dividir en 9 triángulos rectángulos isósceles iguales, luego

$$R = \frac{4}{9}T = \frac{4}{9}90 = 40 \quad \text{(B)}$$

4.5.11



Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que los lados del triángulo ΔABC tienen longitud 1.

Por ser un triángulo equilátero, $\angle CAB = 60^{o} \Rightarrow \angle B'AA' = 180^{o} - 60^{o} = 120^{o}$

Aplicando ★39,

$$\left[\Delta B'AA'\right] = \frac{B'A \cdot AA' \cdot \sin(B'AA')}{2} = \frac{4\cdot 3\cdot \sin(120^{o})}{2} = \frac{4\cdot 3\cdot \sqrt{3}/2}{2} = 3\sqrt{3}$$

Los otros triángulos tienen el mismo área, y el área de ΔABC se calcula fácilmente determinando su altura mediante Pitágoras: $h = \sqrt{1^2 - (1/2)^2} = \sqrt{3}/2$

$$\left[\Delta ABC\right] = \frac{1\cdot \sqrt{3}/2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Así pues,

$$\left[\Delta A'B'C'\right] = \left[\Delta B'AA'\right] + \left[\Delta C'BB'\right] + \left[\Delta A'CC'\right] + \left[\Delta ABC\right] = 3\cdot\left[\Delta B'AA'\right] + \left[\Delta ABC\right]$$

y por tanto:

$$\frac{\left[\Delta A'B'C'\right]}{\left[\Delta ABC\right]} = \frac{3\cdot\left[\Delta B'AA'\right] + \left[\Delta ABC\right]}{\left[\Delta ABC\right]} = \frac{3\cdot\left[\Delta B'AA'\right]}{\left[\Delta ABC\right]} + \frac{\left[\Delta ABC\right]}{\left[\Delta ABC\right]} = \frac{3\cdot\left[\Delta B'AA'\right]}{\left[\Delta ABC\right]} + 1 =$$

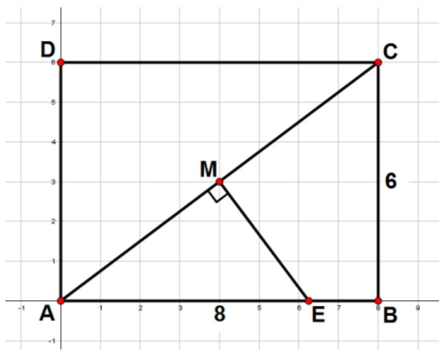
$$= \frac{3\cdot 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}/4} + 1 = 9\cdot 4 + 1 = 37$$

y la respuesta correcta es (E).

4.5.12

Primera versión. Mediante coordenadas cartesianas.

A=(0,0), B=(8,6), C=(8,6), D=(0,6), M=(4,3)



Determinamos la recta perpendicular a AC que pasa por M:

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (8,6) - (0,0) = (8,6) \Rightarrow \vec{w} = (-6,8)$$

$$\frac{x-4}{-6}=\frac{y-3}{8}\Leftrightarrow 4x+3y=25$$

El punto E será su punto de corte con el eje X:

$$4x+3\cdot 0=25\Rightarrow x=25/4\Rightarrow E=(25/4,0)$$

Ahora calculamos la base y altura de este triángulo:

$$AM=\left|\overrightarrow{AM}\right|=\sqrt{4^2+3^3}=5$$

$$ME=\left|\overrightarrow{ME}\right|=\sqrt{(25/4-4)^2+(0-3)^2}=15/4$$

Y por tanto, finalmente, $[\Delta AME]=\frac{5\cdot 15/4}{2}=\frac{75}{8}$ (D)

Segunda versión. Mediante semejanza de triángulos.

Está claro que los triángulos ΔABC y ΔAME son semejantes pues son triángulos rectángulos que comparten el ángulo en A. Luego sus áreas serán proporcionales a los cuadrados de las longitudes de los lados (★37).

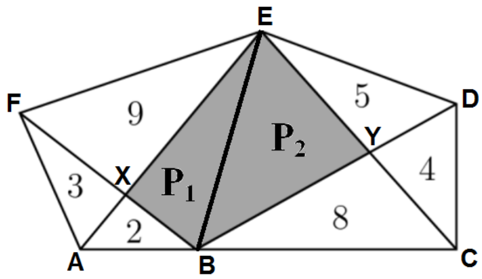
$$AC=\sqrt{8^2+6^2}=10\Rightarrow AM=5$$

$$[\Delta ABC]=\frac{8\cdot 6}{2}=24$$

$$\frac{[\Delta AME]}{[\Delta ABC]}=\frac{AM^2}{AB^2}=\frac{5^2}{8^2}\Leftrightarrow[\Delta AME]=\frac{5^2[\Delta ABC]}{8^2}=\frac{5^2\cdot 24}{8^2}=\frac{75}{8}\quad \text{(D)}$$

4.5.13

Dividiremos el cuadrilátero central P en P_1 y P_2, y sean $X=FB\cap AE$ y $Y=EC\cap BD$, tal y como se muestra en la imagen:



Ahora aplicaremos ★36 reiteradamente:

$$\frac{P_1}{2}=\frac{[\Delta EXB]}{[\Delta AXB]}=\frac{EX}{XA}\quad,\quad \frac{9}{3}=\frac{[\Delta EXF]}{[\Delta AXF]}=\frac{EX}{XA}$$

Luego

$$\frac{P_1}{2}=\frac{9}{3}\Rightarrow P_1=6$$

Y de la misma forma,

$$\frac{P_2}{8}=\frac{[\Delta EYB]}{[\Delta CYB]}=\frac{EY}{YC}\quad,\quad \frac{5}{4}=\frac{[\Delta EYD]}{[\Delta CYD]}=\frac{EY}{YC}$$

Luego

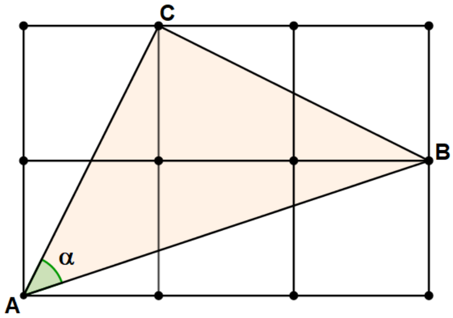
$$\frac{P_2}{8}=\frac{5}{4}\Rightarrow P_1=10$$

Finalmente

$$P = P_1 + P_2 = 6 + 10 = 16$$

4.5.15

Primera versión. Aplicando ★39.



$$[\Delta ABC] = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin\alpha}{2}$$

$$AB = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$AC = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$[\Delta ABC] = 6 - 1 - 1 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5} \cdot \sin\alpha}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^{\text{o}} \quad \text{(C)}$$

Segunda versión. Mediante trigonometría.

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} = \frac{2 - 1/3}{1 + 2 \cdot 1/3} = \frac{5/3}{5/3} = 1 \Rightarrow x - y = 45^{\text{o}}$$

$$\tan x = 2$$

$$\tan y = \frac{1}{3}$$

4.6.1

Los lados de este triángulo serán 6, a+6 y 2a+6 para cierto número a. Está claro que 120º es su ángulo mayor, luego estará opuesto al lado mayor, es decir, a 2ª+6.

Aplicamos el Teorema del Coseno para determinar el valor de a:

$$(6+2a)^2 = 6^2 + (6+a)^2 - 2(6+a) \cdot 6 \cos 120^{\text{o}} \Leftrightarrow$$

$$0 = -72 - 6a - 3a^2 \Leftrightarrow a = \begin{cases} -6 \\ 4 \end{cases}$$

En el contexto en el que estamos, el único candidato aceptable es $a = -6$, y finalmente, aplicando ★39,

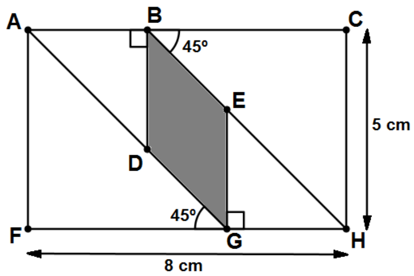
$$[\Delta ABC] = \frac{6 \cdot 10 \cdot \sin 120^{\text{o}}}{2} = 15\sqrt{3}$$

5.1.1

Sea E el punto medio del segmento CD. Entonces $CE = BA = 1$, y $CE \,//\, BA$, luego BAEC es un paralelogramo, y por tanto $EA = BC = 1$.

Por lo tanto, $EA = AD = DE = 1$, luego el triángulo ΔADE es equilátero, y por tanto $\angle ADE = \angle DEA = \angle EAD = 60^\circ$.
Por lo tanto, $\angle CEA = 180^\circ - \angle AED = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.
Por otro lado, el triángulo ΔCEA es isósceles, pues $CE = EA$, luego $\angle CAE = (180^\circ - \angle CEA)/2 = (180^\circ - 120^\circ)/2 = 30^\circ$.
Finalmente, $\angle CAD = \angle CAE + \angle EAD = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$.

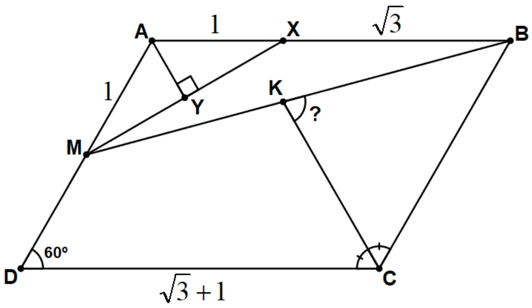
5.1.2
Ponemos letras a los vértices:



Los triángulos ΔBCH y ΔAFG son triángulos 45-45-90, luego $BC = CH = 5$ y $BH = 5\sqrt{2}$.
$\angle BHG = \angle BAG = \angle CBH = 45^\circ$ por ser ángulos internos alternos entre rectas paralelas.
Luego $AB = AC - BC = 8 - 5 = 3$.
Luego los triángulos ΔGEH y ΔABD también son triángulos 45-45-90, luego $DB = AB = 3$.
Por Pitágoras, $EH = AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
Finalmente, $DG = BE = BH - EH = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

5.1.3

Primera versión.
En primer lugar, está claro que, por paralelismo, $\angle DCB = 120^\circ$, y por tanto $\angle DCK = \angle KCB = \angle DCB/2 = 60^\circ$.
Sea X el punto del segmento AB tal que $AX = 1$, $XB = \sqrt{3}$.
El triángulo ΔMAX es un triángulo isósceles (★24), y sabemos que $\angle MAX = 120^\circ$, luego $\angle AMX = \angle AXM = 30^\circ$.
Sea Y el pie de la altura de ΔMAX por el vértice A. El triángulo ΔAYX es un triángulo 30-60-90 con hipotenusa $AX = 1$, luego $YX = \sqrt{3}/2$ y por tanto $MX = \sqrt{3}$, (★26)



Pero entonces el triángulo ΔMXB también es isósceles, puesto que $MX = XB = \sqrt{3}$, con $\angle MXB = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$, luego $\angle AMB = \angle ABM = (180^\circ - 150^\circ)/2 = 15^\circ$.
Así pues, $\angle MBC = \angle ABC - \angle ABM = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$, y por tanto, finalmente, $\angle BKC = 180^\circ - \angle KCB - \angle KBC = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$.

Fuente de esta solución: Soluciones oficiales (IGO, página 121)

Segunda versión.

Aplicando el Teorema del Coseno en ΔABM podemos determinar MB:

$$MB^2 = 1^2 + \left(1+\sqrt{3}\right)^2 - 2\cdot 1\cdot \left(1+\sqrt{3}\right)\cos(120^{\circ}) =$$

$$= 1+1+3+2\sqrt{3}+1+\sqrt{3} = 6+3\sqrt{3} \Rightarrow MC = \sqrt{3\left(2+\sqrt{3}\right)}$$

Aplicando el Teorema del Seno podemos determinar el ángulo $\angle MBC$:

$$\frac{\sin\angle MBC}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sin 120^{\circ}}{\sqrt{3\left(2+\sqrt{3}\right)}} \Rightarrow \sin\angle MBC = \frac{\sin 120^{\circ}\left(1+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3\left(2+\sqrt{3}\right)}} = \frac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{3\left(2+\sqrt{3}\right)}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} \Rightarrow$$

$$\sin^2\angle MBC = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{4\left(2+\sqrt{3}\right)} = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2\left(2-\sqrt{3}\right)}{4\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)} = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2\left(2-\sqrt{3}\right)}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

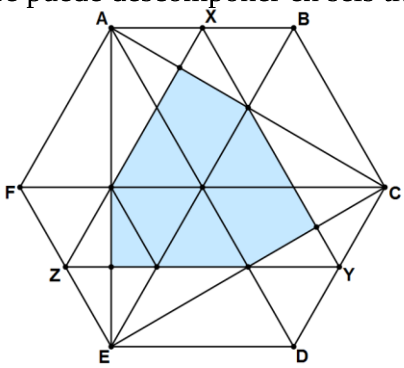
$$\sin\angle MBC = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \angle MBC = 45^{\circ}$$

Por otro lado, está claro que $\angle DCB = 120^{\circ} \Rightarrow \angle CKB = 120^{\circ}/2 = 60^{\circ}$, y por tanto

$$\angle CKB = 180^{\circ} - 45^{\circ} - 60^{\circ} = 75^{\circ}.$$

5.2.1

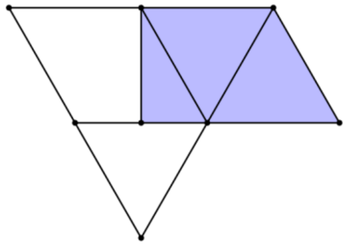
Un hexágono regular de lado 1 se puede descomponer en seis triángulos equiláteros de lado 1.



Sus alturas son, por tanto, $h = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, y sus áreas son

$$a = \frac{1}{2}1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

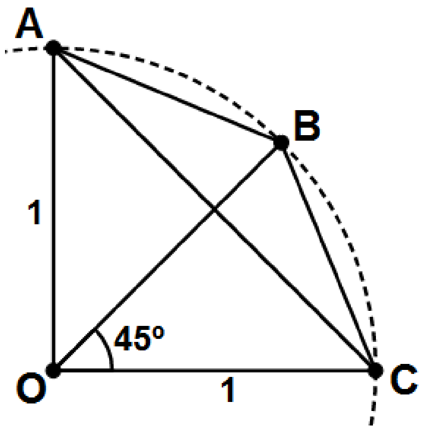
La figura propuesta se puede descomponer en tres figuras iguales cuya área es $\frac{5}{8}a$:



Luego el área total será $3\frac{5}{8}a = 3\frac{5}{8}\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{15}{32}\sqrt{3}$ (C)

5.2.2

Sea O el centro del octógono. Estudiando la figura, este problema se reduce fácilmente a encontrar la razón $[\Delta OAC]/[OABC]$:



$$[\Delta OAC] = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$$

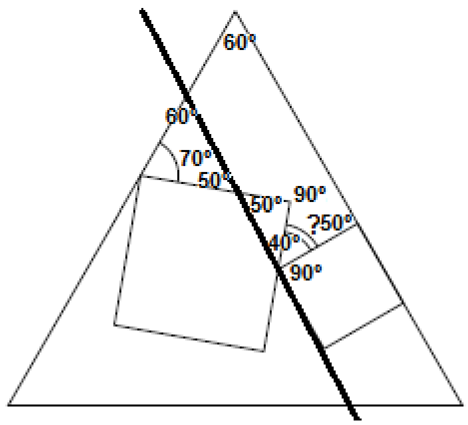
$$[OABC] = 2[\Delta OBC] = 2\frac{1 \cdot 1 \cdot \sin 45º}{2} = \sin 45º = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{[\Delta OAC]}{[OABC]} = \frac{1/2}{1/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (B)$$

5.2.3

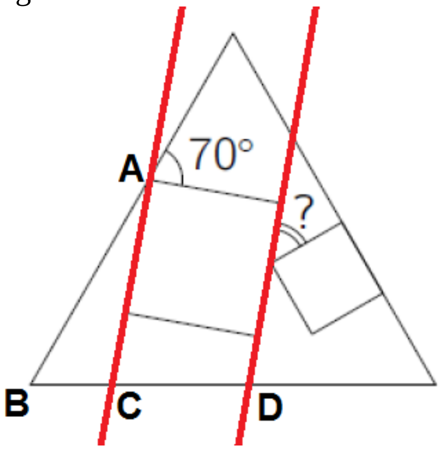
Primera versión.

Trazamos una recta paralela al cuadrado para ir deduciendo los ángulos hasta llegar al resultado de 50º (E)



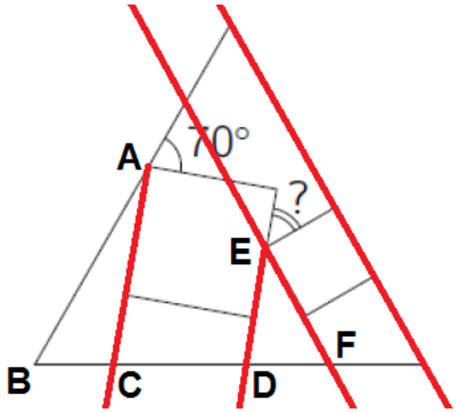
Segunda versión.

Sea ΔABC el triángulo equilátero grande. Prolongamos los lados del cuadrado grande tal y como se indica en la siguiente figura:



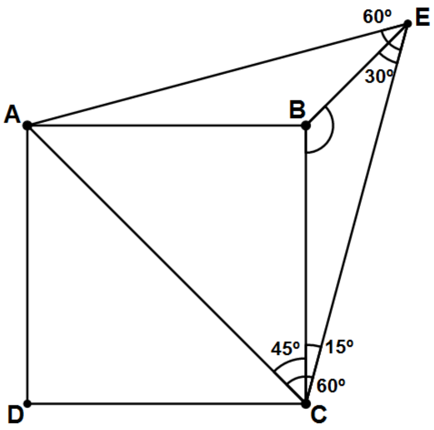
Está claro que los ángulos internos del cuadrado son todos de 90º, luego
$\angle BAC = 180º - 70º - 90º = 20º$
Está claro que los ángulos internos de un triángulo equilátero son de 60º, luego
$\angle ABC = 60º \Rightarrow \angle ACB = 180º - 20º - 60º = 100º \Rightarrow \angle ACD = 180º - 100º = 80º$

Ahora prolongamos los lados del cuadrado pequeño de la derecha:



Hemos visto que $\angle ACD = 80º$
Por paralelismo, tendremos también $\angle EDF = 80º$, y de nuevo por paralelismo con el lado del triángulo equilátero, $\angle EFD = 60º$
Así pues, $\angle DEF = 180º - 80º - 60º = 40º$, y por tanto
$? = 180º - 40º - 90º = 50º$ (E)

5.2.4



El ángulo buscado será $180º - 15º - 30º = 135º$ (C)

5.2.5

ΔDAC es un triángulo rectángulo isósceles, y por tanto $\angle DAC = 45º$.

$\angle OND = 80º \Rightarrow \angle ONA = 180º - \angle OND = 180º - 80º = 100º$

Luego $\angle NOA = 180º - (\angle ONA + \angle DAC) = 180º - (100º + 45º) = 35º$

Por ser ángulos opuestos por el vértice, $\angle COM = \angle NOA = 35º$

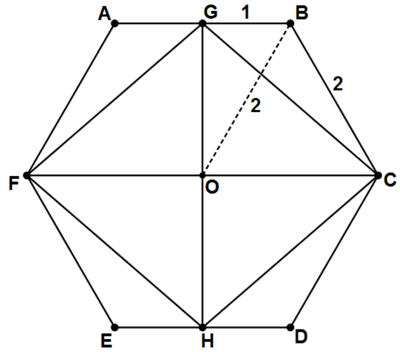
5.2.6

Vemos que los 6 triángulos isósceles blancos que faltan por contar forman tres rombos completos, con área $3 \cdot 5 = 15$, haciendo un total de $6 \cdot 5 + 15 = 45\ \text{cm}^2$ (A)

5.2.7

Sabemos que este hexágono se puede descomponer en seis triángulos equiláteros de lado 2, cuyo centro común denotaremos por O.

La perpendicular a FO por O será altura del triángulo ΔABO, que es un triángulo equilátero, por lo tanto será también mediana, y en consecuencia pasará por el punto medio G de la base AB. De la misma forma, esta misma recta FO será altura de ΔEDO, y por el mismo motivo pasará por el punto medio H de la base ED. Así pues, $GH \perp AB$ y el segmento GH pasa por el centro común O.



Este problema se resuelve fácilmente por Pitágoras:

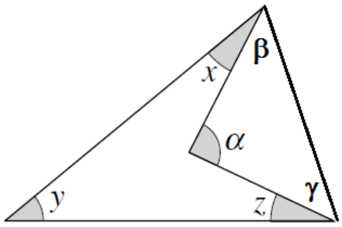
$$GO = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

$$GC = \sqrt{GO^2 + OC^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{3+4} = \sqrt{7}$$

Y por tanto el perímetro es $4GC = 4\sqrt{7}$ (D).

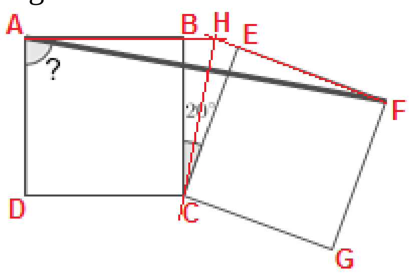
5.3.1
Basta con interpretar la figura como un polígono de 10 lados y aplicar la fórmula de la suma de los ángulos internos de un polígono:
$180^o(10-2)=180^o\cdot 8=1440^o=90+90+90+90+S \Rightarrow S=1080^o$ (D)

5.3.2
Basta trazar el segmento que une los vértices, y denotar los ángulos internos que aparecen, tal y como se muestra en el esquema siguiente:



Está claro que $\alpha=180^o-\beta-\gamma$, y si observamos el triángulo grande, tenemos:
$y+x+\beta+\gamma+z=180^o \Rightarrow 180^o-\beta-\gamma=y+x+z=39^o+22^o+23^o=84^o$ (D)

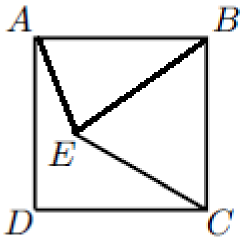
5.3.3
Sean los cuadrados ABCD y EFGC. Los segmentos AB y EF se cortarán en un punto H, tal y como se muestra en la siguiente figura:



AH=HF y AC=CF por simetría, luego AHFC es una cometa, y por tanto $AF \perp HC$.
Luego $\angle BCH=\angle BCE/2=20^o/2=10^o$
$\angle BHC=180^o-\angle HBC-\angle BCH=180^o-90^o-10^o=80^o$
$\angle BAF=180^o-\angle AHC-90^o=180^o-80^o-90^o=10^o$
$\angle FAD=90^o-\angle BAF=90^o-10^o=80^o$ (D)

5.3.4
$\angle ADE=360^o-\angle ADC-\angle CDE=360^o-90^o-110^o=160^o$.
Por ser ΔFED isósceles, $\angle DFE=\angle FED=(180^o-\angle FDE)/2=(180^o-160^o)/2=10^o$
Finalmente, $\angle ADE=180^o-\angle DFE=180^o-10^o=170^o$ (D)

5.3.5
Observamos que $\angle AEB=180^o-75^o-30^o=75^o$, luego el triángulo ΔAEB es isósceles, y por tanto $BE=AB=10=BC$. Así pues, el triángulo ΔBEC también es isósceles.



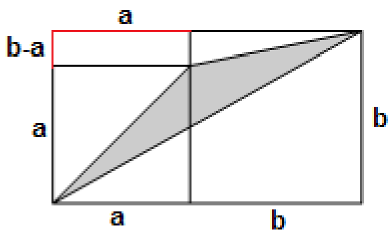
Pero además, $\angle EBC = 90º - \angle ABE = 90º - 30º = 60º$, luego el triángulo ΔBEC es equilátero y por tanto $EC = BE = 10$ (D).

5.4.1

A

5.4.2

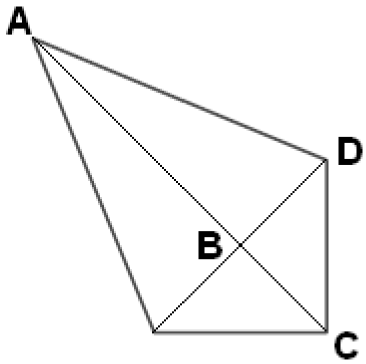
Dividiendo la figura en triángulos y rectángulos:



$$A = \frac{(a+b)b}{2} - a(b-a) - \frac{a^2}{2} - \frac{b(b-a)}{2} = \frac{(a+b)b - 2a(b-a) - a^2 - b(b-a)}{2} =$$
$$= \frac{ab + b^2 - 2ab + 2a^2 - a^2 - b^2 + ab}{2} = \frac{a^2}{2} \quad (B)$$

5.4.3

Observando las distancias que quedan tenemos



$$\left.\begin{aligned} AB &= 1 \\ AC &= \sqrt{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow BC = \sqrt{2} - 1$$

El triángulo ΔBCD es isósceles, luego $BD = BC = \sqrt{2} - 1$

Así pues, el área buscada será $2\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2} = 2 - \sqrt{2}$ (A)

5.4.4
Denotamos por x, y las dimensiones del rectángulo, tenemos una primera ecuación

$$x+\frac{20}{100}x=y+\frac{50}{100}y \Leftrightarrow 4x=5y$$

Queremos determinar $xy=x\frac{4}{5}x=\frac{4}{5}x^2$

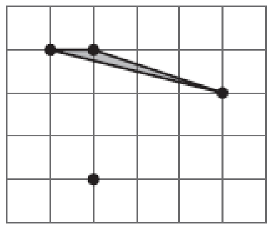
La otra ecuación es

$$\frac{1}{2}\left(x+\frac{20}{100}x\right)^2-\frac{xy}{2}=30 \Leftrightarrow \left(\frac{6}{5}x\right)^2-xy=60 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{6}{5}x\right)^2-\frac{4}{5}x^2=60 \Leftrightarrow \left(\frac{6^2}{5^2}-\frac{4}{5}\right)x^2=60 \Leftrightarrow \frac{16}{25}x^2=60 \Leftrightarrow \frac{4}{5}\frac{4}{5}x^2=60$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{5}x^2=\frac{5}{4}60=5\cdot 15=75 \quad (D)$$

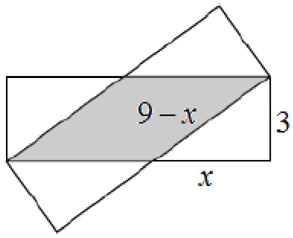
5.4.5
El triángulo más pequeño es el que podemos formar con los tres puntos superiores:



se puede considerar como un triángulo de base 1 y altura 1, luego su área será

$$\frac{1}{2}(1\cdot 1)=\frac{1}{2} \quad \text{(A)}$$

5.4.6
Observando la figura vemos que aparece un triángulo rectángulo de catetos x, 3, e hipotenusa $9-x$

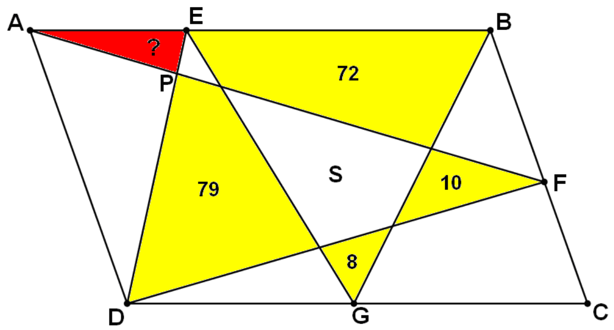


luego aplicando Pitágoras tenemos la ecuación

$$x^2+3^2=(9-x)^2=9^2-18x+x^2 \Leftrightarrow 18x=81-9=72 \Leftrightarrow x=4$$

Y por lo tanto el área buscada es $9\cdot 3-2\frac{4\cdot 3}{2}=27-12=15$ (D)

5.4.7
Llamemos E, F y G a los puntos de los lados del paralelogramo, sea $P=AF\cap DE$, y sea S el área del cuadrilátero interior, tal y como se muestra en la siguiente figura:



Lo primero que vemos es que $[\Delta AFD]=\frac{1}{2}[\Delta ABCD]$, basta trazar la altura del triángulo ΔAFD por F.

Por otro lado (y aquí está la clave para solucionar el problema) $[\Delta AED]+[\Delta EBG]=\frac{1}{2}[ABCD]$

En efecto, trazando la altura h del triángulo ΔAED por su vértice D,

$$[\Delta AED]+[\Delta EBG]=\frac{AE\cdot h}{2}+\frac{EB\cdot h}{2}=\frac{h}{2}(AE+EB)=\frac{h}{2}AB=\frac{1}{2}[ABCD]$$

Así pues:

$$[\Delta AED]+[\Delta EBG]=[\Delta AFD]\Leftrightarrow$$
$$[\Delta AEP]+[\Delta APD]+72+S+8=[\Delta APD]+79+S+10\Leftrightarrow$$
$$[\Delta AEP]+72+8=79+10\Leftrightarrow$$
$$[\Delta AEP]+72+8=79+10-72-8=9$$

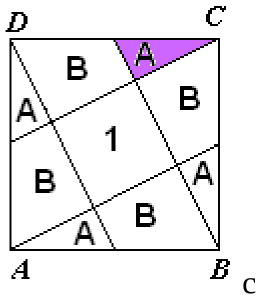
Fuente de esta solución: https://youtu.be/OuJQaxZvlYs

5.4.8

Este cuadrado tiene 9 dm de lado. El triángulo doble de la parte inferior hace $81\div 6\times 2=27\ \text{dm}^2$, luego $27=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot h\Rightarrow h=6\ \text{dm}$ (D)

5.4.9

Aunque no lo indica el enunciado, vamos a suponer que los triángulos rectángulos cortan los lados en sus puntos medios. Sea 2x el lado de este cuadrado.



Etiquetando con A y B las regiones del interior del cuadrado tal y como aparecen en la siguiente figura, trabajando con áreas obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}4A+4B+1=(2x)^2\\ 2A+B=\dfrac{2x\cdot x}{2}=x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4A+4B+1=4x^2\\ 2A+B=x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4A+4B=4x^2-1\\ 4A+2B=2x^2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2B = 2x^2 - 1 \Rightarrow B = x^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow 2A = x^2 - B = x^2 - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{(A)}$$

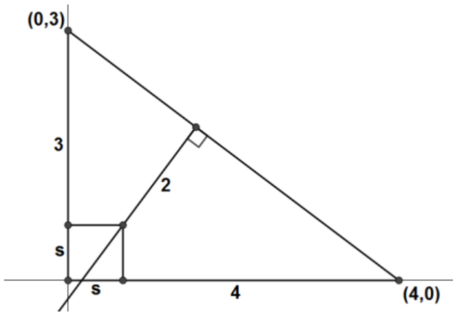
5.4.10

Primera versión. Mediante geometría cartesiana y fórmula de la distancia punto-recta.
La recta asociada a la hipotenusa tendrá ecuación

$$y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} 3 = 0 \cdot a + b \\ 0 = 4 \cdot a + b \end{cases} \Rightarrow b = 3, a = -3/4 \Rightarrow y = \frac{-3}{4}x + 3 \Rightarrow 4y = -3x + 12$$

$$\Rightarrow 3x + 4y = 12$$

Aplicando ahora la fórmula de la distancia entre un punto y una recta, siendo $P = (s, s)$ el vértice del cuadrado S,



Tenemos

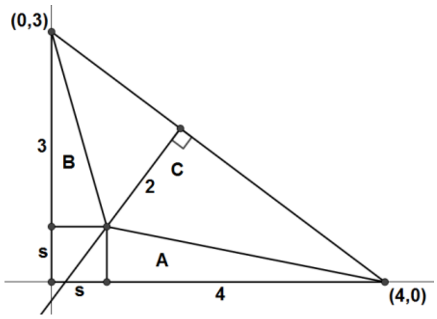
$$2 = \frac{|3s + 4s - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3s + 4s - 12|}{5} \Leftrightarrow 10 = |7s - 12| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10 = 7s - 12 \Leftrightarrow 22 = 7s \Leftrightarrow s = 22/7 \\ 10 = -(7s - 12) = -7s + 12 \Leftrightarrow s = 2/7 \end{cases}$$

Puesto que $22/7 > 3$, la única solución aceptable es $s = 2/7$.
Para este valor, el área del cuadrado S es $s = (2/7)^2$
El área del triángulo es $3 \cdot 4/2 = 6$, y por tanto el área cultivada es $6 - (2/7)^2$, y la razón que nos piden determinar es

$$\frac{6 - (2/7)^2}{6} = \frac{6 \cdot 7^2 - 2^2}{6 \cdot 7^2} = \frac{290}{294} = \frac{145}{147} \quad \text{(D)}$$

Segunda versión. Descomponiendo la figura en triángulos.
Está claro que la hipotenusa del triángulo es $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.



Sea s el lado del cuadrado S.

El triángulo grande de área $3 \cdot 4/2 = 6$ se puede descomponer en el cuadrado S de área s^2, el triángulo A de área $\frac{s(4-s)}{2}$, el triángulo B de área $\frac{s(3-s)}{2}$ y el triángulo C de área $\frac{2 \cdot 5}{2} = 5$.

Así pues,

$$6 = s^2 + \frac{s(4-s)}{2} + \frac{s(3-s)}{2} + 5 \Rightarrow 1 = s^2 + 2s - \frac{s^2}{2} + \frac{3s}{2} - \frac{s^2}{2} \Rightarrow$$

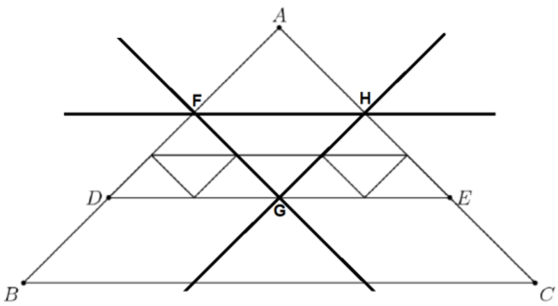
$$1 = 2s + \frac{3s}{2} = \frac{7s}{2} \Rightarrow s = \frac{2}{7}$$

Y se continúa como en la primera versión.

