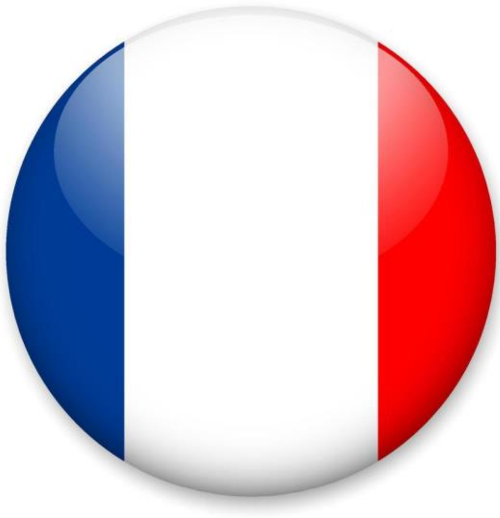
PAU FRANCIA

Baccalauréat général Mathématiques (Metropole)
Convocatoria 2024



Gerard Romo Garrido

Toomates Cooleccción vol. 75

Toomates

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "**licencias digitales**" con las que las editoriales pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo libro, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.

Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de licencias digitales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía**.

El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las editoriales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de unos libros de texto que actualmente son muy mediocres, y no mediante retorcidas técnicas comerciales.

 Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas. **¡Libérate de la tiranía y mediocridad de las editoriales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos**

Problem Solving (en español):

Geometría Axiomática Problemas de Geometría 1 Problemas de Geometría 2 Introducción a la Geometría
Álgebra Teoría de números Combinatoria Probabilidad Trigonometría Desigualdades
Números complejos Funciones

Libros de texto (en catalán):

Nombres (Preàlgebra) Àlgebra Proporcionalitat Mesures geomètriques Geometria analítica
Combinatòria i Probabilitat Estadística Trigonometria Funcions Nombres Complexos
Àlgebra Lineal Geometria Lineal Càlcul Infinitesimal Programació Lineal Mates amb Excel

PAU españolas:

Cataluña TEC Cataluña CCSS Valencia Galicia País Vasco Baleares

PAU internacionales:

Portugal Italia Francia Pearson Edexcel International A Level Cambridge International A Level
International Baccalaureate (IB)

Pruebas de acceso:

ACM4 CFGS PAP

Competiciones matemáticas:

Canguro: España Cataluña Francia USA Reino Unido Austria
USA: Mathcounts AMC 8 10 12 AIME USAJMO USAMO TSTST TST ELMO Putnam
España: OME OMEFL OMEC OMEA OMEM CDP
Europa: OMI Arquimede HMMT BMO Balkan MO JBMO
Internacional: IMO IGO SMT INMO CMO HMMT
AHSME: Book 1 Book 2 Book 3 Book 4 Book 5 Book 6 Book 7 Book 8 Book 9

Otros materiales:

Pizzazz!: Book A Book B Book C Book D Book E Pre-Algebra Algebra , REOIM

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales para facilitar su edición. Descarga en los siguientes enlaces la versión "**.doc**" de este documento:
http://www.toomates.net/biblioteca/Francia2024.doc

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a **toomates@gmail.com**
¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.

Consulta el **catálogo de libros** completo en **http://www.toomates.net**
Descarga toda la biblioteca Toomates en un solo archivo **Aquí** MEGA
Visita mi **Canal de Youtube**: **https://www.youtube.com/c/GerardRomo**
Visita mi **blog:** **https://toomatesbloc.blogspot.com/**

Versión de este documento: **30/08/2024**

Este documento forma parte del siguiente bloque:

Información general.

http://www.toomates.net/biblioteca/Francia.pdf

2024 en español:

http://www.toomates.net/biblioteca/Francia2024.pdf

Compendium de pruebas 2003-2020:

http://www.toomates.net/biblioteca/Francia2.pdf

Compendium de pruebas 2021-2024:

http://www.toomates.net/biblioteca/Francia3.pdf

Sobre la PAU francesa:

https://youtu.be/oxsUqk4M5Ek

Compendiums de pruebas PAU internacionales y privadas:

Portugal: http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal.pdf
Italia: http://www.toomates.net/biblioteca/Italia.pdf
Francia: http://www.toomates.net/biblioteca/Francia.pdf
Pearson Edexcel International A Level: http://www.toomates.net/biblioteca/Edexcel.pdf
Cambridge International A Level: http://www.toomates.net/biblioteca/Cambridge.pdf
International Baccalaureate (IB): http://www.toomates.net/biblioteca/IB.pdf

Compendiums de pruebas PAU españolas:

Cataluña (TEC): http://www.toomates.net/biblioteca/Pautec.pdf
Cataluña (CCSS): http://www.toomates.net/biblioteca/Pauccss.pdf
Valencia: http://www.toomates.net/biblioteca/Valencia.pdf
Galicia: http://www.toomates.net/biblioteca/Galiciapau.pdf
País Vasco: http://www.toomates.net/biblioteca/Paisvascopau.pdf
Baleares: http://www.toomates.net/biblioteca/Balears.pdf

Índice.

BACHILLERATO GENERAL
PRUEBA DE ESPECIALIDAD DOCENTE
SESIÓN 2024
MATEMÁTICAS
Día 1
miércoles 19 de junio de 2024
Duración de la prueba: 4 horas

Se autoriza el uso de calculadora "tipo universitaria" sin memoria.
Se autoriza el uso de la calculadora con modo examen activo.
Tan pronto como se le proporcione este documento, asegúrese de que esté completo.
Este documento tiene 6 páginas numeradas del 1 al 6.

El candidato deberá realizar los cuatro ejercicios propuestos.
Se invita al candidato a incluir en la copia cualquier rastro de investigación, incluso incompleta o fallida, que haya desarrollado.
En la valoración de la copia se tendrán en cuenta la calidad de la redacción, la claridad y precisión del razonamiento. Se valorarán los rastros de investigación, incluso incompletos o infructuosos.

Ejercicio 1 (4 puntos)

Para cada una de las siguientes afirmaciones, indique si es verdadera o falsa. Cada respuesta debe estar justificada. Una respuesta injustificada no gana puntos.

1. Consideramos la función f definida sobre IR por: $f(x) = 5xe^{-x}$.
Denotamos por C_f la curva representativa de f en un sistema de referencia ortonormal.

Afirmación 1:
El eje de abscisas es una asíntota horizontal de la curva C_f .

Afirmación 2:
La función f es solución en IR de la ecuación diferencial (E): $y'+y = 5e^{-x}$.

2. Consideramos las sucesiones (u_n), (v_n) y (w_n), tales que, para cualquier número natural n:

$$u_n \leq v_n \leq w_n .$$

Además, la sucesión (u_n) converge a -1 y la sucesión (w_n) converge a 1.

Afirmación 3:
La sucesión (v_n) converge a un número real l perteneciente al intervalo [−1; 1].

Suponemos además que la sucesión (u_n) es creciente y que la sucesión (w_n) es decreciente.

Afirmación 4:
Para todos los naturales n, se cumple $u_0 \leq v_n \leq w_0$.

