COMPENDIUM PAU FRANCIA

Baccalauréat général Mathématiques (Metropole)

Gerard Romo Garrido

Toomates Coolección vol. 75

Toomates Coolección

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "**licencias digitales**" con las que las editoriales pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo libro, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.
Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de licencias digitales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía**.
El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las editoriales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de unos libros de texto que actualmente son muy mediocres, y no mediante retorcidas técnicas comerciales.
 Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas.

¡Libérate de la tiranía y mediocridad de las editoriales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos

Toomates Coolección **Problem Solving** (en español):
Geometría Axiomática , Problemas de Geometría 1 , Problemas de Geometría 2
Introducción a la Geometría , Álgebra , Teoría de números , Combinatoria , Probabilidad
Trigonometría , Desigualdades , Números complejos , Funciones

Toomates Coolección **Llibres de Text** (en catalán):
Nombres (Preàlgebra) , Àlgebra , Proporcionalitat , Mesures geomètriques , Geometria analítica
Combinatòria i Probabilitat , Estadística , Trigonometria , Funcions , Nombres Complexos ,
Àlgebra Lineal , Geometria Lineal , Càlcul Infinitesimal , Programació Lineal , Mates amb Excel

Toomates Coolección **Compendiums**:
PAU España: Cataluña TEC Cataluña CCSS Valencia Galicia País Vasco Baleares
PAU Internacional: Portugal A Portugal B Italia UK (A Level) IB Francia
Canguro: ESP CAT FR USA UK AUS
USA: Mathcounts AMC 8 10 12 AIME USAJMO USAMO TSTST TST ELMO Putnam
España: OME OMEFL OMEC OMEA OMEM CDP
Internacional: IMO OMI IGO SMT INMO CMO REOIM Arquimede HMMT BMO
Pruebas acceso: ACM4 , CFGS , PAP
Pizzazz!: Book A Book B Book C Book D Book E Pre-Algebra Algebra
AHSME: Book 1 Book 2 Book 3 Book 4 Book 5 Book 6 Book 7 Book 8 Book 9

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales, para facilitar su edición.

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a **toomates@gmail.com**

¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.

Consulta el **Catálogo de libros** de la biblioteca Toomates Coolección en http://www.toomates.net/biblioteca.htm
Encontrarás muchos más materiales para el aprendizaje de las matemáticas en **www.toomates.net**
Visita mi **Canal de Youtube**: **https://www.youtube.com/c/GerardRomo**

Versión de este documento: **16/01/2024**

Índice.

	Baccalauréat général Mathématiques Metropole							
	Série S				Série ES			
	Obligatoire		Spécialité		Obligatoire		Spécialité	
	Sujet	Correction	Sujet	Correction	Sujet	Correction	Sujet	Correction
2003			4	15	21	25	35	
2004	41	46	51	56	61	68	74	
2005	87	92	99	105	112	118	126	133
2006	141	144	149	152	157	163	169	175
2007	181	187	195	202	210	216	222	228
2008	234	238	242	245	257	264	271	278
2009	285	292	297	303	308	314	323	328
2010	337	344	351	357	364	370	381	387
2011	394		400		406		413	
2012	420	426	430	436	440		447	
2013	454		460		466		472	
2014	478		483		489		495	
2015	501	508	516	524	532		538	
2016	544	550	558	565	573		578	
2017	583	591	597		604		611	
2018	618	626	634	642	649		655	
2019	662	669	677	683	689		696	
2020	(Cancelado por la pandemia COVID)							

	Baccalauréat Général Spécialité Metropole			
	Jour 1		Jour 2	
2021	704			
2022	710	715	725	
2023	732	737	742	747

Fuente:

https://www.sujetdebac.fr/annales/metropole/

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2003

MATHÉMATIQUES

Série : S

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures.** – COEFFICIENT : 9

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5, et 1 page annexe non numérotée à rendre avec la copie.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les DEUX exercices et le problème.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 *(4 points)*

Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 1 - i$ et $c = 1 + i$.

1. *a.* Placer les points A, B et C sur une figure.

   b. Calculer $\dfrac{c-a}{b-a}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.

2. *a.* On appelle r la rotation de centre A telle que $r(\text{B}) = \text{C}$.

   Déterminer l'angle de r et calculer l'affixe d du point $\text{D} = r(\text{C})$.

   b. Soit Γ le cercle de diamètre [BC].

   Déterminer et construire l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r.

3. Soit M un point de Γ d'affixe z, distinct de C et M' d'affixe z' son image par r.

   a. Montrer qu'il existe un réel θ appartenant à $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2} ; 2\pi\right[$ tel que $z = 1 + e^{i\theta}$.

   b. Exprimer z' en fonction de θ.

   c. Montrer que $\dfrac{z'-c}{z-c}$ est un réel. En déduire que les points C, M et M' sont alignés.

   d. Placer sur la figure le point M d'affixe $1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et construire son image M' par r.

Exercice 2 *(5 points)*

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les questions 3 et 4 sont indépendantes des questions 1 et 2 ; seule l'équation de Γ *donnée en* 1. *c. intervient à la question 4.*

1. L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$.

   a. Montrer que les plans P et Q d'équations respectives : $x+\sqrt{3}y-2z=0$ et $2x-z=0$ ne sont pas parallèles.

   b. Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ intersection des plans P et Q.

   c. On considère le cône de révolution Γ d'axe (Ox) contenant la droite Δ comme génératrice.

   Montrer que Γ a pour équation cartésienne $y^2+z^2=7x^2$.

2. On a représenté sur les deux figures ci-dessous les intersections de Γ avec des plans parallèles aux axes de coordonnées.

   Déterminer dans chaque cas une équation des plans possibles, en justifiant avec soin votre réponse.

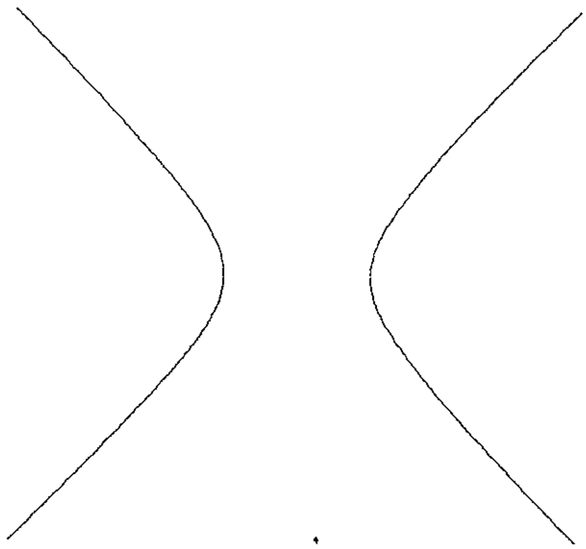


Figure 1

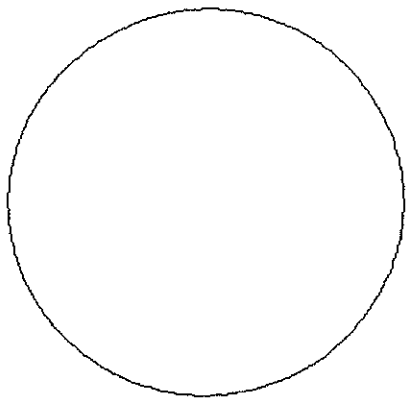


Figure 2

3. *a.* Montrer que l'équation $x^2 \equiv 3\ [7]$, dont l'inconnue x est un entier relatif, n'a pas de solution.

   b. Montrer la propriété suivante :

   pour tous entiers relatifs a et b, si 7 divise a^2+b^2 alors 7 divise a et 7 divise b.

4. *a.* Soient a, b et c des entiers relatifs non nuls. Montrer la propriété suivante :

   si le point A de coordonnées (a, b, c) est un point du cône Γ alors a, b et c sont divisibles par 7.

   b. En déduire que le seul point de Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs est le sommet de ce cône.

Tournez la page S.V.P.

Problème *(11 points)*

Commun à tous les candidats

Soit N_0 le nombre de bactéries introduites dans un milieu de culture à l'instant $t = 0$ (N_0 étant un réel strictement positif, exprimé en millions d'individus).

Ce problème a pour objet l'étude de deux modèles d'évolution de cette population de bactéries :

- *un premier modèle pour les instants qui suivent l'ensemencement (partie A)*
- *un second modèle pouvant s'appliquer sur une longue période (partie B).*

Partie A

Dans les instants qui suivent l'ensemencement du milieu de culture, on considère que la vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries en présence.

Dans ce premier modèle, on note $f(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus). La fonction f est donc solution de l'équation différentielle : $y'=ay$.
(où a est un réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales).

1. Résoudre cette équation différentielle, sachant que $f(0) = N_0$.
2. On note T le temps de doublement de la population bactérienne.

   Démontrer que, pour tout réel t positif : $f(t) = N_0 2^{\frac{t}{T}}$.

Partie B

Le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs...), le nombre de bactéries ne peut pas croître indéfiniment de façon exponentielle. Le modèle précédent ne peut donc s'appliquer sur une longue période. Pour tenir compte de ces observations, on représente l'évolution de la population de bactéries de la façon suivante :

Soit $g(t)$ est le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus) ; la fonction g est une fonction strictement positive et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ qui vérifie pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$ la relation :

$$(\text{E}) \quad g'(t) = a\,g(t)\left(1-\frac{g(t)}{\text{M}}\right),$$

où M est une constante strictement positive dépendant des conditions expérimentales et a le réel défini dans la partie A.

1. *a.* Démontrer que si g est une fonction strictement positive vérifiant la relation (E), alors la fonction $\frac{1}{g}$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y'+ay=\frac{a}{\text{M}}$.

   b. Résoudre (E').

   c. Démontrer que si h est une solution strictement positive de (E'), alors $\frac{1}{h}$ vérifie (E).

2. On suppose désormais que, pour tout réel positif t, $g(t) = \frac{\text{M}}{1+Ce^{-at}}$, où C est une constante strictement supérieure à 1 dépendant des conditions expérimentales.

   a. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et démontrer, pour tout réel t positif ou nul, la double inégalité : $0 < g(t) < \text{M}$.

   b. Étudier le sens de variation de g (on pourra utiliser la relation (E)).

Démontrer qu'il existe un réel unique t_0 positif tel que $g(t_0) = \frac{M}{2}$.

c. Démontrer que $g'' = a(1 - \frac{2g}{M})\, g'$. Étudier le signe de g''. En déduire que la vitesse d'accroissement du nombre de bactéries est décroissante à partir de l'instant t_0 défini ci-dessus. Exprimer t_0 en fonction de a et C.

d. Sachant que le nombre de bactéries à l'instant t est $g(t)$, calculer le nombre moyen de bactéries entre les instants 0 et t_0, en fonction de M et C.

Partie C

1. Le tableau présenté en Annexe I a permis d'établir que la courbe représentative de f passait par les points de coordonnées respectives (0 ; 1) et (0,5 ; 2). En déduire les valeurs de N_0, T et a.

2. Sachant que g(0) = N_0 et que M = 100 N_0, démontrer, pour tout réel t positif ou nul, l'égalité suivante :

$$g(t) = \frac{100}{1 + 99 \times 4^{-t}}.$$

3. Tracer, sur la feuille donnée en Annexe II, la courbe Γ représentative de g, l'asymptote à Γ ainsi que le point de Γ d'abscisse t_0.

4. Dans quelles conditions le premier modèle vous semble-t-il adapté aux observations faites ?

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2003

MATHÉMATIQUES
SPÉCIALITÉ

Série : S

PAGE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE.

Tournez la page S.V.P.

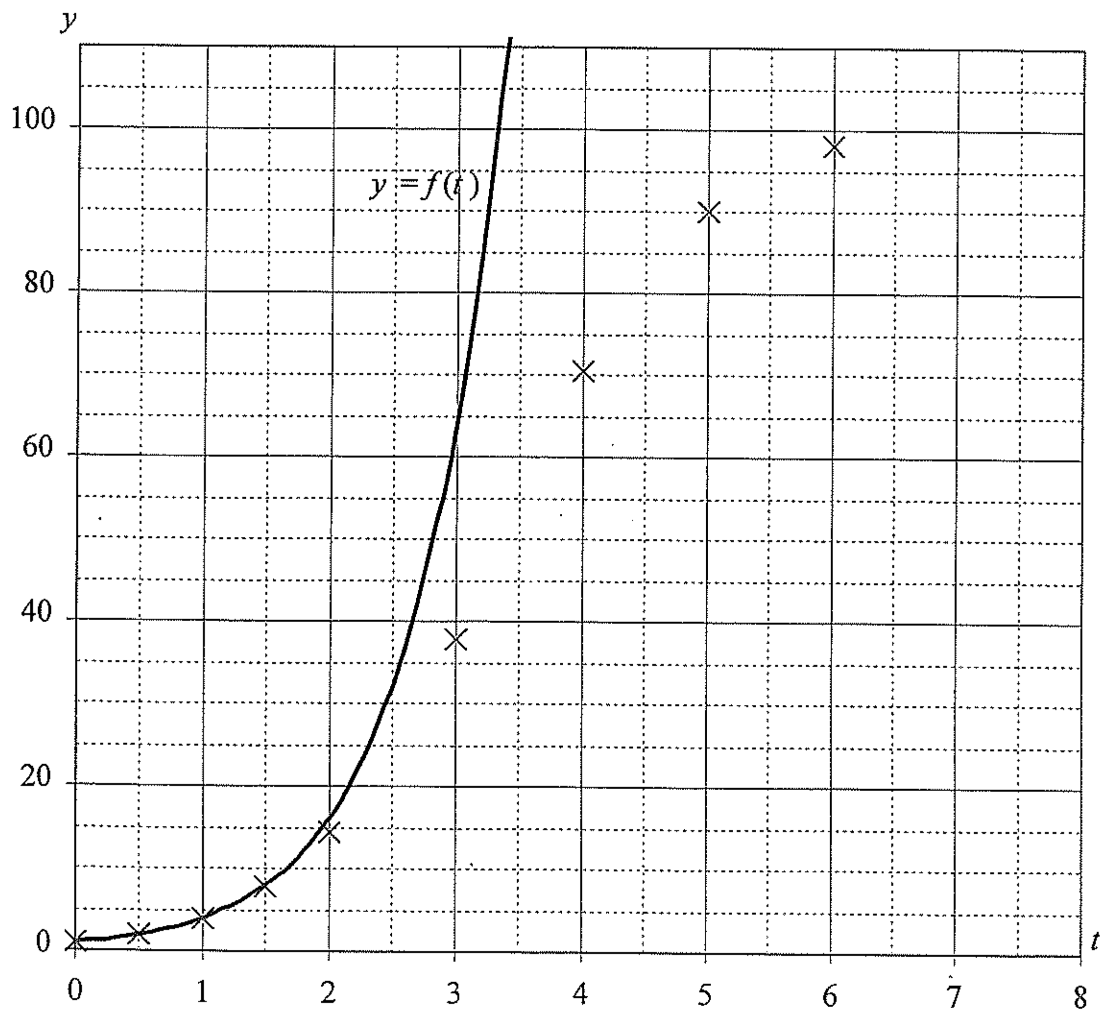
Document à rendre avec la copie

Annexe I

t (en h)	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6
Nombre de bactéries (en millions)	1,0	2,0	3,9	7,9	14,5	37,9	70,4	90,1	98

Les points obtenus à partir de ce tableau, ainsi que la fonction f, sont représentés dans le repère ci-dessous.

Annexe II



BACCALAURÉAT, SÉRIE S

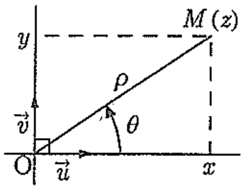
ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE ET ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. NOMBRES COMPLEXES, GÉOMÉTRIE

A. NOMBRES COMPLEXES

Dans le repère orthonormal $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$ le point $M(x, y)$, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, a pour affixe z.



z a pour forme algébrique $x + i\,y$.

Partie réelle de z : $\mathrm{Re}(z) = x$

Partie imaginaire de z : $\mathrm{Im}(z) = y$

Conjugué de z : $\overline{z} = x - i\,y$

Module de z : $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Si $z \neq 0$,

z a pour forme trigonométrique : $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

z a pour forme exponentielle : $z = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$

Module de z : $|\,z\,| = \rho$

Argument de z : $\arg z = \theta\ [2\pi]$

Conjugué de z : $\overline{z} = \rho\,\mathrm{e}^{-i\theta}$

Propriétés des modules

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\,\overline{z}\,| = |\,z\,|$

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|\,z\,|}$

Pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$, $|\,z\,z'\,| = |\,z\,|\ |\,z'\,|$

Si A et B ont pour affixes respectives z_A et z_B alors $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$ et $AB = |z_B - z_A|$.

Propriétés des arguments

Pour tous $z \in \mathbb{C}^*$ et $z' \in \mathbb{C}^*$,

$\arg(z\,z') = \arg(z) + \arg(z')\ \ [2\pi]$

$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ \ [2\pi]$

Caractérisation complexe de transformations $M(z) \mapsto M'(z')$

Translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe t, $t \in \mathbb{C}$: $z' = z + t$

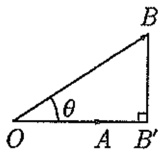
Homothétie de centre Ω d'affixe ω, $\omega \in \mathbb{C}$, et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$: $z' - \omega = k(z - \omega)$

Rotation de centre Ω d'affixe ω, $\omega \in \mathbb{C}$, et d'angle de mesure $\theta \in \mathbb{R}$: $z' - \omega = \mathrm{e}^{i\theta}(z - \omega)$

B. GÉOMÉTRIE

Produit scalaire de deux vecteurs non nuls du plan

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overline{OA} \times \overline{OB'}$ $\qquad$ $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos\theta$



Produit scalaire et coordonnées

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ admettent pour coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans un repère orthonormal de l'espace alors $\vec{u}.\vec{v} = x\,x' + y\,y' + z\,z'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$.

Une équation de la sphère de centre Ω de coordonnées (a, b, c) et de rayon R est $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

II. ALGÈBRE, TRIGONOMÉTRIE

A. IDENTITÉS REMARQUABLES

Pour tous $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$,

$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 - b^3$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - a\,b + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + a\,b + b^2)$

Pour tous $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}\,b + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k}\,b^k + \ldots + b^n$

B. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ DANS $\mathbb{C}$

Soient a, b et c trois nombres réels ($a \neq 0$) et $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$.

L'équation $a\,z^2 + b\,z + c = 0$ admet :

- lorsque $\Delta > 0$, deux solutions réelles
  $z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\,a} \qquad z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\,a}$
- lorsque $\Delta = 0$, une solution réelle $z_1 = -\dfrac{b}{2\,a}$
- lorsque $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées
  $z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2\,a} \qquad z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2\,a}$

Si $\Delta \neq 0$, $\quad a\,z^2 + b\,z + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

Si $\Delta = 0$, $\quad a\,z^2 + b\,z + c = a(z - z_1)^2$

C. TRIGONOMÉTRIE

Formules d'addition

Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$,

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

Formules de duplication

Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$

$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$

$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$

III. PROBABILITÉS

A. GÉNÉRALITÉS

Si les événements A et B sont incompatibles alors

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ $\qquad P(\Omega) = 1$ $\qquad P(\emptyset) = 0$

Si $A_1, \dots, A_n$ forment une partition de A, $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Dans le cas de l'équiprobabilité,

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$$

Probabilité conditionnelle de B sachant A

$P_A(B)$ est définie par $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$

Cas où A et B sont indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Formule des probabilités totales

Si les événements $B_1, B_2, \dots, B_n$ forment une partition de Ω

alors $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n)$

B. VARIABLE ALÉATOIRE

Espérance mathématique : $\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Variance : $\mathrm{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \mathrm{E}(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (\mathrm{E}(X))^2$

Ecart-type : $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$

C. COMBINAISONS ET FORMULE DU BINÔME

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant p \leqslant n$,

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ $\qquad 0! = 1$.

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \qquad \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Le nombre de sous-ensembles à p éléments d'un ensemble à n éléments est égal à $\binom{n}{p}$.

Pour tous $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + b^n$$

D. LOIS DE PROBABILITÉ

Loi de Bernoulli de paramètre p, $p \in [0\,;1]$

X peut prendre les valeurs 0 et 1 avec les probabilités

$P(X=1) = p$ $\quad$ et $\quad$ $P(X=0) = 1-p$

$\mathrm{E}(X) = p$ $\qquad \mathrm{V}(X) = p(1-p)$

Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0\,;1]$

X peut prendre les valeurs entières $0, 1, \dots, n$

Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$\mathrm{E}(X) = np$ $\qquad \mathrm{V}(X) = np(1-p)$

Loi uniforme sur $[0\,;1]$

J étant un intervalle inclus dans $[0\,;1]$,

$P(J) = \text{longueur de } J$

Loi exponentielle de paramètre λ sur $[0\,;+\infty[$,

dite aussi loi de durée de vie sans vieillissement

Pour $0 \leqslant a \leqslant b$, $P([a, b]) = \int_a^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$

Pour tout $c \geqslant 0$, $P([c, +\infty[) = 1 - \int_0^c \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$

IV. ANALYSE

A. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suite arithmétique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $a \in \mathbb{R}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + a$

$u_n = u_0 + n\,a$

Suite géométrique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $b \in \mathbb{R}^*$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = b\,u_n$

$u_n = u_0\,b^n$

Somme de termes

$1 + 2 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Si $b \neq 1$ alors $1 + b + b^2 + \dots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$.

Limite d'une suite géométrique

Si $0 < b < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} b^n = 0$.

Si $b > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} b^n = +\infty$.

B. PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DE FONCTIONS USUELLES

1. *Fonctions exponentielles et logarithmes*

$e^0 = 1$

Pour tous réels a et b,

$e^{a+b} = e^a\,e^b \qquad e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b} \qquad (e^a)^b = e^{a\,b}$

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

$\ln 1 = 0 \qquad \ln e = 1$

Pour tous $a > 0$ et $b > 0$,

$\ln a\,b = \ln a + \ln b$ et $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Pour tout $a \in]0\,;+\infty[$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$a^x = e^{x \ln a} \qquad \ln(a^x) = x \ln a$

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y \in]0\,;+\infty[$,

$y = e^x$ équivaut à $x = \ln y$.

2. *Racine $n^{ème}$*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $x \in [0\,;+\infty[$ et $y \in [0\,;+\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

C. LIMITES USUELLES DE FONCTIONS

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} x\,e^x = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} x^n\,e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} x^n\,e^{-x} = 0$

Comportement à l'origine de $\ln(1+x)$, e^x, $\sin x$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

D. DÉRIVÉES ET PRIMITIVES

Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives sur des intervalles convenables. Les hypothèses permettant de les utiliser doivent être vérifiées par les candidats.

1. *Dérivées et primitives des fonctions usuelles*

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$n\,x^{n-1}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \times \ln a$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$

2. *Opérations sur les dérivées*

$(u+v)' = u' + v'$ $\qquad (k\,u)' = k\,u'$ k étant une constante

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$ $\qquad \left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$ $\qquad (v \circ u)' = (v' \circ u)\,u'$

$(\mathrm{e}^u)' = \mathrm{e}^u\,u'$ $\qquad (\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

E. CALCUL INTÉGRAL

Les hypothèses permettant d'utiliser les formules suivantes doivent être vérifiées par les candidats.

Formules fondamentales

Si F est une primitive de f alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

$\displaystyle\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Si $g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ alors $g'(x) = f(x)$.

Formule de Chasles

$\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$

Linéarité

$\displaystyle\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

Positivité

Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Ordre

Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Inégalité de la moyenne

Si $a \leqslant b$ et $m \leqslant f \leqslant M$

alors $m(b-a) \leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a)$

Intégration par parties

$\displaystyle\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)\,v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$

La *valeur moyenne* de f sur $[a, b]$ $(a \neq b)$ est $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

F. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Pour tous $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, les solutions de l'équation différentielle $y' = a\,y + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = C\,\mathrm{e}^{a\,x} - \dfrac{b}{a}$, $C \in \mathbb{R}$.

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

A. CONGRUENCES

Pour tous $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$,

si $a \equiv b \quad [n]$ et $a' \equiv b' \quad [n]$, alors

$a + a' \equiv b + b' \quad [n]$ $\qquad a - a' \equiv b - b' \quad [n]$

$a\,a' \equiv b\,b' \quad [n]$ $\qquad a^p \equiv b^p \quad [n]$

B. CARACTÉRISATION COMPLEXE DES SIMILITUDES

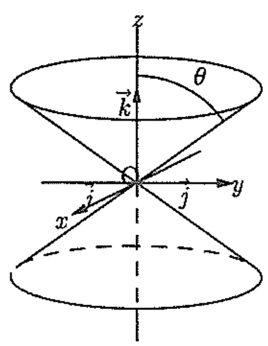
- Similitude directe : $z' = a\,z + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$
- Similitude indirecte : $z' = a\,\overline{z} + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$

Dans les deux cas, le rapport de la similitude est égal à $|a|$

C. ENSEMBLES DE POINTS

Dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, une équation du cylindre d'axe $(\mathrm{O}; \vec{k})$ et de rayon $r > 0$ est $x^2 + y^2 = r^2$.

Une équation d'un cône d'axe $(\mathrm{O}; \vec{k})$ est $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \theta$.



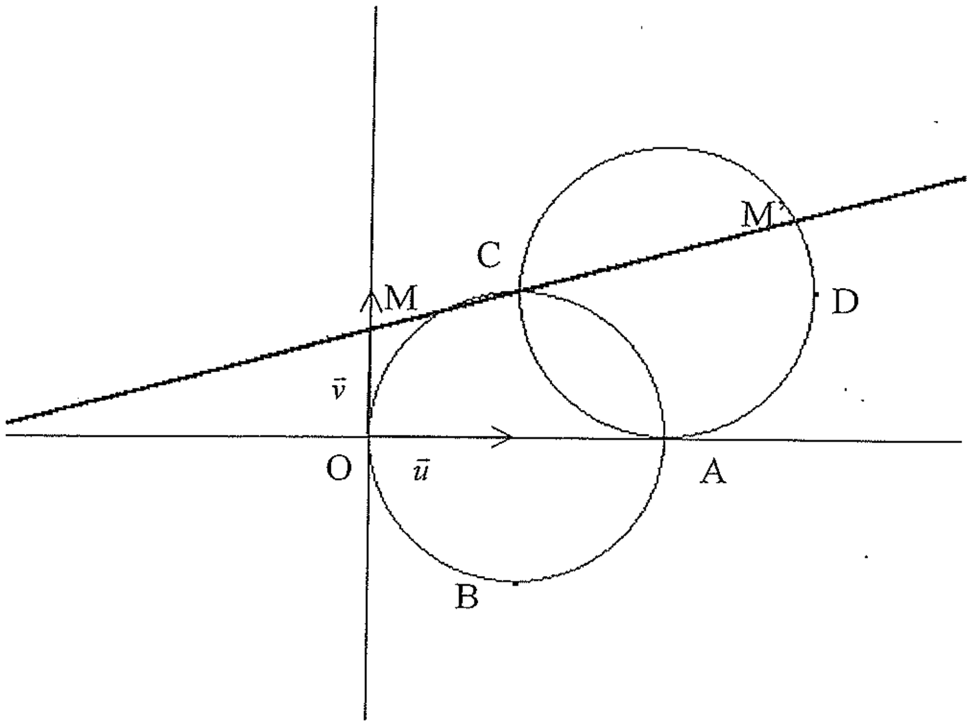
CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

ÉLÉMENTS DE CORRECTION ET BARÈME INDICATIF PROPOSÉS

N.B. : Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. Les règles de confidentialité habituelles concernant les travaux des jurys, des commissions d'entente et des permanences téléphoniques s'appliquent à son contenu.

Exercice 1, commun à tous les candidats. *Sur 4 points.*



1 point, y compris la figure avec les points A, B, C *et le cercle* C.

1. *a.*
   b. $-1-i=-i(1-i)$

1 point

2. *a.* Une mesure de cet angle est $-\frac{\pi}{2}$. Si on note d l'affixe de D, on peut écrire :
   $d-2=-i(-1+i)$
   Donc $d = 3 + i$.
   C' est le cercle de diamètre $[\text{CD}]$.

2 points, y compris la figure explicitement demandée

3. *a.* Cette écriture fait apparaître l'affixe du milieu Ω de $[\text{OA}]$ et une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega M}\right)$.
   b. $z'-2=-i(z-2)$ s'écrit : $z'=2-i\left(1+e^{i\theta}-2\right)$
   et finalement : $z'=2+i+e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$, qui fait bien apparaître C'.
   c. $\frac{z'-c}{z-c}=\frac{1+e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}}{-i+e^{i\theta}}$, qui se simplifie en : $\frac{z'-c}{z-c}=\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

Exercice 2, pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité. ***Sur 5 points.***

0,5 point

1. Le triangle ABC est équilatéral.

1,5 points

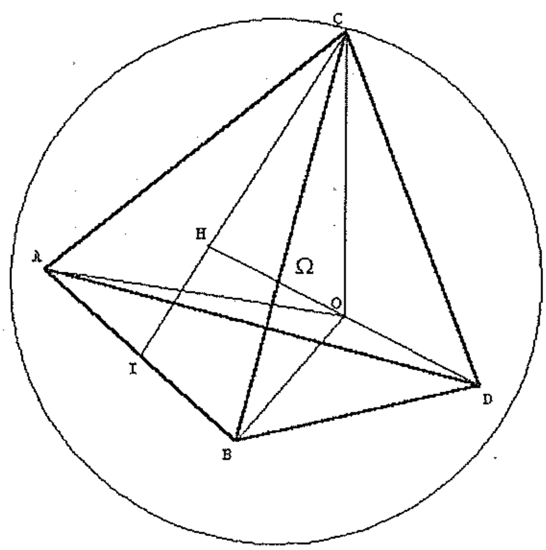
2. La droite (AB) est perpendiculaire à (CI) par définition et à (OI) puisque le triangle AOB est rectangle isocèle. Elle est donc perpendiculaire au plan (OCI), donc orthogonale à (OH). Pour la suite, (OH) est perpendiculaire à (CI) et orthogonale à (AB), donc perpendiculaire au plan (ABC).
On peut poursuivre le raisonnement « en tournant » autour de (OH) ou montrer que, dans le triangle rectangle OCI, les segments déterminés par la hauteur sur l'hypoténuse sont dans un rapport 2, qui caractérise H comme centre de gravité, donc orthocentre, du triangle équilatéral ABC.

1,5 points

3. *a.* $V=\frac{1}{3}\times a\times\frac{a^2}{2}$, qu'on écrit : $V=\frac{a^3}{6}$.
Le côté du triangle équilatéral ABC est $a\sqrt{2}$. Son aire est $S=\frac{1}{2}\times a\sqrt{2}\times\frac{a\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}$, qu'on écrit : $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
b. $OH=\frac{3V}{S}$, et donc $OH=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

1,5 points

4. *a.* On a donné plus haut une définition barycentrique de H.
b. Cette longueur commune est $a\sqrt{2}$.
c. Ω appartient au plan médiateur de chacune des segments [AB], [BC], [CA], donc à leur intersection (OH). On peut écrire $\Omega A=\Omega D$ comme une équation :
$$\left(x+\frac{a}{3}\right)^2+\left(x+\frac{a}{3}\right)^2+\left(x+\frac{a}{3}\right)^2=(x-a)^2+x^2+x^2,$$
dont la solution est $\frac{a}{6}$. Le point Ω est le milieu de [OH] (ce qui peut aussi être trouvé avec un raisonnement barycentrique).



Exercice 2, pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité. ***Sur 5 points.***

1,5 points

1. *a.* Des vecteurs normaux à ces plans ne sont pas colinéaires.
   b. On peut paramétrer par x ou z de façon presque immédiate.
   c. En considérant le point M de Δ d'abscisse 1 et son projeté N sur l'axe Ox, on trouve la distance MN égale à $\sqrt{7}$. Ce nombre est aussi la tangente du demi-angle au sommet du cône. D'où l'équation de celui-ci.

1 point

2. L'hyperbole est l'intersection de Γ avec un plan parallèle à l'axe du cône (une équation cartésienne d'un tel plan a un coefficient de x nul), le cercle est l'intersection du cône avec un plan perpendiculaire à Ox (donc d'équation $x = a$).

1,5 points

3. *a.* Le tableau ci-dessous donne les restes modulo 7 des entiers compris entre 0 et 6 :

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	9	16	25	36
Reste modulo 7	0	1	4	2	2	4	1

   b. Le tableau précédent donne la réponse à la question *a.* En additionnant deux quelconques des restes recensés à la troisième ligne, on trouve 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, et on ne trouve 0 qu'avec la somme 0 + 0.

1 point

4. *a.* Les coordonnée de A vérifient : $b^2+c^2=7a^2$.
7 divise donc le premier membre, donc chacun des entiers b et c. Donc 49 divise le deuxième membre, donc 7 divise a^2. Comme 7 est premier, 7 divise a.
   b. Une méthode de « descente » conduit au résultat.