Nota: Consulta en https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AMC_12A_Problems/Problem_17
Hasta seis versiones diferentes para la resolución de este problema.

5.4.11

Prolongamos uno de los lados de los triángulos pequeños determinando los segmentos FG y GH tal y como se muestra en el siguiente esquema:

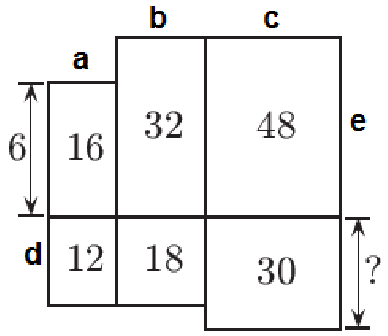


Está claro que $FG // AC$ y que G es el punto medio de DE, luego F es el punto medio de AD y H es el punto medio de AE. Así pues, los triángulos ΔDFG, ΔGHE, ΔFGH y ΔFAH son todos congruentes y semejantes a ΔBAC. Así pues, ΔBAC tiene área 16, y el área del trapecio DBCE es $40 - 16 = 24$ (E).

Nota: En https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AMC_12A_Problems/Problem_8 podemos encontrar hasta seis soluciones alternativas, todas ellas alrededor de estos mismos conceptos.

5.4.12

Marcamos las bases y alturas que faltan tal y como aparece en las siguiente imagen:



$$6a=16 \Rightarrow a=16/6=8/3 \Rightarrow \frac{8}{3}d=12 \Rightarrow d=9/2 \Rightarrow \frac{9}{2}b=18 \Rightarrow b=4 \Rightarrow$$
$$4e=32 \Rightarrow e=8 \Rightarrow 8c=48 \Rightarrow c=6 \Rightarrow 6x=30 \Rightarrow x=30/6=5 \quad (A)$$

5.4.13

Observamos que en cada rectángulo, la parte sombreada es la mitad de la cuarta parte, es decir, una octava parte. Luego el área total T es:

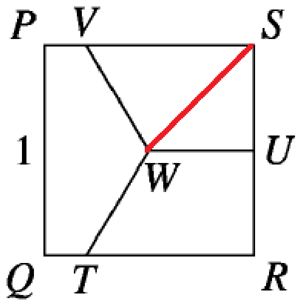
$$3=\frac{1}{8}T \Rightarrow T=24$$

Y por tanto el área no sombreada es $T-3=24-3=21$ (D)

5.4.14

El cuadrado tiene área 1.

Si las tres zonas tienen la misma área, entonces tendrán área 1/3. Trazando el segmento WS, el cuadrilátero VSUW se puede descomponer en los triángulos ΔVSW y ΔSUW .Está claro que el segundo tiene área 1/8.



Luego

$$\frac{1}{3}=\frac{VS\cdot 1/2}{2}+\frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{3}=\frac{VS}{4}+\frac{1}{8}=\frac{2VS+1}{8} \Leftrightarrow 3(2VS+1)=8 \Leftrightarrow$$
$$6VS+3=8 \Leftrightarrow 6VS=5 \Leftrightarrow VS=\frac{5}{6} \quad (E)$$

5.4.15

Puesto que ABCD es un rombo, $AB=AD=AP+PD=3+2=5$, y aplicando Pitágoras,

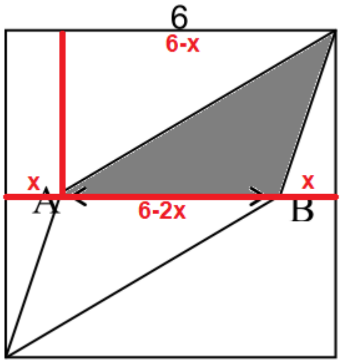
$$BP=\sqrt{AB^2-AP^2}=\sqrt{25-9}=4.$$

Si trazamos la perpendicular a AD por D, podemos transformar la figura en un rectángulo de base AD y altura BP, y por tanto:

$$[ABCD]=AD\cdot BP=5\cdot 4=20 \quad \text{(D)}$$

5.4.16

Podemos simplificar el problema considerando solamente la parte superior, en la que la parte blanca tiene que tener el doble del área que la gris. Sea x la distancia de A al lado izquierdo del cuadrado:



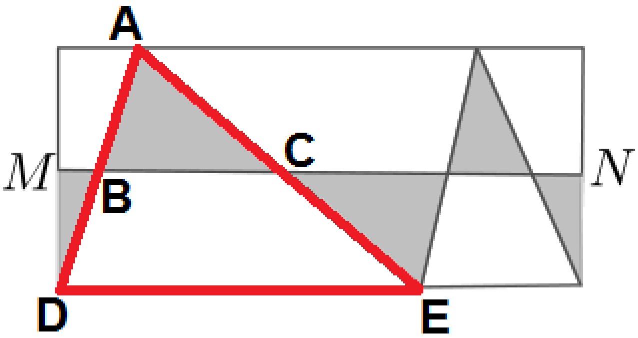
Se nos plantea la ecuación:

$$3x+\frac{3(6-x)}{2}+\frac{3x}{2}=2\cdot\frac{3(6-2x)}{2}\Leftrightarrow x=1$$

Así pues, $AB=6-2x=4$ (C)

5.4.17

Aplicando el Conector de Puntos Medios (★29), en cada uno de los triángulos de la figura, cada triángulo gris pequeño es semejante al grande con una razón de proporcionalidad de 1/2. Por ejemplo:

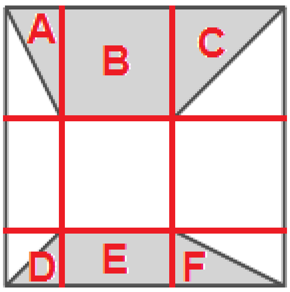


$\Delta ABC\approx\Delta ADE$, $AB/AD=1/2$

Luego el área mantiene una razón de proporcionalidad de $(1/2)^2=1/4$ (★23), y por tanto el área total gris será 1/4 del área total (C).

5.4.18

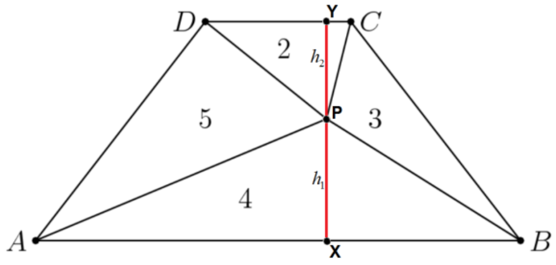
Trazando rectas verticales y horizontales dividimos la zona gris en seis zonas que denotaremos por A, B, C, D, E y F:



Las regiones B y E, unidas, forman un rectángulo de 4×(10-4)=4×6=24 cm².
Las regiones A, C, D, y F, unidas, forman la mitad de un rectángulo de lados (10-4)×(10-4)=6×6=36 cm², luego su área es 18 cm².

En total la zona gris tiene un área de 24+18=42 cm², sobre un total de 10×10=100 cm², es decir, un 42 % (C).

5.4.19
Sea P el punto interior del enunciado. Trazamos una perpendicular a AB por P, y sean X e Y los puntos de corte respectivos con los lados AB y CD. Sean $h_1 = XP$ y $h_2 = YP$.



Aplicando la fórmula del área del triángulo,

$$4 = \frac{h_1 \cdot AB}{2} \Rightarrow 8 = h_1 \cdot AB \Rightarrow h_1 = \frac{8}{AB}$$

$$2 = \frac{h_2 \cdot CD}{2} \Rightarrow 4 = h_2 \cdot CD \Rightarrow h_2 = \frac{4}{CD}$$

Aplicando la fórmula del área del trapecio isósceles (★56),

$$2+3+4+5 = [ABCD] = \frac{(AB+CD)(h_1+h_2)}{2} \Leftrightarrow 28 = (AB+CD)(h_1+h_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 28 = (AB+CD)\left(\frac{8}{AB}+\frac{4}{CD}\right) = 8+4\frac{AB}{CD}+8\frac{CD}{AB}+4 \Leftrightarrow 16 = 4\frac{AB}{CD}+8\frac{CD}{AB}$$

Sea $r = \frac{AB}{CD}$

La ecuación anterior queda de la forma $16 = 4r + 8\frac{1}{r} \Leftrightarrow 4 = r + \frac{2}{r}$ que es una ecuación de segundo grado con soluciones $r = 2-\sqrt{2}$ o $r = 2+\sqrt{2}$.
Puesto que estamos suponiendo que $AB > CD$, la primera solución la podemos descartar por ser <1, y nos quedamos con la solución correcta $r = \frac{AB}{CD} = 2+\sqrt{2}$ (B).

Fuente de esta solución: Soluciones oficiales en www.artofproblemsolving.com

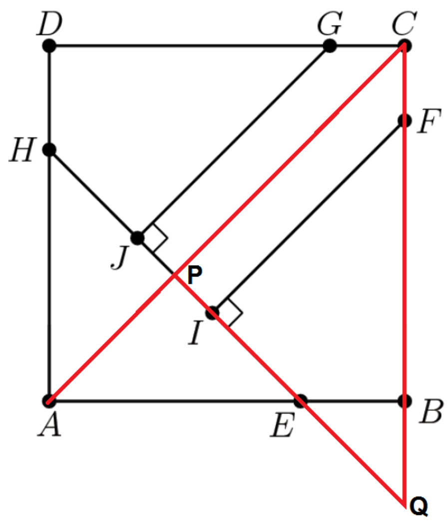
5.5.1
Tenemos un cuadrado de área

$$1+1+1+1 = 4 = AB^2 \Rightarrow AB = 2 \Rightarrow AC = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$1 = [\Delta AEH] = \frac{AE^2}{2} \Rightarrow AE = \sqrt{2}$$

$$EB = AB - AE = 2-\sqrt{2}$$

Prolongamos los segmentos HE y BC hasta su intersección Q. Sea $P = AC \cap HE$.



$$\frac{1}{2}=[\Delta APE]=\frac{AP^2}{2}\Rightarrow AP^2=1\Rightarrow AP=EP=1\Rightarrow PC=AC-AP=2\sqrt{2}-1$$

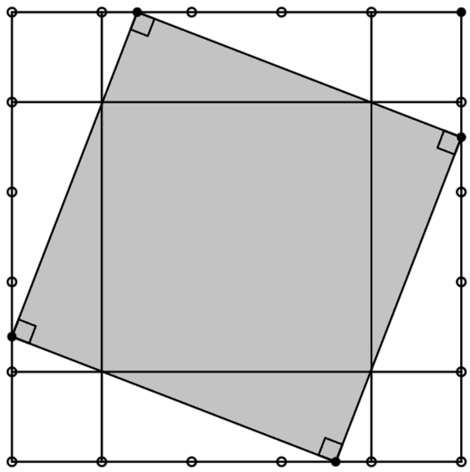
$$[\Delta PCQ]=\frac{PC^2}{2}=\frac{\left(2\sqrt{2}-1\right)^2}{2}$$

$$[\Delta EBQ]=\frac{EB^2}{2}=\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{2}$$

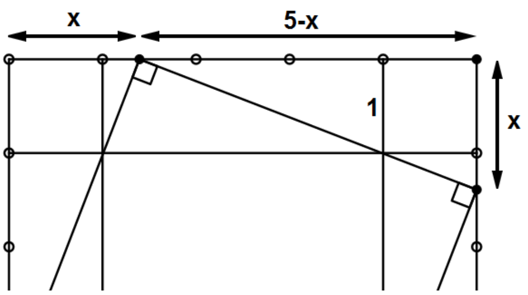
$$\frac{IF^2}{2}=[\Delta IFQ]=IFBE+[\Delta EBQ]=1+\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{2}=\frac{2+\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{2}\Rightarrow$$

$$IF^2=2+\left(2-\sqrt{2}\right)^2=2+4+2-2\cdot 2\sqrt{2}=8-4\sqrt{2}\quad (B)$$

5.5.2
La figura resultante es el siguiente cuadrado interior:



Una manera de calcular las medidas de los triángulos interiores es mediante Tales:



$$\frac{1}{5-x-1}=\frac{x}{5-x}\Leftrightarrow\frac{1}{4-x}=\frac{x}{5-x}\Leftrightarrow 5-x=(4-x)x=4x-x^2$$

$$\Leftrightarrow 5-x-4x+x^2=0\Leftrightarrow x^2-5x+5=0\Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$$

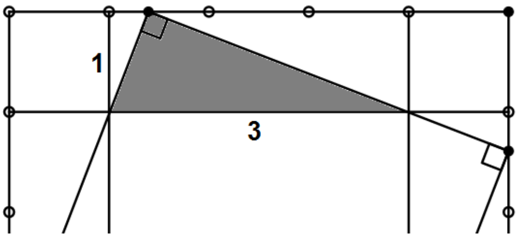
Con las dos soluciones llegamos al mismo resultado, tomemos la que lleva la suma (aunque en el esquema superior hemos tomado la que lleva resta):

$$x=\frac{5+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow 5-x=5-\frac{5+\sqrt{5}}{2}=$$

$$=\frac{10-\left(5+\sqrt{5}\right)}{2}=\frac{10-5-\sqrt{5}}{2}=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

Y su área es, por lo tanto: $\frac{1}{2}\frac{5+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{5+\sqrt{5}}{2}=\frac{5^2-5}{8}=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$, y el área total del cuadrado interior será: $5^2-4\frac{5}{2}=25-10=15$.

Segunda versión. En realidad todos estos cálculos no eran necesarios, pues basta ver que los triángulos interiores tienen base 3 y altura 1:

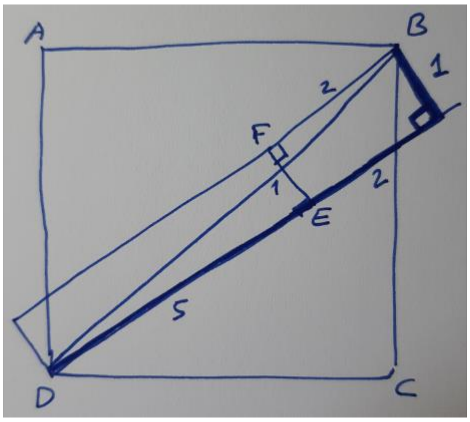


Con lo cual el área del cuadrado interior es $3^2+4\frac{1}{2}3\cdot 1=9+6=15$

Fuente: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2015_AMC_8_Problems/Problem_25

5.5.3

Prolongando los rectángulos interiores que forman dichos ángulos rectos podemos construir un rectángulo de lados 7 y 1 cuya diagonal será la diagonal del cuadrado:



$D^2 = 7^2 + 1^2 = 50$

Luego $2L^2 = L^2 + L^2 = D^2 = 50 \Rightarrow L^2 = 25 \Rightarrow L = 5$ (E)

5.5.4

(B) Ver problema 2.44.

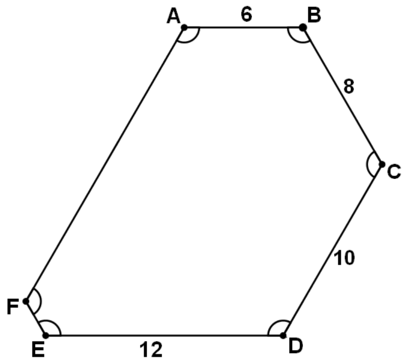
5.5.5

Primera versión.

Sabemos que la suma de ángulos internos de un polígono de n lados es igual a $180(n-2)$, luego en nuestro caso , $180(6-2) = 180 \cdot 4 = 720^{\text{o}}$.

Puesto que es equiangular, cada uno de los ángulos internos medirá $\dfrac{720}{6} = 120^{\text{o}}$.

Podemos dibujar este hexágono mediante regla y transportador de ángulos, y observaremos que sus lados opuestos son paralelos.

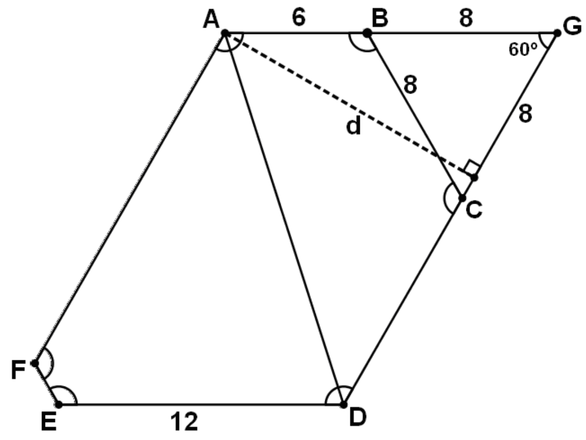


En efecto, prolongando los lados AB y CD hasta encontrarse en un punto G, vemos que $\angle CBG = \angle BCG = 180 - 120^{\text{o}} = 60^{\text{o}} \Rightarrow \angle BGC = 180^{\text{o}} - 60^{\text{o}} - 60^{\text{o}} = 60^{\text{o}}$

Y por tanto el triángulo ΔBGC es un triángulo equilátero de lado 8.

Por otro lado, $\angle AGD = 60^{\text{o}}$, y es igual al ángulo suplementario de $\angle EDG = 120^{\text{o}}$, luego AB//DE. Y con razonamientos similares se demuestra que EF//BD y AF//CD.

Así pues, cualquier circunferencia en el interior de este hexágono tendrá diámetro máximo la distancia entre lados opuestos, y vemos que los lados más próximos son AF y CD. Así pues solo nos queda encontrar la distancia d entre AF y CD.

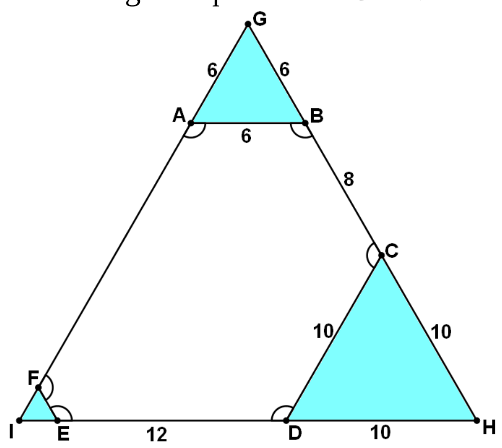


Por trigonometría:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(\angle AGD) = \frac{d}{AG} = \frac{d}{14} \Rightarrow d = \frac{14\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3} \Rightarrow d^2 = 49 \cdot 3 = 147$$

Segunda versión.

Un razonamiento alternativo podría ser el siguiente: Puesto que la figura es equiangular, se puede completar hasta formar un triángulo equilátero ΔGHI :



Los lados de este triángulo miden $10+8+6=24$, y por tanto

$EF = 24-12-10 = 2$, $AF = 24-6-2 = 16$.

El triángulo ΔGHI es semejante a ΔCHD, que tiene altura

$$h = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$$

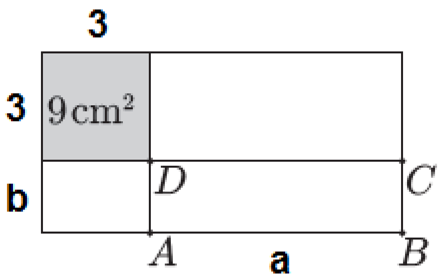
Luego:

$$\frac{h}{10} = \frac{h+d}{24} \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{5\sqrt{3}+d}{24} \Leftrightarrow 24 \cdot 5\sqrt{3} = 10\left(5\sqrt{3}+d\right) \Leftrightarrow$$

$$12\sqrt{3} = 5\sqrt{3} + d \Leftrightarrow d = 12\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3} \Rightarrow d^2 = 147$$

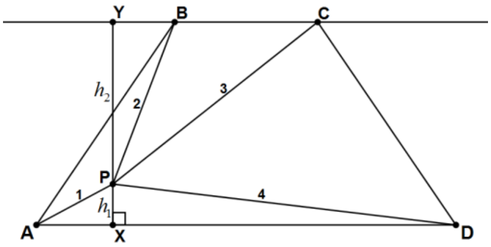
5.5.6

Está claro que el cuadrado de la parte superior izquierda tiene lados iguales a 3. Sea $a = AB = DC$ y $b = DA = CB$



Tenemos $3+b+a+b+3+a+3=30 \Rightarrow 2a+2b+9=30 \Rightarrow 2a+2b=21$, que es precisamente el perímetro del rectángulo ABCD . La respuesta correcta es (E).

5.5.7
Primera versión. Mediante el Teorema de Pitágoras.
Trazamos una perpendicular a AD por P, que cortará los lados AD y BC en X e Y. Sea $h_1 = XP$ y $h_2 = YP$.



Aplicando Pitágoras,

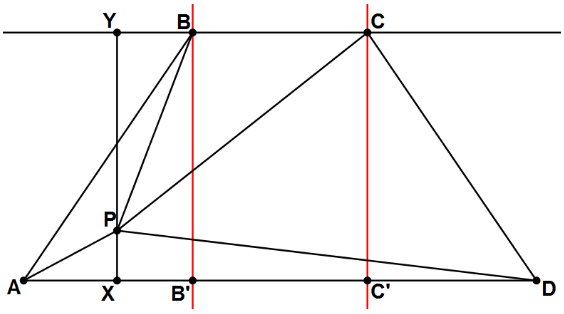
$$\left.\begin{array}{l} 2^2 = YB^2 + h_2^2 \Rightarrow h_2^2 = 4 - YB^2 \\ 3^2 = YC^2 + h_2^2 \Rightarrow h_2^2 = 9 - YC^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 - YB^2 = 9 - YC^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 = YC^2 - YB^2 = (YC - YB)(YC + YB) \Rightarrow 5 = BC \cdot (YC + YB)$$

$$\left.\begin{array}{l} 1^2 = XA^2 + h_1^2 \Rightarrow h_1^2 = 1 - XA^2 \\ 4^2 = XD^2 + h_1^2 \Rightarrow h_1^2 = 16 - XD^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - XA^2 = 16 - XD^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15 = XD^2 - XA^2 = (XD - XA)(XD + XA) \Rightarrow 15 = AD \cdot (XD - XA)$$

Ahora observamos que $YC + YB = XD - XA$. En efecto, trazamos perpendiculares a AD por B y C, y sean B' y C' sus respectivos puntos de corte con AD:



$YC + YB = XD - XA$

$$XD - XA = XC' + C'D - \left(B'A - B'X\right) = YC + C'D - B'A + BY =$$
$$= YC + C'D - B'A + BY$$

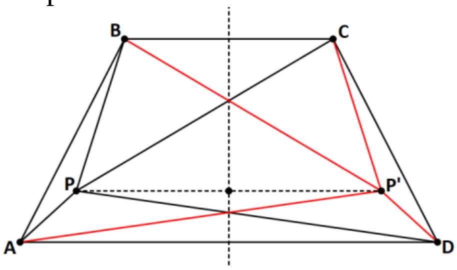
En donde hemos aplicado que, por ser un trapecio isósceles, $\overline{C'D} = \overline{B'A}$.

Finalmente:

$$\left.\begin{array}{l} 5 = BC \cdot (YC + YB) \Rightarrow BC = 5/(YC + YB) \\ 15 = AD \cdot (XD - XA) \Rightarrow AD = 15/(XD - XA) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{BC}{AD} = \frac{5/(YC + YB)}{15/(XD - XA)} = \frac{1}{3} \quad \text{(B)}$$

Segunda versión. Mediante el Teorema de Ptolomeo.

Sea P' el punto simétrico de P respecto de la mediatriz del lado $\overline{AD}$.



El cuadrilátero ADP’P es cíclico, puesto que es un trapecio isósceles, luego podemos aplicar el Teorema de Ptolomeo (★99):

$$AD \cdot PP' + AP \cdot DP' = AP' \cdot PD \Leftrightarrow AD \cdot PP' + 1 \cdot 1 = 4 \cdot 4 \Leftrightarrow AD \cdot PP' = 15$$

El cuadrilátero BCP’P es cíclico, puesto que es un trapecio isósceles, luego podemos aplicar el Teorema de Ptolomeo (★99):

$$BC \cdot PP' + PB \cdot CP' = BP' \cdot PC \Leftrightarrow BC \cdot PP' + 2 \cdot 2 = 3 \cdot 3 \Leftrightarrow BC \cdot PP' = 5$$

Luego

$$\frac{1}{3} = \frac{5}{15} = \frac{BC \cdot PP'}{AD \cdot PP'} = \frac{BC}{AD}$$

Fuente de esta versión: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=2022_AMC_10A_Problems/Problem_23&oldid=192395

5.5.8

Llamaremos y al lado corto y x al lado largo del triángulo. Queremos determinar y/x.
Aplicando Pitágoras, las condiciones del enunciado equivalen a

$$\begin{cases} (x+y)^2 = 3 \\ \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

$$3 = (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 2 + 2xy \Rightarrow 1 = 2xy \Rightarrow \frac{1}{2x} = y$$

$$(x+y)^2 = 3 \Rightarrow \sqrt{3} = x + y = x + \frac{1}{2x} \Rightarrow 2\sqrt{3}x = 2x^2 + 1 \Longrightarrow 2x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{2\sqrt{3} \pm 2}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3} \pm 1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3} \pm 1} \Rightarrow$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1/\left(\sqrt{3} \pm 1\right)}{\left(\sqrt{3} \pm 1\right)/2} = \frac{2}{\left(\sqrt{3} \pm 1\right)^2} = \frac{2}{3 \pm 2\sqrt{3} + 1} = \frac{2}{4 \pm 2\sqrt{3}} = \frac{1}{2 \pm \sqrt{3}}$$

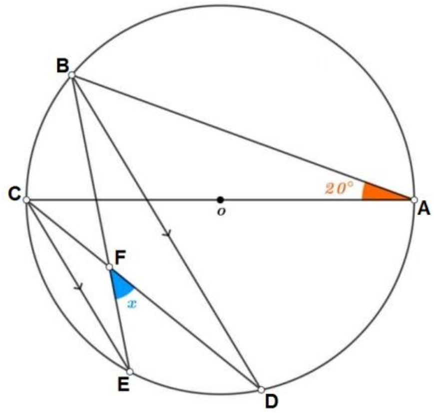
Veamos las dos opciones:

$$\frac{y}{x}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3}$$
$$\frac{y}{x}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$
Puesto que $\sqrt{3}\cong 1.74$, solo la primera opción es compatible con $y<x$, y por tanto la solución es C.

6.1.1

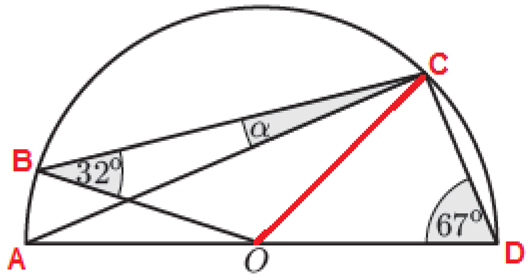
$$\left.\begin{array}{l}\angle OCB=\angle OBC=67^{o}\\ \angle OCA=\angle OAC=22^{o}\end{array}\right\}\Rightarrow \angle ACB=\angle OCB-\angle OCA=67^{o}-22^{o}=45^{o}$$

6.1.2



Por ser ángulos que abarcan un mismo arco, $\angle CDB=\angle CEB=\angle CAB=20^{o}$.
Por ser $CE\,//\,BD$, $\angle EBD=\angle CEB=20^{o}$, luego $\angle BFD=180^{o}-20^{o}-20^{o}=140^{o}$, y finalmente $\angle EFD=180^{o}-140^{o}=40^{o}$

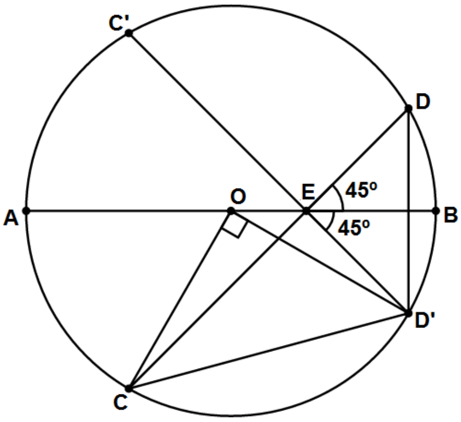
6.1.3
Podemos resolver este problema completando los ángulos de los triángulos isósceles:



$\angle OCD=\angle ODC=67^{o}$, $\angle COD=180^{o}-2\cdot 67^{o}=46^{o}$
$\angle BCO=\angle OBC=32^{o}$, $\angle BOC=180^{o}-2\cdot 32^{o}=116^{o}$
Luego $\angle AOB=180^{o}-46^{o}-116^{o}=18^{o}$
Finalmente, aplicando el Teorema del Ángulo Central (★58):
$$\angle BCA=\angle BOA/2=18^{o}/2=9^{o}\ (C)$$

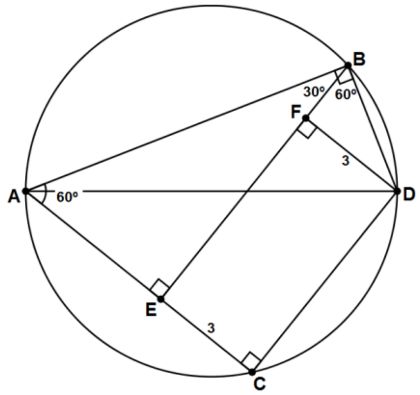
6.1.4
Determinamos la cuerda $\overline{C'D'}$ determinada por los puntos simétricos de C y D respecto del diámetro AB.

$DD' \perp AB$ y por tanto $\angle EDD' = 180 - 90 - 45 = 45º$
Luego, por el teorema del ángulo central, $\angle COD' = 2\angle CDD' = 2\angle EDD' = 90º$

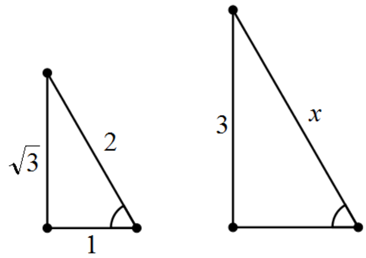


Luego $CD'^2 = r^2 + r^2 = 2r^2 = 2 \cdot \left(5\sqrt{2}\right)^2 = 2 \cdot 25 \cdot 2 = 100$
Y finalmente $CE^2 + DE^2 = CE^2 + D'E^2 = CD'^2 = 100$ (E)

6.1.5
Trazamos la perpendicular a BE por D y sea F su punto de corte con BE. Está claro que EFDC es un rectángulo, y por tanto $EC = FD = 3$. Por otro lado, $\angle ABD = 90º$ por Teorema de Tales, y por tanto $\angle ABE = 180º - \angle AEB - \angle BAC = 180º - 90º - 60º = 30º$ y
$\angle FBD = 90º - \angle ABE = 90º - 30º = 60º$



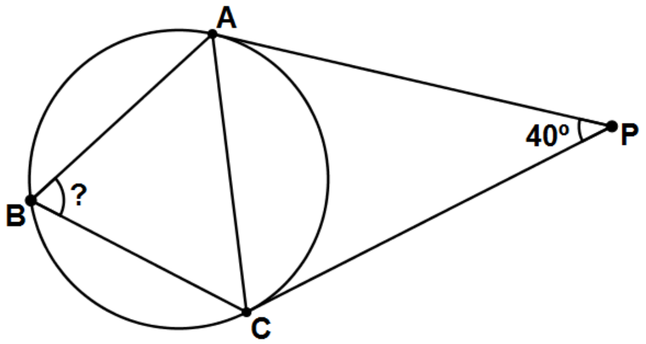
De nuevo, nos aparece el triángulo ΔBDF que es 30º-60º-90º, y sabemos que en dicho triángulo mantiene una proporcionalidad de lados $1 : \sqrt{3} : 2$



$$\frac{x}{2} = \frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \quad \text{(B)}$$

6.1.6
Por el Teorema de Tales (★60) Sabemos que el punto C pertenece a la circunferencia de diámetro AB. Puesto que M es el punto medio de AB, será también el centro de dicha circunferencia. Luego BM=MA=CM, y por tanto el triángulo ΔBMC es isósceles en M. Así pues, ∠CMB=∠B = 180º-90º-60º=30º, y ∠BMC=180º-2·30º=120º (D).

6.2.1
Trazamos el segmento AC.

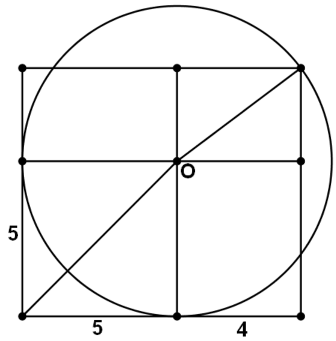


Los segmentos AP y CP son iguales (GA/10.2.9)
Luego el triángulo ΔAPC es isósceles.
Por lo tanto $\angle CAP = (180^{o} - \angle APC)/2 = (180^{o} - 40^{o})/2 = 70^{o}$
Y finalmente, aplicando GA/10.2., $\angle ABC = \angle CAP = 70^{o}$

6.2.2
Por el Teorema de Tales, $\angle ABD = 90^{o}$.
Por GA/10.2.7, $\angle DBC = \angle DAB = 20^{o}$.
Luego $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 90^{o} + 20^{o} = 110^{o}$.
Por lo tanto
$\angle BCA = 180^{o} - \angle ABC - \angle CAB = 180^{o} - 110^{o} - 20^{o} = 50^{o}$

6.2.3
Basta aplicar GA/10.2.7: $40^{o} = \angle ABC$, luego
$\angle BCA = 180 - \angle ABC - \angle BAC = 180 - 65 - 40 = 75^{o}$

6.2.4
Marcamos el centro O de la circunferencia:



Vemos que el radio es $r = 5$
Con lo cual, aplicando de nuevo Pitágoras, deducimos el segmento que falta:
$s = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$
Luego las dimensiones del rectángulo son $A = (5+4)(5+3) = 72$ (C)

6.2.5

Trazamos el segmento OT. Por ser TP tangente a la circunferencia, $\angle OTP = 90^o$.