Solución paso a paso en vídeo: https://youtu.be/l1uzNMA0x6E

Ejercicio 2 (5 puntos)

Una agencia de marketing estudió la satisfacción del cliente con el servicio al comprar un televisor. Estas compras se realizaron bien a través de internet, en una cadena de tiendas de electrodomésticos o en una gran cadena de supermercados. Las compras por Internet representan el 60% de las ventas, las compras en tiendas de electrodomésticos el 30% de las ventas y en supermercados el 10% de las ventas. Una encuesta muestra que la proporción de clientes satisfechos con el servicio al cliente es:

- 75% para clientes online;
- 90% para clientes de tiendas de electrodomésticos;
- 80% para clientes de supermercados.

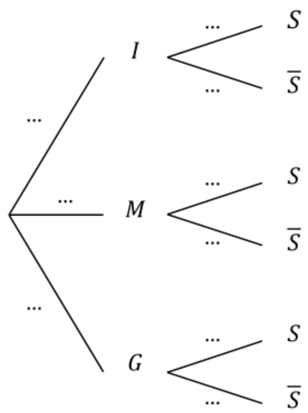
Se elige al azar un cliente que ha adquirido el modelo de televisor en cuestión.

Definimos los siguientes eventos:

- I : “el cliente realizó su compra por internet”;
- M : “el cliente realizó su compra en una tienda de electrodomésticos”;
- G : “el cliente realizó su compra en un supermercado”;
- S : “el cliente está satisfecho con el servicio al cliente”.

Si A es un evento, denotaremos por $\overline{A}$ su evento contrario y $P(A)$ su probabilidad.

1. Reproduce y completa el siguiente árbol.



2. Calcule la probabilidad de que el cliente haya completado su compra en Internet y quede satisfecho con el servicio al cliente.
3. Demuestre que $P(S) = 0.8$.

4. Un cliente está satisfecho con el servicio. ¿Cuál es la probabilidad de que haya realizado su compra por Internet? Dar el resultado redondeado al 10^{-3} más cercano.

5. Para realizar el estudio, la agencia deberá contactar cada día con 30 clientes entre los compradores de televisores. Suponemos que el número de clientes es lo suficientemente grande como para tratar la elección de 30 clientes como un sorteo con descuento. Denotamos por X la variable aleatoria que, a cada muestra de 30 clientes, asocia el número de clientes satisfechos con el servicio al cliente.
a. Justifique que X sigue una ley binomial cuyos parámetros se especificarán.
b. Determine la probabilidad, redondeada al 10^{-3} más cercano, de que al menos 25 clientes estén satisfechos en una muestra de 30 clientes contactados el mismo día.

6. Mediante la resolución de una inecuación, determine el tamaño mínimo de la muestra de clientes a contactar de manera que la probabilidad de que al menos uno de ellos no esté satisfecho sea mayor que 0,99.

7. En las siguientes dos preguntas a. y b., sólo nos interesan las compras por internet.
Cuando un cliente realiza un pedido de televisión, consideramos que el tiempo de entrega del televisor está modelado por una variable aleatoria T igual a la suma de dos variables aleatorias T_1 y T_2.

La variable aleatoria T_1 modela el número entero de días para la entrega del televisor desde un almacén de almacenamiento a una plataforma de distribución.
La variable aleatoria T_2 modela el número entero de días que tarda la entrega del televisor desde esta plataforma al domicilio del cliente.
Admitimos que las variables aleatorias T_1 y T_2 son independientes y suponiendo:

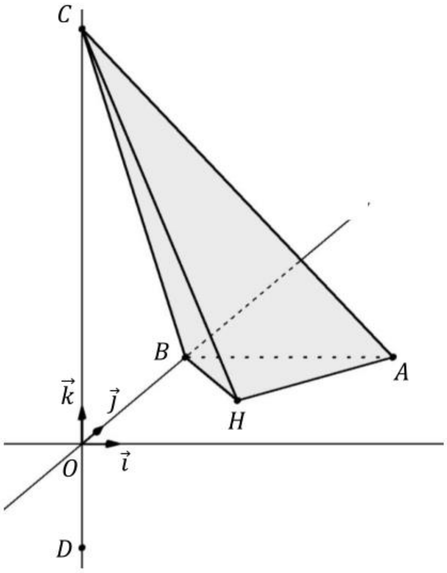
- La esperanza $E(T_1)=4$ y $V(T_1)=2$,
- La esperanza $E(T_2)=3$ y $V(T_2)=1$.

a. Determine la esperanza $E(T)$ y la varianza $V(T)$ de la variable aleatoria T.
b. Un cliente realiza un pedido de un televisor a través de Internet. Justifica que la probabilidad de que reciba su televisor entre 5 y 9 días después de su pedido es mayor o igual a 2/3.

Solución paso a paso en vídeo: https://youtu.be/BrDruiYDiwU

Ejercicio 3 (5 puntos)

El espacio cuenta con un sistema de referencia ortonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
Consideramos los puntos A(5; 5; 0), B(0; 5; 0), C(0; 0; 10) y D(0; 0; −5/2)



1. a. Demuestre que $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ es un vector normal al plano (CAD).

b. Deducir que el plano (CAD) tiene la ecuación cartesiana: $x-y=0$.

2. Consideramos la recta d de representación paramétrica $\begin{cases}x=\dfrac{5}{2}t\\ y=5-\dfrac{5}{2}t\\ x=0\end{cases}$ con $t\in IR$.

a. Sabiendo que la recta d y el plano (CAD) se cortan en un punto H. Justificar que las coordenadas de H son $\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{5}{2};0\right)$.
b. Demuestre que el punto H es la proyección ortogonal de B en el plano (CAD).

3. a. Demuestre que el triángulo ABH es rectángulo en H.
b. Deduce que el área del triángulo ABH es igual a 25/4.

4. a. Demuestre que (CO) es la altura del tetraedro ABCH por C.
b. Deducir el volumen del tetraedro ABCH.

Recordemos que el volumen de un tetraedro viene dado por $V = \frac{1}{3}Bh$ donde B es el área de una base y h es la altura relativa a esta base.

5. Supongamos que el triángulo ABC es rectángulo en B. Deduce de los apartados anteriores la distancia del punto H al plano (ABC).

Solución paso a paso en vídeo: https://youtu.be/Eqcgub0Cq1I

Ejercicio 4 (6 puntos)

Parte A: estudio de la función f.

La función f se define en el intervalo]0; +∞[por: $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x$, donde $\ln$ denota la función logaritmo natural. Admitimos que la función es dos veces diferenciable en]0; +∞[y denotamos por f' su derivada y por f'' su segunda derivada.

1.
a. Determine, justificadamente, los límites de f en 0 y en +∞.
b. Demuestre que para todo x que pertenece a]0; +∞[, tenemos: $f'(x) = \frac{2x+1}{2x}$.
c. Estudie la monotonía de f en]0; +∞[.
d. Estudie la curvatura de f en]0; +∞[.

2.
a. Demuestre que la ecuación $f(x) = 0$ admite en]0; +∞[una solución única que llamaremos α y justifique que pertenece al intervalo [1; 2].
b. Determine el signo de $f(x)$ para $x \in \left]0;+\infty\right[$.
c. Demuestre que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

Parte B: estudio de la función g.

La función g se define en]0; 1] por $g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x$.

Sabemos que la función g es derivable en]0; 1] y denotamos por g' su función derivada.