Problème, commun à tous les candidats. ***Sur 11 points.***

2 points

Partie A

1. L'unique solution de l'équation différentielle vérifiant $f(0)=N_0$ est définie par : $f(t)=N_0e^{at}$.
2. La condition $f(T)=2f(0)$ s'écrit : $a=\frac{1}{T}\ln 2$, d'où le résultat.

Partie B

3 points pour la question 1

1. *a.* g étant strictement positive et dérivable, g' l'est aussi. On écrit : $\left(\frac{1}{g}\right)'(t)+a\left(\frac{1}{g}\right)(t)=\frac{-g'(t)+ag(t)}{(g(t))^2}$ qui, en tenant compte de l'hypothèse exprimée par (E), donne l'implication demandée.
   b. Les solutions de (E') sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ pour lesquelles on peut trouver un réel k tel que, pour tout réel t, $f(t)=\frac{1}{\mathrm{M}}+ke^{-at}$.

Cette « réciproque ne va nullement de soi.

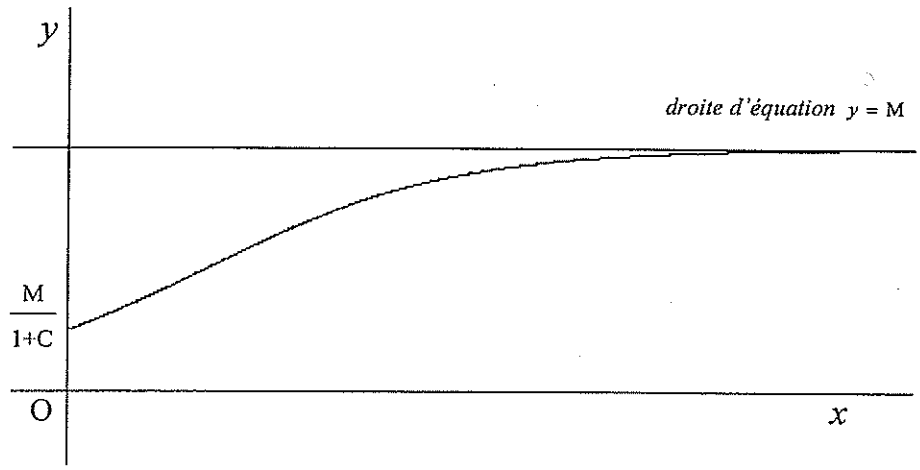
   c. Si h est une solution strictement positive de (E'), h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne prend pas la valeur 0. Les calculs précédents peuvent alors être faits « à l'envers ».

4 points

2. *a.* Le dénominateur de l'expression définissant g peut être lu comme l'image du réel t par une fonction positive décroissante ayant pour limite 1 en $+\infty$. Cette observation fournit les résultats.

b. La fonction g' a le signe de g, qui est donc croissante.

Cette courbe n'est pas demandée. Elle tient lieu de résumé de l'étude des variations.



La fonction g est continue et croissante sur $\mathbb{R}^+$. Son minimum est $\frac{M}{1+C}$ et elle prend des valeurs supérieures à $\frac{M}{2}$. Donc elle prend la valeur $\frac{M}{2}$, en une seule occasion.

c. De $g' = ag - \frac{a}{M}g^2$, on déduit l'égalité demandée. Le signe de g'' est celui de $1 - \frac{2g}{M}$. L'existence et l'unicité de t_0 étaient prouvées par des considérations d'analyse. On trouve la valeur de t_0 en résolvant l'équation $\frac{M}{2} = \frac{M}{1+Ce^{-at}}$. Elle s'écrit aussi : $Ce^{-at} = 1$, et a pour solution $t_0 = \frac{1}{a}\ln C$.

Cette question peut être minimisée, car elle n'apporte rien.

d. Cette valeur moyenne est donnée par :

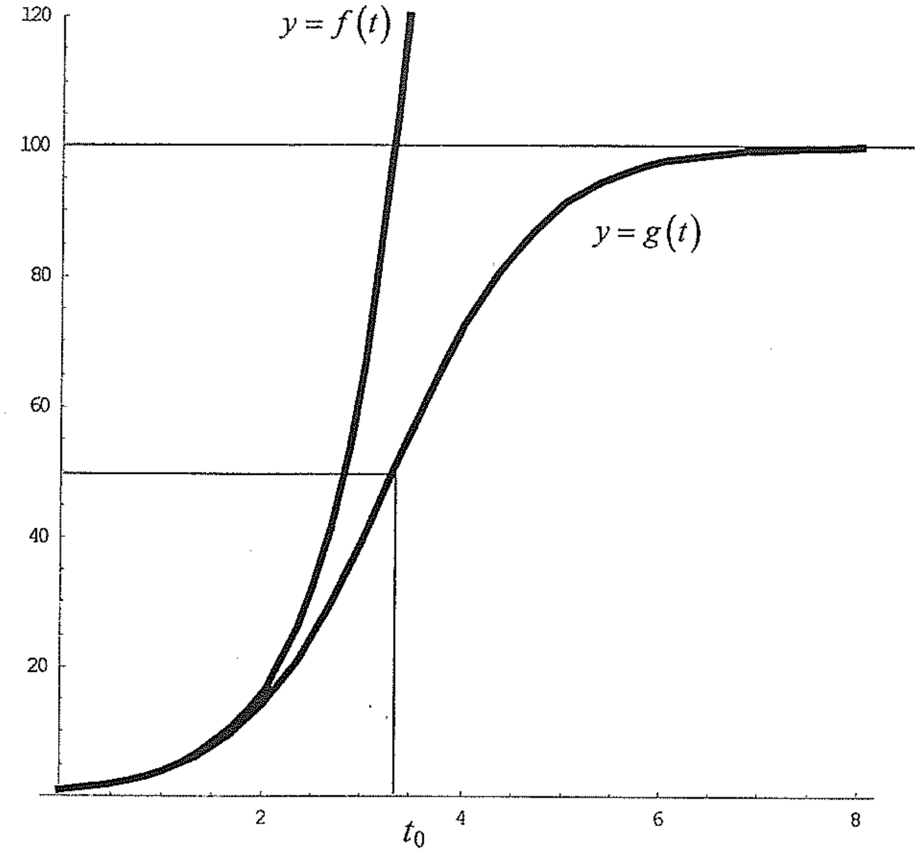
$m = \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} \frac{M}{1+Ce^{-at}}dt$, et elle s'écrit finalement : $m = aM\frac{\ln(2C) - \ln(C+1)}{\ln C}$.

Partie C

2 points (car l'ensemble est peut-être un peu touffu)

1. On trouve $N_0 = 1$, $T = 0,5$ et $a = 2\ln 2$.
2. Là encore, il ne s'agit que d'une identification.
3. *On n'a pas reproduit ci-dessous la figure à rendre, sur laquelle on perçoit clairement la réponse à la question suivante et la bonne adéquation du second modèle.*

   Les deux premières heures sont la période de validité apparente de ce premier modèle.


$y = f(t)$
$y = g(t)$
120
100
80
60
40
20
2
4
6
8
t_0

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Les guichets d'une agence bancaire d'une petite ville sont ouverts au public cinq jours par semaine : les mardi, mercredi, jeudi, vendredi et samedi.

Le tableau ci-dessous donne la répartition journalière des 250 retraits d'argent liquide effectués aux guichets une certaine semaine.

Jour de la semaine	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi
Rang i du jour	1	2	3	4	5
Nombre de retraits	37	55	45	53	60

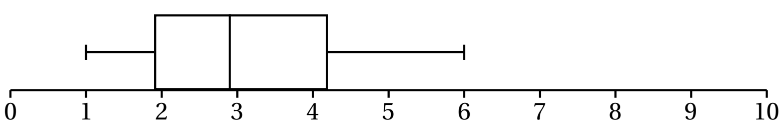
On veut tester l'hypothèse « le nombre de retraits est indépendant du jour de la semaine ». On suppose donc que le nombre des retraits journaliers est égal à $\frac{1}{5}$ du nombre des retraits de la semaine.

On pose $d^2_{\text{obs}} = \displaystyle\sum_{i=1}^{5}\left(f_i - \frac{1}{5}\right)^2$ où f_i est la fréquence des retraits du i-ème jour.

1. Calculer les fréquences des retraits pour chacun des cinq jours de la semaine.
2. Calculer alors la valeur de $1\,000 d^2_{\text{obs}}$ (la multiplication par 1 000 permet d'obtenir un résultat plus lisible).
3. En supposant qu'il y a équiprobabilité des retraits journaliers, on a simulé 2 000 séries de 250 retraits hebdomadaires.

   Pour chaque série, on a calculé la valeur du $1\,000 d^2_{\text{obs}}$ correspondant. On a obtenu ainsi 2 000 valeurs de $1\,000 d^2_{\text{obs}}$.

   Ces valeurs ont permis de construire le diagramme en boîte ci-dessous où les extrémités des « pattes » correspondent respectivement au premier décile et au neuvième décile.

   Lire sur le diagramme une valeur approchée du neuvième décile.
4. En argumentant soigneusement la réponse, dire si pour la série observée au début, on peut affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 10 %, que « le nombre de retraits est indépendant du jour de la semaine » ?

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une enquête a montré que :

- avant de passer l'épreuve théorique du permis de conduire (c'est-à-dire le code) 75 % des candidats ont travaillé très sérieusement cette épreuve,
- lorsqu'un candidat a travaillé très sérieusement, il obtient le code dans 80 % des cas,
- lorsqu'un candidat n'a pas beaucoup travaillé, il n'obtient pas le code dans 70 % des cas.

On interroge au hasard un candidat qui vient de passer l'épreuve théorique (on rappelle que les résultats sont connus dès la fin de l'épreuve).

On note

T l'évènement « le candidat a travaillé très sérieusement »

R l'évènement « le candidat a réussi le code ».

Les probabilités seront données sous forme décimale, arrondies éventuellement au millième.

1. Traduire les données à l'aide d'un arbre pondéré.

2. **a.** Calculer la probabilité de l'évènement « le candidat a travaillé très sérieusement et il a obtenu le code ».

b. Montrer que la probabilité $p(\text{R})$ qu'un candidat réussisse à l'épreuve théorique est égale à 0,675.

3. Le candidat interrogé vient d'échouer. Quelle est la probabilité qu'il ait travaillé très sérieusement ?

4. À la sortie de l'épreuve, on interroge au hasard et de façon indépendante 3 candidats (on suppose que ce choix peut être assimilé à un tirage successif avec remise).

Calculer la probabilité p_3 d'interroger au moins une personne ayant échoué à l'épreuve.

5. On interroge désormais au hasard et de façon indépendante n candidats.

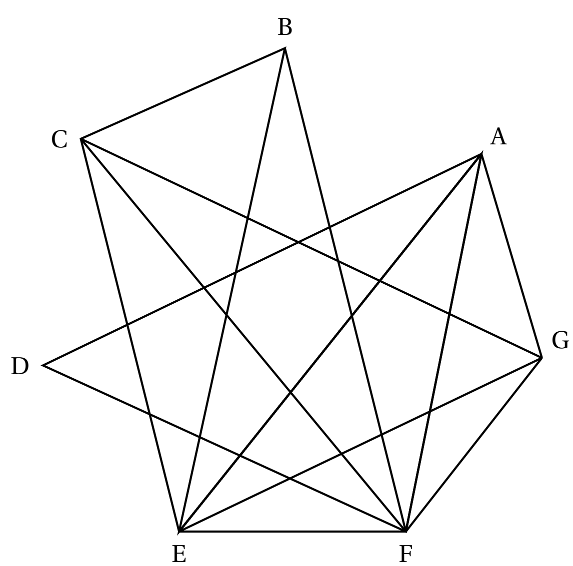
Quelle est la probabilité p_n d'interroger au moins une personne ayant échoué à l'épreuve ?

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un concert de solidarité est organisé dans une grande salle de spectacle. À ce concert sont conviés sept artistes de renommée internationale Luther Allunison (A), John Biaise (B), Phil Colline (C), Bob Ditlâne (D), Jimi Endisque (E), Robert Fripe (F) et Rory Garaguerre (G).

Les différents musiciens invités refusant de jouer avec certains autres, l'organisateur du concert doit prévoir plusieurs parties de spectacle. Les arêtes du graphe Γ ci-dessous indiquent quels sont les musiciens qui refusent de jouer entre eux.



Graphe Γ

1. Déterminer la matrice associée au graphe Γ (les sommets de Γ étant classés dans l'ordre alphabétique).

2. Quelle est la nature du sous-graphe de Γ' constitué des sommets A, E, F et G ? Que peut-on en déduire pour le nombre chromatique $\chi(\Gamma)$ du graphe Γ ?
3. Quel est le sommet de plus haut degré de Γ ? En déduire un encadrement de $\chi(\Gamma)$.
4. Après avoir classé l'ensemble des sommets de Γ par ordre de degré décroissant, colorier le graphe Γ figurant en annexe.
5. Combien de parties l'organisateur du concert doit-il prévoir ? Proposer une répartition des musiciens pour chacune de ces parties.

PROBLÈME **11 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,50]$ par

$$g(x) = (x-15)^2\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}.$$

1. On note g' la fonction dérivée de g sur $[0\,;\,50]$.
   a. Montrer que $g'(x) = \dfrac{1}{3}(x-15)(21-x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}$.
   b. Étudier le signe de g' sur $[0\,;\,50]$.
   c. Dresser le tableau de variations de g sur $[0\,;\,50]$.
2. Soit G la fonction définie pour tout x de $[0\,;\,50]$ par

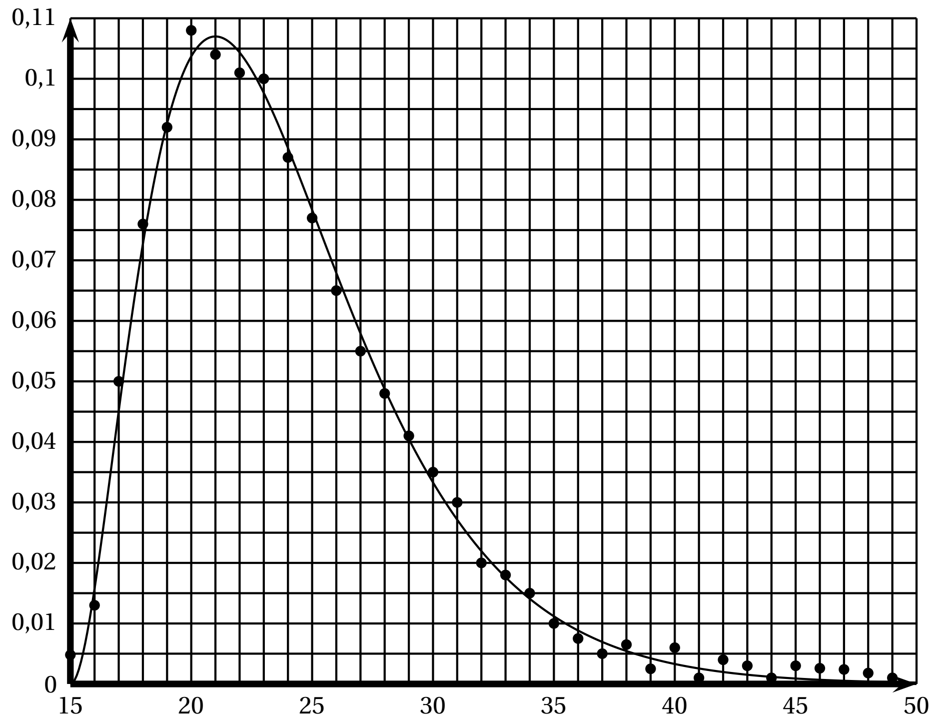
$$G(x) = 3(-x^2+24x-153)\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}.$$

   Montrer que G est une primitive de g sur $[0\,;\,50]$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[15\,;\,49]$ par $f(x) = \dfrac{107\mathrm{e}^7}{36\,000}g(x)$.

1. Justifier que f admet les mêmes variations que g sur l'intervalle $[15\,;\,49]$.
2. La représentation graphique de f dans un repère orthogonal $\mathscr{R}$ est donnée ci-dessous.



Calculer l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine plan délimité par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 15$ et $x = 49$ (on utilisera le résultat de la **question A. 2**)).

On donnera la valeur exacte de $\mathscr{A}$, puis sa valeur arrondie à 10^{-1}.

Partie C

Dans une population et pour une génération donnée, le taux de fécondité $t(k)$ à l'âge k où k est un entier compris entre 15 et 49, est le rapport entre le nombre de naissances chez les mères d'âge k et le nombre de femmes d'âge k de cette génération.

Le nuage de points représentant le taux de fécondité d'une population pour une génération donnée (l'âge étant représenté en abscisse et le taux de fécondité en ordonnée) est représenté dans le repère $\mathscr{R}$.

On appelle descendance finale la somme des taux de fécondité par âge $t(k)$; elle est donc égale à $\displaystyle\sum_{k=15}^{49} t(k)$. On suppose qu'elle peut être modélisée par l'aire délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 15$ et $x = 49$.

1. Utiliser les résultats de la **partie B** afin d'estimer la descendance finale de cette génération (on donnera un résultat arrondi à 10^{-1}).

2. Une valeur arrondie à 10^{-2}de la somme des taux de fécondité par âge est 1,20.
Comparer ce résultat avec celui obtenu à la question précédente.
Le modèle choisi paraît-il adapté ?

3. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[15 ; 49]$. Peut-on affirmer que la descendance finale est égale à cette valeur moyenne ?
Justifier votre réponse.

CORRIGE

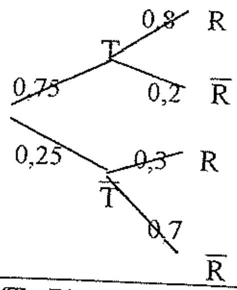
Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

ÉLÉMENTS DE CORRECTION
BARÈME PROPOSÉ

N.B. : Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. Les règles de confidentialité habituelles s'appliquent à son contenu.

<table>
<tr><th>Exercice 1</th><th colspan="2">4 points</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Les fréquences f_i se calculent à l'aide de la relation $\frac{n_i}{250}$.
<table>
<tr><td>Rang i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>n_i</td><td>37</td><td>55</td><td>45</td><td>53</td><td>60</td></tr>
<tr><td>f_i</td><td>0,148</td><td>0,22</td><td>0,18</td><td>0,212</td><td>0,24</td></tr>
</table></td><td>Barème
1</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>$d^2_{\grave{a}bs} = 0,005248$; $1000\,d^2_{\grave{a}bs} = 5,248$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Une valeur du 9^{ième} décile de la série des 1000 $d^2_{\grave{a}bs}$ lue sur le diagramme en boîte est environ 6.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Le résultat précédent signifie que, par le fait du hasard, 10% des valeurs simulées de $1000\,d^2_{\grave{a}bs}$,sous l'hypothèse d'équiprobabilité des retraits journaliers, sont supérieurs à 6 et donc 90% de ces valeurs sont inférieures à 6.
La valeur calculée de 1000 $d_{obs}{}^2$, égale à 5,248, est inférieure à 6, comme 90% des valeurs simulées. L'irrégularité apparente des retraits journaliers n'est pas suffisante pour permettre de rejeter l'hypothèse d'équiprobabilité.
Le risque d'erreur de 10% correspond au fait que dans 10% des cas on pourrait rejeter l'équiprobabilité à tort puisque, sous l'hypothèse d'équiprobabilité, 10% des valeurs de 1000 $d^2_{\grave{a}bs}$ sont supérieures à 6.</td><td>1</td></tr>
</table>

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Exercice 2	5 points	Barème
1.	Arbre 	1
2.a.	$P(T\cap R) = P_T(R) \times P(T) = 0,6$	0,5
2.b.	$P(R) = P(T\cap R) + P(\overline{T} \cap R) = 0,675$	1
3.	$P_{\overline{R}}(T) = 0,462$ au millième près.	1
4.	$p_3 = 1 - (0,675)^3$ soit 0,692 au millième près.	1
5.	$p_n = 1 - (0,675)^n$	0,5

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Exercice 2	5 points	Barème
1.	La matrice de Γ est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	1
2.	Tout sommet du sous – graphe de Γ constitué des sommets A, E, F et G est relié aux trois autres par une arête donc ce sous graphe est complet. Il s'ensuit que $\chi(\Gamma) \geq 4$.	1
3.	Le sommet de plus haut degré de Γ est F qui est de degré 6. On a donc $\chi(\Gamma) \leq 6 + 1$ soit $\chi(\Gamma) \leq 7$. Du résultat précédent, nous déduisons : $4 \leq \chi(\Gamma) \leq 7$.	1
4.	L'ensemble des sommets de Γ classés par ordre de degrés décroissants est : <table><tr><td>Sommet</td><td>F</td><td>E</td><td>A</td><td>C</td><td>G</td><td>B</td><td>D</td></tr><tr><td>Degré</td><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr></table> Coloriage : A et C ont la même couleur par exemple jaune B et G ont la même couleur par exemple bleue D et E ont la même couleur par exemple verte F est le seule de couleur par exemple rouge.	1,5
5.	Il a fallu 4 couleurs pour colorier Γ et nous avons montré que $\chi(\Gamma) \geq 4$. Par conséquent, $\chi(\Gamma) = 4$. Il faut donc organiser 4 parties de spectacle : - une première avec les musiciens A et C - une seconde avec les musiciens B et G - une troisième avec les musiciens D et E - une quatrième avec le musicien F	1

<table>
<tr><td>Problème</td><td>11 points</td><td>Barème</td></tr>
<tr><td>Partie A</td><td>4 points</td><td></td></tr>
<tr><td>1.a.</td><td>Calcul correct</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1.b.</td><td><table><tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>15</td><td></td><td>21</td><td></td><td>50</td></tr><tr><td>Signe de $g'(x)$</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td></td></tr></table>Ce tableau doit être justifié.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1.c.</td><td><table><tr><td>x</td><td>0</td><td>15</td><td>21</td><td>50</td></tr><tr><td>Variations de g</td><td>225 ↘</td><td>0 ↗</td><td>$e^{\frac{36}{7}}$ ↘</td><td>$1225\,e^{-\frac{50}{3}}$</td></tr></table></td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Calcul correct montrant que $G'(x) = g(x)$</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>Partie B</td><td>3 points</td><td></td></tr>
<tr><td>1.</td><td>Sur [15 ;49], $f = k\,g$ avec $k > 0$ donc f et g ont les mêmes variations.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>$\mathcal{A} = \dfrac{107\,e^{7}}{36\,000} \times \left(-\dfrac{4134}{e^{\frac{49}{3}}} + \dfrac{54}{e^{5}} \right)$ unités d'aire
$\mathcal{A} = 1{,}2$ arrondi à 0,1.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Partie C</td><td>4 points</td><td></td></tr>
<tr><td>1.</td><td>Le nombre moyen d'enfants par femme étant modélisé par l'aire délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 15$ et $x = 49$, il est égal à $\mathcal{A}$.
On en déduit que le nombre moyen d'enfants par femme de cette population est égal à 1,2.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Puisque $\sum_{k=15}^{49} f(k) = 1{,}2$ à 0,1 près, le modèle choisi semble adapté.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>La valeur moyenne de f sur [15 ;49] est égale à $\dfrac{1}{49-15}\int_{15}^{49} f(x)\,dx$ soit $\dfrac{1}{34}\mathcal{A}$.
Le nombre moyen d'enfants par femme n'est pas égal à la valeur moyenne de f sur [15 ;49].</td><td>2</td></tr>
</table>

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2003

MATHÉMATIQUES

Série : **ES**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5, et une page annexe à rendre avec la copie.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les DEUX exercices et le problème.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 *(4 points)*

Commun à tous les candidats

Les guichets d'une agence bancaire d'une petite ville sont ouverts au public cinq jours par semaine : les mardi, mercredi, jeudi, vendredi et samedi.

Le tableau ci-dessous donne la répartition journalière des 250 retraits d'argent liquide effectués aux guichets une certaine semaine.

jour de la semaine	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi
rang i du jour	1	2	3	4	5
nombre de retraits	37	55	45	53	60

On veut tester l'hypothèse « le nombre de retraits est indépendant du jour de la semaine ».

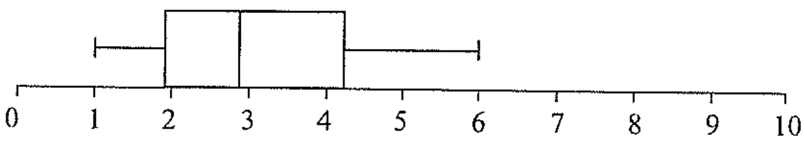
On suppose donc que le nombre des retraits journaliers est égal à $\frac{1}{5}$ du nombre des retraits de la semaine.

On pose $d^2_{obs} = \sum_{i=1}^{5}\left(f_i - \frac{1}{5}\right)^2$ où f_i est la fréquence des retraits du i-ème jour.

1. Calculer les fréquences des retraits pour chacun des cinq jours de la semaine.

2. Calculer alors la valeur de $1000\, d^2_{obs}$ (la multiplication par 1000 permet d'obtenir un résultat plus lisible).

3. En supposant qu'il y a équiprobabilité des retraits journaliers, on a simulé 2000 séries de 250 retraits hebdomadaires.
   Pour chaque série, on a calculé la valeur du $1000\, d^2_{obs}$ correspondant. On a obtenu ainsi 2000 valeurs de $1000\, d^2_{obs}$.
   Ces valeurs ont permis de construire le diagramme en boîte ci-dessous où les extrémités des « pattes » correspondent respectivement au premier décile et au neuvième décile.



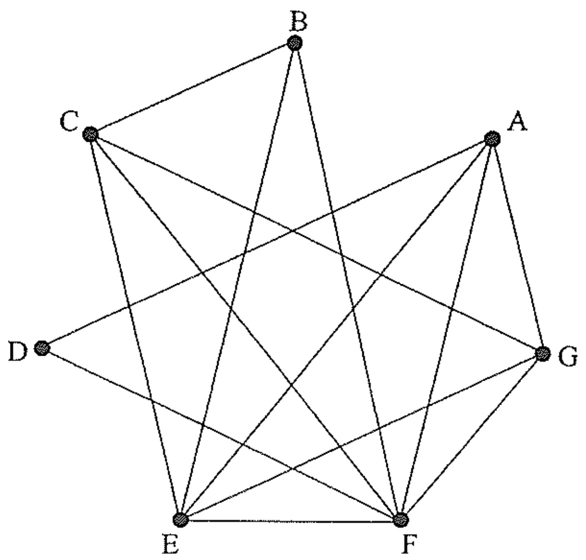
   Lire sur le diagramme une valeur approchée du neuvième décile.

4. En argumentant soigneusement la réponse, dire si pour la série observée au début, on peut affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 10 %, que « le nombre de retraits est indépendant du jour de la semaine » ?

Exercice 2 *(5 points)*

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un concert de solidarité est organisé dans une grande salle de spectacle.
A ce concert sont conviés sept artistes de renommée internationale : Luther Allunison (A), John Biaise (B), Phil Colline (C), Bob Ditlâne (D), Jimi Endisque (E), Robert Fripe (F) et Rory Garaguerre (G).
Les différents musiciens invités refusant de jouer avec certains autres, l'organisateur du concert doit prévoir plusieurs parties de spectacle.
Les arêtes du graphe Γ ci-dessous indiquent quels sont les musiciens qui refusent de jouer entre eux.



1. Déterminer la matrice associée au graphe Γ (les sommets de Γ étant classés dans l'ordre alphabétique).

2. Quelle est la nature du sous-graphe de Γ constitué des sommets A, E, F et G ?
   Que peut-on en déduire pour le nombre chromatique $\chi(\Gamma)$ du graphe Γ ?

3. Quel est le sommet de plus haut degré de Γ ?
   En déduire un encadrement de $\chi(\Gamma)$.

4. Après avoir classé l'ensemble des sommets de Γ par ordre de degré décroissant, colorier le graphe Γ figurant en annexe.

5. Combien de parties l'organisateur du concert doit-il prévoir ?
   Proposer une répartition des musiciens pour chacune de ces parties.

Tournez la page S.V.P.

Problème *(11 points)*

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ 50]$ par $g(x) = (x-15)^2\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}$.

1. On note g' la fonction dérivée de g sur $[0\ ;\ 50]$.

   a. Montrer que $g'(x) = \dfrac{1}{3}(x-15)(21-x)\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}$.

   b. Etudier le signe de g' sur $[0\ ;\ 50]$.

   c. Dresser le tableau de variations de g sur $[0\ ;\ 50]$.

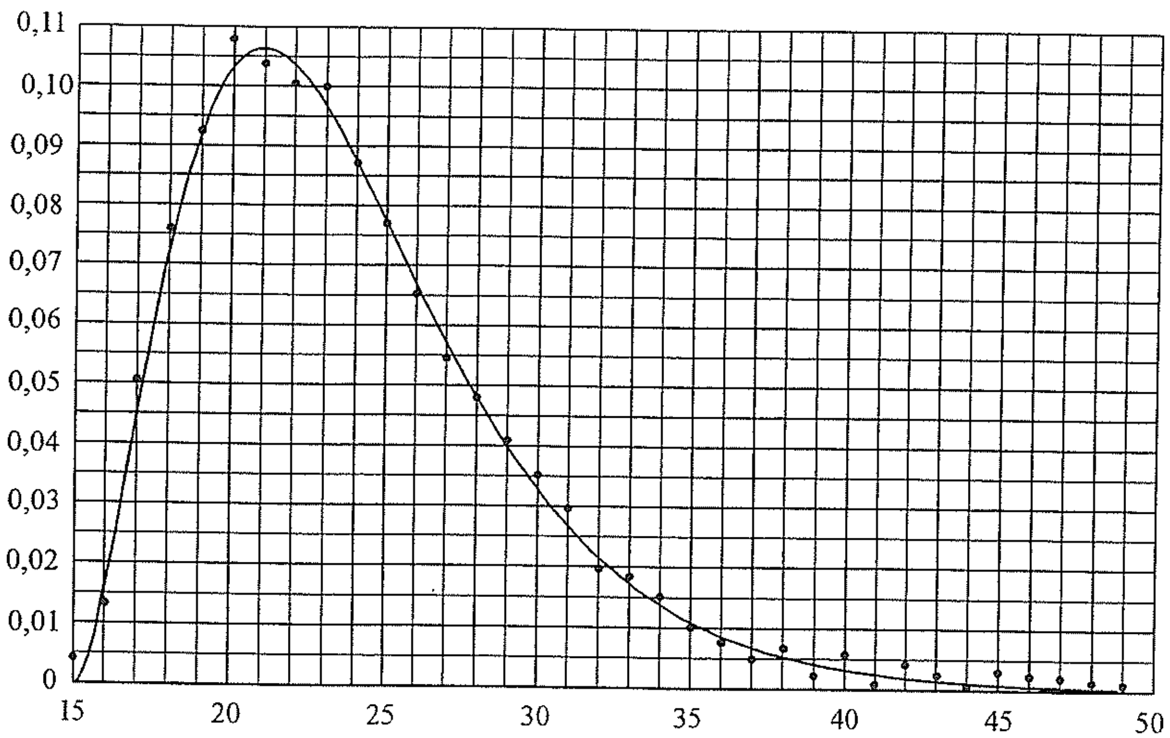
2. Soit G la fonction définie pour tout x de $[0\ ;\ 50]$ par $\mathrm{G}(x) = 3(-x^2 + 24x - 153)\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}$.
   Montrer que G est une primitive de g sur $[0\ ;\ 50]$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[15\ ;\ 49]$ par $f(x) = \dfrac{107\ \mathrm{e}^7}{36000}g(x)$.

1. Justifier que f admet les mêmes variations que g sur l'intervalle $[15\ ;\ 49]$.

2. La représentation graphique de f dans un repère orthogonal $\mathcal{R}$ est donnée ci-dessous.



Calculer l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine plan délimité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 15$ et $x = 49$ (on utilisera le résultat de la question A. 2.).
On donnera la valeur exacte de $\mathcal{A}$, puis sa valeur arrondie à 10^{-1}.

Partie C

Dans une population et pour une génération donnée, le taux de fécondité $t(k)$ à l'âge k, où k est un entier compris entre 15 et 49, est le rapport entre le nombre de naissances chez les mères d'âge k et le nombre de femmes d'âge k de cette génération.

Le nuage de points représentant le taux de fécondité d'une population pour une génération donnée (l'âge étant représenté en abscisse et le taux de fécondité en ordonnée) est représenté dans le repère $\mathcal{R}$.

On appelle descendance finale la somme des taux de fécondité par âge $t(k)$; elle est donc égale à $\sum_{k=15}^{49} t(k)$. On suppose qu'elle peut être modélisée par l'aire délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 15$ et $x = 49$.