Sea $\alpha = \angle TPS = \angle SPR$.

Luego $\angle TOP = 180^o - \angle OTP - \angle TPO = 180^o - 90^o - 2\alpha = 90^o - 2\alpha$.

Y por tanto $\angle ROT = 180^o - \angle TOP = 180^o - (90^o - 2\alpha) = 90^o + 2\alpha$

El triángulo ΔROT es isósceles en O, puesto que $RO = TO$, luego

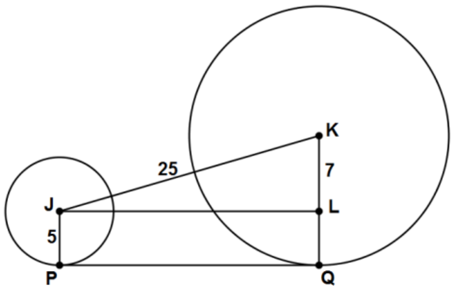
$$\angle RTO = \angle TRO = \frac{180^o - \angle ROT}{2} = \frac{180^o - \angle ROT}{2} = \frac{180^o - (90^o + 2\alpha)}{2} = \frac{90^o - 2\alpha}{2} = 45^o - \alpha.$$

Finalmente:

$$\angle TSP = 180^o - \angle SPT - \angle STP = 180^o - \angle SPT - (\angle STO + \angle OTP) =$$
$$= 180^o - \alpha - (45^o - \alpha + 90^o) = 180^o - \alpha - 45^o + \alpha - 90^o = 45^o \quad (B)$$

6.2.6

Teniendo en cuenta que las rectas tangentes son perpendiculares a los centros por sus puntos de tangencia, tenemos el siguiente esquema que resolveremos por Pitágoras:

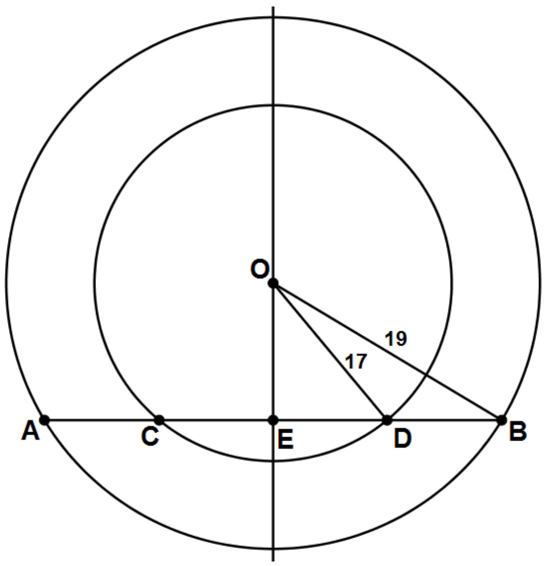


$KL = 12 - 5 = 7$

$PQ = JL = \sqrt{25^2 - 7^2} = \sqrt{576} = 24 \quad$ (D)

6.2.7

Teniendo en cuenta que la mediatriz de una cuerda pasa por el centro de la circunferencia, tenemos el esquema siguiente:



Puesto que $AC + BD = CD = CE + ED \Rightarrow 2AC = 2CD \Rightarrow x = AC = CE = ED = DB$

Aplicando Pitágoras,

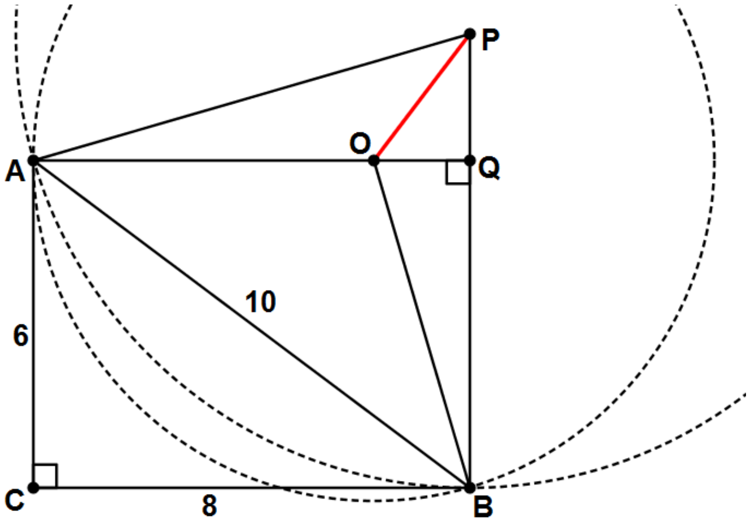
$$\left.\begin{aligned}19^2 &= (2x)^2 + OE^2\\ 17^2 &= x^2 + OE^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow 19^2 - (2x)^2 = 17^2 - x^2 \Rightarrow 19^2 - 17^2 = (2x)^2 - x^2 = 3x^2$$

$$3x^2 = 19^2 - 17^2 = (19+17)(19-17) = 36 \cdot 2 \Rightarrow x^2 = 12 \cdot 2 \Rightarrow x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \quad \text{(E)}$$

La longitud de la cuerda en la circunferencia mayor es $4x = 8\sqrt{26}$

6.2.8

Este problema se puede resolver mediante Pitágoras. El centro O pertenece a la perpendicular a AC por A, y cumple $r = AO = OB$. Trazamos la perpendicular por B a la recta AO y sea Q su punto de corte con AO.



Está claro que AQBC es un rectángulo, y aplicando Pitágoras al triángulo ΔOQB se cumple la ecuación

$$r^2 = (8-r)^2 + 6^2 \Leftrightarrow r^2 = 8^2 - 16r + r^2 + 6^2 \Leftrightarrow 16r = 64 + 36 = 100 \Rightarrow r = 100/16 = 25/4$$

De la misma manera, el centro P estará en la recta perpendicular a BC por B, es decir, la recta BQ, y siendo

$s = AP = PB$, aplicando Pitágoras al triángulo ΔAQP,

$$s^2 = (s-6)^2 + 8^2 \Leftrightarrow s^2 = s^2 - 12s + 6^2 + 8^2 \Leftrightarrow 12s = 64 + 36 = 100 \Rightarrow s = 100/12 = 25/3$$

Para determinar OP aplicaremos Pitágoras en el triángulo ΔOPQ:

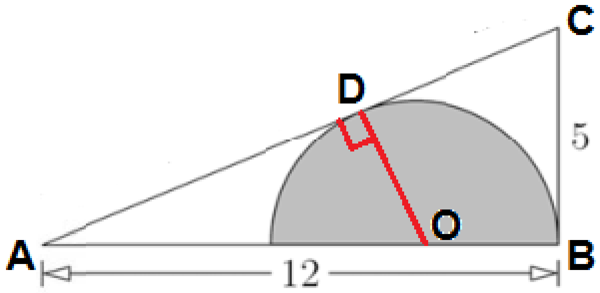
$$PQ = PB - QB = 25/3 - 6 = 7/3$$

$$OQ = AQ - AO = 25/4 - 8 = 7/4$$

$$OP^2 = PQ^2 + OQ^2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2 + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = 7^2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{16}\right) = 7^2\left(\frac{25}{9 \cdot 16}\right) \Rightarrow OP = 7 \cdot \frac{5}{3 \cdot 4} = \frac{35}{12} \quad \text{(C)}$$

6.2.9

Denotamos por A, B, C los vértices del triángulo, por O el centro de la circunferencia y sea D el punto de tangencia entre la circunferencia y el lado AC, tal y como se muestra en la siguiente imagen:



Determinamos el lado AC por Pitágoras:

$AC = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$

Primera versión:

La recta DO es perpendicular a AC pues AC es tangente a la circunferencia.

Los triángulos ΔABC y ΔADO son semejantes pues son triángulos rectángulos que comparten un ángulo común $\angle A$, luego sus lados serán proporcionales:

$\frac{BC}{AC} = \frac{DO}{AO} \Leftrightarrow \frac{5}{13} = \frac{r}{12-r} \Leftrightarrow 5(12-r) = 13r \Leftrightarrow 60 - 5r = 13r \Leftrightarrow r = \frac{60}{18} = \frac{10}{3}$ (B)

Segunda versión:

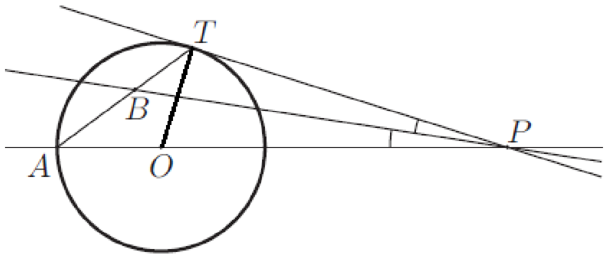
Podemos aplicar que dos segmentos tangentes son siempre concurrentes, es decir,

$DC = BC = 5 \Rightarrow DA = 13 - 5 = 8$ y por Pitágoras,

$(12-r)^2 = r^2 + 8^2 \Rightarrow r = 10/3$

6.2.10

Trazamos el segmento OT:



Por ser TP tangente a la circunferencia,

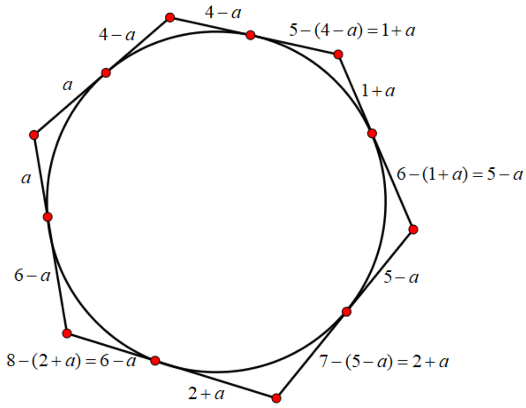
$OT \perp TP \Rightarrow \angle OTP = 90º \Rightarrow \angle TOP = 90º - 2\alpha \Rightarrow \angle AOT = 180º - (90º - 2\alpha) = 90º + 2\alpha$

Puesto que son radios de la circunferencia, $AO = OT$, es decir, el triángulo ΔAOT es isósceles en el vértice O, y por tanto $\angle TAO = \frac{180º - \angle AOT}{2} = \frac{180º - (90º + 2\alpha)}{2} = \frac{90º - 2\alpha}{2} = 45º - \alpha$

Finalmente, $\angle ABP = 180º - \angle BAP - \angle APB = 180º - (45º - \alpha) - \alpha = 180º - 45º + \alpha - \alpha = 135º$ (C)

6.2.11

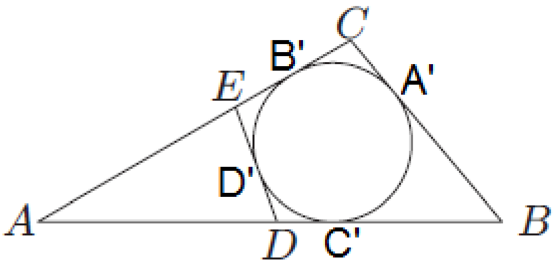
Vamos a aplicar ★64 repetidamente (los segmentos tangentes por un punto exterior son concurrentes). Podemos así ir encadenando los sucesivos segmentos:



Con lo que llegamos a un segmento final de longitud $a + 6 - a = 6$ (D).

6.2.12

Etiquetamos por A', B', C', D' los puntos de tangencia con la circunferencia:



Aplicando ★64 sabemos que ED'=EB', DD'=DC', B'C=CA', A'B=BC'.

Sea $a = AE + ED' = AE + EB' = AB'$ y $b = AD + DD' = AD + DC' = AC'$.

Nosotros deseamos encontrar $AE + ED + AD = AE + ED' + D'D + AD = a + b$

Observamos que

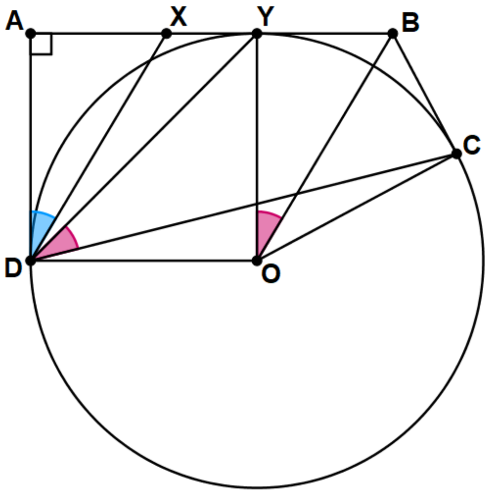
$14 = 5 + 3 + 6 = AC + CB + AB = a + 5 - a + 5 - a + 5 - b + 6 - b + 6 - b + b =$

$= 22 - a - b \Rightarrow a + b = 22 - 14 = 8$

6.2.13

Marcamos el centro O de la circunferencia. Por el Teorema del Ángulo Central (★58), tenemos $\angle YOC = 2\angle YDC$.

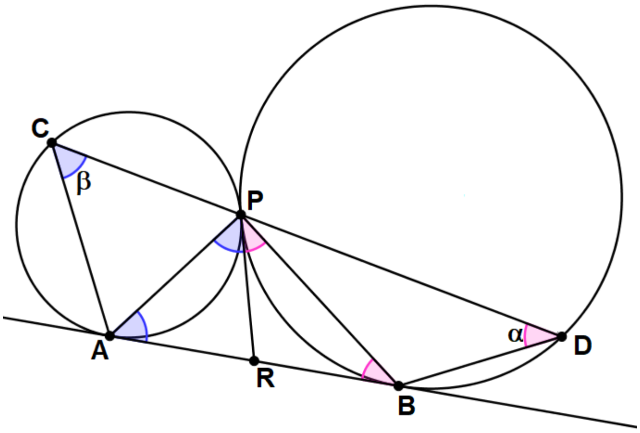
Por ser segmentos tangentes con extremo común B (★64) tenemos que $YB = BC$, y como además $OY = OC$, los triángulos rectángulos ΔYOB y ΔCOB son congruentes, luego $\angle YOB = \angle COB = \angle YOC / 2 = \angle YDC$



Por tangencia (★62), está claro que $\angle ADO = \angle AYO = 90^{o}$, y como además sabemos que $\angle DAY = 90^{o}$ y $OD = OY$, el cuadrilátero AYOD es un cuadrado. Luego $AD = OY$.
Como, además, sabemos por el enunciado que $AX = YB$, los triángulos rectángulos ΔAXD y ΔYBO son congruentes, pues tienen los dos catetos iguales, y por tanto $\angle ADX = \angle YOB = \angle YDC$, tal y como queríamos demostrar.

6.2.14

Sea $\alpha = \angle CDB$ y $\beta = \angle ACP$. Queremos demostrar que $\alpha + \beta = 90^{o}$, pues entonces, si $Q = CA \cap DB$, está claro que $\angle CQD = 180^{o} - (\alpha + \beta) = 90^{o}$.
Trazamos la tangente común por P y sea R su punto de corte con AB.
Por la Caracterización angular de recta tangente (★65), $\angle PBA = \angle PDB = \alpha$, y también $\angle RPB = \alpha$. De la misma forma, $\angle APR = \angle PAB = \beta$.



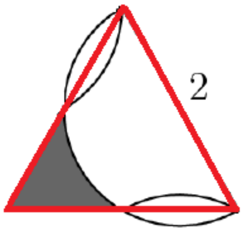
Así pues, observando los ángulos internos del triángulo ΔAPB , vemos que $180^{o} = \alpha + \beta + \alpha + \beta = 2\alpha + 2\beta \Rightarrow \alpha + \beta = 90^{o}$, tal y como queríamos ver.

6.3.1

Es fácil observar que los segmentos señalados forman una circunferencia más 2/3 de circunferencia, luego el total es $2\pi R + \frac{2 \cdot 2\pi R}{3} = \frac{5 \cdot 2\pi R}{3} = \frac{10\pi R}{3}$ (A)

6.3.2

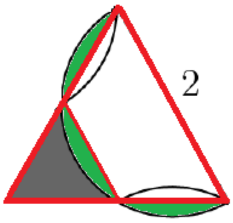
Podemos ver la figura como compuesta de 6 triángulos equiláteros de lado 2, y por tanto de altura $h=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$, y por tanto área $A_1=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$



Con un semicírculo de área $A_2=\frac{\pi 1^2}{2}=\frac{\pi}{2}$

Estos triángulos se dividen en su interior en cuatro triángulos iguales, de área $A_3=\frac{A_1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

Luego el área verde será $A_4=A_2-3A_3=\frac{\pi}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{4}$



Y por último el área gris será

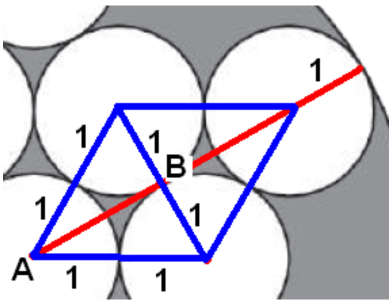
$$A_5=A_3-\frac{A_4}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{2\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$$

Y el área buscada será seis veces ésta:

$$A_6=6A_5=6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-\pi \quad \text{(D)}$$

6.3.3

Determinaremos el radio de la circunferencia exterior. Observamos que los radios y los puntos de tangencia determinan triángulos equiláteros de radio 2:



La distancia AB es la longitud de la mediana de un triángulo equilátero de lado 2, pero en un triángulo isósceles la mediana coincide con la altura, y por tanto se puede determinar por Pitágoras: $AB = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$

Luego el radio de la circunferencia exterior es $R = 2AB + 1 = 2\sqrt{3} + 1$.

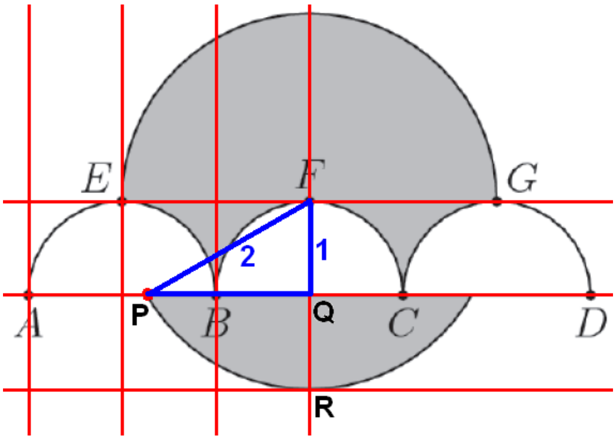
Y por tanto el área de la región sombreada es

$$\pi\left(2\sqrt{3}+1\right)^2 - 13\pi 1^2 = \pi\left[\left(2\sqrt{3}+1\right)^2 - 13\right] = \pi\left[4\cdot 3 + 4\sqrt{3} + 1 - 13\right] =$$

$$= \pi 4\sqrt{3} \quad (A)$$

6.3.4

Marcamos los puntos P, Q y R en el esquema, y vemos que estamos ante un triángulo rectángulo $1-2-\sqrt{3}$, conocido, y por tanto $\angle PFQ = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = 60^{\text{o}}$, una sexta parte del círculo.



Luego el sector circular PFR tendrá área

$$A_1 = \frac{1}{6}\pi \cdot 2^2 = \frac{2}{3}\pi$$

El área del triángulo ΔPFQ será:

$$A_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

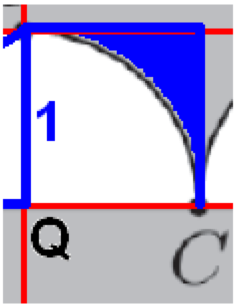
Por lo tanto, el área de la región circular determinada por la recta PQ será

$$A_3 = 2\left(A_1 - A_2\right) = 2\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$$

El semicírculo grande tiene área

$$A_4 = \frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 = 2\pi$$

Las regiones sombreadas



Tienen área $A_5 = 1 - \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$

Luego, finalmente, el área buscada es

$$A = A_4 + 4A_5 + A_3 = 2\pi + 4\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} = 2\pi + 4 - \pi + \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} = \frac{7}{3}\pi - \sqrt{3} + 4$$

Y por lo tanto, la solución es $7+3+3+4=17$ (E)

6.3.5
Sabemos que la distancia entre el centro dela circunferencia y la cuerda es la distancia del centro de la circunferencia al punto medio de la cuerda, generando un triángulo rectángulo de catetos 5 y 5, con lo cual el radio es $r = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$, y el área es $A = \pi r^2 = 50\pi$ (B).

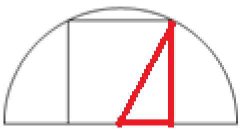
6.3.6
(A) Con un razonamiento similar al del problema 5

6.3.7
(C) Con un razonamiento similar al del problema 5

6.3.8
(A) Con un razonamiento similar al del problema 5

6.3.9
(A) Con un razonamiento similar al del problema 5

6.3.10
Marcando el centro de la circunferencia vemos que tenemos un triángulo rectángulo de diagonal 1 y, por simetría, su cateto menor es la mitad que el cateto mayor.

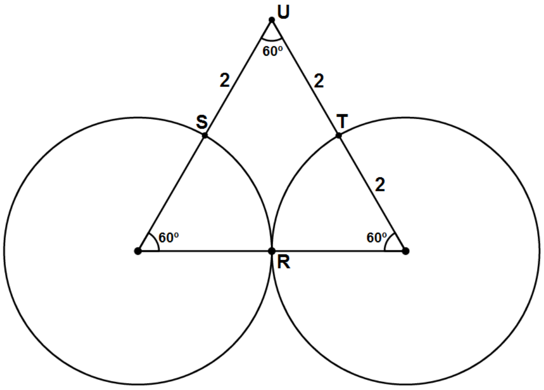


Luego la altura y del cuadrado cumplirá

$$1^2 = y^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = y^2 + \frac{y^2}{4} = \frac{5y^2}{4} \Rightarrow y^2 = \frac{4}{5}$$, que es el área del cuadrado. (A)

6.3.11

Vemos que un sexto de circunferencia equivale a un ángulo de $\frac{360^{\circ}}{6}=60^{\circ}$, y por tanto la figura del enunciado es compatible con la siguiente, en la que hemos ampliado los arcos hasta completar la circunferencia.



La altura del triángulo grande es $\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, y por tanto su área es

$$\frac{4\cdot 2\sqrt{3}}{2}=\frac{4\cdot 2\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$$

Y los sectores circules tienen área $\frac{1}{6}\pi r^2=\frac{1}{6}\pi 2^2=\frac{2\pi}{3}$

Y el área pedida es $4\sqrt{3}-2\frac{2\pi}{3}=4\sqrt{3}-\frac{4\pi}{3}$ (B)

6.3.12

En cada cuadrado, independientemente, la razón de las áreas del círculo al cuadrado será

$$\frac{\pi r^2}{(2r)^2}=\frac{\pi r^2}{4r^2}=\frac{\pi}{4}$$

Luego es de esperar que esta misma proporción se mantendrá cuando unamos todos los cuadrados. (E)

6.3.13

Se ve claramente que los arcos que faltan se completan hasta alcanzar una circunferencia completa, y por tanto la solución es (D).

6.3.14

El círculo gris tiene longitud $2\pi\cdot 1=2\pi$

Observando los arcos negros vemos que tiene la misma longitud que el arco D:

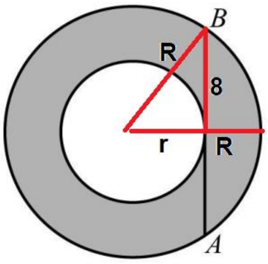
$\frac{1}{4}2\pi\cdot 4=2\pi$

6.3.15

Uniendo trozos separados vemos que el área que nos piden calcular equivale a un círculo grande menos dos círculos pequeños:

$$A=\pi\cdot 2^2-2\pi\cdot 1^2=4\pi-2\pi=2\pi$$

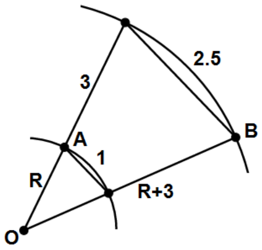
6.3.16
Sea O el centro común de las dos circunferencias. Sean r y R sus respectivos radios. Teniendo en cuenta que AB es tangente a la circunferencia menor, y por tanto es perpendicular al radio que pasa por su punto de tangencia, observamos que aparece un triángulo rectángulo:



Por lo tanto $R^2 = r^2 + 8^2 \Rightarrow R^2 - r^2 = 8^2 = 64$.
Por otro lado, el área de la zona gris será igual a la diferencia de áreas entre los dos círculos, es decir:
$A = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi\left(R^2 - r^2\right) = 64\pi$

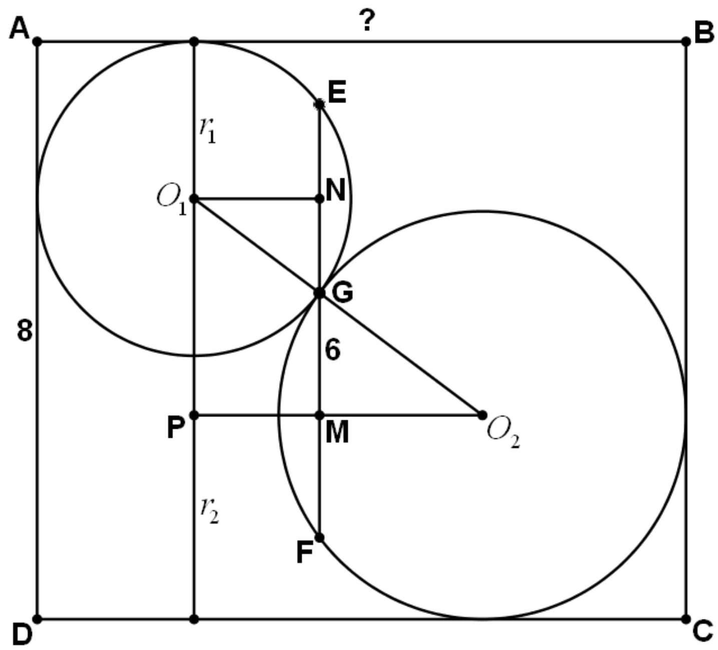
6.3.17
$A = 5 \cdot 10^2 + \pi \cdot 4^2 + \pi \cdot 3^2 - \pi \cdot 5^2 = 500 + \pi(16 + 9 - 25) = 500 + \pi \cdot 0 = 500\,cm^2$ (D).

6.4.1
Interpretando velocidades como distancias recorridas, cuando el punto A se mueve 1 unidad de longitud, el punto B se mueve 2.5 unidades. Los dos puntos generan, en sus trayectorias, dos triángulos semejantes:



Luego $\dfrac{R}{1} = \dfrac{R+3}{2.5} \Leftrightarrow 2.5R = R + 3 \Leftrightarrow 1.5R = 3 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}R = 3 \Leftrightarrow R = 2$, y por tanto $R + 3 = 5$

6.4.2
Sea G el punto de tangencia entre las dos circunferencias. Sean r_1 y r_2 los radios y O_1 y O_2 sus respectivos centros. Sean N y M los respectivos puntos medios de los segmentos $\overline{EG}$ y $\overline{FG}$.
Está claro que $NM = EF/2 = 3$.
Trazamos la paralela a AD por O_1 y la paralela a CD por O_2, que se cortarán en el punto P.



Luego.
Y por tanto $8 = r + R + NM = r + R + 3 \Rightarrow r + R = 5$.
Pero $O_1O_2 = r + R = 5$, y por tanto, por Pitágoras, $PO_2 = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$
Finalmente, $AB = r_1 + PO_2 + r_2 = 5 + 4 = 9$.

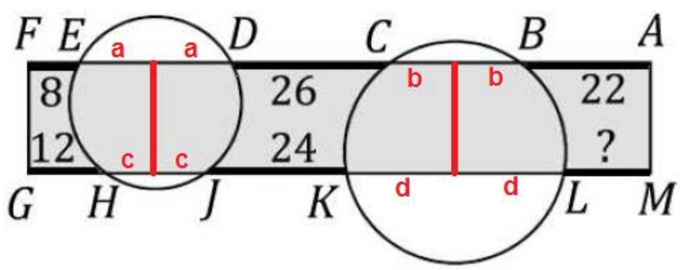
6.4.3
Sean a, b, c, d y e los radios de los círculos de centro A, B, C, D y E, respectivamente. Entonces

$$\left.\begin{array}{l} a+b=16 \\ b+c=14 \end{array}\right\} \Rightarrow a-c=2 \Rightarrow a>c \qquad \left.\begin{array}{l} b+c=14 \\ c+d=17 \end{array}\right\} \Rightarrow b-d=-3 \Rightarrow d>b$$

$$\left.\begin{array}{l} c+d=17 \\ d+e=13 \end{array}\right\} \Rightarrow c-e=4 \Rightarrow c>e \qquad \left.\begin{array}{l} d+e=13 \\ e+a=14 \end{array}\right\} \Rightarrow d-a=-1 \Rightarrow a>d$$

Reordenando las desigualdades anteriores llegamos a $e < c < a$ y $b < d < a$, luego a es el radio mayor.

6.4.4
Trazamos las recta que pasa por el centro de la circunferencia de la izquierda, que cortará las cuerdas ED y HJ por su punto medio, determinando segmentos a y c. Hacemos lo mismo en la circunferencia de la derecha, determinando segmentos b y d, tal y como se muestra en el siguiente esquema:



Aparecen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} 8+a=12+c \Rightarrow a=4+c \\ a+26+b=c+24+d \\ b+22=d+x \end{cases}$$

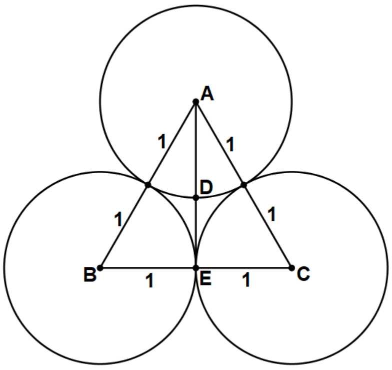
Luego $4+c+26+b=c+24+d \Rightarrow 30+b=24+d$

Y restando esta última ecuación a la tercera ecuación del sistema llegamos a

$22+b-30-b=d+x-24-d \Leftrightarrow -8=x-24 \Leftrightarrow x=-8+24=16$

6.4.5

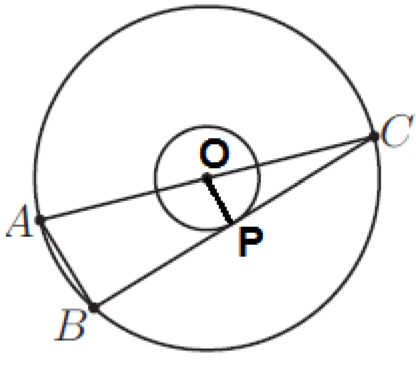
El esquema del problema se concentra en un triángulo central ΔABC equilátero de lado 2, luego $AE=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$ y por tanto $DE=AE-AD=\sqrt{3}-1$



Y finalmente, la distancia mínima buscada es $2DE=2\left(\sqrt{3}-1\right)=2\sqrt{3}-2$

6.4.6

Sea O el centro común de las circunferencias y sea P el punto de tangencia entre BC y la circunferencia interior. Trazamos el segmento OP.



AB y OP son paralelas pues son perpendiculares comunes a BC (★14).

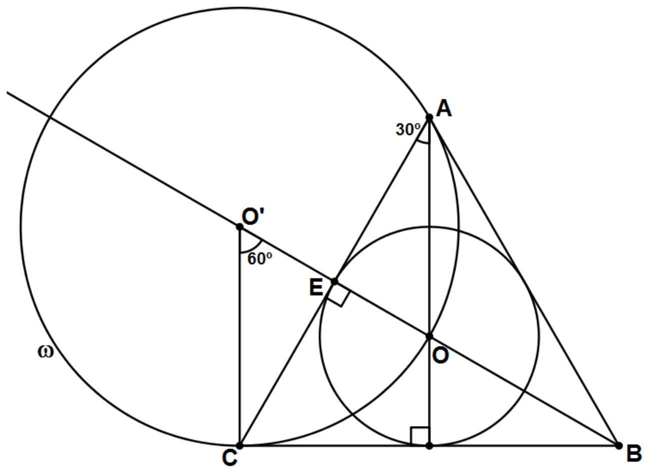
Por otro lado, $AO=OC$, luego, aplicando el Teorema del Conector de puntos medios, $BP=PC$.

Los triángulos ΔABC y ΔOPC son semejantes pues son triángulos rectángulos compartiendo el ángulo agudo $\angle C$.

Luego $\dfrac{OC}{OP}=\dfrac{AC}{AB} \Leftrightarrow \dfrac{OC}{OP}=\dfrac{2OC}{12} \Leftrightarrow OP=\dfrac{12OC}{2OC}=6 \Rightarrow AC=3OP=18$

6.4.7

En un triángulo equilátero coinciden alturas, mediatrices y medianas, y esto nos simplifica enormemente la resolución del problema. Sea E el pie de la altura de ΔABC por B. Sea ϖ la circunferencia que pasa por A, O y C, y O´ su centro.