1. Calcule $g'(x)$ para $x \in \left]0;+\infty\right[$ y verifique que $g'(x) = x\, f\left(\frac{1}{x}\right)$.

2.
a. Demuestre que para todo x que pertenece al intervalo $\left]0;\frac{1}{\alpha}\right[$, se verifica $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$.

b. Aceptamos la siguiente tabla de signos:

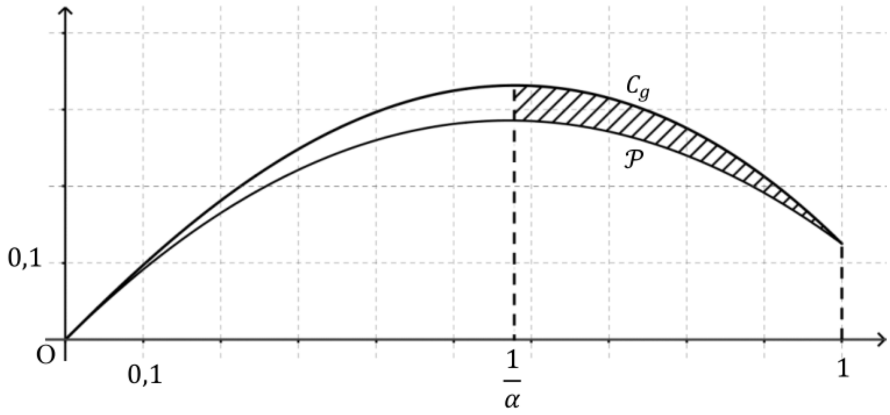
x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
Signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$		$+$	0	$-$	

Deduzca la tabla de variaciones de g en el intervalo]0; 1].
No se solicitan imágenes ni límites.

Parte C: un cálculo de área.

En el siguiente gráfico se muestra:

- La curva C_g de función g;
- La parábola P de ecuación $y = -\frac{7}{8}x^2 + x$ en el intervalo]0; 1].



Deseamos calcular el área A de la región sombreada entre las curvas C_g y P y las rectas de ecuaciones $x = \frac{1}{\alpha}$ y $x = 1$.

Recordemos que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

1.

a. Justifique la posición relativa de las curvas C_g y P en el intervalo]0; 1].

b. Demuestre la igualdad:

$$\int_{1/\alpha}^{1} x^2 \ln x \, dx = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$

2. Deduzca la expresión del área A en función de α.

Solución paso a paso en vídeo: https://youtu.be/ZyK4AfIaeNw

Soluciones 2024 Jour 1.

Ejercicio 1

1. Afirmación 1 verdad. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. Estamos ante una indeterminación $0\cdot\infty$ que se puede resolver mediante órdenes de crecimiento (toda exponencial tiene un orden de crecimiento mayor que una potencial) o mediante Hopital.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x}{e^x}\overset{Hopital}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{e^x}=0.$$

Afirmación 2:

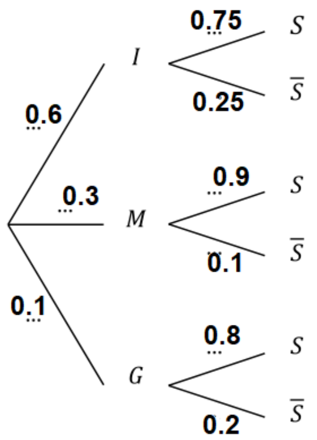
$$\left.\begin{array}{l} y=f(x)=5xe^{-x} \\ y'=f'(x)=5e^{-x}-5xe^{-x}\end{array}\right\}\Rightarrow y'+y=5xe^{-x}+5e^{-x}-5xe^{-x}=5e^{-x}$$, luego es verdad.

Afirmación 3. No es verdad. Basta tomar, por ejemplo. las sucesiones constantes $u_n=-1$ y $w_n=1$, y $v_n=(-1)^n$, que cumple las condiciones pero que ni siquiera es convergente.

Afirmación 4. Por ser (u_n) creciente, $u_o\le u_n$, por ser (w_n) decreciente, $w_n\le w_0$, luego $u_o\le u_n\le v_n\le w_n\le w_0\Rightarrow u_o\le v_n\le w_0$, luego es verdad.

Ejercicio 2

1.



2. $P(I\cap S)=P(I)\cdot P(S\mid I)=0.6\cdot 0.75=0.45$

3. Mediante la fórmula de probabilidad total, $P(S)=0.6\cdot 0.75+0.3\cdot 0.9+0.1\cdot 0.8=0.8$

4. Mediante el Teorema de Bayes, $P(I\mid S)=\dfrac{P(I)\cdot P(S\mid I)}{P(S)}=\dfrac{0.6\cdot 0.75}{0.8}=0.5625\cong 0.563$

5. a. Es la suma de 30 Bernoulli de $p=0.8$, luego una binomial, con $n=30$, $p=0.8$, $X=B(30,0.8)$

b. $P(X\ge 25)=1-P(X<24)\cong 0.427$ (mediante calculadora)

6. $p=0.8$, $X=B(n,0.8)$, la inecuación es $P(X\le n-1)>0.99$.

Para simplificar los cálculos vamos a estudiar los no satisfechos:

$p=0.2$, $X=B(n,0.2)$, la inecuación es $P(X>0)>0.99$.

$0.99>P(X>0)=1-P(X=0)$

Calculamos el punto frontera:

$$0.99=1-P(X=0)\Leftrightarrow P(X=0)=1-0.99=0.01\Leftrightarrow$$

$$0.01=\binom{n}{0}0.2^0(1-0.2)^n=0.8^n\Rightarrow \log(0.01)=\log(0.8^n)=n\log(0.8)\Rightarrow$$

$$n=\frac{\log(0.01)}{\log(0.8)}\cong 20.6377\Rightarrow n\ge 21$$

7. Aprovechando que la esperanza es una función lineal:

$$E(T)=E(T_1+T_2)=E(T_1)+E(T_2)=4+3=7$$

Aprovechando que las variables son independientes:

$$V(T)=V(T_1+T_2)=V(T_1)+V(T_2)=2+1=3$$

b. En primer lugar, estudiamos el suceso:

$$5\le T\le 9 \Leftrightarrow 5-7\le T-7\le 9-7 \Leftrightarrow -2\le T-7\le -2 \Leftrightarrow |T-7|\le 2$$

Pero la desigualdad Bienaymé-Tchebychev se aplica al suceso contrario: $|T-7|\ge 3$

Con esto ya sabemos que el valor de ε a utilizar es $\varepsilon=3$

Aplicando la desigualdad Bienaymé-Tchebychev:

$P(|T-7|\ge 3)\le \frac{3}{3^2}=\frac{1}{3}$, luego pasando al suceso contrario:

$$1-P(|T-7|\le 2)\le \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(|T-7|\le 2)\ge \frac{2}{3}$$

tal y como queríamos ver.

Ejercicio 3

1. a. $\overrightarrow{CA}=A-C=(5,5,0)-(0,0,10)=(5,5,-10)$

$\overrightarrow{CD}=D-C=(0,0,-5/2)-(0,0,10)=(0,0,-25/2)$

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & -25/2 \end{vmatrix}=(-125/2\,,125/2\,,0)\equiv(1,-1,0)$$

b. La ecuación del plano será $1x-1y+0z=D$, y como pasa por el punto C, tenemos

$$1\cdot 0-1\cdot 0+0\cdot 10=D \Rightarrow D=0$$, y la ecuación es $x-y=0$

2. a. Está claro que este punto pertenece a la recta tomando $t=1$.

