

COMPENDIUM GAOKAO



Gerard Romo Garrido

Toomates Coolección vol. 86



Toomates Colección

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "**licencias digitales**" con las que las editoriales pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo libro, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.

Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de licencias digitales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf".

El conocimiento no es una mercancía.

El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las editoriales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de unos libros de texto que actualmente son muy mediocres, y no mediante retorcidas técnicas comerciales.

Estos libros se comparten bajo una licencia "**Creative Commons 4.0 (Atribution Non Commercial)**": Se permite, se promueve y se fomenta cualquier uso, reproducción y edición de todos estos materiales siempre que sea sin ánimo de lucro y se cite su procedencia. Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas. ¡**Libérate de la tiranía y mediocridad de las editoriales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos.**

Problem Solving (en español):

[Geometría Axiomática](#) [Problemas de Geometría 1](#) [Problemas de Geometría 2](#)
[Introducción a la Geometría](#) [Álgebra](#) [Teoría de números](#) [Combinatoria](#) [Probabilidad](#)
[Trigonometría](#) [Desigualdades](#) [Números complejos](#) [Calculus & Precalculus](#)

Libros de texto (en catalán):

[Nombres \(Preàlgebra\)](#) [Àlgebra](#) [Proporcionalitat](#) [Mesures geomètriques](#)
[Geometria analítica](#) [Combinatòria i Probabilitat](#) [Estadística](#) [Trigonometria](#) [Funcions](#)
[Nombres Complexos](#) [Àlgebra Lineal](#) [Geometria Lineal](#) [Càlcul Infinitesimal](#)
[Programació Lineal](#) [Mates amb Excel](#)

PAU españolas:

[Cataluña TEC](#) [Cataluña CCSS](#) [Valencia](#) [Galicia](#) [País Vasco](#) [Balears](#)

PAU y reválidas internacionales:

[Portugal](#) [Italia](#) [Francia](#) [Rumanía](#) [Hungría](#) [Polonia](#) [Pearson Edexcel International A Level](#) [China Gaokao](#)
[Pearson Edexcel IGCSE](#) [Cambridge International A Level](#) [Cambridge IGCSE](#)
[AQA GCSE](#) [International Baccalaureate \(IB\)](#)

Evaluación diagnóstica y pruebas de acceso:

[ACM6EP](#) [ACM4](#) [CFGS](#) [PAP](#)

Competiciones matemáticas:

Canguro: [España](#) [Cataluña](#) [Francia](#) [USA](#) [Reino Unido](#) [Austria](#)
USA: [Mathcounts](#) [AMC 8](#) [10](#) [12](#) [AIME](#) [USAJMO](#) [USAMO](#) [TSTST](#) [TST](#) [ELMO](#) [Putnam](#)
España: [OME](#) [OMEFL](#) [OMEC](#) [OMEA](#) [OMEM](#) [CDP](#)
Europa: [OMI](#) [Arquimede](#) [HMMT](#) [BMO](#) [Balkan MO](#) [JBMO](#)
Internacional: [IMO](#) [IGO](#) [SMT](#) [INMO](#) [CMO](#) [HMMT](#) [EGMO](#)
AHSME: [Book 1](#) [Book 2](#) [Book 3](#) [Book 4](#) [Book 5](#) [Book 6](#) [Book 7](#) [Book 8](#) [Book 9](#)

Otros materiales:

Pizzazz!: [Book A](#) [Book B](#) [Book C](#) [Book D](#) [Book E](#) [Pre-Algebra](#) [Algebra](#) , [REOIM](#) , [Llibre3r](#)

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales para facilitar su edición.

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a toomates@gmail.com

¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.

Consulta el **catálogo de libros** completo en <http://www.toomates.net>

Descarga toda la biblioteca Toomates en un solo archivo [Aquí](#)  MEGA

Visita mi **Canal de Youtube**: <https://www.youtube.com/c/GerardRomo> 

Visita mi **blog**: <https://toomatesbloc.blogspot.com/>

Versión de este documento: **14/05/2025**

Otros compendiums de pruebas PAU internacionales:

Portugal:	http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal.pdf
Italia:	http://www.toomates.net/biblioteca/Italia.pdf
Francia:	http://www.toomates.net/biblioteca/Francia.pdf
Rumanía:	http://www.toomates.net/biblioteca/Rumania.pdf
Hungría:	http://www.toomates.net/biblioteca/Hungria.pdf
Polonia:	http://www.toomates.net/biblioteca/Polonia.pdf
China Gaokao:	http://www.toomates.net/biblioteca/Gaokao.pdf
International Bccalaureate (IB):	http://www.toomates.net/biblioteca/CompendiumIB.pdf
Pearson Edexcel International A Level:	http://www.toomates.net/biblioteca/Edexcel.pdf
Pearson Edexcel IGCSE:	http://www.toomates.net/biblioteca/EdexcelIGCSE.pdf
Cambridge International AS & A Level:	http://www.toomates.net/biblioteca/Cambridge.pdf
Cambridge IGCSE:	http://www.toomates.net/biblioteca/CambridgeIGCSE.pdf
AQA GCSE:	http://www.toomates.net/biblioteca/AQAGCSE.pdf

Compendiums de pruebas PAU españolas:

Cataluña (TEC):	http://www.toomates.net/biblioteca/Pautec.pdf
Cataluña (CCSS):	http://www.toomates.net/biblioteca/Pauccss.pdf
Valencia:	http://www.toomates.net/biblioteca/Valencia.pdf
Galicia:	http://www.toomates.net/biblioteca/Galiciapau.pdf
País Vasco:	http://www.toomates.net/biblioteca/Paisvascopau.pdf
Baleares:	http://www.toomates.net/biblioteca/Balears.pdf

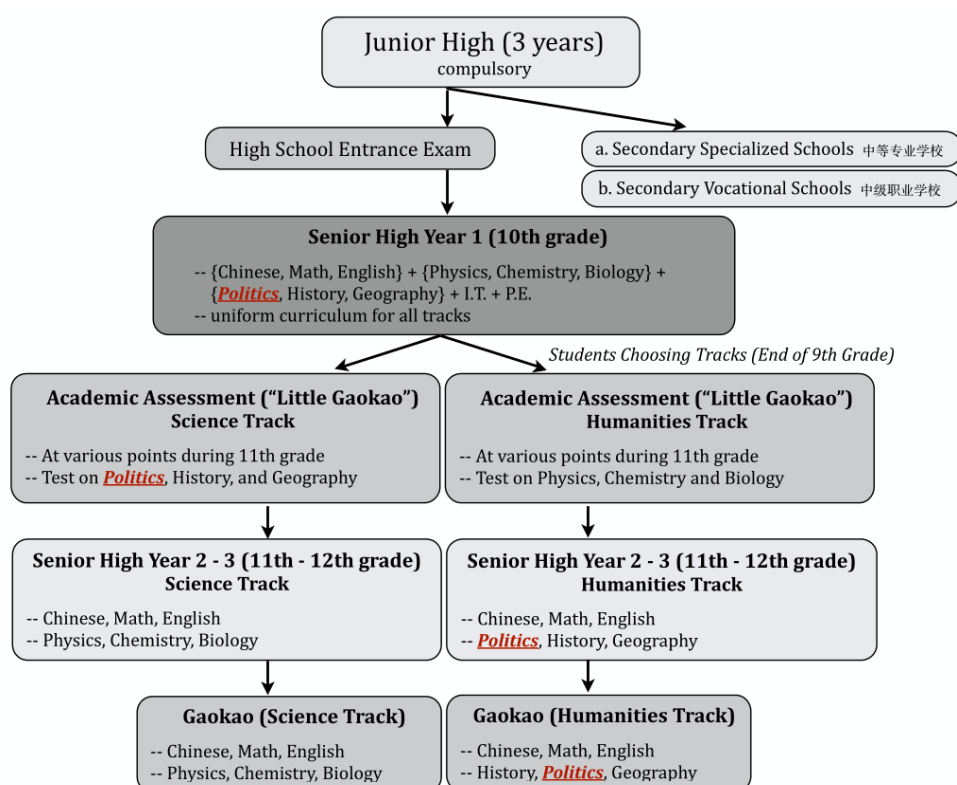
El sistema educativo chino.

Nivel	Edad		
1	6-7	Elementary School Educación primaria	Compulsory Education Educación Obligatoria
2	7-8		
3	8-9		
4	9-10		
5	10-11		
6	11-12		
7	12-13	Junior School Educación Secundaria	
8	13-14		
9	14-15		
		Zhongkao (High School Entrance Exam)	
10	15-16	Senior School	High School (Bachillerato)
11	16-17		
12	17-18		
		Gaokao (National Higher Education Entrance Examination)	

Zhongkao: Es una prueba de reválida que deben realizar al acabar la etapa secundaria. Consta de tres materias: Chino, matemáticas e inglés. Es una prueba local, no nacional.

Todos los alumnos realizan las mismas asignaturas en el primer año de High School (Level 10):
{Chinese, Math, English}+{Physics, Chemistry, Biology}+{Politics, History, Geography}+I.T.+P.E.

Una vez acabado el “Año 10”, deben realizar una prueba: “Little Gaokao” para escoger un itinerario para los dos últimos años: El itinerario de ciencias (Li Ke) o el itinerario humanístico (Wen Ke). Esto determinará las asignaturas que cursarán en los “Año 11” y “Año 12” y consecuentemente las pruebas de la Gaokao al acabar el “Año 12”.



La prueba Gaokao.

La prueba Gaokao, la selectividad china, dura entre 2 y 4 días, dependiendo de la provincia, y sigue una estructura “3+2+x”, es decir:

- 3 Pruebas obligatorias: Chino, matemáticas y lengua extranjera, normalmente inglés aunque los estudiantes pueden elegir japonés, ruso o alemán.
- 1 asignatura opcional dependiendo de la rama del bachillerato:
 - Bachillerato de ciencias (Li Ke): Física, química o biología.
 - Bachillerato humanístico (Wen Ke): Historia, política o geografía.
- Las provincias pueden añadir alguna asignatura propia (la x).

Solo hay una convocatoria anual, en junio. Un alumno que no alcanza la nota deseada debe esperar hasta el año siguiente. Esto incrementa, aún más, la presión sobre el estudiante.

En la Gaokao se da mucha importancia la memorización, sobre todo en pruebas como lengua china o historia.

En el año 2024 se presentaron 13.4 millones de estudiantes a esta prueba, esto la convierte en la prueba escolar más multitudinaria del mundo. Obtener una nota alta en esta prueba es necesario para poder entrar en una universidad china de élite. Por ejemplo, para enterar en la universidad de Pekín o la universidad de Tsinghua se requiere haber obtenido una nota de Gaokao prácticamente perfecta. Esto hace que algunos estudiantes vuelvan a repetir la Gaokao en años posteriores, son los llamados repetidores de Gaokao (复读生).

Si bien el porcentaje de estudiantes que superan la Gaokao es relativamente alto (un 85%), solo el 0.1% de los mejores estudiantes son aceptados en universidades de prestigio como la Universidad de Pekin o la Universidad Tsinghua. Además, las regiones tienen sus propias cuotas de admisión, haciendo que sea más difícil alcanzar las notas deseadas en las regiones más pobladas. Los jóvenes llegan a dedicar de 12 a 14 horas diarias para prepararse para esta prueba, incluso desde antes de los 15 años de edad.

Algunas regiones, como Zhejiang o Shanghai, ofrecen un modelo más flexible “3+3”, permitiendo a los estudiantes elegir entre tres asignaturas.

La prueba de matemáticas tiene dos versiones, una para los estudiantes de ciencias y otra para los estudiantes de humanidades.

Temario:

Matemáticas de ciencias (Li Ke):

Álgebra (polinomios, inecuaciones), Geometría (Geometría analítica), Calculus (Derivación, integración), Probabilidad, números complejos.

Matemáticas del humanístico (Wen Ke):

Estadística, interpretación de datos, lógica, teoría de conjuntos, aritmética, geometría, trigonometría.

Geografía de China.

Distribución territorial: China se divide en 22 provincias, 5 regiones autónomas y 4 “centrally-administered municipalities”

Anhui, Beijing, Chongqing, Fujian, Gansu, Guangdong, Guangxi, Guizhou, Hainan, Hebei, Heilongjiang, Henan, Hubei, Hunan, Inner Mongolia, Jiangsu, Jiangxi, Jilin, Liaoning, Ningxia, Qinghai, Shaanxi, Shandong, Shanxi, Sichuan, Tianjin, Tibet, Xinjiang, Yunnan, Zhejiang

Índice.

2015	Enunciados en español	8
2015	Soluciones en español	13
2015	Enunciados y soluciones en idioma original	19
2017	Enunciados en español	32
2024	Versión 1 enunciados en español (problemas del 1 al 6)	38
2024	Versión 2 enunciados en español	41
2024	Versión 2 soluciones en español	46
2024	Versión 2 enunciados en idioma original (provincias de Sichuan, Shaanxi, Mongolia Interior, Qinghai, Ningxia y Tíbet)	61
2024	Versión 2 soluciones en idioma original	65

Este recopilatorio está en fase de desarrollo



Fuentes.

Todo el material de este documento es propio, exceptuando los enunciados del 2017 (páginas 32 a 37), que se han obtenido en la página web:

<https://lapizdemates.blogspot.com/2021/01/gaokao-selectividad-china-examen-de.html>

Curriculum.

(a) Mathematics content for 6-year (compulsory) elementary school

Numbers and Operations Measurements

Basic Algebra Basic Geometry

Basic Application of Mathematics

(b) Mathematics content for 3-year (compulsory) junior school

Algebra:

identities - laws of indices, laws of square root, logarithms;

Equations and Inequalities:

first degree, quadratic, systems of equations (linear and quadratic), irrational, logarithmic;

Sequences and Series: arithmetic, geometric;

Geometry:

congruency and similarity, notable lines and points of triangle, angles of triangle, relation

between the angles and sides, Pythagorean theorem, circle, Thales theorem, circumferential

and central angles, chord quadrangle, tangent quadrangle;

Probability and Statistics

(c) Mathematics content for senior school

- Functions:
 - Elementary functions and their features;
 - Transformations.
- Sets Theory:
 - Notation of sets, property of sets, operation of sets.
- Trigonometry:
 - Definitions of trigonometric functions;
 - Relations of trigonometric functions;
 - Sine theorem, Cosine theorem;
 - $\sin(A+B)$, $\cos(A+B)$, $\tan(A+B)$, $\cotan(A+B)$;
 - Proof of Tangent theorem.
- Vectors, Coordinate Geometry:
 - Operation with vectors;
 - Coordinates of a sharing point of a section;
 - Equations of straight line, circle, parabola; Centroid of tetrahedron;
 - Distance between point and line, between parallel lines;
 - Equations of bisectrix; Equations of ellipse and hyperbola;
 - General features of the conical sections;
 - Standard equation of plane;
 - Equations of sphere, cylinder, rotation surface.
- Space Geometry:
 - Concepts of points and lines and planes in space;
 - Property of points and lines, lines and lines, lines and planes;
 - Planes and planes;
 - Property of Cube, Cuboid and cylinder and Sphere.
- Complex Numbers:
 - Concept of complex numbers, representation, conjugation;
 - Operations with complex numbers;
 - Trigonometric form of complex numbers;
 - De Moivre's theorem;
 - Extraction of roots of complex numbers;
 - Roots of Unity
- Analysis:
 - Limit of Sequences, propositions of limit;
 - Limit of functions in the finite and infinite;
 - Continuity of functions;
 - Rules of differentiation.
- Series:
 - Concept of series, convergence of series;
 - Geometric series, sum of convergent geometric series.
- Probability:
 - Permutations and combinations;
 - Elements of classical probability;
 - Probability fields;
 - Elements of statistics including mean and standard deviation

2015 年普通高等学校招生全国统一考试

数学（理）（北京卷）

Examen de matemáticas de la selectividad China 2015

Consta de 20 ejercicios en unas 5 páginas, con un total de 150 puntos. El tiempo es de 120 minutos.

Primera parte.

Un total de 8 preguntas “tipo test”, cada pregunta vale 5 puntos que forman un total de 40 puntos, en cada pregunta hay 4 opciones.

1. Resuelve $i(2-i)=$

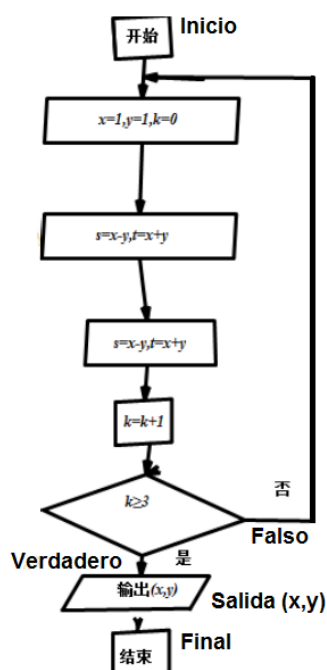
- A. $1+2i$ B. $1-2i$ C. $-1+2i$ D. $-1-2i$

2. Si x, y es $\begin{cases} x-y \leq 0 \\ x+y \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$

entonces el valor máximo es:

- A. 0 B. 1 C. $3/2$ D. 2

3. Ejecuta el diagrama de bloques que se muestra en la figura, el resultado de la salida es:

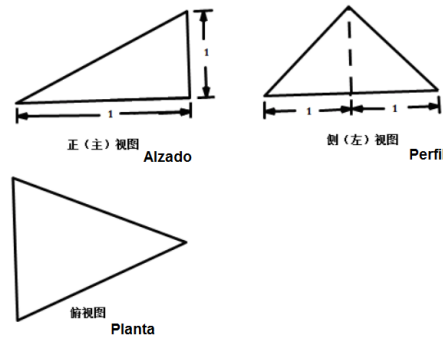


- A. $(-2, 2)$ B. $(-4, 0)$ C. $(-4, -4)$ D. $(0, -8)$

4. Supongamos que α , β tiene planos diferentes, m es una línea recta $m \subset \alpha$.
 “ $m \parallel \beta$ ” es “ $\alpha \parallel \beta$ ”

- A. Condición completa e innecesaria.
- B. Condición necesaria pero no suficiente.
- C. Condiciones necesarias y suficientes.
- D. Ni condición suficiente ni necesario.

5. En la figura se muestra 3 perfiles de un pirámide, ¿cual es el área de la pirámide?

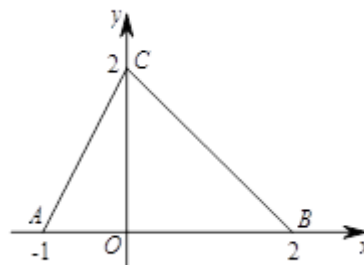


- A. $2 + \sqrt{5}$
- B. $4 + \sqrt{5}$
- C. $2 + 2\sqrt{5}$
- D. 5

6. Si $\{a_n\}$ es una progresión aritmética, ¿cual de la siguientes respuestas es correcta?

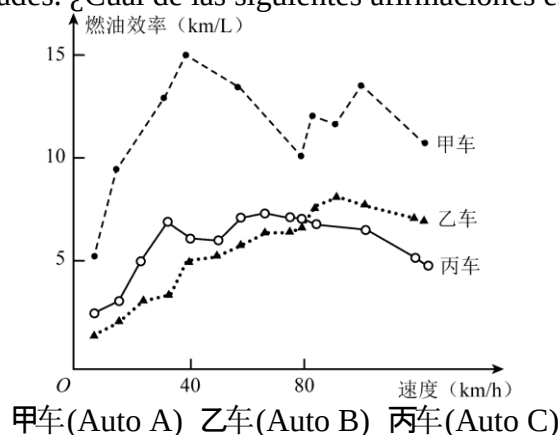
- A. Si $a_1 + a_2 > 0$, entonces $a_2 + a_3 > 0$
- B. Si $a_1 + a_3 < 0$, entonces $a_1 + a_2 < 0$
- C. Si $0 < a_1 < a_2$, entonces $a_2 > \sqrt{a_1 a_3}$
- D. Si $a_1 < 0$, entonces $(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) > 0$

7. Como se muestra la figura, la función $f(x)$ es una línea quebrada ABC, entonces la desigualdad $f(x) \geq \log_2(x+1)$ tiene como solución:



- A. $\{x | -1 < x \leq 0\}$
- B. $\{x | -1 \leq x \leq 1\}$
- C. $\{x | -1 < x \leq 1\}$
- D. $\{x | -1 < x \leq 2\}$

8. La eficiencia de combustible de un automóvil, consume 1l de gasolina por kilómetro, en el siguiente gráfico, describe la eficiencia del combustible en los automóviles A, B y C a diferentes velocidades. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?



- A. El auto B por cada litro, puede viajar 5 Km.
- B. Si los tres tiene la misma velocidad y la misma distancia, el auto A consumirá más.
- C. Si el auto A va a una velocidad de 80 Km/h en 1h, consumirá 10L de gasolina.
- D. En una ciudad en la que la velocidad máxima es de 80Km/h, si los tres autos están en las en las mismas condiciones, los autos C consumen menos que los autos B.

Segunda parte.
Única solución, completa los espacios en blanco de las 6 preguntas, cada pregunta vale 5 puntos un forman un total de 30 puntos.

9. En la expresión $(2 + x)^5$ cuando se expande, el coeficiente de x^3 es _____.
(Contesta con números)

10. Tenemos una hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$, ($a > 0$) y la asíntota es $\sqrt{3}x + y = 0$, entonces $a =$ _____.

11. En el sistema de coordenadas polares, del punto $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ hasta la línea $\rho(\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta) = 6$ la distancia es _____.

12. En $\triangle ABC$, $a=4$, $b=5$, $c=6$, entonces $\frac{\sin 2A}{\sin C} =$ _____.

13. En $\triangle ABC$, de los puntos M, N sabemos que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MC}$ y $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC}$. Si $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, entonces $x =$ _____ ; $y =$ _____.

14. La función

$$f(x) = \begin{cases} 2^x - a, & x < 1 \\ 4(x-a)(x-2a), & x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Si $a = 1$, entonces el valor mínimo de $f(x)$ es _____.
- b) Si tiene exactamente 2 ceros, entonces el rango de valores real de a es _____.

Tercera parte.

Un total de 6 preguntas, en total son 80 puntos, la respuesta se tiene que explicar en texto, un cálculo o un proceso de prueba.

15. (13 puntos)

Tenemos la función $f(x) = \sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \sqrt{2} \sin^2 \frac{x}{2}$.

- a) Busca en el periodo mínimo positivo.
- b) Busca en el intervalo $[-\pi, 0]$ el valor mínimo.

16. (13 puntos)

Los grupos A, B tienen cada uno 7 pacientes, toman un medicamento después de un tiempo de rehabilitación grabado de la siguiente manera. (Los números son cada cuantos días tiene que tomar)

Grupo A: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16

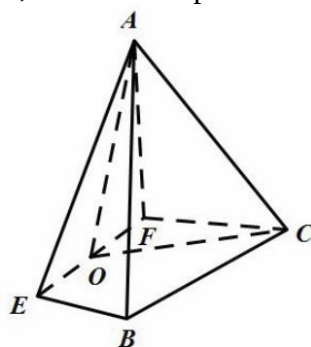
Grupo B: 12, 13, 15, 16, 17, 14, a

Supongamos que el tiempo de recuperación de cada paciente es independiente entre sí, de los grupos A y B, se selecciona una persona aleatoriamente, las personas seleccionadas del grupo A se llaman " α " y los del grupo B se llaman " β "

- a) Busca en el grupo A en que la probabilidad del tiempo de recuperación sea de menos de 14 días.
- b) Si $a=25$, Busca en el grupo A en que tenga posibilidad de tener un mayor tiempo de recuperación que el Grupo B.
- c) Cual tiene que ser el valor de a para que los grupos A y B tenga el mismo tiempo de recuperación? (La conclusión no necesita pruebas)

17. (14 puntos)

En la siguiente figura hay una pirámide de base cuadrangular A-EFCB, $\triangle AEF$ es un triángulo equilátero, el plano AEF es perpendicular al plano EFCB, $EF \parallel BC$, $BC=4$, $EF = 2a$, $\angle EBC = \angle FCB = 60^\circ$, O está en el punto medio de EF.



- a) Comprueba que $AO \perp BE$.
- b) Busca dos ángulos de la cara que $F-AE-B$ del coseno.
- c) Si $BE \perp$ plano AOC, busca el valor de a .

18. (13 puntos)

Tenemos la función $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$

a) Busca la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(0, f(0))$

b) Demuestra que cuando $x \in (0, 1)$, $f(x) > 2\left(x + \frac{x^3}{3}\right)$

c) Establece un número k para que $f(x) > k\left(x + \frac{x^3}{3}\right)$ en $x \in (0, 1)$ la creación constante, busca el valor máximo de k .

19. (14 puntos)

Sea la elipse $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ($a > b > 0$), la excentricidad es $\frac{\sqrt{2}}{2}$, el punto $P(0, 1)$ y el punto $A(m, n)$, ($m \neq 0$) están en la elipse C , la línea recta PA es el eje del punto M .

a) Busca en la elipse C de la ecuación y busca el punto M de las coordenadas (usa m, n para señalarlo);

b) El O es el punto de origen, el punto B y el punto A tiene una simetría de eje con x , la línea PR es el eje del punto N .