1. Utiliser les résultats de la partie B afin d'estimer la descendance finale de cette génération (on donnera un résultat arrondi à 10^{-1}).
2. Une valeur arrondie à 10^{-2} de la somme des taux de fécondité par âge est 1,20.
   Comparer ce résultat avec celui obtenu à la question précédente.
   Le modèle choisi paraît-il adapté ?

3. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[15 ; 49]$.
   Peut-on affirmer que la descendance finale est égale à cette valeur moyenne ?
   Justifier votre réponse.

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2003

MATHÉMATIQUES
SPÉCIALITÉ

Série : **ES**

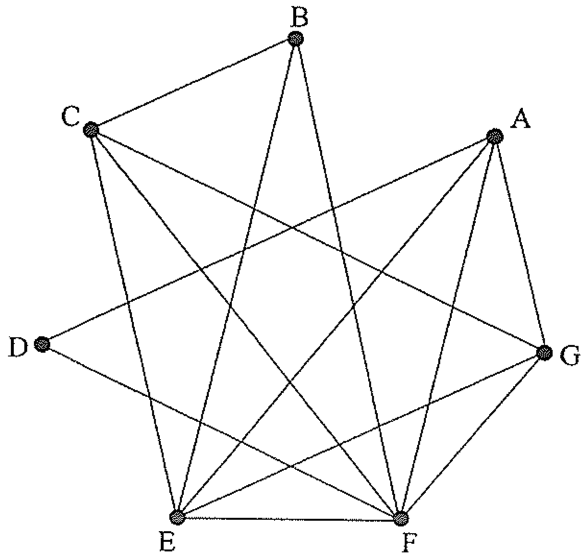
PAGE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE.

Tournez la page S.V.P.

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 2

Graphe Γ



BACCALAURÉAT, SÉRIE ES
ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE ET ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ
FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. STATISTIQUE

Moyenne, variance, écart-type

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\mathrm{V}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - (\overline{x})^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{\mathrm{V}(x)}$$

Dans le cas d'une pondération, si $n = \sum_{i=1}^{p} n_i$,

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i\, x_i$$

$$V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i\, x_i^{\,2} - (\overline{x})^2$$

Droites de régression

$$\sigma_{x\,y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}(x_i - \overline{x})\,(y_i - \overline{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}(x_i\, y_i) - \overline{x}\;\overline{y}$$

$$y = a\,x + b,\ \text{où}\ a = \frac{\sigma_{x\,y}}{\mathrm{V}(x)}$$

$$x = a'\,y + b'\ \ \text{où}\ a' = \frac{\sigma_{x\,y}}{\mathrm{V}(y)}$$

II. PROBABILITÉS

Si les événements A et B sont incompatibles alors

$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B)$.

Dans le cas général :

$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$.

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ $\qquad P(\Omega) = 1$ $\qquad P(\emptyset) = 0$

Si $A_1, \ldots, A_n$ forment une partition de A, $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Dans le cas de l'équiprobabilité,

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d' éléments de } A}{\text{Nombre d' éléments de } \Omega}$$

Probabilité conditionnelle de B sachant A

$P_A(B)$ est définie par $P(A \bigcap B) = P_A(B) \times P(A)$

Cas où A et B sont indépendants : $P(A \bigcap B) = P(A) \times P(B)$

Formule des probabilités totales

Si les événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forment une partition de Ω

alors $P(A) = P(A \bigcap B_1) + P(A \bigcap B_2) + \ldots + P(A \bigcap B_n)$

Une loi de probabilité étant donnée, on définit :

l'*espérance mathématique* : $\mathrm{E} = \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i$

la *variance* : $\mathrm{V} = \sum_{i=1}^{n} p_i\,(x_i - \mathrm{E})^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i^{\,2} - \mathrm{E}^2$

l'*écart-type* : $\sigma = \sqrt{\mathrm{V}}$

III. ALGÈBRE

A. IDENTITÉS REMARQUABLES

Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$,

$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 - b^3$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - a\,b + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + a\,b + b^2)$

B. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Soient a, b et c trois nombres réels ($a \neq 0$) et $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$.

L'équation $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ admet :

- lorsque $\Delta > 0$, deux solutions réelles
  $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\,a}$ $\quad x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\,a}$
- lorsque $\Delta = 0$, une solution réelle $x_1 = -\dfrac{b}{2\,a}$
- lorsque $\Delta < 0$, aucune solution réelle.

Si $\Delta > 0$, $\quad a\,x^2 + b\,x + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Si $\Delta = 0$, $\quad a\,x^2 + b\,x + c = a(x - x_1)^2$

C. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suite arithmétique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $a \in \mathbb{R}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = u_n + a \qquad u_n = u_0 + n\,a$

Suite géométrique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $b \in \mathbb{R}^*$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = b\,u_n \qquad u_n = u_0\,b^n$

Somme de termes

$1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Si $b \neq 1$ alors $1 + b + b^2 + \ldots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1-b}$.

IV. ANALYSE

A. PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DE FONCTIONS USUELLES

1. *Fonction exponentielle*

$e^0 = 1$

Pour tous réels a et b,

$e^{a+b} = e^a\,e^b$

$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

$(e^a)^b = e^{a\,b}$

2. *Fonction logarithme*

$\ln 1 = 0 \qquad \ln e = 1$

Pour tous $a > 0$ et $b > 0$,

$\ln a\,b = \ln a + \ln b$

$\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Pour tout $a \in]0\,;+\infty[$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$a^x = e^{x \ln a} \qquad \ln(a^x) = x \ln a$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y \in]0\,;+\infty[$, $y = e^x$ équivaut à $x = \ln y$.

B. LIMITES USUELLES DE FONCTIONS

Comportement à l'infini

$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

Croissances comparées à l'infini

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$

$\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

C. DÉRIVÉES ET PRIMITIVES

Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives sur des intervalles convenables.

Les hypothèses permettant de les utiliser doivent être vérifiées par les candidats.

1. *Dérivées et primitives des fonctions usuelles*

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$n\,x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x

2. *Opérations sur les dérivées*

$(u+v)' = u' + v'$

$(k\,u)' = k\,u'$ k étant une constante

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)\,u'$

$(e^u)' = e^u\,u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

D. ACCROISSEMENTS

Pour une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ (où $a < b$) :

L'*accroissement moyen* de f sur $[a, b]$ est $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Si $f(a) \neq 0$, l'*accroissement relatif* de f sur $[a, b]$ est $\frac{f(b) - f(a)}{f(a)}$.

E. CALCUL INTÉGRAL

Les hypothèses permettant d'utiliser les formules suivantes doivent être vérifiées par les candidats.

Si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Formule de Chasles

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$$

Linéarité

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Positivité

Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$ alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Ordre

Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$ alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

La *valeur moyenne* de f sur $[a, b]$ $(a \neq b)$ est $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

V. GÉOMÉTRIE (ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ)

En repère orthonormal :

Si $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$ alors $MM' = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$.

Si $\vec{u}$ a pour coordonnées (a, b, c) et si $\vec{v}$ a pour coordonnées (a', b', c') alors

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $a\,a' + b\,b' + c\,c' = 0$.

BACCALAUREAT GENERAL

Session 2004

MATHEMATIQUES

- Série S -

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5

EXERCICE 1 (3 points)

Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

1) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

b) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

3) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'ensemble **C** des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1) Montrer que $(1 + \mathrm{i})^6 = -8\mathrm{i}$.

2) On considère l'équation (E) : $z^2 = -8\mathrm{i}$.

a) Déduire de **1)** une solution de l'équation (E).

b) L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.

3) Déduire également de **1)** une solution de l'équation (E') : $z^3 = -8\mathrm{i}$.

4) On considère le point A d'affixe 2i et la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a) Déterminer l'affixe b du point B, image de A par r, ainsi que l'affixe c du point C, image de B par r.

b) Montrer que b et c sont solutions de (E').

5) a) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm), représenter les points A, B et C.

b) Quelle est la nature de la figure que forment les images de ces solutions ?

c) Déterminer le centre de gravité de cette figure.

EXERCICE 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève ½ point ; l'absence de réponse est comptée 0 point.
Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on donne le point $S(1 ; -2 ; 0)$ et le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x + y - 3z + 4 = 0$.

1) Une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ passant par le point S et perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ est :

A : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t, \ t \in \mathbf{R} \\ z = -3 \end{cases}$ **B** : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t, \ t \in \mathbf{R} \\ z = 1 - 3t \end{cases}$ **C** : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t, \ t \in \mathbf{R} \\ z = 3t \end{cases}$ **D** : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t, \ t \in \mathbf{R} \\ z = -3 - 3t \end{cases}$

2) Les coordonnées du point d'intersection H de la droite $\mathscr{D}$ avec le plan $\mathscr{P}$ sont :

A : $(-4; 0; 0)$ **B** : $\left(\frac{6}{5}; \frac{-9}{5}; \frac{-3}{5}\right)$ **C** : $\left(\frac{7}{9}; \frac{-2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ **D** : $\left(\frac{8}{11}; \frac{-25}{11}; \frac{9}{11}\right)$

3) La distance du point S au plan $\mathscr{P}$ est égale à :

A : $\frac{\sqrt{11}}{3}$ **B** : $\frac{3}{\sqrt{11}}$ **C** : $\frac{9}{\sqrt{11}}$ **D** : $\frac{9}{11}$

4) On considère la sphère de centre S et de rayon 3.

L'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et du plan $\mathscr{P}$ est égale :

A : au point $I(1 ; -5 ; 0)$

B : au cercle de centre H et de rayon $r = 3\sqrt{\frac{10}{11}}$

C : au cercle de centre S et de rayon $r = 2$

D : au cercle de centre H et de rayon $r = \frac{3\sqrt{10}}{11}$

EXERCICE 4 (4 points)

Commun à tous les candidats

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$: la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines est $p([0\,;t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$. Une étude statistique, montrant qu'environ 50 % d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser $p([0\,;200[) = 0{,}5$.

1) Montrer que $\lambda = \dfrac{\ln 2}{200}$.

2) Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines ? On donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale au centième près.

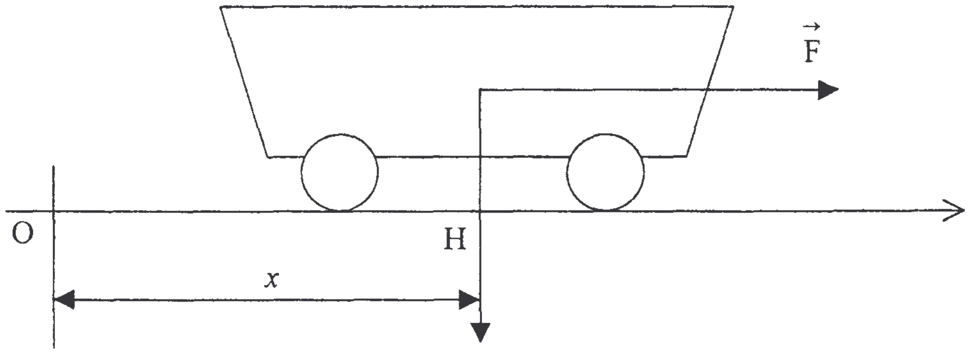
3) On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces composants est la limite quand A tend vers $+\infty$ de $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}\,dx$.

a) Montrer que $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}\,dx = \dfrac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$.

b) En déduire d_m ; on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale à la semaine près.

EXERCICE 5 (4 points)

Commun à tous les candidats



Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante $\vec{F}$ de valeur 50 N. Les forces de frottement sont proportionnelles à la vitesse et de sens contraire ; le coefficient de proportionnalité a pour valeur absolue 25 $N.m^{-1}.s^{-1}$.
La position du chariot est repérée par la distance x, en mètres, du point H à l'origine O du repère en fonction du temps t, exprimé en secondes. On prendra t dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle du mouvement (E) $25x' + 200x'' = 50$, où :

x' est la dérivée de x par rapport au temps t,
x'' est la dérivée seconde de x par rapport au temps t.

1) On note $v(t)$ la vitesse du chariot au temps t ; on rappelle que $v(t) = x'(t)$. Prouver que x est solution de (E) si et seulement si x' est solution de l'équation différentielle (F) $v' = -\frac{1}{8}v + \frac{1}{4}$.
Résoudre l'équation différentielle (F).

2) On suppose que, à l'instant $t = 0$, on a : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.

a) Calculer, pour tout nombre réel t positif, $x'(t)$.

b) En déduire que l'on a, pour tout nombre réel t positif, $x(t) = 2t - 16 + 16e^{-t/8}$.

3) Calculer $V = \lim_{t\to+\infty} v(t)$. Pour quelles valeurs de t la vitesse du chariot est-elle inférieure où égale à 90 % de sa valeur limite V ?

4) Quelle est la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes ? On exprimera cette distance en mètres, au décimètre près.

CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

BACCALAUREAT GENERAL

SESSION 2004

CORRIGE

MATHEMATIQUES

- Série S -

Ce corrigé comporte 3 pages numérotées de 1 à 3

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. La règle de confidentialité relative aux commissions d'entente et aux travaux des jurys s'applique à son contenu.

EXERCICE 1 (3 points)

1) $u_{n+1} - u_n = 2n + 3$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.

2) a) Par récurrence : $u_0 = 1$, donc $u_0 > 0^2$ et, si $u_n > n^2$, alors $u_{n+1} > n^2 + 2n + 3 > n^2 + 2n + 1$, donc $u_{n+1} > (n + 1)^2$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, donc (u_n) a pour limite $+\infty$.

3) Conjecture de : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (n + 1)^2$ (par exemple à partir des premiers termes).
Preuve par récurrence : $u_0 = (0 + 1)^2$ et, pour $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = (n + 1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4$, c'est-à-dire $u_{n+1} = (n + 2)^2$; d'où le résultat.

Remarque : la question **3)** peut être résolue indépendamment de la question **2)**.

EXERCICE 2, non spécialistes (5 points)

1) On obtient $(1 + i)^6 = -8i$ de différentes façons, par exemple par module et argument ou par la formule du binôme.

2) a) $[(1 + i)^3]^2 = -8i$, donc $(1 + i)^3$ est une solution de (E).

b) $(-z)^2 = z^2$ donc $-(1 + i)^3$ est aussi solution de (E) ; sa forme algébrique est $2 - 2i$.

3) $[(1 + i)^2]^3 = -8i$, donc $(1 + i)^2$ (c'est-à-dire $2i$) est une solution de (E′).

4) a) La rotation r se traduit par $z' = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}z$, d'où $b = -\sqrt{3}-i$ et $c = \sqrt{3}-i$.

b) $b^3 = c^3 = -8i$, donc b et c sont aussi solution de (E′).

5) a) Points $A(0\,;2)$, $B(-\sqrt{3};-1)$, $C(\sqrt{3};-1)$.

b) Le triangle ABC est équilatéral, car $AB = BC = CA = 2\sqrt{3}$.

c) $z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} = 0$, donc le centre de gravité du triangle ABC est le point O.

EXERCICE 2, spécialistes (5 points)

1) $1+x+x^2+...+x^{k-1}=\dfrac{x^k-1}{x-1}$ (somme des termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $x \neq 1$). Donc : $(x-1)(1+x+x^2+...+x^{k-1})=(x-1)\dfrac{x^k-1}{x-1}=x^k-1$.

2) a) d est un diviseur positif de n donc il existe un entier positif k tel que $n = dk$. On a alors : $a^n-1=a^{rk}-1=(a^d)^k-1$. On applique le résultat de la question précédente avec x égal à a^d ; on obtient : $a^n-1=(a^d)^k-1=(a^d-1)(1+a^d+....+(a^d)^{k-1})$, donc a^d-1 divise a^n-1.

b) On a $7 = 2^3 - 1$ et 3 divise 2004, donc 7 divise $2^{2004} - 1$. De même, on a $63 = 2^6 - 1$ et 6 divise 2004, donc 63 divise $2^{2004} - 1$; comme 9 divise 63, 9 divise aussi $2^{2004} - 1$.

3) a) Comme d est le pgcd de m et n, m' et n' sont premiers entre eux et, d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v' tels que : $um' + v'n' = 1$; alors $um'd + v'n'd = d$, c'est-à-dire $um + v'n = d$; ainsi $mu - nv = d$ avec $v = - v'$.

b) On a $d = mu - nv$, donc $(a^{mu}-1)-(a^{nv}-1)a^d=a^{mu}-1-a^{nv+d}+a^d=a^d-1$.
d divise m donc d divise mu d'où $a^d - 1$ divise $a^{mu} - 1$. De même, $a^d - 1$ divise $a^{nv} - 1$.
Posons $\text{A}=\dfrac{a^{mp}-1}{a^d-1}$ et $\text{B}=\dfrac{a^{nq}-1}{a^d-1}$; l'égalité précédente s'écrit alors $\text{A} - a^d\text{B} = 1$ donc, d'après le théorème de Bézout, A et B sont premiers entre eux et $a^d - 1$ est le pgcd de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$.

c) On prend a = 2. En choisissant $mu = 63$ et $nv = 60$, donc $d = 3$ pour $m = 9$ et $n = 15$, le pgcd cherché est $2^3 - 1 = 7$ (d'autres choix sont possibles pour m, n, u et v).

EXERCICE 3 (4 points)

1) Les coordonnées de S(1, –2, 0) vérifient le système $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=-3-3t \end{cases}$ et on peut lire celles du vecteur directeur : (1, 1, – 3).	réponse **D**
2) Les coordonnées $\left(\dfrac{8}{11};\dfrac{-25}{11};\dfrac{9}{11}\right)$ vérifient : $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=-3-3t \\ x+y-3z+4=0 \end{cases}$.	réponse **D**
3) $d = \text{SH} = \sqrt{\dfrac{(11-8)^2+(-22+25)^2+(-9)^2}{11^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{11}}$.	réponse **B**
4) le centre est H et le rayon r est solution de $\text{SH}^2 + r^2 = 9$, d'où $r=\sqrt{9-\dfrac{9}{11}}=3\sqrt{\dfrac{10}{11}}$.	réponse **B**

EXERCICE 4 (4 points)

1) $p([0\,;200[) = \int_0^{200} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-200\lambda}$, donc $e^{-200\lambda} = 0{,}5$; d'où $\lambda = \frac{\ln 2}{200}$.

2) $p([300\,;+\infty[) = 1 - p([0\,;300[) = e^{-300\lambda} = e^{-\frac{3\ln 2}{2}}$, c'est-à-dire 0,35 ou 0,36.

3) **a)** Intégration par parties : $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx = [-xe^{-\lambda x}]_0^A - \int_0^A -e^{-\lambda x} dx = \ldots = \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$.

b) En prenant $x = -\lambda A$, on a $\lim\limits_{A \to +\infty} -\lambda A e^{-\lambda A} = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{A \to +\infty} e^{-\lambda A} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, donc

$d_m = \frac{1}{\lambda} = \frac{200}{\ln 2}$, c'est-à-dire 288 ou 289 semaines.

EXERCICE 5 (4 points)

1) On a $v = x'$, donc $v' = x''$; alors (E) $\Leftrightarrow 25v + 200v' = 50 \Leftrightarrow v' = -\frac{1}{8}v + \frac{1}{4}$.

Donc $v(t) = Ce^{-\frac{1}{8}t} + 2$, C étant une constante réelle.

2) **a)** On a $v(t) = x'(t) = Ce^{-\frac{1}{8}t} + 2$; la condition $x'(0) = 0$ permet de calculer $C = -2$; donc $x'(t) = -2e^{-\frac{1}{8}t} + 2$.

b) $x(t) = 16e^{-\frac{1}{8}t} + 2t + K$, et $x(0) = 0$; donc $x(t) = 16e^{-\frac{1}{8}t} + 2t - 16$.

3) $v(t) = 2 - 2e^{-\frac{1}{8}t}$; donc V = 2.

On résout dans $[0\,;+\infty[$ l'inéquation $v(t) \leqslant 0{,}9 \times 2$, c'est-à-dire $t \leqslant 8\ln 10$; ainsi $t \in [0\,;8\ln 10]$.

4) $d = x(30) = 44 + 16e^{-3{,}75}$; $d \approx 44{,}3$ ou $d \approx 44{,}4$ (en mètres).

BACCALAUREAT GENERAL

Session 2004

MATHEMATIQUES

- Série S -

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

EXERCICE 1 (3 points)

Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

1) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

b) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

3) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1) Montrer que, pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x :

$$(x-1)(1+x+x^2+\ldots+x^{k-1}) = x^k - 1.$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier a supérieur ou égal à 2.

2) a) Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n : $n = dk$. Montrer que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.

b) Déduire de la question précédente que $2^{2004} - 1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.

3) Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur pgcd.

a) On définit m' et n' par $m = dm'$ et $n = dn'$. En appliquant le théorème de Bézout à m' et n', montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que : $mu - nv = d$.

b) On suppose u et v strictement positifs. Montrer que : $(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d = a^d - 1$.

Montrer ensuite que $a^d - 1$ est le pgcd de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$.

c) Calculer, en utilisant le résultat précédent, le pgcd de $2^{63} - 1$ et de $2^{60} - 1$.

EXERCICE 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève ½ point ; l'absence de réponse est comptée 0 point.
Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on donne le point S(1 ; – 2 ; 0) et le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x + y - 3z + 4 = 0$.

1) Une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ passant par le point S et perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ est :

A : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t\,,\ t \in \mathbf{R} \\ z = -3 \end{cases}$ **B** : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t\,,\ t \in \mathbf{R} \\ z = 1 - 3t \end{cases}$ **C** : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t\,,\ t \in \mathbf{R} \\ z = 3t \end{cases}$ **D** : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t\ \ ,\ t \in \mathbf{R} \\ z = -3 - 3t \end{cases}$

2) Les coordonnées du point d'intersection H de la droite $\mathscr{D}$ avec le plan $\mathscr{P}$ sont :

A : $(-4; 0; 0)$ **B** : $\left(\frac{6}{5}; \frac{-9}{5}; \frac{-3}{5}\right)$ **C** : $\left(\frac{7}{9}; \frac{-2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ **D** : $\left(\frac{8}{11}; \frac{-25}{11}; \frac{9}{11}\right)$

3) La distance du point S au plan $\mathscr{P}$ est égale à :

A : $\frac{\sqrt{11}}{3}$ **B** : $\frac{3}{\sqrt{11}}$ **C** : $\frac{9}{\sqrt{11}}$ **D** : $\frac{9}{11}$

4) On considère la sphère de centre S et de rayon 3.

L'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et du plan $\mathscr{P}$ est égale :

A : au point I(1 ; – 5 ; 0)

B : au cercle de centre H et de rayon $r = 3\sqrt{\frac{10}{11}}$

C : au cercle de centre S et de rayon $r = 2$

D : au cercle de centre H et de rayon $r = \frac{3\sqrt{10}}{11}$

EXERCICE 4 (4 points)

Commun à tous les candidats

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$: la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines est $p([0\,;t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$. Une étude statistique, montrant qu'environ 50 % d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser $p([0\,;200[) = 0{,}5$.

1) Montrer que $\lambda = \dfrac{\ln 2}{200}$.

2) Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines ? On donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale au centième près.

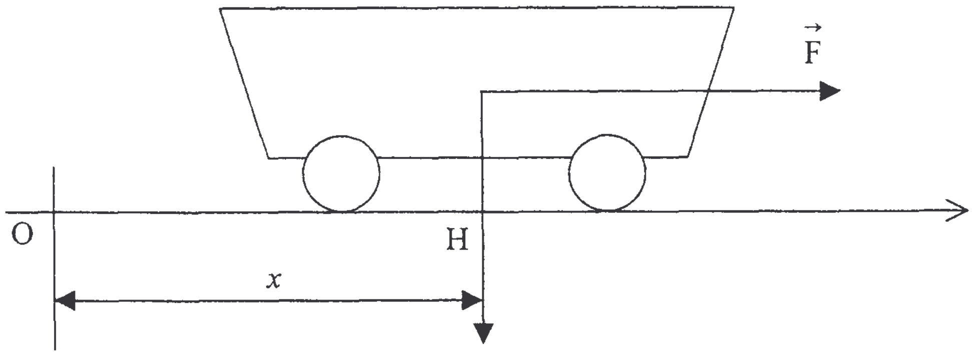
3) On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces composants est la limite quand A tend vers $+\infty$ de $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}\,dx$.

a) Montrer que $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}\,dx = \dfrac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$.

b) En déduire d_m ; on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale à la semaine près.

EXERCICE 5 (4 points)

Commun à tous les candidats



Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante $\vec{F}$ de valeur 50 N. Les forces de frottement sont proportionnelles à la vitesse et de sens contraire ; le coefficient de proportionnalité a pour valeur absolue 25 $N.m^{-1}.s^{-1}$.
La position du chariot est repérée par la distance x, en mètres, du point H à l'origine O du repère en fonction du temps t, exprimé en secondes. On prendra t dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle du mouvement (E) $25x' + 200x'' = 50$, où :

x' est la dérivée de x par rapport au temps t,
x'' est la dérivée seconde de x par rapport au temps t.

1) On note $v(t)$ la vitesse du chariot au temps t ; on rappelle que $v(t) = x'(t)$. Prouver que x est solution de (E) si et seulement si x' est solution de l'équation différentielle (F) $v' = -\frac{1}{8}v + \frac{1}{4}$.
Résoudre l'équation différentielle (F).

2) On suppose que, à l'instant $t = 0$, on a : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.

a) Calculer, pour tout nombre réel t positif, $x'(t)$.

b) En déduire que l'on a, pour tout nombre réel t positif, $x(t) = 2t - 16 + 16e^{-t/8}$.

3) Calculer $V = \lim_{t \to +\infty} v(t)$. Pour quelles valeurs de t la vitesse du chariot est-elle inférieure où égale à 90% de sa valeur limite V ?

4) Quelle est la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes ? On exprimera cette distance en mètres, au décimètre près.

CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

BACCALAUREAT GENERAL

SESSION 2004

CORRIGE

MATHEMATIQUES

- Série S -

Ce corrigé comporte 3 pages numérotées de 1 à 3

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. La règle de confidentialité relative aux commissions d'entente et aux travaux des jurys s'applique à son contenu.

EXERCICE 1 (3 points)

1) $u_{n+1} - u_n = 2n + 3$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.

2) a) Par récurrence : $u_0 = 1$, donc $u_0 > 0^2$ et, si $u_n > n^2$, alors $u_{n+1} > n^2 + 2n + 3 > n^2 + 2n + 1$, donc $u_{n+1} > (n + 1)^2$.

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$, donc (u_n) a pour limite $+\infty$.

3) Conjecture de : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (n + 1)^2$ (par exemple à partir des premiers termes).
Preuve par récurrence : $u_0 = (0 + 1)^2$ et, pour $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = (n + 1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4$, c'est-à-dire $u_{n+1} = (n + 2)^2$; d'où le résultat.

Remarque : la question **3)** peut être résolue indépendamment de la question **2)**.

EXERCICE 2, non spécialistes (5 points)

1) On obtient $(1 + i)^6 = -8i$ de différentes façons, par exemple par module et argument ou par la formule du binôme.

2) a) $[(1 + i)^3]^2 = -8i$, donc $(1 + i)^3$ est une solution de (E).

b) $(-z)^2 = z^2$ donc $-(1 + i)^3$ est aussi solution de (E) ; sa forme algébrique est $2 - 2i$.

3) $[(1 + i)^2]^3 = -8i$, donc $(1 + i)^2$ (c'est-à-dire $2i$) est une solution de (E′).

4) a) La rotation r se traduit par $z' = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}z$, d'où $b = -\sqrt{3} - i$ et $c = \sqrt{3} - i$.

b) $b^3 = c^3 = -8i$, donc b et c sont aussi solution de (E′).

5) a) Points $A(0\,;2)$, $B(-\sqrt{3}\,;-1)$, $C(\sqrt{3}\,;-1)$.

b) Le triangle ABC est équilatéral, car $AB = BC = CA = 2\sqrt{3}$.

c) $z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} = 0$, donc le centre de gravité du triangle ABC est le point O.

EXERCICE 2, spécialistes (5 points)

1) $1+x+x^2+...+x^{k-1}=\dfrac{x^k-1}{x-1}$ (somme des termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $x \neq 1$). Donc : $(x-1)(1+x+x^2+...+x^{k-1})=(x-1)\dfrac{x^k-1}{x-1}=x^k-1$.

2) a) d est un diviseur positif de n donc il existe un entier positif k tel que $n = dk$. On a alors : $a^n-1=a^{rk}-1=(a^d)^k-1$. On applique le résultat de la question précédente avec x égal à a^d ; on obtient : $a^n-1=(a^d)^k-1=(a^d-1)(1+a^d+....+(a^d)^{k-1})$, donc a^d-1 divise a^n-1.

b) On a $7 = 2^3 - 1$ et 3 divise 2004, donc 7 divise $2^{2004} - 1$. De même, on a $63 = 2^6 - 1$ et 6 divise 2004, donc 63 divise $2^{2004} - 1$; comme 9 divise 63, 9 divise aussi $2^{2004} - 1$.

3) a) Comme d est le pgcd de m et n, m' et n' sont premiers entre eux et, d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v' tels que : $um' + v'n' = 1$; alors $um'd + v'n'd = d$, c'est-à-dire $um + v'n = d$; ainsi $mu - nv = d$ avec $v = -v'$.

b) On a $d = mu - nv$, donc $(a^{mu}-1)-(a^{nv}-1)a^d=a^{mu}-1-a^{nv+d}+a^d=a^d-1$.
d divise m donc d divise mu d'où $a^d - 1$ divise $a^{mu} - 1$. De même, $a^d - 1$ divise $a^{nv} - 1$.
Posons $\text{A}=\dfrac{a^{mp}-1}{a^d-1}$ et $\text{B}=\dfrac{a^{nq}-1}{a^d-1}$; l'égalité précédente s'écrit alors $\text{A} - a^d\text{B} = 1$ donc, d'après le théorème de Bézout, A et B sont premiers entre eux et $a^d - 1$ est le pgcd de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$.

c) On prend a = 2. En choisissant $mu = 63$ et $nv = 60$, donc $d = 3$ pour $m = 9$ et $n = 15$, le pgcd cherché est $2^3 - 1 = 7$ (d'autres choix sont possibles pour m, n, u et v).

EXERCICE 3 (4 points)

1) Les coordonnées de S(1, –2, 0) vérifient le système $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=-3-3t \end{cases}$ et on peut lire celles du vecteur directeur : (1, 1, – 3).	réponse **D**
2) Les coordonnées $\left(\dfrac{8}{11};\dfrac{-25}{11};\dfrac{9}{11}\right)$ vérifient : $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=-3-3t \\ x+y-3z+4=0 \end{cases}$.	réponse **D**
3) $d = \text{SH} = \sqrt{\dfrac{(11-8)^2+(-22+25)^2+(-9)^2}{11^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{11}}$.	réponse **B**
4) le centre est H et le rayon r est solution de $\text{SH}^2 + r^2 = 9$, d'où $r=\sqrt{9-\dfrac{9}{11}}=3\sqrt{\dfrac{10}{11}}$.	réponse **B**

EXERCICE 4 (4 points)

1) $p([0\,;200[) = \int_0^{200} \lambda e^{-\lambda x}dx = 1 - e^{-200\lambda}$, donc $e^{-200\lambda} = 0{,}5$; d'où $\lambda = \dfrac{\ln 2}{200}$.

2) $p([300\,;+\infty[) = 1 - p([0\,;300[) = e^{-300\lambda} = e^{-\frac{3\ln 2}{2}}$, c'est-à-dire 0,35 ou 0,36.

3) a) Intégration par parties : $\int_0^{A} \lambda x e^{-\lambda x}dx = [-xe^{-\lambda x}]_0^A - \int_0^A -e^{-\lambda x}dx = \ldots = \dfrac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$.

b) En prenant $x = -\lambda A$, on a $\lim\limits_{A \to +\infty} -\lambda A e^{-\lambda A} = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$ et $\lim\limits_{A \to +\infty} e^{-\lambda A} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$, donc

$d_m = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{200}{\ln 2}$, c'est-à-dire 288 ou 289 semaines.

EXERCICE 5 (4 points)

1) On a $v = x'$, donc $v' = x''$; alors (E) $\Leftrightarrow 25v + 200v' = 50 \Leftrightarrow v' = -\dfrac{1}{8}v + \dfrac{1}{4}$.

Donc $v(t) = Ce^{-\frac{1}{8}t} + 2$, C étant une constante réelle.

2) a) On a $v(t) = x'(t) = Ce^{-\frac{1}{8}t} + 2$; la condition $x'(0) = 0$ permet de calculer $C = -2$; donc

$x'(t) = -2e^{-\frac{1}{8}t} + 2$.

b) $x(t) = 16e^{-\frac{1}{8}t} + 2t + K$, et $x(0) = 0$; donc $x(t) = 16e^{-\frac{1}{8}t} + 2t - 16$.

3) $v(t) = 2 - 2e^{-\frac{1}{8}t}$; donc $V = 2$.

On résout dans $[0\,;+\infty[$ l'inéquation $v(t) \leqslant 0{,}9 \times 2$, c'est-à-dire $t \leqslant 8\ln 10$; ainsi $t \in [0\,;8\ln 10]$.