Está claro que este punto pertenece al plano porque $\frac{5}{2}-\frac{5}{2}=0$.

Como además nos dicen que la recta y el plano se cortan en un punto, forzosamente debe ser este.

b. Basta ver que $\overrightarrow{BH}\perp(CAD) \Leftrightarrow \overrightarrow{BH}//\vec{n}$. En efecto,

$$\overrightarrow{BH}=H-B=\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},0\right)-(0,5,0)=\left(\frac{5}{2},-\frac{5}{2},0\right)=\frac{5}{2}(1,-1,0)=\frac{5}{2}\vec{n}$$ son vectores proporcionales.

3. a.

$\overrightarrow{HA}=A-H=(5,5,0)-(5/2,5/2,0)=(5/2,5/2,0)$

$\overrightarrow{HB}=B-H=(0,5,0)-(5/2,5/2,0)=(-5/2,5/2,0)$

y claramente $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\frac{5}{2}\left(\frac{-5}{2}\right)+\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}\right)+0\cdot 0=0 \Rightarrow \overrightarrow{HA}\perp\overrightarrow{HB}$.

b. $|\overrightarrow{HA}|=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2+0^2}=\sqrt{2\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

$$|\overrightarrow{HB}|=\sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2+0^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$[AHB]=\frac{1}{2}\frac{5\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{2}=\frac{25}{4}$$

4. Los puntos A, B y H tienen la tercera componente igual a 0, luego el vector normal a este plano será paralelo al eje Z, es decir, será un vector de la forma $\vec{m}=(0,0,1)$. Luego la ecuación del plano ABH será $z=D$. Y como pasa por A, se cumplirá $0=D$ y la ecuación es $z=0$

El vector $\overrightarrow{OC} = C - O = (0,0,10)$ es paralelo a este vector, luego OC es la altura del tetraedro por su vértice C, puesto que además O pertenece a dicho plano.

$$\left|\overrightarrow{OC}\right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 10^2} = 10$$

$$[ABCH] = \frac{1}{3} 10 \cdot \frac{25}{4} = \frac{125}{6}$$

5. $[ABCH] = \frac{1}{3} dist(H, ABC) \cdot [ABC] \Rightarrow dist(H, ABC) = \frac{3[ABCH]}{[ABC]} = \frac{3 \cdot 125/6}{[ABC]} = \frac{125/2}{[ABC]}$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (0,0,10) - (0,5,0) = (0,-5,10) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{0^2 + (-5)^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (5,5,0) - (0,5,0) = (5,0,0) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{5^2 + 0^2 + 0^2} = 5$$

Puesto que sabemos que el triángulo es rectángulo en C,

$$[ABC] = \frac{\left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BA}\right|}{2} = \frac{25\sqrt{5}}{2}$$

Finalmente,

$$dist(H, ABC) = \frac{125/2}{[ABC]} = \frac{125/2}{25\sqrt{5}/2} = \sqrt{5}$$

Ejercicio 4

Parte A.

1. a. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ porque $\lim_{x\to 0^+} x - 2 = -2$ y $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\ln x = -\infty$.

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ porque $\lim_{x\to +\infty} x - 2 = +\infty$ y $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2}\ln x = +\infty$.

b.

$$f'(x) = 1 + 0 + \frac{1}{2}\frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{2x} = \frac{2x+1}{2x}$$

c.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{2x} = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}$ queda fuera del dominio.

$f'(1) = \frac{2\cdot 1 + 1}{2 \cdot 1} > 0$, la derivada es siempre positiva, luego la función es siempre creciente.

d.

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2x} = 1 + \frac{1}{2}x^{-1} \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{2}(-1)x^{-2} = \frac{-1}{2x^2}$$

esta función es claramente negativa siempre, luego la función siempre es cóncava (doblada hacia abajo).

2.

a.

$$f(1) = 1 - 2 + \frac{1}{2}\ln 1 = -1 < 0$$

$$f(2) = 2 - 2 + \frac{1}{2}\ln 2 \cong 0.346574 > 0$$

Esta función es continua en todo]0; +∞[porque es suma de funciones continuas, luego por el Teorema de Bolzano, podemos garantizar una solución α en el interior del intervalo [1; 2].
Puesto que, además, esta función es estrictamente creciente, aplicando el Teorema del Valor Medio garantizamos que solo podrá tener un único punto de corte con el eje X

b. Con los valores $f(1) < 0$ y $f(2) > 0$ podemos garantizar que la función será negativa en $(0, \alpha)$ y positiva en $(\alpha, +\infty)$.

c. Sabemos que $0 = f(\alpha) = \alpha - 2 + \frac{1}{2}\ln\alpha \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\alpha = 2 - \alpha \Rightarrow \ln\alpha = 2(2-\alpha)$.

Parte B.

1.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 \to 2x \\ \ln x \to 1/x \end{array}\right\} \to x^2 \ln x \to 2x\ln x + x^2\frac{1}{x} = 2x\ln x + x$$

$$g'(x) = -\frac{14}{8}x + 1 - \frac{1}{4}(2x\ln x + x) = -\frac{14}{8}x + 1 - \frac{x\ln x}{2} - \frac{x}{4} = -2x + 1 - \frac{x\ln x}{2}$$

Por otra parte,

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2}\ln\left(x^{-1}\right) = \frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2}(-1)\ln(x) = \frac{1}{x} - 2 - \frac{1}{2}\ln(x) \Rightarrow$$

$$x\,f\left(\frac{1}{x}\right) = x\left(\frac{1}{x} - 2 - \frac{1}{2}\ln(x)\right) = 1 - 2x - \frac{1}{2}x\ln(x) = g(x)$$

2.

a. Si $x \in \left(0, \frac{1}{\alpha}\right) \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \frac{1}{x} > \alpha$, y aplicando el apartado b anterior, $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$.

b. La monotonía de g depende del signo de $g'(x) = x\,f\left(\frac{1}{x}\right)$, y como estamos suponiendo que $x > 0$, coincidirá con el signo de $f\left(\frac{1}{x}\right)$, que es el mostrado en la tabla del enunciado:

$x \in \left(0, \frac{1}{\alpha}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \Rightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow g(x)$ creciente.

$x \in \left(\frac{1}{\alpha}, 1\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) < 0 \Rightarrow g'(x) < 0 \Rightarrow g(x)$ decreciente.

de lo que podemos garantizar que la función g tiene un máximo relativo en $x = \frac{1}{\alpha}$.

Parte C.

a.

$$y = -\frac{7}{8}x^2 + x$$

$$g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln x = y - \frac{1}{4}x^2\ln x$$

la función $\ln x$ es negativa en (0,1), luego este último término que resta en realidad suma, y por tanto la gráfica de C_g está por encima de la de P.

b.

$\int_{1/\alpha}^{1} x^2 \ln x\,dx = F(1) - F(1/\alpha)$, donde

$F(x) = \int x^2 \ln x\,dx = -\frac{x^3}{9} + \frac{1}{3}x^3\ln(x)$ (mediante el método de integración por partes).