Pregunta En el eje y está el punto Q ¿ $\angle OQM = \angle ONQ$? Si existe, busca las coordenadas del punto Q ; si no existe, di el porqué.

20. (13 puntos)

Conocida la secuencia $\{a_n\}$ Completa: $a_1 \in \mathbb{N}^*$, $a_1 \leq 36$,

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n, & a_n \leq 18 \\ 2a_n - 36, & a_n > 18 \end{cases} (n = 1, 2, \dots)$$

Sea M el conjunto de elementos $M = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

a) Si $a_1 = 6$, escribe todos los elementos de M

b) Si en el conjunto M existe un elemento múltiplo de 3, demuestra que todos los elementos de M son múltiplos de 3.

c) Busca el número máximo de elementos que tiene M .

Soluciones.

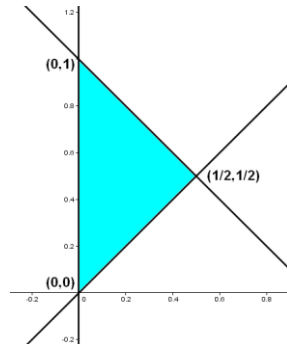
1.

Es un ejercicio de aritmética con **números complejos**.

$i(2-i) = 2i - i^2 = 2i - (-1) = 2i + 1$. La respuesta correcta es A.

2.

Es un problema de **programación lineal**. Representamos las desigualdades en el plano y determinamos los vértices del polígono que determinan. Los extremos de la función z se encontrarán en alguno de dichos puntos.



$$z_1 = 0 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$z_2 = 1/2 + 2 \cdot (1/2) = 3/2 = 1.5$$

$$z_3 = 0 + 2 \cdot 1 = 2$$

Alcanza el máximo en el punto $(0,1)$, con un valor de 2. La respuesta correcta es D.

3.

Es un ejercicio de **algorítmica**. En particular, de un bucle que acaba después de tres vueltas, que vamos a seguir paso a paso:

Primera vuelta:

$$x=1, y=1, k=0$$

$$s=1-1=0$$

$$t=1+1=2$$

$$x=0$$

$$y=2$$

$$k=0+1=1$$

Segunda vuelta:

$$s=0-2=-2$$

$$t=0+2=2$$

$$x=-2$$

$$y=2$$

$$k=1+1=2$$

Tercera vuelta:

$$s=-2-2=-4$$

$$t=-2+2=0$$

$$x=-4$$

$$y=0$$

$$k=2+1=3$$

Final del bucle.

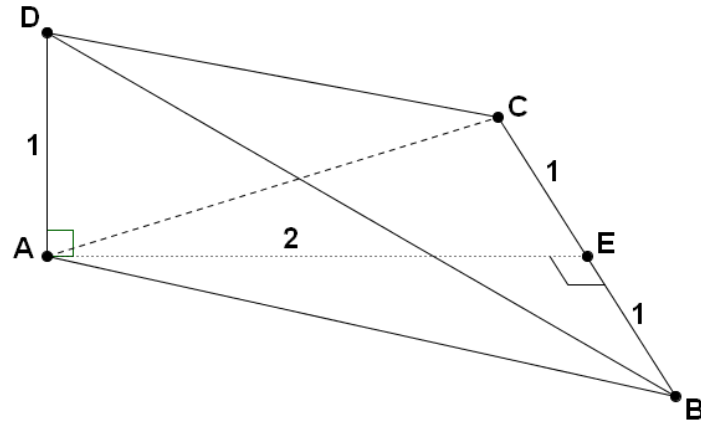
Salida: $x=-4, y=0$

. La respuesta correcta es B.

4.

5.

Debemos interpretar el **esquema de perfiles** que nos dan para visualizar correctamente la forma de la pirámide. Usamos **Teorema de Pitágoras** para encontrar las alturas de los triángulos de alguna de sus caras.



$$AC = DE = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \text{ Área } ACD = \text{Área } ABD = \frac{\sqrt{5} \cdot 1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Área } ABC = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2, \text{ Área } DBC = \frac{\sqrt{5} \cdot 2}{2} = \sqrt{5}$$

$$\text{Área} = 2 \frac{\sqrt{5}}{2} + 2 + \sqrt{5} = 2\sqrt{5} + 2. \text{ La respuesta correcta es C.}$$

6.

Una sucesión aritmética es de la forma $a_{n+1} = a_n + k$ para ciertos a_1 y k fijados.

a) No necesariamente. Por ejemplo, para $a_1 = 3$ y $k = -4$, $a_2 = -1$, $a_3 = -5$, y $a_1 + a_2 = 2 > 0$ pero $a_2 + a_3 = -6 < 0$.

b) No necesariamente. Por ejemplo, para $a_1 = 6$ y $k = -7$, tenemos que $a_2 = -1$, $a_3 = -8$, y $a_1 + a_3 = -2 < 0$ pero $a_1 + a_2 = 5 > 0$.

c) Cierto. $0 < a_1 < a_2 \Leftrightarrow 0 < a_1, k$

$$a_2 = a_1 + k \Rightarrow a_2^2 = (a_1 + k)^2 = a_1^2 + 2k a_1 + k^2$$

$$a_3 = a_2 + k = a_1 + 2k \Rightarrow a_1 \cdot a_3 = a_1(a_1 + 2k) = a_1^2 + 2k a_1$$

$$a_2 > \sqrt{a_1 a_3} \Leftrightarrow a_2^2 > a_1 a_3 \Leftrightarrow a_1^2 + 2k a_1 + k^2 > a_1^2 + 2k a_1 \Leftrightarrow k^2 > 0, \text{ lo cual es cierto.}$$

Otro razonamiento alternativo es tener en cuenta que $a_1 + a_3 = 2a_2$ y que

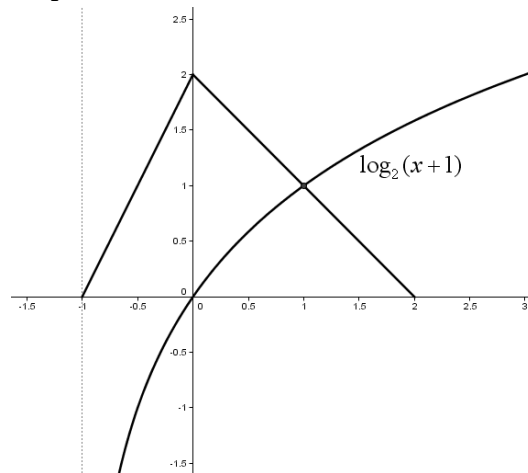
$$a_1 + a_3 > 2\sqrt{a_1 a_3}, \text{ luego } 2a_2 = a_1 + a_3 > 2\sqrt{a_1 a_3} \Rightarrow a_2 > \sqrt{a_1 a_3}$$

d) $a_2 - a_1 = k$, $a_2 - a_3 = -k$, $0 < (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) = k(-k) = -k^2$ es falso. Cualquier ejemplo sirve como contraejemplo: $a_1 = 1$ y $k = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, y $(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) = 1(-1) = -1 < 0$

La respuesta correcta es C.

7.

Superponemos la gráfica de la función $f(x) = \log_2(x)$, para comprobar que el intervalo buscado es $(-1, 1]$. La respuesta correcta es C.



8.

Interpretación de información gráfica.

A. Falso, eso sólo se produce a la mínima velocidad.

B. Falso, a más de 80 km/h el auto C consume más (hace menos km con un litro)

C. Falso. A 80 km/h, el auto A recorrerá 80 km en una hora, con un consumo de aproximadamente 7 km por litro, es decir, más de 11 litros.

D. Cierto. En este rango de velocidades el auto C recorre más kilómetros por litro, luego consume menos.

La respuesta correcta es D.

9.

Desarrollando “a mano” la potencia o recordando la fórmula del binomio de Newton, el resultado es 40.

10.

Tomamos la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$, $a > 0$, y la expresamos como función de x.

$$\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1 + y^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - 1 = y^2 \Leftrightarrow \pm \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = y.$$

Puesto que estamos estudiando la asíntota negativa $y = -\sqrt{3}x$, tomamos la rama negativa de la gráfica:

$$y = -\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

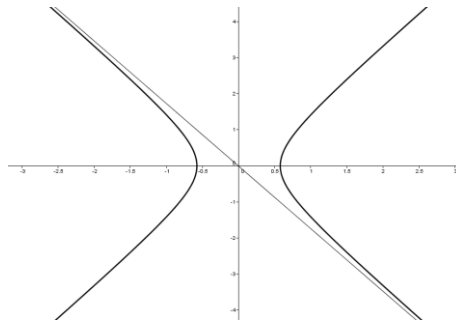
que tendrá, lógicamente, una asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$. Para determinarla, dividiremos entre x :

$$\frac{y}{x} = -\frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = -\frac{1}{\sqrt{x^2}} \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = -\sqrt{\frac{1}{x^2} \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right)} = -\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2}}$$

y tendemos $x \rightarrow +\infty$:

$$-\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2}} \rightarrow -\sqrt{\frac{1}{a^2} - 0} = -\sqrt{\frac{1}{a^2}} = -\frac{1}{a}$$

$$\text{Luego } \frac{-1}{a} = -\sqrt{3} \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



11.

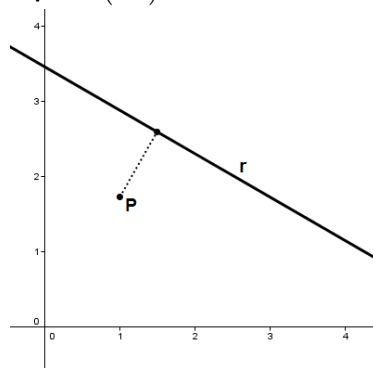
Pasamos de coordenadas polares (ρ, θ) a coordenadas cartesianas (x, y) con la siguiente relación: $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$.

Luego el punto $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ tendrá por coordenadas cartesianas a $\left(2 \cos \frac{\pi}{3}, 2 \sin \frac{\pi}{3}\right) = (1, \sqrt{3})$.

La recta $\rho(\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta) = 6$ tendrá por ecuación cartesiana $x + \sqrt{3}y - 6 = 0$.

La distancia del punto a la recta será

$$d = \frac{|1 \cdot 1 + \sqrt{3} \sqrt{3} - 6|}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{|1 + 3 - 6|}{\sqrt{1 + 3}} = \frac{2}{2} = 1$$



12.

Aplicando el Teorema del coseno,

$$4^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{16 - 25 - 36}{-60} = \frac{3}{4}$$

Aplicando la fórmula del ángulo doble: $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

$$\text{Luego } \frac{\sin 2A}{\sin C} = \frac{2 \sin A \cos A}{\sin C} = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{3 \sin A}{2 \sin C} = (*)$$

Aplicando el Teorema del seno:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \Leftrightarrow \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{a}{c} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Finalmente,

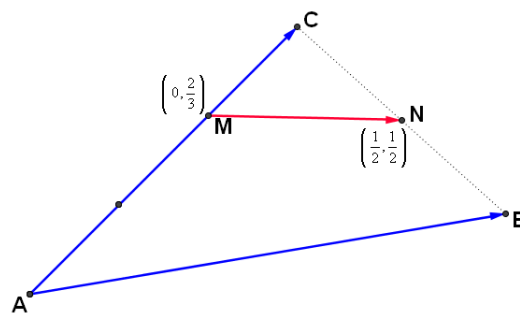
$$(*) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$$

13.

Una forma de abordar este problema es pasando a coordenadas en la base $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$,

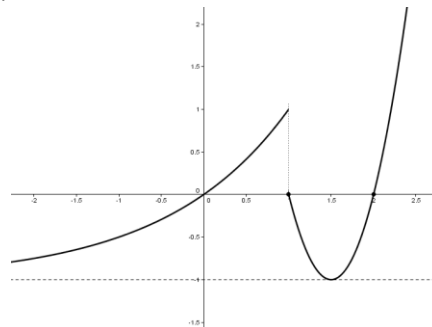
para la cual $M = \left(0, \frac{2}{3}\right)$ y $N = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, por lo que

$$\overrightarrow{MN} = N - M = \left(\frac{1}{2} - 0, \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right)$$



14.

a) Para $a=1$ la función consta de una parte exponencial que “aterrizza” asintóticamente en $y=-1$ cuando $x \rightarrow -\infty$ y una parte parabólica con un mínimo en $(1.5, -1)$. Este punto es el mínimo de la función.



b) Para la parte exponencial, $g(x) = 2^x - a$, $x < 1$ no tendrá ningún cero si $a \leq 0$.

Tendrá un único cero si $0 < a < 2$.

Si $a \geq 2$ la función no tendrá ningún cero.

Para la parte parabólica, $h(x) = 4(x - a)(x - 2a)$, $x \geq 1$ tendrá ceros en a y en $2a$, que serán diferentes si $a \neq 0$.

Luego Si $a \geq 1$ tendrá 2 ceros: a y $2a$

Si $1/2 \leq a < 1$ tendrá un único cero

Si $a < 1/2$ no tendrá ningún cero.

Para que la función tenga dos ceros se pueden dar los siguientes casos:

Primer caso: Parte exponencial ningún cero ($a \leq 0$) y parte parabólica dos ceros ($a \geq 1$)

Ambas condiciones son incompatibles.

Segundo caso: Parte exponencial un cero ($0 < a < 2$) y parte parabólica un cero ($1/2 \leq a < 1$), luego $1/2 \leq a < 1$.

Tercer caso: Parte exponencial ningún cero $a \geq 2$ y parte parabólica dos ceros $a \geq 1$, luego $a \geq 2$.

Luego la solución es $1/2 \leq a < 1$ o $a \geq 2$

20.

a) Si $a_1 = 6$, la secuencia es $(6, 12, 24, 12, 24, 12, 24, \dots) = \{6, 12, 24\}$

b) Si $a_n = 3k$, entonces $a_{n+1} = 2a_n = 2 \cdot 3k = 3 \cdot 2k$ o bien

$a_{n+1} = 2a_n - 36 = 2 \cdot 3k - 3 \cdot 12 = 3(2k - 12)$, en ambos casos es un múltiplo de 3.

Hacia atrás, $a_{n-1} = \frac{a_n}{2}$ que ha de ser múltiplo de 3 si lo es a_n , o bien

$a_{n-1} = \frac{a_n + 36}{2} = \frac{a_n}{2} + 12$ que será múltiplo de 3 porque es la suma de múltiplos de 3.

2015 年普通高等学校招生全国统一考试

数学（理）（北京卷）

本试卷共 5 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 复数 $i(2-i) =$

(A) $1+2i$

(B) $1-2i$

(C) $-1+2i$

(D) $-1-2i$

【答案】A

【难度】基础

【知识点】复数；考察复数的运算

$i(2-i) = 2i - i^2 = 2i + 1 = 1 + 2i$ 故选A.

(2) 若 x, y 满足 $\begin{cases} x-y \leq 0 \\ x+y \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$ ，则 $z = x+2y$ 的最大值为

(A) 0

(B) 1

(C) $\frac{3}{2}$

(D) 2

【答案】D

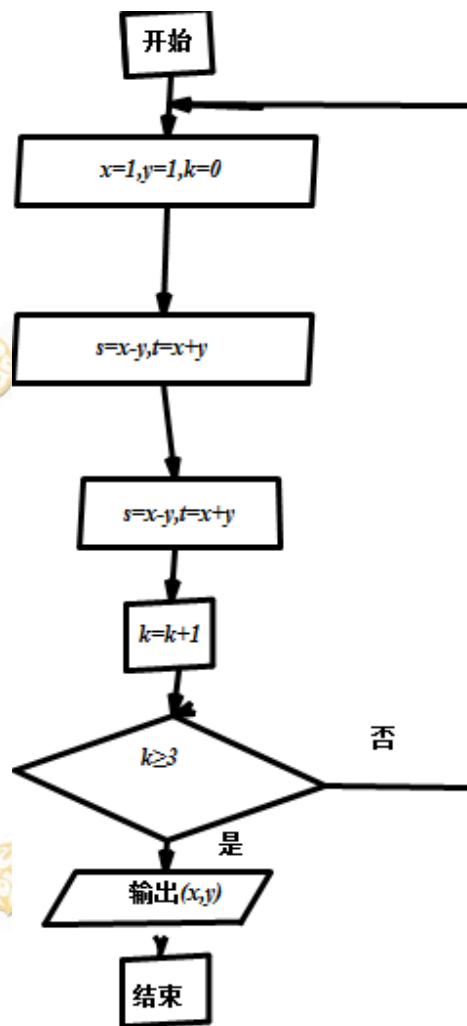
【难度】基础

【知识点】线性规划；考察直线截距的最大值，画出可行域，将

$y = -\frac{x}{2}$ 上下移动，找截距最大值。

或者将不等式组中的不等式改为整式，联立求交点，代入直线中得最大值。

(3) 执行如图所示的程序框图，输出的结果为



- (A) (-2,2) (B) (-4,0)
(C) (-4,-4) (D) (0,-8)

【答案】B

【难度】基础

【知识点】考察程序框图，

$s=0, t=2, x=0, y=2, k=1$; $s=-2, t=2, x=-2, y=2, k=2$; $s=-4, t=0, x=-4, y=0, k=3$;

(4) 设 α, β 是两个不同的平面， m 是直线且 $m \subset \alpha$ 。“ $m // \beta$ ”是“ $\alpha // \beta$ ”的

- (A) 充分而不必要条件
(B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件
(D) 既不充分也不必要条件

【答案】B

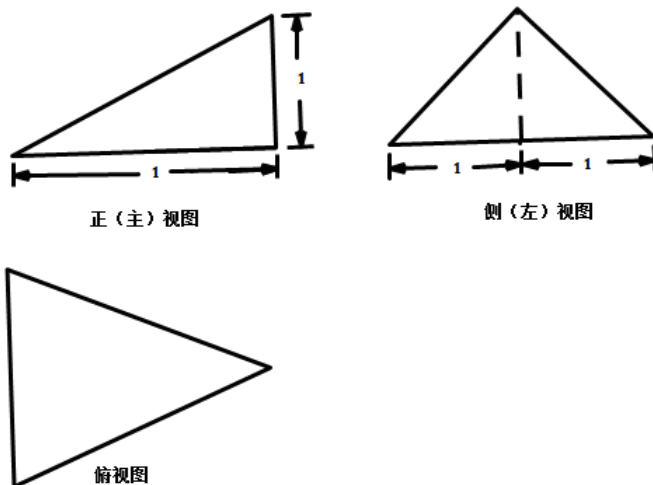
【难度】基础

【知识点】命题和逻辑用语； $m // \beta$ 推不出 $\alpha // \beta$ 因为两平面平行需一个平面中两条相交直线平

行于另一个平面， $\alpha // \beta$ 能推出 $m // \beta$ ，因为如果两平面平行，一个平面中任意条直线都平行于另一个平面。

(5) 某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的表面积是

- (A) $2+\sqrt{5}$
(B) $4+\sqrt{5}$
(C) $2+2\sqrt{5}$
(D) 5



【答案】C

【难度】中等

【知识点】立体几何，考查三视图，还原回直观图，计算各部分的面积，分别为 $\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}, \sqrt{5}, 2$

$\therefore$ 表面积为 $2+2\sqrt{5}$

(6) 设 $\{a_n\}$ 是等差数列。下列结论中正确的是

- (A) 若 $a_1+a_2 > 0$ ，则 $a_2+a_3 > 0$ (B) 若 $a_1+a_3 < 0$ ，则 $a_1+a_2 < 0$
 (C) 若 $0 < a_1 < a_2$ ，则 $a_2 > \sqrt{a_1 a_3}$ (D) 若 $a_1 < 0$ ，则 $(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) > 0$

【答案】C

【难度】中等

【知识点】考察等差数列，

A. 当 $a_1=1, a_2=0, a_3=-1$ ，不满足

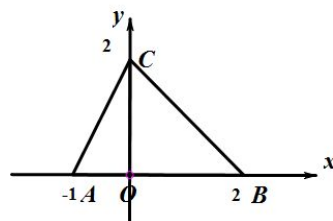
B. 当 $a_1=1, a_2=-1, a_3=-3$ ，不满足

C. $a_1+a_3=2a_2, a_1+a_3 > 2\sqrt{a_1 \cdot a_3} \therefore a_2 > \sqrt{a_1 \cdot a_3}$

D. 当 $a_1=-1, a_2=0, a_3=1$ ，不满足

(7) 如图，函数 $f(x)$ 的图像为折线 ACB ，则不等式 $f(x) \geq \log_2(x+1)$ 的解集是

- (A) $\{x | -1 < x \leq 0\}$
 (B) $\{x | -1 \leq x \leq 1\}$
 (C) $\{x | -1 < x \leq 1\}$
 (D) $\{x | -1 < x \leq 2\}$



【答案】C

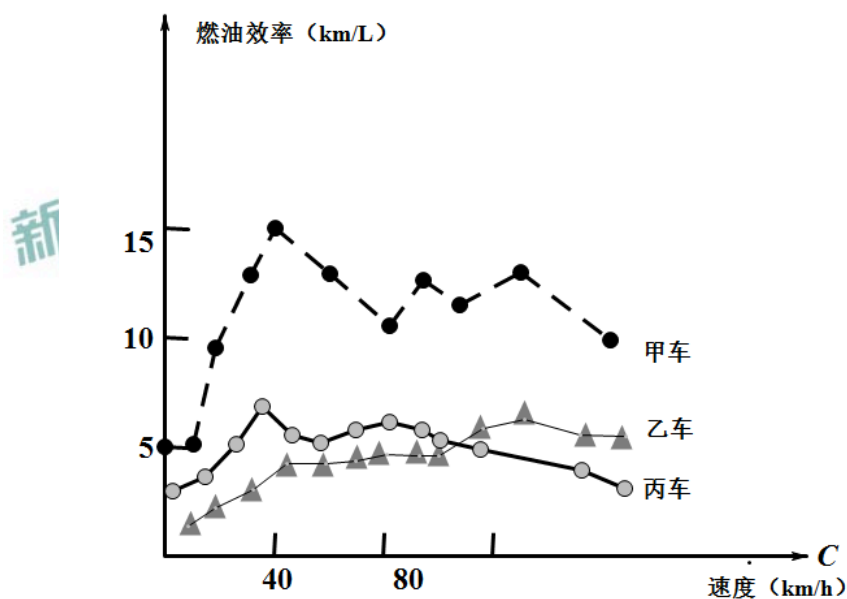
【难度】中等

【知识点】考察函数图像，要满足不等式成立，则需要 $f(x)$ 的图像在 $y = \log_2(x+1)$ 的上方，

画出函数图像 $y = \log_2(x+1)$ 即可。

(8) 汽车的“燃油效率”是指汽车每消耗 1 升汽油行驶的里程。下图描述了甲、乙、丙三辆汽车在不同速度下的燃油效率情况。下列叙述中正确的是

- (A) 消耗 1 升汽油，乙车最多可行驶 5 千米
- (B) 以相同速度行驶相同路程，三辆车中，甲车消耗汽油量最多
- (C) 甲车以 80 千米/小时的速度行驶 1 小时，消耗 10 升汽油
- (D) 某城市机动车最高限速 80 千米/小时。相同条件下，在该市用丙车比用乙车更省油



【答案】D

【难度】难题

【知识点】实际问题

【解析】考察数学在实际中的应用，速度高于低于 80km/h，丙燃油效率高，所以丙比乙更省油，故 D 正确。

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

(9) 在 $(2+x)^5$ 的展开式中, x^3 的系数为_____。(用数字作答)

【答案】40

【难度】基础题

【知识点】二项式定理。本题属于新考点, 难度较低, 直接写出第 $r+1$ 项, 令 x 的指数 r 为 3, 即可求出系数为 40。考生只要区分二项式系数与系数的区别即可。

(10) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的一条渐近线为 $\sqrt{3}x + y = 0$, 则 $a =$ _____。【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【难度】基础

【知识点】双曲线基本性质。本题考查的是双曲线的渐近线的求法, 利用渐近线公式可以直接求出参数 $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。属于基础题。

(11) 在极坐标系中, 点 $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ 到直线 $\rho(\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta) = 6$ 的距离为_____。

【答案】1

【难度】基础

【知识点】极坐标。本题考查极坐标和直角坐标的互化, 将点坐标化为 $(1, \sqrt{3})$, 直线方程化为 $x + \sqrt{3}y = 6$, 利用点到直线距离公式求得 $d = 1$ 。难度较低。

(12) 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 4, b = 5, c = 6$, 则 $\frac{\sin 2A}{\sin C} =$ _____。

【答案】1

【难度】基础

【知识点】解三角形, 正余弦定理的综合运用。本题先化 $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$, 所以原式即为 $\frac{2 \sin A \cos A}{\sin C}$, 利用正弦定理, $\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{a}{c}$, 余弦定理表示 $\cos A$, 即可把角化为边, 经计算

得原式值为1。本题属于中等难度，考生比较容易迅速找到题目思考方向。

(13) 在 $\triangle ABC$ 中，点 M, N 满足 $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC}$. 若 $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 则 $x =$ _____; $y =$ _____.