4) $d = x(30) = 44 + 16e^{-3{,}75}$; $d \approx 44{,}3$ ou $d \approx 44{,}4$ (en mètres).

BACCALAUREAT GENERAL

SESSION 2004

MATHÉMATIQUES

Obligatoire

SERIE : ES

DUREE DE L'EPREUVE : 3 heures - COEFFICIENT : 5

Ce sujet comporte 7 pages dont 2 feuilles ANNEXES 1 et 2.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les feuilles ANNEXES 1 et 2 sont à rendre avec la copie.

Tournez la page S.V.P

EXERCICE 1 (*5 points*)
Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions ci-dessous, une seule des réponses proposées est exacte. On demande de cocher cette réponse sur la **feuille ANNEXE 1(à rendre avec la copie)**.
Une bonne réponse rapporte 0,5 point. Une mauvaise réponse enlève 0,25 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.
Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

QUESTIONS	RÉPONSES (à porter sur la feuille ANNEXE 1)
Pour les trois premières questions, A et B sont des événements associés à une expérience aléatoire.	
1) Si B est l'événement contraire de A, alors	• $p(A)=1+p(B)$ • $p(A)=1-p(B)$ • $p(A)=p(B)$
2) Si A et B sont deux événements indépendants et $p(A)\neq 0$, alors	• $A\cap B=\varnothing$ • $p(A\cup B)=p(A).p(B)$ • $p_A(B)=p(B)$
3) Si A et B sont deux événements incompatibles alors	• $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$ • $p(A)=1-p(B)$ • $p(A\cap B)=1$
4) Soit a un nombre réel strictement positif. $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(-ax+5)=$	• $-\infty$ • 0 • $+\infty$
5) La représentation graphique de la fonction logarithme népérien admet	• une asymptote verticale • une asymptote horizontale • une tangente horizontale
6) $e^{\ln x}=x$ pour tout x appartenant à	• **R** • $]0\,;+\infty[$ • $[0\,;+\infty[$
7) Soit un réel a. $\ln\left(e^{a}\right)-2e+\ln(1)=$	• $e^{a}-2e+e$ • $e^{a}-2e$ • $a-2e$
8) Soient a et b des réels strictement positifs. $e^{\ln a}+e^{-\ln b}=$	• $-ab$ • $a-b$ • $\dfrac{ab+1}{b}$
9) Une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0\,;+\infty[$ est :	• $x\mapsto\dfrac{1}{\ln x}$ • $x\mapsto x\times\ln x-x+3$ • $x\mapsto\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)-2$
10) Pour tout réel x strictement inférieur à 1, $\ln(1-x)>1$ est équivalent à :	• $x<1$ • $x<1-e$ • $x>e$

EXERCICE 2 (*5 points*)

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit f la fonction définie pour tout x élément de $\mathbf{R}$ par $f(x) = (x^2+1)e^{-x+2}$.

On note Γ la représentation graphique de f dans un repère orthogonal et Δ la droite d'équation $y=\frac{5}{2}x$.

On note $\mathcal{A}$ l'aire (en unités d'aire) du domaine délimité par la courbe Γ, la droite Δ et la droite d'équation $x = 0$.

On note O, P, Q et R les points de coordonnées $\mathrm{O}(0;0)$, $\mathrm{P}(0;5)$, $\mathrm{Q}(2;5)$ et $\mathrm{R}\left(0;e^2\right)$.

(Voir la représentation ci-dessous).

1) Détermination d'un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$:

a. Montrer par le calcul que le point Q appartient à la droite Δ et à la courbe Γ, et que la courbe Γ coupe l'axe des ordonnées au point R.

b. Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte des aires de chacun des triangles OPQ et OQR. En déduire un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$ en unités d'aire.

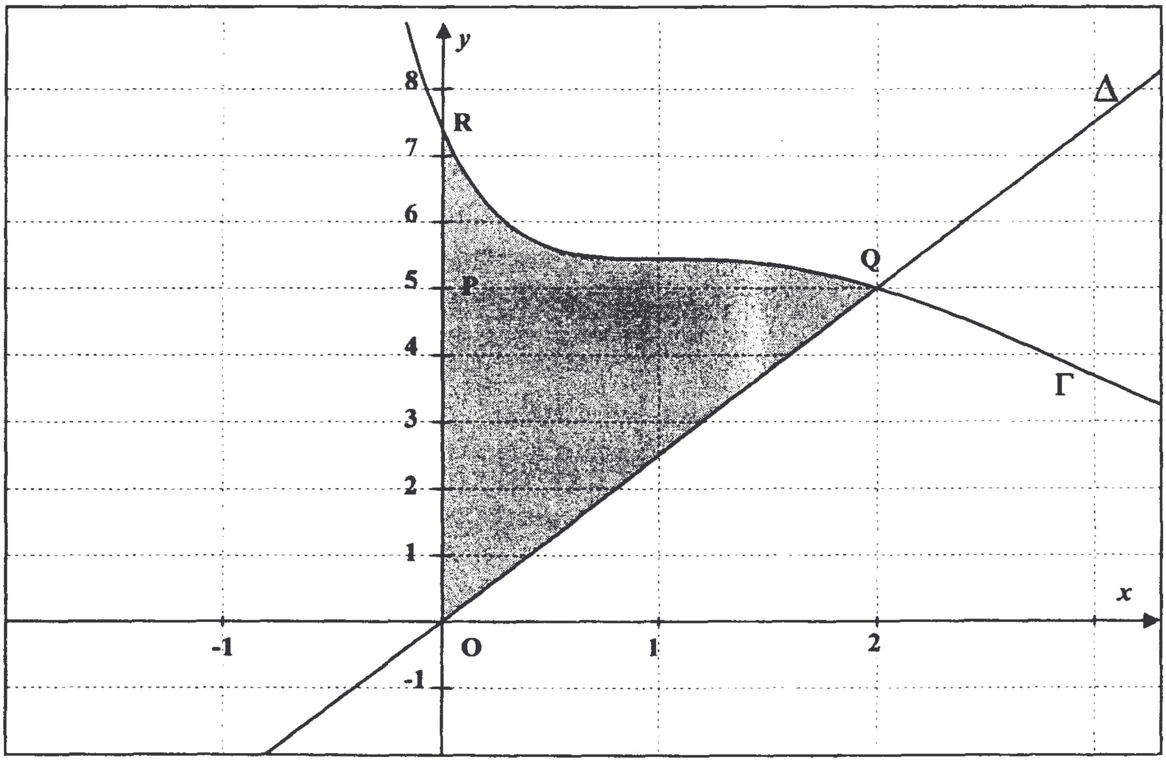
2) Calcul de la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$:

a. Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ à l'aide d'une expression faisant intervenir une intégrale.

b. Soit G la fonction définie pour tout x élément de $\mathbf{R}$ par $G(x) = \left(-x^2-2x-3\right)e^{-x+2}$.

On note G' la fonction dérivée de G sur $\mathbf{R}$.
Pour tout x élément de $\mathbf{R}$, calculer $G'(x)$ en donnant les détails du calcul.
En déduire une primitive de la fonction f sur $\mathbf{R}$.

c. Déterminer la valeur exacte de $\mathcal{A}$. En donner une valeur approchée arrondie au centième.



FORMULAIRE

- L'aire d'un triangle est donnée par : $\text{Aire} = \dfrac{\text{Base} \times \text{Hauteur}}{2}$.
- La dérivée d'un produit de fonctions (sur les intervalles convenables) : $(uv)' = u'v + uv'$.

EXERCICE 3 (*5 points*)
Commun à tous les candidats

On considère la courbe donnée en **ANNEXE 2**, représentative d'une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $\mathrm{I} =]0\,;21]$.
L'**ANNEXE 2** est à rendre avec la copie.

La droite tracée sur le graphique est tangente à la courbe au point d'abscisse 1 et passe par l'origine.
On prendra 7,4 comme valeur approchée du réel de l'intervalle I pour lequel g atteint son maximum.

1) On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle I.
Utiliser le graphique pour donner les valeurs de $g(1)$ et $g'(1)$.
(Aucune justification n'est demandée).

2) Résoudre graphiquement dans l'intervalle I les trois inéquations ci-dessous (les valeurs lues sur le graphique seront données à 10^{-1} près).
Aucune justification n'est demandée, mais pour l'inéquation (3) les éléments graphiques utiles seront portés sur la courbe de l'**ANNEXE 2** :

$$(1) : g(x) \geq 0$$
$$(2) : g'(x) \geq 0$$
$$(3) : g(x) < x.$$

3) On admet que pour tout x de l'intervalle I, $g(x) = -4 + ax(3 - b\ln x)$ où a et b sont deux nombres réels. On veut calculer a et b.

a. Montrer que tout x élément de l'intervalle I :

$$g'(x) = a[3 - b(1 + \ln x)].$$

Exposer le détail des calculs.

b. À l'aide des valeurs de $g(1)$ et $g'(1)$ obtenues à la question **1)**, calculer a et b.

EXERCICE 4 (*5 points*)
Commun à tous les candidats

La subvention accordée par une entreprise à son club sportif était de 3000 € pour l'année 1998.
Depuis 1998, l'évolution de la subvention en pourcentage d'une année à l'autre est celle décrite dans le tableau ci-dessous :

Année	1999	2000	2001	2002	2003
Evolution en pourcentage	+ 17 %	+ 15 %	+ 10 %	+ 9 %	+ 6 %

Par exemple, le taux d'évolution de la subvention de 2000 *à* 2001 *est de* 10 %.

1) **a.** Calculer, pour chacune des années, le montant de la subvention attribuée (en euros). Les résultats seront arrondis à l'unité.

b. Le responsable sportif se plaint d'une diminution continuelle des subventions depuis l'année 1999. Quelle confusion fait-il ?

2) On admet que le montant de la subvention en 2003 est de 5130 €.

a. Calculer le pourcentage de diminution ou d'augmentation de la subvention de 1998 à 2003.

b. Si le taux d'évolution de la subvention d'une année à l'autre était fixe et égal à t %, quelle serait la valeur de t arrondie à 10^{-3} près qui donnerait la même augmentation de la subvention entre 1998 et 2003 ?

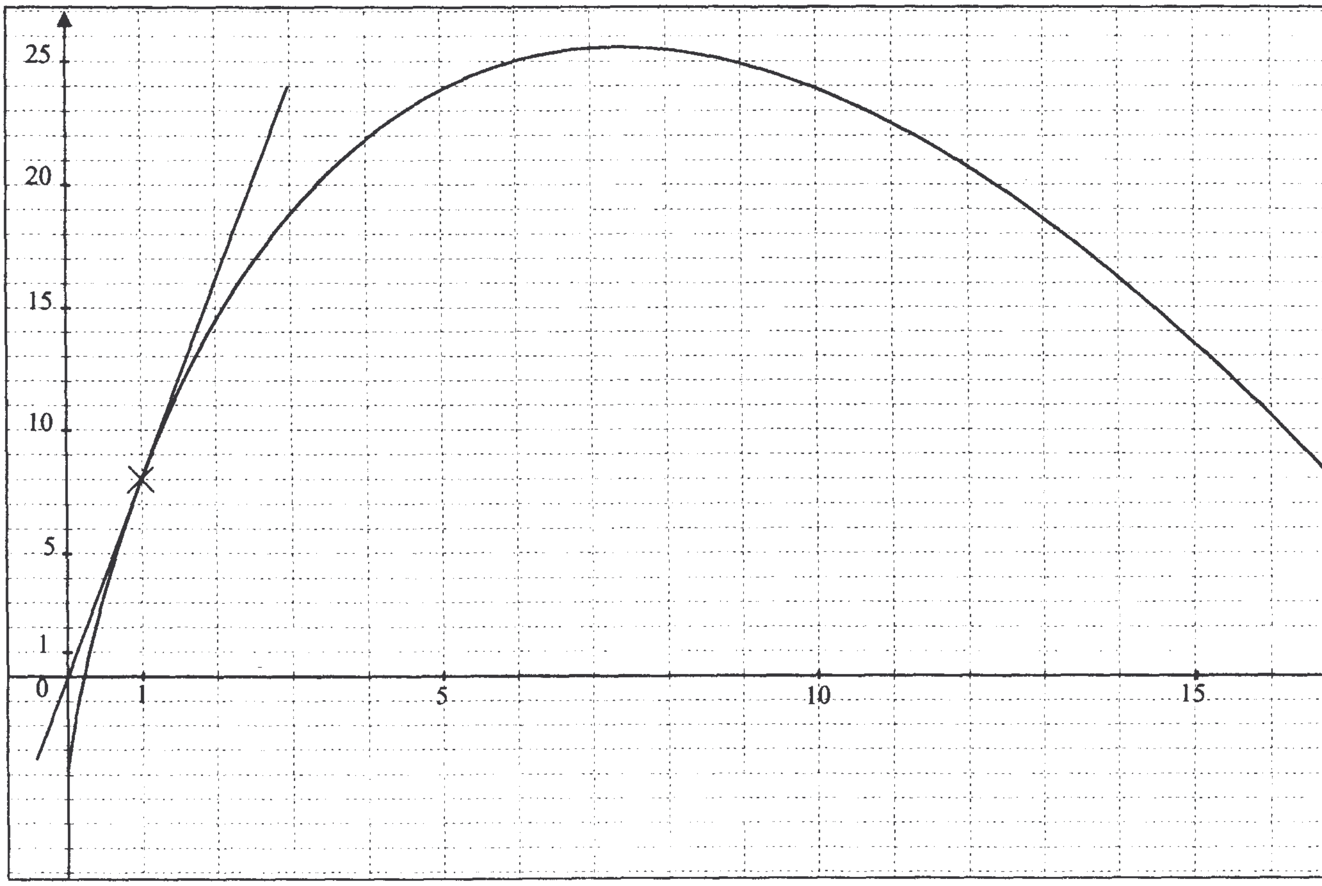
c. Avec ce même taux d'évolution t, quelle serait la subvention, arrondie à l'unité, en 2004 ?

ANNEXE 1
Exercice 1
À rendre avec la copie

Pour chacune des questions ci-dessous, une seule des réponses proposées est exacte. On demande de cocher cette réponse.
Une bonne réponse rapporte 0,5 point. Une mauvaise réponse enlève 0,25 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.
Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

QUESTIONS	RÉPONSES
Pour les trois premières questions, A et B sont des événements associés à une expérience aléatoire.	
1) Si B est l'événement contraire de A, alors	❑ $p(A)=1+p(B)$ ❑ $p(A)=1-p(B)$ ❑ $p(A)=p(B)$
2) Si A et B sont deux événements indépendants et $p(A)\neq 0$, alors	❑ $A\cap B=\varnothing$ ❑ $p(A\cup B)=p(A).p(B)$ ❑ $p_A(B)=p(B)$
3) Si A et B sont deux événements incompatibles alors	❑ $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$ ❑ $p(A)=1-p(B)$ ❑ $p(A\cap B)=1$
4) Soit a un nombre réel strictement positif. $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(-ax+5)=$	❑ $-\infty$ ❑ 0 ❑ $+\infty$
5) La représentation graphique de la fonction logarithme népérien admet	❑ une asymptote verticale ❑ une asymptote horizontale ❑ une tangente horizontale
6) $e^{\ln x}=x$ pour tout x appartenant à	❑ **R** ❑ $]0\,;+\infty[$ ❑ $[0\,;+\infty[$
7) Soit un réel a. $\ln\left(e^{a}\right)-2e+\ln(1)=$	❑ $e^{a}-2e+e$ ❑ $e^{a}-2e$ ❑ $a-2e$
8) Soient a et b des réels strictement positifs. $e^{\ln a}+e^{-\ln b}=$	❑ $-ab$ ❑ $a-b$ ❑ $\dfrac{ab+1}{b}$
9) Une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0\,;+\infty[$ est :	❑ $x\mapsto\dfrac{1}{\ln x}$ ❑ $x\mapsto x\times\ln x-x+3$ ❑ $x\mapsto\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)-2$
10) Pour tout réel x strictement inférieur à 1, $\ln(1-x)>1$ est équivalent à :	❑ $x<1$ ❑ $x<1-e$ ❑ $x>e$

ANNEXE 2
Exercice 3
À rendre avec la copie



CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

	BACCALAUREAT GENERAL	
Série	ES	SESSION 2004
Epreuve	MATHEMATIQUES	Durée : 3h
Coef : 5 (obligatoire) 7 (Spécialité)	RECOMMANDATIONS DE CORRECTION	

Question	Réponse	Points	Commmentaires
	Exercice 1 (5 points) **Commun à tous les candidats** Réponses à cocher :		
1)	$p(A) = 1 - p(B)$		+ 0,5 point par bonne réponse. - 0,25 point par mauvaise réponse.
2)	$p_A(B) = p(B)$		
3)	$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$		
4)	$+\infty$		
5)	une asymptote verticale		
6)	$]0, +\infty[$		
7)	$a - 2e$		
8)	$\dfrac{ab+1}{b}$		
9)	$x \to x\ln(x) - x + 3$		
10)	$x < 1 - e$		

Question	Réponse	Points	Commmentaires
	Exercice 2 **(5 points)** **Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**		
1) a.	• $y_Q = \frac{5}{2}x_Q$. Donc : $Q \in \Delta$. • $f(2) = 5$. Donc : $Q \in \Gamma$. • $f(0) = e^2$. Donc Γ coupe l'axe des ordonnées en R $(0\,; e^2)$.		
b.	• Aire de OPQ : $5\,u.a.$ • Aire de OQR $= \frac{1}{2}OR \times PQ$ $= e^2\ u.a$ • D'après le graphique : Aire de OPQ $\leq \mathcal{A} \leq$ aire de OQR. Donc : $5 \leq \mathcal{A} \leq e^2$.		- OPQ rectangle en P. - ou la somme des aires de OPQ et PQR.
2) a.	$\mathcal{A} = \int_0^2 f(x)dx - 5$. (car f est positive sur [0,2]).		- On acceptera $\int_0^2 \left(f(x) - \frac{5}{2}x\right)dx$.
b.	$G'(x) = f(x)$ G est une primitive de f sur **R**.		
c.	$\mathcal{A} = G(2) - G(0) - 5 = 3e^2 - 16\ \ u.a.$ $\mathcal{A} \simeq 6{,}17\ u.a.$ (arrondi à 10^{-2}).		

Question	Réponse	Points	Commentaires
	<u>Exercice 2 (5 points)</u> **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**		
1)	Il est possible que l'agent passe une et une seule fois par tous les chemins car le graphe est connexe et deux seulement de ses sommets sont de degré impair. Le graphe admet donc une chaîne eulerienne. Exemple de trajet : G – A – B – G – C – B – E – C – D – E – F – G – E		
2)	Non, car le graphe comporte des sommets de degré impair donc n'admet pas de cycle eulerien.		
3)	On explicite, par exemple, l'algorithme de Dijkstra à l'aide d'un tableau. On obtient le chemin : A → G → C → E → D Temps de parcours correspondant : 28 mn.		

Question	Réponse	Points	Commmentaires
	<u>Exercice 3 (5 points)</u> **Commun à tous les candidats**		
1)	$g(1)=8$; $g'(1)=8$.		
2)	$S_{(1)}=[0,2\ ;\ 19]$. $S_{(2)}=]0\ ;\ 7,4]$. $S_{(3)}=]0\ ;\ 0,2[\ \cup\ ]14,6\ ;\ 21]$. Les valeurs 0,2 , 19 et 14,6 sont lues à 10^{-1} près. On acceptera un écart de 10^{-1}.		
3) a)	Calcul de $g'(x)$.		
b)	On résout le système $\begin{cases} 8=-4+3a \\ 8=a(3-b) \end{cases}$ Réponse : $a=4$ et $b=1$.		

Question	Réponse	Points	Commmentaires
	Exercice 4 (5 points) **Commun à tous les candidats**		
1) a.	Subvention en 1999 : 3510 euros en 2000 : 4037 euros en 2001 : 4440 euros en 2002 : 4840 euros en 2003 : 5130 euros On acceptera : 3510, 4036, 4441, 4841, 5131. Ces valeurs résultent d'arrondis intermédiaires.		
b.	Il confond le taux d'évolution de la subvention d'une année à l'autre, qui diminue, et le montant de la subvention annuelle, qui augmente.		
2) a.	71 %.		
b.	On cherche t tel que : $(1+\frac{t}{100})^5 = 1,71$ On trouve $t \approx 11,327$. (On peut déduire la valeur de $1+\frac{t}{100}$ de celle de $(1+\frac{t}{100})^5$ ou utiliser la fonction ln.)		
c.	5711 euros.		

BACCALAUREAT GENERAL

SESSION 2004

MATHÉMATIQUES

Spécialité

<u>SERIE : ES</u>

[illegible]RE[illegible]E L'EPREUVE : 3 heures - COEFFICIENT : 7

Ce[illegible]t comporte 7 pages dont 2 feuilles ANNEXES 1 et 2.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les feuilles ANNEXES 1 et 2 sont à rendre avec la copie.

Tournez la page S.V.P

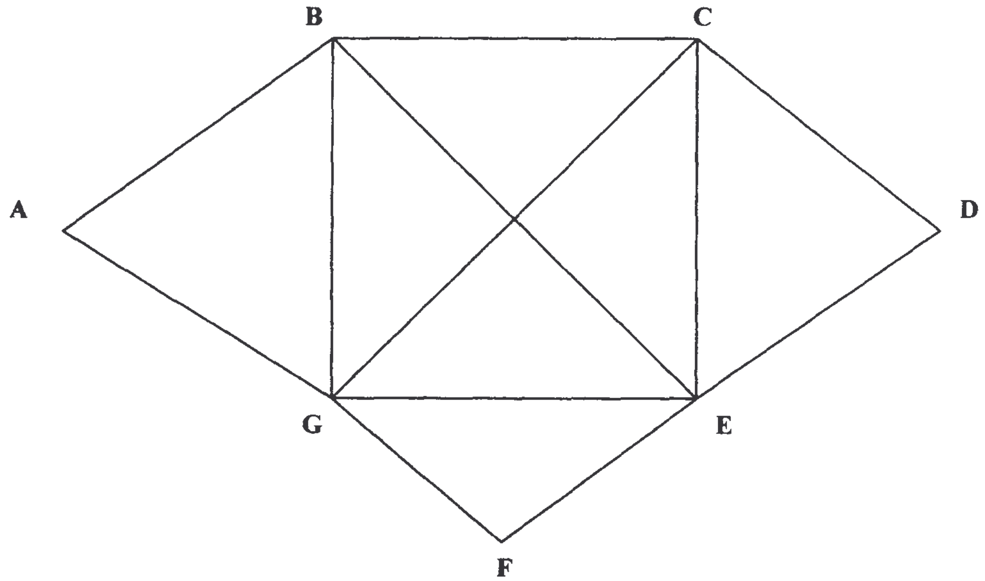
EXERCICE 1 (*5 points*)
Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions ci-dessous, une seule des réponses proposées est exacte. On demande de cocher cette réponse sur la **feuille ANNEXE 1 (à rendre avec la copie).**
Une bonne réponse rapporte 0,5 point. Une mauvaise réponse enlève 0,25 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.
Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

QUESTIONS	**RÉPONSES (à porter sur la feuille ANNEXE 1)**
Pour les trois premières questions, A et B sont des événements associés à une expérience aléatoire.	
1) Si B est l'événement contraire de A, alors	• $p(A)=1+p(B)$ • $p(A)=1-p(B)$ • $p(A)=p(B)$
2) Si A et B sont deux événements indépendants et $p(A)\neq 0$, alors	• $A\cap B=\varnothing$ • $p(A\cup B)=p(A).p(B)$ • $p_A(B)=p(B)$
3) Si A et B sont deux événements incompatibles alors	• $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$ • $p(A)=1-p(B)$ • $p(A\cap B)=1$
4) Soit a un nombre réel strictement positif. $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(-ax+5)=$	• $-\infty$ • 0 • $+\infty$
5) La représentation graphique de la fonction logarithme népérien admet	• une asymptote verticale • une asymptote horizontale • une tangente horizontale
6) $e^{\ln x}=x$ pour tout x appartenant à	• **R** • $]0\,;+\infty[$ • $[0\,;+\infty[$
7) Soit un réel a. $\ln\left(e^a\right)-2e+\ln(1)=$	• e^a-2e+e • e^a-2e • $a-2e$
8) Soient a et b des réels strictement positifs. $e^{\ln a}+e^{-\ln b}=$	• $-ab$ • $a-b$ • $\dfrac{ab+1}{b}$
9) Une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0\,;+\infty[$ est :	• $x\mapsto\dfrac{1}{\ln x}$ • $x\mapsto x\times\ln x-x+3$ • $x\mapsto\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)-2$
10) Pour tout réel x strictement inférieur à 1, $\ln(1-x)>1$ est équivalent à :	• $x<1$ • $x<1-e$ • $x>e$

EXERCICE 2 (*5 points*)
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le graphe ci-dessous indique, sans respecter d'échelle, les parcours possibles entre les sept bâtiments d'une entreprise importante.



Un agent de sécurité effectue régulièrement des rondes de surveillance. Ses temps de parcours en minutes entre deux bâtiments sont les suivants :

AB : 16 minutes ; AG : 12 minutes ; BC : 8 minutes ; BE : 12 minutes ;
BG : 8 minutes ; CD : 7 minutes ; CE : 4 minutes ; CG : 10 minutes ;
DE : 2 minutes ; EF : 8 minutes ; EG : 15 minutes ; FG : 8 minutes.

Sur chaque arête, les temps de parcours sont indépendants du sens de parcours.

1) En justifiant la réponse, montrer qu'il est possible que l'agent de sécurité passe une fois et une seule par tous les chemins de cette usine. Donner un exemple de trajet.

2) L'agent de sécurité peut-il revenir à son point de départ après avoir parcouru une fois et une seule tous les chemins ? Justifier la réponse.

3) Tous les matins, l'agent de sécurité part du bâtiment A et se rend au bâtiment D.
En utilisant un algorithme que l'on explicitera, déterminer le chemin qu'il doit suivre pour que son temps de parcours soit le plus court possible, et donner ce temps de parcours.

EXERCICE 3 (*5 points*)
Commun à tous les candidats

On considère la courbe donnée en **ANNEXE 2**, représentative d'une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $I =]0\,;21]$.
L'**ANNEXE 2** est à rendre avec la copie.

La droite tracée sur le graphique est tangente à la courbe au point d'abscisse 1 et passe par l'origine.
On prendra 7,4 comme valeur approchée du réel de l'intervalle I pour lequel g atteint son maximum.

1) On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle I.
Utiliser le graphique pour donner les valeurs de $g(1)$ et $g'(1)$.
(Aucune justification n'est demandée).

2) Résoudre graphiquement dans l'intervalle I les trois inéquations ci-dessous (les valeurs lues sur le graphique seront données à 10^{-1} près).
Aucune justification n'est demandée, mais pour l'inéquation (3) les éléments graphiques utiles seront portés sur la courbe de l'**ANNEXE 2** :

$$(1) : g(x) \geq 0$$
$$(2) : g'(x) \geq 0$$
$$(3) : g(x) < x.$$

3) On admet que pour tout x de l'intervalle I, $g(x) = -4 + ax(3 - b\ln x)$ où a et b sont deux nombres réels. On veut calculer a et b.

a. Montrer que pour tout x élément de l'intervalle I :

$$g'(x) = a[3 - b(1 + \ln x)].$$

Exposer le détail des calculs.

b. À l'aide des valeurs de $g(1)$ et $g'(1)$ obtenues à la question **1)**, calculer a et b.

EXERCICE 4 (*5 points*)
Commun à tous les candidats

La subvention accordée par une entreprise à son club sportif était de 3000 € pour l'année 1998.
Depuis 1998, l'évolution de la subvention en pourcentage d'une année à l'autre est celle décrite dans le tableau ci-dessous :

Année	1999	2000	2001	2002	2003
Evolution en pourcentage	+ 17 %	+ 15 %	+ 10 %	+ 9 %	+ 6 %

Par exemple, le taux d'évolution de la subvention de 2000 *à* 2001 *est de* 10 %.

1) **a.** Calculer, pour chacune des années, le montant de la subvention attribuée (en euros). Les résultats seront arrondis à l'unité.

b. Le responsable sportif se plaint d'une diminution continuelle des subventions depuis l'année 1999. Quelle confusion fait-il ?

2) On admet que le montant de la subvention en 2003 est de 5130 €.

a. Calculer le pourcentage de diminution ou d'augmentation de la subvention de 1998 à 2003.

b. Si le taux d'évolution de la subvention d'une année à l'autre était fixe et égal à t %, quelle serait la valeur de t arrondie à 10^{-3} près qui donnerait la même augmentation de la subvention entre 1998 et 2003 ?

c. Avec ce même taux d'évolution t, quelle serait la subvention, arrondie à l'unité, en 2004 ?

ANNEXE 1
Exercice 1
À rendre avec la copie

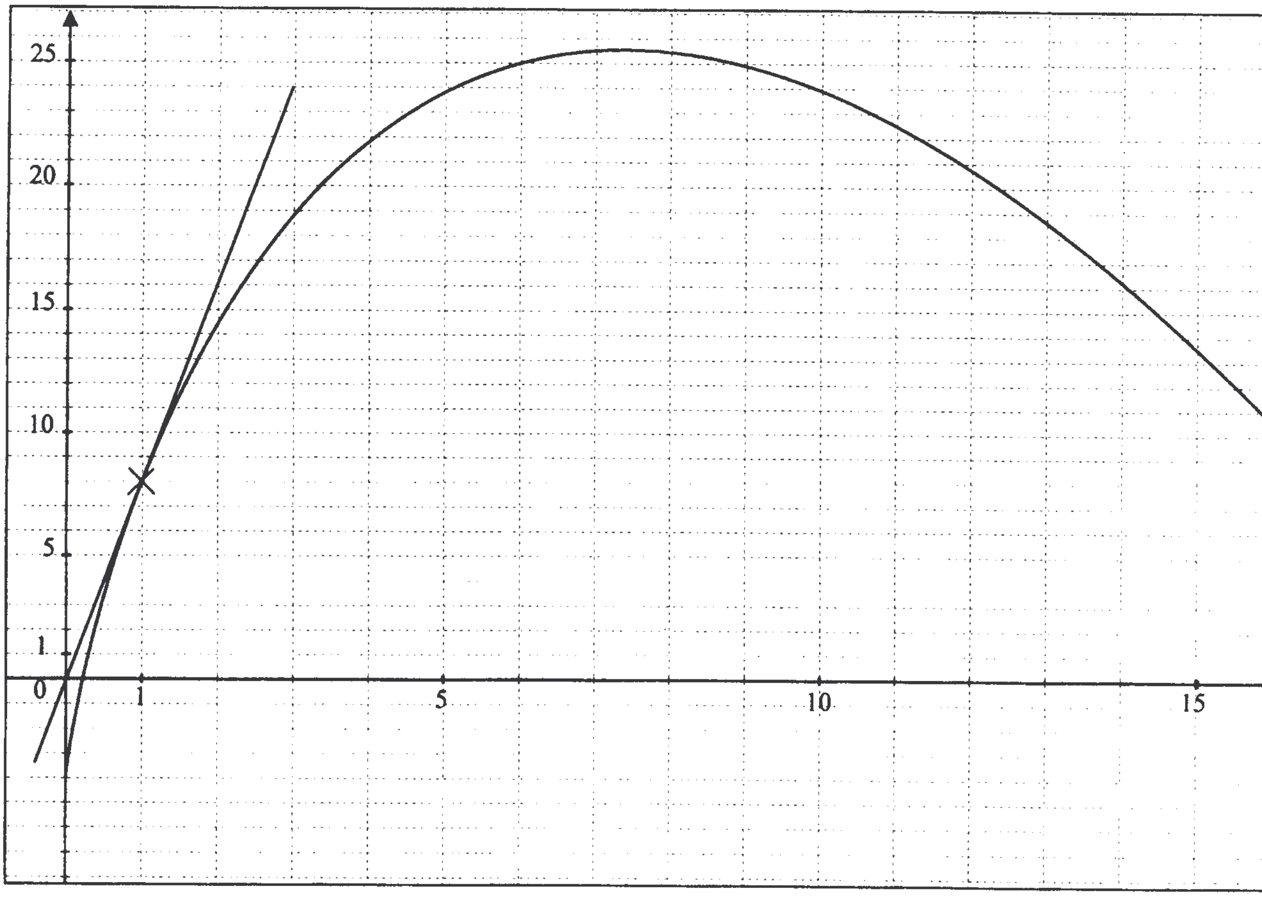
Pour chacune des questions ci-dessous, une seule des réponses proposées est exacte. On demande de cocher cette réponse.