Luego

$$F(1) = -\frac{1^3}{9} + \frac{1}{3}1^3\ln(1) = \frac{-1}{9}$$

$$F\left(\frac{1}{\alpha}\right)=-\frac{(1/\alpha)^3}{9}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)=-\frac{1}{9\alpha^3}+\frac{1}{3\alpha^3}\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)=-\frac{1}{9\alpha^3}+\frac{1}{3\alpha^3}\ln\left(\alpha^{-1}\right)=$$

$$=-\frac{1}{9\alpha^3}+\frac{1}{3\alpha^3}(-1)\ln(\alpha)=-\frac{1}{9\alpha^3}-\frac{\ln(\alpha)}{3\alpha^3}=-\frac{1}{9\alpha^3}-\frac{3\ln(\alpha)}{9\alpha^3}=-\frac{1+3\ln(\alpha)}{9\alpha^3}$$

Ahora aplicamos $\ln(\alpha)=2(2-\alpha)$:

$$-\frac{1+3\ln(\alpha)}{9\alpha^3}=-\frac{1+3\cdot 2(2-\alpha)}{9\alpha^3}=-\frac{1+12-6\alpha}{9\alpha^3}=-\frac{13-6\alpha}{9\alpha^3}$$

Finalmente,

$$\int_{1/\alpha}^{1} x^2\ln x\,dx=F(1)-F(1/\alpha)=\frac{-1}{9}+\frac{13-6\alpha}{9\alpha^3}=\frac{-\alpha^3}{9\alpha^3}+\frac{13-6\alpha}{9\alpha^3}=\frac{-\alpha^3+13-6\alpha}{9\alpha^3}$$

tal y como queríamos ver.

2. El área buscada se puede determinar mediante una única integral porque vemos que las dos gráficas no se cruzan. Será la integral de la diferencia: la función de arriba menos la función de abajo:

$$A=\int_{1/\alpha}^{1} g(x)-\left(-\frac{7}{8}x^2-x\right)dx=\int_{1/\alpha}^{1}\frac{-1}{4}x^2\ln x dx=\frac{-1}{4}\int_{1/\alpha}^{1}x^2\ln x dx=$$

$$=\frac{-1}{4}\left(\frac{-\alpha^3+13-6\alpha}{9\alpha^3}\right)$$

BACHILLERATO GENERAL
PRUEBA DE ESPECIALIDAD DOCENTE
SESIÓN 2024
MATEMÁTICAS
Día 2
miércoles 19 de junio de 2024
Duración de la prueba: 4 horas

Se autoriza el uso de calculadora "tipo universitaria" sin memoria.
Se autoriza el uso de la calculadora con modo examen activo.
Tan pronto como se le proporcione este documento, asegúrese de que esté completo.
Este documento tiene 6 páginas numeradas del 1 al 6.

El candidato deberá realizar los cuatro ejercicios propuestos.
Se invita al candidato a incluir en la copia cualquier rastro de investigación, incluso incompleta o fallida, que haya desarrollado.
En la valoración de la copia se tendrán en cuenta la calidad de la redacción, la claridad y precisión del razonamiento. Se valorarán los rastros de investigación, incluso incompletos o infructuosos.

Ejercicio 1 (5 puntos)

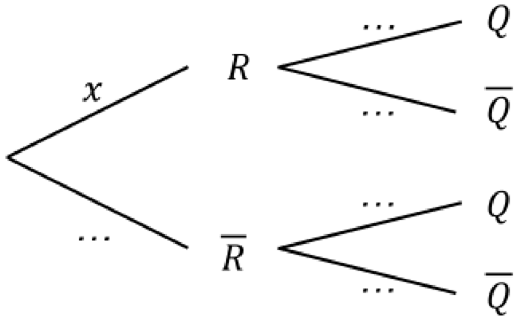
El director de un colegio quiere realizar un estudio entre los estudiantes que realizaron el examen de fin de estudios, para analizar cómo creen que aprobaron este examen.
Para este estudio, después del examen, se pide a los estudiantes que respondan individualmente la pregunta: "¿Crees que aprobaste el examen?" ". Sólo son posibles respuestas "sí" o "no", y observamos que el 91,7% de los estudiantes encuestados respondieron "sí".
Tras la publicación de los resultados del examen, descubrimos que:
- Un 65% de los estudiantes que suspendieron respondieron "no";
- Un 98% de los estudiantes exitosos respondieron "sí".

Se entrevista aleatoriamente a un estudiante que ha realizado el examen.
Denotamos por R el evento "el estudiante aprobó el examen" y por Q el evento "el estudiante respondió "sí" a la pregunta".
Para cualquier evento A, denotamos por $P(A)$ su probabilidad y por $\overline{A}$ su evento contrario.

A lo largo del ejercicio, las probabilidades se redondean, si es necesario, al 10^{-3} más cercano.

1. Especifique los valores de las probabilidades $P(Q)$ y $P_{\overline{R}}(\overline{Q})$.
2. Denotamos por x la probabilidad de que el alumno preguntado haya tenido éxito en el examen.

a. Copie y complete el siguiente árbol de probabilidades.



b. Demuestre que x = 0,9.

3. El estudiante entrevistado respondió "sí" a la pregunta. ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado el examen?

4. La calificación obtenida por un estudiante entrevistado al azar es un número entero entre 0 y 20. Se supone que está modelada por una variable aleatoria N que sigue la distribución binomial de parámetros (20; 0,615). El director desea premiar a los alumnos que obtuvieron los mejores resultados ¿Desde qué grado debería otorgar premios para que el 65% de los estudiantes sean recompensados?

5. Se entrevista aleatoriamente a diez estudiantes.
Las variables aleatorias N_1, N_2, ..., N_{10} modelan la puntuación sobre 20 obtenida en el examen por cada uno de ellos. Admitimos que estas variables son independientes y siguen la misma ley binomial de parámetros (20; 0,615).
Sea S la variable definida por $S = N_1 + N_2 + ... + N_{10}$.
Calcule la esperanza $E(S)$ y la varianza $V(S)$ de la variable aleatoria S.

6. Consideramos la variable aleatoria $M = \frac{S}{10}$.
a. ¿Qué modela esta variable aleatoria M en el contexto del ejercicio?
b. Justifique que $E(M) = 12.3$ y $V(M) = 0.47355$.
c. Utilizando la desigualdad de Bienaymé-Chebyshev, justifique la siguiente afirmación.
"La probabilidad de que la calificación promedio de diez estudiantes tomados al azar esté estrictamente entre 10,3 y 14,3 es al menos del 80%".

Solución paso a paso en vídeo: https://youtu.be/QvKjUL4hbS8

Ejercicio 2 (5 puntos)

Las partes A y B son independientes.

Alain tiene una piscina que contiene 50 m³ de agua. Recuerda que 1m³ = 1000 L.
Para desinfectar el agua hay que añadir cloro.
El nivel de cloro en el agua, expresado en $mg.L^{-1}$ se define como la masa de cloro por unidad del volumen de agua. Los especialistas en piscinas recomiendan un nivel de cloro de entre 1 y 3 $mg.L^{-1}$.
Bajo la acción del medio ambiente, particularmente los rayos ultravioleta, el cloro se descompone y desaparece poco a poco.
Alain toma medidas en días determinados, a una hora fija, con un dispositivo que permite una precisión de hasta 0,01 $mg.L^{-1}$. El miércoles 19 de junio midió un nivel de cloro de 0,70 $mg.L^{-1}$.