【答案】 $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{6}$

【难度】中等

【知识点】平面几何与向量的综合应用。本题目中出现比例线段，可过中点 N 做 ND 平行于 AB , 假设 $AM=2k, MC=k$, 则 $AD=DC=\frac{3k}{2}, DM=\frac{3k}{2}-k=\frac{k}{2}=\frac{AC}{6}$, 则

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DN} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, 所以 $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{6}$ 。本题考查了向量的加法运算以及平

面几何的比例线段。属于中等难度。

(14) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - a, & x < 1, \\ 4(x-a)(x-2a), & x \geq 1. \end{cases}$

① 若 $a=1$, 则 $f(x)$ 的最小值为 _____;

② 若 $f(x)$ 恰有 2 个零点, 则实数 a 的取值范围是 _____.

【答案】 $-1, \frac{1}{2} \leq a < 1$ 或 $a \geq 2$

【难度】中等

【知识点】分段函数图像, 函数最值与零点个数。当 $a=1$ 时, 画出分段函数的图像, 可看出当 $x < 1$ 时, $-1 < 2^x - 1 < 1$, 当 $x \geq 1$ 时, 当 $x = \frac{3}{2}$ 时, $y = 4(x-1)(x-2)$ 取得最小值

-1 ; 第二小问, 可以考虑当 $a < 0$ 时, 由图像易知无零点。当 $a > 0$ 时, 可考虑若 $x < 1$ 时是否有零点作为分类的标准, 若没有, 则 $a \geq 2$, 此时 $x \geq 1$ 时必有两个零点 $a, 2a$; 若有, 则必有一个在 $x=1$ 左侧, 右侧只能有一个零点, 所以二次函数两个根 $a < 1, 2a \geq 1$, 即 $\frac{1}{2} \leq a < 1$ 。综上,

$\frac{1}{2} \leq a < 1$ 或 $a \geq 2$ 。本题考查数形结合, 利用图像研究函数性质, 虽然难度中等偏上, 但属于平时训练的重点方向, 学生做起来会比较亲切。

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(15) (本小题 13 分)

$$\text{已知函数 } f(x) = \sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \sqrt{2} \sin^2 \frac{x}{2}.$$

(I) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 求 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, 0]$ 上的最小值.

【解析】理科第 15 题是三角函数问题，考查二倍角公式与辅助角公式的恒等变换，三角函数的图象，特别是第二问，保持了与 14 年的求最值问题的相同类型，是北京考生平时练习最多的的题型，比较落地，便于考生在做解答题的开始保持良好的兴奋状态。

【答案】(1) 解:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \sqrt{2} \sin^2 \frac{x}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \cos x) \\ &= \sin(x + \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

从而最小正周期为 2π

(2) 解: 由 (1), $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\because x \in [-\pi, 0], \therefore x + \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], \text{从而由三角函数图象可知, } \sin(x + \frac{\pi}{4}) \in \left[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right],$$

$$\text{故当 } x = -\frac{\pi}{4} \text{ 时, } f(x) \text{ 有最小值 } -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(16) (本小题 13 分)

A, B 两组各有 7 位病人. 他们服用某种药物后的康复时间 (单位: 天) 记录如下:

A 组: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16;

B 组: 12, 13, 15, 16, 17, 14, a .

假设所有病人的康复时间相互独立. 从 A, B 两组随机各选 1 人, A 组选出的人记为甲, B 组选出的人记为乙.

- (I) 求甲的康复时间不少于 14 天的概率；
(II) 如果 $a = 25$ ，求甲的康复时间比乙的康复时间长的概率；
(III) 当 a 为何值时，A, B 两组病人康复时间的方差相等？（结论不要求证明）

【解析】理科第 16 题概率与统计问题，考查了学生提取信息的能力与数学实际应用的能力。本题考查的是对于方差概念的理解，方差体现的是数据的集中或离散程度。一组数据同时增加或者减少同一个数方差不变。由于题目中甲是连续整数，乙只要也是连续整数他们方差就能相等。所以答案是 11 或 18

【答案】(1) $\frac{3}{7}$ ；(2) $\frac{10}{49}$ ；(3) 只需要观察到 A, B 组的数据如何令 $x_i - \bar{x}$ 是对应相等的即可，答案 11 或 18

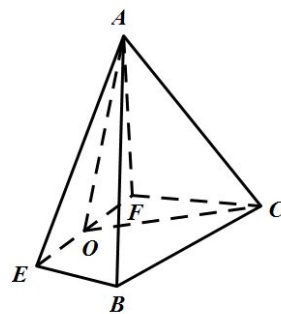
(17) (本小题 14 分)

如图，在四棱锥 $A-EFCB$ 中， $\triangle AEF$ 为等边三角形，

平面 $AEF \perp$ 平面 $EFCB$ ， $EF \parallel BC$ ， $BC = 4$ ， $EF = 2a$ ， $\angle EBC = \angle FCB = 60^\circ$ ， O 为 EF 的中点。

- (I) 求证： $AO \perp BE$ ；
(II) 求二面角 $F-AE-B$ 的余弦值；
(III) 若 $BE \perp$ 平面 AOC ，求 a 的值。

【解析】理科第 17 题主要考查立体几何部分。几与 14 年的五棱锥相比，这次是较为常规的四棱锥，第一问主要突破点在于条件中的面面垂直的条件转化为线面垂直，这个与今年各区的模考试题比较



相似，考生做题时会有亲切感。第二问可以以 O 为原点建立空间直角坐标系求解二面角余弦值。第三问利用平面几何知识可得 $a = \frac{4}{3}$ 。

(18) (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$

- (I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程；

- (II) 求证：当 $x \in (0, 1)$ 时， $f(x) > 2(x + \frac{x^3}{3})$

- (III) 设实数 k 使得 $f(x) > k(x + \frac{x^3}{3})$ 对 $x \in (0, 1)$ 恒成立，求 k 的最大值。

【解析】本题函数比较新颖，在近几年的高考中形式是比较复杂的一个，对导数的计算还是有一定要求的。第一问是切线的计算，比较典型，属于送分题目。第二问是证明不等式恒成立的问题，比较典型，左边减去右边，构造新函数处理，有个小亮点就是函数出现了四次方，分子恒正，考虑定义域知道分母是正数知道导函数恒正，原函数单调增，带入左端点比大小，从而结论成立。整个第二问坐下来还是体现在一个陌生情景下考察典型问题的特点。再看第三问，这个是一道恒成立的问题，其实这个题目考生如果联系（2）问会发现 $k=2$ 正好是第二问的情况，所以 $k=2$ 是肯定合适的，由于本题求 k 的最大值，所以后面只要考虑 $k>2$ 的情况，至此，本题较难的部分出现了，第一，此时是能够解出极值点的，考生需要考虑的是极值点是否在区间 $(0,1)$ 上，通过 $k>2$ 可以知道是极值点是在该区间上的。第二，此时极小值点比较复杂（参看以上解答中的 x_0 ），考生此时一定会将 x_0 带入，同时令带入后的值大于 0，然后尝试去解这个复杂的超越不等式，注意，本题极限难度在此，关键就在于考生能否意识到这个不等式是无法解出的，尝试用代数方法解这个不等式就是失败的，应该的做法是直接和左端点 0 处值比较大小，由于 0 处的值就是 0，立刻可以发现此处的极值是小于 0 的，从而导致无法满足条件，最终舍去 $k>2$ ，从而确定 $k=2$ 就是最大值。

这个超越不等式恒成立和恒不成立的情况在北京较早的模拟考试题目中都是出现过的，而且一种典型解法就是利用端点值带入比大小进行舍去，在课堂是我也经常和同学们强调这个点。

以下给出具体的一例：

(2012 海淀一模文) 已知函数 $f(x) = a \ln x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ ($a \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0$)。

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(II) 是否存在实数 a ，使得对任意的 $x \in [1, +\infty)$ ，都有 $f(x) \leq 0$ ？若存在，求 a 的取值范围；若不存在，请说明理由。

(2015 海淀期中理) 已知函数 $f(x) = 2a \ln x - x^2 + 1$

(3) 若 $f(x) \leq 0$ 在区间 $[1, +\infty)$ 恒成立, 求 a 的最大值

以上 2015 理科这个题目几乎原封不动的抄袭了 2012 年的这道文科题目, 只是讲表达式整体乘 2, 将范围问题改成求最值。

在 2015 海淀期中考的前一天我跟学生曾讲过 12 年的这个题目。当场能想到用端点比大小这个方法取舍的学生很少, 这也是北京今年出了同类型题目的一个原因, 在有考试压力和时间压力的情况下, 思维更容易在定势下快速飞奔, 却很难进行灵巧的转弯。如果考生对之前所讲的这种不等式处理方法有很深的理解的话, 在 15 年的高考中, 应该还是能够想到这一点的。对这道导数题目, 我们能说的是, 这个题目在新的函数情景下考察了一个典型的难题处理, 考前复习扎实的同学这个题目是不在话下的。

【答案】

$$(1) f(0) = 0, f'(x) = \frac{2}{1-x^2}, x \in (0,1)$$

切点为 $(0,0)$, $k = f'(0) = 2$, 故切线方程为: $y = 2x$

$$(2) \text{ 令 } g(x) = f(x) - 2(x + \frac{x^3}{3}), \text{ 则 } g'(x) = \frac{2x^4}{1-x^2}, \text{ 由 } x \in (0,1) \text{ 知: } g'(x) > 0$$

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上为增函数, 所以 $g(x) > g(0) = 0$, 从而 $f(x) > 2(x + \frac{x^3}{3})$

(3) 由 (2) 知道 $k = 2$ 符合要求, 所以 $k_{\max} \geq 2$

$$\text{当 } k > 2 \text{ 时, 令 } h(x) = f(x) - k(x + \frac{x^3}{3}), \text{ 则 } h'(x) = \frac{kx^4 + 2 - k}{1-x^2}$$

此时有 $h(x) > 0$ 对 $x \in (0,1)$ 恒成立

由 $h'(x) = 0$ 得: $x = (1 - \frac{2}{k})^{\frac{1}{4}}$, 令 $x_0 = (1 - \frac{2}{k})^{\frac{1}{4}}$, 由 $k > 2$ 知 $x_0 \in (0,1)$

从而有: $h'(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上为负, $(x_0, 1)$ 上为正

所以: $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上为减函数, $(x_0, 1)$ 上为增函数

所以: 此时 $h(x_0) < h(0) = 0$, 这个与 $h(x) > 0$ 对 $x \in (0, 1)$ 恒成立矛盾

故 $k > 2$ 不合适, 故 $k_{\max} = 2$

(19) (本小题 14 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 点 $P(0, 1)$ 和点 $A(m, n) (m \neq 0)$ 都

在椭圆 C 上, 直线 PA 交 x 轴于点 M .

(I) 求椭圆 C 的方程, 并求点 M 的坐标 (用 m, n 表示);

(II) 设 O 为原点, 点 B 与点 A 关于 x 轴对称, 直线 PB 交 x 轴于点 N . 问: y 轴上是否存在点 Q , 使得 $\angle OQM = \angle ONQ$? 若存在, 求点 Q 坐标; 若不存在, 说明理由.

【解析】先从题目的背景来看, 本题用单动点处理是最为简洁. 这个处理方法顺应了全国各地解析几何考察的一个趋势, 在 2014 年全国各地的高考题目中, 单动点占到了相当大的比例, 另外, 从 2010 年开始的新课标之后的北京卷, 也出现了单动点和韦达问题平分秋色的态势, 10, 14, 15 年考察单动点, 11, 12, 13 都是用韦达处理. 这个题目的考察中, 最大的亮点是几何条件的转化, 这个题目如果能想到相似三角形这个点的化, 题目的计算难度能够明显的降下来. 这个体现了解析几何中, 几何条件转化作用.

【答案】

$$(1) \frac{x^2}{2} + y^2 = 1,$$

由 P, M, A 三点共线得: $k_{PM} = k_{PA}$ 从而: $\frac{n-1}{m-0} = \frac{1-0}{0-x_M}$,

$$\text{解得: } x_M = \frac{m}{1-n}$$

$$(2) \text{ 由 } A \text{ 在椭圆上得: } \frac{m^2}{2} + n^2 = 1 \quad (*)$$

由对称知 $B(m, -n)$, 由 P, B, N 三点共线得: $k_{PB} = k_{PN}$ 从而: $\frac{-n-1}{m-0} = \frac{1-0}{0-x_N}$, 故:

$$x_N = \frac{m}{1+n}$$

有题目中的角相等知道 $\triangle MOQ$ 和 $\triangle QON$ 相似 (无论 O 点在线段 MN 上还是线段 MN 外这个相

似都成立), 所以: $\frac{|MO|}{|OQ|} = \frac{|OQ|}{|NO|}$

从而: $|OQ|^2 = |OM| \cdot |ON|$, 从而: $|y_Q|^2 = |x_M| \cdot |x_N| = |x_M x_N| = \frac{m}{1-n} \cdot \frac{m}{1+n} = \frac{m^2}{1-n^2}$

由 (*) 知道: $1-n^2 = \frac{m^2}{2}$, 从而 $|y_Q|^2 = \frac{m^2}{1-n^2} = \frac{m^2}{\frac{m^2}{2}} = 2$, 故 $y_Q = \pm\sqrt{2}$

故所求 Q 点存在, 坐标为 $(0, \pm\sqrt{2})$

(20) (本小题 13 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 \in N^*, a_1 \leq 36$, 且 $a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n & a_n \leq 18 \\ 2a_n - 36 & a_n > 18 \end{cases} \quad (n=1, 2, \dots)$.

记集合 $M = \{a_n | n \in N^*\}$.

(I) 若 $a_1 = 6$, 写出集合的 M 所有元素;

(II) 若集合 M 存在一个元素是 3 的倍数, 证明: M 的所有元素都是 3 的倍数;

(III) 求集合 M 的元素个数的最大值.

【解析】今年北京理科数学第 20 题相比往年难度有些微的下降, 更强调对于基本概念的理解和题意的把握. 考生要做出此题, 不需要多么精巧的构造, 只需要理解题意、懂得整除、会数学归纳法的思想即可, 最后一问计算并不复杂, 直接枚举所有 18 种可能都行.

三问的结构一如既往, 第一问帮助理解题意, 第二问提示第三问.

在题目的叙述上, 第二问会对考生造成一些困扰, 因为证明题平时训练较少. 考生容易“想的通”而“写不清”. 本问需要考生有数学归纳法和反证法的思想 (叙述上可以不那么严格毕竟实际高考中时间有限, 思路对, 阅卷人也会给分). 第三问在实际考试中的最佳办法就是枚举, 即便时间不够, 枚举到首项为 5 时就可以得到正确答案. 而且循环节很快就可以看到是重复的, 于是手快同学五分钟可以枚举完所有情况, 有意识进行总结的同学, 枚举到首项为 9 的时候也可以注意到所有三种循环节, 于是不需枚举完毕即可意识到正确答案是 8.

可见, 只要掌握了基本数学思想和方法, 20 题也是可以顺利做出来的.

【答案】

(1) $\{6, 12, 24\}$

(2) 考虑 $\{a_1\}$ 除以 3 的余数.

①若 $3|a_1$ ，使用数学归纳法：

假设 $n=k$ 时， $3|a_k$

则 $3|2a_k$ ， $3|36$ ，所以 $3|2a_k - 36$

$\therefore$ 无论 $a_k \leq 18$ 还是 $a_k > 18$ ， $3|a_{k+1}$

$\therefore$ 对所有 $n \in N^*$ ， $3|a_n$

②若 a_1 不是 3 的倍数，使用数学归纳法：

假设 $n=k$ 时， a_k 不是 3 的倍数，

则 $2a_k$ 也不是 3 的倍数，而 $3|36$ ， $\therefore 2a_k - 36$ 不是 3 的倍数

$\therefore$ 无论 $a_k \leq 18$ 还是 $a_k > 18$ ， $2a_k - 36$ 不是 3 的倍数

$\therefore$ 对所有 $n \in N^*$ ， a_n 不是 3 的倍数

由上， $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 中要么全为 3 的倍数，要么全都不是；

即：若 M 中存在一个元素为 3 的倍数，则 M 中所有元素都为 3 的倍数。

(3) $a_1 \leq 36$ ，则假设 $a_k \leq 36$ ，若 $a_k \leq 18$ ， $a_{k+1} = 2a_k < 36$ 。

若 $18 < a_k \leq 36$ ， $a_{k+1} = 2a_k - 36 \leq 36$ ，因此 $a_n \leq 36$ 。

显然 $2|a_2$ ， $4|a_3$

而 1: 36 中共 9 个 4 的倍数，其中

$\{36\}$ ， $\{12, 24\}$ ， $\{4, 8, 16, 32, 28, 20\}$ 分别构成循环；

不论 a_3 为 4, 8, 12, ..., 36 中哪个，其后数列均进入循环，故从 a_3 起，最多 6 个不同元

素，加上 a_1, a_2 ，共最多 8 个

且 $a_1 = 5$ 时， $\{5, 10, 20, 4, 8, 16, 32, 28\}$ 即为一例，所以 M 中最多 8 个元素。

Examen de inscripción universitaria nacional 2017

Ciencias Matemáticas

Este documento tiene 5 páginas, 23 preguntas y una puntuación total de 150 puntos. La prueba dura 120 minutos.

Instrucciones:

Antes de contestar el trabajo, los candidatos deben ingresar su nombre, número de candidato, número de sala de examen y número de asiento en la hoja de respuestas. Use un lápiz 2B para completar el tipo de prueba (B) en la posición correspondiente en la hoja de respuestas. Pegue el código de barras horizontalmente en la esquina superior derecha de la hoja de respuestas "Pegar código de barras"

Al responder preguntas de opción múltiple, después de seleccionar la respuesta a cada pregunta, use un lápiz 2B para tapar la información de la respuesta correspondiente a la opción de pregunta en la hoja de respuestas; si necesita cambiarla, use un borrador para limpiarla y luego seleccione otras respuestas. La respuesta no se puede responder en la prueba.

Las preguntas que no sean de opción deben responderse con un bolígrafo negro o bolígrafo de firma, y la respuesta debe escribirse en la posición correspondiente en el área designada de cada pregunta en la hoja de respuestas; si necesita cambiarla, primero tache la respuesta original y luego escriba la nueva respuesta; no está permitido Lápiz y líquido corrector. No responder a los requisitos anteriores no es válido.

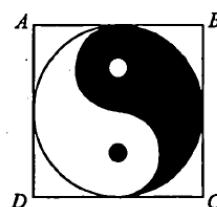
Los candidatos deben asegurarse de que la hoja de respuestas esté ordenada. Una vez finalizado el examen, devuelva la prueba y la hoja de respuestas juntas.

PARTE 1: Hay 12 preguntas en esta parte, cada una da 5 puntos y un total de 60 puntos. Entre las cuatro opciones dadas en cada pregunta, solo una es válida.

1) dados conjuntos $A = \{x \mid x < 1\}$, $B = \{x \mid 3^x < 1\}$, entonces:

A. $A \cap B = \{x \mid x < 0\}$ B. $A \cup B = \mathbf{R}$ C. $A \cup B = \{x \mid x > 1\}$ D. $A \cap B = \emptyset$

2) Como se muestra en la figura, la figura del cuadrado proviene del antiguo diagrama del Taiji chino. La parte negra y la parte blanca del círculo inscrito en el cuadrado son simétricas con respecto al centro del cuadrado. Elija al azar un punto del cuadrado, entonces la probabilidad de que este punto se tome de la parte negra es



A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{\pi}{8}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\pi}{4}$

3) Se establecen las siguientes cuatro proposiciones

p_1 : Si el número complejo z satisface $\frac{1}{z} \in \mathbf{R}$, entonces $z \in \mathbf{R}$;

p_2 : Si el número complejo z satisface $z^2 \in \mathbf{R}$, entonces $z \in \mathbf{R}$;

p_3 : Si los números complejos z_1, z_2 satisfacen $z_1 z_2 \in \mathbf{R}$, entonces $z_1 = \overline{z_2}$;

p_4 : Si el número complejo z satisface $z \in \mathbf{R}$, entonces $\bar{z} \in \mathbf{R}$.

La verdadera proposición es A. p_1, p_3 B. p_1, p_4 C. p_2, p_3 D. p_2, p_4

4) Sea S_n la suma de los primeros n elementos de la secuencia aritmética $\{a_n\}$ Si $a_4 + a_5 = 24$, $S_6 = 48$ entonces la «diferencia de la progresión» de $\{a_n\}$ es

A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

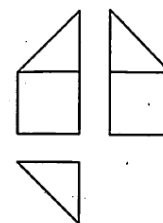
5) una función $f(x)$ disminuye monótonamente en $(-\infty, +\infty)$ y es una función impar. Si $f(1) = -1$, entonces el rango de valores de x que satisface $-1 \leq f(x-2) \leq 1$ es

A. $[-2, 2]$ B. $[-1, 1]$ C. $[0, 4]$ D. $[1, 3]$

6) $(1 + \frac{1}{x^2})(1+x)^6$ el coeficiente de x^2 en la expansión es:

A. 15 B. 20 C. 30 D. 35

7) Las tres vistas de un determinado poliedro se muestran en la figura. La vista frontal y la vista izquierda están compuestas por cuadrados y triángulos isósceles en ángulo recto. La longitud del lado del cuadrado es 2 y la vista superior son triángulos isósceles en ángulo recto. Varias de las caras del poliedro son Trapezoide, la suma del área de estos trapezoides es:



A. 10 B. 12 C. 14 D. 16

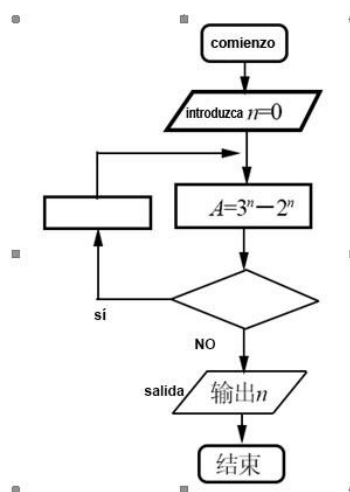
8) El diagrama de bloques de la derecha es para encontrar satisfacción $3^n - 2^n > 1000$ con n el número par más pequeño. Entonces en $\diamond$ con $\square$ Se pueden llenar por separado con

A. $A > 1000$ con $n = n + 1$

B. $A > 1000$ con $n = n + 2$

C. $A \leq 1000$ con $n = n + 1$

D. $A \leq 1000$ con $n = n + 2$



9) dadas las curvas $C_1 : y = \cos x$, $C_2 : y = \sin(2x + \frac{2\pi}{3})$ la siguiente conclusión es correcta:

- A. Extienda la abscisa de cada punto en C_1 al doble de la original, y mantenga la ordenada sin cambios, y luego traslade la curva obtenida a la derecha en $\pi/6$ unidades de longitud para obtener la curva C_2
- B. Extienda la abscisa de cada punto en C_1 al doble de la original, y mantenga la ordenada sin cambios, y luego traslade la curva obtenida a la izquierda por $\pi/12$ unidades de longitud para obtener la curva C_2
- C. La abscisa de cada punto en C_1 se acorta a $1/2$ veces del original, la ordenada permanece sin cambios, y luego la curva obtenida se desplaza a la derecha por $\pi/6$ unidades de longitud para obtener la curva C_2
- D. La abscisa de cada punto en C_1 se acorta a $1/2$ veces del original, la ordenada permanece sin cambios, y luego la curva obtenida se desplaza a la izquierda por unidad de longitud $\pi/2$ para obtener la curva C_2

10). Dado que F es el punto focal de la parábola $C : y^2 = 4x$ haga dos rectas perpendiculares **l1**, **l2** a F. La recta **l1** y C se intersecan en los puntos A y B. La recta **l2** y C se intersecan en D y E. El valor mínimo de $|AB| + |DE|$ es

- A. 16 B. 14 C. 12 D. 10

(aquí no queda claro debido a la traducción mala que se exige a rectas l_1 y l_2 respecto el punto F. Es posible que nos piden que se cortan en el punto F)

11) sea xyz positivo, y $2^x = 3^y = 5^z$, entonces

- | | |
|-------------------|-------------------|
| A. $2x < 3y < 5z$ | B. $5z < 2x < 3y$ |
| C. $3y < 5z < 2x$ | D. $3y < 2x < 5z$ |

12) Varios estudiantes universitarios desarrollaron un software de aplicación. Con el fin de estimular el interés de todos en aprender matemáticas, lanzaron la actividad "Obtener el código de activación del software para comprender problemas matemáticos". El código de activación de este software es la respuesta a las siguientes preguntas matemáticas: dada secuencia 1, 1, 2, 1, 2, 4, 1, 2, 4, 8, 1, 2, 4, 8, 16, ..., donde el primer elemento es 2 elevado a 0, los siguientes dos elementos son 2 elevado a 0, 2 elevado a 1 y los siguientes tres elementos son 2 elevado a 0, 2 elevado a 1, 2 elevado a 2, etc. Encuentre el entero N más pequeño que cumpla las siguientes condiciones: $N > 100$ y la suma de los primeros N elementos de la secuencia es una potencia entera de 2.