La recta BE es mediatriz del lado AC, y AC es una cuerda de ϖ, luego el centro O´ pertenecerá a EB. Por otro lado, está claro que ΔADC es un triángulo 30-60-90, y por tanto, por el Teorema del ángulo central ★58, $\angle CO'O = 2\angle CAD = 60º$, y $\angle CO'A = 120º$

Sea r el radio de la circunferencia ϖ. Aplicando el Teorema del Coseno,

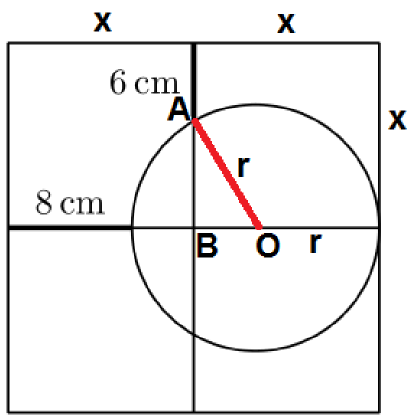
$$AC^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot r\cos(120º) \Leftrightarrow \left(2\sqrt{3}\right)^2 = r^2 + r^2 - 2r^2\left(\frac{-1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6^2 = 2r^2 + r^2 = 3r^2 \Leftrightarrow r^2 = 12$$

Y, finalmente, el área de la circunferencia es $A = \pi r^2 = 12\pi$ (B)

6.4.8

Sea 2x la longitud del lado del cuadrado mayor, y sea r el radio de la circunferencia. Sea O el centro de la circunferencia, B el centro del cuadrado grande y A el punto de corte entre la circunferencia y la recta vertical central, tal y como se muestra en la siguiente imagen:



Está claro que $8 + 2r = 2x \Rightarrow 4 + r = x$

El triángulo ΔABO es un triángulo rectángulo, con cateto $AB = x - 6$ e hipotenusa r, luego, aplicando Pitágoras,

$$BO^2 = r^2 - (x-6)^2 = r^2 - (4+r-6)^2 = r^2 - (r-2)^2 = r^2 - \left(r^2 - 4r + 4\right) = 4r - 4$$

Por otro lado:

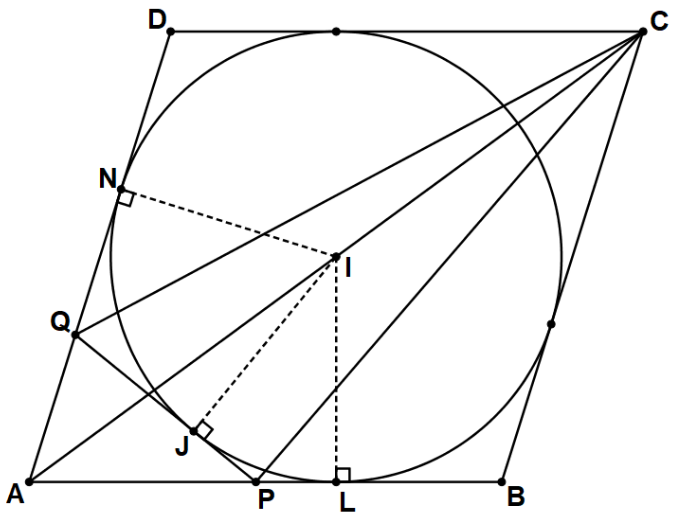
$$BO + r = x \Rightarrow \sqrt{4r-4} + r = 4 + r \Rightarrow \sqrt{4r-4} = 4 \Rightarrow 4r - 4 = 4^2 = 16$$
$$\Rightarrow 4r = 20 \Rightarrow r = 20/4 = 5$$

Finalmente:

$$x = 4 + r = 9 \Rightarrow 2x = 18$$

6.4.9

Sea I el centro de la circunferencia y r su radio.
Sea J el punto de tangencia entre PQ y la circunferencia.
Sean L y N los puntos de tangencia entre la circunferencia y los segmentos AB y AD, respectivamente.



Sabemos que el punto I es el centro del segmento AC, luego, aplicando ★36, tenemos

$$[\Delta PIA] = [\Delta PIC] \text{ y } [\Delta QIA] = [\Delta QIC].$$

Por otro lado, sabemos que QJ=QN, por ★64, luego $\Delta QJI \equiv \Delta QNI \Rightarrow [\Delta QJI] \equiv [\Delta QNI]$
De la misma forma, $PJ = PL \Rightarrow \Delta PJI \equiv \Delta PLI \Rightarrow [\Delta PJI] \equiv [\Delta PLI]$
Por tanto, $[\Delta QIP] = [\Delta QJI] + [\Delta PJI] = [\Delta QNI] + [\Delta PLI]$
Así pues,

$$[\Delta QPC] = [\Delta QIC] + [\Delta PIC] + [\Delta QIP] =$$
$$[\Delta QIA] + [\Delta PIA] + [\Delta QNI] + [\Delta PLI] = [NILA]$$

Y está claro que el cuadrilátero NILA no depende del segmento QP.

Fuente de esta solución: “lifeismathematics” https://artofproblemsolving.com/community/c6h2030444p14309669

7.1.1

$$AB // DE,\ \Delta ABC \approx \Delta EDC \Rightarrow \frac{BD}{3} = \frac{CD}{9} \Rightarrow CD = 3BD$$

$$BC = BD + CD = BD + 3BD = 4BD \Rightarrow BD = \frac{BC}{4}$$

$$\Delta ABD \approx \Delta CBA \Rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB^2 = BD \cdot BC = \frac{BC}{4} \cdot BC = \frac{BC^2}{4}$$

Por Pitágoras,

$$12^2 = (3+9)^2 = AB^2 + BC^2 = \frac{BC^2}{4} + BC^2 = \frac{5BC^2}{4} \Rightarrow BC^2 = \frac{4\cdot 12^2}{5}$$

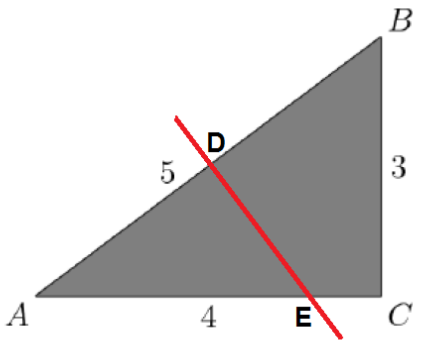
$$\Rightarrow BC = \frac{2\cdot 12}{\sqrt{5}} \Rightarrow BD = \frac{BC}{4} = \frac{6}{\sqrt{5}} \Rightarrow CD = 3DB = \frac{18}{\sqrt{5}}$$

$$DE^2 = CE^2 - CD^2 = 9^2 - \frac{18^2}{5} = 9^2\left(1-\frac{4}{5}\right) = 9^2\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{9^2}{5} \Rightarrow DE = \frac{9}{\sqrt{5}}$$

$$[\Delta EDC] = \frac{CD\cdot DE}{2} = \frac{18\cdot 9}{2\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{18\cdot 9}{2\cdot 5} = \frac{9\cdot 9}{5} = \frac{81}{5}$$

7.1.2

Al doblar el papel generamos la mediatriz del lado $\overline{AB}$, que cortará en D a $\overline{AB}$ y en E a $\overline{AC}$.

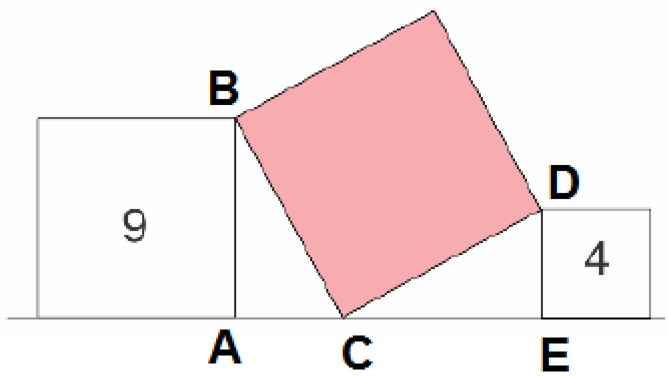


Está claro que ΔABC es un triángulo rectángulo, y puesto que $DE \perp AB$,

$$\Delta ABC \approx \Delta AED \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC} \Leftrightarrow \frac{5/2}{4} = \frac{DE}{3} \Rightarrow DE = \frac{3\cdot 5/2}{4} = \frac{15}{8}$$

7.1.3

Ponemos letras a los vértices de los triángulos rectángulos de la figura:



Está claro que $AB = \sqrt{9} = 3$ y $DE = \sqrt{4} = 2$.

Sea $\alpha = \angle CDE$. Luego $\angle DCE = 180º - 90º - \alpha = 90º - \alpha$.

Por otro lado, los ángulos $\angle ACB$, $\angle BCD$ y $\angle DCE$ son suplementarios:

$$180º = \angle ACB + \angle BCD + \angle DCE = \angle ACB + 90º + 90º - \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = \angle ACB - \alpha \Rightarrow \angle ACB = \alpha$$

Así pues, por el criterio AA, los triángulos $\angle ABC$ y $\angle ECD$ son semejantes, pero comparten una misma hipotenusa: $BC = CD$, pues son dos de los lados de un mismo cuadrado, luego serán congruentes, y por tanto $AC = DE = 2$.

Ahora, aplicando Pitágoras, $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 2^2 = 13$, que es precisamente el área que queríamos calcular.

7.1.4
Está claro que el cuadrado de área 9 tiene lado 3 y el cuadrado de área 1 tiene lado 1.
Observemos el pequeño triángulo rectángulo que aparece a la izquierda del cuadrado de área 1.
Su base es 2 y su altura 1, luego su hipotenusa mide $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.
Observemos ahora el triángulo rectángulo que aparece a la izquierda del cuadrado de área 9.
Los dos triángulos rectángulos son semejantes, pues comparten un ángulo común, y la razón de proporcionalidad es 3, luego la hipotenusa del triángulo rectángulo grande será $3\sqrt{5}$.

Así pues, la hipotenusa del cuadrado grande será $\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$, y su área será $\left(4\sqrt{5}\right)^2 = 16 \cdot 5 = 80$

7.1.5
Está claro que el triángulo ΔDBC es isósceles, pues $DB = CB$.
El triángulo ΔCAB es semejante a ΔDBC, por el criterio AA, luego ΔCAB también será isósceles, y por tanto $AC = AB = 8$

7.1.6

Ver PG2/9.16

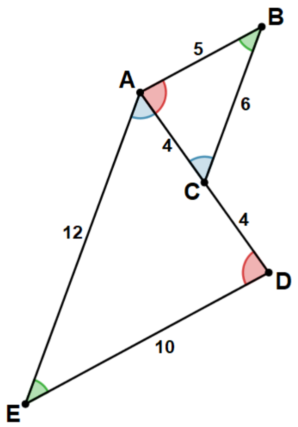
7.1.7

Ver PG2/9.17

7.1.8
Observamos que los triángulos ΔEDA y ΔBAC son semejantes por el Criterio SSS (★70), puesto que

$$\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{AE} = \frac{AC}{AD} \text{ , en efecto: } \frac{5}{10} = \frac{6}{12} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

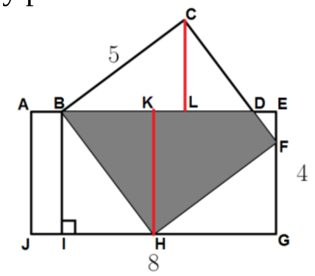
Luego sus ángulos correspondientes serán iguales (★68), tal y como se muestra en el esquema siguiente:



Ahora observamos que las rectas DE y AB tienen como transversal la recta AD, y que ésta determina ángulos internos alternos iguales: $\angle EDA = \angle BAD$, luego $AB // DE$, aplicando ★16.

De la misma manera, observamos que las rectas EA y CD tienen como transversal la recta AC, y que ésta determina ángulos internos alternos iguales: $\angle EAC = \angle ACB$, luego $EA // CD$, aplicando ★16 de nuevo.

7.1.9
Etiquetamos los diferentes vértices y puntos notables de la figura de la siguiente manera:



Observemos el triángulo ΔBKH : $KH = 4$ y $BH = 5$, luego por Pitágoras,

$$BK = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

Por otro lado, puesto que $HG // BL$ y $BC // HF$, $\angle BHK = 90^{\circ} - \angle KHF = \angle FHG = \angle CBL$.
Así pues, $\Delta BKH \approx \Delta CLB$, y puesto que, además, $BH = BC$, son triángulos congruentes, luego $BL = HK = 4$ y $CL = BK = 3$.

$\angle CDL = 90^{\circ} - \angle LCD = \angle BCL$, luego $\Delta CLB \approx \Delta DLC$, y por tanto sus lados serán proporcionales:

$$\frac{DL}{CL} = \frac{CL}{BL} \Leftrightarrow \frac{DL}{3} = \frac{3}{4} \Rightarrow DL = \frac{9}{4}$$

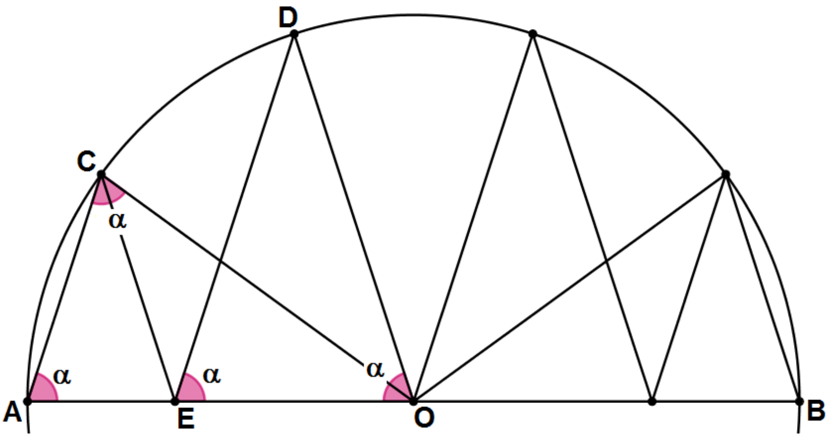
Así pues, $[\Delta CBD] = \frac{1}{2} BD \cdot CL = \frac{1}{2}\left(4 + \frac{9}{4}\right) \cdot 3 = \frac{75}{8}$

Y, finalmente,

$$[BDFH] = [BCFH] - [\Delta CBD] = 25 - \frac{75}{8} = \frac{125}{8} = 15\frac{5}{8}$$

7.1.10
En primer lugar vemos que, por simetría, si después de cuatro "pasos" la línea llega al punto B, después de dos llegará al centro O de la circunferencia.
Sean C, D y E los puntos señalados en el siguiente esquema. Trazamos el segmento OC.

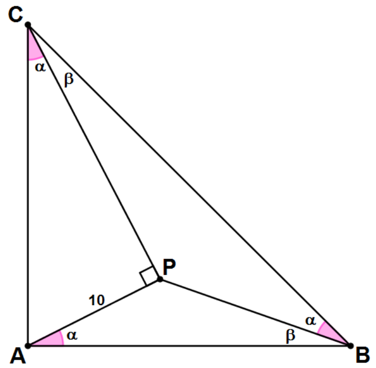
Puesto que AO=CO ya que ambos segmentos son radios de la circunferencia, el triángulo ΔAOC es isósceles y por tanto $\alpha = \angle OAC = \angle ACO$, y $\angle AOC = 180 - 2\alpha$.
Aplicando el criterio AA, los triángulos ΔAOC y ΔODE serán semejantes, pues comparten dos ángulos, pero además AO=OD, pues ambos segmentos son radios de la circunferencia, luego son triángulos congruentes: $\Delta AOC \equiv \Delta ODE$.
Luego CE=AC=EO, y por tanto el triángulo ΔCEO es isósceles. Luego $\angle OEC = \angle COE = 180º - 2\alpha$.
Por otro lado, $\angle AEC = \alpha \Rightarrow \angle OEC = 180º - \alpha$.



Finalmente, se debe cumplir
$$180º = \angle OEC + 2\angle EOC = 180º - \alpha + 2(180º - 2\alpha) = 180º - \alpha + 360º - 4\alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5\alpha = 360º \Rightarrow \alpha = 360º / 5 = 72º$$

Nota: En el problema 7.73 de http://www.toomates.net/biblioteca/ProblemasGeometria.pdf se ofrece una solución alternativa.

7.1.11
Sea $\alpha = \angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$. Por ser isósceles, $\angle ABC = \angle ACB$, y por tanto $\beta = \angle PCB = \angle PBA$.
Por otro lado, $\angle A = 90º \Rightarrow \angle CAP = 90º - \alpha \Rightarrow \angle CPA = 90º$
Aplicando Pitágoras, $CB^2 = 2AB^2 \Rightarrow CB = \sqrt{2}AB$

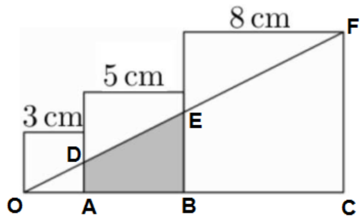


Los triángulos ΔAPB y ΔBPC son semejantes por el criterio AA, luego
$$\frac{AP}{AB} = \frac{PB}{BC} \Leftrightarrow \frac{10}{AB} = \frac{PB}{\sqrt{2}AB} \Leftrightarrow 10\sqrt{2} = PB$$
$$\frac{BP}{AP} = \frac{CP}{BP} \Leftrightarrow \frac{10\sqrt{2}}{10} = \frac{CP}{10\sqrt{2}} \Rightarrow CP = 10\sqrt{2}\sqrt{2} = 20$$

Finalmente, aplicando Pitágoras, $AC^2 = 20^2 + 10^2 = 500$ y por tanto
$[\Delta ABC] = AC^2 / 2 = 250.$

7.1.12

Denotamos los vértices implicados como en el siguiente esquema:



Vemos que el triángulo ΔOCF es un triángulo rectángulo en el que $\dfrac{CF}{OC} = \dfrac{8}{3+5+8} = \dfrac{1}{2}$

Por estar en posición de Tales (★76) tenemos semejanza de triángulos:

$$\Delta OAD \approx \Delta OCF \Rightarrow \frac{DA}{OA} = \frac{CF}{OC} \Rightarrow \frac{DA}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow DA = \frac{3}{2}$$

$$\Delta OBE \approx \Delta OCF \Rightarrow \frac{EB}{OB} = \frac{CF}{OC} \Rightarrow \frac{EB}{3+5} = \frac{1}{2} \Rightarrow EB = \frac{8}{2} = 4$$

Descomponiendo la figura gris en un rectángulo inferior y un triángulo superior, tenemos

$$[ADEB] = 5 \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} 5 \cdot \left(4 - \frac{3}{2}\right) = \frac{55}{4}$$

7.1.13

Puesto que ΔABC es isósceles, $\angle A = (180^o - 40^o)/2 = 70^o$.

Está claro que $\Delta ADF \approx \Delta CAD$ por el criterio AA de semejanza de triángulos (★68), luego $\angle DFA = \angle DAC = \angle A = 70^o$.

Y puesto que son ángulos opuestos por el vértice, $\angle EFC = \angle DFA = 70^o$.

7.1.14

$\Delta ABD \approx \Delta ABC \Rightarrow \angle BAD = \angle BCA = 52^o$, y nos queda la ecuación
$180^o = \angle A + \angle B + \angle C = 58^o + 52^o + x + 52^o \Rightarrow x = 18^o$

7.1.15

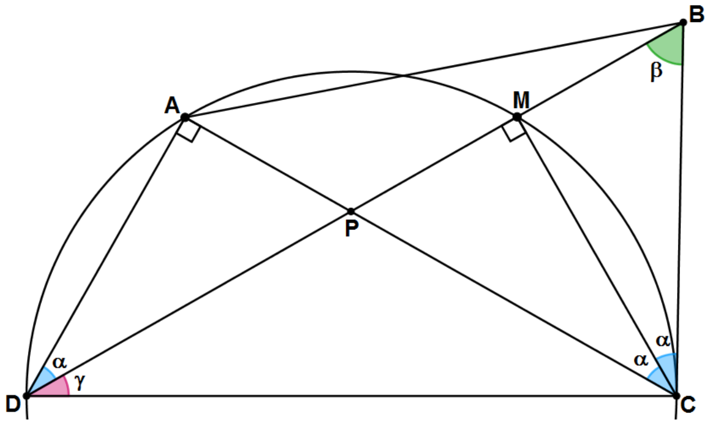
Trazamos la circunferencia de diámetro CD. Puesto que $\angle DAC = 90^o$, el punto A pertenecerá a dicha circunferencia (★60).

Sea M el punto de corte entre BD y esta circunferencia. De nuevo por Tales (★60), $\angle DMC = 90^o$.

Sea $\alpha = \angle ADB$. Por abarcar una misma cuerda, $\alpha = \angle ADM = \angle ACM$, y puesto que $2\alpha = \angle ACB$, está claro que $\angle PCM = \angle BCM = \alpha$.

Así pues, los triángulos rectángulos ΔDAP, ΔCMP y ΔCMB son semejantes.

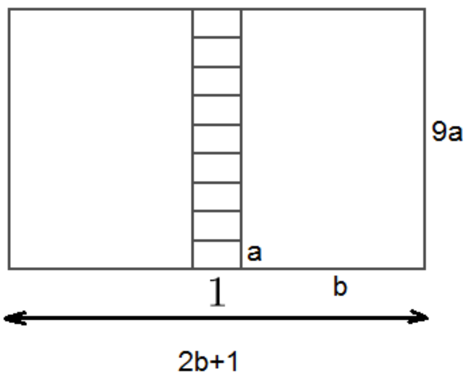
Sea $\beta = \angle DBC$ y $\gamma = \angle BDC$.



La condición $\angle DBC + 2\angle ADC = 180^{o}$ se puede escribir como
$\beta + 2(\alpha+\gamma) = 180^{o} \Leftrightarrow \beta + 2\alpha + 2\gamma = 180^{o}$
Pero observando el triángulo ΔBCD tenemos que $\beta + 2\alpha + \angle PCD + \gamma = 180^{o}$, y por tanto
$180 - 2\alpha - 2\gamma + 2\alpha + \angle PCD + \gamma = 180^{o} \Leftrightarrow \angle PCD = \gamma = \angle PDC$.
Así pues, el triángulo ΔDPC es isósceles, y por tanto $DP = PC$, luego los triángulos ΔDAP, ΔCMP son congruentes, pues además de ser semejantes tienen un lado congruente, y por tanto $AP = PM = MB$, y por tanto $PB = 2AP$, tal y como queríamos ver.

7.2.1

Resolveremos este problema mediante semejanza de figuras. Sea a la altura de un rectángulo pequeño. Sea b la anchura de uno de los rectángulos medianos:



$$\frac{a}{1} = \frac{b}{9a} \Rightarrow 9a^2 = b$$

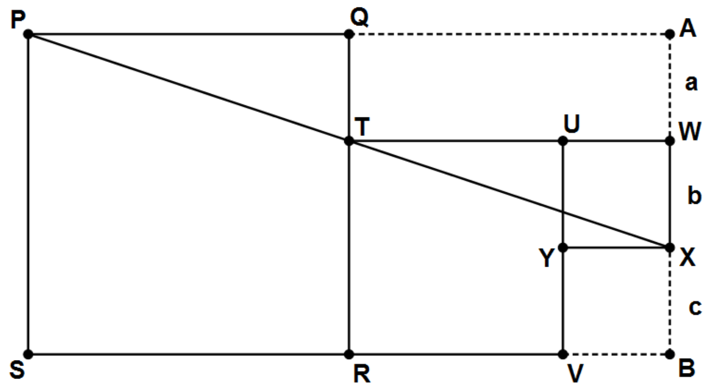
$$\frac{b}{9a} = \frac{9a}{2b+1} \Rightarrow b(2b+1) = 9 \cdot 9a^2 = 9b \Rightarrow 2b+1 = 9 \Rightarrow b = 4$$

$$9a^2 = 4 \Rightarrow a^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$P = 2(2b+1) + 2 \cdot 9a = 2 \cdot 9 + 18\frac{2}{3} = 18 + 12 = 30 \quad \text{(C)}$$

7.2.2

Está claro que $PQ = QR = \sqrt{36} = 6$ y $TU = UV = \sqrt{16} = 4$. Completamos el esquema añadiendo los puntos A y B y las distancias $a = AW = QT$, $b = WX = UY$, $c = XB = YV$. Está claro que $a + b + c = PS = 4$



La clave de este problema está en observar que los triángulos ΔPQT , ΔPAX y ΔTWX son semejantes, pues están en "posición de Tales". Luego sus lados son proporcionales:

$$\frac{a}{6}=\frac{a+b}{6+4+b}=\frac{b}{4+b}$$

$$\frac{a+b}{10+b}=\frac{b}{4+b}\Leftrightarrow(4+b)(a+b)=b(10+b)\Leftrightarrow 4a+4b+ab+b^2=10b+b^2\Leftrightarrow 4a+ab=6b \quad (*)$$

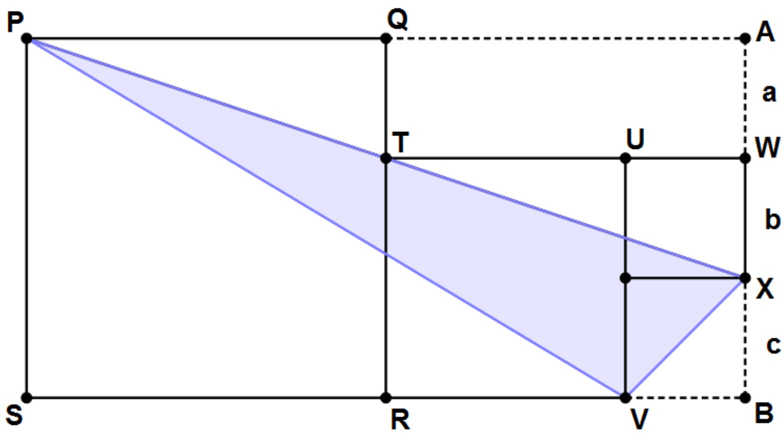
$$\frac{a}{6}=\frac{a+b}{10+b}\Leftrightarrow a(10+a)=6(a+b)\Leftrightarrow 10a+a^2=6a+6b\Leftrightarrow 4a+a^2=6b$$

$$4a+ab=4a+a^2\Leftrightarrow a(4+b)=a(4+a)\Rightarrow 4+b=4+a\Rightarrow a=b$$

Y ahora, substituyendo en (*):

$$4a+a^2=6a\Rightarrow a(4+a)=6a\Rightarrow 4+a=6\Rightarrow a=b=2\Rightarrow c=6-a-b=6-2-2=2$$

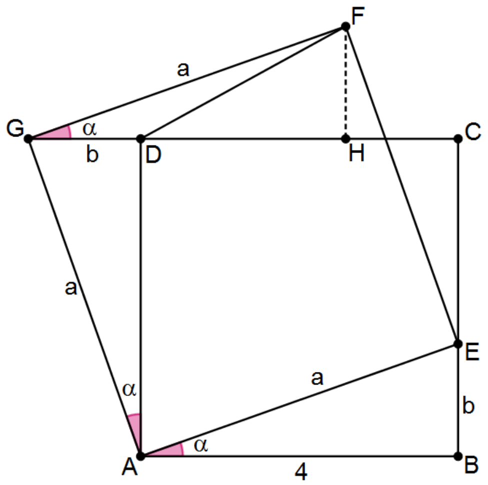
Ahora es fácil calcular el área del triángulo ΔPXV :



$$[\Delta PXV]=[PASB]-[\Delta PAX]-[\Delta PVS]-[\Delta XBV]=12\cdot 6-12\cdot 4/2-10\cdot 6/2-2\cdot 2/2=16 \quad \text{(C)}$$

7.2.3

Denotando por ABCD el cuadrado de área 4, sea AEFG el cuadrado del que deseamos determinar su área. Trazamos la perpendicular FH a GC por F. Está claro que AB=4, y sean $a=AE=EF=FG=GA$ y $b=BE$,tal y como se indica en el esquema:



$\alpha = \angle BAE = \angle HGF = \angle DAG$ por ser ángulos determinados por rectas paralelas y perpendiculares.
Por otro lado, $a = AB = AG = GF$, luego los triángulos ΔABE, ΔGHF y ΔADG son congruentes por ser triángulos rectángulos semejantes con igual hipotenusa. Así pues, $b = BE = GD = HF$ y por tanto:

$$1 = [\Delta GDF] = \frac{GD \cdot FH}{2} = \frac{b^2}{2} \Rightarrow b^2 = 2$$

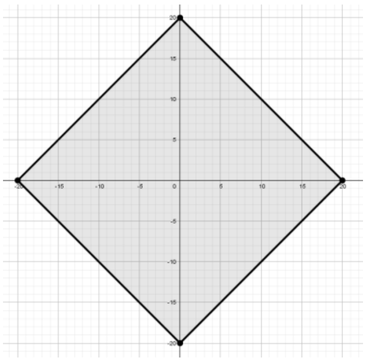
Por otro lado, aplicando Pitágoras, $a^2 = 4^2 + b^2 = 16 + 2 = 18$, que es precisamente el área que buscamos. La respuesta correcta es 18.

8.1.1
Basta con observar cómo se transforman los vértices de dicho cuadrado:
(2 , 1) $\rightarrow$ (1/2 , 1)
(2 , 2) $\rightarrow$ (1/2 , 1/2)
(1 , 2) $\rightarrow$ (1 , 1/2)
(1 , 1) $\rightarrow$ (1 , 1)
Entre los dos candidatos posibles (A o B), nos decantamos por B, puesto que la transformación que estamos realizando no es lineal. Solución: (B).

8.1.2
Basta con hacer un dibujo aproximado para ver que tenemos un triángulo de base $3q - q = 2q$ y altura $3p - p = 2p$, y por tanto

$$A = \frac{2q \cdot 2p}{2} = 2pq \quad \text{(E)}$$

8.1.3
Estos puntos formarán un cuadrado con coordenadas (0,20), (20,0), (-20,0), (0, -20).



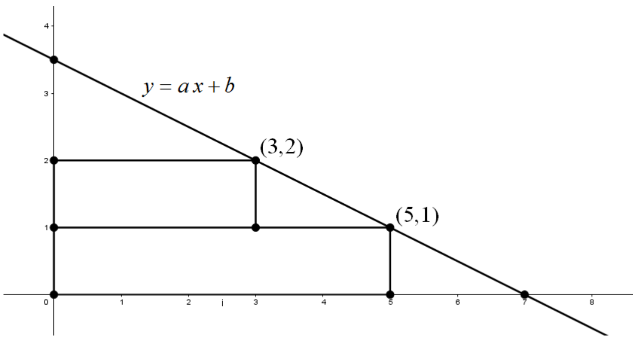
En el primer cuadrante (con x,y>0) tendremos

$$19+18+17+...+2+1=\frac{19\cdot 20}{2}=190 \text{ puntos.}$$

Los mismos en los otros tres cuadrantes, haciendo un total de $4\cdot 190=760$ puntos.
Los puntos en los ejes (con una de las dos coordenadas x,y=0) son $20\cdot 4+1=81$ puntos, haciendo finalmente un total de $760+81=841$ puntos (C).

8.2.1

Puesto que no importa cómo están colocados los rectángulos, vamos a colocarlos alineados verticalmente a la izquierda, de forma que podemos hacer una interpretación de este problema en términos de geometría cartesiana: Dados dos puntos (3,2) y (5,1), determinaremos la recta que pasa por estos dos puntos y su punto de corte con el eje vertical.



$$y=ax+b\Rightarrow\begin{cases}2=a\cdot 3+b\Rightarrow b=2-3a\\1=a\cdot 5+b\Rightarrow b=1-5a\end{cases}\Rightarrow 2-3a=1-5a\Rightarrow 2-1=-5a+3a\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=-2a\Rightarrow a=-1/2\Rightarrow b=1-5(-1/2)=1+5/2=7/2$$

8.2.2

Una forma de terminar esta bisectriz sería construyendo un triángulo isósceles y determinando su mediana, puesto que en todo triángulo isósceles coinciden mediana y bisectriz.

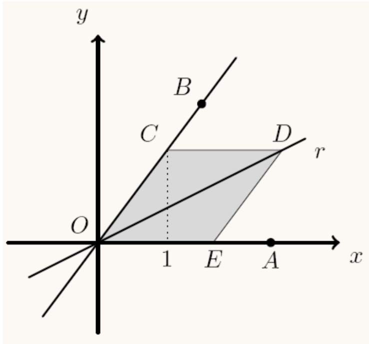
La recta OB es $y=\frac{4}{3}x$. Luego pasa por el punto $C=(3,4)$ $|OC|=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

Luego tomando $D=(5,0)$ tenemos que ΔDOC es isósceles en O.

El punto medio de su base $\overline{CD}$ es $M=\frac{(3,4)+(5,0)}{2}=\frac{(8,4)}{2}=(4,2)$

Luego la recta buscada pasa por O y M, que tiene por ecuación $y=\frac{1}{2}x$, y su pendiente es $\frac{1}{2}$.

Nota: En las soluciones de http://mat.absolutamente.net/joomla/index.php/recursos/exames-e-testes-intermedios/matematica-a se presenta una solución alternativa equivalente mediante la construcción de un rombo:



8.2.3

Utilizamos la fórmula de GN/2.5: $\tan\alpha = \left|\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|$, suponiendo $m_2 > m_1$:

$$1 = \tan(45^{\circ}) = \tan\alpha = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| = \frac{6m_1 - m_1}{1 + m_1 6m_1} = \frac{5m_1}{1 + 6m_1^2} \Leftrightarrow 1 + 6m_1^2 = 5m_1 \Leftrightarrow$$

$$m_1 = \begin{cases} \dfrac{1}{3} \Rightarrow m_1 m_2 = 6m_1^2 = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3} \\ 1/2 \Rightarrow m_1 m_2 = 6m_1^2 = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

El valor máximo es 3/2 (C)

8.2.4

Primera versión. Mediante trigonometría.

Sean α y β los ángulos respectivos entre las rectas l y k con el eje X.