Parte A: estudio de un modelo discreto.

Para mantener el nivel de cloro en su piscina, Alain decide, a partir del jueves 20 de junio, añadir una cantidad de 15 g de cloro cada día. Se supone que este cloro se mezcla uniformemente en el agua de la piscina.

1. Justifique que esta adición de cloro aumenta el nivel en 0,3 $mg.\ L^{-1}$.
2. Para todos los naturales n, denotamos por v_n el nivel de cloro, en $mg.\ L^{-1}$, obtenido con este nuevo protocolo n días posteriores al miércoles 19 de junio. Entonces $v_0 = 0{,}7$.
Admitimos que para cualquier número natural n, $v_{n+1} = 0{,}92 v_n + 0{,}3$
a. Demuestre por inducción que para cualquier número natural n, $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.
b. Demuestre que la sucesión (v_n) es convergente y calcule su límite.
3. ¿A largo plazo el nivel de cloro cumplirá con las recomendaciones de los especialistas en piscinas? Justificar la respuesta.

4. Reproduzca y complete siguiente algoritmo escrito en lenguaje Python para que la función alerte_chlore devuelva, cuando exista, el número entero más pequeño n tal que $v_n > s$.

```
def alerte_chlore(s) :
    n=0
    v=0.7
    while .................... :
        n= ..........
        v= ..........
    return n
```

5. ¿Qué valor obtenemos al introducir la instrucción alerte_chlore(3)? Interprete este resultado en el contexto del ejercicio.

Parte B: estudio de un modelo continuo.

Alain decide recurrir a una oficina de diseño especializada. Utiliza un modelo continuo para describir el nivel de cloro en la piscina.
En este modelo, por una duración x (en días transcurridos desde el miércoles 19 de junio), $f(x)$ representa el nivel de cloro, en mg. L^{-1} en la piscina.

Admitimos que la función f es solución de la ecuación diferencial (E): $y' = -0{,}08y + \frac{q}{50}$, donde q es la cantidad de cloro, en gramos, que se agrega a la piscina cada día.

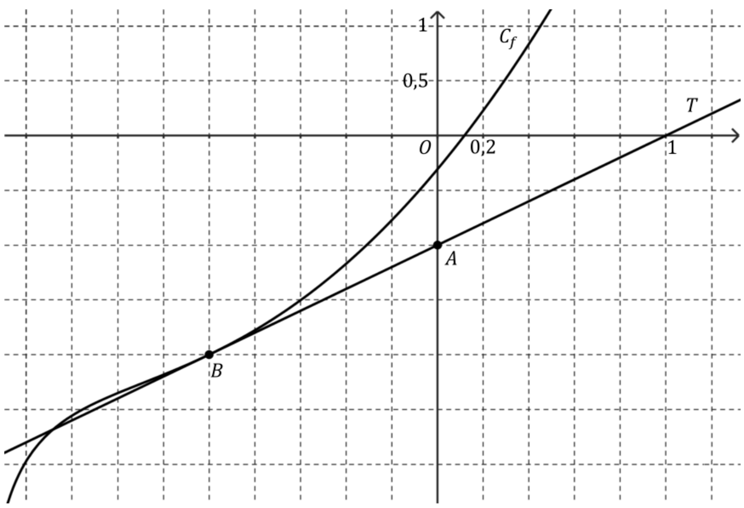
1. Justifica que la función f es de la forma $f(x) = Ce^{-0{,}08x} + \frac{q}{4}$ donde C es una constante real

2. Expresa en función de q el límite de f en $+\infty$.
b. Les recordamos que el nivel de cloro observado el miércoles 19 de junio es de 0,7 mg. L^{-1} .
Queremos que el nivel de cloro se estabilice a largo plazo en torno a 2 mg. L^{-1}. Determina los valores de C y de q para que se respeten estas dos condiciones.

Solución paso a paso en vídeo: https://youtu.be/0rAG7EgPKIc

Ejercicio 3 (6 puntos)

Consideramos una función f dos veces derivable en]−2; +∞[. Sea C_f su curva representativa en un marco de referencia ortogonal del plano, y sean f' su derivada y f'' su segunda derivada.
A continuación hemos dibujado la curva C_f y su tangente T en el punto de abscisa −1.
Especificamos que la recta T pasa por el punto (0; −1).



Parte A: exploración del gráfico.

Usando el gráfico, responda las siguientes preguntas.
1. Especifique $f(-1)$ y $f'(-1)$.
2. ¿Es la curva convexa en su conjunto de definición? Justificar.
3. Conjetura el número de soluciones de la ecuación $f(x)=0$ y da un valor redondeado a 10^{-1} a la solución más cercana.

Parte B: estudio de la función.

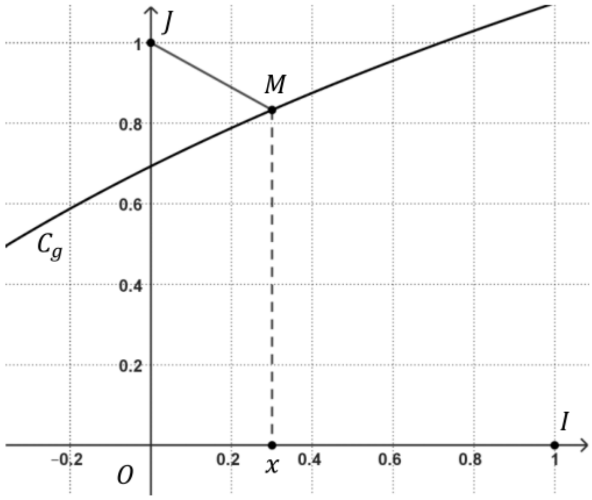
Consideramos que la función f está definida sobre]−2; +∞[por $f(x)=x^2+2x-1+\ln(x+2)$, donde ln denota la función logaritmo natural.
1. Determine mediante cálculo el límite de la función f en −2. Interprete este resultado gráficamente.
Admitimos que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2. Demuestre que para todo $x>-2$, $f'(x)=\dfrac{2x^2+6x+5}{x+2}$.
3. Estudiar las variaciones de la función f sobre]−2; +∞[y después elabora tu tabla de variaciones completa.

4. Demuestre que la ecuación $f(x)=0$ admite una solución α única en]−2; +∞[y dar un valor redondeado al 10^{-2} más cercano .
5. Deducir el signo de $f(x)$ en]−2; +∞[.
6. Demuestre que C_f admite un único punto de inflexión y determine su abscisa.

Parte C: una distancia mínima.

Sea g la función se definida en]−2; +∞[por $g(x)=\ln(x+2)$.
Denotamos por C_g su curva representativa en un sistema ortonormal (O ; I, J), que se muestra a continuación.



Sea M un punto de C_g de abscisa x.
El objetivo de esta parte es determinar para qué valor de x la distancia JM es mínima.
Consideramos la función h definida en]−2; +∞[por $h(x)=JM^2$.