Une bonne réponse rapporte 0,5 point. Une mauvaise réponse enlève 0,25 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

QUESTIONS	RÉPONSES
Pour les trois premières questions, A et B sont des événements associés à une expérience aléatoire.	
1) Si B est l'événement contraire de A, alors	❑ $p(A)=1+p(B)$ ❑ $p(A)=1-p(B)$ ❑ $p(A)=p(B)$
2) Si A et B sont deux événements indépendants et $p(A)\neq 0$, alors	❑ $A\cap B=\varnothing$ ❑ $p(A\cup B)=p(A).p(B)$ ❑ $p_A(B)=p(B)$
3) Si A et B sont deux événements incompatibles alors	❑ $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$ ❑ $p(A)=1-p(B)$ ❑ $p(A\cap B)=1$
4) Soit a un nombre réel strictement positif. $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(-ax+5)=$	❑ $-\infty$ ❑ 0 ❑ $+\infty$
5) La représentation graphique de la fonction logarithme népérien admet	❑ une asymptote verticale ❑ une asymptote horizontale ❑ une tangente horizontale
6) $e^{\ln x}=x$ pour tout x appartenant à	❑ **R** ❑ $]0\,;+\infty[$ ❑ $[0\,;+\infty[$
7) Soit un réel a. $\ln\left(e^{a}\right)-2e+\ln(1)=$	❑ $e^{a}-2e+e$ ❑ $e^{a}-2e$ ❑ $a-2e$
8) Soient a et b des réels strictement positifs. $e^{\ln a}+e^{-\ln b}=$	❑ $-ab$ ❑ $a-b$ ❑ $\dfrac{ab+1}{b}$
9) Une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0\,;+\infty[$ est :	❑ $x\mapsto\dfrac{1}{\ln x}$ ❑ $x\mapsto x\times\ln x-x+3$ ❑ $x\mapsto\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)-2$
10) Pour tout réel x strictement inférieur à 1, $\ln(1-x)>1$ est équivalent à :	❑ $x<1$ ❑ $x<1-e$ ❑ $x>e$

ANNEXE 2
Exercice 3
À rendre avec la copie



CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

	BACCALAUREAT GENERAL	
Série	**ES**	**SESSION 2004**
Epreuve	**MATHEMATIQUES**	**Durée : 3h**
Coef : 5 (obligatoire) 7 (Spécialité)	**RECOMMANDATIONS DE CORRECTION**	

Question	Réponse	Points	Commmentaires
	Exercice 1 (5 points) **Commun à tous les candidats** Réponses à cocher :		
1)	$p(A) = 1 - p(B)$		
2)	$p_A(B) = p(B)$		
3)	$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$		+ 0,5 point par bonne réponse. - 0,25 point par mauvaise réponse.
4)	$+\infty$		
5)	une asymptote verticale		
6)	$]0, +\infty[$		
7)	$a - 2e$		
8)	$\frac{ab+1}{b}$		
9)	$x \to x\ln(x) - x + 3$		
10)	$x < 1 - e$		

Question	Réponse	Points	Commmentaires
	Exercice 2 (5 points) **Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**		
1) a.	• $y_Q = \frac{5}{2}x_Q$. Donc : $Q \in \Delta$. • $f(2) = 5$. Donc : $Q \in \Gamma$. • $f(0) = e^2$. Donc Γ coupe l'axe des ordonnées en R $(0\,; e^2)$.		
b.	• Aire de OPQ : $5\,u.a.$ • Aire de OQR $= \frac{1}{2} OR \times PQ$ $= e^2\ u.a$ • D'après le graphique : Aire de OPQ $\leq \mathcal{A} \leq$ aire de OQR. Donc : $5 \leq \mathcal{A} \leq e^2$.		- OPQ rectangle en P. - ou la somme des aires de OPQ et PQR.
2) a.	$\mathcal{A} = \int_0^2 f(x)dx - 5.$ (car f est positive sur [0,2]).		- On acceptera $\int_0^2 \left(f(x) - \frac{5}{2}x\right)dx.$
b.	$G'(x) = f(x)$ G est une primitive de f sur **R**.		
c.	$\mathcal{A} = G(2) - G(0) - 5 = 3e^2 - 16\ \ u.a.$ $\mathcal{A} \simeq 6{,}17\ u.a.$ (arrondi à 10^{-2}).		

Question	Réponse	Points	Commmentaires
	<u>Exercice 2 (5 points)</u> **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**		
1)	Il est possible que l'agent passe une et une seule fois par tous les chemins car le graphe est connexe et deux seulement de ses sommets sont de degré impair. Le graphe admet donc une chaîne eulerienne. Exemple de trajet : G – A – B – G – C – B – E – C – D – E – F – G – E		
2)	Non, car le graphe comporte des sommets de degré impair donc n'admet pas de cycle eulerien.		
3)	On explicite, par exemple, l'algorithme de Dijkstra à l'aide d'un tableau. On obtient le chemin : A $\rightarrow$ G $\rightarrow$ C $\rightarrow$ E $\rightarrow$ D Temps de parcours correspondant : 28 mn.		

Question	Réponse	Points	Commmentaires
	<u>Exercice 3 (5 points)</u> **Commun à tous les candidats**		
1)	$g(1)=8$; $g'(1)=8$.		
2)	$S_{(1)}=[0,2\ ;\ 19]$. $S_{(2)}=]0\ ;\ 7,4]$. $S_{(3)}=]0\ ;\ 0,2[\ \cup\ ]14,6\ ;\ 21]$. Les valeurs 0,2 , 19 et 14,6 sont lues à 10^{-1} près. On acceptera un écart de 10^{-1}.		
3) a)	Calcul de $g'(x)$.		
b)	On résout le système $\begin{cases} 8=-4+3a \\ 8=a(3-b) \end{cases}$ Réponse : $a=4$ et $b=1$.		

Question	Réponse	Points	Commmentaires
	Exercice 4 (5 points) **Commun à tous les candidats**		
1) a.	Subvention en 1999 : 3510 euros en 2000 : 4037 euros en 2001 : 4440 euros en 2002 : 4840 euros en 2003 : 5130 euros On acceptera : 3510, 4036, 4441, 4841, 5131. Ces valeurs résultent d'arrondis intermédiaires.		
b.	Il confond le taux d'évolution de la subvention d'une année à l'autre, qui diminue, et le montant de la subvention annuelle, qui augmente.		
2) a.	71 %.		
b.	On cherche t tel que : $(1+\frac{t}{100})^5 = 1,71$ On trouve $t \approx 11,327$. (On peut déduire la valeur de $1+\frac{t}{100}$ de celle de $(1+\frac{t}{100})^5$ ou utiliser la fonction ln.)		
c.	5711 euros.		

BACCALAUREAT GENERAL

Session 2005

MATHEMATIQUES

- Série S -

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice constitue une restitution organisée de connaissances.

Partie A : question de cours

On suppose connus les résultats suivants :

(1) deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$;

(2) si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à $\mathbf{N}$, on a $u_n \leqslant v_n$;

(3) toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer alors la proposition suivante :

« Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

Partie B

On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbf{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbf{N}$ par $v_n = \dfrac{-2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1) Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.

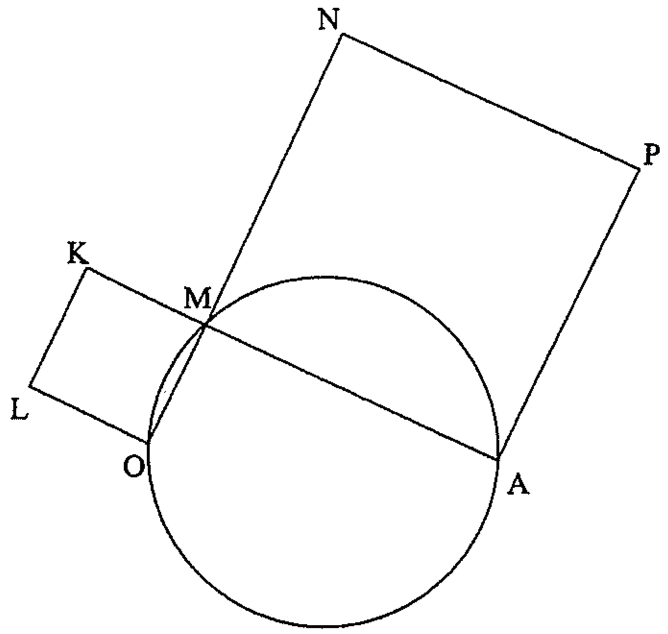
2) Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.

3) Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.

4) Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



Dans le plan orienté, on considère les points O et A fixés et distincts, le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [OA], un point M variable appartenant au cercle $\mathscr{C}$ et distinct des points O et A, ainsi que les carrés de sens direct MAPN et MKLO. La figure est représentée ci-dessus.

Le but de l'exercice est de mettre en évidence quelques éléments invariants de la figure et de montrer que le point N appartient à un cercle à déterminer.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormal direct de sorte que les affixes des points O et A soient respectivement 0 et 1.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. On note k, l, m, n et p les affixes respectives des points K, L, M, N et P.

1) Démontrer que, quel que soit le point M choisi sur le cercle $\mathscr{C}$, on a $\left|m-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$.

2) Établir les relations suivantes : $l = \mathrm{i}m$ et $p = -\mathrm{i}m + 1 + \mathrm{i}$. On admettra que l'on a également $n = (1-\mathrm{i})m + \mathrm{i}$ et $k = (1+\mathrm{i})m$.

3) **a)** Démontrer que le milieu Ω du segment [PL] est un point indépendant de la position du point M sur le cercle $\mathscr{C}$.
b) Démontrer que le point Ω appartient au cercle $\mathscr{C}$ et préciser sa position sur ce cercle.

4) **a)** Calculer la distance KN et démontrer que cette distance est constante.
b) Quelle est la nature du triangle ΩNK ?

5) Démontrer que le point N appartient à un cercle fixe, indépendant du point M, dont on déterminera le centre et le rayon.

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Pour les questions 1 et 2, on donnera les résultats sous forme de fraction et sous forme décimale approchée par défaut à 10^{-3} près.
Un enfant joue avec 20 billes : 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boîte cubique et 3 rouges et 4 vertes dans une boîte cylindrique.

1) Dans un premier jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.

a) Déterminer la loi de probabilité de X
b) Calculer l'espérance mathématique de X.

2) Un deuxième jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes, puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans la boîte choisie.
On considère les événements suivants :

C1 : « L'enfant choisit la boîte cubique »,
C2 : « L'enfant choisit la boîte cylindrique »,
R : « L'enfant prend une bille rouge »,
V : « L'enfant prend une bille verte ».

a) Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à ce deuxième jeu.
b) Calculer la probabilité de l'événement R.
c) Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique ?

3) L'enfant reproduit n fois de suite son deuxième jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place.

a) Exprimer, en fonction de n, la probabilité p_n que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n choix.
b) Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geqslant 0{,}99$.

EXERCICE 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x)=\dfrac{3e^{\frac{x}{4}}}{2+e^{\frac{x}{4}}}$.

a) Démontrer que $f(x)=\dfrac{3}{1+2e^{-\frac{x}{4}}}$.

b) Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) Étudier les variations de la fonction f.

Partie B

1) On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ dans **R**. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, de l'équation différentielle (E_1) $y'=\dfrac{y}{4}$.

a) Résoudre l'équation différentielle (E_1).

b) Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0)=1$.

c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2) En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2):\begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{u(t)^2}{12} & \text{pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,}\\ u(0) = 1 \end{cases}$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

a) On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, la fonction h définie par $h=\dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions

$$(E_3):\begin{cases} h'(t) = -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} & \text{pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,}\\ h(0) = 1 \end{cases}$$

où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

b) Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

BACCALAUREAT GENERAL

SESSION 2005

CORRIGE

MATHEMATIQUES

- Série S -

Ce document comporte 5 pages numérotées de 1 à 5

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. La règle de confidentialité relative aux commissions d'entente et aux travaux des jurys s'applique à son contenu.

EXERCICE 1 (4 points)

Partie A

Soient deux suites (u_n) et (v_n) adjacentes, définies sur **N**, telles que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.

La suite (u_n) étant croissante, pour tout n appartenant à **N**, on a $u_0 \leqslant u_n$; or, on a aussi $u_n \leqslant v_n$, donc $u_0 \leqslant v_n$. On en déduit que la suite (v_n), qui est décroissante, est minorée par u_0 ; elle est donc convergente ; soit a sa limite.

La suite (v_n) étant décroissante, pour tout n appartenant à **N**, on a $v_0 \geqslant v_n$; or, on a aussi $u_n \leqslant v_n$, donc $u_n \leqslant v_0$. On en déduit que la suite (u_n), qui est croissante, est majorée par v_0 et donc que (u_n) est convergente ; soit b sa limite.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = b$, avec a et b réels ; donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = b - a$; or, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$, donc $a = b$.

Les deux suites (u_n) et (v_n) sont bien convergentes et elles ont la même limite.

Partie B

On a $v_n = \dfrac{-2}{u_n}$, pour n appartenant à **N**.

1) Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$; (u_n) est convergente (vers 0) et, pour tout n, on a $v_n = -2n-2$, donc (v_n) n'est pas convergente. *L'affirmation (1) est fausse.*

2) Soit (u_n) une suite minorée par 2, c'est-à-dire que, pour tout n appartenant à **N**, $u_n \geqslant 2$; alors $\dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$, d'où $\dfrac{-2}{u_n} \geqslant -1$, soit $v_n \geqslant -1$; (v_n) est bien minorée par -1. *L'affirmation (2) est vraie.*

3) Soit (u_n) définie sur **N** par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$; (u_n) est décroissante. On a $v_n = -2n-2$, et (v_n) est décroissante ; on en déduit que *l'affirmation (3) est fausse.*

4) Soit (u_n) définie sur **N** par $u_n = (-1)^n$; (u_n) diverge.

On a alors $v_n = \dfrac{-2}{(-1)^n}$; on en déduit que $v_{2p} = -2$ et $v_{2p+1} = 2$, donc (v_n) diverge aussi. *L'affirmation (4) est fausse.*

EXERCICE 2, non spécialistes (5 points)

1) Le centre du cercle $\mathscr{C}$ est le milieu J de [OA], d'affixe $\frac{1}{2}$, et son rayon est $\frac{OA}{2} = \frac{1}{2}$. Donc, pour tout point M de $\mathscr{C}$, JM = $\frac{1}{2}$ et $\left|m - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

2) Le point L est l'image du point M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, donc $l = \mathrm{i}m$. Le point P est l'image du point M par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, donc $p - 1 = -\mathrm{i}(m-1)$ et $p = -\mathrm{i}m + 1 + \mathrm{i}$.

3) a) $\omega = \frac{p+l}{2} = \frac{1+\mathrm{i}}{2}$, qui est indépendant de m.

b) JΩ = $\left|\frac{1}{2}\mathrm{i}\right| = \frac{1}{2}$. Donc $\Omega \in \mathscr{C}$.

De plus $x_\Omega = x_J = \frac{1}{2}$ et $y_\Omega > 0$, donc Ω est le point de $\mathscr{C}$ tel que $(\overrightarrow{JA};\overrightarrow{J\Omega}) = \frac{\pi}{2}$.

4) a) KN = $|\mathrm{i}(2m-1)| = |2\mathrm{i}| \times \left|m - \frac{1}{2}\right| = 2\mathrm{JM}$. Or JM est constante, égale à $\frac{1}{2}$, donc KN est constante, égale à 1.

Autres solutions : en montrant que le triangle KMN est rectangle en M et en lui appliquant le théorème de Pythagore ou en montrant que les triangles KMN et OMA sont isométriques.

b) $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(n - \omega) = (1+\mathrm{i})m - 2 - 2\mathrm{i} = k - \omega$, donc K est l'image de N par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Le triangle ΩNK est rectangle et isocèle en Ω.

5) Le triangle ΩNK étant rectangle et isocèle en Ω, on a $\Omega N = \Omega K = \frac{KN}{\sqrt{2}}$. D'où $\Omega N = \Omega K = \frac{1}{\sqrt{2}}$, d'après le **4)**. Donc N appartient au cercle de centre Ω de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

EXERCICE 2, spécialistes (5 points)

Partie A

1) a) Le rapport de la similitude f est égal à $\frac{MR}{MN} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; son angle est $(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MR}) = -\frac{\pi}{4}$.

b) En utilisant l'écriture complexe de la similitude f, on obtient :

$r - m = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(n - m)$, d'où $r = \frac{1}{2}(1-\mathrm{i})n + \frac{1}{2}(-1+\mathrm{i})m + m = \frac{1+\mathrm{i}}{2}m + \frac{1-\mathrm{i}}{2}n.$

2) L'isobarycentre du quadrilatère MNPQ a pour affixe $\frac{1}{4}(m+n+p+q)$.
L'isobarycentre du quadrilatère RSTU a pour affixe Z tel que :
$\mathrm{Z}=\frac{1}{4}(r+s+t+u)=\frac{1}{8}[(1+\mathrm{i})m+(1-\mathrm{i})n+(1+\mathrm{i})n+(1-\mathrm{i})p+(1+\mathrm{i})p+(1-\mathrm{i})q+(1+\mathrm{i})q+(1-\mathrm{i})m]$,

c'est-à-dire $\mathrm{Z} = \frac{1}{4}(m+n+p+q)$. Les quadrilatères MNPQ et RSTU ont donc le même isobarycentre.

3) a) On a $u-s=\frac{1}{2}[(1+\mathrm{i})q+(1-\mathrm{i})m-(1+\mathrm{i})n-(1-\mathrm{i})p]=\frac{1}{2}[(1+\mathrm{i})(q-n)+(1-\mathrm{i})(m-p)]$

et $t-r=\frac{1}{2}[(1+\mathrm{i})(p-m)+(1-\mathrm{i})(q-n)]$, d'où :

$\mathrm{i}(t-r)=\frac{1}{2}[(\mathrm{i}-1)(p-m)+(1+\mathrm{i})(q-m)]=\frac{1}{2}[(1-\mathrm{i})(m-p)+(1+\mathrm{i})(q-n)]=u-s$.

b) De l'égalité précédente on en déduit que $\frac{u-s}{t-r}=\mathrm{i}$ ce qui se traduit géométriquement par

$\frac{\mathrm{SU}}{\mathrm{RT}}=1$ et $(\overrightarrow{\mathrm{RT}},\overrightarrow{\mathrm{SU}})=\frac{\pi}{2}$.
Les longueurs RT et SU sont égales et les droites (RT) et (SU) sont perpendiculaires.

Partie B

1) Les points R et T d'une part, et S et U d'autre part, sont distincts ; il existe donc une unique similitude directe qui transforme R en S et T en U.
D'après les résultats de la partie A, question **3) b)**, le rapport de cette similitude est 1 et son angle $\frac{\pi}{2}$; cette similitude est donc une rotation g.

2) Soit Ω le centre de la rotation g ; on a $\Omega\mathrm{R} = \Omega\mathrm{S}$ et $\Omega\mathrm{T} = \Omega\mathrm{U}$, donc Ω appartient à la médiatrice de [RS] et à celle de [TU].
Dans le cas de la figure, les médiatrices de [RS] et [TU] sont concourantes, donc Ω est le point d'intersection de ces deux médiatrices. D'où la construction.

EXERCICE 3 (5 points)

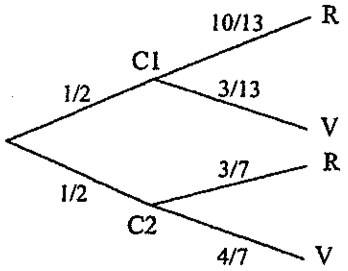
1) a) Les valeurs prises par X sont 0, 1, 2 et 3. Le nombre de choix possibles est $\binom{13}{3}=286$.

$p(\mathrm{X}=0)=\frac{\binom{3}{3}}{286}=\frac{1}{286}\approx 0{,}003$; $p(\mathrm{X}=1)=\frac{\binom{3}{2}\times\binom{10}{1}}{286}=\frac{15}{143}\approx 0{,}104$;

$p(\mathrm{X}=1)=\frac{\binom{3}{1}\times\binom{10}{2}}{286}=\frac{135}{286}\approx 0{,}472$, $p(\mathrm{X}=3)=\frac{\binom{10}{3}}{286}=\frac{60}{143}\approx 0{,}419$.

b) $E(X) = \dfrac{30+2\times135+3\times120}{286} = \dfrac{30}{13} \approx 2{,}307$.

2) a) Arbre pondéré :



b) $p(\mathrm{R}) = \dfrac{10}{13}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{7}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{109}{182} \approx 0{,}598$.

c) $p_{\mathrm{R}}(\mathrm{C}_1) = \dfrac{P(\mathrm{C}_1\cap\mathrm{R})}{P(\mathrm{R})} = \dfrac{10}{26}\times\dfrac{182}{109} = \dfrac{70}{109} \approx 0{,}642$.

3) a) $p_n = 1-\left(\dfrac{73}{182}\right)^n$.

b) On cherche n entier naturel, le plus petit possible, tel que $1-\left(\dfrac{73}{182}\right)^n \geqslant 0{,}99$, soit $n\ln\dfrac{73}{182} \leqslant \ln(0{,}01)$, d'où $n = 6$.

EXERCICE 4 (6 points)

Partie A

a) Pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{3\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}{2+\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}} = \dfrac{3\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}\left(2\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}+1\right)} = \dfrac{3}{2\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}+1}$ $(\mathrm{e}^{\frac{x}{4}} \neq 0)$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{4}} = \lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^{X} = 0$ donc, d'après la relation du **1) a)**, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{4}} = \lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^{X} = +\infty$ donc, de même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

c) La fonction f est dérivable sur **R** car la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{-x}{4}}$ est dérivable sur **R** et, pour tout réel x, on a : $f'(x) = 3\times\dfrac{-2\left(-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}\right)}{\left(1+2\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}\right)^2} = \dfrac{3}{2}\times\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}}{\left(1+\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}\right)^2}$. La fonction f est donc strictement croissante sur **R**.

Partie B

1) a) Les solutions de (E_1) sont les fonctions définies sur **R** par $x \mapsto Ce^{\frac{x}{4}}$, où C est une constante réelle.

b) D'après la relation du **1) a)** et $g(0)=1$, on trouve $g(t)=e^{\frac{t}{4}}$.

c) $g(t)>3$ équivaut à $t>4\ln 3$, avec $4\ln 3 \approx 4{,}4$. C'est donc à l'issue de 5 années que la population de rongeurs dépassera 300 pour la première fois.

2) a) $u(0)=1$ équivaut à $h(0)=1$.

On a $h=\frac{1}{u}$. Donc $u'=\frac{u}{4}-\frac{u^2}{12}$ équivaut à $\frac{-h'}{h^2}=\frac{1}{4h}-\frac{1}{12h^2}$, c'est-à-dire $h'=-\frac{1}{4}h+\frac{1}{12}$.

b) Les fonctions h solutions de $y'=-\frac{1}{4}y+\frac{1}{12}$ sont les fonctions définies sur **R** par $t \mapsto Ke^{\frac{-t}{4}}+\frac{1}{3}$, où K est une constante réelle.

On sait que $h(0)=1$, donc $h(t)=\frac{2}{3}e^{\frac{-t}{4}}+\frac{1}{3}$. D'où $u(t)=\frac{3}{2e^{\frac{-t}{4}}+1}$.

c) Pour tout $t \geqslant 0$, $u(t)=f(t)$. Donc, d'après le résultat de la partie A, la population de rongeurs tend vers 300.

BACCALAUREAT GENERAL

Session 2005

MATHEMATIQUES

- Série S -

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

SPECIALITE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1 à 6. La page 6 est une annexe à rendre avec la copie.

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice constitue une restitution organisée de connaissances.

Partie A : question de cours

On suppose connus les résultats suivants :

(1) deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$;

(2) si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à $\mathbf{N}$, on a $u_n \leqslant v_n$;

(3) toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer alors la proposition suivante :

« Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

Partie B

On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbf{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbf{N}$ par $v_n = \dfrac{-2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1) Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.

2) Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.

3) Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.

4) Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de la figure donnée en annexe. Cette annexe sera à rendre avec la copie.

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
Le quadrilatère MNPQ est un quadrilatère non croisé et de sens direct. Les triangles MRN, NSP, PTQ et QUM sont des triangles rectangles isocèles, extérieurs au quadrilatère MNPQ et de sens direct (les sommets des angles droits étant respectivement les points R, S, T et U).

Partie A

On désigne par m, n, p et q, les affixes respectives des points M, N, P et Q.

1) Soit f la similitude directe de centre M qui transforme N en R.

a) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude f.

b) On désigne par r l'affixe du point R. Démontrer que $r=\frac{1+\mathrm{i}}{2}m+\frac{1-\mathrm{i}}{2}n$, où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$ (on pourra éventuellement utiliser l'écriture complexe de la similitude f).

On admettra que l'on a également les résultats $s=\frac{1+\mathrm{i}}{2}n+\frac{1-\mathrm{i}}{2}p$, $t=\frac{1+\mathrm{i}}{2}p+\frac{1-\mathrm{i}}{2}q$ et $u=\frac{1+\mathrm{i}}{2}q+\frac{1-\mathrm{i}}{2}m$, où s, t et u désignent les affixes respectives des points S, T et U.

2) Démontrer que les quadruplets (M, N, P, Q) et (R, S, T, U) ont le même isobarycentre.

3) **a)** Démontrer l'égalité $u-s=\mathrm{i}(t-r)$.

b) Que peut-on en déduire pour les longueurs des segments [RT] et [SU], d'une part, et pour les droites (RT) et (SU), d'autre part ?

Partie B

Cette partie sera traitée sans utilisation des nombres complexes.

1) Démontrer, en utilisant les résultats établis dans la partie A, qu'il existe une unique rotation g qui transforme R en S et T en U.

2) Décrire comment construire géométriquement le point Ω, centre de la rotation g. Réaliser cette construction sur la figure de l'annexe.

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Pour les questions 1 et 2, on donnera les résultats sous forme de fraction et sous forme décimale approchée par défaut à 10^{-3} près.

Un enfant joue avec 20 billes : 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boîte cubique et 3 rouges et 4 vertes dans une boîte cylindrique.

1) Dans un premier jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.

a) Déterminer la loi de probabilité de X

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

2) Un deuxième jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes, puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans la boîte choisie.
On considère les événements suivants :

C1 : « L'enfant choisit la boîte cubique »,
C2 : « L'enfant choisit la boîte cylindrique »,
R : « L'enfant prend une bille rouge »,
V : « L'enfant prend une bille verte ».

a) Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à ce deuxième jeu.

b) Calculer la probabilité de l'événement R.

c) Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique ?

3) L'enfant reproduit n fois de suite son deuxième jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place.

a) Exprimer, en fonction de n, la probabilité p_n que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n choix.

b) Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geqslant 0,99$.

EXERCICE 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x)=\dfrac{3e^{\frac{x}{4}}}{2+e^{\frac{x}{4}}}$.

a) Démontrer que $f(x)=\dfrac{3}{1+2e^{-\frac{x}{4}}}$.

b) Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) Étudier les variations de la fonction f.

Partie B

1) On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ dans **R**. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle (E_1) $y'=\dfrac{y}{4}$.

a) Résoudre l'équation différentielle (E_1).

b) Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0)=1$.

c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2) En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2) : \begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{u(t)^2}{12} & \text{pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

a) On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction h définie par $h=\dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions

$$(E_3) : \begin{cases} h'(t) = -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} & \text{pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

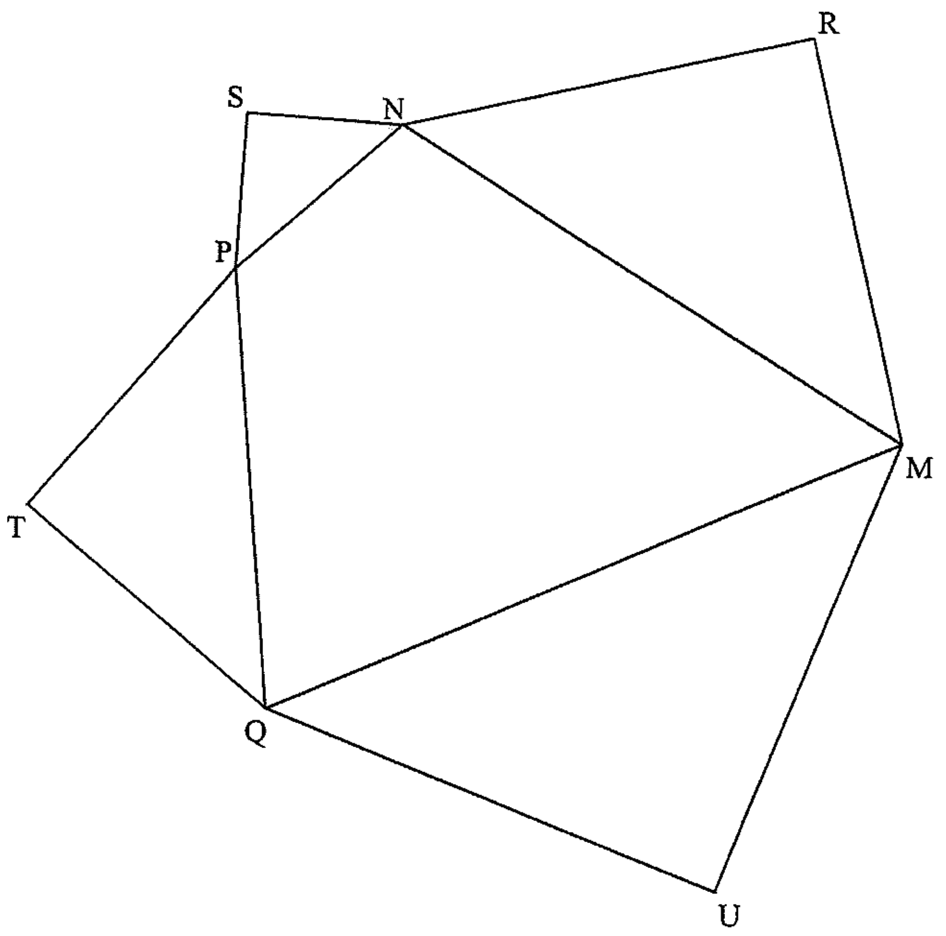
b) Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

ANNEXE

À rendre avec la copie

Figure de l'exercice 2 :



CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

BACCALAUREAT GENERAL

SESSION 2005

CORRIGE

MATHEMATIQUES

- Série S -

Ce document comporte 5 pages numérotées de 1 à 5

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. La règle de confidentialité relative aux commissions d'entente et aux travaux des jurys s'applique à son contenu.

EXERCICE 1 (4 points)

Partie A

Soient deux suites (u_n) et (v_n) adjacentes, définies sur N, telles que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.

La suite (u_n) étant croissante, pour tout n appartenant à N, on a $u_0 \leqslant u_n$; or, on a aussi $u_n \leqslant v_n$, donc $u_0 \leqslant v_n$. On en déduit que la suite (v_n), qui est décroissante, est minorée par u_0 ; elle est donc convergente ; soit a sa limite.

La suite (v_n) étant décroissante, pour tout n appartenant à N, on a $v_0 \geqslant v_n$; or, on a aussi $u_n \leqslant v_n$, donc $u_n \leqslant v_0$. On en déduit que la suite (u_n), qui est croissante, est majorée par v_0 et donc que (u_n) est convergente ; soit b sa limite.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = b$, avec a et b réels ; donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = b - a$; or, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$, donc $a = b$.

Les deux suites (u_n) et (v_n) sont bien convergentes et elles ont la même limite.

Partie B

On a $v_n = \dfrac{-2}{u_n}$, pour n appartenant à N.

1) Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$; (u_n) est convergente (vers 0) et, pour tout n, on a $v_n = -2n - 2$, donc (v_n) n'est pas convergente. *L'affirmation (1) est fausse.*

2) Soit (u_n) une suite minorée par 2, c'est-à-dire que, pour tout n appartenant à N, $u_n \geqslant 2$; alors $\dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$, d'où $\dfrac{-2}{u_n} \geqslant -1$, soit $v_n \geqslant -1$; (v_n) est bien minorée par -1. *L'affirmation (2) est vraie.*

3) Soit (u_n) définie sur N par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$; (u_n) est décroissante. On a $v_n = -2n - 2$, et (v_n) est décroissante ; on en déduit que *l'affirmation (3) est fausse.*

4) Soit (u_n) définie sur N par $u_n = (-1)^n$; (u_n) diverge.

On a alors $v_n = \dfrac{-2}{(-1)^n}$; on en déduit que $v_{2p} = -2$ et $v_{2p+1} = 2$, donc (v_n) diverge aussi. *L'affirmation (4) est fausse.*

EXERCICE 2, non spécialistes (5 points)

1) Le centre du cercle $\mathscr{C}$ est le milieu J de [OA], d'affixe $\frac{1}{2}$, et son rayon est $\frac{OA}{2}=\frac{1}{2}$. Donc, pour tout point M de $\mathscr{C}$, JM = $\frac{1}{2}$ et $\left|m-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$.

2) Le point L est l'image du point M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, donc $l=\mathrm{i}m$. Le point P est l'image du point M par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, donc $p-1=-\mathrm{i}(m-1)$ et $p=-\mathrm{i}m+1+\mathrm{i}$.