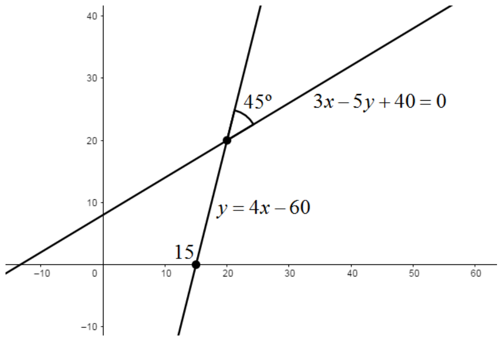
$$3x - 5y + 40 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{5}x + 8 \Rightarrow \tan\alpha = \frac{3}{5}$$

Luego

$$\tan\beta = \frac{\tan\alpha + \tan 45^{\circ}}{1 - \tan\alpha \tan 45^{\circ}} = \frac{3/5 + 1}{1 - 3/5 \cdot 1} = \frac{8/5}{2/5} = 4$$

Luego la recta k tiene por ecuación $y = 4x + b$, y puesto que pasa por el punto $(20{,}20)$,
$20 = 4 \cdot 20 + b \Rightarrow b = -60 \Rightarrow y = 4x - 60$

Su punto de corte con el eje X es $0 = 4x - 60 \Leftrightarrow 4x = 60 \Leftrightarrow x = 60/4 = 15 \quad (B)$

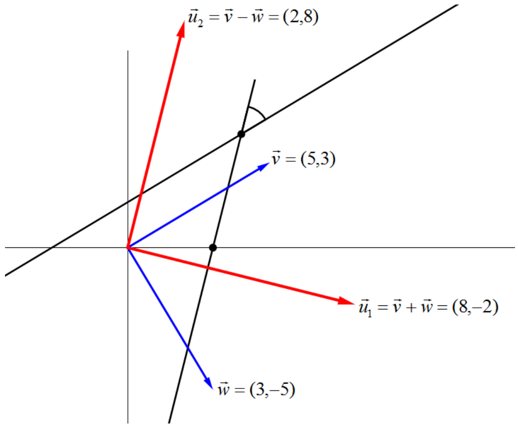


Segunda versión. Sin trigonometría, mediante vectores.

Sea $\vec{v}=(5,3)$. Este vector determina un ángulo α con $\tan\alpha=\frac{3}{5}$.

Sea $\vec{w}=(3,-5)$. Este vector es perpendicular a $\vec{v}$ y tiene su mismo módulo.

Luego $\vec{u}_1=\vec{v}+\vec{w}=(8,-2)$ y $\vec{u}_2=\vec{v}-\vec{w}=(2,8)$ serán sus bisectrices, generando ángulos de 45º respecto de la recta l. En particular, $\vec{u}_2=\vec{v}-\vec{w}=(2,8)\Rightarrow m=\frac{8}{2}=4$ es la pendiente de la recta k buscada.



8.2.5

La primera recta tiene por ecuación

$$y=2x+b\Rightarrow 2=2\cdot 2+b\Rightarrow b=-2\rightarrow y=2x-2$$

Y su punto de corte con $x+y=10$ es:

$$\left.\begin{array}{l} y=2x-2 \\ x+y=10 \end{array}\right\}\Rightarrow x+2x-2=10\Rightarrow 3x=12\Rightarrow x=\frac{12}{3}=4\rightarrow y=10-4=6$$

La segunda recta tiene por ecuación

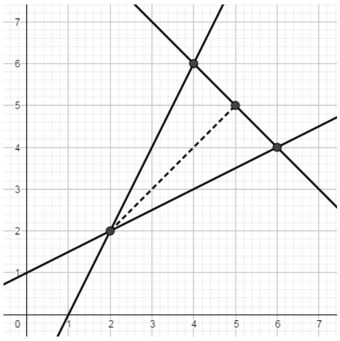
$$y=\frac{1}{2}x+b\Rightarrow 2=\frac{1}{2}\cdot 2+b=1+b\Rightarrow b=2-1=1\rightarrow y=\frac{1}{2}x+1$$

Y su punto de corte con $x+y=10$ es:

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}x+1 \\ x+y=10 \end{array}\right\}\Rightarrow x+\frac{1}{2}x+1=10\Rightarrow \frac{3}{2}x=9\Rightarrow x=\frac{18}{3}=6\rightarrow y=10-6=4$$

Vemos que forman un triángulo isósceles de base $2\sqrt{2}$ y altura $3\sqrt{2}$, y por tanto área

$$\frac{2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}}{2}=6 \quad (C)$$



Nota: En [link]() se presentan hasta 11 soluciones diferentes que pueden ser muy interesantes para repasar todas las posibles formas de determinar el área de un triángulo determinado por tres puntos.

8.2.6

Determinamos las rectas y sus respectivos puntos de corte con el eje X.

$$y=2x+b \Rightarrow 30=2\cdot 40+b \Rightarrow b=30-80=-50 \rightarrow y=2x-50$$
$$0=2x-50 \Rightarrow x=25$$

$$y=6x+b \Rightarrow 30=6\cdot 40+b \Rightarrow b=30-240=-210 \rightarrow y=2x-210$$
$$0=6x-210 \Rightarrow x=35$$

Luego la distancia es $35-25=10 \quad$ (B)

8.2.7

$$3=\frac{p+t}{2} \Rightarrow 6=p+t \quad , \quad 2=\frac{q+u}{2} \Rightarrow 4=q+u$$

$$-2=\frac{p+r}{2} \Rightarrow -4=p+r \quad , \quad 1=\frac{q+s}{2} \Rightarrow 2=q+s$$

$$2=\frac{r+t}{2} \Rightarrow 4=r+t \quad , \quad -1=\frac{s+u}{2} \Rightarrow -2=s+u$$

Luego

$$6+4-4+2+4-2=p+t+q+u+p+r+q+s+r+t+s+u \Leftrightarrow$$
$$10=2(p+q+r+s+t+u) \Leftrightarrow p+q+r+s+t+u=5 \quad (B)$$

8.2.8

Sabemos que el segmento $\overline{AB}$ es una cuerda, y que el centro O de la circunferencia pertenece a la mediatriz de $\overline{AB}$. Calculamos dicha mediatriz:

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(12,11)-(6,13)=(6,-2)$$

$$M=A+(1/2)\overrightarrow{AB}=(6,13)+(3,-1)=(9,12)$$

Un vector perpendicular a $\overrightarrow{AB}=(6,-2)$ es $\vec{v}=(2,6)$, y por tanto la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ es la recta

$$\frac{x-9}{2}=\frac{y-12}{6}\Leftrightarrow 6(x-9)=2(y-12)\Leftrightarrow 6x-54=2y-24\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6x-2y=54-24=30\Leftrightarrow 3x-y=15$$

Sea P el punto de corte de las rectas tangentes en el eje X. La mediatriz también pasará por este punto, que ahora podemos calcular, imponiendo $y=0$:

$$3x-0=15\Leftrightarrow 3x=15\Leftrightarrow x=5$$

Luego $P=(5,0)$

Observación:

Un método alternativo para determinar el punto P sería el siguiente:

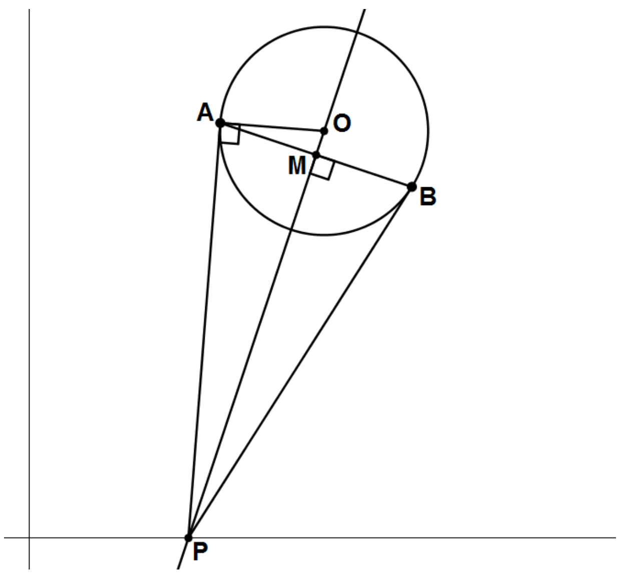
Las dos tangentes AP y BP son iguales, luego, si $P=(x,0)$

$\overrightarrow{AP}=P-A=(x,0)-(6,13)=(x-6,-13)\Rightarrow |AP|^2=(x-6)^2+(-13)^2$

$\overrightarrow{BP}=P-B=(x,0)-(12,11)=(x-12,-11)\Rightarrow |BP|^2=(x-12)^2+(-11)^2$

Y ahora, imponiendo $|AP|^2=|BP|^2$ obtenemos una ecuación que resolveremos:

$$(x-6)^2+13^2=(x-12)^2+11^2\Rightarrow x=5$$



Sea O el centro de la circunferencia.

La recta AP tiene vector director

$$\overrightarrow{AP}=P-A=(5,0)-(6,13)=(-1,-13)$$

y un vector perpendicular es $\vec{w}=(13,-1)$

La recta AO tendrá por ecuación

$$\frac{x-6}{13}=\frac{y-13}{-1}\Leftrightarrow 6-x=13(y-13)\Leftrightarrow 6-x=13y-169\Leftrightarrow 175=13y+x$$

Que se cortará en la mediatriz anterior en el centro O:

$$\left.\begin{array}{l}175=13y+x\\ 3x-y=15\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=37/4\\ y=51/4\end{array}\right.$$

Y el radio es

$$r^2=\left|\overrightarrow{OA}\right|^2=\left|(6,13)-(37/4,51/4)\right|^2=\left|(-13/4,1/4)\right|^2=(-13/4)^2+(1/4)^2=\frac{85}{8}$$

El área será, por tanto,

$$\pi r^2 = \pi \frac{85}{8}$$

Observación: Un método alternativo para determinar el radio sería aplicar el Teorema de Ptolomeo al cuadrilátero AOBP, que es una cometa, y por lo tanto es cíclico. Para todas estas variantes: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2019_AMC_10B_Problems/Problem_23

8.2.9

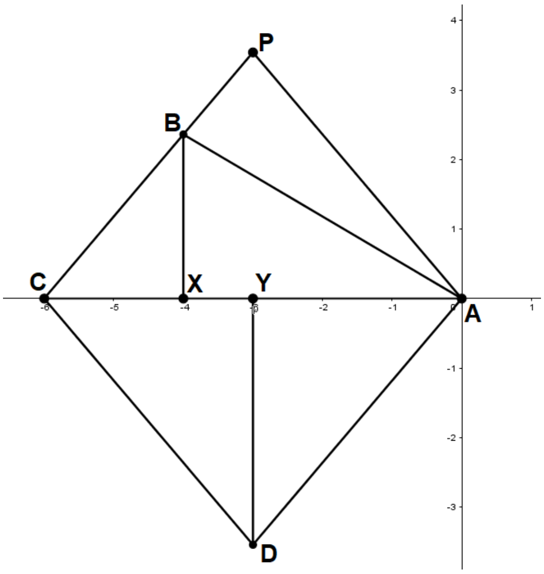
Resolveremos este problema mediante geometría analítica.

Está claro que CD=CA, pues los triángulos ΔCYD y ΔAYD son congruentes.

Prolongamos el lado CB hasta un punto P de forma que CPAD sea un rombo.

La condición que debemos imponer en el punto B es que AB=AP.

Sea $A=(0,0)$, $P=(-3,k)$, $C=(-6,0)$



Determinamos la ecuación de la recta CP

$$\left.\begin{array}{l} 0=(-6)a+b \\ k=(-3)a+b \end{array}\right\} \Rightarrow 6a = k+3a \Rightarrow a = k/3 \Rightarrow b = 2k$$

Luego la ecuación de la recta CP es $y=\frac{k}{3}x+2k$

Luego el punto B tiene por coordenadas $y=\frac{k}{3}(-4)+2k=\frac{2}{3}k \Rightarrow P=\left(-4,\frac{2}{3}k\right)$

La distancia del punto B al punto A tiene que ser la misma que de A a P

$$\left.\begin{array}{l} |AP| = \sqrt{(-3)^2+k^2} \\ |AB| = \sqrt{(-4)^2+\left(\frac{2k}{3}\right)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{(-3)^2+k^2} = \sqrt{(-4)^2+\left(\frac{2k}{3}\right)^2} \Rightarrow 9+k^2 = 16+\frac{4k^2}{9} \Rightarrow$$

$$k^2-\frac{4k^2}{9}=16-9 \Rightarrow \frac{5k^2}{9}=7 \Rightarrow k^2=\frac{7\cdot 9}{5} \Rightarrow k=3\sqrt{\frac{7}{5}}$$

Para calcular el área, dividimos la figura en área inferior y área superior:

$$A_1 = 3\sqrt{\frac{7}{5}} \cdot 6/2 = 9\sqrt{\frac{7}{5}}$$

$$P = \left(-4, \frac{2}{3}3\sqrt{\frac{7}{5}}\right) = \left(-4\,,\,2\sqrt{\frac{7}{5}}\right)$$

$$A_2 = 2\sqrt{\frac{7}{5}} \cdot 6/2 = 6\sqrt{\frac{7}{5}}$$

$$A_1 + A_2 = 9\sqrt{\frac{7}{5}} + 6\sqrt{\frac{7}{5}} = 15\sqrt{\frac{7}{5}} = 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{\frac{7}{5}} = 3 \cdot \sqrt{5^2\,\frac{7}{5}} = 3 \cdot \sqrt{5 \cdot 7} = 3 \cdot \sqrt{35} \quad \text{(C)}$$

Nota: En las soluciones de **ArtOfProblemSolving** se presenta otra versión aplicando Teorema de Pitágoras.

8.2.10

Imponemos $x = 0$ en la ecuación $\left(x^2 + y^2 - 2x\right)^2 = 2\left(x^2 + y^2\right)$:

$$\left(y^2\right)^2 = 2\left(y^2\right) \Leftrightarrow y^4 = 2y^2$$

O bien $y = 0$ o bien podemos cancelar términos y llegar a

$$y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$$

Luego los puntos de corte con el eje y serán tres, uno central y dos simétricos respecto a éste, y la única recta que satisface esta condición es “a”, luego la respuesta correcta es (A).

8.2.11

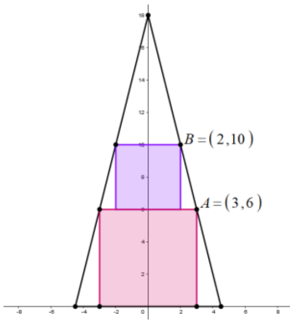
Puesto que la recta pasa por el centro del círculo, siempre lo cortará en dos semicírculos iguales, y por lo tanto el círculo no importa en absoluto en este problema.
Sea $y = ax + b$ la recta que queremos que corte el rectángulo en dos partes de igual área.
Sabemos que pasa por el punto (75, 30), y por tanto $30 = a \cdot 75 + b$, y por simetría podemos suponer que también pasará por el centro del rectángulo, es decir, el punto (50, 25).
Resolvemos el sistema

$$\left.\begin{array}{l} 30 = 75a + b \\ 25 = 50a + b \end{array}\right\}$$

Que tiene por solución $a = 1/5$ y $b = 15$, por lo que la solución es (A).

8.3.1

Podemos resolver este problema mediante geometría analítica, interpretando la recta asociada al lado del triángulo como aquella que pasa por los puntos $A = (3,6)$ y $B = (2,10)$.



La recta buscada es $4x + y = 18$, y sus puntos de corte con los ejes son (0,18) y (9/2, 0). Luego el triángulo tendrá una base de longitud 9 el área será $18 \cdot 9/2 = 81$ (A).

8.3.2
Resolveremos este problema mediante coordenadas cartesianas.
Sean A=(0,0), B=(1,0), C=(1,1), D=(0,1).
Está claro que las diagonales AC y BD se cortan en N=(1/2,1/2).
Recta AC: $y = x$.
Recta DM: Punto base: D=(0,1), vector director: $\vec{v} = (1/2,-1) \equiv (1,-2)$

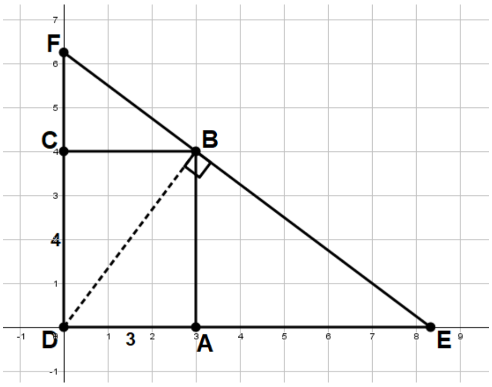
$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} \Leftrightarrow 2x + y = 1$$

Determinamos el punto de corte entre las rectas AC y DM:

$$\left.\begin{array}{l} y = x \\ 2x + y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{3}$$

Así pues, la zona gris estará formada por dos triángulos de base 1/2 y altura $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, y por tanto su área será $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ (D)

8.3.3
Resolveremos este problema mediante coordenadas cartesianas. Sean A=(3,0), B=(3,4), C=(0,4), D=(0,0).



$\overrightarrow{DB} = B - D = (3,4)$, luego la recta perpendicular a BD que pasa por B tendrá por ecuación

$$\left.\begin{array}{l} B = (3,4) \\ \vec{v} = (-4,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x-3}{-4} = \frac{y-4}{3} \Rightarrow 3x + 4y = 25$$

El punto E será su punto de corte con el eje X:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 25 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 25/3$$

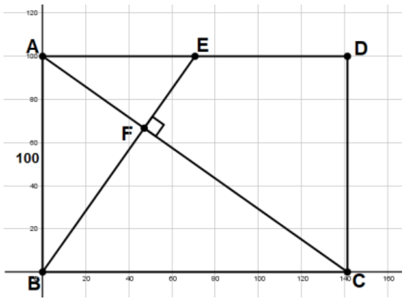
El punto F será su punto de corte con el eje Y:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 25 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 25/4$$

Luego aplicando Pitágoras,

$$EF = \sqrt{\left(\frac{25}{3}\right)^2 + \left(\frac{25}{4}\right)^2} = \frac{125}{12} \quad \text{(C).}$$

8.3.4
Vamos a resolver este problema mediante coordenadas cartesianas.
Sea $A = (0,100)$, $B = (0,0)$, $C = (2x,0)$, $D = (2x,100)$, $E = (x,100)$.



$\overrightarrow{BE} = E - B = (x,100) - (0,0) = (x,100)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (2x,0) - (0,100) = (2x,-100)$

$AC \perp BE \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BE} \Leftrightarrow 0 = \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BE} = (x,100) \bullet (2x,-100) = 2x^2 - 100^2 \Leftrightarrow$

$100^2 = 2x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{100^2}{2}} = \dfrac{100}{\sqrt{2}} = 50\sqrt{2} \Rightarrow BC = 2x = 100\sqrt{2} \cong 141.42$

8.3.5
Primer método. Descomponiendo áreas.

Vemos claramente que $[\Delta ANM] = \dfrac{1}{16}[\Delta ABCD]$

Por otro lado, vemos que $[\Delta ACM] = \dfrac{1}{2}[\Delta ACD] = \dfrac{1}{4}[\Delta ABCD]$, aplicando que el área de un triángulo es proporcional a la base, y en este caso AD=2AM.

$[\Delta NMC] = [\Delta ACM] - [\Delta ANM] = \dfrac{1}{4}[\Delta ABCD] - \dfrac{1}{16}[\Delta ABCD] = \dfrac{3}{16}[\Delta ABCD]$ (D)

Segundo método. Mediante coordenadas cartesianas.

A=(0,0), B=(0,2), C=(2,2), D=(2,0), M=(1,0) , N=(a,a)

$\overrightarrow{NM} = M - N = (1,0) - (a,a) = (1-a,-a)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (2,2) - (0,0) = (2,2)$

$NM \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{NM} \perp \overrightarrow{AC} = 0 = \overrightarrow{NM} \bullet \overrightarrow{AC} = (1-a,-a) \bullet (2,2) = 2(1-a) - 2a =$

$= 2 - 2a - 2a) = 2 - 4a \Leftrightarrow 4a = 2 \Leftrightarrow a = 1/2$

Por tanto, $N = (1/2\,,1/2\,) \Rightarrow [\Delta ANM] = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{4}$

$[\Delta MDC] = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$, $[\Delta ADC] = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$

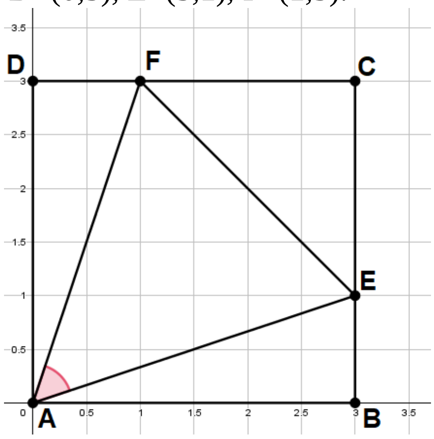
$[\Delta NMC] = [\Delta ADC] - [\Delta MDC] - [\Delta ANM] = 2 - 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

$[\Delta ABCD] = 2 \cdot 2 = 4$

$\dfrac{[\Delta NMC]}{[\Delta ABCD]} = \dfrac{3/4}{4} = \dfrac{3}{16}$ (D)

8.3.6
Primera versión. Por “Coordenate Bashing” y Aplicando el Teorema del Coseno:

Sea A=(0,0), B=(3,0), C=(3,3), D=(0,3), E=(3,1), F=(1,3).



$AE = AF = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$

$EF = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$

Y ahora aplicamos el Teorema del Coseno (★40):

$$EF^2 = AE^2 + AF^2 - 2AE \cdot AF \cdot Cos(\alpha) \Leftrightarrow 8 = 10+10-2\cdot 10\cos(\alpha) \Leftrightarrow$$

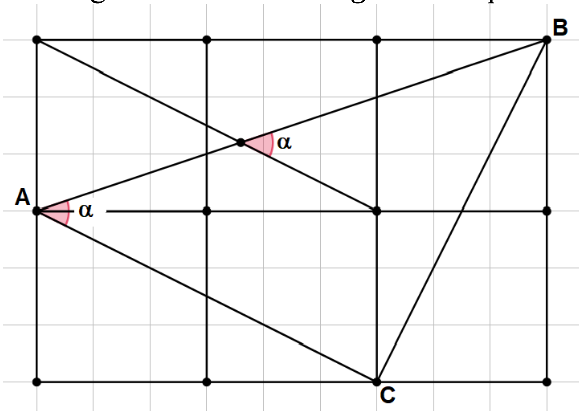
$$-12 = -2\cdot 10\cos(\alpha) \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{-12}{-20} = \frac{3}{5}$$

Segunda versión. Mediante vectores y producto escalar.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = (1,3) \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{10} \\ \vec{w} = (3,1) \Rightarrow |\vec{w}| = \sqrt{10} \\ \vec{v} \bullet \vec{w} = 1\cdot 3 + 3\cdot 1 = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|} = \frac{6}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}} = \frac{3}{5}$$

8.3.7

Si duplicamos los tres cuadrados superiores en la parte inferior, y trazamos una paralela, vemos que el ángulo α buscado es el ángulo $\angle BAC$ en el siguiente esquema:



La clave para resolver este problema es observar que el triángulo ΔABC es un triángulo rectángulo isósceles, es decir, que AC=BC, lo que está claro, y que $AC \perp BC$, lo que se puede demostrar por Pitágoras ($AC^2 + BC^2 = AB^2$), por producto escalar ($\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BC} = 0$). Sea como sea, $\angle ACB = 90^{\circ}$ y $\alpha = \angle BAC = (180^{\circ} - 90^{\circ})/2 = 45^{\circ}$

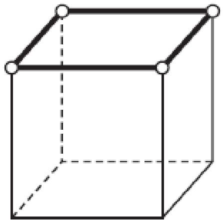
9.1

Un atento estudio de la figura nos lleva a ver que dicho segmento coincide con la arista marcada con “5” (E)

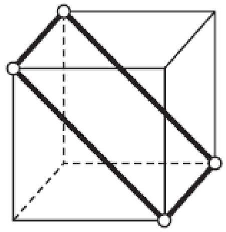
9.2
Se descartan las caras, pues dichos planos pasan por cuatro puntos del cubo. Nos quedan los planos que pasan por una diagonal de una cara y por uno de los dos vértices de la cara opuesta. Hay 8 en total (D)

9.3
Una pirámide de 23 caras triangulares consta de una base, que es un polígono de 23 lados y 23 caras laterales, luego tendrá también 23 apotemas. En total, $23+23=46$ aristas. (C)

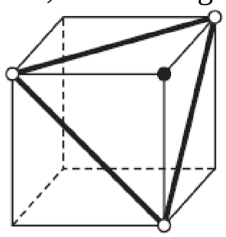
9.4
Todo se reduce a contar. Por 4 puntos son todas las 8 caras:



Y todas las 4 " caras diagonales":

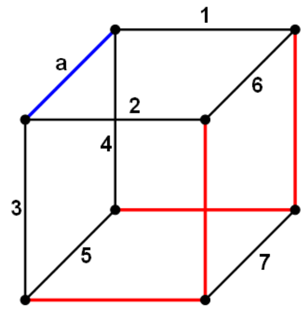


Y por tres puntos debemos añadir, además, las ocho siguientes:



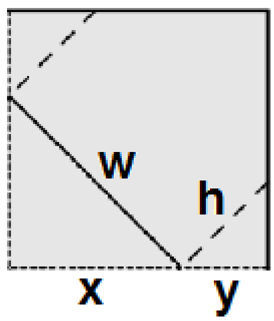
En total: $8+4+8=20$ (E)

9.5
Fijada una arista del cubo, a, hay 7 aristas más con las que puede generar un plano:



Puesto que los pares no están ordenados, deberemos dividir el total entre dos. Así pues, el total de parejas será $\frac{12\cdot 7}{2}=42$ (D).

9.6



Aplicando Pitágoras tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} w^2=2x^2 \Rightarrow x=\frac{w}{\sqrt{2}} \\ h^2=2y^2 \Rightarrow y=\frac{h}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow x+y=\frac{w}{\sqrt{2}}+\frac{h}{\sqrt{2}}=\frac{w+h}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2(x+y)=\frac{2(w+h)}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}(w+h)$$

Y por tanto el área será $(2(x+y))^2=\frac{2(w+h)}{\sqrt{2}}=2(w+h)^2$

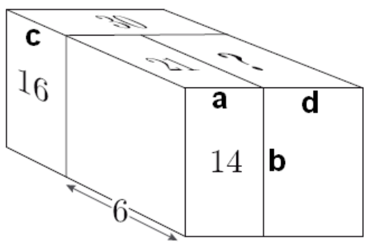
9.7

Contando los trayectos horizontales y verticales por separado, $5+1+1+1+1=9$ (B)

9.8

Si no contamos las caras que se tocan, se necesitarían 4 litros de pintura.
Vemos que hay dos caras grandes que se tocan, y el equivalente a dos caras laterales largas y dos caras laterales cortas, una figura completa. Luego se necesitarán 3 litros de pintura. (B)

9.9



$a=21/6=7/2$

$b=\frac{14}{a}=\frac{14}{7/2}=\frac{2}{1/2}=4$

$c=\frac{16}{b}=\frac{16}{4}=4$

$a+d=\frac{30}{c}=\frac{30}{4}=\frac{15}{2}\Rightarrow d=\frac{15}{2}-\frac{7}{2}=4$

Luego el área es $6\cdot 4=24$ (B)

9.10

(A)

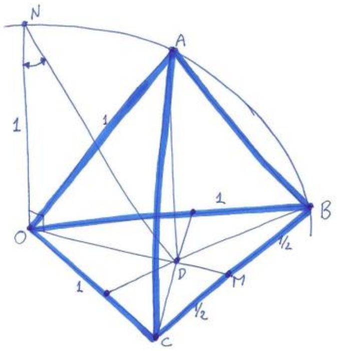
9.11
El mayor número de cubos pequeños pintados lo obtendremos cuando pintemos dos caras opuestas, con lo que obtendremos $16+16+8=40$ cubos pequeños pintados, de los cuales 8 tendrán dos caras pintadas, luego el resultado correcto es 32 (C)

9.12
Está claro que ABCO es un tetraedro regular de lado 1.
El punto D es el centro del triángulo equilátero ΔOBC , y por tanto, aplicando Pitágoras, tomando el punto medio M del lado BC,

$$OM = \sqrt{1^2-(1/2)^2} = \sqrt{3/4} = \sqrt{3}/2$$

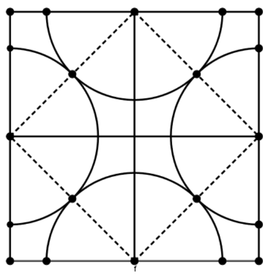
$$OD = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Y el ángulo buscado es $\arctan\left(\frac{OD}{1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30^{\circ}$



9.13 E

9.14
Dibujamos una sección transversal del cubo, en la que vemos claramente que las semiesferas se tocan en el punto central de cuadrados de lado 1:



luego sus radios son $\sqrt{2}/2$ y por tanto sus diámetros son $\sqrt{2}$ (C).

9.15
La (B), por observación detallada de las piezas.

9.16
Vemos que una vez cortado, la superficie total de los ortoedros pequeños será de 6 caras frontales CR (la de delante, la de atrás y cuatro interiores), y con el mismo razonamiento, 6 caras laterales CL y 6 caras horizontales CH, luego será un total

$A_1 = 6(CR + CL + CH)$

Mientras que este ortoedro, sin cortar, tiene una superficie de

$A_2 = 2(CR + CL + CH)$

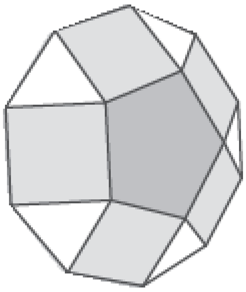
Luego, la razón que nos piden es claramente $\frac{A_2}{A_1} = \frac{2(CR + CL + CH)}{6(CR + CL + CH)} = \frac{1}{3}$ (B)

9.17

Tendremos dos caras cuadradas 1×1 y cuatro caras rectangulares 1×(1/2), luego la superficie será $2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot (1/2) = 4$ (E)

9.18

Podemos "desmontar" esta figura en doce partes como la siguiente:



Que constan de un pentágono, cinco cuadrados y cinco triángulos. En total hay:

12 pentágonos

$12 \cdot 5 = 60$ cuadrados

$12 \cdot 5 = 60$ triángulos

Pero debemos tener en cuenta que los triángulos los hemos contado por triplicado, luego hay que restar dos de cada tres:

$$60 - \frac{2}{3} 60 = 60 - 40 = 20 \text{ triángulos.}$$

Los cuadrados los hemos contado por duplicado, luego hay que restar la mitad:

$$60 - \frac{1}{2} 60 = 60 - 30 = 30 \text{ cuadrados.}$$

La suma será $12 \cdot 5 + 1 \cdot 20 - 1 \cdot 30 = 50$ (C).

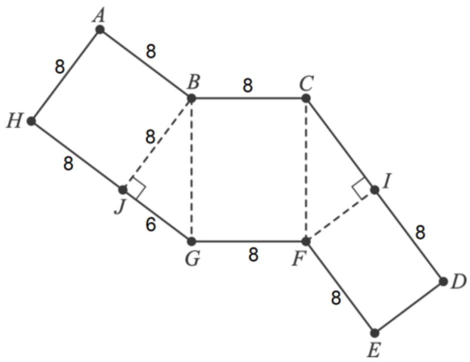
9.19

Señalamos en la imagen las distancias dadas de los segmentos.

$8 = EF = ID = FG = BC = AB = HJ$

$8 = AH = BJ$

$14 = HG = HJ + JG = 8 + JG \Rightarrow JG = 14 - 8 = 6$



Interpretando la base del prisma como el triángulo rectángulo ΔBJC, con área

$$[\Delta BJC] = \frac{1}{2} 6 \cdot 8 = 24$$

El volumen del prisma será $24 \cdot 8 = 192$ (C)

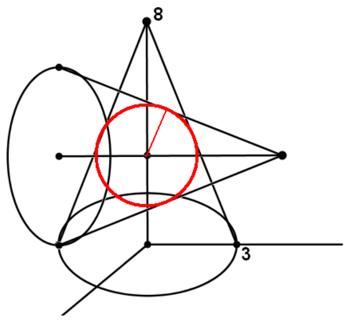
9.20
Observando la figura, vemos que, en vertical, ha recorrido la distancia equivalente a la altura de la lata, es decir 15 cm, y en horizontal ha dado dos vueltas a la lata, es decir 30×2=60 cm. En total ha recorrido 75 cm (E).

9.21
Observando cuidadosamente el desarrollo del tetraedro vemos que la cara blanca sin marca se sobrepone sobre la cara D y la cara marcada con “INICI” se sobrepone con la cara “E”, luego la respuesta correcta es (E).

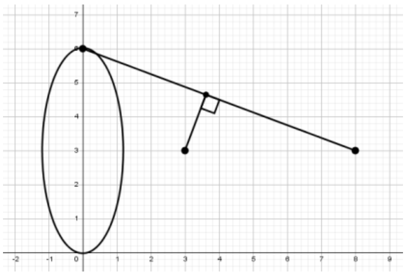
9.22
Observando detalladamente las figuras (D).