1. Justifique que para todo $x>-2$, se cumple $h(x)=x^2+[\ln(x+2)-1]^2$.
2. Admitimos que la función h es derivable en]−2; +∞[y notamos por h' su función derivada.
También admitimos que para cualquier real $x>-2$,

$$h'(x)=\frac{2f(x)}{x+2}$$

donde f es la función estudiada en la parte B.

a. Elabora la tabla de variaciones de h en]−2; +∞[.
No se solicitan límites.

b. Deduzca que el valor de x para el cual la distancia J M es mínima es α donde α es el número real definido en la pregunta 4 de la parte B.

3. Denotaremos por M_α el punto de C_f de abscisa α.
a. Demuestre que $\ln(\alpha+2)=1-2\alpha-\alpha^2$.
b. Deducir que la tangente a C_f en el punto M_α y a la recta (JM_α) son perpendiculares.
Se puede aprovechar el hecho de que, en un sistema de coordenadas ortonormal, dos rectas son perpendiculares cuando el producto de sus coeficientes de dirección es igual a −1.

Solución paso a paso en vídeo: https://youtu.be/TRWcONH8hzw

Ejercicio 4 (4 puntos)

Para cada una de las siguientes afirmaciones, indique si es verdadera o falsa. Cada respuesta debe estar justificada. Una respuesta injustificada no gana puntos.

En el espacio provisto de un sistema de referencia ortonormal, consideramos los siguientes puntos: A(2; 0; 0), B(0; 4; 3), C(4; 4; 1), D(0; 0; 4) y H(−1; 1; 2).

Afirmación 1: los puntos A, C y D definen un plano P de ecuación $8x-5y+4z-16=0$.
Afirmación 2: los puntos A, B, C y D son coplanarios.
Afirmación 3: las rectas (AC) y (BH) son secantes.

Admitimos que el plano (ABC) tiene por ecuación cartesiana $x-y+2z-2=0$.
Afirmación 4: el punto H es la proyección ortogonal del punto D en el plano (ABC).

Solución paso a paso en vídeo: https://youtu.be/ZgEczibceHI

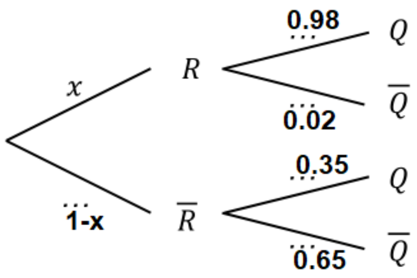
Soluciones Jour 2.

Ejercicio 1

1. $P(Q) = 0.917$, $P(\overline{Q} \mid \overline{R}) = 0.65$.

2.

a.



b.

$0.917 = P(Q) = x \cdot 0.98 + (1-x) \cdot 0.35 \Rightarrow x = 0.9$.

3. $P(R \mid Q) = \dfrac{P(R \cap Q)}{P(Q)} = \dfrac{0.9 \cdot 0.98}{0.917} = 0.961832 \cong 0.962$

4. $X = B(\ 20\ , 0.615\ )$ queremos determinar el valor de k tal que $0.65 = P(X \geq k\ )$.

Mediante una calculadora científica encontramos que $P(X \geq 12\ ) = 0.6487$, por lo que, a partir de la nota 12/20, el 65% de los estudiantes serán premiados.

5. Utilizando que la esperanza es lineal:

$$E(S) = E(N_1 + N_2 + \ldots + N_{10}) = E(N_1) + E(N_2) + \ldots + E(N_{10}) = 10E(N_1) = 10 \cdot 20 \cdot 0.615 = 123$$

Utilizando que las variables son independientes:

$$V(S) = V(N_1 + N_2 + \ldots + N_{10}) = V(N_1) + V(N_2) + \ldots + V(N_{10}) = 10V(N_1) =$$
$$= 10 \cdot 20 \cdot 0.615 \cdot (1 - 0.615) = 47.355$$

6. a. La nota media obtenida por los 10 estudiantes.

b. $E(M) = E\left(\dfrac{S}{10}\right) = \dfrac{1}{10} E(S) = \dfrac{123}{10} = 12.3$, $V(M) = 0.47355$.

c) Queremos determinar $P(10.3 < M < 14.3) = P(|M - 12.3| < 2)$

Aplicando la desigualdad Bienaymê-Tchebychev al suceso contrario:

$$P(|M - 12.3| \geq 2) \leq \frac{V(M)}{2^2} \Leftrightarrow 1 - P(|M - 12.3| < 2) \leq \frac{0.47355}{4} \Leftrightarrow$$
$$P(|M - 12.3| < 2) \geq 0.88 > 0.8$$

y está claro que $|M - 12.3| < 2 \Leftrightarrow -2 < M - 12.3 < 2 \Leftrightarrow 10.3 < M < 14.3$

tal y como queríamos ver.

Ejercicio 2

1.

$50m^3 = 50000L$, $15g = 15000mg$, $\dfrac{15000mg}{50000L} = 0.3mg\ L^{-1}$.

2.

a. Es cierto para $v_1 = 0.92 \cdot 0.7 + 0.3 = 0.944$, y efectivamente se cumple $0.92 \leq 0.944 \leq 4$.

Supongamos que se cumple hasta un cierto v_n. Es decir $v_{n-1} \leq v_n \leq 4$.

Luego

$$v_{n-1} \le v_n \le 4 \Rightarrow 0.92v_{n-1} \le 0.92v_n \le 0.92 \cdot 4 \Rightarrow$$
$$0.92v_{n-1} + 0.3 \le 0.92v_n + 0.3 \le 0.92 \cdot 4 + 0.3 \Rightarrow$$
$$v_n \le v_{n+1} \le 3.98 \le 4$$

Tal y como queríamos ver.

b. Es una sucesión creciente y acotada superiormente, luego converge. En el límite x es un punto estacionario, luego:

$$x = 0{,}92x + 0{,}3 \Rightarrow x = 3.75$$

4.

```
def alerte_chlore(s) :
   n=0
   v=0.7
   while v<=s :
      n= n+1
      v= 0.92v+0.3
   return n
```

5.

Esta rutina nos dirá el número de días hasta llegar al límite recomendado por el especialista de 3 $mg.L^{-1}$:

$$n = 0, v = 0.7, \quad 0.7 <= 3 \to v = 0.92 \cdot 0.7 + 0.3 = 0.944$$
$$n = 1, v = 0.944, \quad 0.944 <= 3 \to v = 0.92 \cdot 0.944 + 0.3 = 1.16848$$

En general:

n	v
0	0,7
1	0,944
2	1,16848
3	1,375002
4	1,565001
5	1,739801
6	1,900617
7	2,048568
8	2,184682
9	2,309908
10	2,425115
11	2,531106
12	2,628618
13	2,718328
14	2,800862
15	2,876793
16	2,946649
17	3,010918

La rutina retornará $n = 17$.

Parte B.