Entonces el código de activación del software es

- A. 440 B. 330 C. 220 D. 110

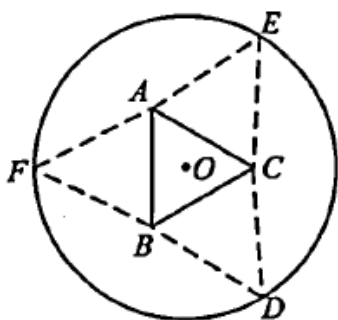
PARTE 2: Preguntas para completar. Hay 4 preguntas en esta parte, cada una con 5 puntos y un total de 20 puntos.

13) Dado que el ángulo entre los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ es 60° , $|\mathbf{a}|=2$, $|\mathbf{b}|=1$, entonces $|\mathbf{a}+2\mathbf{b}|=$

14) Supón x, y cumplen $\begin{cases} x+2y \leq 1 \\ 2x+y \geq -1 \\ x-y \leq 0 \end{cases}$, entonces el valor mínimo de $z=3x-2y$ es..

15) Sea hipérbola $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ con el vértice derecho A , Haz el círculo A con A como centro y b como radio. Una asíntota de la hipérbola C se cruza con A en dos puntos M y N . Si $\angle MAN = 60^\circ$, entonces la excentricidad de C es

16) Como se muestra en la figura, el centro de la hoja de papel circular es O y el radio es de 5 cm. El centro del triángulo equilátero ABC en la hoja de papel es O . D, E, F son puntos en el círculo O , $\triangle DBC$, $\triangle ECA$, $\triangle FAB$ son triángulos isósceles con BC, CA, AB como base respectivamente. Después de cortar a lo largo de la línea de puntos, dobla hacia arriba $\triangle DBC$, $\triangle ECA$, $\triangle FAB$ con BC, CA, AB como los pliegues respectivamente, de modo que D, E y F se superpongan para obtener una pirámide triangular. Cuando la longitud del lado de $\triangle ABC$ cambia, el valor máximo del volumen de la pirámide triangular es _____. (unidad: cm^3)



PARTE 3: Responder preguntas: 70 puntos en total. La respuesta debe tener descripciones de pasos y con cálculos. Las preguntas 17 - 21 son preguntas de examen obligatorias y todos los examinados deben responder. Las preguntas 22 y 23 son preguntas opcionales del examen y los candidatos deben responder según sea necesario.

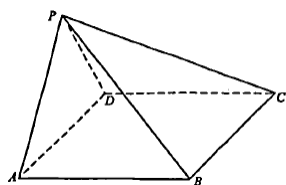
Preguntas del examen obligatorio: 60 puntos en total.

17) (12 puntos) Los lados opuestos de los ángulos internos A, B y C de $\triangle ABC$ son respectivamente a, b y c . Se sabe que el área de $\triangle ABC$ es $\frac{a^2}{3\sin A}$

(1) encuentra valor $\sin B \sin C$;

(2) si $6\cos B \cos C = 1, a = 3$, encuentra el perímetro de $\triangle ABC$.

18) (12 puntos) Como se muestra, en la pirámide cuadrangular $P-ABCD$, $AB \parallel CD$,
y $\angle BAP = \angle CDP = 90^\circ$.



(1) Prueba: Plano $PAB \perp$ Plano PAD ;

(2) Si $PA = PD = AB = DC$, $\angle APD = 90^\circ$, encuentre el coseno del ángulo diedro A-PB-C.

19) (12 puntos) Para controlar el proceso de producción de una determinada parte de una línea de producción, el inspector selecciona al azar 16 piezas de la línea de producción todos los días y mide sus dimensiones (unidad: cm). Según la experiencia de producción a largo plazo, se puede considerar que el tamaño de las piezas producidas en el estado normal de esta línea de producción obedece a la distribución normal. $N(\mu, \sigma^2)$.

(1) Suponiendo que el estado de producción es normal, marque X para indicar el número de partes cuyo tamaño está fuera de $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ entre las 16 partes muestreadas en un día, y encuentre la expectativa matemática de $P(X \geq 1)$;

(2) En las piezas controladas al azar dentro de un día, si hay piezas con un tamaño diferente a $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ se considera que puede haber una situación anormal en el proceso de producción de esta línea de producción ese día, y es necesario verificar el proceso de producción del día..

(i) Trate de explicar la racionalidad del método anterior de monitorear el proceso de producción;

(ii) A continuación se muestran las dimensiones de las 16 piezas tomadas por el inspector en un día:

9.95	10.12	9.96	9.96	10.01	9.92	9.98	10.04
10.26	9.91	10.13	10.02	9.22	10.04	10.05	9.95

Se tiene que $\bar{x} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} x_i = 9.97$, $s = \sqrt{\frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{16} (\sum_{i=1}^{16} x_i^2 - 16\bar{x}^2)} \approx 0.212$,

Donde X_i es el tamaño de la parte extraída i , $i = 1, 2, \dots, 16$.

Use el promedio muestral $\bar{x}$ como el valor estimado $\hat{\mu}$ de μ , y use la desviación estándar muestral S como el valor estimado $\hat{\sigma}$ de σ , Use el valor estimado para determinar si el proceso

de producción del día necesita ser inspeccionado. Excluyendo los datos excepto $(\hat{\mu}-3\hat{\sigma}, \hat{\mu}+3\hat{\sigma})$ use los datos restantes para estimar μ y σ (con una precisión 0.01) .

Adjunto: Si la variable aleatoria Z obedece a la distribución normal N, entonces

$$P(\mu-3\sigma < Z < \mu+3\sigma) = 0.9974, \quad 0.9974^{16} = 0.9592, \quad \sqrt{0.008} \approx 0.09.$$

20) (12 puntos) Sea elipse C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), y de los cuatro puntos $P_1(1, 1)$,

$P_2(0, 1)$, $P_3(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $P_4(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ Hay exactamente tres puntos en la elipse.

(1) Encuentre la ecuación de C;

(2) Suponga que la línea recta l no pasa por P_2 y se cruza con C en dos puntos A y B. Si la suma de las pendientes de la recta P_2A y de la recta P_2B es -1, demuestre que: l está sobre un punto fijo.

21) (12 puntos) sea función $f(x) = ae^{2x} + (a-2)e^x - x$

(1) discuta si $f(x)$ es monótona.

(2) si $f(x)$ tiene dos ceros, encuentre el rango de valores de a.

Preguntas de prueba opcionales: 10 puntos en total. Se pide a los candidatos que elijan una de las preguntas 22 o 23 para responder. Si hace más, califique la primera pregunta que hizo.

22) (10 puntos) En el sistema de coordenadas rectangulares x,y, la ecuación paramétrica de la curva

C es $\begin{cases} x = 3\cos\theta, \\ y = \sin\theta, \end{cases}$ (θ parámetro), y la ecuación paramétrica de la línea recta l

es $\begin{cases} x = a + 4t, \\ y = 1 - t, \end{cases}$ (t de 参数).

(1) Si $a = -1$, encuentre las coordenadas de la intersección de C y l;

(2) Si la distancia máxima desde el punto en C hasta l es $\sqrt{17}$, encuentre a.

23) (10 puntos) sean funciones $f(x) = -x^2 + ax + 4$, $g(x) = |x+1| + |x-1|$

(1) Para $a = 1$, encuentre el conjunto solución de la desigualdad $f(x) \geq g(x)$;

(2) Si el conjunto de solución de la desigualdad $f(x) \geq g(x)$ contiene $[-1, 1]$, encuentre el rango de valores de a.

Gaokao 2024 (Problemas del 1 al 6)

1. Dados los conjuntos $A = \{x \mid -5 < x^3 < 5\}$ y $B = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$, determina $A \cap B$.

- A. $\{-1, 0\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{-3, -1, 0\}$ D. $\{-1, 0, 2\}$

2. Suponiendo que $\frac{z}{z-1} = 1+i$, determina z .

- A. $-1-i$ B. $-1+i$ C. $1-i$ D. $1+i$

3. Dados los vectores $a = (0, 1)$ y $b = (2, x)$, si $b \perp (b - 4a)$, determina x .

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

4. Suponiendo que $\cos(\alpha + \beta) = m$ y que $\tan \alpha \tan \beta = 2$, determina $\cos(\alpha - \beta)$.

- A. $-3m$ B. $m/3$ C. $-m/3$ D. $3m$

5. Disponemos de un cono y de un cilindro cuyas bases tienen igual área, las áreas laterales también son iguales y ambos tienen altura $\sqrt{3}$. Determina el volumen del cono.

- A. $2\sqrt{3}\pi$ B. $3\sqrt{3}\pi$ C. $6\sqrt{3}\pi$ D. $9\sqrt{3}\pi$

6. Determina el rango de posibles valores reales de a para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2ax - a & x < 0 \\ e^x + \ln(x+1) & x \geq 0 \end{cases}$$

es estrictamente creciente en toda la recta real.

- A. $(-\infty, 0]$ B. $[-1, 0]$ C. $[-1, 1]$ D. $[0, +\infty)$

Observación: Problema pensado para resolverse sin derivación.

Soluciones.

1.

Veamos la imagen por $x \mapsto x^3$ de los elementos de B:

$$-3 \rightarrow -27$$

$$-1 \rightarrow -1$$

$$0 \rightarrow 0$$

$$2 \rightarrow 8$$

$$3 \rightarrow 27$$

Luego solo -1 y 0 pertenecen a A. La respuesta correcta es (A).

2.

$$\frac{z}{z-1} = 1+i \Leftrightarrow z = (1+i)(z-1) = -1+iz-i+z \Leftrightarrow 1=iz-i=i(z-1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{i} = z-1$$

Sabemos que $\frac{1}{i} = \bar{i} = -i$, o también se puede argumentar $\frac{1}{i} = \frac{1i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$

Luego

$$\frac{1}{i} = z-1 \Leftrightarrow -i = z-1 \Leftrightarrow 1-i = z \quad (C)$$

3.

$$b-4a = (2, x) - 4(0, 1) = (2, x-4)$$

$$b \perp (b-4a) \Leftrightarrow 0 = b \cdot (b-4a) = (2, x) \cdot (2, x-4) = 4 + x(x-4) = 4 + x^2 - 4x = \\ = (x-2)^2 \Leftrightarrow x = 2 \quad (D)$$

4.

$$2 = \tan \alpha \tan \beta = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \Rightarrow \sin \alpha \sin \beta = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

Aplicamos las identidades trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos:

$$m = \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos \alpha \cos \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta = -\cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos \alpha \cos \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta = 3 \cos \alpha \cos \beta = -3m$$

y la respuesta correcta es (A).

5.

Sean r, h y g el radio, la altura y la apotema del cono, respectivamente.

$$AL_{\text{CONO}} = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot r \cdot \sqrt{h^2 + r^2}$$

$$AL_{\text{CILINDRO}} = 2\pi \cdot r \cdot h$$

$$AL_{\text{CONO}} = AL_{\text{CILINDRO}} \Leftrightarrow \pi \cdot r \cdot \sqrt{h^2 + r^2} = 2\pi \cdot r \cdot h \Leftrightarrow \sqrt{h^2 + r^2} = 2h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3 + r^2} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 3 + r^2 = 4 \cdot 3 = 12 \Leftrightarrow r^2 = 12 - 3 = 9 \Rightarrow r = 3$$

$$V_{CONO} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi 3^2 \sqrt{3} = 3\sqrt{3}\pi \quad (B)$$

Observación: De $AL_{CONO} = AL_{CILINDRO} \Leftrightarrow \pi \cdot r \cdot g = 2\pi \cdot r \cdot h \Rightarrow g = 2h$ podemos deducir directamente que el triángulo rectángulo determinado por la altura, el radio y la apotema es el conocido triángulo 30-60-90, cuyos lados están en una proporción $1 : \sqrt{3} : 2$ por tanto deducir directamente que $r = 3$.

6.

Para valores $x < 0$ se trata de una función polinómica de segundo grado, una parábola con las ramas hacia abajo. Luego será creciente hasta su vértice:

$$x_v = \frac{-(-2a)}{2(-1)} = -a$$

Si queremos que esta función sea estrictamente creciente este vértice debe estar a la derecha del eje Y, es decir $x_v = -a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 0$.

El valor que toma la función es este punto es

$$y_v = f(x_v) = f(-a) = -(-a)^2 - 2a(-a) - a = -a^2 + 2a^2 - a = a^2 - a.$$

Para valores $x > 0$ la función es la suma de dos funciones estrictamente crecientes (una exponencial y una logarítmica) luego es estrictamente creciente para cualquier valor de a .

Veamos alrededor del punto $x = 0$:

$$f(0) = e^0 + \ln(0+1) = 1$$

Luego si queremos que la función sea estrictamente creciente también alrededor de $x = 0$ la parábola de la izquierda, cuando se evalúa en $x = 0$, tiene que ser menor o igual que 1:

$$1 \geq -0^2 - 2a \cdot 0 - a = -a \Leftrightarrow -1 \leq a$$

Luego llegamos al resultado $-1 \leq a \leq 0$ (B).

2024 新高考 II 卷高考真题
Nuevo examen de ingreso a la universidad 2024

数 学
Matemáticas

Este examen consta de 10 páginas, 19 preguntas y un total de 150 puntos.

Notas:

1. Antes de responder las preguntas, complete su nombre, número de boleto de admisión, número de sala de examen y número de asiento en la hoja de prueba y la hoja de respuestas, y pegue el código de barras del número de boleto de admisión en la hoja de prueba.
2. Como responder preguntas de opción múltiple: después de elegir la respuesta para cada pregunta, utilice un lápiz 2B para marcar con negro el número de respuesta en la hoja de respuestas. Escríbalo en la hoja de examen o en el borrador y las áreas sin respuesta en la hoja de respuestas no son válidas.
3. Respuestas a preguntas para completar espacios en blanco y preguntas de ensayo: Use un bolígrafo negro para escribir directamente en el área de respuesta correspondiente en la hoja de respuestas. Escriba en la hoja de prueba, en la hoja de borrador y en la hoja de respuestas.

Las áreas sin respuesta en la tarjeta no son válidas.

4. Después del examen, entregue el cuestionario y la hoja de respuestas juntos.

I. Preguntas de opción única: Este bloque consta de 8 preguntas, cada una con un valor de 5 puntos, para un total de 40 puntos. Entre las cuatro opciones dadas para cada pregunta, sólo una opción es correcta.
Por favor, complete las opciones correctas en las posiciones correspondientes en la hoja de respuestas.

1. Si $z = -1 - i$ entonces $|z| =$

- A. 0 B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2

2. Sean las afirmaciones siguientes: $p: \forall x \in \mathbb{R}, |x+1| > 1$, $q: \exists x > 0, x^3 = x$. Entonces:

- A. p y q son ciertas.
B. $\neg p$ y q son ciertas.
C. p y $\neg q$ son ciertas.
D. $\neg p$ y $\neg q$ son ciertas.

3. Sean dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ cumpliendo $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 2$ y $(\vec{b} - 2\vec{a}) \perp \vec{b}$. Determina $|\vec{b}|$.

- A. $1/2$ B. $\sqrt{2}/2$ C. $\sqrt{3}/2$ D. 1

4. Un departamento de investigación agrícola plantó un nuevo tipo de arroz en 100 campos de arroz de igual tamaño y obtuvo el siguiente rendimiento por hectárea de cada campo de arroz (unidad: kg):

Rendimiento por ha	[900,950)	[950,1000)	[1000,1050)	[1100,1150)	[1150,1200)
Campos de arroz	6	12	18	24	10

Según los datos de la tabla, seleccione la conclusión correcta:

- A. El rendimiento medio por ha de los 100 campos de arroz es inferior a 1050 kg.
- B. Entre los 100 arrozales estudiados, la proporción de arrozales con un rendimiento en superficie inferior a 1.100 kg representa más del 80%.
- C. El rango de rendimiento por ha de los 100 campos de arroz está entre 200 kg y 300 kg.
- D. El rendimiento medio por ha de los 100 campos de arroz está entre 900 kg y 1000 kg.

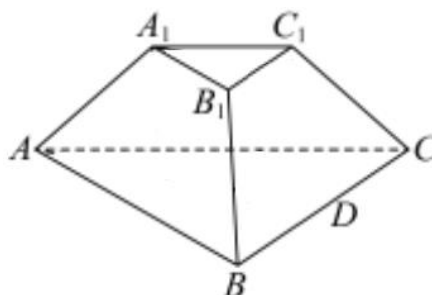
5. Sea la curva $C: x^2 + y^2 = 16$ ($y > 0$). Sobre cualquier punto P de esta curva, sea P' el pie de la perpendicular por P al eje X, y sea M el punto medio de PP'. Determina la trayectoria de los puntos M.

- A) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ ($y > 0$)
- B) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$ ($y > 0$)
- C) $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1$ ($y > 0$)
- D) $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{8} = 1$ ($y > 0$)

6. Dadas las funciones $f(x) = a(x+1)^2 - 1$ y $g(x) = \cos x + 2ax$, con $x \in (-1,1)$, supongamos que la curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ tienen un único punto de corte. Entonces $a = (\quad)$

- A. -1
- B. 1/2
- C. 1
- D. 2

7. Dada una pirámide truncada regular $ABC - A_1B_1C_1$ con volumen $\frac{52}{3}$, $AB = 6$ y $A_1B_1 = 2$, la tangente del ángulo entre A_1A y la base es:



- A. $\frac{1}{2}$
- B. 1
- C. 2
- D. 3

8. Sea la función $f(x) = (x + a)\ln(x + b)$. Si $f(x) \geq 0$, el valor mínimo de $a^2 + b^2$ es:

- A) $1/8$ B) $1/4$ C) $1/2$ D) 1

II. Preguntas de opción múltiple: Este bloque consta de 3 preguntas, cada una con un valor de 6 puntos, para un total de 18 puntos. Entre las cuatro opciones dadas en cada pregunta, hay múltiples opciones que cumplen los criterios del enunciado. Requisitos de la pregunta. 6 puntos por todas las respuestas correctas, puntos parciales por respuestas correctas pero incompletas y 0 puntos por cualquier respuesta incorrecta.

9. Dadas las funciones $f(x) = \sin 2x$ y $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, determina las afirmaciones correctas:

- A. Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen los mismos ceros.
B. Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen los mismos valores máximos.
C. Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen el mismo periodo.
D. Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen los mismos ejes de simetría.

10. Sea la parábola $C: y^2 = 4x$, con directriz l . Sea P un punto de C . Sea la circunferencia $x^2 + (y - 4)^2 = 1$, con centro A . Sea Q un punto de esta circunferencia de forma que PQ sea tangente a la circunferencia. Sea B el pie de la perpendicular a l por P .

- A) La directriz l es tangente a la circunferencia.
B) Si P , A y B están alineados, entonces $|PQ| = \sqrt{15}$.
C) Si $|PB| = 2$ entonces $PA \perp AB$.
D) Existen dos únicos puntos P de la parábola tales que $|PA| = |PB|$.

11. Dada la función $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 1$, se cumple:

- A. Si $a > 1$ la función tiene tres ceros.
B. Si $a < 0$ entonces $x = 0$ es un máximo de la función.
C. Existen a y b para los que $x = b$ es un eje de simetría de la curva $y = f(x)$.
D. Existe un valor de a para el que $(1, f(1))$ es un centro de simetría de la curva $y = f(x)$.

III. Complete los espacios en blanco: Este bloque consta de 3 preguntas, cada una con un valor de 5 puntos, para un total de 15 puntos.

12. Sea S_n la sucesión de sumas de una sucesión aritmética $\{a_n\}$ cumpliendo $a_3 + a_4 = 7$ y $3a_2 + a_5 = 5$. Entonces $S_{10} = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. Dado un ángulo α que pertenece al primer cuadrante y un ángulo β que pertenece al tercer cuadrante, sabiendo que $\tan \alpha + \tan \beta = 4$ y $\tan \alpha \tan \beta = \sqrt{2} + 1$, entonces $\sin(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. Seleccione 4 cuadrados en la cuadrícula de 4×4 que se muestra en la figura, requiriendo que se seleccione exactamente un cuadrado en cada fila y columna.

11	21	31	40
12	22	33	42
13	22	33	43
15	24	34	44

Hay _____ formas de elegir. Entre todas las combinaciones que cumplen los requisitos anteriores, el valor máximo de la suma de los 4 números en las casillas seleccionadas es _____.

IV. Responder preguntas: Este bloque consta de 5 preguntas, con un total de 77 puntos. La respuesta debe incluir una explicación textual, un proceso de prueba o pasos de cálculo.

15. Sea $\triangle ABC$ un triángulo con ángulos A, B, C y sus lados opuestos correspondientes a, b, c . Sabemos que $\sin A + \sqrt{3} \cos A = 2$.

(1) Determina el ángulo correspondiente al vértice A .

(2) Si $a=2$ y $\sqrt{2}b \sin C = c \sin 2B$, determine el perímetro del triángulo.

16. Sea la función $f(x) = e^x - ax - a^3$.

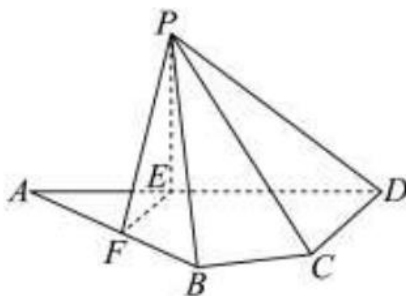
(1) Cuando $a = 1$, encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(1, f(1))$.

(2) Si $f(x)$ tiene un valor mínimo, y el valor mínimo es menor que 0, encuentre el rango de valores de a .

17. Tenemos un cuadrilátero plano $ABCD$, tal que $AB = 8$, $CD = 3$, $AD = 5\sqrt{3}$,

$\angle ADC = 90^\circ$, $\angle BAD = 30^\circ$. Sean E y F tales que $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$, y giramos

el triángulo $\triangle AEF$ en el espacio, tomando EF como eje de rotación, hasta determinar el triángulo $\triangle PEF$, de forma que la figura resultante es una pirámide $P-EFBCD$ cumpliendo $PC = 4\sqrt{3}$.



a) Demuestra que $EF \perp PD$.

b) Determina el seno del ángulo diédrico entre los planos PCD y PBF .

18. Una competición de tiro de baloncesto se divide en dos fases. Cada equipo está formado por dos jugadores, digamos Jugador A y Jugador B. Las reglas de la competición son las siguientes: En la primera fase participará uno de los jugadores, que tirará a canasta 3 veces. Si falla los 3 tiros, el equipo queda eliminado y obtiene 0 puntos. Si logra al menos una canasta, el equipo avanza a la segunda ronda. En la segunda etapa, el otro jugador del equipo lanzará 3 veces, y cada vez que enceste obtendrá 5 puntos y por cada lanzamiento fallido obtendrá 0 puntos. El resultado del partido es la suma de todos los puntos obtenidos. Supongamos que la probabilidad de que A enceste es p y la probabilidad de que B enceste es q , de forma independiente.

a) Si $p = 0,4$, $q = 0,5$ y A participa en la primera etapa de la competición, ¿cuál es la probabilidad de que el equipo obtenga no menos de 5 puntos?

b) Supongamos que $0 < p < q$.

i) Para maximizar la probabilidad de que el equipo obtenga 15 puntos, ¿quién debería participar en la primera etapa de la competición, el jugador A o el jugador B?

ii) Para maximizar la esperanza matemática del equipo, ¿quién debería participar en la primera etapa de la competición, el jugador A o el jugador B?

19. Dada la hipérbola $C: x^2 - y^2 = m$, ($m > 0$), sabemos que el punto $P_1 = (5, 4)$ pertenece a C. Fijado un valor k , $0 < k < 1$, definimos la siguiente sucesión de puntos P_n ($n = 2, 3, \dots$): Dado un punto P_{n-1} de la hipérbola C, definimos el punto Q_{n-1} como el segundo punto de corte entre la recta que pasa por P_{n-1} y tiene pendiente k y la hipérbola C, y sea P_n el punto simétrico de Q_{n-1} respecto del eje Y. Recordamos que P_n tiene coordenadas (x_n, y_n) .

(1) Si $k = \frac{1}{2}$, determina x_2, y_2 .

(2) Demuestra que la sucesión $\{x_n - y_n\}$ es una sucesión geométrica de razón $\frac{1+k}{1-k}$.

(3) Definiendo S_n como el área del triángulo de vértices $P_n P_{n+1} P_{n+2}$, demuestra que para todo n , $S_n = S_{n+1}$.

Soluciones.

1.

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad (C)$$

2.

Está claro que p no es cierta. Por ejemplo, no se cumple para $x = 0$. Está claro que q es cierta, pues, por ejemplo $x = 1 \Rightarrow 1^3 = 1$. Luego la respuesta correcta es (B)

3.

$$\begin{aligned}(\vec{b} - 2\vec{a}) \perp \vec{b} &\Leftrightarrow 0 = (\vec{b} - 2\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ |\vec{a} + 2\vec{b}| = 2 &\Rightarrow 4 = |\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = \vec{a} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) + 2\vec{b} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot 2\vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{a} + 2\vec{b} \cdot 2\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{a} + 4\vec{b} \cdot \vec{b} = \\ &= |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 1^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \Rightarrow 3 = 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2\end{aligned}$$

Resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ 3 &= 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |\vec{b}|^2 = \frac{1}{2}, \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}$$

$$\text{y por lo tanto: } |\vec{b}|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (B)$$

4.