9.23
Observando detalladamente las figuras (C).

10.1
Dibujando la situación de los dos conos podemos especular que el radio que nos piden es la distancia del centro a la apotema:



Que la podemos representar como la distancia del punto $(3,3)$ a la recta que pasa por $(0,6)$ y $(8,3)$, es decir, la recta $y = \frac{-3}{8}x + 6 \Leftrightarrow 3x + 8y - 48 = 0$

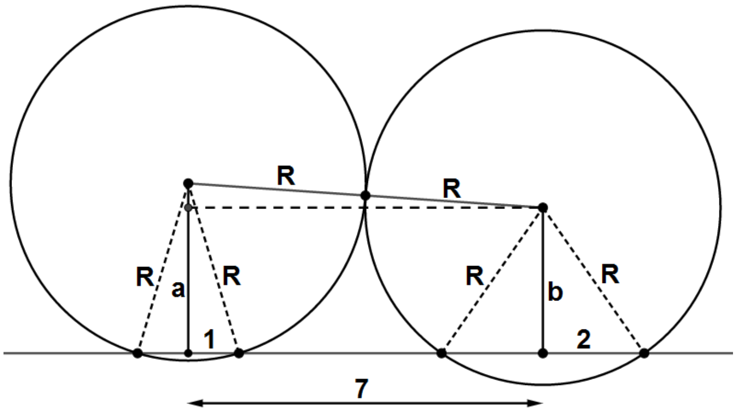


La distancia la podemos calcular por la conocida fórmula de la distancia de un punto a una recta:

$$d=\frac{|3\cdot 3+8\cdot 3-24|}{\sqrt{3^2+8^2}}=\frac{15}{\sqrt{73}}\cong 1.76$$

10.2

Realizamos un esquema transversal de la posición de las dos esferas en sus respectivos agujeros:



En donde vemos claramente tres triángulos rectángulos diferentes en los que aplicar Pitágoras, obteniendo un sistema de ecuaciones que tenemos que resolver:

$$\begin{cases} R^2=1^2+a^2 \\ R^2=2^2+b^2 \\ (2R)^2=(a-b)^2+7^2 \end{cases}$$

$$4R^2=(2R)^2=(a-b)^2+7^2=a^2+b^2-2ab+49=R^2-1+R^2-4-2ab+49\Leftrightarrow$$
$$4R^2=2R^2+44-2ab\Leftrightarrow 2R^2=44-2ab\Leftrightarrow$$
$$R^2=22-ab=22-\sqrt{R^2-1}\sqrt{R^2-4}=22-\sqrt{(R^2-1)(R^2-4)}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(R^2-1)(R^2-4)}=22-R^2\Leftrightarrow (R^2-1)(R^2-4)=(22-R^2)^2\Leftrightarrow$$
$$R^4-5R^2+4=22^2-44R^2+R^4\Leftrightarrow 4-22^2=-44R^2+5R^2\Leftrightarrow$$
$$4-22^2=-44R^2+5R^2\Leftrightarrow -480=-39R^2\Leftrightarrow R^2=\frac{160}{13}$$

10.3

Si a,b,c son las medidas de dicho recipiente, se cumple:

$$\left.\begin{array}{l}2ab=120\\3bc=120\\5ac=120\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}ab=60\\bc=40\\ac=24\end{array}\right\}\Rightarrow abbcac=60\cdot40\cdot24=2\cdot2\cdot3\cdot5\cdot2^3\cdot5\cdot2^3\cdot3=2^8\cdot3^2\cdot5^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow abc=2^4\cdot3\cdot5=240\quad(E)$$

Una versión alternativa más rápida:

$$\left.\begin{array}{l}2ab=120\\3bc=120\\5ac=120\end{array}\right\}\Rightarrow120^3=2ab\cdot3bc\cdot5ac\Rightarrow120^2\cdot120=30(abc)^2\Rightarrow120^2\cdot4=(abc)^2$$

$$\Rightarrow120^2\cdot4=abc=120\cdot2=240$$

10.4

a)

$$\overrightarrow{AV}=V-A=(3,-1,2)-(2,1,0)=(1,-2,2)\rightarrow\left|\overrightarrow{AV}\right|=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=\sqrt{9}=3$$

$$\overrightarrow{AC}=C-A=(0,-1,2)-(2,1,0)=(-2,-2,2)\rightarrow\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$$\cos\angle VAC=\frac{\overrightarrow{AV}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AV}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{1(-2)+(-2)(-2)+2\cdot2}{3\cdot2\sqrt{3}}=\frac{6}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\angle VAC=arc\cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=54.73^{\text{o}}$$

b) El centro de la base de la pirámide será el punto medio M del segmento AC:

$$M=\frac{A+C}{2}=\frac{(2,1,0)+(0,-1,2)}{2}=\frac{(2,0,2)}{2}=(1,0,1)$$

El vector $\overrightarrow{MV}=V-M=(3,-1,2)-(1,0,1)=(2,-1,1)$ será perpendicular a la base, con lo que nos sirve de vector normal. Luego la ecuación del plano que contiene la base será de la forma $2x-y+z+d=0$

Y como sabemos que pasa por el punto $A=(2,1,0)$

$2\cdot2-1+0+d=0\Leftrightarrow3+d=0\Leftrightarrow d=-3$

La ecuación es, por tanto, $2x-y+z-3=0$

10.5

Vemos que son cubos de arista 1, 2, 3, 4, 5, 6 ,7. Luego sus áreas laterales son

$$4\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2\right)=4\frac{7\cdot8\cdot15}{6}=560$$

Las caras superiores se van encajando unas con otras hasta completar un cuadrado de área 7^2.
En total: $540+2\cdot49=658\quad(B)$

10.6

La longitud de la circunferencia será $\frac{3}{4}2\pi r=\frac{3}{4}2\pi4=2\pi3$, es decir, el cono tendrá como base un círculo de radio 3 y apotema 4. Luego su altura será $\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$

Y por lo tanto su volumen será $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi 3^2 \sqrt{7} = 3\pi\sqrt{7}$ (C)

10.7
Por Pitágoras,

$$BE = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$
$$AC = BD = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$
$$EC = \sqrt{6^2 + 18} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

Está claro que ΔEBD y ΔEPQ son triángulos semejantes con razón 2/3, luego

$$PQ = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3}3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Para calcular PR aplicaremos el Teorema del Coseno:

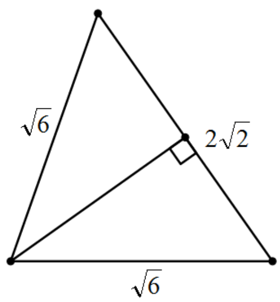
$$BC^2 = BE^2 + CE^2 - 2\cdot BE\cdot CE\cdot\cos\angle BEC \Leftrightarrow$$
$$9 = 45 + 54 - 2\cdot 3\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{6}\cdot\cos\angle BEC \Leftrightarrow$$
$$9 = 99 - 18\sqrt{30}\cos\angle BEC \Leftrightarrow \cos\angle BEC = \frac{90}{18\sqrt{30}} = \frac{5}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$
$$PR^2 = EP^2 + ER^2 - 2\cdot EP\cdot ER\cdot\cos\angle BEC \Leftrightarrow$$
$$PR^2 = \left(\frac{2}{3}3\sqrt{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}3\sqrt{6}\right)^2 - 2\frac{2}{3}3\sqrt{5}\frac{1}{3}3\sqrt{6}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = 4\cdot 5 + 6 - 20 = 6 \Rightarrow PR = \sqrt{6}$$

Debemos calcular el área de un triángulo isósceles de lados $a = 2\sqrt{2}$, $b = c = \sqrt{6}$.
Mediante la Fórmula de Herón:

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{6}}{2} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$$
$$[\Delta PQR] = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} =$$
$$= \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{6}-2\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{6})} =$$
$$= \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{2})(\sqrt{2})} =$$
$$= \sqrt{(6-2)2} = \sqrt{4\cdot 2} = 2\sqrt{2}$$

La respuesta correcta es (C).

Observación: Mucho más inteligente hubiera sido determinar la altura del triángulo ΔPQR por Pitágoras:

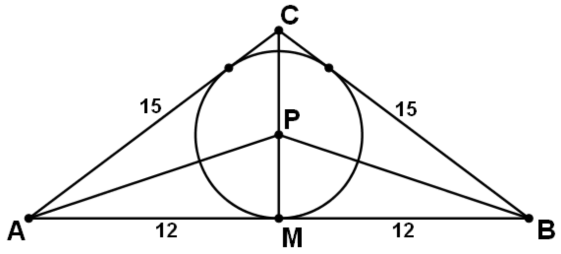


$h = \sqrt{6-2} = \sqrt{4} = 2$

Y por tanto $[\Delta PQR] = \frac{1}{2} 2\sqrt{2} \cdot 2 = 2\sqrt{2}$

10.8

La intersección entre la esfera y el triángulo es el círculo inscrito del triángulo.
Sea ΔABC dicho triángulo, con $AB = 24$ y $AC = BC = 15$. Sea M el punto medio del lado AB. Sea P su centro. Necesitamos calcular el radio de dicho círculo inscrito, es decir, la distancia PM.



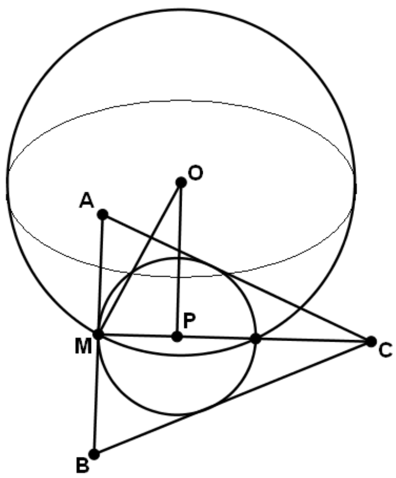
$MC = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{3^2 5^2 - 3^2 4^2} = \sqrt{3^2 (5^2 - 4^2)} = 3\sqrt{5^2 - 4^2} = 3\sqrt{9} = 9$

$[\Delta ABC] = \frac{9 \cdot 24}{2} = 108$

$s = \frac{15 + 15 + 24}{2} = 27$

Aplicamos ahora 11.4.8: $[\Delta ABC] = r \cdot s \Leftrightarrow 108 = 27r \Rightarrow r = 4$

Con estos datos ya podemos calcular la distancia OP:



$OP = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ (D)

10.9

Podemos considerar la parte no sumergida como una especie de pirámide de base

$$A = \frac{24 \cdot 25}{2} = 12 \cdot 25$$

Y por tanto su volumen será $V=\dfrac{A\cdot 27}{3}=12\cdot 25\cdot 9$ que corresponde al 10% del total:

$$V=\frac{1}{10}V'\Leftrightarrow 12\cdot 25\cdot 9=\frac{1}{10}V'$$

$$\Leftrightarrow V'=10\cdot 12\cdot 25\cdot 9=5\cdot 2\cdot 2^2\cdot 3\cdot 5^2\cdot 3^2=5^3\cdot 2^3\cdot 3^3=(5\cdot 2\cdot 3)^3=30^3$$

Luego se trata de un cubo de arista 30. (A)

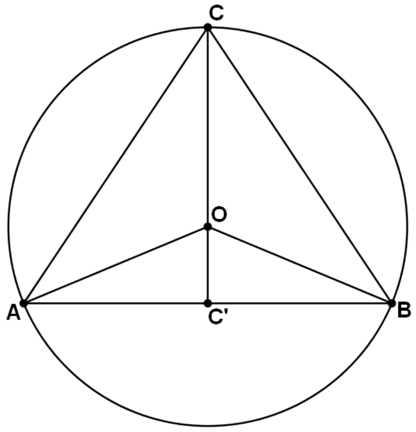
10.10

D

10.11

$$V=54=\frac{6\cdot 6\cdot h}{3}\Rightarrow h=\frac{9}{2}$$

Si miramos esta pirámide lateralmente, la base se convierte en un segmento cuya diagonal mide $\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$ y toda la pirámide se convierte en un triángulo isósceles de base $6\sqrt{2}$ y altura 9/2, para el que queremos determinar el radio de su circunferencia circunscrita.



$AC'=6\sqrt{2}$, $CC'=9/2$, $r=OB=OA=OC$, sea $x=OC'$.

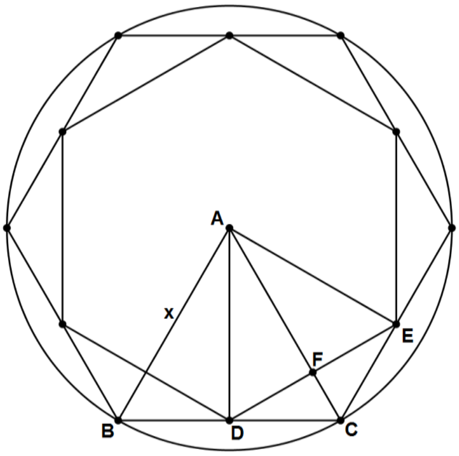
Aplicando Teorema de Pitágoras:

$$\left.\begin{array}{l} x+r=9/2 \\ \left(\dfrac{6\sqrt{2}}{2}\right)^2+x^2=r^2 \end{array}\right\}\Rightarrow r=17/4$$

y la solución al problema es $17+4=21$.

10.12

Lo primero que haremos será calcular las áreas correspondientes en la base. Estas áreas las haremos corresponder a una distancia $x=AB$ fija.



$$x = AB \Rightarrow BD = \frac{x}{2} \Rightarrow AD^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$DF = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}AD = \frac{\sqrt{3}}{4}x \Rightarrow AF^2 = AD^2 - DF^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}x\right)^2 =$$

$$= \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{16}x^2 = \frac{12}{16}x^2 - \frac{3}{16}x^2 = \frac{9}{16}x^2 \Rightarrow AF = \frac{3}{4}x$$

$$FC = AC - AF = x - \frac{3}{4}x = \frac{x}{4}$$

$$[\Delta ABC] = \frac{AD \cdot BC}{2} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot x = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$[\Delta DEC] = \frac{DE \cdot FC}{2} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}x\frac{x}{4} = \frac{\sqrt{3}}{16}x^2$$

Para calcular el volumen del prima grande utilizaremos la fórmula

Volumen = Área de la base × Altura

pero para calcular la parte que recortamos debemos tener en cuenta que se trata de figuras de tipo piramidal, por lo tanto la fórmula es

Volumen = Área de la base × Altura / 3

En nuestro caso:

$$V_1 = [\Delta ABC] \cdot 6 \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \cdot 6 \cdot h \quad , \quad V_2 = [\Delta DEC] \cdot 6 \cdot h\frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{48}x^2 \cdot 6 \cdot h$$

Luego:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{48}x^2 \cdot 6 \cdot h}{\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \cdot 6 \cdot h} = \frac{1}{12} \quad \text{(E)}$$

10.13

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = 2\pi x^2 y \\ V_2 = 2\pi y^2 x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{2\pi y^2 x}{2\pi x^2 y} = \frac{y}{x} \quad \text{(E)}$$

10.14

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que nuestro tetraedro regular tiene aristas de longitud 1. Luego $AM = MB = 1/2$, y por Pitágoras,

$$MD = MC = \sqrt{1^2 - (1/2)^2} = \sqrt{3/4} = \sqrt{3}/2$$

Trazamos la perpendicular al lado ABC por el vértice D, que cortará dicho lado en el punto P. Este punto P es el centro de un triángulo equilátero, por lo tanto es en particular su baricentro.

Luego, aplicando ★94, $MP = \frac{1}{3}MC = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

Finalmente, $\cos(\angle CMD) = \frac{MP}{MD} = \frac{\sqrt{3}/6}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{3}$ (B)

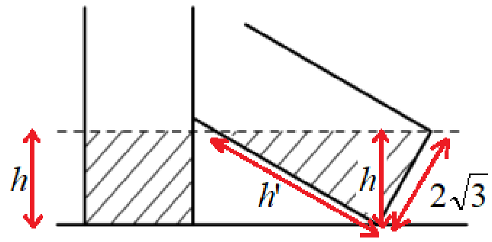
10.15

$3\pi = A_{base} = \pi r^2 \Rightarrow r^2 = 3 \Rightarrow r = \sqrt{3} \Rightarrow d = 2\sqrt{3}$.

Tal y como se muestra en la siguiente imagen, diremos que el cilindro de la izquierda es el que se mantiene vertical y el cilindro de la derecha es el que se ha inclinado.

Sea h la altura del agua del cilindro vertical.

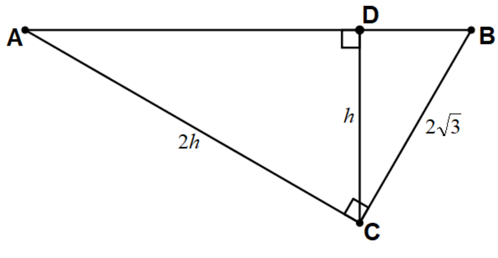
El cilindro inclinado se puede interpretar como medio cilindro de altura h':



Luego si tienen la misma cantidad de agua tendremos

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = A_b \cdot h \\ V_2 = \frac{1}{2} A_b \cdot h' \end{array}\right\} \Rightarrow V_1 = V_2 \Leftrightarrow A_b \cdot h = \frac{1}{2} A_b \cdot h' \Leftrightarrow h = \frac{1}{2} h' \Leftrightarrow 2h = h'$$

Nuestro problema se reduce ahora a resolver un triángulo rectángulo dividido en dos triángulos rectángulos internos:



El triángulo ΔADC tiene hipotenusa el doble que su cateto menor, luego es semejante al triángulo 30º-60º-90º, luego $\angle ACD = 60º \Rightarrow \angle DCB = \angle ACB - \angle ACD = 90º - 60º = 30º$, y $\angle DBC = 60º$, así pues, el triángulo ΔCDB también es un triángulo 30º-60º-90º, y por tanto sus lados siguen la proporcionalidad 1:2:√3, es decir,

$$\frac{h}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

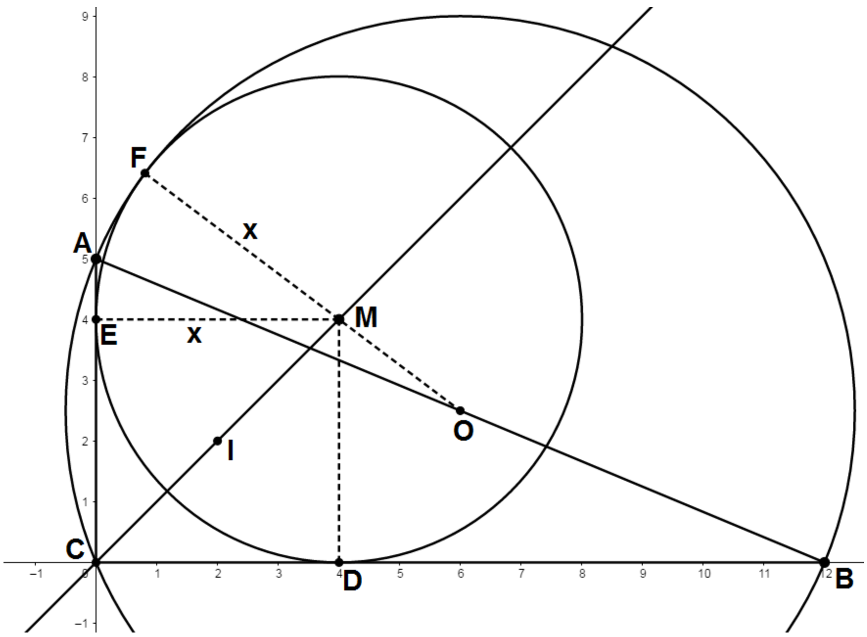
Finalmente, $V = A_b \cdot h = 3\pi \cdot 3 = 9\pi\ m^3$ (C)

11.1.1

En primer lugar vemos que $13^2 = 12^2 + 5^5$, con lo que ΔABC es un triángulo rectángulo con hipotenusa AB.
Resolveremos este problema mediante coordenadas cartesianas.
Sean $C = (0,0)$, $B = (12,0)$ y $A = (0,5)$.
Está claro que el ortocentro es el punto medio de la hipotenusa, es decir: $O = (6,5/2)$.
Las coordenadas del incentro las podemos deducir de la fórmula $[\Delta ABC] = r \cdot s$ (ver GA/11.4.8)

$$\left.\begin{array}{l} [\Delta ABC] = \dfrac{12 \cdot 5}{2} = 30 \\ s = \dfrac{12+5+13}{2} = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow r = \frac{[\Delta ABC]}{s} = \frac{30}{15} = 2$$

La bisectriz del ángulo A tiene por ecuación $y = x$, y por tanto $I = (2,2)$.
El punto M equidista de los lados CB y CA, luego pertenecerá a la bisectriz $y = x$, y podemos escribir $M = (x, x)$ para cierto x que tenemos que determinar.
Sean D, E y F los puntos de tangencia a los lados AC, BC y al circuncírculo de ΔABC, respectivamente.
La clave para encontrar M es observar que $x = EM = DM = MF$



Y por tanto

$$\frac{13}{2}=FO=FM+MO=x+\sqrt{(x-6)^2+(x-5/2)^2}\Rightarrow$$
$$\frac{13}{2}-x=\sqrt{(x-6)^2+(x-5/2)^2}\Rightarrow\left(\frac{13}{2}-x\right)^2=(x-6)^2+\left(x-\frac{5}{2}\right)^2\Rightarrow$$
$$\frac{169}{4}+x^2-13x=x^2-12x+36+x^2+\frac{25}{4}-5x\Rightarrow 0=x^2-4x=x(x-4)\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\x=4\end{cases}$$

Así pues, llegamos a $M=(4,4)$ y el área del triángulo lo podemos calcular mediante la "fórmula de la lazada" (Ver GA/18.6.5):

$$\left.\begin{array}{l}I=(2,2)\\M=(4,4)\\O=(6,5/2)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}4&4\\6&5/2\\2&2\\4&4\end{pmatrix}=4\cdot\frac{5}{2}+6\cdot2+2\cdot4-6\cdot4-2\cdot\frac{5}{2}-2\cdot4=$$
$$=10+12-24-5=-7\Rightarrow[\Delta MOI]=7/2\quad\text{(E)}$$

11.1.2

Es una relectura de GA/11.4.8: $[\Delta ABC]=r\cdot s\Leftrightarrow K=r\cdot\frac{P}{2}\Leftrightarrow\frac{2}{r}=\frac{P}{K}$ (D)

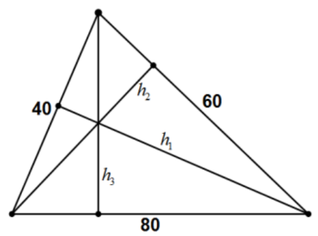
11.2.1

$\angle ABH=180^\circ-\angle HAB-\angle AHB=180^\circ-2\alpha-90^\circ=90^\circ-2\alpha$

Luego $180^\circ=\alpha+4\alpha+90^\circ-2\alpha\Leftrightarrow 3\alpha+90^\circ=180^\circ\Leftrightarrow\alpha=30^\circ$ (A)

11.2.2

Sean $h_1\geq h_2\geq h_3$ las tres alturas de este triángulo. Vamos a aplicar que la altura mayor h_1 es perpendicular al lado menor, y que la altura menor h_3 es perpendicular al lado mayor.



Luego $[\Delta ABC]=\frac{40\cdot h_1}{2}=\frac{60\cdot h_2}{2}=\frac{80\cdot h_3}{2}\Leftrightarrow 40h_1=80h_3\Leftrightarrow h_3=\frac{40h_1}{80}=\frac{1}{2}h_1$ (D)

11.2.3

Sea h la tercera altura del triángulo. Sean a, b y c los lados perpendiculares a las alturas 10, 11 y h, respectivamente.

Sabemos que el área del triángulo es base por altura dividido entre dos, por tanto:

$$[\Delta ABC]=\frac{10a}{2}=\frac{11b}{2}=\frac{hc}{2}\Rightarrow 10a=11b=hc$$

$$10a = hc \Rightarrow a = \frac{hc}{10} \quad , \quad 11b = hc \Rightarrow b = \frac{hc}{11}$$

Y ahora aplicamos la Desigualdad Triangular:

$$c < a + b = \frac{hc}{10} + \frac{hc}{11} = hc\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11}\right) = hc\left(\frac{21}{110}\right)$$

Puesto que está claro que $c \neq 0$ pues es un lado de un triángulo, podemos cancelar este término para llegar a

$$1 < h\left(\frac{21}{110}\right) \Rightarrow 5.2 \cong \frac{110}{21} < h$$

Así pues, queda descartada la opción (A).

11.2.4

Los triángulos ΔADB y ΔCEB son semejantes, pues son triángulos rectángulos y comparten el ángulo $\angle B$.

Los triángulos $\angle CEB$ y ΔCDH son semejantes, pues son triángulos rectángulos y comparten el ángulo $\angle ECB = \angle HCD$.

Luego los triángulos ΔADB y ΔCDH son semejantes, y por tanto sus lados son proporcionales:

$$\frac{BD}{AD} = \frac{DH}{DC} \Leftrightarrow DB \cdot DC = AD \cdot DH$$

11.3.1

Ver PG2/9.13

11.3.2

Aplicando el Teorema de la bisectriz:

$$\frac{CG}{10} = \frac{GB}{50} \Leftrightarrow \frac{CG}{GB} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{BC}{CG} = \frac{BG + GC}{CG} = \frac{BG}{CG} + 1 = 5 + 1 = 6 \Rightarrow \frac{CG}{BC} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{GB}{BC} = \frac{5}{6}$$

Y por tanto, puesto que, por Elementos 6.1, las áreas son proporcionales a las razones de las bases, (ver GA/8.2.6), tenemos:

$$[\Delta AGB] = \frac{5}{6}[\Delta ABC] = \frac{5}{6}120 = 100$$

Por otro lado, por semejanza de triángulos, F es el punto medio del segmento $\overline{AG}$ y el triángulo ΔAFD será semejante a ΔAGB con una razón de proporcionalidad 1/2, y por tanto la razón de proporcionalidad del área será su cuadrado, es decir, 1/4:

$$[\Delta AFD] = \frac{1}{4}[\Delta AGB] = \frac{1}{4}100 = 25 \Rightarrow [\Delta FDBG] = 100 - 25 = 75 \quad \text{(D)}$$

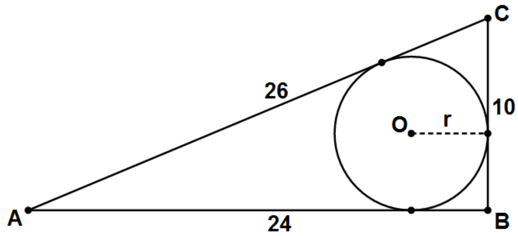
Nota: En https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AMC_12A_Problems/Problem_18 encontramos hasta 7 desarrollos diferentes de este problema.

11.3.3

Primera versión.
Observamos que en este triángulo se cumple

$$AC^2 + BC^2 = 24^2 + 10^2 = 676 = 26^2 = AB^2$$

Luego se trata de un triángulo rectángulo en el vértice B:



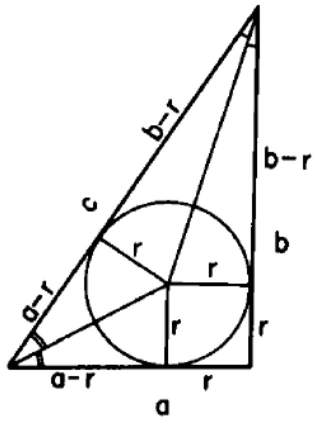
Luego su área será $[\Delta ABC] = \frac{10 \cdot 24}{2} = 120$

El semiperímetro será $s = \frac{26+24+10}{2} = 30$

Aplicando ahora $[\Delta ABC] = r \cdot s$ (GA/11.4.8) , tenemos

$$r = \frac{[\Delta ABC]}{s} = \frac{120}{30} = 4 \quad \text{(B)}$$

Segunda versión.
Al tratarse de un triángulo rectángulo, y teniendo en cuenta que las tangentes por un mismo punto son siempre iguales (ver GA/10.2.9), se cumple $c = a - r + b - r$



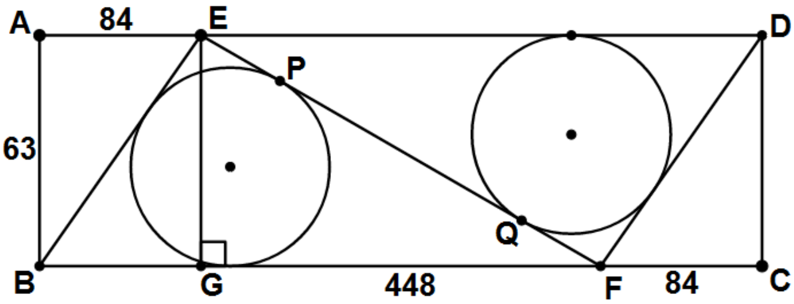
En nuestro caso:

$$26 = (24 - r) + (10 - r) \Rightarrow 26 - 24 - 10 = -2r \Rightarrow r = 4 \quad \text{(B)}$$

11.3.4

Basta aplicar GA/11.4.8: $[\Delta ABC] = r \cdot s \Leftrightarrow 2[\Delta ABC] = r \cdot 2s = r \cdot P \Rightarrow r = \frac{2[\Delta ABC]}{P} = 2$ (A)

11.3.5



Afortunadamente, los lados del triángulo ΔBEF son todos números enteros, que se pueden determinar sin calculadora:

$$BF = 448 - 84 = 364$$

$$BE = \sqrt{63^2 + 84^2} = 105$$

Trazando la altura EG del triángulo por el vértice E, $GF = 364 - 84 = 280$,

$$EF = \sqrt{280^2 + 63^2} = 287$$

Aplicando GA/11.4.10b,

$$EP = \frac{105 + 287 - 364}{2} = 14$$

Por simetría podemos suponer que $QF = EP$, y por tanto, finalmente:

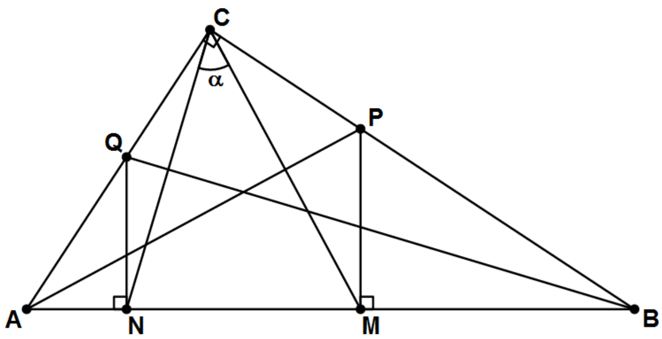
$$PQ = EF - 2EP = 287 - 28 = 259$$

Observación. Los cálculos se podrían haber simplificado dividiendo todas las medidas por su máximo común divisor, que es 7, y multiplicando el resultado obtenido por 7.

11.3.6

Ver PG2/9.9

11.3.7



En primer lugar vemos que los triángulos ΔACP y ΔAMP son congruentes. En efecto, ambos son triángulos rectángulos, y comparten el ángulo $\angle A/2$, y comparten la hipotenusa $\overline{AP}$.
Luego $CP = MP$ y $\angle PCM = \angle CMP = \angle A/2$.
Esta última igualdad se deduce de

$$\angle APC = \angle APM = 90 - \angle A/2 \Rightarrow \angle CPM = 180 - \angle A \Rightarrow 2\angle PCM = \angle A \Rightarrow \angle PCM = \angle A/2$$

De la misma manera vemos que los triángulos ΔBCQ y ΔBNQ son congruentes, y por tanto $QC = QN$ y $\angle QCN = \angle QNC = \angle B/2$.

Así pues:

$$90 = \angle QCN + \alpha + \angle PCM = \frac{\angle B}{2} + \alpha + \frac{\angle A}{2} = \alpha + \frac{\angle A + \angle B}{2} = \alpha + \frac{180^o - \angle C}{2} =$$

$$= \alpha + \frac{90^o}{2} = \alpha + 45^o \Rightarrow \alpha = 90^o - 45^o = 45^o$$

11.3.8

Sea $\alpha = \angle DAC = \angle BAC / 2$

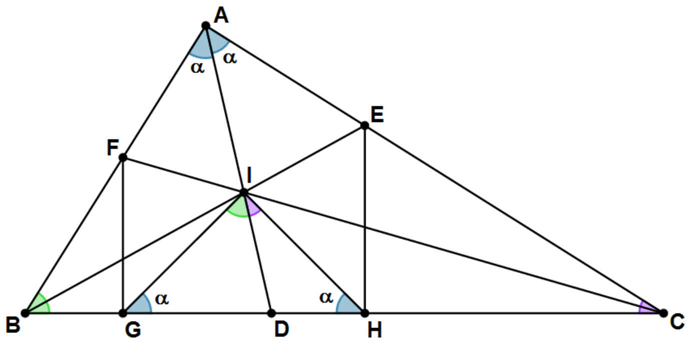
Resolveremos este problema mediante semejanza de triángulos. Por el criterio AA:

$$\left.\begin{array}{l} \angle DIH = \angle ACD \\ \angle IDH = \angle ADC \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta IDH \approx \Delta CDA \Rightarrow \angle DHI = \angle DAC = \alpha$$

De la misma manera, por el criterio AA:

$$\left.\begin{array}{l} \angle GID = \angle ABD \\ \angle IDG = \angle ADB \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta IGD \approx \Delta BAD \Rightarrow \angle IGD = \angle BAD = \alpha$$

Así pues $\angle IHG = \angle IGH = \alpha$ y por tanto el triángulo ΔIGH es isósceles en I, luego $GI = HI$.



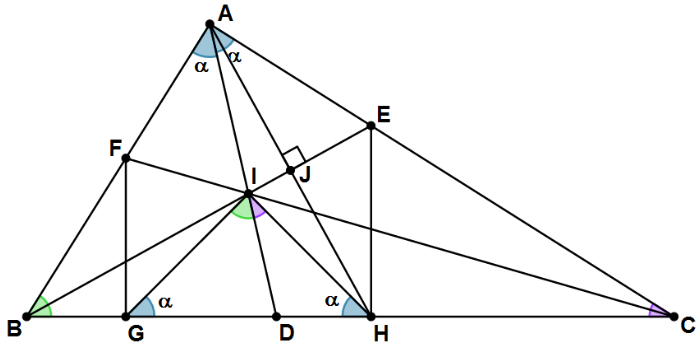
$$\left.\begin{array}{l} \angle IHB = \angle BAI \\ \angle IBH = \angle ABI \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABI \approx \Delta HBI$$

Pero como además comparten un lado común IB, los dos triángulos serán congruentes, y por tanto $IH = IA$.

Luego el triángulo ΔHIA es isósceles en I, luego $\angle IAH = \angle IHA$.