3) a) $\omega=\frac{p+l}{2}=\frac{1+\mathrm{i}}{2}$, qui est indépendant de m.

b) $J\Omega=\left|\frac{1}{2}\mathrm{i}\right|=\frac{1}{2}$. Donc $\Omega\in\mathscr{C}$.

De plus $x_\Omega=x_J=\frac{1}{2}$ et $y_\Omega>0$, donc Ω est le point de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\overrightarrow{JA};\overrightarrow{J\Omega}\right)=\frac{\pi}{2}$.

4) a) KN = $|\mathrm{i}(2m-1)|=|2\mathrm{i}|\times\left|m-\frac{1}{2}\right|=2JM$. Or JM est constante, égale à $\frac{1}{2}$, donc KN est constante, égale à 1.

Autres solutions : en montrant que le triangle KMN est rectangle en M et en lui appliquant le théorème de Pythagore ou en montrant que les triangles KMN et OMA sont isométriques.

b) $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(n-\omega)=(1+\mathrm{i})m-2-2\mathrm{i}=k-\omega$, donc K est l'image de N par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Le triangle ΩNK est rectangle et isocèle en Ω.

5) Le triangle ΩNK étant rectangle et isocèle en Ω, on a $\Omega N=\Omega K=\frac{KN}{\sqrt{2}}$. D'où $\Omega N=\Omega K=\frac{1}{\sqrt{2}}$, d'après le **4)**. Donc N appartient au cercle de centre Ω de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

EXERCICE 2, spécialistes (5 points)

Partie A

1) a) Le rapport de la similitude f est égal à $\frac{MR}{MN}=\frac{1}{\sqrt{2}}$; son angle est $(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MR})=-\frac{\pi}{4}$.

b) En utilisant l'écriture complexe de la similitude f, on obtient :

$r-m=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(n-m)$, d'où $r=\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})n+\frac{1}{2}(-1+\mathrm{i})m+m=\frac{1+\mathrm{i}}{2}m+\frac{1-\mathrm{i}}{2}n.$

2) L'isobarycentre du quadrilatère MNPQ a pour affixe $\frac{1}{4}(m+n+p+q)$.

L'isobarycentre du quadrilatère RSTU a pour affixe Z tel que :

$Z=\frac{1}{4}(r+s+t+u)=\frac{1}{8}[(1+\mathrm{i})m+(1-\mathrm{i})n+(1+\mathrm{i})n+(1-\mathrm{i})p+(1+\mathrm{i})p+(1-\mathrm{i})q+(1+\mathrm{i})q+(1-\mathrm{i})m]$,

c'est-à-dire $Z = \frac{1}{4}(m+n+p+q)$. Les quadrilatères MNPQ et RSTU ont donc le même isobarycentre.

3) a) On a $u-s=\frac{1}{2}[(1+\mathrm{i})q+(1-\mathrm{i})m-(1+\mathrm{i})n-(1-\mathrm{i})p]=\frac{1}{2}[(1+\mathrm{i})(q-n)+(1-\mathrm{i})(m-p)]$

et $t-r=\frac{1}{2}[(1+\mathrm{i})(p-m)+(1-\mathrm{i})(q-n)]$, d'où :

$\mathrm{i}(t-r)=\frac{1}{2}[(\mathrm{i}-1)(p-m)+(1+\mathrm{i})(q-m)]=\frac{1}{2}[(1-\mathrm{i})(m-p)+(1+\mathrm{i})(q-n)]=u-s$.

b) De l'égalité précédente on en déduit que $\frac{u-s}{t-r}=\mathrm{i}$ ce qui se traduit géométriquement par

$\frac{SU}{RT}=1$ et $(\overrightarrow{RT},\overrightarrow{SU})=\frac{\pi}{2}$.

Les longueurs RT et SU sont égales et les droites (RT) et (SU) sont perpendiculaires.

Partie B

1) Les points R et T d'une part, et S et U d'autre part, sont distincts ; il existe donc une unique similitude directe qui transforme R en S et T en U.

D'après les résultats de la partie A, question **3) b)**, le rapport de cette similitude est 1 et son angle $\frac{\pi}{2}$; cette similitude est donc une rotation g.

2) Soit Ω le centre de la rotation g ; on a $\Omega R = \Omega S$ et $\Omega T = \Omega U$, donc Ω appartient à la médiatrice de [RS] et à celle de [TU].

Dans le cas de la figure, les médiatrices de [RS] et [TU] sont concourantes, donc Ω est le point d'intersection de ces deux médiatrices. D'où la construction.

EXERCICE 3 (5 points)

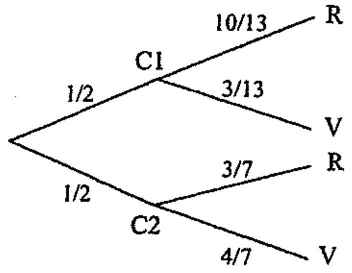
1) a) Les valeurs prises par X sont 0, 1, 2 et 3. Le nombre de choix possibles est $\binom{13}{3}=286$.

$p(X=0)=\frac{\binom{3}{3}}{286}=\frac{1}{286}\approx 0{,}003$; $p(X=1)=\frac{\binom{3}{2}\times\binom{10}{1}}{286}=\frac{15}{143}\approx 0{,}104$;

$p(X=1)=\frac{\binom{3}{1}\times\binom{10}{2}}{286}=\frac{135}{286}\approx 0{,}472$, $p(X=3)=\frac{\binom{10}{3}}{286}=\frac{60}{143}\approx 0{,}419$.

b) $E(X) = \dfrac{30+2\times 135+3\times 120}{286} = \dfrac{30}{13} \approx 2{,}307$.

2) a) Arbre pondéré :



b) $p(\mathrm{R}) = \dfrac{10}{13}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{7}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{109}{182} \approx 0{,}598$.

c) $p_{\mathrm{R}}(\mathrm{C}_1) = \dfrac{P(\mathrm{C}_1\cap \mathrm{R})}{P(\mathrm{R})} = \dfrac{10}{26}\times\dfrac{182}{109} = \dfrac{70}{109} \approx 0{,}642$.

3) a) $p_n = 1-\left(\dfrac{73}{182}\right)^n$.

b) On cherche n entier naturel, le plus petit possible, tel que $1-\left(\dfrac{73}{182}\right)^n \geqslant 0{,}99$, soit $n\ln\dfrac{73}{182} \leqslant \ln(0{,}01)$, d'où $n = 6$.

EXERCICE 4 (6 points)

Partie A

a) Pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{3e^{\frac{x}{4}}}{2+e^{\frac{x}{4}}} = \dfrac{3e^{\frac{x}{4}}}{e^{\frac{x}{4}}\left(2e^{-\frac{x}{4}}+1\right)} = \dfrac{3}{2e^{-\frac{x}{4}}+1}$ $(e^{\frac{x}{4}} \neq 0)$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{x}{4}} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc, d'après la relation du **1) a)**, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{x}{4}} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ donc, de même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

c) La fonction f est dérivable sur **R** car la fonction $x \mapsto e^{\frac{-x}{4}}$ est dérivable sur **R** et, pour tout réel x, on a : $f'(x) = 3\times\dfrac{-2\left(-\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}\right)}{\left(1+2e^{-\frac{x}{4}}\right)^2} = \dfrac{3}{2}\times\dfrac{e^{-\frac{x}{4}}}{\left(1+e^{-\frac{x}{4}}\right)^2}$. La fonction f est donc strictement croissante sur **R**.

Partie B

1) a) Les solutions de (E_1) sont les fonctions définies sur **R** par $x \mapsto Ce^{\frac{x}{4}}$, où C est une constante réelle.

b) D'après la relation du **1) a)** et $g(0)=1$, on trouve $g(t)=e^{\frac{t}{4}}$.

c) $g(t)>3$ équivaut à $t>4\ln 3$, avec $4\ln 3 \approx 4{,}4$. C'est donc à l'issue de 5 années que la population de rongeurs dépassera 300 pour la première fois.

2) a) $u(0)=1$ équivaut à $h(0)=1$.

On a $h=\frac{1}{u}$. Donc $u'=\frac{u}{4}-\frac{u^2}{12}$ équivaut à $\frac{-h'}{h^2}=\frac{1}{4h}-\frac{1}{12h^2}$, c'est-à-dire $h'=-\frac{1}{4}h+\frac{1}{12}$.

b) Les fonctions h solutions de $y'=-\frac{1}{4}y+\frac{1}{12}$ sont les fonctions définies sur **R** par $t \mapsto Ke^{\frac{-t}{4}}+\frac{1}{3}$, où K est une constante réelle.

On sait que $h(0)=1$, donc $h(t)=\frac{2}{3}e^{\frac{-t}{4}}+\frac{1}{3}$. D'où $u(t)=\frac{3}{2e^{\frac{-t}{4}}+1}$.

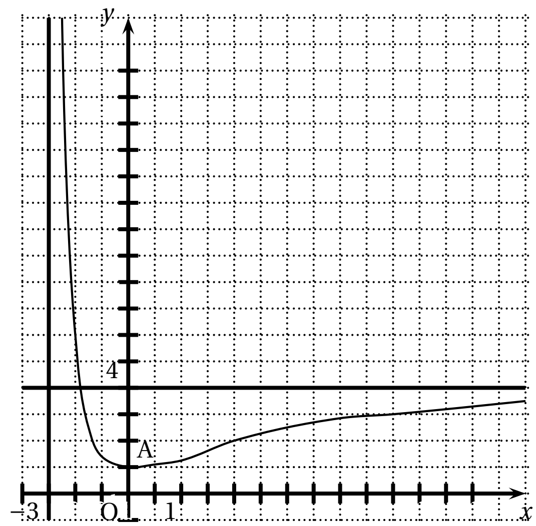
c) Pour tout $t \geqslant 0$, $u(t)=f(t)$. Donc, d'après le résultat de la partie A, la population de rongeurs tend vers 300.

∽ Baccalauréat ES France juin 2005 ∾

Exercice 1 **3 points**

Commun tous les candidats

La courbe ($\mathscr{C}$) donnée ci-contre est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-3\,;\,+\infty[$. On sait que le point A de coordonnées $(0\,;\,1)$ appartient à la courbe ($\mathscr{C}$) et que la fonction f admet un minimum pour $x = 0$. En outre, les droites d'équations respectives $y = 4$ et $x = -3$ sont asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.



Chaque question ci-dessous comporte trois réponses possibles.
Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte. On demande de cocher cette réponse *sur la feuille réponse fournie en* **ANNEXE 1 (à rendre avec la copie)**.
Une réponse exacte rapporte 0,5 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total est négatif, la note est ramenée à* 0.

1. La limite de la fonction f en $+\infty$ est :	• $+\infty$ • -3 • 4
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]-3\,;\,+\infty[$	• $f'(0) = 1$ • $f'(1) = 0$ • $f'(0) = 0$
3. L'équation de la tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) au point A est :	• $y = 1$ • $y = x$ • $y = 0$
4. Sur l'intervalle $]-3\,;\,+\infty[$, l'équation $f(x) = x$	• n'admet aucune solution • admet comme solution unique : $x = 0$ • admet une solution unique appartenant à l'intervalle $]1\,;\,2[$

Dans les deux questions suivantes, on considère la fonction g définie sur l'intervalle $]-3\,;\,+\infty[$ par $g = \ln \circ f$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

5. Si $x = 0$, alors	• on ne peut pas calculer $g(x)$ • $g(x) = 1$ • $g(x) = 0$
6. On peut affirmer que sur l'intervalle $]-3\,;\,+\infty[$	• g a les mêmes variations que la fonction • g a les mêmes variations que la fonction f • g a les variations inverses de celles de la fonction f

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

En 2004, une caisse de retraite propose à ses adhérents un barème de rachat d'un trimestre de cotisation des années antérieures selon le tableau suivant :

Âge de l'adhérent en années	54	55	56	57	58
Rang x_i	0	1	2	3	4
Montant y_i du rachat d'un trimestre de cotisation en euros	2 229	2 285	2 340	2 394	2 449

(Source : *CARMF* mai 2004)

1. Calculer l'augmentation en pourcentage du montant du rachat d'un trimestre entre un salarié de 54 ans et un salarié de 58 ans. On donnera le résultat arrondi à l'unité.
2. Sur votre copie, représenter le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans un repère orthogonal :
   - sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 2 cm pour une unité ;
   - sur l'axe des ordonnées, on placera 2 200 à l'origine et on choisira 1 cm pour 20 euros.
3. *Dans cette question, les calculs effectués à la calculatrice ne seront pas justifiés.*

   Le nuage de points permet de penser qu'un ajustement affine est justifié.

   Donner une équation de la droite de régression (D) de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.

   Représenter la droite (D) dans le repère précédent.
4. Quel serait avec cet ajustement affine le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié âgé de 60 ans ?
5. En fait le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié âgé de 60 ans est de 2 555 euros et le montant du rachat d'un trimestre après 60 ans est calculé de la façon suivante : à partir de 60 ans, le montant du rachat baisse de 3 % par an.

   Calculer le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié ayant 65 ans.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Au 1$^{\text{er}}$ janvier 2005, une ville en pleine expansion avait une population de 100 000 habitants.

Un bureau d'étude fait l'hypothèse qu'à partir du 1$^{\text{er}}$ janvier 2005 :

- le nombre d'habitants de la ville augmente chaque année de 5 % du fait des naissances et des décès ;
- du fait des mouvements migratoires, 4 000 personnes supplémentaires viennent s'installer chaque année dans cette ville.

Partie A : étude théorique

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'habitants de cette ville au 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année $2005 + n$.

Ainsi, $u_0 = 100\ 000$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_1 = 1,05u_n + 4\ 000$.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $v = u_n + 80\ 000$.

a. Calculer v_0.

b. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

c. Exprimer v_n en fonction de n. En déduire que $u_n = 180\ 000 \times (1,05)^n - 80\ 000$.

d. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie B

Le but de cette partie est de prévoir l'évolution de la population jusqu'en 2020, en utilisant le modèle théorique étudié à la **partie A**.

1. Quel sera le nombre d'habitants de la ville au 1er janvier 2020 ?

2. À partir de quelle année la population de cette ville dépassera-t-elle 200 000 habitants ?

FORMULAIRE POUR L'EXERCICE 2
SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suite arithmétique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $a \in \mathbb{R}$:
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = u_n + a, \qquad u_n = u_0 + na.$

Suite géométrique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $b \in \mathbb{R}$:
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = bu_n, \qquad u_n = u_0 b^n.$

Somme de termes : • $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

• Si $b \neq 1$ alors $1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$

EXERCICE 3 **7 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 2 + 10\mathrm{e}^{-0,5x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal et (D) la droite d'équation $y = x - 2$. La courbe $(\mathscr{C})$ est partiellement représentée en **ANNEXE 2**.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. On pose $\alpha = 2\ln 5$.

a. Montrer que $f(\alpha) = \alpha$.

b. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de α.

3. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et on note f' la fonction dérivée de f sur cet intervalle.

a. Calculer $f'(x)$,pour tout x élément de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, et dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur cet intervalle.

4. Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x-2)] = 0$ et que, pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$,

$$f(x) - (x-2) > 0.$$

Donner l'interprétation graphique de ces résultats.

5. Sur le graphique donné en **ANNEXE 2 (à rendre avec la copie)** :

a. placer le point de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisse α ;

b. tracer la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse α ;

c. tracer la droite (D).

6. On note $\mathscr{A}$ l'aire (en unités d'aire) du domaine E délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 2$ et $x = 6$.

a. Hachurer sur le graphique, donné en **ANNEXE 2 (à rendre avec la copie)**, le domaine E, puis exprimer l'aire $\mathscr{A}$ à l'aide d'une expression faisant intervenir une intégrale.

éterminer la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$, puis en donner la valeur arrondie au centième.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une usine d'emballage de pommes est approvisionnée par trois producteurs. Le premier producteur fournit 70 % de l'approvisionnement de cette usine, le reste étant également partagé entre le deuxième producteur et le troisième.

Avant d'être emballées, les pommes sont calibrées par une machine pour les trier selon leur diamètre. Les pommes dont le diamètre est conforme aux normes en vigueur sont emballées, les autres, dites « hors calibre », sont rejetées.

Il a été constaté que 20 % des pommes fournies par le premier producteur sont hors calibre, 5 % des pommes fournies par le second producteur sont hors calibre et 4 % des pommes fournies par le troisième producteur sont hors calibre.

Chaque jour les pommes livrées par les différents producteurs sont entreposées dans le même hangar. Pour l'étude du problème qui suit, on convient qu'elles sont bien mélangées.

Un contrôle de qualité sur les pommes est effectué de la manière suivante : un contrôleur choisit de manière aléatoire une pomme dans ce hangar, puis mesure son diamètre pour déterminer si elle est de « bon calibre »ou « hors calibre ».

Un mercredi matin, un contrôle de qualité est effectué par le contrôleur de la manière décrite ci-dessus.

On appellera

F_1 l'évènement : « la pomme prélevée provient du premier producteur »

F_2 l'évènement : « la pomme prélevée provient du deuxième producteur »

F_3 l'évènement : « la pomme prélevée provient du troisième producteur »

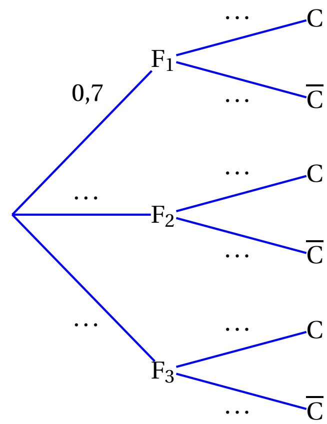
C l'évènement : « la pomme prélevée a un bon calibre »

$\overline{\mathrm{C}}$ l'évènement : « la pomme prélevée est hors calibre ».

Tous les résultats de cet exercice seront donnés à 10^{-4} *près.*

1. Déterminer les probabilités des évènements F_2 et F_3.

2. Recopier sur votre copie et compléter l'arbre suivant :



3. Justifier que la probabilité pour que la pomme prélevée ait le bon calibre et provienne du troisième producteur est 0,144 0.
4. Montrer que la probabilité pour que la pomme prélevée ait le bon calibre est : 0,846 5.
5. La pomme mesurée est hors calibre. Le contrôleur affirme :

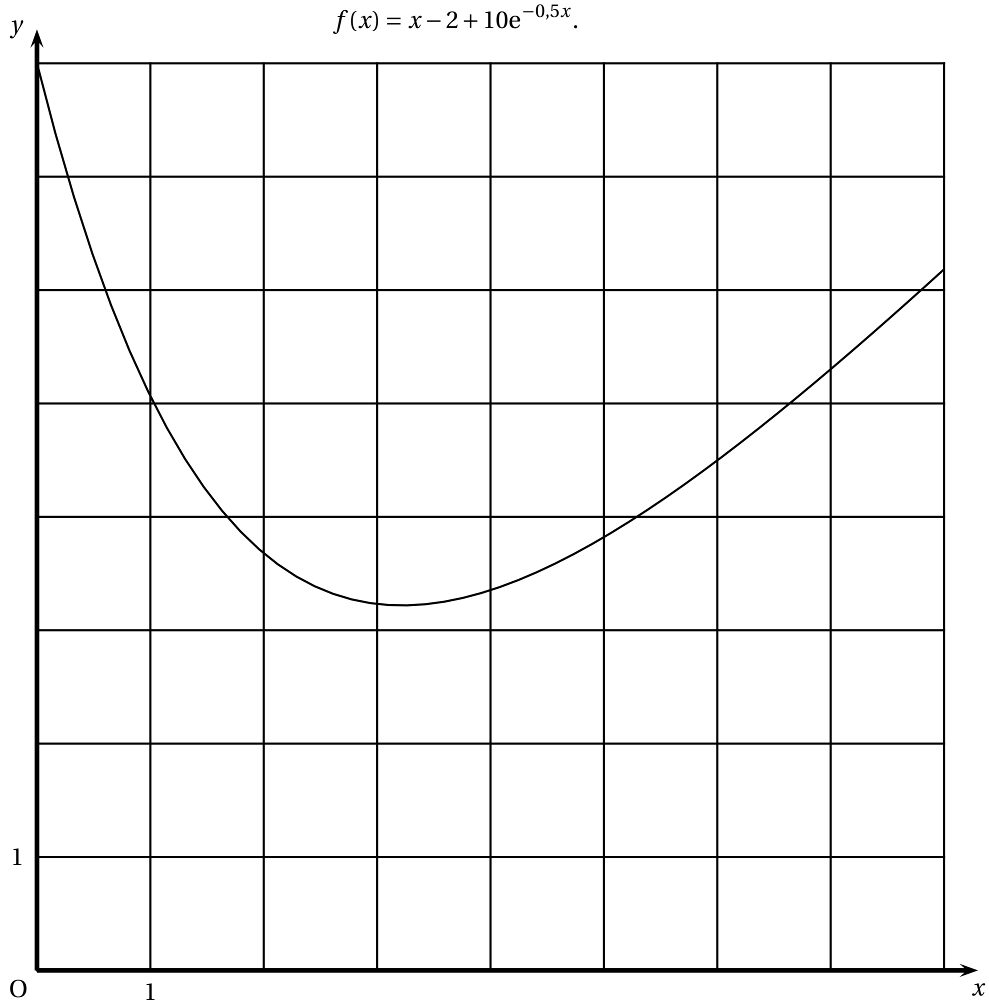
   « Cette pomme provient très probablement du premier producteur ».

   Quel calcul permet de justifier cette affirmation ?
   Faire ce calcul et conclure.

ANNEXE 2
Exercice 2
À rendre avec la copie

Courbe représentative ($\mathscr{C}$) sur l'intervalle [0 ; 8] de la fonction f définie par :

$$f(x) = x - 2 + 10\mathrm{e}^{-0,5x}.$$



CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

	BACCALAUREAT GENERAL	
Série	ES	SESSION 2005
Epreuve	MATHEMATIQUES	Durée : 3h
Coef : 5 (obligatoire) 7 (Spécialité)	RECOMMANDATIONS DE CORRECTION	

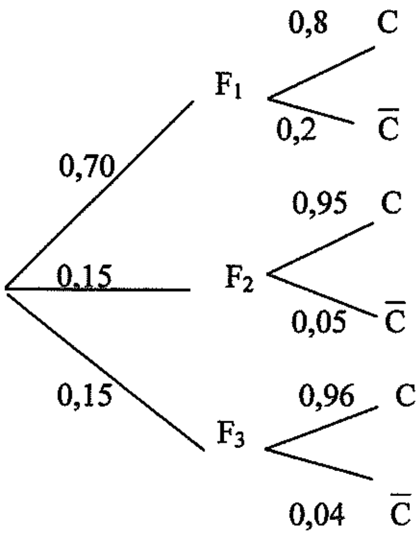
Question	Réponse	Points	Commentaires
	<u>Exercice 1 (3 points)</u> **Commun à tous les candidats**		(+0,5 point) par bonne réponse. (- 0,25 point) par mauvaise réponse. RQ : (- 0,25 point) si deux ou trois réponses sont cochées. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.
1)	☒ 4		
2)	☒ $f'(0)=0$		
3)	☒ $y=1$		
4)	☒ admet une solution unique appartenant à l'intervalle $]1;2[$.		
5)	☒ $g(x)=0$		
6)	☒ g a les mêmes variations que la fonction f.		

Question	Réponse	Points	Commentaires
	Exercice 2 (5 points) **Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**		
1)	Augmentation : 220 euros. $\frac{220}{2229} \simeq 0,098$. Augmentation en pourcentage arrondi à l'unité : 10 %.		
2)	Schéma comportant les cinq points et respectant les unités indiquées.		
3)	• $y = ax + b$ avec $a = 54,9$ $b = 2229,6$ • Tracé de la droite (D) dans le repère.		
4)	$x = 6$ $y = 6a + b = 2559$ Montant de rachat d'un trimestre à 60 ans : 2559 euros.		
5)	Le montant cherché s'obtient par : $2555 \times (0,97)^5 \simeq 2194$ arrondi à l'unité Montant de rachat d'un trimestre à 65 ans : 2194 euros.		

Question	Réponse	Points	Commentaires
	Exercice 2 (5 points) **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**		
A – 1)	$u_1 = 4000 + (1{,}05u_0) = 109\,000$ $u_2 = 4000 + (1{,}05u_1) = 118\,450$		
A – 2)	L'augmentation de 5% par an liée aux naissances et aux décès se traduit par : $1{,}05u_n$. L'apport de 4000 personnes supplémentaires par an correspond à : + 4000. D'où : $u_{n+1} = 1{,}05u_n + 4000$.		
A – 3)	**a)** $v_0 = 180\,000$. **b)** Calcul détaillé aboutissant à : $v_{n+1} = 1{,}05v_n$. (v_n) est une suite géométrique de premier terme v_0 et raison 1,05. **c)** $v_n = (1{,}05)^n v_0 = 180\,000 \times (1{,}05)^n$. $u_n = v_n - 80\,000 = 180\,000 \times (1{,}05)^n - 80\,000$. **d)** 1,05 > 1 donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} (1{,}05)^n = +\infty$. D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.		
B – 1)	On cherche u_{15}. $u_{15} \approx 294\,207$ (arrondi à l'unité). La ville aura 294 207 habitants au 1er janvier 2020.		
2)	On cherche le plus petit n tel que : $u_n > 200\,000$, - soit en résolvant cette inéquation, ce qui mène à : $n > \dfrac{\ln(\frac{14}{9})}{\ln(1{,}05)}$ et $\dfrac{\ln(\frac{14}{9})}{\ln(1{,}05)} \simeq 9{,}05$ donc $n \geq 10$. - soit en calculant u_n pour les valeurs successives de n jusqu'à ce que : $u_n > 200\,000$. Réponse : $n = 10$ C'est donc à partir de l'année 2015 que la population de la ville dépassera 200 000 habitants.		

Question	Réponse	Points	Commentaires
	Exercice 3 (7 points) **Commun à tous les candidats**		
1)	$\lim\limits_{x\to+\infty} -0,5x=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0,5x}=0$. (Ou : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0,5x}=\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$) • $\lim\limits_{x\to+\infty} x-2=+\infty$. • D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.		
2)	**a)** $f(x)=\alpha-2 \;\; +10e^{-0,5\alpha}$ $e^{-0,5\alpha}=e^{-\ln 5}=\frac{1}{e^{\ln 5}}=\frac{1}{5}$. D'où : $f(\alpha)=\alpha-2+\frac{10}{5}=\alpha$. **b)** $\alpha\simeq 3,2$ arrondi au dixième.		
3)	**a)** $f'(x)=1-5e^{-0,5x}$ **b)** Résolution de $f'(x)=0$ aboutissant à $x=\alpha$ • Résolution de $f'(x)>0$ aboutissant à $x>\alpha$ • Tableau : $\begin{array}{c\|c\|ccccc} x & & 0 & & \alpha & & +\infty \\ \hline f'(x) & & & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & & 8 & \searrow & \alpha & \nearrow & +\infty \end{array}$		
4)	$f(x)-(x-2)=10e^{-0,5x}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} 10e^{-0,5x}=0$ (d'après le 1)) donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-2)=0$.		

	• $10e^{-0,5x} > 0$ car toute exponentielle est positive. Donc : $f(x)-(x-2)>0$. • Interprétation graphique : la droite (D) d'équation $y=x-2$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$ et (C) est au dessus de (D) en chacun de ses points.		
5)	**a)** Tracé de la droite d'équation $y=x$ et du point d'abscisse α, intersection de cette droite et de (C), ou bien utilisation de la valeur approchée de α pour la construction du point de la courbe d'abscisse α. **b)** Tangente parallèle à l'axe des abscisses. **c)** Tracé de (D) d'équation $y=x-2$.		
6) a)	- E correctement hachuré sur l'annexe 2. - Calcul de A, considérée comme l'aire sous la courbe de la fonction positive f, sur $[2;6]$, diminuée de l'aire d'un triangle : par exemple : $A=\int_2^6 f(x)dx-8$. ***ou*** Calcul de A comme l'aire comprise entre la courbe de f et celle de $(x\mapsto x-2)$ sur $[2;6]$: $A=\int_2^6 (f(x)-(x-2))dx$, suivi éventuellement de : $A=\int_2^6 10e^{-0,5x}dx$		
6) b)	$A=[\frac{x^2}{2}-2x-20e^{-0,5x}]_2^6-8=\ldots=20e^{-1}-20e^{-3}$ ***ou*** $A=[-20e^{-0,5x}]_2^6=20e^{-1}-20e^{-3}$ $A\approx 6,36$ arrondi au centième. Le domaine E a pour aire : 6,36 unités d'aire, arrondie au centième.		

Question	Réponse	Points	Commentaires
	<u>Exercice 4 (5 points)</u> **Commun à tous les candidats**		
1)	15% des pommes proviennent du deuxième producteur donc : $p(F_2)=0{,}15$. De même : $p(F_3)=0{,}15$.		
2)	 		On n'attend pas d'explications.
3)	On cherche $p(F_3 \text{ et } C)$. 1ère réponse possible : $p(F_3 \text{ et } C)=p(F_3)\times p_{F_3}(C)=0{,}15\times 0{,}96=0{,}144$ 2ème réponse possible : d'après l'arbre : $p(F_3 \text{ et } C)=0{,}15\times 0{,}96=0{,}144$		
4)	On cherche $p(C)$. $p(C)=p(F_1 \text{ et } C)+p(F_2 \text{ et } C)+p(F_3 \text{ et } C)$ Par l'une ou l'autre des méthodes évoquées au 3) on trouve : $p(F_1 \text{ et } C)=0{,}7\times 0{,}8=0{,}56$ $p(F_2 \text{ et } C)=0{,}15\times 0{,}95=0{,}1425$ D'où $p(C)=0{,}56+0{,}1425+0{,}144=0{,}8465$		

5)	C'est le calcul de la probabilité de F_1 sachant $\overline{C}$ qui permet de justifier l'affirmation. $p_{\overline{C}}(F_1) = \dfrac{p(\overline{C}\text{ et }F_1)}{p(\overline{C})}$ $p(\overline{C}\text{ et }F_1) = 0,7 \times 0,2 = 0,14$ par l'une ou l'autre des méthodes évoquées au **3)**. $p(\overline{C}) = 1 - p(C) = 0,1535$ (d'après **4)**). $p_{\overline{C}}(F_1) = \dfrac{0,14}{0,1535} \simeq 0,9121$ arrondi au dix millième. Conclusion : il y a 91,21% de chances pour que cette pomme provienne du premier producteur, donc l'affirmation du contrôleur est correcte. (ou toute autre affirmation exacte, comme par exemple : « il y a 9 chances sur 10…, donc,… »).		

BACCALAUREAT GENERAL

SESSION 2005

MATHÉMATIQUES

SERIE : ES

Spécialité

DUREE DE L'EPREUVE : 3 heures - COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte 7 pages dont 2 feuilles ANNEXES 1 et 2.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les feuilles ANNEXES 1 et 2 sont à rendre avec la copie.

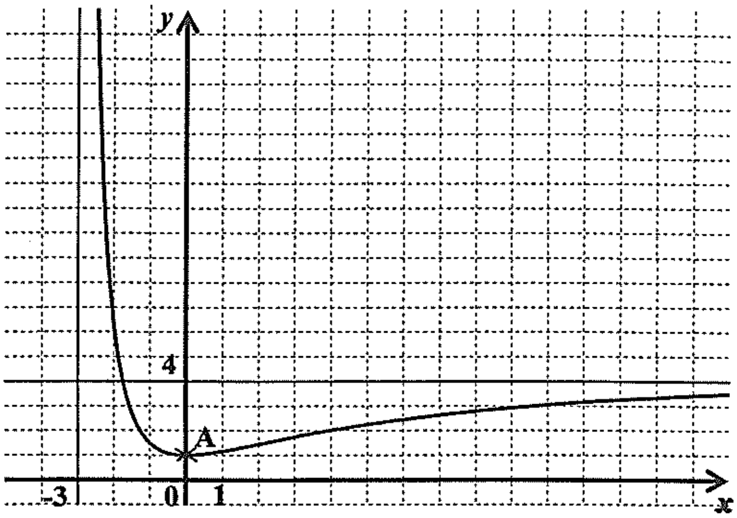
Tournez la page S.V.P

EXERCICE 1 *(3 points)*

Commun à tous les candidats

La courbe (C) donnée ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-3;+\infty[$.

On sait que le point A de coordonnées $(0;1)$ appartient à la courbe (C) et que la fonction f admet un minimum pour $x = 0$. En outre, les droites d'équations respectives $y = 4$ et $x = -3$ sont asymptotes à la courbe (C).