La respuesta correcta es C.

Puesto que hay 100 campos en total, podemos completar la tabla:

$$100 - (6 + 12 + 18 + 24 + 10) = 30$$

y la tabla completa es:

Rendimiento por ha	[900,950)	[950,1000)	[1000,1050)	[1050,1100)	[1100,1150)	[1150,1200)
Campos de arroz	6	12	18	30	24	10

(A) $6 + 12 + 18 = 36 < 50$, luego menos de la mitad de los campos tienen un rendimiento inferior a 1050, por lo que esta opción no es cierta.

(B) Los arrozales con un rendimiento no inferior a 1100 son $24 + 10 = 34 \rightarrow 34\%$.

Luego los arrozales con un rendimiento inferior a 1110 son el $66\% < 80\%$, luego esta opción no es cierta.

(C) Vemos que el rango máximo de rendimiento es $1200 - 900 = 300$ y el rango mínimo es $1150 - 950 = 200$, luego la respuesta es correcta.

(D) Calculamos el rendimiento medio:

$$\frac{1}{100} \times (6 \times 925 + 12 \times 975 + 18 \times 1025 + 30 \times 1075 + 24 \times 1125 + 10 \times 1175) = 1067$$

Y está claramente fuera del rango del enunciado, por lo que la afirmación no es cierta.

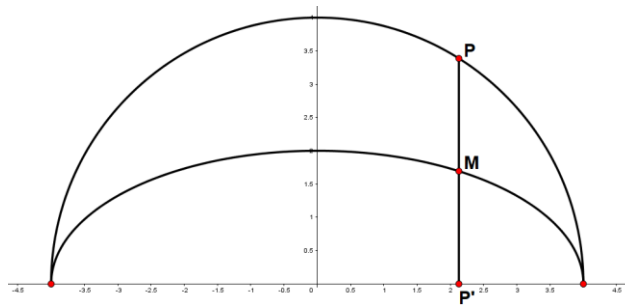
5.

$$P = (x, 2y) \in C$$

$$P' = (x, 0)$$

$$M = (x, y)$$

$$P = (x, 2y) \in C \Leftrightarrow 16 = x^2 + (2y)^2 = x^2 + 4y^2 \Leftrightarrow 1 = \frac{x^2 + 4y^2}{16} = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} \quad (A)$$



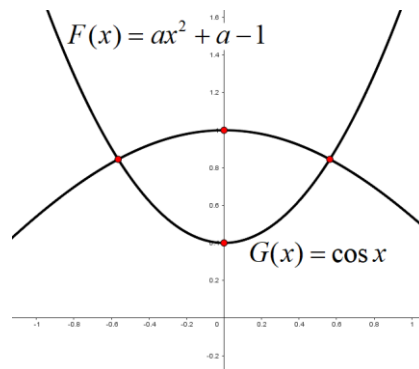
6.

$$f(x) = a(x+1)^2 - 1 = ax^2 + 2ax + a - 1$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow ax^2 + 2ax + a - 1 = \cos x + 2ax \Leftrightarrow ax^2 + a - 1 = \cos x$$

La función $F(x) = ax^2 + a - 1$ es una parábola simétrica respecto de $x=0$ (es decir, par) y $F(0) = a - 1$.

La función $G(x) = \cos x$ es también par y $G(0) = 1$

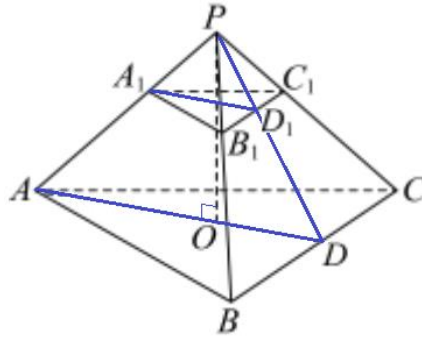


Luego si tienen un punto de corte para cierto $x \neq 0$, también lo tendrán para $-x$, luego si queremos que tengan un único punto de corte la única posibilidad aceptable es que sea en $x=0$, es decir,

$$F(0) = G(0) \Leftrightarrow a - 1 = 1 \Leftrightarrow a = 2 \quad (D).$$

7.

Completamos la figura hasta tener una pirámide ABCP con altura OP. Sea h_1 la altura de la pirámide superior $A_1B_1C_1P$. Sea h la altura de la pirámide truncada $ABC - A_1B_1C_1$. Está claro que la altura de la pirámide ABCP será $h + h_1$. Sean AD y A_1D_1 alturas de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A_1B_1C_1$:



$$AD = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$$

$$[ABC] = \frac{1}{2} 3\sqrt{3} \cdot 6 = 9\sqrt{3}$$

$$V_{ABCP} = \frac{1}{3} 9\sqrt{3} \cdot (h + h_1) = 3\sqrt{3} \cdot (h + h_1)$$

$$A_1D_1 = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

$$[A_1B_1C_1] = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot 2 = \sqrt{3}$$

$$V_{A_1B_1C_1P} = \frac{1}{3} \sqrt{3} h_1$$

$$\frac{52}{3} = V_{ABCP} - V_{A_1B_1C_1P} = 3\sqrt{3} \cdot (h + h_1) - \frac{1}{3} \sqrt{3} h_1$$

Por otro lado, por semejanza de triángulos,

$$\frac{AD}{h_1} = \frac{A_1D_1}{h_1} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{h_1} = \frac{3\sqrt{3}}{h_1 + h} \Leftrightarrow h_1 + h = 3h_1 \Leftrightarrow h = 2h_1$$

Con lo cual ya podemos resolver (*):

$$\frac{52}{3} = 3\sqrt{3} \cdot (h + h_1) - \frac{1}{3} \sqrt{3} h_1 = 3\sqrt{3} \cdot 3h_1 - \frac{1}{3} \sqrt{3} h_1 = 9\sqrt{3} h_1 - \frac{1}{3} \sqrt{3} h_1 = \frac{26\sqrt{3}}{3} h_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow h + h_1 = 3h_1 = 2\sqrt{3}$$

Finalmente,

$$AO = \frac{2}{3} AD = \frac{2}{3} 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{h + h_1}{MD} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1$$

8.

El dominio de esta función es $(-b, +\infty)$.

Veamos el signo de los dos factores por separado:

$$\ln(x + b) > 0 \Leftrightarrow x > -b + 1$$

$$\ln(x + b) = 0 \Leftrightarrow x = -b + 1$$

$$\ln(x + b) < 0 \Leftrightarrow x < -b + 1$$

Por otro lado,

$$(x+a) > 0 \Leftrightarrow x > -a$$

$$(x+a) = 0 \Leftrightarrow x = -a$$

$$(x+a) < 0 \Leftrightarrow x < -a$$

Luego la única manera de que los dos factores, al ser multiplicados, den un número siempre positivo es que los dos puntos frontera coincidan:

$$-a = -b + 1 \Leftrightarrow a = b - 1$$

Este conjunto corresponde a la recta en el plano que pasa por los puntos $(-1,0)$ y $(0,1)$,

Su punto más cercano al origen es $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, cuya distancia al origen es

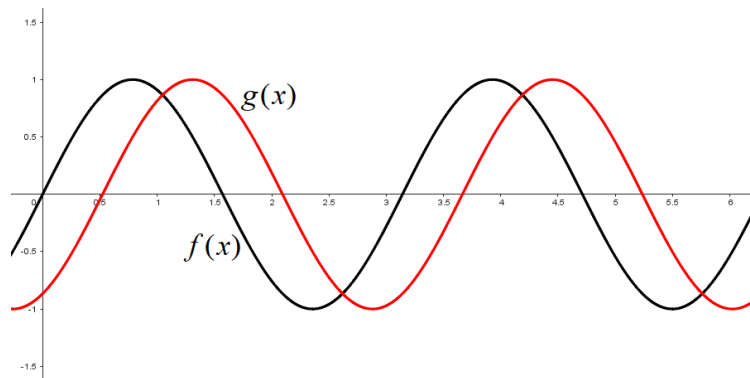
$$\sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

y por lo tanto su cuadrado es $1/2$ (C).

9.

Las respuestas correctas son B y C.

La función $f(x)$ es una contracción horizontal de $\sin x$, y la función $g(x)$ es idéntica a la función $f(x)$ pero desplazada $\pi/4$ hacia la derecha. Dibujando esquemáticamente estas gráficas el problema se resuelve fácilmente.



(A) Es falsa, pues los ceros de $f(x)$ son de la forma $x = \frac{k\pi}{2}$, mientras que los ceros de

$g(x)$ son de la forma $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$.

(B) Es cierta, pues ambas tienen los mismos valores máximos $y = 1$.

(C) Es cierta, pues ambas tienen periodo π

(D) Es falsa, pues los ejes de simetría de la función $f(x)$ son los valores de la forma

$$2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

mientras que los ejes de simetría de $g(x)$ son de la forma

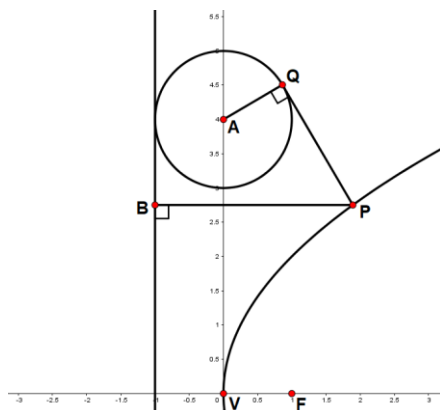
$$2x - \frac{\pi}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$$

10.

(A) La directriz l es tangente a la circunferencia. Cierto.

Recordemos que si la parábola tiene por ecuación $C: y^2 = 4x$, su directriz es la recta $x = -1$, su foco es $F = (1,0)$ y su vértice es $V = (0,0)$.

El centro de la circunferencia es $A = (0,4)$, su radio es $r = 1$, y está claro que la distancia entre la directriz y la circunferencia es 1, que es igual al radio, por lo tanto es tangente.



(B) Si P , A y B están alineados, entonces $|PQ| = \sqrt{15}$. Cierto.

La recta PB es una recta horizontal, $A = (0,4)$, luego $P = (x,4)$, y puesto que

$$4^2 = 4x \Rightarrow x = 4 \Rightarrow P = (4,4)$$

$$\left. \begin{array}{l} |PA| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4 \\ r = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow |PQ| = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$$

(C) Si $|PB| = 2$ entonces $PA \perp AB$.

Sea $P = (x_p, y_p)$. $|PB| = 2 \Rightarrow x_p = 1 \Rightarrow y_p = \pm 2$.

Supongamos que $y_p = 2 \Rightarrow P = (1,2) \Rightarrow B = (-1,2)$. Luego:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PA} = (-1,2) \\ \overrightarrow{AB} = (-1,-2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{AB} = -3 \neq 0, \text{ y por tanto no son proporcionales.}$$

Supongamos que $y_p = -2 \Rightarrow P = (1,-2) \Rightarrow B = (-1,-2)$. Luego:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PA} = (-1,6) \\ \overrightarrow{AB} = (-1,-2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{AB} = -11 \neq 0, \text{ y por tanto no son proporcionales.}$$

(D) Existen dos únicos puntos P de la parábola tales que $|PA| = |PB|$. Cierto.

Por las propiedades focales de la parábola, $B \in l \Rightarrow |PB| = |PF|$.

Aplicando la Desigualdad Triangular,

$|PA| = |PB| \Leftrightarrow |PA| = |PF| \Rightarrow$ El punto P pertenece a la mediatriz del segmento AF .

La recta AF tiene por ecuación $y = -4x + 4$, luego su mediatriz tiene pendiente $1/4$

El punto medio del segmento AF es $(1/2, 2)$, luego la ecuación de la mediatriz será

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{15}{8} = \frac{2x + 15}{8}$$

Puesto que este punto debe pertenecer también a la parábola, $y^2 = 4x$, es decir:

$$\left(\frac{2x+15}{8}\right)^2 = 4x \Leftrightarrow \frac{4x^2 + 60x + 225}{64} = 4x \Leftrightarrow 4x^2 + 60x + 225 = 256x$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 196x + 225 = 0$$

El discriminante de esta ecuación es $\Delta = (-196)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 255 > 0$, luego tiene la ecuación dos soluciones reales, que corresponden a los dos puntos buscados.

11.

Las soluciones correctas son A y D.

(A) Supongamos que $a > 1$.

$$f'(x) = 6x^2 - 6ax = 6x(x - a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases}$$

Hacemos un estudio por intervalos de la derivada.

$x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f'(x) > 0$, función creciente.

$x \in (0, a) \Rightarrow f'(x) < 0$, función decreciente.

$x \in (a, +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0$, función creciente.

$f(0) = 1$, que es un máximo relativo.

$f(a) = 2a^3 - 3a^2 + 1 = 1 - a^3 < 0$, que es un mínimo relativo en $(0, -a^2 + 1)$, bajo el eje X.

Por ser una función polinómica de tercer grado con coeficiente principal positivo, sabemos que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Por lo tanto podemos garantizar que la función tendrá un único cero en $(-\infty, 0)$, otro único cero en $(0, a)$ y un único cero en $(a, +\infty)$, es decir, que el enunciado es cierto.

(B)

$$f'(x) = 6x^2 - 6ax = 6x(x - a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases}$$

$$f''(x) = 12x - 6a$$

$$a < 0 \Rightarrow f''(0) = -6a > 0$$

Luego aplicando el criterio de la segunda derivada, podemos asegurar que la función tiene un mínimo relativo en $x = 0$. La afirmación es falsa.

(C)

Supongamos que existen valores de a y b para los que $x = b$ es el eje de simetría de la curva $y = f(x)$.

Esto quiere decir que, para cualquier valor x' , $f(b - x') = f(b + x')$.

Tomando $x = b + x' \Rightarrow x' = x - b \Rightarrow b - x' = b - x + b = 2b - x$ y la igualdad anterior queda $f(x) = f(2b - x)$. Sustituyendo en la función:

$$2x^3 - 3ax^2 + 1 = 2(2b - x)^3 - 3a(2b - x)^2 + 1$$

Desarrollando la expresión de la derecha obtenemos un polinomio de tercer grado de la forma $-2x^3 + \dots$, llegando a contradicción. Luego la afirmación es falsa.

$$(D) f(1) = 2 \cdot 1^3 - 3a \cdot 1^2 + 1 = 2 - 3a + 1 = 3 - 3a$$

Supongamos que $(1, 3 - 3a)$ es un centro de simetría para esta función.

$$f(1+x) - (3-3a) = -(f(1-x) - (3-3a)) \Leftrightarrow$$

$$f(1+x) - (3-3a) = -f(1-x) + (3-3a) \Leftrightarrow$$

$$f(1+x) + f(1-x) = (3-3a) + (3-3a) = 6-6a$$

Si tomamos $x' = 1+x \Rightarrow x = x'-1 \Rightarrow 1-x = 1-x'+1 = 2-x'$, luego la expresión anterior es equivalente a

$$f(x) + f(2-x) = 6-6a.$$

Es decir:

$$6-6a = f(x) + f(2-x) = 2x^3 - 3ax^2 + 1 + 2(2-x)^3 - 3a(2-x)^2 + 1 =$$

$$= (12-6a)x^2 + (12a-24)x + 18-12a$$

Y por tanto

$$\begin{cases} 12-6a = 0 \\ 12a-24 = 0 \\ 18-12a = 6-6a \end{cases} \Rightarrow a = 2$$

Luego para $a = 2$ se cumple el enunciado, y por tanto la afirmación es correcta.

Segundo método: Se puede aplicar el hecho de que toda función polinómica de tercer grado tiene como centro de simetría el punto en el que la segunda derivada es cero.

$$f''(x) = 12x - 6a = 0 \Leftrightarrow x = a/2.$$

Luego forzosamente $a/2 = 1 \Leftrightarrow a = 2$.

12.

$$a_n = a_{n-1} + k$$

$$7 = a_3 + a_4 = a_2 + k + a_3 + k = a_2 + a_3 + 2k = a_2 + a_5$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} a_2 + a_5 = 7 \\ 3a_2 + a_5 = 5 \end{cases} \Rightarrow a_2 = -1, a_5 = 8$$

$$8 = a_5 = a_2 + 3k = -1 + 3k \Rightarrow k = 3 \Rightarrow a_1 = -4$$

$$S_{10} = 10a_1 + \frac{10 \cdot 9}{2}k = 95$$

13.

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{4}{1 - (\sqrt{2} + 1)} = \frac{-4}{\sqrt{2}}$$

Por otro lado, $\sin^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + \beta) = 1$

Resolviendo el sistema anterior obtenemos las siguientes posibilidades:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{-2\sqrt{2}}{3}, \cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \cos(\alpha + \beta) = \frac{-1}{3}$$

La primera opción determina un ángulo $\alpha + \beta$ del cuarto cuadrante y la segunda opción determina un ángulo $\alpha + \beta$ del segundo cuadrante.

Si α pertenece al tercer cuadrante y β pertenece al primer cuadrante, su suma $\alpha + \beta$ no puede pertenecer al segundo cuadrante, luego la única opción posible aceptable es la primera:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{-2\sqrt{2}}{3}, \cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}$$

14.

Una vez escogida una casilla de la fila 1, tengo 3 opciones de la fila 2, y después tengo 2 opciones para la fila 3, y 1 única opción para la fila 4. Luego tengo $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ posibles opciones.

(11,22,33,44),(11,22,34,43),(11,22,33,44),(11,22,34,42),(11,24,33,43),(11,24,33, 42),
(12,21,33,44),(12,21,34,43),(12,22,31,44),(12,22,34,40),(12,24,31,43),(12,24,33, 40),
(13,21,33,44),(13,21,34,42),(13,22,31,44),(13,22,34,40),(13,24,31,42),(13,24,33, 40),
(15,21,33,43),(15,21,33,42),(15,22,31,43),(15,22,33,40),(15,22,31,42),(15,22,33, 40)

Observamos que la combinación con suma mayor es (15,21,33,43) cuya suma es $15+21+33+43=112$.

15.

$$(1) \sin A + \sqrt{3} \cos A = 2 \Rightarrow \sin A = 2 - \sqrt{3} \cos A$$

De la igualdad $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ deducimos

$$1 = (2 - \sqrt{3} \cos A)^2 + \cos^2 A = 4 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cos A + 3 \cos^2 A + \cos^2 A \Leftrightarrow$$

$$0 = 3 - 4\sqrt{3} \cos A + 4 \cos^2 A$$

$$\text{Luego } \cos A = \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3}}{2 \cdot 4} = \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = \frac{\pi}{6} \equiv 30^\circ$$

Observación. Otra manera de resolver este ejercicio sería transformando la igualdad del enunciado:

$$\sin A + \sqrt{3} \cos A = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin A + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A = 1 \Leftrightarrow \sin \left(A + \frac{\pi}{3} \right) = 1$$

$$\text{Puesto que } A \in (0, \pi), \text{ se deduce que } A + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right)$$

$$\text{y por tanto } A + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \frac{\pi}{6}$$

$$(2) \sqrt{2} b \sin C = c \sin 2B = c \cdot 2 \sin B \cos B \Leftrightarrow \frac{b}{\sin B} = \frac{2c \cos B}{\sqrt{2} \sin C}$$

Aplicamos el Teorema del Seno:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow B = \frac{\pi}{4} \Rightarrow C = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{12}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Leftrightarrow \frac{2}{\sin(\pi/6)} = \frac{b}{\sin(\pi/4)} \Leftrightarrow b = \frac{2 \sin(\pi/4)}{\sin(\pi/6)} = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{2}{\sin(\pi/6)} = \frac{c}{\sin(7\pi/12)} \Leftrightarrow c = \frac{2\sin(7\pi/12)}{\sin(\pi/6)} = \sqrt{2}(1+\sqrt{3})$$

Perímetro = $2 + 2\sqrt{2} + \sqrt{2}(1+\sqrt{3}) = 2 + 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$.

16.

$$(1) a=1 \Rightarrow f(x) = e^x - x - 1 \Rightarrow f'(x) = e^x - 1 \Rightarrow A = f'(1) = e^1 - 1$$

La recta tangente es $y = Ax + B$, donde $A = f'(1) = e^1 - 1$ y

$$B = f(1) - A \cdot 1 = e^1 - 1 - 1 - (e^1 - 1) = e^1 - 2 - e^1 + 1 = -1$$

Y la recta tangente es $y = (e-1)x - 1$

$$(2) f(x) = e^x - ax - a^3 \Rightarrow f'(x) = e^x - a = 0 \Leftrightarrow e^x = a \Leftrightarrow x = \ln a$$

$f''(x) = e^x$ observamos que $f''(x) = e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, luego podemos garantizar que la función tiene un mínimo relativo en $x = \ln a$. Esta ecuación tiene sentido solo para $a > 0$.

$$\text{En ese caso, } f(\ln a) = e^{\ln a} - a \cdot \ln a - a^3 = a - a \cdot \ln a - a^3 = a(1 - \ln a - a^2) < 0$$

Puesto que $a > 0$ la condición se cumplirá siempre que $1 - \ln a - a^2 < 0 \Leftrightarrow \ln a + a^2 > 1$.

Para resolver esta inecuación estudiemos la función $g(x) = \ln x + x^2$.

$$g(1) = \ln 1 + 1^2 = 0 + 1 = 1$$

y se cumple $g'(x) = \frac{1}{x} + 2x$. Esta función es siempre positiva si $x > 0$, luego

$$\ln a + a^2 > 1 \Leftrightarrow a > 1.$$

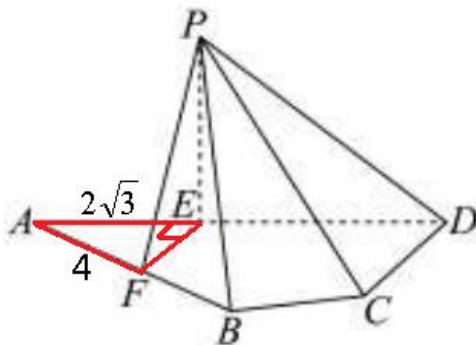
La respuesta es $a \in (1, +\infty)$.

17.

$$a) AE = \frac{2}{5} AD = \frac{2}{5} 5\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$AF = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$$

Luego el triángulo $\triangle AEF$ 30° - 60° - 90° por el criterio LAL.



Luego $\angle AFE = 60^\circ$, $\angle AEF = 90^\circ$ y $EF = 2$.

$$EF \perp AE \Rightarrow \begin{cases} EF \perp EP \\ EF \perp ED \end{cases} \Rightarrow EF \perp EDP \xRightarrow{PD \subset EDP} EF \perp PD$$

b) En primer lugar debemos demostrar que $EP \perp ED$.

Aplicando Pitágoras en el triángulo $\triangle DEC$, $EC^2 = (3\sqrt{3})^2 + 3^2 = 36$

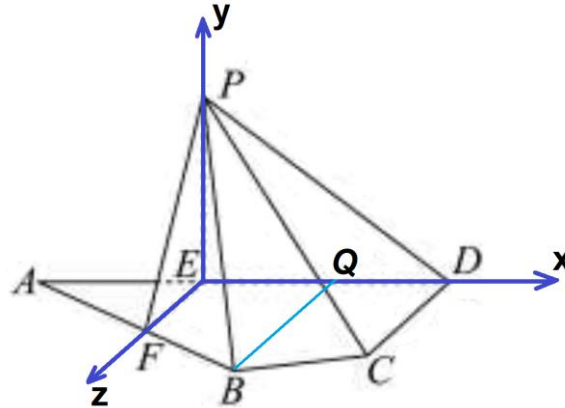
Aplicando el recíproco del Teorema de Pitágoras en el triángulo $\triangle PEC$:

$$(4\sqrt{3})^2 = 48$$

$$(2\sqrt{3})^2 + 6^2 = 12 + 36 = 48$$

Por tanto, $EP \perp EC$.

Para resolver este apartado, sumergimos la figura en $\mathbb{R}^3$:



donde $E = (0,0,0)$

$$D = (3\sqrt{3}, 0, 0)$$

$$P = (0, 2\sqrt{3}, 0)$$

$$F = (0, 0, 2)$$

$$C = (3\sqrt{3}, 0, 3)$$

Para calcular el punto B, trazamos la perpendicular por B a ED, que cortará ED en Q. Los triángulos $\triangle AEF$ y $\triangle AQB$ serán semejantes por Tales, puesto que $EF \parallel QB$.