De lo anterior se deduce que $\angle BAH = \angle AHB$, es decir, el triángulo ΔABH es isósceles en B.

Sea J el punto de corte entre BE y AH.



En un triángulo isósceles coinciden bisectriz, mediatriz y mediana, luego ΔAJE y ΔHJE son dos triángulos rectángulos congruentes, de donde $\angle JAE = \angle JHE$, y por tanto

$\angle IHE = \angle IAE = \alpha$.

Con razonamientos análogos llegamos a $\angle FGI = \angle FAI = \alpha$, con lo que, finalmente:

$\angle BAC = 2\alpha = \angle FGH = \angle GHE$.

11.3.9

El triángulo ΔACD es un triángulo rectángulo isósceles, y por tanto

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 = 2AD^2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}AD \Rightarrow \frac{AC}{AD} = \sqrt{2}$$

Aplicando el Teorema de la Bisectriz en el triángulo ΔAED ,

$$\frac{GE}{AE} = \frac{DG}{AD} \Leftrightarrow \frac{24}{AC/2} = \frac{DG}{AD} \Leftrightarrow \frac{48}{AC} = \frac{DG}{AD} \Leftrightarrow \frac{48}{DG} = \frac{AC}{AD} = \sqrt{2} \Leftrightarrow DG = \frac{48}{\sqrt{2}}$$

Sabemos que $\angle ACD = \angle ADG = 45º$, luego

$$\Delta ADG \approx \Delta ACF \Rightarrow \frac{DG}{AD} = \frac{AC}{CF} \Leftrightarrow CF = \frac{AC}{AD} \cdot DG = \sqrt{2}\frac{48}{\sqrt{2}} = 48$$

11.3.10

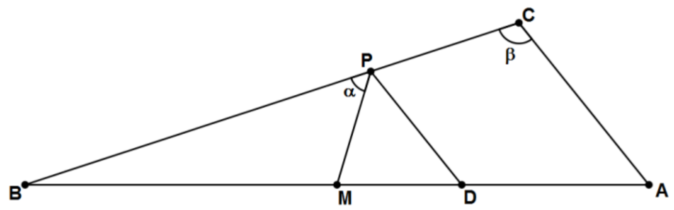
Está claro que

$$\left.\begin{array}{l} CP / PB = 3/7 \\ BC = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow CP = 3, PB = 10$$

Trazamos la recta paralela a AC que pasa por P, y sea D su punto de corte con el lado AB.

Los triángulos ΔBPD y ΔBCA están en posición de Tales, luego son semejantes.

Así pues, $\angle BPD = \angle BCA = \beta$.



$$\frac{DB}{BP} = \frac{BA}{BC} \Leftrightarrow \frac{DB}{7} = \frac{12}{10} \Rightarrow DB = \frac{12 \cdot 7}{10} = \frac{42}{5} = 8.4 \Rightarrow MD = BD - BM = 8.4 - 6 = 2.4$$

$$\frac{PD}{CA} = \frac{BP}{BC} \Leftrightarrow \frac{PD}{4} = \frac{7}{10} \Rightarrow PD = \frac{7 \cdot 4}{10} = \frac{14}{5} = 2.8$$

Vamos a ver que se cumplen las condiciones del Recíproco del Teorema de la Bisectriz en el triángulo ΔBPD con el segmento PM:

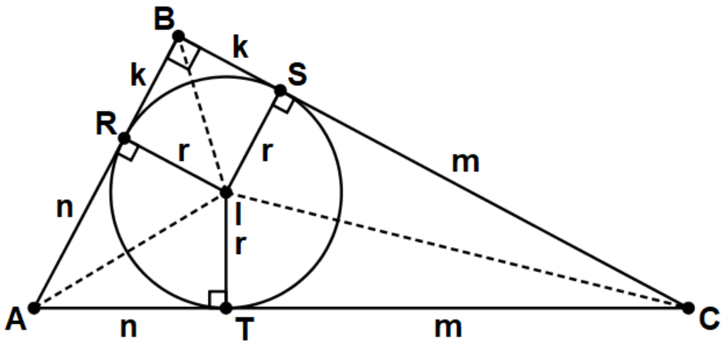
$$\frac{BM}{BP} = \frac{MD}{PD} \Leftrightarrow \frac{6}{7} = \frac{2.4}{2.8}$$

Lo cual es cierto, pues $\frac{2.4}{2.8} = \frac{6}{7}$

Luego PM es la bisectriz del ángulo $\angle BPD$, y por tanto $\alpha = \frac{1}{2}\beta$ (B)

11.3.11

Sean R y S los respectivos puntos de tangencia entre la circunferencia inscrita y los lados AB y BC. Sean $n = AT = AR$, $m = CT = AS$ y $k = RB = SB$. Sea r el radio de la circunferencia inscrita.



$$2[\Delta ABC]=(n+k)(m+k)=nm+nk+km+k^2$$

Por otro lado, aplicando Pitágoras en ΔABC,

$$(n+m)^2=(n+k)^2+(k+m)^2 \Leftrightarrow$$
$$n^2+m^2+2nm=n^2+k^2+2nk+k^2+m^2+2mk \Leftrightarrow$$
$$2nm=k^2+2nk+k^2+2mk=2k^2+2nk+2mk \Leftrightarrow$$
$$nm=k^2+nk+mk$$

Luego $2[\Delta ABC]=(n+k)(m+k)=nm+nk+km+k^2=nm+nm=2nm \Rightarrow [\Delta ABC]=mn$

11.4.1

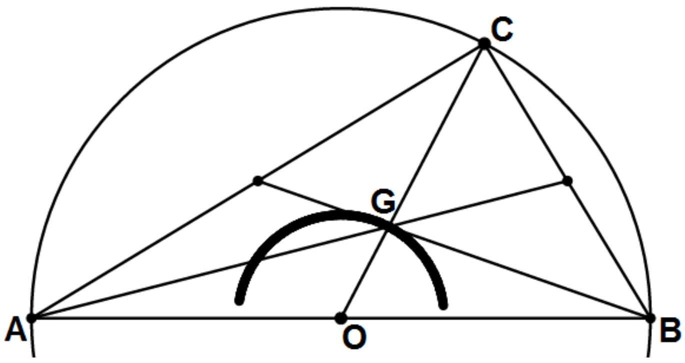
Ver PG2/9.12

11.4.2

GA/9.14

11.4.3

Sea G dicho baricentro. Sea O el centro de dicha circunferencia.

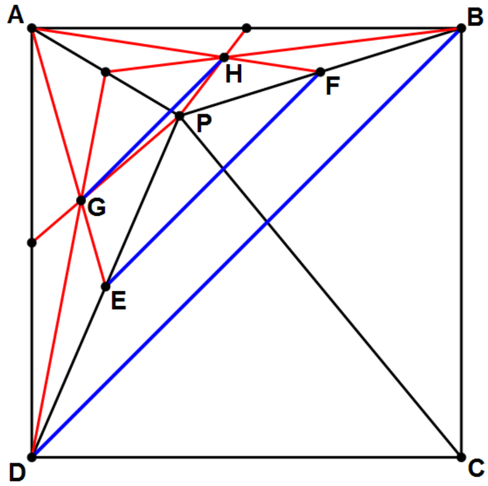


Sabemos, por las propiedades del baricentro, que $OG=\frac{1}{3}OC=\frac{1}{3}12=4$, así pues, el baricentro describe una circunferencia de radio 4, cuyo área es $\pi\cdot 4^2 \cong 3.1\cdot 16=49.6$, y el entero que mejor se aproxima es 50 (C).

11.4.4

Sean G y H los respectivos baricentros de ΔDAP y ΔABP.

Sean E y F los respectivos puntos medios de DP y PB.



Aplicando el Teorema del Conector de puntos medios (GA/7.2.1) en el triángulo ΔDBP, tenemos que $EF \,//\, BD$ y $EF = BD/2$.

Sabemos, además, que las medianas se cortan en razón 2:1 (GA/11.5.3b), luego por Tales y semejanza de triángulos, $GH \,//\, EF$ y $GH = \frac{2}{3}EF$.

Con todo esto llegamos a $GH \,//\, BD$ y $GH = \frac{2}{3}\frac{1}{2}BD = \frac{1}{3}BD$

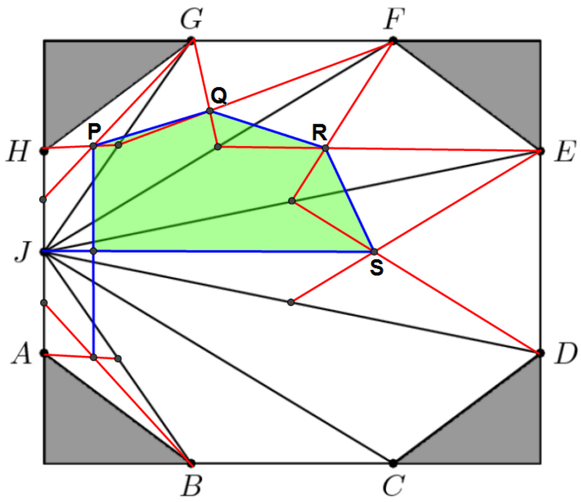
Donde BD es la diagonal de un cuadrado de lado 30, es decir: $BD = \sqrt{30^2 + 30^2} = 30\sqrt{2}$

Y por lo tanto $GH = \frac{1}{3}30\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$.
Esto mismo lo podemos hacer con los otros tres lados del cuadrilátero, obteniendo un paralelogramo con los lados todos iguales a $10\sqrt{2}$.
Los lados de este rombo son paralelos a las diagonales del cuadrado, pero como las diagonales son perpendiculares entre sí, los lados de este rombo serán también perpendiculares entre sí, es decir, el cuadrilátero es un cuadrado, y su área será, por tanto:

$$\left(10\sqrt{2}\right)^2 = 200 \quad \text{(C)}$$

Como curiosidad observamos que las dimensiones de este cuadrado no dependen de la posición del punto P.

11.4.5
Dibujamos los puntos medios de los lados y con ellos trazamos las medianas y localizamos los baricentros. Al hacer el dibujo vemos que, por simetría, podemos reducir nuestro estudio a la parte superior:



Determinamos las coordenadas cartesianas de los puntos:

$J=(0,0)$, $H=(0,5.5)$, $G=(8,11.5)$, $F=(19,11.5)$, $E=(27,5.5)$

Y aplicamos la fórmula de las coordenadas del baricentro (ver GA/20.9.2)

$$P=\frac{J+H+G}{3}=\frac{(0,0)+(0,5.5)+(8,11.5)}{3}=\frac{(8,17)}{3}=(8/3,17/3)$$

$$Q=\frac{J+G+F}{3}=\frac{(0,0)+(8,11.5)+(19,11.5)}{3}=\frac{(27,23)}{3}=(9,23/3)$$

$$R=\frac{J+F+E}{3}=\frac{(0,0)+(19,11.5)+(27,5.5)}{3}=\frac{(46,17)}{3}=(46/3,17/3)$$

$$S=\frac{2}{3}(27,0)=(18,0)$$

Descomponiendo la figura en un rectángulo y dos triángulos obtenemos su área:

$$\left(\frac{46}{3}-\frac{8}{3}\right)\cdot\frac{17}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{46}{3}-\frac{8}{3}\right)\left(\frac{23}{3}-\frac{17}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(18-\frac{46}{3}\right)\left(\frac{17}{3}\right)=$$

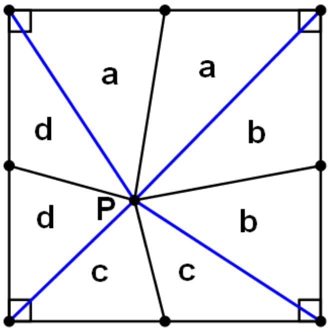
$$=\frac{38}{3}\cdot\frac{17}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{38}{3}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{17}{3}=92$$

Así pues, el área del polígono del enunciado es $92\cdot 2=184$.

Observación. Una vez determinados los puntos, el área se podría haber determinado también mediante la fórmula “Shoelace” (ver GA/18.6.5).

11.4.6

Añadimos al esquema los segmentos que unen los vértices con el punto P, que serán las medianas de los cuatro triángulos determinados por los lados y el punto P. Sabemos que una mediana divide el triángulo en dos triángulos con áreas iguales, luego se generan cuatro áreas a,b,c,d tal y como se muestra en este esquema:



Con los datos del enunciado obtenemos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} a+b=32 \\ c+d=16 \\ a+d=20 \end{cases}$$

Luego

$$\begin{cases} a+b=32 \\ c+d=16 \\ a+d=20 \end{cases} \Rightarrow 28=32+16-20=a+b+(c+d)-(a+d)=a+b+c+d-a-d=b+c$$

Así pues, $b+c=28$ que es el área buscada.

11.4.7

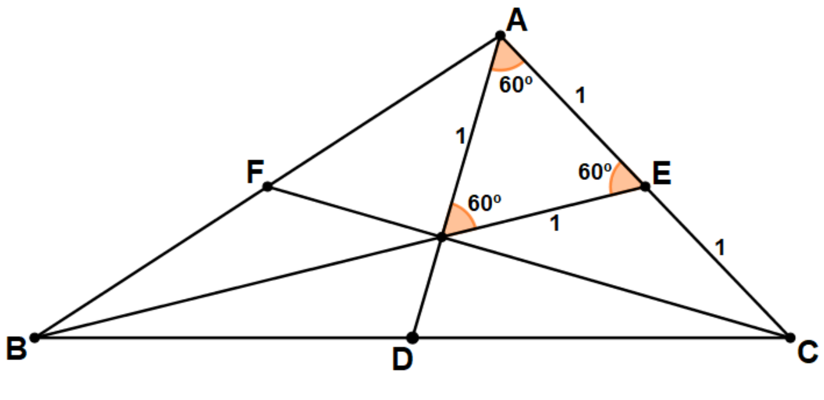
Prolongamos la mediana CG hasta cortar el lado AB en su punto medio F.

ΔAGE equilátero, $\Rightarrow \angle AEG=60^{\circ} \Rightarrow \angle GEC=180^{\circ}-\angle AEG=180^{\circ}-60^{\circ}=120^{\circ}$.

$GE=EC \Rightarrow \Delta GEC$ isósceles. $\Rightarrow \angle EGC=\angle ECG=\dfrac{180^{\circ}-\angle GEC}{2}=\dfrac{180^{\circ}-120^{\circ}}{2}=30^{\circ}$.

Así pues, $\angle AGC=\angle AGE+\angle EGC=60^{\circ}+30^{\circ}=90^{\circ}$, es decir, el triángulo ΔAGC es rectángulo.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, $AE=EC=AG=GE=1$.



Luego, aplicando Pitágoras, $GC=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

Ahora vamos a aplicar que el baricentro corta las medianas en proporcionalidad 1:2 (★94). Así pues, $GD=AG/2=1/2$, $GB=2GE=2$, $GF=CG/2=\sqrt{3}/2$.

Puesto que $\angle DGC=180^{\circ}-(\angle AGE+\angle EGC)=180^{\circ}-(60^{\circ}+30^{\circ})=90^{\circ}$, el triángulo ΔDGC es rectángulo, y por tanto, por Pitágoras,

$$CD=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

De la misma forma, $\angle FGA = 90º$, el triángulo ΔFGA es rectángulo, y por tanto, por Pitágoras,

$$AF=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Así pues, $BC = 2CD = 2\frac{\sqrt{13}}{2}=\sqrt{13}$, $AB = 2AF = 2\frac{\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}$.

Finalmente solo queda aplicar el Teorema del Coseno (★40) en el triángulo ΔABC :

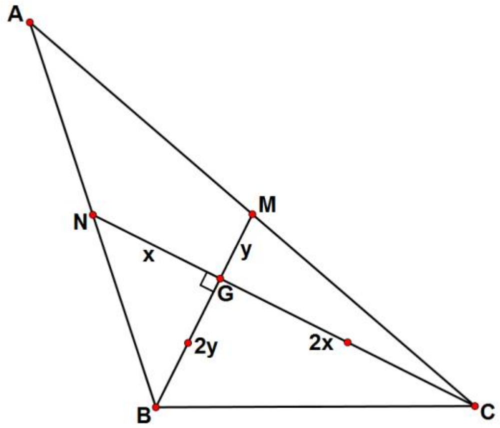
$$\left(\sqrt{7}\right)^2 = 2^2+\left(\sqrt{13}\right)^2-2\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{13}}{2}\cos C \Leftrightarrow$$

$$\cos C=\frac{7-4-13}{-4\sqrt{13}}=\frac{5}{2\sqrt{13}}=\frac{5\sqrt{13}}{2\cdot 13}=\frac{5\sqrt{13}}{26}$$

Y la respuesta correcta es $5+13+26=44$ (A)

11.4.8

Vamos a utilizar el hecho de que el baricentro G corta las medianas en razón 2:1 (★94), es decir, que si $x = NG$ entonces $GC = 2x$ y si $y = MG$, entonces $GB = 2y$



Luego, aplicando Pitágoras en los triángulos ΔBGC , ΔBGN y ΔCGM :

$$BC^2=(2y)^2+(2x)^2=4y^2+4x^2=4\left(x^2+y^2\right)$$

$$(2y)^2+x^2=BN^2=\left(\frac{AB}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4\left(4y^2+x^2\right)=AB^2$$

$$(2x)^2+y^2=CM^2=\left(\frac{AC}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4\left(4x^2+y^2\right)=AC^2$$

Luego

$$AB^2+AC^2=4\left(4y^2+x^2\right)+4\left(4x^2+y^2\right)=16y^2+4x^2+16x^2+4y^2=20\left(x^2+y^2\right)$$

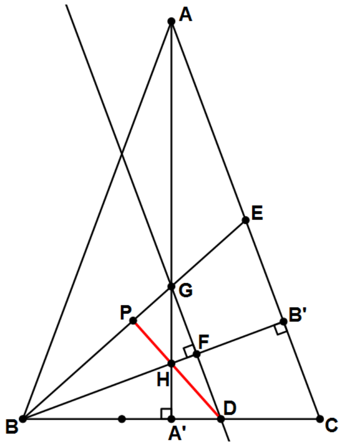
Y por tanto

$$5BC^2=20\left(x^2+y^2\right)=AB^2+AC^2 \quad \text{(E).}$$

1.5.1

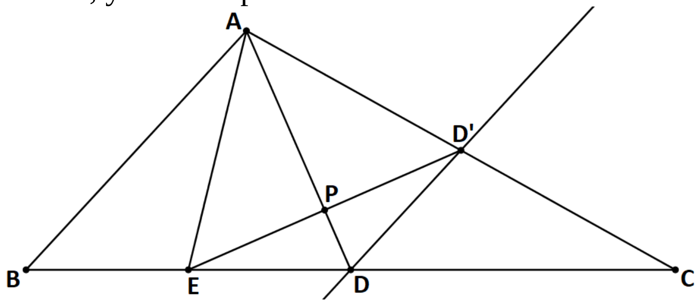
Sea P el punto de corte entre BE y HD.

Sea A' el punto de corte entre AH y BC.
Sea B' el punto de corte entre BH y AC.
Sea G el baricentro del triángulo, es decir, la intersección entre AA' y BE.
Sabemos que $BG = \frac{2}{3}BE$ (★94), pero el enunciado nos dice que $BD = \frac{2}{3}BC$, luego, por Tales (★76), $GD // EC$, y por tanto $\angle BFD = \angle BB'C = 90^{\text{o}}$, es decir, BF es altura del triángulo ΔBGD.



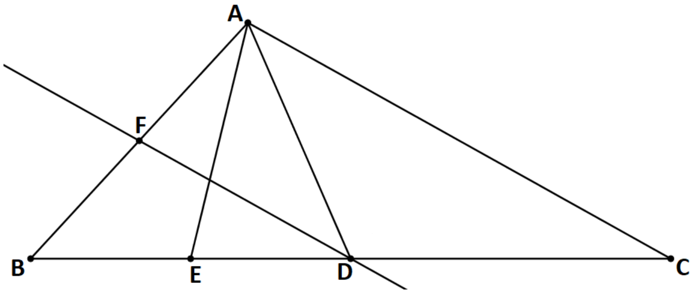
Pero también GA' es altura del triángulo ΔBGD, luego H será su ortocentro, y por tanto PD, puesto que pasa por H, será altura respecto del vértice D, es decir, $PD \perp BG$, tal y como queríamos ver.

11.5.2
Primera versión.
Trazamos la recta paralela a AB por el punto D. Sea D' su punto de corte con la recta AC. Aplicando el Teorema del conector de puntos medios (★2), puesto que D es el punto medio de BC, D' será el punto medio de AC, y además $2DD' = AB$.
Trazamos el segmento ED', y sea P su punto de corte con la recta AD.



$2ED = BD = AB = 2DD' \Rightarrow ED = DD'$, luego el triángulo $\Delta EDD'$ es isósceles.
Puesto que $AB = BD$, el triángulo ΔADB es isósceles, y por tanto $\angle BAD = \angle ADB$.
Puesto que $DD' // AB$, $\angle ADD' = \angle BAD$.
Así pues, $\angle ADE = \angle ADD'$, es decir, la recta AD es bisectriz del ángulo $\angle EDD'$. Como en un triángulo isósceles coincide bisectriz, altura y mediana, se cumplirá que EP=PD' y $AP \perp ED'$.
Así pues, los triángulos rectángulos ΔAPE y $\Delta APD'$ son congruentes, y por tanto $\angle EAP = \angle PAD'$, tal y como queríamos ver.

Segunda versión.
Trazamos la paralela por D al lado AC, que cortará el lado AB en el punto F. De nuevo, F será el punto medio de AB.



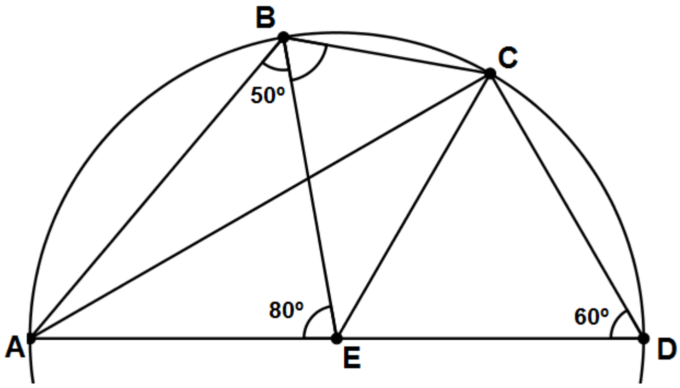
$2BF = AB = BD = 2BE \Rightarrow BF = BE$
Luego los triángulos ΔABE y ΔDBF son congruentes.
Luego $\angle FDB = \angle BAE$
Pero, puesto que AB=DB, el triángulo ΔABD es isósceles, y por tanto $\angle BAD = \angle ADB$.
Restando ángulos llegamos a $\angle EAD = \angle ADF$.
Puesto que $FD // AC$, $\angle ADF = \angle DAC$ con lo que, finalmente $\angle EAD = \angle DAC$, tal y como queríamos ver.

12.1.1
En primer lugar vamos determinando los ángulos que se deducen de forma directa:
$\angle AKE = \angle BKC = 70^o \Rightarrow \angle KAE = 180^o - \angle AKE - \angle AEK = 180^o - 70^o - 80^o = 30^o$
$\angle ACD = 180^o - \angle CAD - \angle CDA = 180^o - 30^o - 60^o = 90^o$, luego el punto C pertenece a la circunferencia de centro E y diámetro AD.
Luego $EC = ED = AE$, y por tanto el triángulo $\angle ECD$ es isósceles en E (de hecho es equilátero) y por tanto $\angle ECD = \angle CDE = 60^o \Rightarrow \angle ACE = 90^o - \angle ECD = 90^o - 60^o = 30^o$
Luego el triángulo ΔACE es isósceles, pues $\angle ACE = \angle CAE = 30^o$, y por tanto $AE = EC$.
Por otro lado,

$$\angle BKA = 180^o - \angle BKC = 180^o - 70^o = 110^o \Rightarrow$$

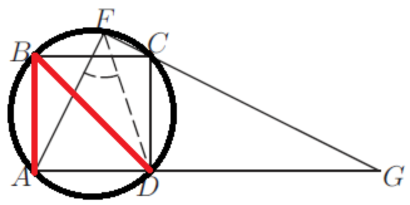
$$\angle BAK = 180^o - \angle ABK - \angle BKA = 180^o - 50^o - 110^o = 20^o$$

De lo que se deduce que $\angle BAE = \angle BAK + \angle KAE = 20^o + 30^o = 50^o$
Así pues, el triángulo ΔBAE es isósceles, pues $\angle ABE = \angle BAE = 50^o$, luego $AE = BE$. Así pues, el punto B también pertenece a la circunferencia de centro E y diámetro AD.



Finalmente, por el Teorema del Ángulo Central, $\angle BCA = \angle BEA / 2 = 80^o / 2 = 40^o$

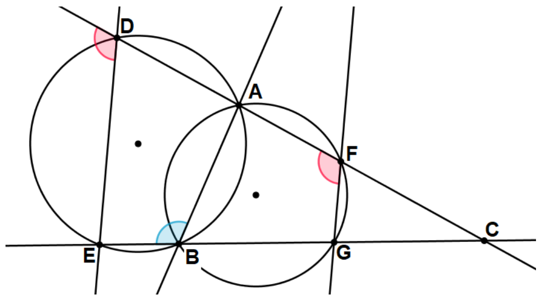
12.1.2
Puesto que $\angle ABC = 90^o$, aplicando el Teorema de Tales sabemos que el punto B pertenece a la circunferencia de diámetro AC. Pero por el mismo teorema, puesto que $\angle AFC = 90^o$, el punto F también pertenecerá a dicha circunferencia.



Luego al ser ángulos abarcando un mismo arco, $\angle AFD = \angle ABD = 45^{\circ}$ (C).

12.1.3

Las rectas DE y FG serán paralelas, independientemente del ángulo $\angle C$. En efecto,
Por ser AFGB cíclico, tendremos que $\angle EBA = \angle AFG$, y por ser DABE cíclico, tendremos que $\angle EDA = 180^{\circ} - \angle EBA$.



Así pues, tenemos dos rectas ED y FG con una transversal DF determinando ángulos correspondientes congruentes, luego serán paralelas (E).

12.1.4

En primer lugar vamos a demostrar que ABCD es un cuadrilátero cíclico:

$$\angle DAB = \angle DBA = (180^{\circ} - 20^{\circ})/2 = 80^{\circ}$$

$$\angle CDB = \angle CBD = (180^{\circ} - 100^{\circ})/2 = 40^{\circ}$$

Luego dos ángulos opuestos son suplementarios:

$$\angle DAB = 80^{\circ} = 180^{\circ} - \angle DCB$$

Y por tanto ABCD es un cuadrilátero cíclico por ★97.
Ahora podemos calcular todos los ángulos determinados entre los lados y las diagonales aplicando ★98:

$$\angle BAC = \angle BDC = 40^{\circ} \Rightarrow \angle CAD = 80^{\circ} - 40^{\circ} = 40^{\circ}$$

$$\angle ACB = \angle ADB = 20^{\circ} \Rightarrow \angle DCA = 100^{\circ} - 20^{\circ} = 80^{\circ}$$

Así pues, $\angle APB = \angle DPC = 180^{\circ} - 40^{\circ} - 80^{\circ} = 60^{\circ}$, $\angle BPC = 180^{\circ} - 60^{\circ} = 120^{\circ}$.
Ahora aplicamos la fórmula del área del triángulo mediante trigonometría (★39), teniendo en cuenta que $\sin(\angle APB) = \sin(60^{\circ}) = \sin(120^{\circ})$.

$$1 = [ABCD] =$$

$$= \frac{AP \cdot PB \cdot \sin(60^{\circ})}{2} + \frac{BP \cdot PC \cdot \sin(120^{\circ})}{2} + \frac{CP \cdot PD \cdot \sin(60^{\circ})}{2} + \frac{DP \cdot PA \cdot \sin(120^{\circ})}{2} =$$

$$= \frac{\sin(60^{\circ})}{2}\left(AP \cdot PB + BP \cdot PC + CP \cdot PD + DP \cdot PA\right) =$$

$$= \frac{\sin(60^{\circ})}{2}\left((AP + PC)(DP + PB)\right) = \frac{\sin(60^{\circ})}{2}\left(AC \cdot BD\right)$$

Y finalmente,

$$AC \cdot BD = \frac{2}{\sin(60^o)} = \frac{2}{\sqrt{3}/2} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad \text{(D).}$$

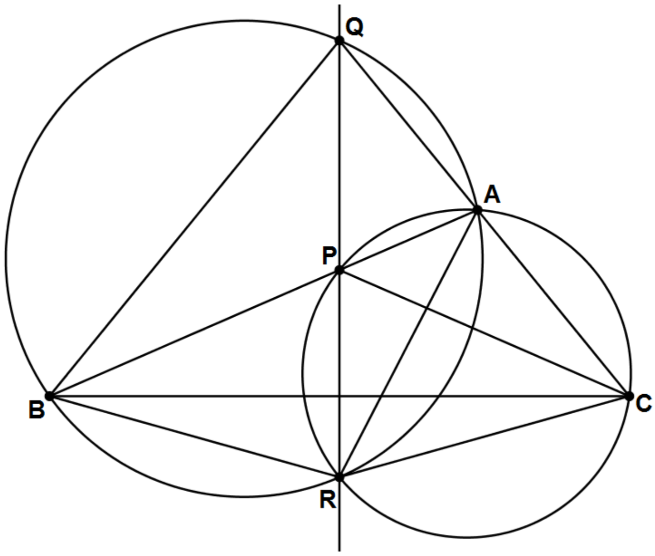
12.1.5

Trazamos la mediatriz del lado BC y sea Q su punto de corte con la prolongación del lado AC. Puesto que es la mediatriz del segmento BC, tendremos que BQ=CQ, y por tanto el triángulo ΔQBC es isósceles, luego $\angle QBC = \angle QCB$.

Sea P el punto de corte de AB con la mediatriz del segmento BC. Por ser mediatriz, PB=PC, y por tanto ΔPBC es isósceles, luego $\angle PBC = \angle PCB$.

Luego $\angle QBP = \angle CBQ - \angle PBC = \angle QCB - \angle PCB = \angle QCP$.

Sea R el punto de corte de la mediatriz PQ con la circunferencia circunscrita de ΔQAB.



$\angle PRA = \angle QRA = \angle QRA = \angle QBA$ por ser QARB cíclico.

$\angle QBA = \angle QCP$ lo acabamos de demostrar

$\angle PRA = \angle QCP = \angle ACP$ y por lo tanto R pertenece a la circunferencia circunscrita de ΔPAC, tal y como queríamos ver.

12.2.1

Puesto que el cuadrilátero ABDC es cíclico podemos aplicar la Identidad de Ptolomeo:

$$AB \cdot CD + AC \cdot BD = AD \cdot BC \Leftrightarrow 7CD + 8BD = 9AD \Leftrightarrow \frac{7CD + 8BD}{CD} = 9\frac{AD}{CD}$$

$$\Leftrightarrow 7 + 8\frac{BD}{CD} = 9\frac{AD}{CD}$$

Pero, por ser ángulos que abarcan un mismo arco,

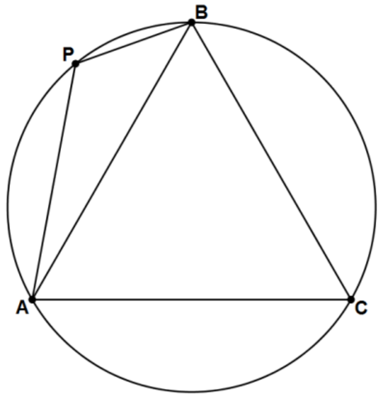
$\angle DBC = \angle DAC = \angle BAD = \angle BCD$

Luego el triángulo ΔBDC es isósceles, y por tanto $BD = CD \Rightarrow \frac{BD}{CD} = 1$ y la igualdad anterior queda

$$7 + 8 = 9\frac{AD}{CD} \Leftrightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} \quad (B)$$

12.2.2

El cuadrilátero PBCA es cíclico, por lo que podemos aplicar la Identidad de Ptolomeo:



$$PC \cdot BA = PB \cdot AC + PA \cdot BC$$

Puesto que se trata de un triángulo equilátero, sea $x = AB = BC = CB$, luego

$$x \cdot PC = PB \cdot x + PA \cdot x = x(PB + PA)$$

y solo nos queda simplificar la x en la identidad anterior.

12.2.3

Aplicando Pitágoras, $CE = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$

De nuevo por Pitágoras, $CA = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

El triángulo ΔDEC es un triángulo rectángulo isósceles, pues $DE = DC = 6$, luego $\angle DEC = \angle DCE = 45º$.

Por ser ángulos opuestos por el vértice, $\angle EFA = \angle DEC = 45º$.

Por Teorema de Tales, $\angle CFA = 90º$, pues CA es un diámetro de la circunferencia. Luego el triángulo ΔEFA es un triángulo 45-45-90, y por tanto $2^2 = EA^2 = EF^2 + FA^2 = 2EF^2 \Leftrightarrow EF = FA = \sqrt{2}$.

Luego $CF = CE + EF = 6\sqrt{2} + \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$.