Chaque question ci-dessous comporte trois réponses possibles.
Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte. On demande de cocher cette réponse *sur la feuille réponse fournie en ANNEXE 1* ***(à rendre avec la copie).***
Une réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point. L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun.
Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

1) La limite de la fonction f en $+\infty$ est :	• $+\infty$ • -3 • 4
2) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]-3;+\infty[$	• $f'(0)=1$ • $f'(1)=0$ • $f'(0)=0$
3) L'équation de la tangente à la courbe (C) au point A est :	• $y=1$ • $y=x$ • $y=0$
4) Sur l'intervalle $]-3;+\infty[$, l'équation $f(x)=x$	• n'admet aucune solution • admet comme solution unique : $x = 0$ • admet une solution unique appartenant à l'intervalle $]1;2[$

Dans les deux questions suivantes, on considère la fonction g définie sur l'intervalle $]-3;+\infty[$ par $g = \ln \circ f$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

5) Si $x = 0$, alors	• on ne peut pas calculer $g(x)$ • $g(x)=1$ • $g(x)=0$
6) On peut affirmer que sur l'intervalle $]-3;+\infty[$	• g a les mêmes variations que la fonction ln • g a les mêmes variations que la fonction f • g a les variations inverses de celles de la fonction f

EXERCICE 2 *(5 points)*

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Au 1^er janvier 2005, une ville en pleine expansion avait une population de 100 000 habitants.

Un bureau d'étude fait l'hypothèse qu'à partir du 1^er janvier 2005 :

- le nombre d'habitants de la ville augmente chaque année de 5 % du fait des naissances et des décès ;
- du fait des mouvements migratoires, 4 000 personnes supplémentaires viennent s'installer chaque année dans cette ville.

<u>PARTIE A</u> : étude théorique

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'habitants de cette ville au 1^er janvier de l'année $2005+n$.
Ainsi, $u_0 = 100\,000$.

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}05u_n + 4\,000$.

3) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n + 80\,000$.

a) Calculer v_0.

b) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

c) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire que $u_n = 180\,000 \times (1{,}05)^n - 80\,000$.

d) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>PARTIE B</u> :

Le but de cette partie est de prévoir l'évolution de la population jusqu'en 2020, en utilisant le modèle théorique étudié à la **PARTIE A.**

1) Quel sera le nombre d'habitants de la ville au 1^er janvier 2020 ?

2) À partir de quelle année la population de cette ville dépassera-t-elle 200 000 habitants ?

<u>FORMULAIRE POUR L'EXERCICE 2</u>

SUITES ARITHMETIQUES, SUITES GEOMETRIQUES

Suite arithmétique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $a \in \mathbb{R}$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = u_n + a \qquad u_n = u_0 + na$

Suite géométrique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $b \in \mathbb{R}$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = bu_n \qquad u_n = u_0 b^n$

Somme de termes : • $1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ • *Si* $b \neq 1$ alors $1+b+b^2+\ldots+b^n = \dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$.

EXERCICE 3 *(7 points)*

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 2 + 10\,e^{-0,5x}.$$

On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal et (D) la droite d'équation $y = x - 2$. La courbe (C) est partiellement représentée en **ANNEXE 2.**

1) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2) On pose $\alpha = 2\ln 5$.

a. Montrer que $f(\alpha) = \alpha$.

b. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de α.

3) On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et on note f' la fonction dérivée de f sur cet intervalle.

a. Calculer $f'(x)$, pour tout x élément de l'intervalle $[0;+\infty[$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$, et dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur cet intervalle.

4) Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-(x-2)] = 0$ et que, pour tout x de l'intervalle $[0;+\infty[$,

$$f(x)-(x-2) > 0.$$

Donner l'interprétation graphique de ces résultats.

5) Sur le graphique donné en **ANNEXE 2 (à rendre avec la copie)** :

a. placer le point de la courbe (C) d'abscisse α ;

b. tracer la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse α ;

c. tracer la droite (D).

6) On note A l'aire (en unités d'aire) du domaine E délimité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 2$ et $x = 6$.

a. Hachurer sur le graphique, donné en **ANNEXE 2 (à rendre avec la copie),** le domaine E, puis exprimer l'aire A à l'aide d'une expression faisant intervenir une intégrale.

b. Déterminer la valeur exacte de l'aire A, puis en donner la valeur arrondie au centième.

EXERCICE 4 *(5 points)*

Commun à tous les candidats

Une usine d'emballage de pommes est approvisionnée par trois producteurs. Le premier producteur fournit 70 % de l'approvisionnement de cette usine, le reste étant également partagé entre le deuxième producteur et le troisième.

Avant d'être emballées, les pommes sont calibrées par une machine pour les trier selon leur diamètre. Les pommes dont le diamètre est conforme aux normes en vigueur sont emballées, les autres, dites « hors calibre », sont rejetées.

Il a été constaté que 20 % des pommes fournies par le premier producteur sont hors calibre,
5 % des pommes fournies par le second producteur sont hors calibre et
4 % des pommes fournies par le troisième producteur sont hors calibre.

Chaque jour les pommes livrées par les différents producteurs sont entreposées dans le même hangar. Pour l'étude du problème qui suit, on convient qu'elles sont bien mélangées.

Un contrôle de qualité sur les pommes est effectué de la manière suivante :
un contrôleur choisit de manière aléatoire une pomme dans ce hangar, puis mesure son diamètre pour déterminer si elle est de « bon calibre » ou « hors calibre ».

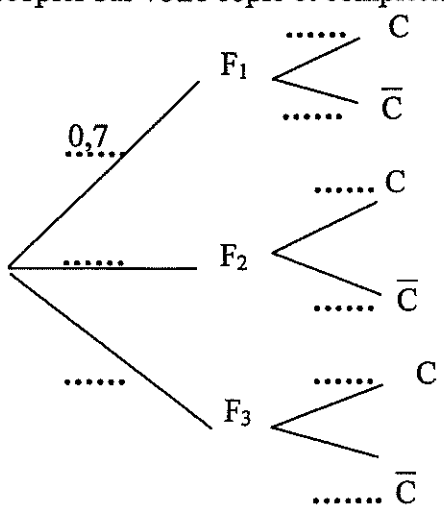
Un mercredi matin, un contrôle de qualité est effectué par le contrôleur de la manière décrite ci-dessus.

On appellera F_1 l'événement : « la pomme prélevée provient du premier producteur »
F_2 l'événement : « la pomme prélevée provient du deuxième producteur »
F_3 l'événement : « la pomme prélevée provient du troisième producteur »
C l'événement : « la pomme prélevée a un bon calibre »
$\overline{C}$ l'événement : « la pomme prélevée est hors calibre ».

Tous les résultats de cet exercice seront donnés à 10^{-4} *près.*

1) Déterminer les probabilités des événements F_2 et F_3.

2) Recopier sur votre copie et compléter l'arbre suivant :



3) Justifier que la probabilité pour que la pomme prélevée ait le bon calibre et provienne du troisième producteur est 0,1440.

4) Montrer que la probabilité pour que la pomme prélevée ait le bon calibre est : 0,8465.

5) La pomme mesurée est hors calibre. Le contrôleur affirme :

« Cette pomme provient très probablement du premier producteur ».

Quel calcul permet de justifier cette affirmation ?
Faire ce calcul et conclure.

ANNEXE 1

Exercice 1

À rendre avec la copie

Ne cocher qu'une seule réponse par question.

1) La limite de la fonction f en $+\infty$ est :	☐ $+\infty$ ☐ -3 ☐ 4
2) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]-3;+\infty[$.	☐ $f'(0)=1$ ☐ $f'(1)=0$ ☐ $f'(0)=0$
3) L'équation de la tangente à la courbe (C) au point A est :	☐ $y=1$ ☐ $y=x$ ☐ $y=0$
4) Sur l'intervalle $]-3;+\infty[$, l'équation $f(x)=x$	☐ n'admet aucune solution ☐ admet comme solution unique : $x=0$ ☐ admet une solution unique appartenant à l'intervalle $]1;2[$

Dans les deux questions suivantes, on considère la fonction g définie sur l'intervalle $]-3;+\infty[$ par $g = \ln \circ f$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

5) Si $x=0$, alors	☐ on ne peut pas calculer $g(x)$ ☐ $g(x)=1$ ☐ $g(x)=0$
6) On peut affirmer que sur l'intervalle $]-3;+\infty[$	☐ g a les mêmes variations que la fonction ln ☐ g a les mêmes variations que la fonction f ☐ g a les variations inverses de celles de la fonction f

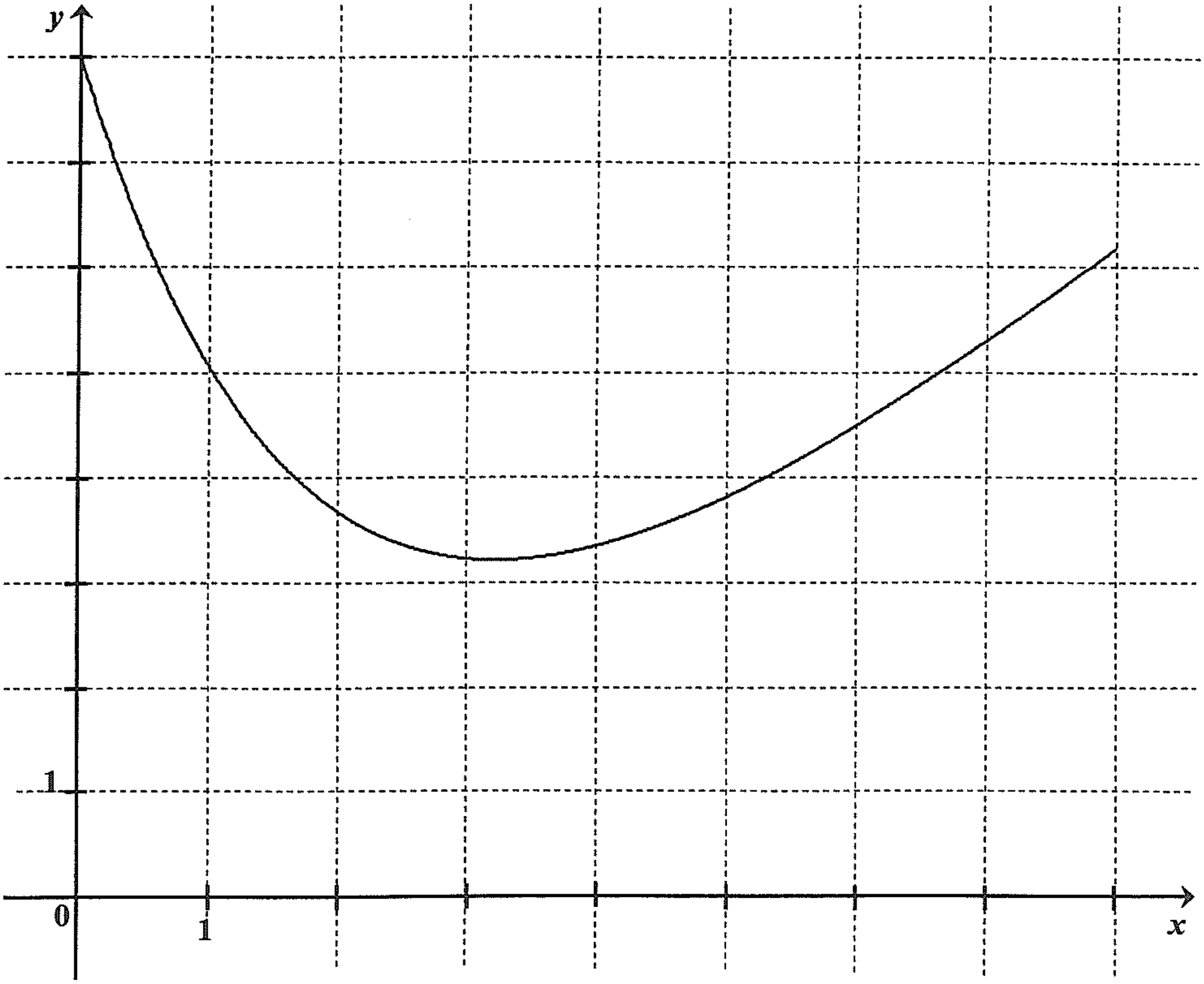
ANNEXE 2

Exercice 3

<u>À rendre avec la copie</u>

Courbe représentative (C) sur l'intervalle $[0;8]$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = x - 2 + 10\,e^{-0,5\,x}.$$



CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

	BACCALAUREAT GENERAL	
Série	ES	SESSION 2005
Epreuve	MATHEMATIQUES	Durée : 3h
Coef : 5 (obligatoire) 7 (Spécialité)	RECOMMANDATIONS DE CORRECTION	

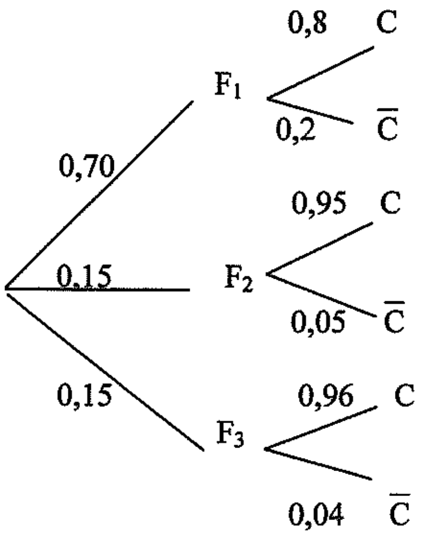
Question	Réponse	Points	Commentaires
	Exercice 1 (3 points) **Commun à tous les candidats**		
1)	☒ 4		
2)	☒ $f'(0)=0$		(+0,5 point) par bonne réponse. (- 0,25 point) par mauvaise réponse.
3)	☒ $y=1$		RQ : (- 0,25 point) si deux ou trois réponses sont cochées.
4)	☒ admet une solution unique appartenant à l'intervalle $]1;2[$.		
5)	☒ $g(x)=0$		Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.
6)	☒ g a les mêmes variations que la fonction f.		

Question	Réponse	Points	Commentaires
	Exercice 2 (5 points) **Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**		
1)	Augmentation : 220 euros. $\frac{220}{2229} \simeq 0,098$. Augmentation en pourcentage arrondi à l'unité : 10 %.		
2)	Schéma comportant les cinq points et respectant les unités indiquées.		
3)	• $y = ax + b$ avec $a = 54,9$ $b = 2229,6$ • Tracé de la droite (D) dans le repère.		
4)	$x = 6$ $y = 6a + b = 2559$ Montant de rachat d'un trimestre à 60 ans : 2559 euros.		
5)	Le montant cherché s'obtient par : $2555 \times (0,97)^5 \simeq 2194$ arrondi à l'unité Montant de rachat d'un trimestre à 65 ans : 2194 euros.		

Question	Réponse	Points	Commentaires
	Exercice 2 (5 points) **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**		
A – 1)	$u_1 = 4000 + (1{,}05u_0) = 109\,000$ $u_2 = 4000 + (1{,}05u_1) = 118\,450$		
A – 2)	L'augmentation de 5% par an liée aux naissances et aux décès se traduit par : $1{,}05u_n$. L'apport de 4000 personnes supplémentaires par an correspond à : + 4000. D'où : $u_{n+1} = 1{,}05u_n + 4000$.		
A – 3)	**a)** $v_0 = 180\,000$. **b)** Calcul détaillé aboutissant à : $v_{n+1} = 1{,}05v_n$. (v_n) est une suite géométrique de premier terme v_0 et raison 1,05. **c)** $v_n = (1{,}05)^n v_0 = 180\,000 \times (1{,}05)^n$. $u_n = v_n - 80\,000 = 180\,000 \times (1{,}05)^n - 80\,000$. **d)** $1{,}05 > 1$ donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} (1{,}05)^n = +\infty$. D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.		
B – 1)	On cherche u_{15}. $u_{15} \approx 294\,207$ (arrondi à l'unité). La ville aura 294 207 habitants au 1er janvier 2020.		
2)	On cherche le plus petit n tel que : $u_n > 200\,000$, - soit en résolvant cette inéquation, ce qui mène à : $n > \dfrac{\ln(\frac{14}{9})}{\ln(1{,}05)}$ et $\dfrac{\ln(\frac{14}{9})}{\ln(1{,}05)} \approx 9{,}05$ donc $n \geq 10$. - soit en calculant u_n pour les valeurs successives de n jusqu'à ce que : $u_n > 200\,000$. Réponse : $n = 10$ C'est donc à partir de l'année 2015 que la population de la ville dépassera 200 000 habitants.		

Question	Réponse	Points	Commentaires
	Exercice 3 (7 points) **Commun à tous les candidats**		
1)	$\lim\limits_{x\to+\infty} -0,5x = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0,5x} = 0$. (Ou : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0,5x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$) • $\lim\limits_{x\to+\infty} x-2 = +\infty$. • D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.		
2)	**a)** $f(x) = \alpha - 2 \quad +10e^{-0,5\alpha}$ $e^{-0,5\alpha} = e^{-\ln 5} = \dfrac{1}{e^{\ln 5}} = \dfrac{1}{5}$. D'où : $f(\alpha) = \alpha - 2 + \dfrac{10}{5} = \alpha$. **b)** $\alpha \simeq 3,2$ arrondi au dixième.		
3)	**a)** $f'(x) = 1 - 5e^{-0,5x}$ **b)** Résolution de $f'(x) = 0$ aboutissant à $x = \alpha$ • Résolution de $f'(x) > 0$ aboutissant à $x > \alpha$ • Tableau : $\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & \alpha & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & 8 & \searrow & \alpha & \nearrow & +\infty \end{array}$		
4)	$f(x) - (x-2) = 10e^{-0,5x}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} 10e^{-0,5x} = 0$ (d'après le 1)) donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x-2) = 0$.		

	• $10e^{-0,5x} > 0$ car toute exponentielle est positive. Donc : $f(x)-(x-2)>0$. • Interprétation graphique : la droite (D) d'équation $y = x-2$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$ et (C) est au dessus de (D) en chacun de ses points.		
5)	**a)** Tracé de la droite d'équation $y = x$ et du point d'abscisse α, intersection de cette droite et de (C), ou bien utilisation de la valeur approchée de α pour la construction du point de la courbe d'abscisse α. **b)** Tangente parallèle à l'axe des abscisses. **c)** Tracé de (D) d'équation $y = x-2$.		
6) a)	- E correctement hachuré sur l'annexe 2. - Calcul de *A*, considérée comme l'aire sous la courbe de la fonction positive *f*, sur $[2;6]$, diminuée de l'aire d'un triangle : par exemple : $A = \int_2^6 f(x)dx - 8$. ***ou*** Calcul de *A* comme l'aire comprise entre la courbe de *f* et celle de $(x \mapsto x-2)$ sur $[2;6]$: $A = \int_2^6 (f(x)-(x-2))dx$, suivi éventuellement de : $A = \int_2^6 10e^{-0,5x}dx$		
6) b)	$A = [\frac{x^2}{2} - 2x - 20e^{-0,5x}]_2^6 - 8 = ... = 20e^{-1} - 20e^{-3}$ ***ou*** $A = [-20e^{-0,5x}]_2^6 = 20e^{-1} - 20e^{-3}$ $A \approx 6,36$ arrondi au centième. Le domaine E a pour aire : 6,36 unités d'aire, arrondie au centième.		

Question	Réponse	Points	Commentaires
	Exercice 4 (5 points) **Commun à tous les candidats**		
1)	15% des pommes proviennent du deuxième producteur donc : $p(F_2)=0{,}15$. De même : $p(F_3)=0{,}15$.		
2)			On n'attend pas d'explications.
3)	On cherche $p(F_3 \text{ et } C)$. 1[ère] réponse possible : $p(F_3 \text{ et } C)=p(F_3)\times p_{F_3}(C)=0{,}15\times 0{,}96=0{,}144$ 2[ème] réponse possible : d'après l'arbre : $p(F_3 \text{ et } C)=0{,}15\times 0{,}96=0{,}144$		
4)	On cherche $p(C)$. $p(C)=p(F_1 \text{ et } C)+p(F_2 \text{ et } C)+p(F_3 \text{ et } C)$ Par l'une ou l'autre des méthodes évoquées au 3) on trouve : $p(F_1 \text{ et } C)=0{,}7\times 0{,}8=0{,}56$ $p(F_2 \text{ et } C)=0{,}15\times 0{,}95=0{,}1425$ D'où $p(C)=0{,}56+0{,}1425+0{,}144=0{,}8465$		

5)	C'est le calcul de la probabilité de F_1 sachant $\overline{C}$ qui permet de justifier l'affirmation. $p_{\overline{C}}(F_1) = \dfrac{p(\overline{C} \text{ et } F_1)}{p(\overline{C})}$ $p(\overline{C} \text{ et } F_1) = 0,7 \times 0,2 = 0,14$ par l'une ou l'autre des méthodes évoquées au **3)**. $p(\overline{C}) = 1 - p(C) = 0,1535$ (d'après **4)**). $p_{\overline{C}}(F_1) = \dfrac{0,14}{0,1535} \simeq 0,9121$ arrondi au dix millième. Conclusion : il y a 91,21% de chances pour que cette pomme provienne du premier producteur, donc l'affirmation du contrôleur est correcte. (ou toute autre affirmation exacte, comme par exemple : « il y a 9 chances sur 10…, donc,… »).		

☙ Baccalauréat S France 15 juin 2006 ❧

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Soit $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace.

On considère les points

$$A(2\,;\,4\,;\,1),\ B(0\,;\,4\,;\,-3),\ C(3\,;\,1\,;\,-3),\ D(1\,;\,0\,;\,-2), E(3\,;\,2\,;\,-1), I\left(\frac{3}{5}\,;\,4\,;\,-\frac{9}{5}\right)$$

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, dire, sans le justifier, si elle est vraie ou si elle est fausse. Pour chaque question, il est compté un point si la réponse est exacte et zéro sinon.

1. Une équation du plan (ABC) est : $2x+2y-z-11=0$.
2. Le point E est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).
3. Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
4. La droite (CD) est donnée par la représentation paramétrique suivante :

$$(CD)\quad \left\{\begin{array}{lll} x &=& -1+2t\\ y &=& -1+t\\ z &=& 1-t \end{array}\right. \qquad (t\in\mathbb{R}).$$

5. Le point I est sur la droite (AB).

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=x^2\mathrm{e}^{1-x}.$$

   On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

   a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; quelle conséquence graphique pour $\mathscr{C}$ peut-on en tirer ?

   b. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer sa fonction dérivée f'.

   c. Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe $\mathscr{C}$.

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par

$$I_n=\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

   a. Établir une relation entre I_{n+1} et I_n.

   b. Calculer I_1, puis I_2.

   c. Donner une interprétation graphique du nombre I_2. On la fera apparaître sur le graphique de la question 1 c.

3. **a.** Démontrer que pour tout nombre réel x de $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante :

$$x^n \leqslant x^n\mathrm{e}^{1-x} \leqslant x^n\mathrm{e}.$$

   b. En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n 'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthononnal direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
Dans tout l'exercice, $\mathcal{P}\setminus\{\mathrm{O}\}$ désigne le plan $\mathcal{P}$ privé du point origine O.

1. **Question de cours**
   On prend comme pré-requis les résultats suivants :
   – Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors : $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif
   – Pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul d'affixe z on a : $\arg(z) = \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{w}\right)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif

   a. Soit z et z' des nombres complexes non nuls, démontrer que $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

   b. Démontrer que si A, B, C sont trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c, on a : $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

2. On considère l'application f de $\mathcal{P}\setminus\{\mathrm{O}\}$ dans $\mathcal{P}\setminus\{\mathrm{O}\}$ qui, au point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \dfrac{1}{\overline{z}}$. On appelle U et V les points du plan d'affixes respectives 1 et i.

   a. Démontrer que pour $z \neq 0$, on a $\arg\left(z'\right) = \arg(z)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.
   En déduire que, pour tout point M de $\mathcal{P}\setminus\{\mathrm{O}\}$ les points M et $M' = f(M)$ appartiennent à une même demi-droite d'origine O.

   b. Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{P}\setminus\{\mathrm{O}\}$ tels que $f(M) = M$.

   c. M est un point du plan $\mathcal{P}$ distinct de O, U et V, on admet que M' est aussi distinct de O, U et V.
   Établir l'égalité $\dfrac{z'-1}{z'-\mathrm{i}} = \dfrac{1}{\mathrm{i}}\left(\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}+\mathrm{i}}\right) = -\mathrm{i}\overline{\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right)}$.
   En déduire une relation entre $\arg\left(\dfrac{z'-1}{z'-\mathrm{i}}\right)$ et $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right)$

3. **a.** Soit z un nombre complexe tel que $z \neq 1$ et $z \neq \mathrm{i}$ et soit M le point d'affixe z. Démontrer que M est sur la droite (UV) privée de U et de V si et seulement si $\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}$ est un nombre réel non nul.

   b. Déterminer l'image par f de la droite (UV) privée de U et de V.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Question de cours

1. Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.
2. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{lll} n & \equiv & 13 \quad (19) \\ n & \equiv & 6 \quad (12) \end{array}\right.$$

1. Démontrer qu'il existe un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs tel que : $19u+12v = 1$.
   (On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).
   Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S).

2. **a.** Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à

$$\begin{cases} n \equiv n_0 \quad (19) \\ n \equiv n_0 \quad (12) \end{cases}$$

b. Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0 \quad (19) \\ n \equiv n_0 \quad (12) \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0 \quad (12 \times 19)$.

3. **a.** Trouver un couple $(u\,;\, v)$ solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2. b.).

4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.
On divise n par $228 = 12 \times 19$. Quel est le reste r de cette division ?

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre un ballon afin de le crever. À chacun de ces tirs, il a la probabilité 0,2 de crever le ballon. Le tireur s'arrête quand le ballon est crevé. Les tirs successifs sont supposés indépendants.

a. Quelle est la probabilité qu'au bout de deux tirs le ballon soit intact ?

b. Quelle est la probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon ?

c. Quelle est la probabilité p_n que n tirs suffisent pour crever le ballon ?

d. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n > 0,99$?

2. Ce tireur participe au jeu suivant :
Dans un premier temps il lance un dé tétraédrique régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 4 (la face obtenue avec un tel dé est la face cachée) ; soit k le numéro de la face obtenue. Le tireur se rend alors au stand de tir et il a droit à k tirs pour crever le ballon.
Démontrer que, si le dé est bien équilibré, la probabilité de crever le ballon est égale à 0,409 6 (on pourra utiliser un arbre pondéré).

3. Le tireur décide de tester le dé tétraédrique afin de savoir s'il est bien équilibré ou s'il est pipé. Pour cela il lance 200 fois ce dé et il obtient le tableau suivant :

Face k	1	2	3	4
Nombre de sorties de la face k	58	49	52	41

a. Calculer les fréquences de sorties f_k observées pour chacune des faces.

b. On pose $d^2 = \Sigma_{k=1}^{4}\left(f_k - \dfrac{1}{4}\right)^2$. Calculer d^2.

c. On effectue maintenant 1 000 simulations des 200 lancers d'un dé tétraédrique bien équilibré et on calcule pour chaque simulation le nombre d^2. On obtient pour la série statistique des 1 000 valeurs de d^2 les résultats suivants :

Minimum	D_1	Q_1	Médiane	Q_3	D_9	Maximum
0,001 24	0,001 92	0,002 35	0,002 81	0,003 45	0,004 52	0,010 15

Au risque de 10 %, peut-on considérer que ce dé est pipé 7

Correction du sujet national, juin 2006

Exercice 1

On ne demandait pas de justification ; celles-ci sont données à but pédagogique

1. L'équation $2x+2y-z-11=0$ est l'équation d'un plan $\mathscr{P}$.
   - $2x_A+2y_A-z_A-11=2\times2+2\times4-1-11=0$ donc A appartient à $\mathscr{P}$.
   - $2x_B+2y_B-z_B-11=2\times0+2\times4-(-3)-11=0$ donc B appartient à $\mathscr{P}$.
   - $2x_C+2y_C-z_C-11=2\times3+2\times1-(-3)-11=0$ donc C appartient à $\mathscr{P}$.

   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix}$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Les trois points A, B et C ne sont pas alignés et appartiennent au plan $\mathscr{P}$, donc ce plan est le plan (ABC). L'affirmation est donc **vraie**.
2. $2x_E+2y_E-z_E-11=2\times3+2\times2-(-1)-11=0$ donc E appartient à (ABC).

   Le vecteur $\overrightarrow{DE}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$. Alors : $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{AB}=-4+0-4\neq0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas orthogonaux. Le point E n'est donc pas le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC). L'affirmation est **fausse**.
3. $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=4+0-4=0$. Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux donc les droites (AB) et (CD) aussi. L'affirmation est **vraie**.
4. Le point C n'appartient pas à la droite dont on donne la représentation paramétrique. En effet, si c'était le cas, il existerait un réel t tel que : $\left\{\begin{array}{lcl}-1+2t&=&3\\-1+t&=&1\\1-t&=&-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{lcl}t&=&2\\t&=&2\\t&=&4\end{array}\right.$, ce qui est impossible. Par conséquent, l'affirmation est **fausse**.
5. $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-\frac{7}{5}\\0\\-\frac{14}{5}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}=\dfrac{10}{7}\overrightarrow{AI}$. Les deux vecteurs sont colinéaires, donc I appartient bien à la droite (AB). L'affirmation est **vraie**.

Il fallait donc répondre : **V-F-V-F-V**

Exercice 2

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2e^{1-x}$.
   (a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{1-x}=+\infty$ par le théorème de composition des limites. Comme on a aussi $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$, on en déduit que : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty}$.

   Pour tout x, on a : $f(x)=ex^2e^{-x}=e\dfrac{x^2}{e^x}$.

   D'après le théorème de croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$. On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0}$.

   L'axe (Ox) est donc asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

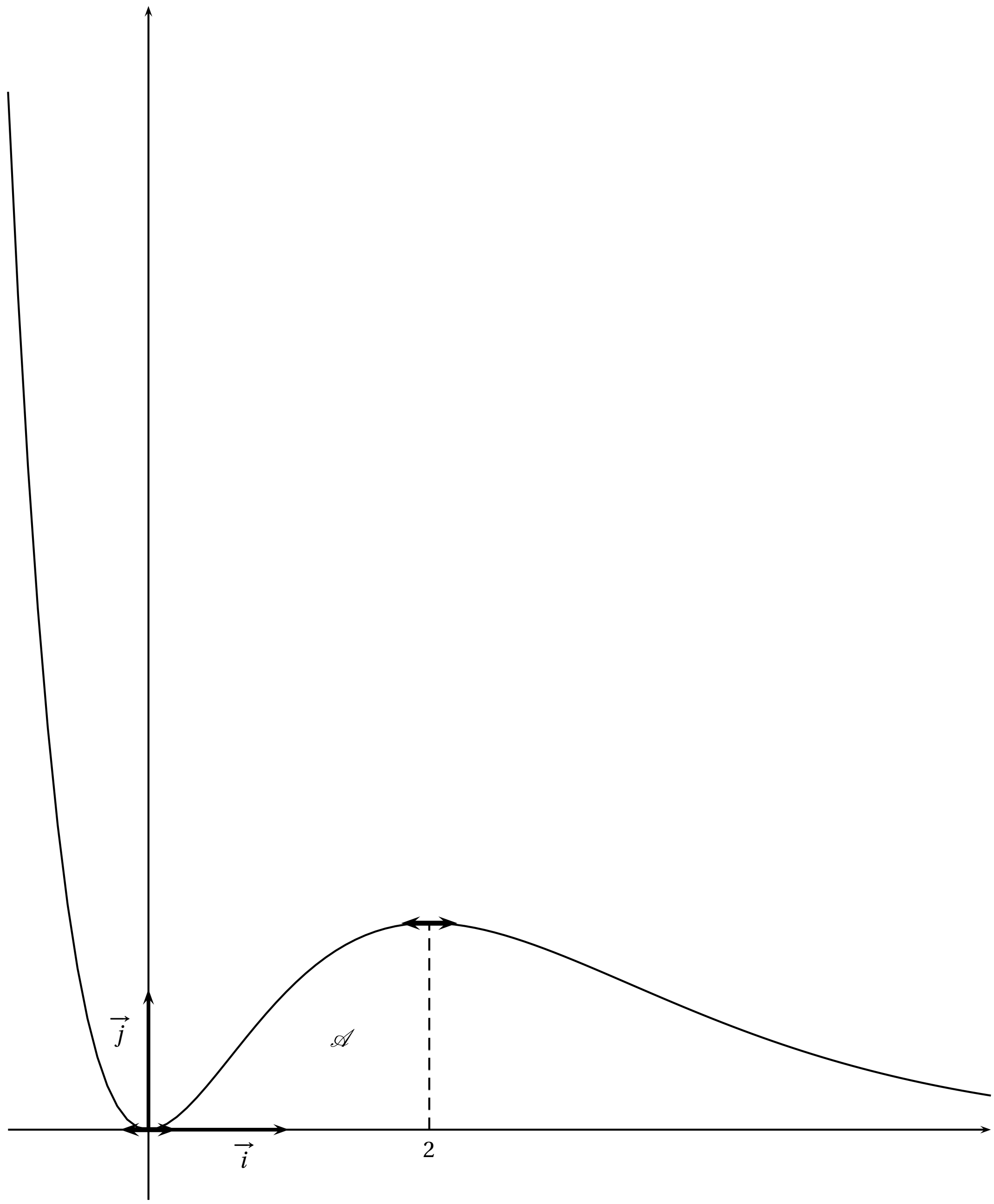
   (b) f est dérivable comme produit et composée de fonctions dérivables ;

   pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=2xe^{1-x}-x^2e^{1-x}=(2x-x^2)e^{1-x}=\boxed{x(2-x)e^{1-x}}$.