Sabemos que $AF = FB = 2$, luego

$$BQ = 2FE = 2 \cdot 2 = 4$$

$$AQ = 2AE = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \Rightarrow EQ = AQ - AE = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Así pues, el punto B tiene coordenadas $B = (2\sqrt{3}, 0, 4)$

Determinamos el vector normal asociado al plano PDC:

$$\left. \begin{array}{l} D = (3\sqrt{3}, 0, 0) \\ P = (0, 2\sqrt{3}, 0) \\ C = (3\sqrt{3}, 0, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{DC} = (0, 0, 3) \\ \overrightarrow{DP} = (-3\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 3 \\ -3\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = (-6\sqrt{3}, -9\sqrt{3}, 0) \equiv (2, 3, 0)$$

Determinamos el vector normal asociado al plano PBF:

$$\left. \begin{array}{l} B = (2\sqrt{3}, 0, 4) \\ P = (0, 2\sqrt{3}, 0) \\ F = (0, 0, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{FP} = (0, 2\sqrt{3}, -2) \\ \overrightarrow{FB} = (2\sqrt{3}, 0, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{m} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2\sqrt{3} & -2 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 2 \end{vmatrix} = (4\sqrt{3}, -4\sqrt{3}, -12) \equiv (-1, 1, \sqrt{3})$$

$$\vec{n} \cdot \vec{m} = (2, 3, 0) \cdot (-1, 1, \sqrt{3}) = -2 + 3 = 1$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$|\vec{m}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 1 + 3} = \sqrt{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{1}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{65}} = \frac{\sqrt{65}}{65}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{65}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{65}} = \sqrt{\frac{64}{65}} = \frac{8}{\sqrt{65}} = \frac{8\sqrt{65}}{65}$$

18.

a) Si $p = 0,4$, $q = 0,5$ y A participa en la primera etapa de la competición, ¿cuál es la probabilidad de que el equipo obtenga no menos de 5 puntos?

b) Supongamos que $0 < p < q$.

i) Para maximizar la probabilidad de que el equipo obtenga 15 puntos, ¿quién debería participar en la primera etapa de la competición, el jugador A o el jugador B?

ii) Para maximizar la esperanza matemática del equipo, ¿quién debería participar en la primera etapa de la competición, el jugador A o el jugador B?

a) Si A realiza la primera etapa, la probabilidad de que falle los tres tiros es $0.6^3 = 0.216$

Por lo tanto, la probabilidad de pasar a la segunda etapa es $1 - 0.6^3 = 0.784$.

En la segunda etapa, la probabilidad de que el jugador falle los tres tiros (obtener 0 puntos) es

$$0.5^3 = 0.125$$

Por lo tanto, la probabilidad de obtener no menos de 5 puntos es $1 - 0.5^3 = 0.875$.

Luego la probabilidad de pasar a la segunda etapa y obtener no menos de 5 puntos es $0.784 \cdot 0.875 = 0.686$

b.i)

Supongamos que tira en primer lugar el jugador A.

La probabilidad de pasar a la segunda fase es $1 - (1 - p)^3$.

La probabilidad de obtener 15 puntos en la segunda fase es q^3 .

La probabilidad de pasar a la segunda fase y obtener los 15 puntos será:

$$P_A = (1 - (1 - p)^3) q^3$$

Si tira en primer lugar el jugador B, con el mismo razonamiento, obtenemos que la probabilidad de pasar a la segunda fase y obtener los 15 puntos será:

$$P_B = (1 - (1 - q)^3) p^3.$$

Suponiendo que $0 < p < q \leq 1$, vamos a estudiar P_A y P_B .

$$P_A = (1 - (1 - p)^3) q^3 = q^3 - (q - pq)^3$$

$$P_B = (1 - (1 - q)^3) p^3 = p^3 - (p - pq)^3$$

$$\begin{aligned} P_A - P_B &= q^3 - (q - pq)^3 - p^3 + (p - pq)^3 = \\ &= q^3 - p^3 + (p - pq)^3 - (q - pq)^3 = (*) \end{aligned}$$

Ahora vamos a aplicar la identidad de la diferencia de cubos:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(*) = (q - p)(q^2 + pq + p^2) - (p - pq - q + pq)((p - pq)^2 + (q - pq)(p - pq) + (q - pq)^2) =$$

$$= (q - p)(q^2 + pq + p^2) - (p - q)((p - pq)^2 + (q - pq)(p - pq) + (q - pq)^2) =$$

$$= (p - q)(3p^2q^2 - 3p^2q - 3pq^2) =$$

$$= 3pq(p - q)(pq - p - q) = 3pq(p - q)[(1 - p)(1 - q) - 1] = (**)$$

$$0 < p < q \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} p - q < 0 \\ 0 < 1 - p < 1 \\ 0 < 1 - q < 1 \end{cases} \Rightarrow (1 - p)(1 - q) < 1 \Rightarrow (1 - p)(1 - q) - 1 < 0$$

Por lo tanto

$$(**) = 3pq(p - q)[(1 - p)(1 - q) - 1] > 0 \Rightarrow P_A > P_B$$

y nos interesa que el jugador A participe en la primera etapa de la competición.

b.ii)

Supongamos que tira primero el jugador A. Sea X la variable aleatoria que indica el número de puntos obtenidos en la competición. Está claro que X solo puede valer 0, 5, 10, 15.

$$P(X = 0) = (1 - p)^3 + (1 - (1 - p)^3)(1 - q)^3$$

$$P(X = 5) = (1 - (1 - p)^3) C_3^1 q (1 - q)^2$$

$$P(X = 10) = (1 - (1 - p)^3) C_3^2 q^2 (1 - q)$$

$$P(X = 15) = (1 - (1 - p)^3) q^3$$

y por tanto:

$$E(X) = 15(1 - (1 - p)^3) q = 15(p^3 - 3p^2 + 3p) q$$

Si tira primero el jugador B, y llamamos Y a la variable aleatoria que indica el número de puntos obtenidos en la competición, con un razonamiento similar llegamos a

$$E(Y) = 15(q^3 - 3q^2 + 3q) p$$

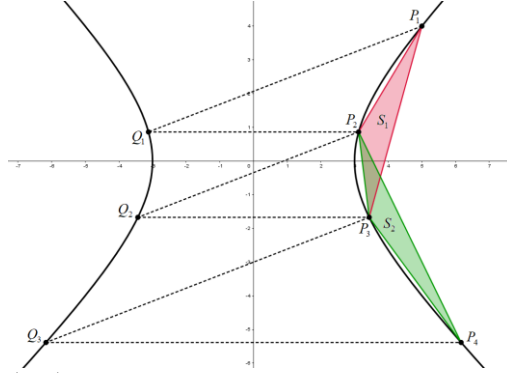
Y por lo tanto

$$E(X) - E(Y) = 15(pq(p + q)(p - q) - 3pq(p - q)) = 15(p - q)pq(p + q - 3)$$

$$0 < p < q \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} p - q < 0 \\ p + q - 3 < 1 + 1 - 3 < 0 \end{cases}$$

Y por tanto $E(X) - E(Y) > 0$ y, como en el caso anterior, nos interesa que A juegue en la primera etapa de la competición.

(1)



Observamos que si $P_1 = (5,4)$ pertenece a la hipérbola, $m = 5^2 - 4^2 = 9$.

La recta que pasa por $P_1 = (5,4)$ y tiene pendiente $1/2$ es $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

Definiendo $Q_1 = (x'_1, y'_1)$, se cumple

$$\left. \begin{array}{l} x'^2_1 - y'^2_1 = 9 \\ y'_1 = \frac{1}{2}x'_1 + \frac{3}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow x'^2_1 - \left(\frac{1}{2}x'_1 + \frac{3}{2} \right)^2 = 9 \Rightarrow x'_1 = -3, 5$$

Tomamos la segunda solución $x'_1 = -3 \Rightarrow y'_1 = \frac{1}{2}(-3) + \frac{3}{2} = 0$

$Q_1 = (-3,0) \Rightarrow P_2 = (3,0) \Rightarrow x_2 = 3, y_2 = 0$.

(2) Sea $P_n = (x_n, y_n)$. La recta que pasa por P_n y tiene pendiente k es

$y = k(x - x_n) + y_n$. Sea $Q_n = (x'_n, y'_n)$

Entonces x'_n es la segunda solución de la ecuación

$$\begin{aligned} 9 &= x^2 - (k(x - x_n) + y_n)^2 = \\ &= x^2 - (k^2(x - x_n)^2 + 2k(x - x_n)y_n + y_n^2) = x^2 - k^2(x - x_n)^2 - 2k(x - x_n)y_n - y_n^2 = \\ &= x^2 - k^2x^2 + 2k^2x_nx - k^2x_n^2 - 2ky_nx + 2kx_ny_n - y_n^2 = \\ &= (1 - k^2)x^2 + (2k^2x_n - 2ky_n)x - k^2x_n^2 + 2kx_ny_n - y_n^2 = \\ &= (1 - k^2)x^2 + 2k(kx_n - y_n)x - (kx_n - y_n)^2 \Leftrightarrow \\ 0 &= (1 - k^2)x^2 + 2k(kx_n - y_n)x - (kx_n - y_n)^2 - 9 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$0 = x^2 + \frac{2k(kx_n - y_n)}{1 - k^2}x - \frac{(kx_n - y_n)^2 + 9}{1 - k^2}$$

Aplicando las Fórmulas de Vieta, la suma de las dos soluciones de esta ecuación es igual al coeficiente del monomio de grado 1 cambiado de signo, es decir:

$$x'_n + x_n = -\frac{2k(kx_n - y_n)}{1 - k^2} \Leftrightarrow x'_n = -\frac{2k(kx_n - y_n)}{1 - k^2} - x_n = \frac{-2k(kx_n - y_n) - x_n(1 - k^2)}{1 - k^2} \Leftrightarrow$$

$$x'_n = \frac{2ky_n - (k^2 + 1)x_n}{1 - k^2} = -x_{n+1}$$

Y por tanto

$$\begin{aligned}
y'_n &= k \left(\frac{2k y_n - (k^2 + 1)x_n}{1 - k^2} - x_n \right) + y_n = \\
&= \frac{2k^2 y_n - k^3 x_n - kx_n + y_n - kx_n - k^2 x_n + k^3 x_n}{1 - k^2} = \frac{k^2 y_n - 2kx_n + y_n}{1 - k^2} = y_{n+1}
\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - y_{n+1} &= -x'_n - y'_n = -\frac{2k y_n - (k^2 + 1)x_n}{1 - k^2} - \frac{k^2 y_n - 2kx_n + y_n}{1 - k^2} = \\
&= \frac{-2k y_n + (k^2 + 1)x_n - k^2 y_n + 2kx_n - y_n}{1 - k^2} = \\
&= \frac{x_n(k^2 + 2k + 1) - y_n(k^2 + 2k + 1)}{1 - k^2} = \frac{(k + 1)^2(x_n - y_n)}{1 - k^2} = \frac{(k + 1)(x_n - y_n)}{1 - k}
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\frac{x_{n+1} - y_{n+1}}{x_n - y_n} = \frac{k + 1}{1 - k}, \text{ tal y como queríamos ver.}$$

(3)

De la igualdad anterior $x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{k + 1}{1 - k}(x_n - y_n)$ se deduce que

$$x_{n+m} - y_{n+m} = \left(\frac{k + 1}{1 - k} \right)^m (x_n - y_n) \text{ para cualquier } m \geq 1.$$

Por otro lado, la sucesión $\{x_n - y_n\}$ es también una sucesión geométrica, pero esta es de razón $\frac{1 - k}{1 + k}$. En efecto,

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \frac{x_n + k^2 x_n - 2k y_n}{1 - k^2} \\
y_{n+1} &= \frac{y_n + k^2 y_n - 2k x_n}{1 - k^2} \\
x_{n+1} + y_{n+1} &= \frac{x_n + k^2 x_n - 2k y_n + y_n + k^2 y_n - 2k x_n}{1 - k^2} = \\
&= \frac{(1 - 2k + k^2)(x_n + y_n)}{1 - k^2} = \frac{(k - 1)^2(x_n + y_n)}{(1 - k)(1 + k)} = \frac{-(k - 1)(x_n + y_n)}{1 + k} = \frac{(1 - k)(x_n + y_n)}{1 + k}
\end{aligned}$$

De la igualdad

$$x_{n+1} + y_{n+1} = \frac{1 - k}{1 + k}(x_n + y_n) \text{ se deduce que}$$

$$x_{n+m} + y_{n+m} = \left(\frac{1 - k}{1 + k} \right)^m (x_n + y_n) \text{ para cualquier } m \geq 1.$$

De las igualdades anteriores se deduce que

$$\begin{aligned}
& x_n y_{n+m} - y_n x_{n+m} = \\
& = \frac{1}{2}((x_n x_{n+m} - y_n y_{n+m}) + (x_n y_{n+m} - y_n x_{n+m})) - \frac{1}{2}((x_n x_{n+m} - y_n y_{n+m}) - (x_n y_{n+m} - y_n x_{n+m})) = \\
& = \frac{1}{2}(x_n - y_n)(x_{n+m} + y_{n+m}) - \frac{1}{2}(x_n + y_n)(x_{n+m} - y_{n+m}) = \\
& = \frac{1}{2}(x_n - y_n) \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^m (x_n + y_n) - \frac{1}{2}(x_n + y_n) \left(\frac{1+k}{1-k} \right)^m (x_n - y_n) = \\
& = \frac{1}{2}(x_n^2 - y_n^2) \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^m - \frac{1}{2}(x_n^2 - y_n^2) \left(\frac{1+k}{1-k} \right)^m = \\
& = \frac{1}{2}(x_n^2 - y_n^2) \left[\left(\frac{1-k}{1+k} \right)^m - \left(\frac{1+k}{1-k} \right)^m \right] = \frac{9}{2} \left[\left(\frac{1-k}{1+k} \right)^m - \left(\frac{1+k}{1-k} \right)^m \right]
\end{aligned}$$

Con los resultados anteriores ya podemos abordar el problema de calcular el área de los triángulos $\Delta P_n P_{n+1} P_{n+2}$. Para ello aplicaremos la “fórmula de la lazada”,

$$\begin{aligned}
2S_n &= 2[\Delta P_n P_{n+1} P_{n+2}] = x_n y_{n+1} + x_{n+1} y_{n+2} + x_{n+2} y_n - x_{n+1} y_n - x_{n+2} y_{n+1} - x_n y_{n+2} = \\
&= x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_n + x_{n+1} y_{n+2} - x_{n+2} y_{n+1} + x_{n+2} y_n - x_n y_{n+2} = \\
&= (x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_n) + (x_{n+1} y_{n+2} - x_{n+2} y_{n+1}) - (x_n y_{n+2} - x_{n+2} y_n) = \\
&= \frac{9}{2} \left[\left(\frac{1-k}{1+k} \right)^1 - \left(\frac{1+k}{1-k} \right)^1 \right] + \frac{9}{2} \left[\left(\frac{1-k}{1+k} \right)^1 - \left(\frac{1+k}{1-k} \right)^1 \right] - \frac{9}{2} \left[\left(\frac{1-k}{1+k} \right)^2 - \left(\frac{1+k}{1-k} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

y este valor es independiente de n, tal y como queríamos ver.

2024 新高考 II 卷高考真题

数 学



本试卷共 10 页，19 小题，满分 150 分.

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.
3. 填空题和解答题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内. 写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.
4. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交.

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的. 请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

1. 已知 $z = -1 - i$ ，则 $|z| =$ ()
A. 0 B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2
2. 已知命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, |x+1| > 1$ ；命题 $q: \exists x > 0, x^3 = x$ ，则 ()
A. p 和 q 都是真命题 B. $\neg p$ 和 q 都是真命题
C. p 和 $\neg q$ 都是真命题 D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题
3. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 1, |\vec{a} + 2\vec{b}| = 2$ ，且 $(\vec{b} - 2\vec{a}) \perp \vec{b}$ ，则 $|\vec{b}| =$ ()
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

4. 某农业研究部门在面积相等的 100 块稻田上种植一种新型水稻，得到各块稻田的亩产量（单位：kg）并部分整理下表

亩产量	[900, 950)	[950, 1000)	[1000, 1050)	[1100, 1150)	[1150, 1200)
频数	6	12	18	24	10

据表中数据，结论中正确的是 ()

- A. 100 块稻田亩产量的中位数小于 1050kg
 - B. 100 块稻田中亩产量低于 1100kg 的稻田所占比例超过 80%
 - C. 100 块稻田亩产量的极差介于 200kg 至 300kg 之间
 - D. 100 块稻田亩产量的平均值介于 900kg 至 1000kg 之间
5. 已知曲线 $C: x^2 + y^2 = 16$ ($y > 0$)，从 C 上任意一点 P 向 x 轴作垂线段 PP' ， P' 为垂足，则线段 PP'

的中点 M 的轨迹方程为 ()

A. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \ (y > 0)$

B. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1 \ (y > 0)$

C. $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1 \ (y > 0)$

D. $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{8} = 1 \ (y > 0)$



6. 设函数 $f(x) = a(x+1)^2 - 1$, $g(x) = \cos x + 2ax$, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 恰有一个交点, 则 $a =$ ()

A. -1

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

7. 已知正三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{52}{3}$, $AB = 6$, $A_1B_1 = 2$, 则 A_1A 与平面 ABC 所成角的正切值为 ()

A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. 2

D. 3

8. 设函数 $f(x) = (x+a)\ln(x+b)$, 若 $f(x) \geq 0$, 则 $a^2 + b^2$ 的最小值为 ()

A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 1

二、多项选择题: 本大题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得 6 分, 选对但不全的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 对于函数 $f(x) = \sin 2x$ 和 $g(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{4})$, 下列正确的有 ()

A. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同零点

B. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同最大值

C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最小正周期

D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像有相同的对称轴

10. 抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的准线为 l , P 为 C 上的动点, 过 P 作 $\odot A: x^2 + (y-4)^2 = 1$ 的一条切线, Q 为切点, 过 P 作 l 的垂线, 垂足为 B , 则 ()

A. l 与 $\odot A$ 相切

B. 当 P, A, B 三点共线时, $|PQ| = \sqrt{15}$

C. 当 $|PB| = 2$ 时, $PA \perp AB$

D. 满足 $|PA| = |PB|$ 的点 P 有且仅有 2 个

11. 设函数 $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 1$, 则 ()

A. 当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 有三个零点

B. 当 $a < 0$ 时, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

C. 存在 a, b , 使得 $x = b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的对称轴

D. 存在 a , 使得点 $(1, f(1))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的对称中心

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_3 + a_4 = 7$ ， $3a_2 + a_5 = 5$ ，则 $S_{10} =$ _____.

13. 已知 α 为第一象限角， β 为第三象限角， $\tan \alpha + \tan \beta = 4$ ， $\tan \alpha \tan \beta = \sqrt{2} + 1$ ，则 $\sin(\alpha + \beta) =$ _____.

14. 在如图的 4×4 方格表中选 4 个方格，要求每行和每列均恰有一个方格被选中，则共有_____种选法，在所有符合上述要求的选法中，选中方格中的 4 个数之和的最大值是_____.

11	21	31	40
12	22	33	42
13	22	33	43
15	24	34	44



四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $\sin A + \sqrt{3} \cos A = 2$.

(1) 求 A .

(2) 若 $a = 2$ ， $\sqrt{2}b \sin C = c \sin 2B$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长.

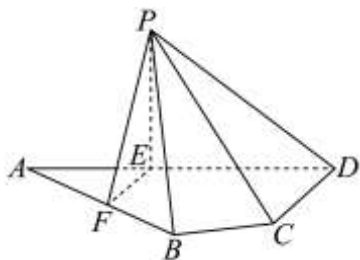
16. 已知函数 $f(x) = e^x - ax - a^3$.

(1) 当 $a = 1$ 时，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程；

(2) 若 $f(x)$ 有极小值，且极小值小于 0，求 a 的取值范围.

17. 如图，平面四边形 $ABCD$ 中， $AB = 8$ ， $CD = 3$ ， $AD = 5\sqrt{3}$ ， $\angle ADC = 90^\circ$ ， $\angle BAD = 30^\circ$ ，点 E ，

F 满足 $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AD}$ ， $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ ，将 $\triangle AEF$ 沿 EF 对折至 $\triangle PEF$ ，使得 $PC = 4\sqrt{3}$.



(1) 证明： $EF \perp PD$ ；

(2) 求面 PCD 与面 PBF 所成的二面角的正弦值.

18. 某投篮比赛分为两个阶段，每个参赛队由两名队员组成，比赛具体规则如下：第一阶段由参赛队中一名队员投篮 3 次，若 3 次都未投中，则该队被淘汰，比赛成员为 0 分；若至少投中一次，则该队进入第二阶段，由该队的另一名队员投篮 3 次，每次投中得 5 分，未投中得 0 分. 该队的比赛成绩为第二阶段的得分总和. 某参赛队由甲、乙两名队员组成，设甲每次投中的概率为 p ，乙每次投中的概率为 q ，各次投中与否相互独立.

(1) 若 $p = 0.4$, $q = 0.5$, 甲参加第一阶段比赛, 求甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分的概率.

(2) 假设 $0 < p < q$,

(i) 为使得甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率最大, 应该由谁参加第一阶段比赛?

(ii) 为使得甲、乙, 所在队的比赛成绩的数学期望最大, 应该由谁参加第一阶段比赛?

19. 已知双曲线 $C: x^2 - y^2 = m (m > 0)$, 点 $P_1(5, 4)$ 在 C 上, k 为常数, $0 < k < 1$. 按照如下方式依次构造点 $P_n (n = 2, 3, \dots)$, 过 P_{n-1} 作斜率为 k 的直线与 C 的左支交于点 Q_{n-1} , 令 P_n 为 Q_{n-1} 关于 y 轴的对称点, 记 P_n 的坐标为 (x_n, y_n) .

(1) 若 $k = \frac{1}{2}$, 求 x_2, y_2 ;

(2) 证明: 数列 $\{x_n - y_n\}$ 是公比为 $\frac{1+k}{1-k}$ 的等比数列;

(3) 设 S_n 为 $\triangle P_n P_{n+1} P_{n+2}$ 的面积, 证明: 对任意的正整数 n , $S_n = S_{n+1}$.



参考答案

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的。请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上。

1. 【答案】C

【分析】由复数模的计算公式直接计算即可。

【详解】若 $z = -1 - i$ ，则 $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ 。

故选：C



2. 【答案】B

【分析】对于两个命题而言，可分别取 $x = -1$ 、 $x = 1$ ，再结合命题及其否定的真假性相反即可得解。

【详解】对于 p 而言，取 $x = -1$ ，则有 $|x + 1| = 0 < 1$ ，故 p 是假命题， $\neg p$ 是真命题，

对于 q 而言，取 $x = 1$ ，则有 $x^3 = 1^3 = 1 = x$ ，故 q 是真命题， $\neg q$ 是假命题，

综上， $\neg p$ 和 q 都是真命题。

故选：B.

3. 【答案】B

【分析】由 $(\vec{b} - 2\vec{a}) \perp \vec{b}$ 得 $\vec{b}^2 = 2\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，结合 $|\vec{a}| = 1, |\vec{a} + 2\vec{b}| = 2$ ，得 $1 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2 = 1 + 6\vec{b}^2 = 4$ ，由此即可得解。

【详解】因为 $(\vec{b} - 2\vec{a}) \perp \vec{b}$ ，所以 $(\vec{b} - 2\vec{a}) \cdot \vec{b} = 0$ ，即 $\vec{b}^2 = 2\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，

又因为 $|\vec{a}| = 1, |\vec{a} + 2\vec{b}| = 2$ ，

所以 $1 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2 = 1 + 6\vec{b}^2 = 4$ ，

从而 $|\vec{b}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

故选：B.

4. 【答案】C

【分析】计算出前三段频数即可判断 A；计算出低于 1100kg 的频数，再计算比例即可判断 B；根据极差计算方法即可判断 C；根据平均值计算公式即可判断 D。

【详解】对于 A，根据频数分布表可知， $6 + 12 + 18 = 36 < 50$ ，

所以亩产量的中位数不小于 1050kg，故 A 错误；

对于 B，亩产量不低于 1100kg 的频数为 $24 + 10 = 34$ ，

所以低于 1100kg 的稻田占比为 $\frac{100 - 34}{100} = 66\%$ ，故 B 错误；

对于 C，稻田亩产量的极差最大为 $1200 - 900 = 300$ ，最小为 $1150 - 950 = 200$ ，故 C 正确；

对于 D, 由频数分布表可得, 亩产量在 $[1050, 1100)$ 的频数为 $100 - (6 + 12 + 18 + 24 + 10) = 30$,

所以平均值为 $\frac{1}{100} \times (6 \times 925 + 12 \times 975 + 18 \times 1025 + 30 \times 1075 + 24 \times 1125 + 10 \times 1175) = 1067$, 故 D 错

误.

故选: C.

5. 【答案】A

【分析】设点 $M(x, y)$, 由题意, 根据中点的坐标表示可得 $P(x, 2y)$, 代入圆的方程即可求解.

【详解】设点 $M(x, y)$, 则 $P(x, y_0), P'(x, 0)$,

因为 M 为 PP' 的中点, 所以 $y_0 = 2y$, 即 $P(x, 2y)$,

又 P 在圆 $x^2 + y^2 = 16 (y > 0)$ 上,

所以 $x^2 + 4y^2 = 16 (y > 0)$, 即 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 (y > 0)$,

即点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 (y > 0)$.