1. Es una ecuación diferencial de la forma $y' = ax + b$, con $a = -0.08$ y $b = \frac{q}{50}$, luego su solución será la familia de funciones $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a} = Ce^{-0.08x} - \frac{\frac{q}{50}}{-0.08} = Ce^{-0.08x} + \frac{q}{4}$

2. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{q}{4}$, puesto que la parte exponencial tiende a 0.

b. $2=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{q}{4}\Rightarrow \frac{q}{4}=2$,

$0.7=f(0)=Ce^{-0,08\cdot 0}+\frac{q}{4}=C+\frac{q}{4}=C+2\Rightarrow C=0.7-2=-1.3$,

Ejercicio 3

1. $f(-1)=-2$, $f'(-1)=\frac{1}{1}=1$

2. Observamos visualmente que la función f es cóncava $\cap$ en $(-\infty,-1)$ y convexa $\cup$ en $(-1,+\infty)$

3. Vemos en el gráfico que la función $f(x)$ tiene un cero para $0<x<0.2$. Una solución aproximada sería $x=0.1$. La función es estrictamente creciente, luego no puede tener más ceros.

Parte B.

1. La función tiene una asíntota vertical en $x=-2$: $\lim_{x\to-2^+} f(x)=-\infty$ porque $\lim_{x\to-2^+}\ln(x+2)=-\infty$.

2. $f'(x)=2x+2+\frac{1}{x+2}=\frac{(2x+2)(x+2)}{x+2}+\frac{1}{x+2}=\frac{(2x+2)(x+2)+1}{x+2}=\frac{2x^2+6x+5}{x+2}$

3. $f'(x)=\frac{2x^2+6x+5}{x+2}=0\Leftrightarrow 2x^2+6x+5=0$,y esta ecuación no tiene soluciones reales.

$f'(0)=\frac{2\cdot 0^2+6\cdot 0+5}{0+2}=\frac{5}{2}>0$

Luego la función es siempre creciente.

4. $f(-1)=(-1)^2+2(-1)-1+\ln(-1+2)=1-2-1+0=-2<0$

$f(0)=0^2+2\cdot 0-1+\ln(0+2)=-1+\ln(2)=-2<0$

$f(1)=1^2+2\cdot 1-1+\ln(1+2)=2+\ln(3)\cong 3.1>0$

La función es siempre derivable y estrictamente creciente, luego podemos garantizar que tiene un único cero α cumpliendo $0<\alpha<1$, aplicando el Teorema del Valor Medio.

Mediante la calculadora y el método de bisección podemos dar más precisión al valor de α:

$f(0.5)=1.17>0$

$f(0.25)=0.37>0$

$f(0.12)=0.0058>0$

$f(0.06)=-0.15<0$

$f(0.1)=-0.05<0$

$f(0.11)=-0.021<0$

Luego $0.11<\alpha<0.12$.

5. Con los resultados anteriores está claro que $f(x)<0$ si $-2<x<\alpha$ y $f(x)>0$ si $\alpha<x<+\infty$.

6.

$$f'(x)=2x+2+\frac{1}{x+2}=2x+2+(x+2)^{-1}\Rightarrow f''(x)=2+(-1)(x+2)^{-2}=2-\frac{1}{(x+2)^2}=0\Leftrightarrow$$

$$2=\frac{1}{(x+2)^2}\Leftrightarrow 2(x+2)^2=1\Leftrightarrow (x+2)^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{2}}{2}\cong -2.70711,\ -1.29289$$

la primera solución queda fuera del dominio de definición de la función. Luego el único candidato aceptable para punto de inflexión es $x\cong -1.293$

$f''(-1.5)=2-\frac{1}{(1.5+2)^2}=-2<0$

$f''(0) = 2 - \frac{1}{(0+2)^2} = \frac{7}{4} > 0$

Luego podemos garantizar que la función tiene un punto de inflexión en $x \cong -1.293$.

Parte C.

1. $J = (0,1)$, $M = (x, \ln(x+2))$, basta aplicar la fórmula de la distancia entre dos puntos del plano:
$h(x) = JM^2 = x^2 + (1 - \ln(x+2))^2 = x^2 + (\ln(x+2) - 1)^2$

2.
a. Puesto que $x > -2 \Rightarrow x + 2 > 0$, el denominador siempre será positivo, y por tanto el signo de $h'(x)$ es el signo de $f(x)$, que fue estudiado en el apartado 5 de la parte B:
$h(x)$ decreciente en $-2 < x < \alpha$ y creciente en $\alpha < x < +\infty$.
b. Luego la función $h(x)$ tiene un mínimo en $x = \alpha \cong 0.12$. Aquí estamos utilizando que JM^2 y JM comparten los mismos valores minimales.

3.
a. $0 = f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha - 1 + \ln(\alpha + 2) \Rightarrow 1 - \alpha^2 - 2\alpha = \ln(\alpha + 2)$
b. Pendiente de la recta tangente a C_f en $x = \alpha = g'(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 2}$.
Pendiente de la recta $(J M_\alpha)$:
$J = (0,1)$, $M_\alpha = (\alpha, \ln(\alpha+2))$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln(\alpha+2) - 1}{\alpha - 0} = \frac{\ln(\alpha+2) - 1}{\alpha}$
y $\frac{1}{\alpha+2} \cdot \frac{\ln(\alpha+2) - 1}{\alpha} = \frac{\ln(\alpha+2) - 1}{(\alpha+2)\alpha} = \frac{1 - 2\alpha - \alpha^2 - 1}{(\alpha+2)\alpha} = \frac{2\alpha - \alpha^2}{(\alpha+2)\alpha} = \frac{(2-\alpha)\alpha}{(\alpha+2)\alpha} = -1$
tal y como queríamos ver.

Ejercicio 4
Afirmación 1.
$8 \cdot 2 - 5 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 16 = 0$, luego pasa por el punto A.
$8 \cdot 4 - 5 \cdot 4 + 4 \cdot 1 - 16 = 0$, luego pasa por el punto B.
$8 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 4 \cdot 4 - 16 = 0$, luego pasa por el punto C.
Los puntos A,C y D no están alineados:
$\overrightarrow{AC} = (2,4,1)$ y $\overrightarrow{AD} = (-2,0,4)$ y no son proporcionales.
Puesto que hay un único plano que pasa por tres puntos no alineados, este plano debe ser el indicado. Luego la afirmación es verdad.

Afirmación 2.
$8 \cdot 0 - 5 \cdot 4 + 4 \cdot 3 - 16 = -10 \neq 0$ luego el punto B no pertenece al plano P, y por tanto no pueden ser coplanarios. Falso.

Afirmación 3.
Ecuación paramétrica de $BH: \begin{cases} x = -t \\ y = 4 - 3t \\ z = 3 - t \end{cases}$, ecuación paramétrica de $AC: \begin{cases} x = 2 + 2s \\ y = 4s \\ z = s \end{cases}$
Resolvemos el sistema y vemos que tiene solución para $t = 8, s = -5$, luego se cortan en un punto. Verdad.

Afirmación 4.
El punto H pertenece al plano (ABC): $-1 - 1 + 2 \cdot 2 - 2 = 0$.

El vector $\overrightarrow{DH}$ es perpendicular al plano (ABC):

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{DH} = (-1,1,2) - (0,0,4) = (-1,1,-2) \\ \vec{n} = (1,-1,2)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{DH} = (-1)\vec{n}$$

los vectores son proporcionales, luego $\overrightarrow{DH}$ es perpendicular al plano (ABC). Verdad.