Ahora aplicamos el Teorema de Ptolomeo al cuadrilátero DEFC:

$DF \cdot CA + DC \cdot FA = DA \cdot CF \Leftrightarrow$

$DF \cdot 10 + 6 \cdot \sqrt{2} = 8 \cdot 7\sqrt{2} \Rightarrow 10DF = 8 \cdot 7\sqrt{2} - 6 \cdot \sqrt{2} = 50\sqrt{2} \Rightarrow DF = 5\sqrt{2}$

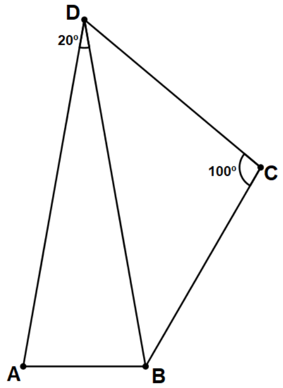
12.2.4

Basta aplicar el Teorema de Ptolomeo

$AB \cdot CM = AC \cdot MB + AM \cdot BC = AC \cdot MB + AC \cdot AM = AC\left(MB + AM\right) \Leftrightarrow$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{MB + AM}{CM}$$

12.2.5



Por ser ΔABD isósceles, está claro que $\angle DAB = \angle DBA = 80^o$, y por ser ΔBCD isósceles, $\angle DBC = \angle BDC = 40^o$

Puesto que $\angle DAB = 80^o = 180^o - 100^o = 180^o - \angle DCB$, el cuadrilátero es cíclico (★97) y por tanto se satisface el Teorema de Ptolomeo (★99), es decir,
$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD = AD \cdot CD + AB \cdot CD = CD(AD + AB)$
Por otro lado, aplicando ★39, y teniendo en cuenta que $\sin(120^o) = \sin(60^o) = \sqrt{3}/2$,

$$1 = [ABCD] = [\Delta ABC] + [\Delta ADC] = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin(\angle ABC)}{2} + \frac{AD \cdot DC \cdot \sin(\angle ADC)}{2} =$$

$$= \frac{AB \cdot BC \cdot \sin(120^o)}{2} + \frac{AD \cdot DC \cdot \sin(60^o)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(AB \cdot BC + AD \cdot DC) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(AB \cdot CD + AD \cdot DC) = \frac{\sqrt{3}CD}{4}(AB + AD) \Rightarrow AB + AD = \frac{4}{\sqrt{3}CD}$$

Finalmente,

$$AC \cdot BD = CD(AD + AB) = CD\frac{4}{\sqrt{3}CD} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad \text{(D)}$$

12.2.6
Primera versión. Aplicando Teorema de Ptolomeo.
Sea x la longitud del lado del cuadrado.
Está claro que, por Pitágoras, $AC = BD = \sqrt{2}x$.
Puesto que P pertenece a la circunferencia circunscrita, $\angle BPD = \angle APC = 90^o$, y por tanto los triángulos ΔAPC y ΔBPD son rectángulos.
Aplicando el Teorema de Ptolomeo (★99) al cuadrilátero cíclico ABPC:
$PA \cdot x = x \cdot PC + PB \cdot \sqrt{2}x \Rightarrow PA = PC + \sqrt{2}PB$
Luego

$$2PB^2 = (PA - PC)^2 = PA^2 + PC^2 - 2PA \cdot PC = 2x^2 - 2 \cdot 56 \Rightarrow PB^2 = x^2 - 56 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow PB = \sqrt{x^2 - 56}$$

Aplicando el Teorema de Ptolomeo (★99) al cuadrilátero cíclico APCD:
$PD \cdot \sqrt{2}x = x \cdot PA + PC \cdot x \Rightarrow \sqrt{2}PD = PA + PC$, luego

$$2PD^2 = (PA + PC)^2 = PA^2 + PC^2 + 2PA \cdot PC = 2x^2 + 2 \cdot 56 \Rightarrow PD^2 = x^2 + 56 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow PD = \sqrt{x^2 + 56}$$

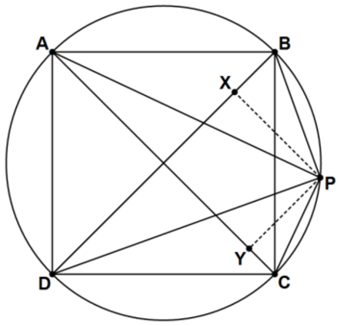
Finalmente:

$$90 = PB \cdot PD = \sqrt{x^2 - 56} \cdot \sqrt{x^2 + 56} \Rightarrow$$

$$90^2 = (x^2 - 56)(x^2 + 56) = x^4 - 56^2 \Rightarrow x^4 = 90^2 + 56^2 = 11236 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [ABCD] = x^2 = \sqrt{11236} = 106$$

Segunda versión. Mediante áreas.



$[\Delta APC] = \dfrac{AP \cdot PC}{2} = \dfrac{56}{2}$. Trazamos la altura YP del triángulo ΔAPC, tenemos

$$\frac{56}{2} = [\Delta APC] = \frac{YP \cdot AC}{2} \Rightarrow YP \cdot AC = 56.$$

De la misma forma,

$[\Delta BPD] = \dfrac{BP \cdot PD}{2} = \dfrac{90}{2}$, y trazando la altura XP del triángulo ΔBPD, tenemos

$$\frac{90}{2} = [\Delta BPD] = \frac{XP \cdot BD}{2} \Rightarrow XP \cdot BD = 90.$$

Sea O el centro de la circunferencia. Está claro que XPYO es un rectángulo, y por tanto, aplicando Pitágoras,

$$\frac{BD^2}{4} = \left(\frac{BD}{2}\right)^2 = OP^2 = XP^2 + YP^2 = \left(\frac{90}{BD}\right)^2 + \left(\frac{56}{AC}\right)^2 = \frac{90^2}{BD^2} + \frac{56^2}{AC^2} = \frac{90^2 + 56^2}{BD^2} \Rightarrow$$

$$BD^4 = 4(90^2 + 56^2) \Rightarrow BD^2 = 212 = 2CD^2 \Rightarrow CD^2 = 106 = [ABCD]$$

12.3.1

Aplicando Potencia de un punto,

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE \Leftrightarrow 3 \cdot 8 = x \cdot (x + 10) \Leftrightarrow 24 = x^2 + 10x \Leftrightarrow x^2 + 10x - 24 = 0$$

Podemos resolver esta ecuación directamente mediante el método de “Suma-Producto”, sus soluciones son -12 y 2, y descartando la solución negativa, deducimos que $x = 2$.

12.3.2

Aplicando “Potencia de un punto”,

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE \Leftrightarrow 1 \cdot 4 = x \cdot 6 \Leftrightarrow 4 = 6x \Leftrightarrow x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

12.3.3

Sean $x = AR$, $y = CR$.

$$AR : BR = 1:4 \Leftrightarrow \frac{AR}{BR} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow BR = 4x$$

$$CR : DR = 4:9 \Leftrightarrow \frac{CR}{DR} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow 9CR = 4DR \Leftrightarrow DR = \frac{9}{4}y$$

Aplicando “Potencia de un Punto” tenemos

$$AR \cdot RB = CR \cdot RD \Leftrightarrow x \cdot 4x = y \cdot \frac{9}{4}y \Leftrightarrow 16x^2 = 9y^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

Como estamos suponiendo que trabajamos con distancias podemos descartar los resultados negativos y deducir que $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$

Finalmente,

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AR + RB}{CR + RD} = \frac{x + 4x}{y + 9/4y} = \frac{5x}{13/4y} = \frac{20x}{13y} = \frac{20 \cdot 4}{13 \cdot 3} = \frac{15}{13}$$

Así pues, $AB : CD = 15:13$

12.3.4

Aplicando Potencia de un Punto:

$$CE \cdot ED = AE \cdot EB \Leftrightarrow CE \cdot 4 = AE \cdot 16 \Leftrightarrow CE = 4AE$$

Aplicando Pitágoras:

$$AE^2 = AD^2 - DE^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow AE = \sqrt{9} = 3$$

Puesto que estamos trabajando con magnitudes que son distancias y por tanto podemos desechar los valores negativos.

Finalmente, $CE = 4AE = 4 \cdot 3 = 12$

12.3.5

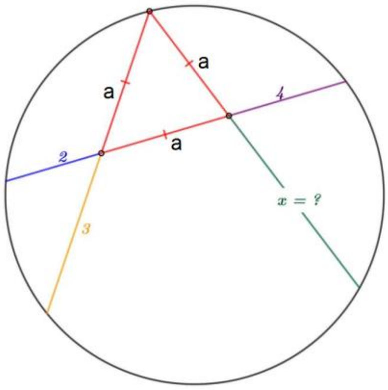
Prolongamos la recta OC y sea $F \neq C$ su otro punto de corte con la circunferencia.
Aplicamos Potencia de un Punto:

$$ED \cdot EB = EC \cdot EF \Leftrightarrow 3 \cdot 5 = 1 \cdot EF \Rightarrow EF = 15 = OF + OC = OF + OE + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15 + 1 = 2r \Rightarrow r = 8$$

12.3.6

Resolvemos este problema como aplicación directa de “Potencia de un punto”. Sea a la longitud del lado del triángulo equilátero rojo:



Se cumple

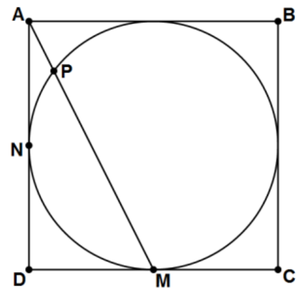
$$\begin{cases}(2+a)\cdot 4 = a\cdot x \\ 3\cdot a = 2(a+4)\end{cases}$$

De la segunda ecuación se deduce que $a=8$ y por tanto de la primera ecuación se deduce que $x=5$.

12.3.7

Está claro que $DM = 1/2$ y por Pitágoras $AM^2 = AD^2 + DM^2 = 1^2 + (1/2)^2 = 5/4$

Sea N el punto de contacto entre ω y $\overline{AD}$.



Aplicando Potencia de un punto,

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = AN^2 = AP\cdot AM = AP\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow AP = \frac{1}{4}\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10} \quad \text{(B)}$$

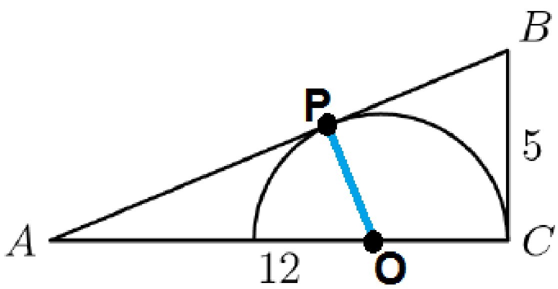
Nota: En la web www.artofproblemsolving.com se encuentran soluciones alternativas sin utilizar "Potencia de un punto".

12.3.8

Primera versión. Mediante semejanza de triángulos y Pitágoras.

Sea O el centro de la circunferencia y P el punto de tangencia con la hipotenusa AB.

Aplicando Pitágoras tenemos que $AB = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$



El segmento PO es perpendicular a AB y su longitud es el radio r de la semicircunferencia.

Además se forma un triángulo rectángulo ΔAOP que es semejante al triángulo ΔABC por compartir el ángulo A, luego :

$$\frac{PO}{AO} = \frac{BC}{AB} \Leftrightarrow \frac{r}{AO} = \frac{5}{13} \Leftrightarrow AO = \frac{13}{5}r$$

Por otro lado, $12 = AC = AO + r$, y por tanto, finalmente:

$$12 = AC = AO + r = \frac{13}{5}r + r = \frac{18}{5}r \Rightarrow r = \frac{12 \cdot 5}{18} = \frac{10}{3} \quad \text{(D)}$$

Segunda versión. Mediante potencia.
$BP = BC$ pues ambos segmentos son tangentes a la circunferencia.
Aplicando Pitágoras tenemos que $AB = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.
Luego $AP = AB - BP = AB - BC = 12 - 5 = 8$.
Por potencia del punto A respecto a la circunferencia,

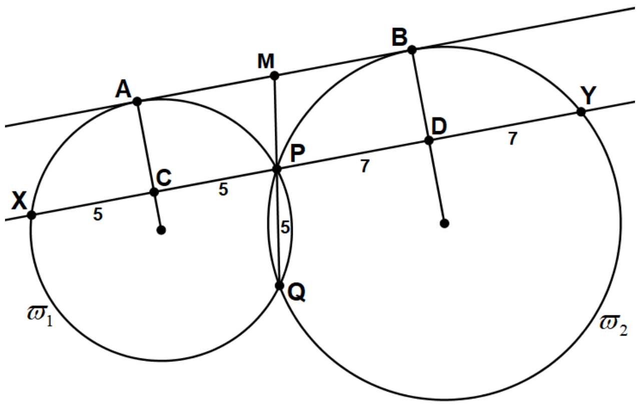
$$8^2 = (AC - 2r)AC = (12 - 2r) \cdot 12 \Rightarrow r = \frac{10}{3} \quad \text{(D)}$$

12.4.1

Ver PG2/9.15

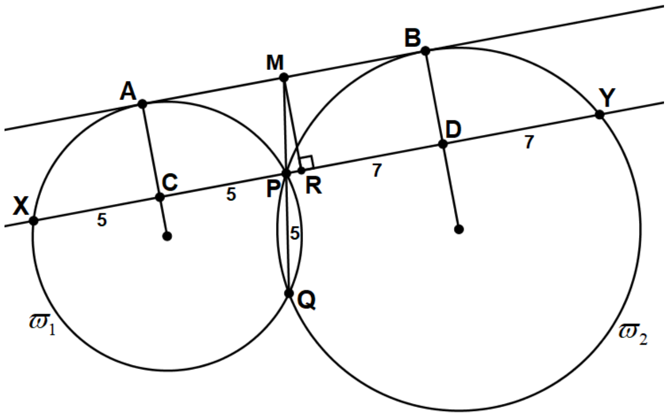
12.4.2

Prolongamos la recta PQ hasta cortar la recta AB en el punto M. Sabemos que este punto es el punto medio del segmento AB.
Sean O_1 y O_2 los respectivos centros de las circunferencias ϖ_1 y ϖ_2.
Trazamos los segmentos O_1A y O_2B. Sabemos que estos segmentos son perpendiculares a la recta AB (★62).
Puesto que AB//XY, y $AB \perp BO_2$, tenemos que $XY \perp BO_2$, y de la misma manera $XY \perp AO_1$.
Sabemos que la mediatriz de toda cuerda pasa por el centro (★57), y por unicidad de la perpendicular a una recta que pasa por un punto, las rectas O_1A y O_2B son las mediatrices de los segmentos XP y PY, respectivamente. Sean C y D los respectivos puntos medios de los segmentos XP y PY. Está claro que XC=CP=XP/2=5 y PD=DY=PY/2=7.
Está claro que ABDC es un rectángulo, y por tanto AB=CP+PD=5+7=12, y por tanto AM=MB=AB/2=12/6=6.



Sea $x = PM$. Aplicamos el Teorema Tangente-Secante (★101):
$6^2 = MB^2 = MP \cdot MQ = x(x+5) \Rightarrow x = -9, 4$.
Desechando la solución negativa, tenemos que $PM = 4$. Con esto es fácil completar el problema.
Trazamos la perpendicular a AB por M y sea R su punto de corte con XY. Está claro que $DR = BM = 6 \Rightarrow PR = DP - DR = 7 - 6 = 1$, y por Pitágoras,

$MR = \sqrt{MP^2 - PR^2} = \sqrt{MP^2 - PR^2} = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$



Finalmente,

$$\left[XABY\right] = \frac{5\cdot\sqrt{15}}{2} + 12\cdot\sqrt{15} + \frac{7\cdot\sqrt{15}}{2} = \sqrt{15}\left(\frac{5}{2} + 12 + \frac{7}{2}\right) = \sqrt{15}\cdot 18$$

Y por tanto la respuesta correcta es $15+18=33$.

12.4.3

La longitud de la mediana AM se puede calcular aplicando la fórmula de la longitud de la mediana mediante el Teorema de Stewart (★93):

$$AM^2 = \frac{2\cdot 15^2 + 2\cdot 13^2 - 14^2}{4} = 148 \Rightarrow AM = 2\sqrt{37}$$

Aplicando POP (★100), tenemos

$$PM\cdot AM = BM\cdot MC \Leftrightarrow PM\cdot 2\sqrt{37} = 7\cdot 7 \Leftrightarrow PM = \frac{7\cdot 7}{2\sqrt{37}} = \frac{49}{2\sqrt{37}}$$

Finalmente,

$$AQ = AM - QM = AM - PM = 2\sqrt{37} - \frac{49}{2\sqrt{37}} = \frac{2\sqrt{37}\cdot 2\sqrt{37}}{2\sqrt{37}} - \frac{49}{2\sqrt{37}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{37}\cdot 2\sqrt{37} - 49}{2\sqrt{37}} = \frac{4\cdot 37 - 49}{2\sqrt{37}} = \frac{99}{2\sqrt{37}} = \frac{99}{\sqrt{4}\sqrt{37}} = \frac{99}{\sqrt{4\cdot 37}} = \frac{99}{\sqrt{148}}$$

Y la respuesta correcta es $99+148=247$.

Observación 1.

Sin utilizar la fórmula de la longitud de la mediana podemos calcular AM determinando el área del triángulo ΔABC:

Aplicamos el Teorema del coseno en el ángulo $\angle C$:

$$13^2 = 15^2 + 14^2 - 2\cdot 15\cdot 14\cdot \cos\angle C \Rightarrow$$

$$\cos\angle C = \frac{15^2 + 14^2 - 13^2}{2\cdot 15\cdot 14} = \frac{15^2 + (14+13)(14-13)}{2\cdot 15\cdot 14} = \frac{15^2 + 27}{2\cdot 15\cdot 14} = \frac{3}{5}$$

Deducimos el seno de este ángulo mediante la identidad fundamental de la trigonometría:

$$\sin^2\angle C = 1-\cos^2\angle C = 1-\frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin\angle C = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

Ahora aplicamos el Teorema del Seno para calcular el radio R de la circunferencia circunscrita:

$$2R = \frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{13}{4/5} \Rightarrow R = \frac{65}{8}$$

Ahora aplicamos la identidad que relaciona el área del triángulo con el circunradio R (★83):

$$[\Delta ABC] = \frac{a\,b\,c}{4R} = \frac{13\cdot 14\cdot 15}{4\cdot 65/8} = \frac{13\cdot 14\cdot 15}{65/2} = 84$$

Sea D el pie de la altura del triángulo ΔABC respecto del vértice A. Ahora podemos deducir la altura AD:

$$[\Delta ABC] = \frac{BC\cdot AD}{2} \Leftrightarrow 84 = \frac{14\cdot AD}{2} \Rightarrow AD = \frac{84\cdot 2}{14} = 12$$

Y ahora, aplicando Pitágoras,

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{(13-12)(13+12)} = \sqrt{25} = 5$$

Y por tanto:

$$DM = BM - BD = 7 - 5 = 2$$

De nuevo por Pitágoras:

$$AM = \sqrt{AD^2 + DM^2} = \sqrt{12^2 + 2^2} = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$$

Observación 2.

El área $[\Delta ABC]$ también se puede calcular mediante la fórmula de Heron (★38):

$$s = \frac{13+14+15}{2} = 21 \Rightarrow [\Delta ABC] = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84$$

Observación 3.

En este problema estamos suponiendo que QCPB es un paralelogramo, al menos que PM=MP, cosa que parece clara pero que no está demostrada.

13.1.1

El perímetro de este círculo es una circunferencia determinada por la ecuación $x^2 + y^2 = 5^2 \Leftrightarrow y^2 = 25 - x^2$.

Vamos dando valores a x para obtener todos los posibles valores de y:

$x = 0 \to y^2 = 25 - 0^2 = 25 \to y = \pm 5$ dos valores

$x = \pm 1 \to y^2 = 25 - 1^2 = 24$ no son enteros.

$x = \pm 2 \to y^2 = 25 - 2^2 = 21$ no son enteros.

$x = \pm 3 \to y^2 = 25 - 3^2 = 16$ cuatro valores

$x = \pm 4 \to y^2 = 25 - 4^2 = 9$ cuatro valores

$x = \pm 5 \to y^2 = 25 - 5^2 = 0$ dos valores

En total hemos obtenido 12 resultados posibles (B)

13.1.2

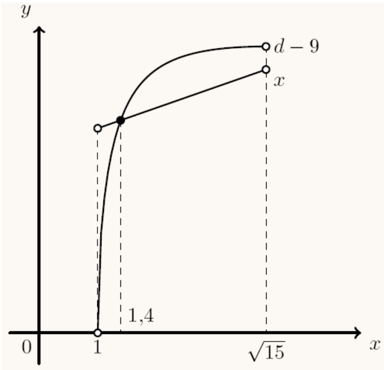
En este problema tenemos que resolver la siguiente ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = 7 \\ r_2 = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow d = \frac{\sqrt{(15^2 - x^2)\,(x^2 - 1^2)}}{x} = x + 9$$

Visualizando en la calculadora gráfica las gráficas de las funciones d y la recta $y = x + 9$

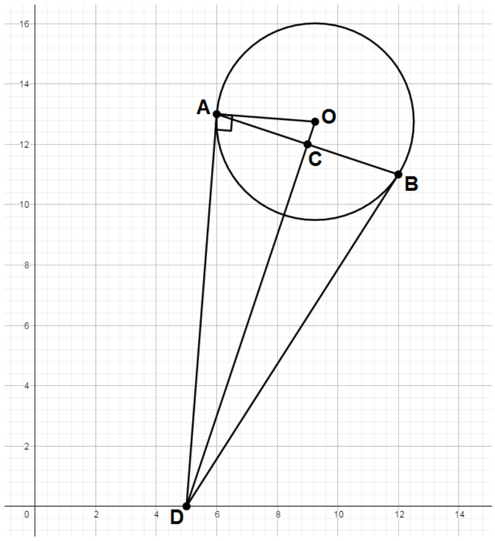
Para los valores $1 < x < \sqrt{15}$, y usando la función de la calculadora para determinar valores aproximados de las coordenadas de los puntos de intersección de dos gráficas, obtenemos un valor aproximado (a las décimas) de la abscisa del punto de intersección, es decir, de la solución de las ecuaciones:

$$x \cong 1.4$$



13.1.3

Sea C el punto medio del segmento $\overline{AB}$. Sea D el punto de corte de las tangentes. Sea O el centro de la circunferencia.



Determinamos la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

$C = \frac{A+B}{2} = (9{,}12)$

La recta AB tiene pendiente $m_1 = \frac{11-13}{12-6} = \frac{-1}{3}$, luego su mediatriz tendrá pendiente

$m = \frac{-1}{m_1} = 3$, y por tanto su ecuación será

$$y = 3x + b \Rightarrow 12 = 3 \cdot 9 + b \Rightarrow b = 12 - 27 = -15 \Rightarrow y = 3x - 15$$

El punto de corte D de las tangentes pasa por la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, luego será

$$0 = 3x - 15 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow D = (5,0)$$

Observamos que ΔAOD y ΔCAD son triángulos semejantes, pues son triángulos rectángulos y comparten el ángulo en D. Luego

$$\frac{AO}{AD} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow r = AO = \frac{AD \cdot AC}{CD}$$

$$AD = \sqrt{13^2 + 1^2} = \sqrt{170}$$

$$AC = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$CD = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{160}$$

$$r = AO = \frac{AD \cdot AC}{CD} = \frac{\sqrt{170}\sqrt{10}}{\sqrt{160}} = \frac{\sqrt{170}}{\sqrt{16}} = \sqrt{\frac{85}{8}}$$

Y por tanto, finalmente,

$$[\omega] = \pi r^2 = \pi \frac{85}{8} \quad \text{(C)}$$

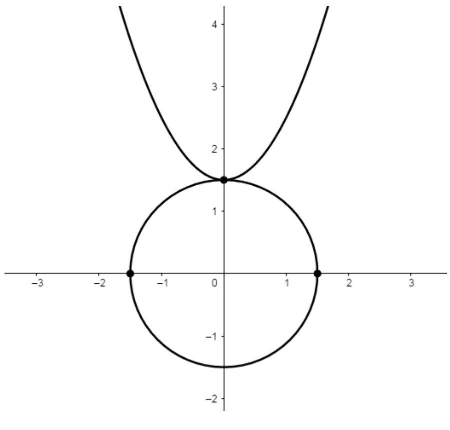
Nota: En las soluciones https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2019_AMC_12B_Problems/Problem_20 se presentan otros cuatro métodos más para determinar el radio de la circunferencia.

13.1.4

La curva $x^2 + y^2 = a^2$ describe una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $|a|$.

La curva $y = x^2 - a$ describe una parábola con vértice $V = (0,-a)$ y ramas hacia arriba.

Si $a < 0$, la parábola está por encima de la circunferencia y solo tienen el vértice como punto en común.



Si $a = 0$, la circunferencia se reduce al punto $(0,0)$ y por lo tanto es obvio que no puede haber tres puntos en común.

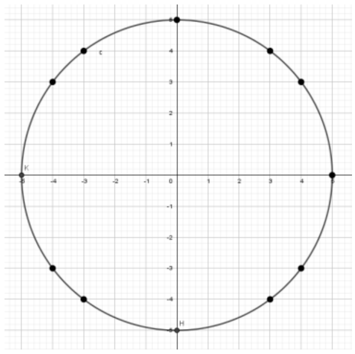
Si $a > 0$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ y = x^2 - a \end{cases} \Rightarrow x^2 + \left(x^2 - a\right)^2 = a^2 \Leftrightarrow x^2 + x^4 + a^2 - 2a\,x^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x^4 - 2a\,x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2\left(1 + x^2 - 2a\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1 + x^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2a - 1 \end{cases}$$

Y la ecuación $x^2 = 2a - 1$ tendrá dos soluciones si y solo si $2a - 1 > 0 \Leftrightarrow a > \dfrac{1}{2}$ (E)

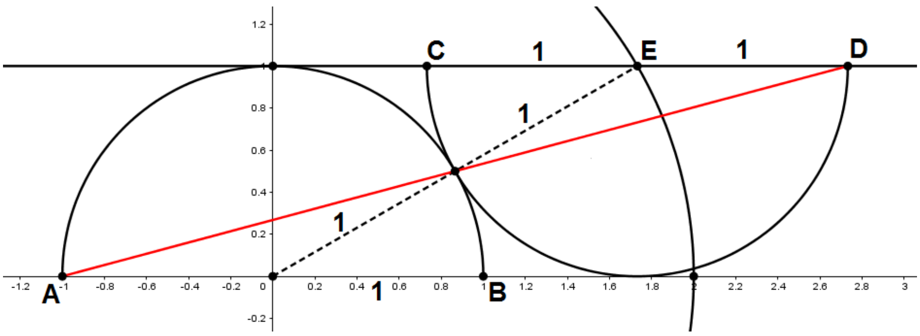
13.1.5
Resolveremos este problema simplemente observando la gráfica de la circunferencia, y viendo que solo tiene soluciones enteras en los cortes con los ejes: $(\pm 5{,}0)$, $(0{,}\pm 5)$ y las ternas pitagóricas $(\pm 3{,}\pm 4)$:



doce puntos en total (B)

Nota: Un argumento más sistemático podría ser aislar y, e ir viendo que los valores que se obtienen para $-5 \le x \le 5$ solo son enteros en los casos anteriores.

13.1.6
Resolveremos este problema mediante coordenadas cartesianas. El centro E de la circunferencia de diámetro CD está a 2 unidades del centro de la otra circunferencia:



Y por lo tanto satisfacerá el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2^2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 1 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{3} \Rightarrow E = \left(\sqrt{3}\,,1\right) \Rightarrow D = \left(\sqrt{3}+1\,,1\right)$$

Luego $AD^2 = \left(\sqrt{3}+2\right)^2 + 1^2 = 3 + 4\sqrt{3} + 4 + 1 = 4\sqrt{3} + 8$ (B)

13.2.1

$9\pi = \pi r^2 \Rightarrow r = 3$

$c = 3 \Rightarrow F_1 = (c{,}0) = (3{,}0)$, $F_2 = (-3{,}0)$

$b = 3 \Rightarrow b^2 = 9$

$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow 3^2 = a^2 - 3^2 \Rightarrow a^2 = 18$

Y la ecuación es $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, es decir, la opción (A)

13.3.1
La parábola corta el eje Y en c, igual que la recta, luego el término independiente de la recta tiene que ser c, luego solo aceptamos las opciones (B) y (D).

Ahora observamos que la parábola y la recta tienen un mismo punto de corte con el eje X.
La opción (B) corta el eje X en $y = bx + c = 0 \Leftrightarrow x = -c/b$
En este punto, la parábola vale $y = a\left(\frac{-c}{b}\right)^2 + b\left(\frac{-c}{b}\right) + c = \frac{ac^2}{b^2} - \frac{bc}{b} + c = \frac{ac^2}{b^2} - c + c = \frac{ac^2}{b^2}$, que no puede ser cero porque $a \neq 0$ y $c \neq 0$.
Solo nos queda la opción (D) como candidato aceptable.

En efecto, esta recta corta el eje X en $y = ax + c = 0 \Leftrightarrow x = -c/a$, y para este valor la parábola vale

$$y = a\left(\frac{-c}{a}\right)^2 + b\left(\frac{-c}{a}\right) + c = \frac{ac^2}{a^2} - \frac{bc}{a} + c = \frac{c^2}{a} - \frac{bc}{a} + c = c \cdot \frac{c - b + a}{a}$$

Que sí podría valer cero.

13.4.1
$y^4 + 1 = x^4 + 2y^2 \Leftrightarrow x^4 = y^4 - 2y^2 + 1 \Leftrightarrow x^4 = (y^2 - 1)^2 \Leftrightarrow$
$x^4 - (y^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - (y^2 - 1))(x^2 + (y^2 - 1)) = 0 \Leftrightarrow$
$(x^2 - y^2 + 1)(x^2 + y^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 1 = 0 & (a) \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 & (b) \end{cases}$
(a) $x^2 - y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = y^2 - x^2$ es la ecuación de una hipérbola.
(b) $x^2 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ es la ecuación de una circunferencia.
Luego se trata de la unión de una circunferencia y una hipérbola (D).

14.1
Denotamos las rotaciones por $R = \{R_{90}, R_{180}, R_{270}\}$, y denotamos las simetrías por $S = \{S_x, S_y\}$. Sea I la transformación identidad, es decir, la que deja el triángulo invariante.
Podemos estructurar nuestro estudio en función del número de simetrías que contiene.
Sin simetrías, es decir, solo con rotaciones, solo hay la siguiente (y las seis permutaciones correspondientes):

$$R_{90} \circ R_{180} \circ R_{90} = I$$

pues entre las tres deben sumar 360º, y esto solo se consigue como 90+180+90.

Con una sola simetría no hay ninguna, pues <u>las simetrías cambian la orientación</u> y las rotaciones no.

Con dos simetrías.
$S_x \circ S_y$ equivale a una rotación R_{180}, luego tenemos

$$S_x \circ S_y \circ R_{180} = I$$

Y sus seis permutaciones correspondientes.

Dos permutaciones iguales equivalen a la identidad, y por tanto no podemos añadir una tercera que deje el triángulo invariante.

Con tres simetrías.
Cada simetría cambia la orientación del triángulo, luego con tres simetrías el triángulo ha cambiado la orientación y por lo tanto no puede quedar igual.

Por lo tanto, finalmente, solo hay $6+6=12 \quad (A)$.

14.2
Analizando la forma de la figura y el efecto de las transformaciones, vemos que solo las dos primeras son ciertas, luego la solución es (C).

14.3
Por simple observación, está claro que es la (E).

14.4
Determinamos el punto inicial realizando las operaciones contrarias. En primer lugar, una reflexión respecto de la recta $y=-x$:

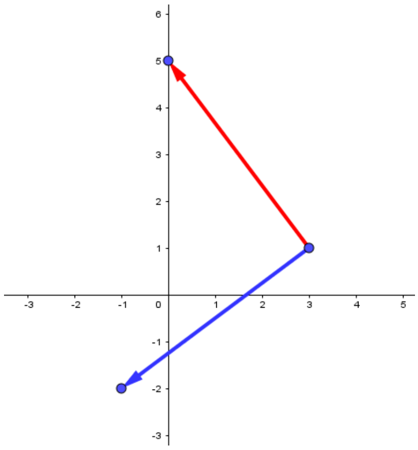
$$(-6,3)\rightarrow(-3,6)$$

Y en segundo lugar una rotación de 90º en el sentido horario alrededor del punto (1,5):

$$(-3,6)\rightarrow(-4,1)\rightarrow(1,4)\rightarrow(2,9)$$

Por tanto $b-a=9-2=7$ (D)

14.5
$P=(-1,-2)$, $Q=(3,1)$.
$\vec{v}=\overrightarrow{QP}=P-Q=(-4,-3)$
Una rotación de 270º en sentido antihorario equivale a hacer una rotación de 90º en sentido horario, es decir, determinar uno de los vectores perpendiculares a $\vec{v}$, en este caso con primera componente negativa: $\vec{w}=(-3,4)$



Y por tanto, finalmente, el punto buscado es $Q+\vec{w}=(3,1)+(-3,4)=(0,5)$ (B)

14.6

Vamos a trabajar en coordenadas polares y vamos a ver cómo se va comportando el punto $(1{,}0)=1_{0^\circ}$:

$$T_1: 1_{0^\circ} \to 1_{1^\circ} \to 1_{179^\circ}$$
$$T_2: 1_{179^\circ} \to 1_{181^\circ} \to 1_{359^\circ}$$
$$T_3: 1_{359^\circ} \to 1_{2^\circ} \to 1_{178^\circ}$$
$$T_4: 1_{178^\circ} \to 1_{182^\circ} \to 1_{358^\circ}$$
$$T_5: 1_{358^\circ} \to 1_{3^\circ} \to 1_{177^\circ}$$
$$T_6: 1_{177^\circ} \to 1_{183^\circ} \to 1_{357^\circ}$$
$$T_7: 1_{357^\circ} \to 1_{4^\circ} \to 1_{176^\circ}$$
$$T_8: 1_{176^\circ} \to 1_{184^\circ} \to 1_{356^\circ}$$

Vemos claramente que, para n=359, la sucesión $T_1, T_2, T_3, ..., T_n$ el punto que obtendremos es

$$1_{180^\circ-(359+1)/2^\circ} = 1_{0^\circ}$$

Que es el punto deseado. Así pues, la solución es (A).