故选: A

6. 【答案】D

【分析】解法一: 令 $F(x) = ax^2 + a - 1, G(x) = \cos x$, 分析可知曲线 $y = F(x)$ 与 $y = G(x)$ 恰有一个交点, 结合偶函数的对称性可知该交点只能在 y 轴上, 即可得 $a = 2$, 并代入检验即可; 解法二: 令

$h(x) = f(x) - g(x), x \in (-1, 1)$, 可知 $h(x)$ 为偶函数, 根据偶函数的对称性可知 $h(x)$ 的零点只能为 0, 即可得 $a = 2$, 并代入检验即可.

【详解】解法一: 令 $f(x) = g(x)$, 即 $a(x+1)^2 - 1 = \cos x + 2ax$, 可得 $ax^2 + a - 1 = \cos x$,

令 $F(x) = ax^2 + a - 1, G(x) = \cos x$,

原题意等价于当 $x \in (-1, 1)$ 时, 曲线 $y = F(x)$ 与 $y = G(x)$ 恰有一个交点,

注意到 $F(x), G(x)$ 均为偶函数, 可知该交点只能在 y 轴上,

可得 $F(0) = G(0)$, 即 $a - 1 = 1$, 解得 $a = 2$,

若 $a = 2$, 令 $F(x) = G(x)$, 可得 $2x^2 + 1 - \cos x = 0$

因为 $x \in (-1, 1)$, 则 $2x^2 \geq 0, 1 - \cos x \geq 0$, 当且仅当 $x = 0$ 时, 等号成立,

可得 $2x^2 + 1 - \cos x \geq 0$, 当且仅当 $x = 0$ 时, 等号成立,

则方程 $2x^2 + 1 - \cos x = 0$ 有且仅有一个实根 0, 即曲线 $y = F(x)$ 与 $y = G(x)$ 恰有一个交点,

所以 $a = 2$ 符合题意;

综上所述: $a = 2$.

解法二: 令 $h(x) = f(x) - g(x) = ax^2 + a - 1 - \cos x, x \in (-1, 1)$,



原题意等价于 $h(x)$ 有且仅有一个零点,

因为 $h(-x) = a(-x)^2 + a - 1 - \cos(-x) = ax^2 + a - 1 - \cos x = h(x)$,

则 $h(x)$ 为偶函数,

根据偶函数的对称性可知 $h(x)$ 的零点只能为 0,

即 $h(0) = a - 2 = 0$, 解得 $a = 2$,

若 $a = 2$, 则 $h(x) = 2x^2 + 1 - \cos x, x \in (-1, 1)$,

又因为 $2x^2 \geq 0, 1 - \cos x \geq 0$ 当且仅当 $x = 0$ 时, 等号成立,

可得 $h(x) \geq 0$, 当且仅当 $x = 0$ 时, 等号成立,

即 $h(x)$ 有且仅有一个零点 0, 所以 $a = 2$ 符合题意;

故选: D.

7. 【答案】B

【分析】解法一: 根据台体的体积公式可得三棱台的高 $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, 做辅助线, 结合正三棱台的结构特征求

得 $AM = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, 进而根据线面夹角的定义分析求解; 解法二: 将正三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 补成正三棱锥

$P - ABC$, A_1A 与平面 ABC 所成角即为 PA 与平面 ABC 所成角, 根据比例关系可得 $V_{P-ABC} = 18$, 进而可求正三棱锥 $P - ABC$ 的高, 即可得结果.

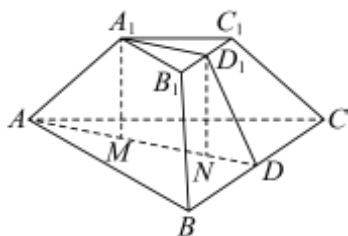
【详解】解法一: 分别取 BC, B_1C_1 的中点 D, D_1 , 则 $AD = 3\sqrt{3}, A_1D_1 = \sqrt{3}$,

可知 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}, S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$,

设正三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 的为 h ,

则 $V_{ABC-A_1B_1C_1} = \frac{1}{3} (9\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{9\sqrt{3} \times \sqrt{3}}) h = \frac{52}{3}$, 解得 $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$,

如图, 分别过 A_1, D_1 作底面垂线, 垂足为 M, N , 设 $AM = x$,



则 $AA_1 = \sqrt{AM^2 + A_1M^2} = \sqrt{x^2 + \frac{16}{3}}$, $DN = AD - AM - MN = 2\sqrt{3} - x$,



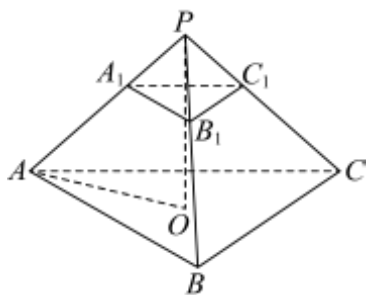
$$\text{可得 } DD_1 = \sqrt{DN^2 + D_1N^2} = \sqrt{(2\sqrt{3}-x)^2 + \frac{16}{3}},$$

$$\text{结合等腰梯形 } BCC_1B_1 \text{ 可得 } BB_1^2 = \left(\frac{6-2}{2}\right)^2 + DD_1^2,$$

$$\text{即 } x^2 + \frac{16}{3} = (2\sqrt{3}-x)^2 + \frac{16}{3} + 4, \text{ 解得 } x = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{所以 } A_1A \text{ 与平面 } ABC \text{ 所成角的正切值为 } \tan \angle A_1AD = \frac{A_1M}{AM} = 1;$$

解法二：将正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 补成正三棱锥 $P-ABC$ ，



则 A_1A 与平面 ABC 所成角即为 PA 与平面 ABC 所成角，

$$\text{因为 } \frac{PA_1}{PA} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{1}{3}, \text{ 则 } \frac{V_{P-A_1B_1C_1}}{V_{P-ABC}} = \frac{1}{27},$$

$$\text{可知 } V_{ABC-A_1B_1C_1} = \frac{26}{27} V_{P-ABC} = \frac{52}{3}, \text{ 则 } V_{P-ABC} = 18,$$

$$\text{设正三棱锥 } P-ABC \text{ 的高为 } d, \text{ 则 } V_{P-ABC} = \frac{1}{3} d \times \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18, \text{ 解得 } d = 2\sqrt{3},$$

取底面 ABC 的中心为 O ，则 $PO \perp$ 底面 ABC ，且 $AO = 2\sqrt{3}$ ，

$$\text{所以 } PA \text{ 与平面 } ABC \text{ 所成角的正切值 } \tan \angle PAO = \frac{PO}{AO} = 1.$$

故选：B.

8. 【答案】C

【分析】解法一：由题意可知： $f(x)$ 的定义域为 $(-b, +\infty)$ ，分类讨论 $-a$ 与 $-b, 1-b$ 的大小关系，结合符号分析判断，即可得 $b = a+1$ ，代入可得最值；解法二：根据对数函数的性质分析 $\ln(x+b)$ 的符号，进而可得 $x+a$ 的符号，即可得 $b = a+1$ ，代入可得最值.

【详解】解法一：由题意可知： $f(x)$ 的定义域为 $(-b, +\infty)$ ，

令 $x+a=0$ 解得 $x=-a$ ；令 $\ln(x+b)=0$ 解得 $x=1-b$ ；

若 $-a \leq -b$ ，当 $x \in (-b, 1-b)$ 时，可知 $x+a > 0, \ln(x+b) < 0$ ，

此时 $f(x) < 0$ ，不合题意；



若 $-b < -a < 1-b$, 当 $x \in (-a, 1-b)$ 时, 可知 $x+a > 0, \ln(x+b) < 0$,

此时 $f(x) < 0$, 不合题意;

若 $-a = 1-b$, 当 $x \in (-b, 1-b)$ 时, 可知 $x+a < 0, \ln(x+b) < 0$, 此时 $f(x) > 0$;

当 $x \in [1-b, +\infty)$ 时, 可知 $x+a \geq 0, \ln(x+b) \geq 0$, 此时 $f(x) \geq 0$;

可知若 $-a = 1-b$, 符合题意;

若 $-a > 1-b$, 当 $x \in (1-b, -a)$ 时, 可知 $x+a < 0, \ln(x+b) > 0$,

此时 $f(x) < 0$, 不合题意;

综上所述: $-a = 1-b$, 即 $b = a+1$,

则 $a^2 + b^2 = a^2 + (a+1)^2 = 2\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$, 当且仅当 $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$ 时, 等号成立,

所以 $a^2 + b^2$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$;

解法二: 由题意可知: $f(x)$ 的定义域为 $(-b, +\infty)$,

令 $x+a=0$ 解得 $x=-a$; 令 $\ln(x+b)=0$ 解得 $x=1-b$;

则当 $x \in (-b, 1-b)$ 时, $\ln(x+b) < 0$, 故 $x+a \leq 0$, 所以 $1-b+a \leq 0$;

$x \in (1-b, +\infty)$ 时, $\ln(x+b) > 0$, 故 $x+a \geq 0$, 所以 $1-b+a \geq 0$;

故 $1-b+a=0$, 则 $a^2 + b^2 = a^2 + (a+1)^2 = 2\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$,

当且仅当 $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$ 时, 等号成立,

所以 $a^2 + b^2$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

故选: C.

【点睛】关键点点睛: 分别求 $x+a=0$ 、 $\ln(x+b)=0$ 的根, 以根和函数定义域为临界, 比较大小分类讨论, 结合符号性分析判断.

二、多项选择题: 本大题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得 6 分, 选对但不全的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 【答案】BC

【分析】根据正弦函数的零点, 最值, 周期公式, 对称轴方程逐一分析每个选项即可.

【详解】A 选项, 令 $f(x) = \sin 2x = 0$, 解得 $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 即为 $f(x)$ 零点,

令 $g(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$, 解得 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbf{Z}$, 即为 $g(x)$ 零点,

显然 $f(x), g(x)$ 零点不同, A 选项错误;



B 选项, 显然 $f(x)_{\max} = g(x)_{\max} = 1$, B 选项正确;

C 选项, 根据周期公式, $f(x), g(x)$ 的周期均为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$, C 选项正确;

D 选项, 根据正弦函数的性质 $f(x)$ 的对称轴满足 $2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$,

$g(x)$ 的对称轴满足 $2x - \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}, k \in \mathbf{Z}$,

显然 $f(x), g(x)$ 图像的对称轴不同, D 选项错误.

故选: BC

10. 【答案】ABD



【分析】A 选项, 抛物线准线为 $x = -1$, 根据圆心到准线的距离来判断; B 选项, P, A, B 三点共线时, 先求出 P 的坐标, 进而得出切线长; C 选项, 根据 $|PB| = 2$ 先算出 P 的坐标, 然后验证 $k_{PA}k_{AB} = -1$ 是否成立; D 选项, 根据抛物线的定义, $|PB| = |PF|$, 于是问题转化成 $|PA| = |PF|$ 的 P 点的存在性问题, 此时考察 AF 的中垂线和抛物线的交点个数即可, 亦可直接设 P 点坐标进行求解.

【详解】A 选项, 抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线为 $x = -1$,

$\odot A$ 的圆心 $(0, 4)$ 到直线 $x = -1$ 的距离显然是 1, 等于圆的半径,

故准线 l 和 $\odot A$ 相切, A 选项正确;

B 选项, P, A, B 三点共线时, 即 $PA \perp l$, 则 P 的纵坐标 $y_P = 4$,

由 $y_P^2 = 4x_P$, 得到 $x_P = 4$, 故 $P(4, 4)$,

此时切线长 $|PQ| = \sqrt{|PA|^2 - r^2} = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$, B 选项正确;

C 选项, 当 $|PB| = 2$ 时, $x_P = 1$, 此时 $y_P^2 = 4x_P = 4$, 故 $P(1, 2)$ 或 $P(1, -2)$,

当 $P(1, 2)$ 时, $A(0, 4), B(-1, 2)$, $k_{PA} = \frac{4-2}{0-1} = -2$, $k_{AB} = \frac{4-2}{0-(-1)} = 2$,

不满足 $k_{PA}k_{AB} = -1$;

当 $P(1, -2)$ 时, $A(0, 4), B(-1, 2)$, $k_{PA} = \frac{4-(-2)}{0-1} = -6$, $k_{AB} = \frac{4-(-2)}{0-(-1)} = 6$,

不满足 $k_{PA}k_{AB} = -1$;

于是 $PA \perp AB$ 不成立, C 选项错误;

D 选项, 方法一: 利用抛物线定义转化

根据抛物线的定义, $|PB| = |PF|$, 这里 $F(1, 0)$,

于是 $|PA| = |PB|$ 时 P 点的存在性问题转化成 $|PA| = |PF|$ 时 P 点的存在性问题,

$A(0,4), F(1,0)$, AF 中点 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, AF 中垂线的斜率为 $-\frac{1}{k_{AF}} = \frac{1}{4}$,

于是 AF 的中垂线方程为: $y = \frac{2x+15}{8}$, 与抛物线 $y^2 = 4x$ 联立可得 $y^2 - 16y + 30 = 0$,

$\Delta = 16^2 - 4 \times 30 = 136 > 0$, 即 AF 的中垂线和抛物线有两个交点,

即存在两个 P 点, 使得 $|PA| = |PF|$, D 选项正确.

方法二: (设点直接求解)

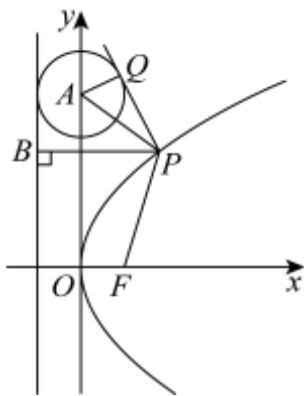
设 $P\left(\frac{t^2}{4}, t\right)$, 由 $PB \perp l$ 可得 $B(-1, t)$, 又 $A(0, 4)$, 又 $|PA| = |PB|$,

根据两点间的距离公式, $\sqrt{\frac{t^4}{16} + (t-4)^2} = \frac{t^2}{4} + 1$, 整理得 $t^2 - 16t + 30 = 0$,

$\Delta = 16^2 - 4 \times 30 = 136 > 0$, 则关于 t 的方程有两个解,

即存在两个这样的 P 点, D 选项正确.

故选: ABD



11. 【答案】AD

【分析】A 选项, 先分析出函数的极值点为 $x=0, x=a$, 根据零点存在定理和极值的符号判断出 $f(x)$ 在 $(-1, 0), (0, a), (a, 2a)$ 上各有一个零点; B 选项, 根据极值和导函数符号的关系进行分析; C 选项, 假设存在这样的 a, b , 使得 $x=b$ 为 $f(x)$ 的对称轴, 则 $f(x) = f(2b-x)$ 为恒等式, 据此计算判断; D 选项, 若存在这样的 a , 使得 $(1, 3-3a)$ 为 $f(x)$ 的对称中心, 则 $f(x) + f(2-x) = 6-6a$, 据此进行计算判断, 亦可利用拐点结论直接求解.

【详解】A 选项, $f'(x) = 6x^2 - 6ax = 6x(x-a)$, 由于 $a > 1$,

故 $x \in (-\infty, 0) \cup (a, +\infty)$ 时 $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0), (a, +\infty)$ 上单调递增,

$x \in (0, a)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取到极大值, 在 $x=a$ 处取到极小值,

由 $f(0) = 1 > 0$, $f(a) = 1 - a^3 < 0$, 则 $f(0)f(a) < 0$,

根据零点存在定理 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上有一个零点,



又 $f(-1) = -1 - 3a < 0$, $f(2a) = 4a^3 + 1 > 0$, 则 $f(-1)f(0) < 0$, $f(a)f(2a) < 0$,

则 $f(x)$ 在 $(-1, 0), (a, 2a)$ 上各有一个零点, 于是 $a > 1$ 时, $f(x)$ 有三个零点, A 选项正确;

B 选项, $f'(x) = 6x(x - a)$, $a < 0$ 时, $x \in (a, 0)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

$x \in (0, +\infty)$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

此时 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取到极小值, B 选项错误;

C 选项, 假设存在这样的 a, b , 使得 $x = b$ 为 $f(x)$ 的对称轴,

即存在这样的 a, b 使得 $f(x) = f(2b - x)$,

即 $2x^3 - 3ax^2 + 1 = 2(2b - x)^3 - 3a(2b - x)^2 + 1$,

根据二项式定理, 等式右边 $(2b - x)^3$ 展开式含有 x^3 的项为 $2C_3^3(2b)^0(-x)^3 = -2x^3$,

于是等式左右两边 x^3 的系数都不相等, 原等式不可能恒成立,

于是不存在这样的 a, b , 使得 $x = b$ 为 $f(x)$ 的对称轴, C 选项错误;

D 选项,

方法一: 利用对称中心的表达式化简

$f(1) = 3 - 3a$, 若存在这样的 a , 使得 $(1, 3 - 3a)$ 为 $f(x)$ 的对称中心,

则 $f(x) + f(2 - x) = 6 - 6a$, 事实上,

$f(x) + f(2 - x) = 2x^3 - 3ax^2 + 1 + 2(2 - x)^3 - 3a(2 - x)^2 + 1 = (12 - 6a)x^2 + (12a - 24)x + 18 - 12a$,

于是 $6 - 6a = (12 - 6a)x^2 + (12a - 24)x + 18 - 12a$

即 $\begin{cases} 12 - 6a = 0 \\ 12a - 24 = 0 \\ 18 - 12a = 6 - 6a \end{cases}$, 解得 $a = 2$, 即存在 $a = 2$ 使得 $(1, f(1))$ 是 $f(x)$ 的对称中心, D 选项正确.

方法二: 直接利用拐点结论

任何三次函数都有对称中心, 对称中心的横坐标是二阶导数的零点,

$f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 1$, $f'(x) = 6x^2 - 6ax$, $f''(x) = 12x - 6a$,

由 $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$, 于是该三次函数的对称中心为 $\left(\frac{a}{2}, f\left(\frac{a}{2}\right)\right)$,

由题意 $(1, f(1))$ 也是对称中心, 故 $\frac{a}{2} = 1 \Leftrightarrow a = 2$,

即存在 $a = 2$ 使得 $(1, f(1))$ 是 $f(x)$ 的对称中心, D 选项正确.

故选: AD

【点睛】结论点睛: (1) $f(x)$ 的对称轴为 $x = b \Leftrightarrow f(x) = f(2b - x)$; (2) $f(x)$ 关于 (a, b) 对称 $\Leftrightarrow f(x) + f(2a - x) = 2b$; (3) 任何三次函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 都有对称中心, 对称中心是三次



函数的拐点，对称中心的横坐标是 $f''(x)=0$ 的解，即 $\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$ 是三次函数的对称中心

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 【答案】95

【分析】利用等差数列通项公式得到方程组，解出 a_1, d ，再利用等差数列的求和公式即可得到答案.

【详解】因为数列 a_n 为等差数列，则由题意得 $\begin{cases} a_1 + 2d + a_1 + 3d = 7 \\ 3(a_1 + d) + a_1 + 4d = 5 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a_1 = -4 \\ d = 3 \end{cases}$ ，

$$\text{则 } S_{10} = 10a_1 + \frac{10 \times 9}{2}d = 10 \times (-4) + 45 \times 3 = 95.$$

故答案为：95.

13. 【答案】 $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$



【分析】法一：根据两角和与差的正切公式得 $\tan(\alpha + \beta) = -2\sqrt{2}$ ，再缩小 $\alpha + \beta$ 的范围，最后结合同角的平方和关系即可得到答案；法二：利用弦化切的方法即可得到答案.

【详解】法一：由题意得 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{4}{1 - (\sqrt{2} + 1)} = -2\sqrt{2}$ ，

因为 $\alpha \in \left(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right), \beta \in \left(2m\pi + \pi, 2m\pi + \frac{3\pi}{2}\right), k, m \in \mathbb{Z}$ ，

则 $\alpha + \beta \in ((2m + 2k)\pi + \pi, (2m + 2k)\pi + 2\pi), k, m \in \mathbb{Z}$ ，

又因为 $\tan(\alpha + \beta) = -2\sqrt{2} < 0$ ，

则 $\alpha + \beta \in \left((2m + 2k)\pi + \frac{3\pi}{2}, (2m + 2k)\pi + 2\pi\right), k, m \in \mathbb{Z}$ ，则 $\sin(\alpha + \beta) < 0$ ，

则 $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = -2\sqrt{2}$ ，联立 $\sin^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + \beta) = 1$ ，解得 $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 。

法二：因为 α 为第一象限角， β 为第三象限角，则 $\cos \alpha > 0, \cos \beta < 0$ ，

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}, \quad \cos \beta = \frac{\cos \beta}{\sqrt{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta}} = \frac{-1}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}},$$

则 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \cos \alpha \cos \beta (\tan \alpha + \tan \beta)$

$$= 4 \cos \alpha \cos \beta = \frac{-4}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \sqrt{1 + \tan^2 \beta}} = \frac{-4}{\sqrt{(\tan \alpha + \tan \beta)^2 + (\tan \alpha \tan \beta - 1)^2}} = \frac{-4}{\sqrt{4^2 + 2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

故答案为： $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 。

14. 【答案】 ①. 24 ②. 112

【分析】由题意可知第一、二、三、四列分别有 4、3、2、1 个方格可选；利用列举法写出所有的可能结果，即可求解.

【详解】由题意知，选 4 个方格，每行和每列均恰有一个方格被选中，

则第一列有 4 个方格可选，第二列有 3 个方格可选，

第三列有 2 个方格可选，第四列有 1 个方格可选，

所以共有 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 种选法；

每种选法可标记为 (a, b, c, d) ， a, b, c, d 分别表示第一、二、三、四列的数字，

则所有的可能结果为：

$(11, 22, 33, 44), (11, 22, 34, 43), (11, 22, 33, 44), (11, 22, 34, 42), (11, 24, 33, 43), (11, 24, 33, 42)$ ，

$(12, 21, 33, 44), (12, 21, 34, 43), (12, 22, 31, 44), (12, 22, 34, 40), (12, 24, 31, 43), (12, 24, 33, 40)$ ，

$(13, 21, 33, 44), (13, 21, 34, 42), (13, 22, 31, 44), (13, 22, 34, 40), (13, 24, 31, 42), (13, 24, 33, 40)$ ，

$(15, 21, 33, 43), (15, 21, 33, 42), (15, 22, 31, 43), (15, 22, 33, 40), (15, 22, 31, 42), (15, 22, 33, 40)$ ，

所以选中的方格中， $(15, 21, 33, 43)$ 的 4 个数之和最大，为 $15 + 21 + 33 + 43 = 112$ 。

故答案为：24；112

【点睛】关键点点睛：解决本题的关键是确定第一、二、三、四列分别有 4、3、2、1 个方格可选，利用列举法写出所有的可能结果.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 【答案】(1) $A = \frac{\pi}{6}$

(2) $2 + \sqrt{6} + 3\sqrt{2}$

【分析】(1) 根据辅助角公式对条件 $\sin A + \sqrt{3} \cos A = 2$ 进行化简处理即可求解，常规方法还可利用同角三角函数的关系解方程组，亦可利用导数，向量数量积公式，万能公式解决；

(2) 先根据正弦定理边角互化算出 B ，然后根据正弦定理算出 b, c 即可得出周长.

【小问 1 详解】

方法一：常规方法（辅助角公式）

由 $\sin A + \sqrt{3} \cos A = 2$ 可得 $\frac{1}{2} \sin A + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A = 1$ ，即 $\sin(A + \frac{\pi}{3}) = 1$ ，

由于 $A \in (0, \pi) \Rightarrow A + \frac{\pi}{3} \in (\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ ，故 $A + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ ，解得 $A = \frac{\pi}{6}$

方法二：常规方法（同角三角函数的基本关系）

由 $\sin A + \sqrt{3} \cos A = 2$ ，又 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ，消去 $\sin A$ 得到：

$4\cos^2 A - 4\sqrt{3} \cos A + 3 = 0 \Leftrightarrow (2\cos A - \sqrt{3})^2 = 0$ ，解得 $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，



又 $A \in (0, \pi)$, 故 $A = \frac{\pi}{6}$

方法三: 利用极值点求解

设 $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x (0 < x < \pi)$, 则 $f(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) (0 < x < \pi)$,

显然 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, $f(x)_{\max} = 2$, 注意到 $f(A) = \sin A + \sqrt{3} \cos A = 2 = 2 \sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right)$,

$f(x)_{\max} = f(A)$, 在开区间 $(0, \pi)$ 上取到最大值, 于是 $x = A$ 必定是极值点,

即 $f'(A) = 0 = \cos A - \sqrt{3} \sin A$, 即 $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

又 $A \in (0, \pi)$, 故 $A = \frac{\pi}{6}$



方法四: 利用向量数量积公式 (柯西不等式)

设 $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$, $\vec{b} = (\sin A, \cos A)$, 由题意, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sin A + \sqrt{3} \cos A = 2$,

根据向量的数量积公式, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 2 \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$,

则 $2 \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 2 \Leftrightarrow \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 1$, 此时 $\vec{a}, \vec{b}$ 同向共线,

根据向量共线条件, $1 \cdot \cos A = \sqrt{3} \cdot \sin A \Leftrightarrow \tan A = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

又 $A \in (0, \pi)$, 故 $A = \frac{\pi}{6}$

方法五: 利用万能公式求解

设 $t = \tan \frac{A}{2}$, 根据万能公式, $\sin A + \sqrt{3} \cos A = 2 = \frac{2t}{1+t^2} + \frac{\sqrt{3}(1-t^2)}{1+t^2}$,

整理可得, $t^2 - 2(2 - \sqrt{3})t + (2 - \sqrt{3})^2 = 0 = (t - (2 - \sqrt{3}))^2$,

解得 $\tan \frac{A}{2} = t = 2 - \sqrt{3}$, 根据二倍角公式, $\tan A = \frac{2t}{1-t^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

又 $A \in (0, \pi)$, 故 $A = \frac{\pi}{6}$

【小问 2 详解】

由题设条件和正弦定理

$\sqrt{2}b \sin C = c \sin 2B \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin B \sin C = 2 \sin C \sin B \cos B$,

又 $B, C \in (0, \pi)$, 则 $\sin B \sin C \neq 0$, 进而 $\cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 得到 $B = \frac{\pi}{4}$,

于是 $C = \pi - A - B = \frac{7\pi}{12}$,

$$\sin C = \sin(\pi - A - B) = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4},$$

由正弦定理可得, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 即 $\frac{2}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{b}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{c}{\sin \frac{7\pi}{12}}$,

解得 $b = 2\sqrt{2}, c = \sqrt{6} + \sqrt{2}$,

故 $\triangle ABC$ 的周长为 $2 + \sqrt{6} + 3\sqrt{2}$

16. 【答案】(1) $(e-1)x - y - 1 = 0$

(2) $(1, +\infty)$



【分析】(1) 求导, 结合导数的几何意义求切线方程;

(2) 解法一: 求导, 分析 $a \leq 0$ 和 $a > 0$ 两种情况, 利用导数判断单调性和极值, 分析可得 $a^2 + \ln a - 1 > 0$, 构造函数解不等式即可; 解法二: 求导, 可知 $f'(x) = e^x - a$ 有零点, 可得 $a > 0$, 进而利用导数求 $f(x)$ 的单调性和极值, 分析可得 $a^2 + \ln a - 1 > 0$, 构造函数解不等式即可.

【小问 1 详解】

当 $a = 1$ 时, 则 $f(x) = e^x - x - 1$, $f'(x) = e^x - 1$,

可得 $f(1) = e - 2$, $f'(1) = e - 1$,

即切点坐标为 $(1, e - 2)$, 切线斜率 $k = e - 1$,

所以切线方程为 $y - (e - 2) = (e - 1)(x - 1)$, 即 $(e - 1)x - y - 1 = 0$.

【小问 2 详解】

解法一: 因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f'(x) = e^x - a$,

若 $a \leq 0$, 则 $f'(x) \geq 0$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

可知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 无极值, 不合题意;

若 $a > 0$, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x > \ln a$; 令 $f'(x) < 0$, 解得 $x < \ln a$;

可知 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 内单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 内单调递增,

则 $f(x)$ 有极小值 $f(\ln a) = a - a \ln a - a^3$, 无极大值,

由题意可得: $f(\ln a) = a - a \ln a - a^3 < 0$, 即 $a^2 + \ln a - 1 > 0$,

构建 $g(a) = a^2 + \ln a - 1, a > 0$, 则 $g'(a) = 2a + \frac{1}{a} > 0$,

可知 $g(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增, 且 $g(1) = 0$,

不等式 $a^2 + \ln a - 1 > 0$ 等价于 $g(a) > g(1)$, 解得 $a > 1$,

所以 a 的取值范围为 $(1, +\infty)$;

解法二：因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，且 $f'(x) = e^x - a$ ，

若 $f(x)$ 有极小值，则 $f'(x) = e^x - a$ 有零点，

令 $f'(x) = e^x - a = 0$ ，可得 $e^x = a$ ，

可知 $y = e^x$ 与 $y = a$ 有交点，则 $a > 0$ ，

若 $a > 0$ ，令 $f'(x) > 0$ ，解得 $x > \ln a$ ；令 $f'(x) < 0$ ，解得 $x < \ln a$ ；

可知 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 内单调递减，在 $(\ln a, +\infty)$ 内单调递增，

则 $f(x)$ 有极小值 $f(\ln a) = a - a \ln a - a^3$ ，无极大值，符合题意，

由题意可得： $f(\ln a) = a - a \ln a - a^3 < 0$ ，即 $a^2 + \ln a - 1 > 0$ ，

构建 $g(a) = a^2 + \ln a - 1, a > 0$ ，

因为则 $y = a^2, y = \ln a - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增，

可知 $g(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增，且 $g(1) = 0$ ，

不等式 $a^2 + \ln a - 1 > 0$ 等价于 $g(a) > g(1)$ ，解得 $a > 1$ ，

所以 a 的取值范围为 $(1, +\infty)$ 。



17. 【答案】(1) 证明见解析

$$(2) \frac{8\sqrt{65}}{65}$$

【分析】(1) 由题意，根据余弦定理求得 $EF = 2$ ，利用勾股定理的逆定理可证得 $EF \perp AD$ ，则 $EF \perp PE, EF \perp DE$ ，结合线面垂直的判定定理与性质即可证明；

(2) 由 (1)，根据线面垂直的判定定理与性质可证明 $PE \perp ED$ ，建立如图空间直角坐标系 $E - xyz$ ，利用空间向量法求解面面角即可。

【小问 1 详解】

$$\text{由 } AB = 8, AD = 5\sqrt{3}, \overline{AE} = \frac{2}{5}\overline{AD}, \overline{AF} = \frac{1}{2}\overline{AB},$$

得 $AE = 2\sqrt{3}, AF = 4$ ，又 $\angle BAD = 30^\circ$ ，在 $\triangle AEF$ 中，

$$\text{由余弦定理得 } EF = \sqrt{AE^2 + AF^2 - 2AE \cdot AF \cos \angle BAD} = \sqrt{16 + 12 - 2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2,$$

所以 $AE^2 + EF^2 = AF^2$ ，则 $AE \perp EF$ ，即 $EF \perp AD$ ，

所以 $EF \perp PE, EF \perp DE$ ，又 $PE \cap DE = E, PE, DE \subset \text{平面 } PDE$ ，

所以 $EF \perp \text{平面 } PDE$ ，又 $PD \subset \text{平面 } PDE$ ，

故 $EF \perp PD$ ；

【小问 2 详解】

连接 CE ，由 $\angle ADC = 90^\circ, ED = 3\sqrt{3}, CD = 3$ ，则 $CE^2 = ED^2 + CD^2 = 36$ ，

在 $\triangle PEC$ 中, $PC = 4\sqrt{3}, PE = 2\sqrt{3}, EC = 6$, 得 $EC^2 + PE^2 = PC^2$,
 所以 $PE \perp EC$, 由(1)知 $PE \perp EF$, 又 $EC \cap EF = E, EC, EF \subset$ 平面 $ABCD$,
 所以 $PE \perp$ 平面 $ABCD$, 又 $ED \subset$ 平面 $ABCD$,
 所以 $PE \perp ED$, 则 PE, EF, ED 两两垂直, 建立如图空间直角坐标系 $E-xyz$,
 则 $E(0, 0, 0), P(0, 0, 2\sqrt{3}), D(0, 3\sqrt{3}, 0), C(3, 3\sqrt{3}, 0), F(2, 0, 0), A(0, -2\sqrt{3}, 0)$,

由 F 是 AB 的中点, 得 $B(4, 2\sqrt{3}, 0)$,

所以 $\overrightarrow{PC} = (3, 3\sqrt{3}, -2\sqrt{3}), \overrightarrow{PD} = (0, 3\sqrt{3}, -2\sqrt{3}), \overrightarrow{PB} = (4, 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}), \overrightarrow{PF} = (2, 0, -2\sqrt{3})$,

设平面 PCD 和平面 PBF 的一个法向量分别为 $\vec{n} = (x_1, y_1, z_1), \vec{m} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 3x_1 + 3\sqrt{3}y_1 - 2\sqrt{3}z_1 = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PD} = 3\sqrt{3}y_1 - 2\sqrt{3}z_1 = 0 \end{cases}, \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{PB} = 4x_2 + 2\sqrt{3}y_2 - 2\sqrt{3}z_2 = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{PF} = 2x_2 - 2\sqrt{3}z_2 = 0 \end{cases},$$

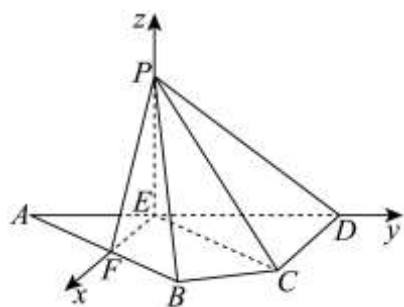
令 $y_1 = 2, x_2 = \sqrt{3}$, 得 $x_1 = 0, z_1 = 3, y_2 = -1, z_2 = 1$,

所以 $\vec{n} = (0, 2, 3), \vec{m} = (\sqrt{3}, -1, 1)$,

$$\text{所以 } |\cos \vec{m}, \vec{n}| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}} = \frac{\sqrt{65}}{65},$$

设平面 PCD 和平面 PBF 所成角为 θ , 则 $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{8\sqrt{65}}{65}$,

即平面 PCD 和平面 PBF 所成角的正弦值为 $\frac{8\sqrt{65}}{65}$.



18. 【答案】(1) 0.686

(2) (i) 由甲参加第一阶段比赛; (i) 由甲参加第一阶段比赛;

【分析】(1) 根据对立事件的求法和独立事件的乘法公式即可得到答案;

(2) (i) 首先各自计算出 $P_{\text{甲}} = [1 - (1-p)^3]q^3$, $P_{\text{乙}} = [1 - (1-q)^3] \cdot p^3$, 再作差因式分解即可判断;

(ii) 首先得到 X 和 Y 的所有可能取值, 再按步骤列出分布列, 计算出各自期望, 再次作差比较大小即可.

【小问 1 详解】

甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分, 则甲第一阶段至少投中 1 次, 乙第二阶段也至少投中 1 次,

$\therefore$ 比赛成绩不少于 5 分的概率 $P = (1 - 0.6^3)(1 - 0.5^3) = 0.686$.

【小问 2 详解】

(i) 若甲先参加第一阶段比赛, 则甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率为 $P_{\text{甲}} = [1 - (1 - p)^3] q^3$,

若乙先参加第一阶段比赛, 则甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率为 $P_{\text{乙}} = [1 - (1 - q)^3] \cdot p^3$,

$\because 0 < p < q$,

$$\begin{aligned} \therefore P_{\text{甲}} - P_{\text{乙}} &= q^3 - (q - pq)^3 - p^3 + (p - pq)^3 \\ &= (q - p)(q^2 + pq + p^2) + (p - q) \cdot [(p - pq)^2 + (q - pq)^2 + (p - pq)(q - pq)] \\ &= (p - q)(3p^2q^2 - 3p^2q - 3pq^2) \\ &= 3pq(p - q)(pq - p - q) = 3pq(p - q)[(1 - p)(1 - q) - 1] > 0, \end{aligned}$$

$\therefore P_{\text{甲}} > P_{\text{乙}}$, 应该由甲参加第一阶段比赛.

(ii) 若甲先参加第一阶段比赛, 数学成绩 X 的所有可能取值为 0, 5, 10, 15,

$$P(X = 0) = (1 - p)^3 + [1 - (1 - p)^3] \cdot (1 - q)^3,$$

$$P(X = 5) = [1 - (1 - p)^3] \cdot C_3^1 q \cdot (1 - q)^2,$$

$$P(X = 10) = [1 - (1 - p)^3] \cdot C_3^2 q^2 (1 - q),$$

$$P(X = 15) = [1 - (1 - p)^3] \cdot q^3,$$

$$\therefore E(X) = 15[1 - (1 - p)^3] q = 15(p^3 - 3p^2 + 3p) \cdot q$$

记乙先参加第一阶段比赛, 数学成绩 Y 的所有可能取值为 0, 5, 10, 15,

$$\text{同理 } E(Y) = 15(q^3 - 3q^2 + 3q) \cdot p$$

$$\begin{aligned} \therefore E(X) - E(Y) &= 15[pq(p + q)(p - q) - 3pq(p - q)] \\ &= 15(p - q)pq(p + q - 3), \end{aligned}$$

因为 $0 < p < q$, 则 $p - q < 0$, $p + q - 3 < 1 + 1 - 3 < 0$,

则 $(p - q)pq(p + q - 3) > 0$,

$\therefore$ 应该由甲参加第一阶段比赛.

【点睛】 关键点点睛: 本题第二问的关键是计算出相关概率和期望, 采用作差法并因式分解从而比较出大小关系, 最后得到结论.

19. **【答案】** (1) $x_2 = 3$, $y_2 = 0$

(2) 证明见解析 (3) 证明见解析

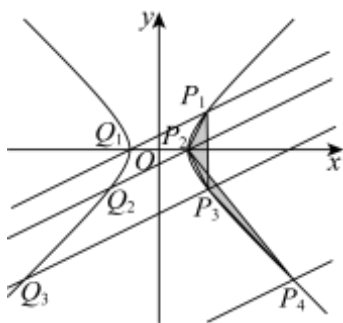
【分析】 (1) 直接根据题目中的构造方式计算出 P_2 的坐标即可;

(2) 根据等比数列的定义即可验证结论;

(3) 思路一: 使用平面向量数量积和等比数列工具, 证明 S_n 的取值为与 n 无关的定值即可. 思路二: 使用等差数列工具, 证明 S_n 的取值为与 n 无关的定值即可.



【小问 1 详解】



由已知有 $m = 5^2 - 4^2 = 9$, 故 C 的方程为 $x^2 - y^2 = 9$.

当 $k = \frac{1}{2}$ 时, 过 $P_1(5, 4)$ 且斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线为 $y = \frac{x+3}{2}$, 与 $x^2 - y^2 = 9$ 联立得到 $x^2 - \left(\frac{x+3}{2}\right)^2 = 9$.

解得 $x = -3$ 或 $x = 5$, 所以该直线与 C 的不同于 P_1 的交点为 $Q_1(-3, 0)$, 该点显然在 C 的左支上.

故 $P_2(3, 0)$, 从而 $x_2 = 3$, $y_2 = 0$.

【小问 2 详解】

由于过 $P_n(x_n, y_n)$ 且斜率为 k 的直线为 $y = k(x - x_n) + y_n$, 与 $x^2 - y^2 = 9$ 联立, 得到方程

$$x^2 - (k(x - x_n) + y_n)^2 = 9.$$

展开即得 $(1 - k^2)x^2 - 2k(y_n - kx_n)x - (y_n - kx_n)^2 - 9 = 0$, 由于 $P_n(x_n, y_n)$ 已经是直线

$y = k(x - x_n) + y_n$ 和 $x^2 - y^2 = 9$ 的公共点, 故方程必有一根 $x = x_n$.

从而根据韦达定理, 另一根 $x = \frac{2k(y_n - kx_n)}{1 - k^2} - x_n = \frac{2ky_n - x_n - k^2x_n}{1 - k^2}$, 相应的

$$y = k(x - x_n) + y_n = \frac{y_n + k^2y_n - 2kx_n}{1 - k^2}.$$

所以该直线与 C 的不同于 P_n 的交点为 $Q_n\left(\frac{2ky_n - x_n - k^2x_n}{1 - k^2}, \frac{y_n + k^2y_n - 2kx_n}{1 - k^2}\right)$, 而注意到 Q_n 的横坐标亦

可通过韦达定理表示为 $\frac{-(y_n - kx_n)^2 - 9}{(1 - k^2)x_n}$, 故 Q_n 一定在 C 的左支上.

$$\text{所以 } P_{n+1}\left(\frac{x_n + k^2x_n - 2ky_n}{1 - k^2}, \frac{y_n + k^2y_n - 2kx_n}{1 - k^2}\right).$$

$$\text{这就得到 } x_{n+1} = \frac{x_n + k^2x_n - 2ky_n}{1 - k^2}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n + k^2y_n - 2kx_n}{1 - k^2}.$$

$$\text{所以 } x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{x_n + k^2x_n - 2ky_n}{1 - k^2} - \frac{y_n + k^2y_n - 2kx_n}{1 - k^2}$$

$$= \frac{x_n + k^2 x_n + 2kx_n}{1-k^2} - \frac{y_n + k^2 y_n + 2ky_n}{1-k^2} = \frac{1+k^2+2k}{1-k^2} (x_n - y_n) = \frac{1+k}{1-k} (x_n - y_n).$$

再由 $x_1^2 - y_1^2 = 9$ ，就知道 $x_1 - y_1 \neq 0$ ，所以数列 $\{x_n - y_n\}$ 是公比为 $\frac{1+k}{1-k}$ 的等比数列。

【小问 3 详解】

方法一：先证明一个结论：对平面上三个点 U, V, W ，若 $\overrightarrow{UV} = (a, b)$ ， $\overrightarrow{UW} = (c, d)$ ，则

$$S_{\triangle UVW} = \frac{1}{2} |ad - bc|. \quad (\text{若 } U, V, W \text{ 在同一条直线上, 约定 } S_{\triangle UVW} = 0)$$

$$\text{证明: } S_{\triangle UVW} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{UV}| \cdot |\overrightarrow{UW}| \sin \angle UVW = \frac{1}{2} |\overrightarrow{UV}| \cdot |\overrightarrow{UW}| \sqrt{1 - \cos^2 \angle UVW}$$

$$= \frac{1}{2} |\overrightarrow{UV}| \cdot |\overrightarrow{UW}| \sqrt{1 - \left(\frac{\overrightarrow{UV} \cdot \overrightarrow{UW}}{|\overrightarrow{UV}| \cdot |\overrightarrow{UW}|} \right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{UV}|^2 \cdot |\overrightarrow{UW}|^2 - (\overrightarrow{UV} \cdot \overrightarrow{UW})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 c^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2 + b^2 d^2 - a^2 c^2 - b^2 d^2 - 2abcd}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd} = \frac{1}{2} \sqrt{(ad - bc)^2} = \frac{1}{2} |ad - bc|.$$



证毕，回到原题。

$$\text{由于上一小问已经得到 } x_{n+1} = \frac{x_n + k^2 x_n - 2ky_n}{1-k^2}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n + k^2 y_n - 2kx_n}{1-k^2},$$

$$\text{故 } x_{n+1} + y_{n+1} = \frac{x_n + k^2 x_n - 2ky_n}{1-k^2} + \frac{y_n + k^2 y_n - 2kx_n}{1-k^2} = \frac{1+k^2-2k}{1-k^2} (x_n + y_n) = \frac{1-k}{1+k} (x_n + y_n).$$

再由 $x_1^2 - y_1^2 = 9$ ，就知道 $x_1 + y_1 \neq 0$ ，所以数列 $\{x_n + y_n\}$ 是公比为 $\frac{1-k}{1+k}$ 的等比数列。

所以对任意的正整数 m ，都有

$$x_n y_{n+m} - y_n x_{n+m}$$

$$= \frac{1}{2} ((x_n x_{n+m} - y_n y_{n+m}) + (x_n y_{n+m} - y_n x_{n+m})) - \frac{1}{2} ((x_n x_{n+m} - y_n y_{n+m}) - (x_n y_{n+m} - y_n x_{n+m}))$$

$$= \frac{1}{2} (x_n - y_n)(x_{n+m} + y_{n+m}) - \frac{1}{2} (x_n + y_n)(x_{n+m} - y_{n+m})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^m (x_n - y_n)(x_n + y_n) - \frac{1}{2} \left(\frac{1+k}{1-k} \right)^m (x_n + y_n)(x_n - y_n)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1-k}{1+k} \right)^m - \left(\frac{1+k}{1-k} \right)^m \right) (x_n^2 - y_n^2)$$

$$= \frac{9}{2} \left(\left(\frac{1-k}{1+k} \right)^m - \left(\frac{1+k}{1-k} \right)^m \right).$$

而又有 $\overrightarrow{P_{n+1}P_n} = (-(x_{n+1}-x_n), -(y_{n+1}-y_n))$, $\overrightarrow{P_{n+1}P_{n+2}} = (x_{n+2}-x_{n+1}, y_{n+2}-y_{n+1})$,

故利用前面已经证明的结论即得

$$\begin{aligned} S_n &= S_{\triangle P_n P_{n+1} P_{n+2}} = \frac{1}{2} |-(x_{n+1}-x_n)(y_{n+2}-y_{n+1}) + (y_{n+1}-y_n)(x_{n+2}-x_{n+1})| \\ &= \frac{1}{2} |(x_{n+1}-x_n)(y_{n+2}-y_{n+1}) - (y_{n+1}-y_n)(x_{n+2}-x_{n+1})| \\ &= \frac{1}{2} |(x_{n+1}y_{n+2} - y_{n+1}x_{n+2}) + (x_n y_{n+1} - y_n x_{n+1}) - (x_n y_{n+2} - y_n x_{n+2})| \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{9}{2} \left(\frac{1-k}{1+k} - \frac{1+k}{1-k} \right) + \frac{9}{2} \left(\frac{1-k}{1+k} - \frac{1+k}{1-k} \right) - \frac{9}{2} \left(\left(\frac{1-k}{1+k} \right)^2 - \left(\frac{1+k}{1-k} \right)^2 \right) \right|. \end{aligned}$$



这就表明 S_n 的取值是与 n 无关的定值, 所以 $S_n = S_{n+1}$.

方法二: 由于上一小问已经得到 $x_{n+1} = \frac{x_n + k^2 x_n - 2ky_n}{1-k^2}$, $y_{n+1} = \frac{y_n + k^2 y_n - 2kx_n}{1-k^2}$,

$$\text{故 } x_{n+1} + y_{n+1} = \frac{x_n + k^2 x_n - 2ky_n}{1-k^2} + \frac{y_n + k^2 y_n - 2kx_n}{1-k^2} = \frac{1+k^2-2k}{1-k^2} (x_n + y_n) = \frac{1-k}{1+k} (x_n + y_n).$$

再由 $x_1^2 - y_1^2 = 9$, 就知道 $x_1 + y_1 \neq 0$, 所以数列 $\{x_n + y_n\}$ 是公比为 $\frac{1-k}{1+k}$ 的等比数列.

所以对任意的正整数 m , 都有

$$\begin{aligned} &x_n y_{n+m} - y_n x_{n+m} \\ &= \frac{1}{2} ((x_n x_{n+m} - y_n y_{n+m}) + (x_n y_{n+m} - y_n x_{n+m})) - \frac{1}{2} ((x_n x_{n+m} - y_n y_{n+m}) - (x_n y_{n+m} - y_n x_{n+m})) \\ &= \frac{1}{2} (x_n - y_n)(x_{n+m} + y_{n+m}) - \frac{1}{2} (x_n + y_n)(x_{n+m} - y_{n+m}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^m (x_n - y_n)(x_n + y_n) - \frac{1}{2} \left(\frac{1+k}{1-k} \right)^m (x_n + y_n)(x_n - y_n) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1-k}{1+k} \right)^m - \left(\frac{1+k}{1-k} \right)^m \right) (x_n^2 - y_n^2) \\ &= \frac{9}{2} \left(\left(\frac{1-k}{1+k} \right)^m - \left(\frac{1+k}{1-k} \right)^m \right). \end{aligned}$$

$$\text{这就得到 } x_{n+2} y_{n+3} - y_{n+2} x_{n+3} = \frac{9}{2} \left(\frac{1-k}{1+k} - \frac{1+k}{1-k} \right) = x_n y_{n+1} - y_n x_{n+1},$$

$$\text{以及 } x_{n+1}y_{n+3} - y_{n+1}x_{n+3} = \frac{9}{2} \left(\left(\frac{1-k}{1+k} \right)^2 - \left(\frac{1+k}{1-k} \right)^2 \right) = x_n y_{n+2} - y_n x_{n+2}.$$

$$\text{两式相减, 即得 } (x_{n+2}y_{n+3} - y_{n+2}x_{n+3}) - (x_{n+1}y_{n+3} - y_{n+1}x_{n+3}) = (x_n y_{n+1} - y_n x_{n+1}) - (x_n y_{n+2} - y_n x_{n+2}).$$

$$\text{移项得到 } x_{n+2}y_{n+3} - y_n x_{n+2} - x_{n+1}y_{n+3} + y_n x_{n+1} = y_{n+2}x_{n+3} - x_n y_{n+2} - y_{n+1}x_{n+3} + x_n y_{n+1}.$$

$$\text{故 } (y_{n+3} - y_n)(x_{n+2} - x_{n+1}) = (y_{n+2} - y_{n+1})(x_{n+3} - x_n).$$

$$\text{而 } \overrightarrow{P_n P_{n+3}} = (x_{n+3} - x_n, y_{n+3} - y_n), \quad \overrightarrow{P_{n+1} P_{n+2}} = (x_{n+2} - x_{n+1}, y_{n+2} - y_{n+1}).$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{P_n P_{n+3}} \text{ 和 } \overrightarrow{P_{n+1} P_{n+2}} \text{ 平行, 这就得到 } S_{\triangle P_n P_{n+1} P_{n+2}} = S_{\triangle P_{n+1} P_{n+2} P_{n+3}}, \text{ 即 } S_n = S_{n+1}.$$

【点睛】关键点点睛：本题的关键在于将解析几何和数列知识的结合，需要综合运用多方面知识方可得解。