   (c) Pour tout x, $e^{1-x}>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x(2-x)$ qui est strictement positif entre ses racines donc sur $]0\,;\,2[$, nul en 0 et 2 et négatif ailleurs.
   On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	2	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0

   Courbe :



$\overrightarrow{j}$
$\mathscr{A}$
$\overrightarrow{i}$
2

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} d\,x$.

(a) $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} d\,x$.

Prenons $\begin{cases} u_{n+1}(x) &= x^{n+1} \\ v'(x) &= e^{1-x} \end{cases}$. Alors : $\begin{cases} u'_{n+1}(x) &= (n+1)x^n \\ v(x) &= -e^{1-x} \end{cases}$.

u_{n+1} et v ont des dérivées continues donc on peut appliquer la formule d'intégration par parties.

On a : $I_{n+1} = \int_0^1 u_{n+1}(x)v'(x)d\,x = [u_{n+1}(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'_{n+1}(x)v(x)d\,x$

$= [-x^{n+1}e^{1-x}]_0^1 + \int_0^1 (n+1)x^N e^{1-x} d\,x = -1 + (n+1)I_n$.

Par conséquent, pour tout n, on a : $\boxed{I_{n+1} = (n+1)I_n - 1}$.

(b) La même formule d'intégration par parties donne :

$I_1 = \int_0^1 x^1 e^{1-x} d\,x = [-xe^{1x}]_0^1 + \int_0^1 e^{1x} d\,x = -1 + [-e^{1-x}]_0^1 = -1 + (-1+e) = \boxed{e-2}$.

En appliquant la formule précédente, on trouve : $I_2 = 2I_1 - 1 = \boxed{2e-5}$.

(c) On remarque que $I_2 = \int_0^1 f(x)d\,x$ donc comme f est une fonction positive, I_2 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

3. (a) Pour tout x de $[0\,;1]$, on a : $0 \leqslant x \leqslant 1$ donc $-1 \leqslant -x \leqslant 0$, d'où $0 \leqslant 1-x \leqslant 1$ qui donne $1 \leqslant e^{1-x} \leqslant e$ (en appliquant la fonction exponentielle qui est croissante) et finalement $x^n \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant ex^n$ (en multipliant par x^n qui est positif).

(b) En utilisant les propriétés de l'intégrale, on obtient :

$\int_0^1 x^n dx \leqslant \int_0^1 x^n e^{-x} dx \leqslant \int_0^1 ex^n dx$ soit $\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leqslant I_n \leqslant e\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$.

Par conséquent : $\boxed{\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}}$.

Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{n+1}$ et $\frac{e}{n+1}$ tendent vers 0 donc I_n tend aussi vers 0 (théorème des gendarmes). $\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$.

Exercice 3 (pour ceux n'ayant pas choisi la spécialité)

1. (a) Soit z un nombre complexe non nul. $z \times \frac{1}{z} = 1$ donc d'après les prérequis, $\arg\left(z \times \frac{1}{z}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg(1) = 0 + 2k\pi$. Par conséquent : $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi$.

Alors, pour tous nombres complexes z et z' non nuls :

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z'}\right) = \arg(z) + (-\arg(z')) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$.

(b) Soient A, B et C trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c.

Alors : $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(c-a) - \arg(b-a) = (\vec{u}, \overrightarrow{AC}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$ (d'après le prérequis) $= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ (d'après la relation de Chasles).

2. Soit f l'application de $P \setminus \{O\}$ dans $P \setminus \{O\}$ qui, à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ avec $z' = \frac{1}{\overline{z}}$.

(a) Pour tout $z \neq 0$, $\arg(z') = \arg\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) = -\arg(\overline{z}) = \arg(z) + 2k\pi$. $\boxed{\arg(z') = \arg(z) + 2k\pi}$.

On en déduit que $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) + 2k\pi$ donc M et M' appartiennent à une **même demi-droite d'origine** O.

(b) $f(M) = M$ équivaut à $\frac{1}{\overline{z}} = z$ donc à $z\overline{z} = 1$ c'est-à-dire à $|z|^2 = 1$ donc à $|z| = 1$.

$\boxed{\text{L'ensemble des points invariants par } f \text{ est le cercle de centre } O \text{ et de rayon } 1}$.

(c) Pour tout $z \neq 0$:

$$\frac{z'-1}{z'-i} = \frac{\frac{1}{\overline{z}} - 1}{\frac{1}{\overline{z}} - i} = \frac{1-\overline{z}}{1-i\overline{z}} = \frac{1-\overline{z}}{i(-i-\overline{z}} = \frac{1}{i}\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+i} = \frac{1}{i}\frac{\overline{z-1}}{\overline{z-i}} = \frac{1}{i}\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}$$

donc $\boxed{\frac{z'-1}{z'-i} = \frac{1}{i}\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}}$

On en déduit que : $\arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right) = \arg\left(\frac{1}{i}\right) + \arg\left(\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}\right) = \arg(-i) - \arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = -\frac{\pi}{2} - \arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) + 2k\pi$.

3. (a) Soit z tel que $z \neq 1$ et $z \neq \mathrm{i}$. (donc $M \neq U$ et $M \neq V$).
M appartient à la droite (UV) privée de U et V si et seulement si $(\overrightarrow{MU}, \overrightarrow{MV}) = k\pi$ c'est-à-dire $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) = k\pi$ donc si et seulement si $\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}$ est réel non nul.

(b) $M(z)$ est un point de la droite (UV) privée de U et V si et seulement si $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) = k\pi$ (d'après la question précédente) donc $\arg\left(\dfrac{z'-1}{z'-\mathrm{i}}\right) = -\dfrac{\pi}{2} - \arg\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k'\pi$ c'est-à-dire $(\overrightarrow{M'V}, \overrightarrow{M'U}) = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k'\pi$.
M' décrit alors le cercle de diamètre $[UV]$, privé des points U, V et O .

Exercice 3 (pour ceux ayant choisi la spécialité)

Partie A :

1. **Théorème de Bézout :** Deux entiers relatifs x et y sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux entiers u et v tels que $ux + vy = 1$.

   Théorème de Gauss : Soient trois entiers relatifs a, b et c. Si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

2. **Démontrons le théorème de Bézout :**
   On suppose que a et b sont premiers entre eux et que a divise bc.
   Comme a et b sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe u et v relatifs tels que $ua + vb = 1$.
   Alors : $uac + vbc = c$. Comme a divise bc, il existe k relatif tel que $bc = ka$.
   On en déduit : $uac + kav = c$ donc $a(uc + kv) = c$. $uc + kv$ est un entier relatif (somme et produit de relatifs) donc a divise c.

Partie B :

On considère le système (S) $\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & 13 & (19) \\ n & \equiv & 6 & (12) \end{array}\right.$

1. 19 est un nombre premier donc 19 et 12 sont premiers entre eux ; d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $19u + 12v = 1$.
   On pose alors $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$.
   $N = 13(1 - 19u) + 6 \times 19u = 13 - 1319u + 6 \times 19u \equiv 13(19)$.
   $N = 13 \times 12v + 6 \times (1 - 12v) = 13 \times 12v + 6 - 6 \times 12v \equiv 6(12)$.
   N est bien solution du système S.

2. (a) Soit n_0 une solution de (S).
   n est solution de (S) si et seulement si $\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & 13 & (19) \\ n & \equiv & 6 & (12) \end{array}\right.$ c'est-à-dire $\left\{\begin{array}{lcccl} n & \equiv & 13 & \equiv & n_0 \quad (19) \\ n & \equiv & 6 & \equiv & n_0 \quad (12) \end{array}\right.$
   donc (S) équivaut à $\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & n_0 & (19) \\ n & \equiv & n_0 & (12) \end{array}\right.$.

   (b) • Si $n \equiv n_0 (12 \times 19)$ alors il est clair que $n \equiv n_0(19)$ et $n \equiv n_0(12)$ donc que $\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & n_0 & (19) \\ n & \equiv & n_0 & (12) \end{array}\right.$.

   • Réciproquement :
   Si $\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & n_0 & (19) \\ n & \equiv & n_0 & (12) \end{array}\right.$, alors il existe k et k' entiers relatifs tels que $n - n_0 = 19k$ et $n - n_0 = 12k'$ donc $19k = 12k'$.
   19 divise donc $12k'$. Comme 12 et 19 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 19 divise k' donc $k' = 12k''$, $k'' \in \mathbb{Z}$. Alors $n - n_0 = 12 \times 19k''$ donc $n \equiv n_0(12 \times 19)$.
   On a montré que $\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & n_0 & (19) \\ n & \equiv & n_0 & (12) \end{array}\right.$ équivaut à $n \equiv n_0\ (12 \times 19)$.

3. (a) Appliquons l'algorithme d'Euclide :
   On a successivement :
   $19 = 1 \times 12 + 7$
   $12 = 7 \times 1 + 5$
   $7 = 5 \times 1 + 2$
   $5 = 2 \times 2 + 1$
   d'où $1 = 5-2\times2 = 5-2(7-5\times1) = 5\times3-2\times7 = (12-7)\times3-2\times7 = 12\times3-7\times5 = 12\times3-(19)12)\times5 = \boxed{12\times8-19\times5}$.
   Un couple $(u\,;\ v)$ est : $\boxed{(u\,;\ v) = (-5\,;\,8)}$.

Alors $\boxed{N = 13 \times 12 \times 8 + 6 \times 19 \times (-5) = \boxed{678}}$.

(b) $N = 678$ est une solution de S. D'après la question $2b$), les solutions de (S) sont tous les nombres n tels que $n \equiv N\ (12 \times 19)$ c'est-à-dire $n \equiv 678\ (228)$. (car $12 \times 19 = 228$)
$\boxed{\mathscr{S} = \{678 + 228k,\ k \in \mathbb{Z}\}}$

4. Soit n un entier tel que, si on le divise par 12, le reste est 6 et si on le divise par 19, le reste est 13. n est donc une solution de (S). Alors $n \equiv 678\ (228) \equiv 222\ (228)$. Le reste r de la division de n par $228 = 12 \times 19$ est $\boxed{222}$.

Exercice 4

1. Notons C l'événement « le ballon est crevé ». Alors $p(C) = 0,2$.
   (a) La probabilité que la ballon soit intact au bout de deux tirs est $p(\overline{C} \cap \overline{C})$. Comme les tirs sont indépendants, on a : $p(\overline{C} \cap \overline{C}) = p(\overline{C})^2 = (1 - p(C))^2 = 0,8^2 = 0,64$.
   (b) Calculons la probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon. L'événement contraire est : « deux tirs ne suffisent pas », autrement dit, le ballon n'est pas crevé au bout de deux tirs. C'est l'événement contraire de celui étudié au a). Sa probabilité vaut 1-0,64=0,36.
   (c) Calculons la probabilité p_n que n tirs suffisent pour crever le ballon. L'événement contraire est « le ballon n'est pas crevé au bout de n tirs », de probabilité $(p(\overline{C})^n = 0,8^n$ (car les tirs sont indépendants).
   Par conséquent : $\boxed{p_n = 1 - 0,8^n}$.
   (d) $p_n > 0,99$ équivaut à $1 - 0,8^n > 0,99$ c'est-à-dire à $0,8^n < 0,01$.
   La fonction ln étant croissante, on trouve $n \ln 0,8 < \ln 0,01$ donc $n > \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,8}$ soit $\boxed{n \geqslant 21}$.
   $\boxed{\text{Il faut que } n \geqslant 21 \text{ pour que } p_n > 0,99}$.
2. Pour chaque valeur de k compris entre 1 et 4, la probabilité de crever le ballon est la probabilité p_k, calculée en 1) c) : $p_k = 1 - 0,8^k$.
   Le dé n'est pas pipé donc chaque face a la même probabilité de sortie égale à $\dfrac{1}{4}$.
   La probabilité de crever le ballon est : $\dfrac{1}{4}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = \boxed{0,4096}$.
3. (a) Les fréquences sont : $f_1 = \dfrac{58}{200} = \dfrac{29}{100}$; $f_2 = \dfrac{49}{200}$; $f_3 = \dfrac{52}{200} = \dfrac{13}{50}$ et $f_4 = \dfrac{41}{200}$.
   (b) Alors $d^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{4} \left(f_k - \frac{1}{4}\right)^2 = \boxed{0,00375}$.
   (c) On constate que $d^2 < D_9$.
   $\boxed{\text{Au risque de 10\%, on peut considérer que le dé n'est pas pipé.}}$

Baccalauréat S France 15 juin 2006

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Soit $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace.

On considère les points

$$\text{A}(2~;~4~;~1),~\text{B}(0~;~4~;~-3),~\text{C}(3~;~1~;~-3),~\text{D}(1~;~0~;~-2),\text{E}(3~;~2~;~-1),\text{I}\left(\frac{3}{5}~;~4~;~-\frac{9}{5}\right)$$

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, dire, sans le justifier, si elle est vraie ou si elle est fausse. Pour chaque question, il est compté un point si la réponse est exacte et zéro sinon.

1. Une équation du plan (ABC) est : $2x+2y-z-11=0$.
2. Le point E est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).
3. Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
4. La droite (CD) est donnée par la représentation paramétrique suivante :

$$(\text{CD})\quad \left\{\begin{array}{l c l}x &=& -1+2t\\ y &=& -1+t\\ z &=& 1-t\end{array}\right. \qquad (t\in\mathbb{R}).$$

5. Le point I est sur la droite (AB).

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=x^2\text{e}^{1-x}.$$

   On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

   a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; quelle conséquence graphique pour $\mathcal{C}$ peut-on en tirer ?

   b. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer sa fonction dérivée f'.

   c. Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe $\mathcal{C}$.

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par

$$I_n=\int_0^1 x^n\text{e}^{1-x}\,\text{d}x.$$

   a. Établir une relation entre I_{n+1} et I_n.

   b. Calculer I_1, puis I_2.

   c. Donner une interprétation graphique du nombre I_2. On la fera apparaître sur le graphique de la question 1 c.

3. **a.** Démontrer que pour tout nombre réel x de $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante :

$$x^n\leqslant x^n\text{e}^{1-x}\leqslant x^n\text{e}.$$

   b. En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n 'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthononnal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
Dans tout l'exercice, $\mathscr{P}\backslash\{\mathrm{O}\}$ désigne le plan $\mathscr{P}$ privé du point origine O.

1. **Question de cours**
   On prend comme pré-requis les résultats suivants :
   – Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors : $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif
   – Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul d'affixe z on a : $\arg(z) = \left(\vec{u}\ ;\ \vec{w}\right)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif

   a. Soit z et z' des nombres complexes non nuls, démontrer que $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

   b. Démontrer que si A, B, C sont trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c, on a : $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

2. On considère l'application f de $\mathscr{P}\backslash\{\mathrm{O}\}$ dans $\mathscr{P}\backslash\{\mathrm{O}\}$ qui, au point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \dfrac{1}{\overline{z}}$. On appelle U et V les points du plan d'affixes respectives 1 et i.

   a. Démontrer que pour $z \neq 0$, on a $\arg\left(z'\right) = \arg(z)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.
   En déduire que, pour tout point M de $\mathscr{P}\backslash\{\mathrm{O}\}$ les points M et $M' = f(M)$ appartiennent à une même demi-droite d'origine O.

   b. Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{P}\backslash\{\mathrm{O}\}$ tels que $f(M) = M$.

   c. M est un point du plan $\mathscr{P}$ distinct de O, U et V, on admet que M' est aussi distinct de O, U et V.
   Établir l'égalité $\dfrac{z'-1}{z'-\mathrm{i}} = \dfrac{1}{\mathrm{i}}\left(\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}+\mathrm{i}}\right) = -\mathrm{i}\overline{\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right)}$.
   En déduire une relation entre $\arg\left(\dfrac{z'-1}{z'-\mathrm{i}}\right)$ et $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right)$

3. **a.** Soit z un nombre complexe tel que $z \neq 1$ et $z \neq \mathrm{i}$ et soit M le point d'affixe z. Démontrer que M est sur la droite (UV) privée de U et de V si et seulement si $\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}$ est un nombre réel non nul.

   b. Déterminer l'image par f de la droite (UV) privée de U et de V.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Question de cours

1. Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.
2. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{lll} n & \equiv & 13 \quad (19) \\ n & \equiv & 6 \quad (12) \end{array}\right.$$

1. Démontrer qu'il existe un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs tel que : $19u+12v = 1$.
   (On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).
   Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S).

2. **a.** Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à

$$\begin{cases} n & \equiv & n_0 \quad (19) \\ n & \equiv & n_0 \quad (12) \end{cases}$$

b. Démontrer que le système $\begin{cases} n & \equiv & n_0 \quad (19) \\ n & \equiv & n_0 \quad (12) \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0 \quad (12 \times 19)$.

3. **a.** Trouver un couple $(u\,;\; v)$ solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2. b.).

4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.
On divise n par $228 = 12 \times 19$. Quel est le reste r de cette division ?

EXERCICE 4 — 5 points

Commun à tous les candidats

1. Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre un ballon afin de le crever. À chacun de ces tirs, il a la probabilité $0,2$ de crever le ballon. Le tireur s'arrête quand le ballon est crevé. Les tirs successifs sont supposés indépendants.

a. Quelle est la probabilité qu'au bout de deux tirs le ballon soit intact ?

b. Quelle est la probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon ?

c. Quelle est la probabilité p_n que n tirs suffisent pour crever le ballon ?

d. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n > 0,99$?

2. Ce tireur participe au jeu suivant :
Dans un premier temps il lance un dé tétraédrique régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 4 (la face obtenue avec un tel dé est la face cachée) ; soit k le numéro de la face obtenue. Le tireur se rend alors au stand de tir et il a droit à k tirs pour crever le ballon.
Démontrer que, si le dé est bien équilibré, la probabilité de crever le ballon est égale à 0,409 6 (on pourra utiliser un arbre pondéré).

3. Le tireur décide de tester le dé tétraédrique afin de savoir s'il est bien équilibré ou s'il est pipé. Pour cela il lance 200 fois ce dé et il obtient le tableau suivant :

Face k	1	2	3	4
Nombre de sorties de la face k	58	49	52	41

a. Calculer les fréquences de sorties f_k observées pour chacune des faces.

b. On pose $d^2 = \Sigma_{k=1}^{4}\left(f_k - \dfrac{1}{4}\right)^2$. Calculer d^2.

c. On effectue maintenant 1 000 simulations des 200 lancers d'un dé tétraédrique bien équilibré et on calcule pour chaque simulation le nombre d^2. On obtient pour la série statistique des 1 000 valeurs de d^2 les résultats suivants :

Minimum	D_1	Q_1	Médiane	Q_3	D_9	Maximum
0,001 24	0,001 92	0,002 35	0,002 81	0,003 45	0,004 52	0,010 15

Au risque de 10 %, peut-on considérer que ce dé est pipé 7

Correction du sujet national, juin 2006

Exercice 1

On ne demandait pas de justification ; celles-ci sont données à but pédagogique

1. L'équation $2x+2y-z-11=0$ est l'équation d'un plan $\mathscr{P}$.
   • $2x_A+2y_A-z_A-11=2\times 2+2\times 4-1-11=0$ donc A appartient à $\mathscr{P}$.
   • $2x_B+2y_B-z_B-11=2\times 0+2\times 4-(-3)-11=0$ donc B appartient à $\mathscr{P}$.
   • $2x_C+2y_C-z_C-11=2\times 3+2\times 1-(-3)-11=0$ donc C appartient à $\mathscr{P}$.
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix}$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Les trois points A, B et C ne sont pas alignés et appartiennent au plan $\mathscr{P}$, donc ce plan est le plan (ABC). L'affirmation est donc **vraie**.
2. $2x_E+2y_E-z_E-11=2\times 3+2\times 2-(-1)-11=0$ donc E appartient à (ABC).
   Le vecteur $\overrightarrow{DE}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$. Alors : $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{AB}=-4+0-4\neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas orthogonaux. Le point E n'est donc pas le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC). L'affirmation est **fausse**.
3. $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=4+0-4=0$. Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux donc les droites (AB) et (CD) aussi.
   L'affirmation est **vraie**.
4. Le point C n'appartient pas à la droite dont on donne la représentation paramétrique. En effet, si c'était le cas, il existerait un réel t tel que : $\left\{\begin{array}{lcl}-1+2t&=&3\\-1+t&=&1\\1-t&=&-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{lcl}t&=&2\\t&=&2\\t&=&4\end{array}\right.$, ce qui est impossible. Par conséquent, l'affirmation est **fausse**.
5. $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-\frac{7}{5}\\0\\-\frac{14}{5}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}=\frac{10}{7}\overrightarrow{AI}$. Les deux vecteurs sont colinéaires, donc I appartient bien à la droite (AB). L'affirmation est **vraie**.

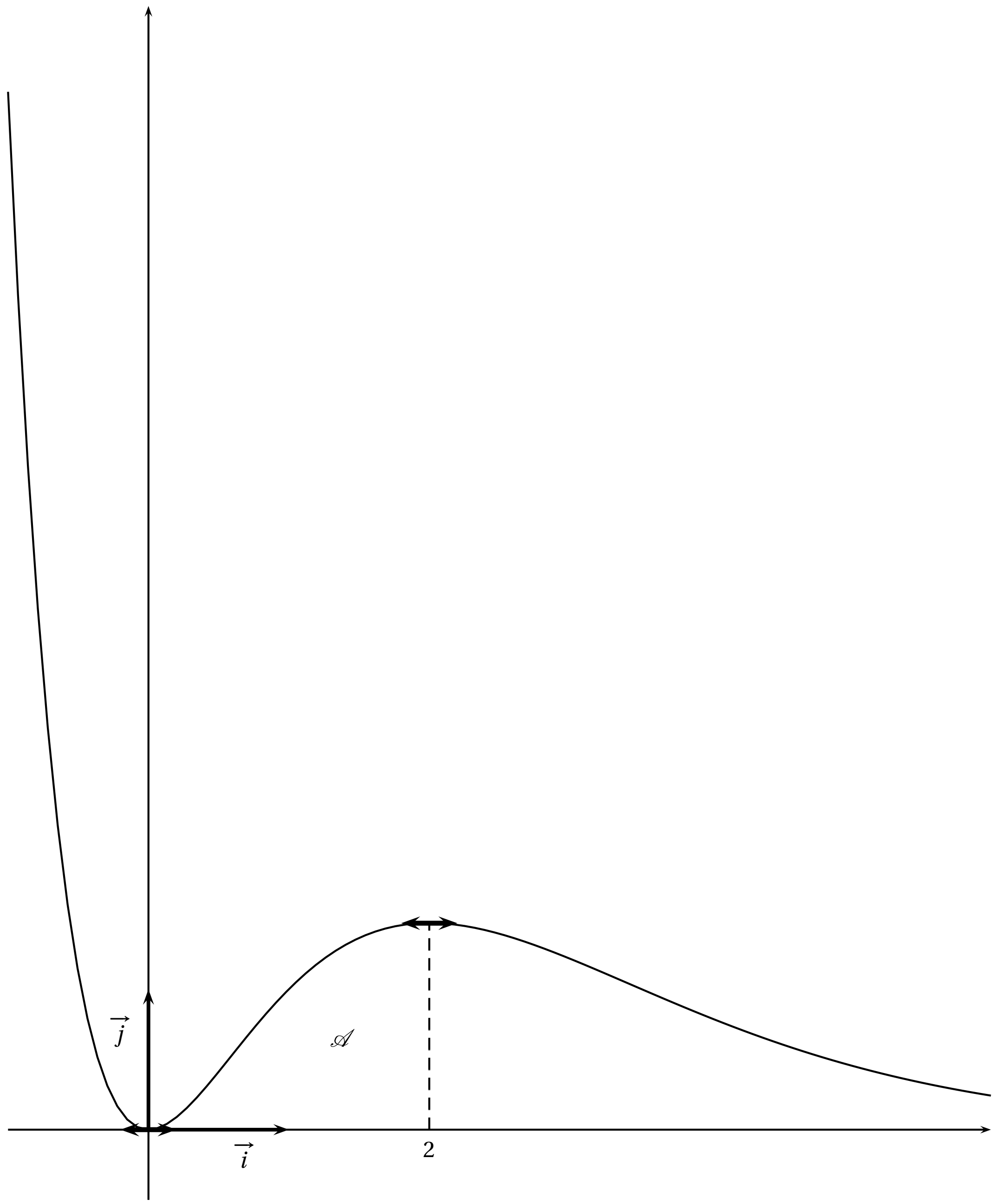
Il fallait donc répondre : **V-F-V-F-V**

Exercice 2

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2e^{1-x}$.
   (a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{1-x}=+\infty$ par le théorème de composition des limites. Comme on a aussi $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$, on en déduit que : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty}$.
   Pour tout x, on a : $f(x)=ex^2e^{-x}=e\frac{x^2}{e^x}$.
   D'après le théorème de croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$. On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0}$.
   L'axe (Ox) est donc asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
   (b) f est dérivable comme produit et composée de fonctions dérivables ;
   pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=2xe^{1-x}-x^2e^{1-x}=(2x-x^2)e^{1-x}=\boxed{x(2-x)e^{1-x}}$.
   (c) Pour tout x, $e^{1-x}>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x(2-x)$ qui est strictement positif entre ses racines donc sur $]0\,;\,2[$, nul en 0 et 2 et négatif ailleurs.
   On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	2	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0

   Courbe :



$\overrightarrow{j}$
$\mathscr{A}$
$\overrightarrow{i}$
2

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} \, \mathrm{d}\, x$.

   (a) $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} \, \mathrm{d}\, x$.

   Prenons $\left\{\begin{array}{lll} u_{n+1}(x) & = & x^{n+1} \\ v'(x) & = & e^{1-x} \end{array}\right.$. Alors : $\left\{\begin{array}{lll} u'_{n+1}(x) & = & (n+1)x^n \\ v(x) & = & -e^{1-x} \end{array}\right.$.

   u_{n+1} et v ont des dérivées continues donc on peut appliquer la formule d'intégration par parties.

   On a : $I_{n+1} = \int_0^1 u_{n+1}(x) v'(x) \mathrm{d}\, x = [u_{n+1}(x) v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'_{n+1}(x) v(x) \mathrm{d}\, x$

   $= [-x^{n+1} e^{1-x}]_0^1 + \int_0^1 (n+1) x^N e^{1-x} \mathrm{d}\, x = -1 + (n+1) I_n$.

   Par conséquent, pour tout n, on a : $\boxed{I_{n+1} = (n+1) I_n - 1}$.

   (b) La même formule d'intégration par parties donne :

   $I_1 = \int_0^1 x^1 e^{1-x} \mathrm{d}\, x = [-x e^{1x}]_0^1 + \int_0^1 e^{1x} \mathrm{d}\, x = -1 + [-e^{1-x}]_0^1 = -1 + (-1 + e) = \boxed{e - 2}$.

   En appliquant la formule précédente, on trouve : $I_2 = 2 I_1 - 1 = \boxed{2e - 5}$.

   (c) On remarque que $I_2 = \int_0^1 f(x) \mathrm{d}\, x$ donc comme f est une fonction positive, I_2 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

3. (a) Pour tout x de $[0\,;1]$, on a : $0 \leqslant x \leqslant 1$ donc $-1 \leqslant -x \leqslant 0$, d'où $0 \leqslant 1 - x \leqslant 1$ qui donne $1 \leqslant e^{1-x} \leqslant e$ (en appliquant la fonction exponentielle qui est croissante) et finalement $x^n \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant e x^n$ (en multipliant par x^n qui est positif).

   (b) En utilisant les propriétés de l'intégrale, on obtient :

   $\int_0^1 x^n \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n e^{-x} \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 e x^n \mathrm{d}x$ soit $\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leqslant I_n \leqslant e \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$.

   Par conséquent : $\boxed{\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}}$.

   Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{n+1}$ et $\frac{e}{n+1}$ tendent vers 0 donc I_n tend aussi vers 0 (théorème des gendarmes). $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0}$.

Exercice 3 (pour ceux n'ayant pas choisi la spécialité)

1. (a) Soit z un nombre complexe non nul. $z \times \frac{1}{z} = 1$ donc d'après les prérequis, $\arg\left(z \times \frac{1}{z}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg(1) = 0 + 2k\pi$. Par conséquent : $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi$.

   Alors, pour tous nombres complexes z et z' non nuls :

   $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z'}\right) = \arg(z) + (-\arg(z')) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$.

   (b) Soient A, B et C trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c.

   Alors : $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(c-a) - \arg(b-a) = (\vec{u}, \overrightarrow{AC}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$ (d'après le prérequis) $= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ (d'après la relation de Chasles).

2. Soit f l'application de $P \setminus \{O\}$ dans $P \setminus \{O\}$ qui, à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ avec $z' = \frac{1}{\overline{z}}$.

   (a) Pour tout $z \neq 0$, $\arg(z') = \arg\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) = -\arg(\overline{z}) = \arg(z) + 2k\pi$. $\boxed{\arg(z') = \arg(z) + 2k\pi}$.

   On en déduit que $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) + 2k\pi$ donc M et M' appartiennent à une **même demi-droite d'origine** O.

   (b) $f(M) = M$ équivaut à $\frac{1}{\overline{z}} = z$ donc à $z\overline{z} = 1$ c'est-à-dire à $|z|^2 = 1$ donc à $|z| = 1$.

   $\boxed{\text{L'ensemble des points invariants par } f \text{ est le cercle de centre } O \text{ et de rayon } 1}$.

   (c) Pour tout $z \neq 0$:

   $$\frac{z'-1}{z'-\mathrm{i}} = \frac{\frac{1}{\overline{z}} - 1}{\frac{1}{\overline{z}} - \mathrm{i}} = \frac{1-\overline{z}}{1-\mathrm{i}\overline{z}} = \frac{1-\overline{z}}{\mathrm{i}(-\mathrm{i}-\overline{z}} = \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+\mathrm{i}} = \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\overline{z-1}}{\overline{z-\mathrm{i}}} = \frac{1}{\mathrm{i}} \overline{\left(\frac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right)}$$

   donc $\boxed{\frac{z'-1}{z'-\mathrm{i}} = \frac{1}{\mathrm{i}} \overline{\left(\frac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right)}}$

   On en déduit que : $\arg\left(\frac{z'-1}{z'-\mathrm{i}}\right) = \arg\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\right) + \arg\left(\overline{\left(\frac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right)}\right) = \arg(-\mathrm{i}) - \arg\left(\frac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) = -\frac{\pi}{2} - \arg\left(\frac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) + 2k\pi$.

3. (a) Soit z tel que $z \neq 1$ et $z \neq \mathrm{i}$. (donc $M \neq U$ et $M \neq V$).
M appartient à la droite (UV) privée de U et V si et seulement si $(\overrightarrow{MU}, \overrightarrow{MV}) = k\pi$ c'est-à-dire $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) = k\pi$ donc si et seulement si $\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}$ est réel non nul.

(b) $M(z)$ est un point de la droite (UV) privée de U et V si et seulement si $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) = k\pi$ (d'après la question précédente) donc $\arg\left(\dfrac{z'-1}{z'-\mathrm{i}}\right) = -\dfrac{\pi}{2} - \arg\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k'\pi$ c'est-à-dire $(\overrightarrow{M'V}, \overrightarrow{M'U}) = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k'\pi$.
M' décrit alors le cercle de diamètre $[UV]$, privé des points U, V et O .

Exercice 3 (pour ceux ayant choisi la spécialité)

Partie A :

1. **Théorème de Bézout :** Deux entiers relatifs x et y sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux entiers u et v tels que $ux + vy = 1$.

   Théorème de Gauss : Soient trois entiers relatifs a, b et c. Si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

2. **Démontrons le théorème de Bézout :**
On suppose que a et b sont premiers entre eux et que a divise bc.
Comme a et b sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe u et v relatifs tels que $ua + vb = 1$.
Alors : $uac + vbc = c$. Comme a divise bc, il existe k relatif tel que $bc = ka$.
On en déduit : $uac + kav = c$ donc $a(uc + kv) = c$. $uc + kv$ est un entier relatif (somme et produit de relatifs) donc a divise c.

Partie B :

On considère le système (S) $\left\{\begin{array}{lll} n & \equiv & 13 \quad (19) \\ n & \equiv & 6 \quad (12) \end{array}\right.$

1. 19 est un nombre premier donc 19 et 12 sont premiers entre eux ; d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $19u + 12v = 1$.
On pose alors $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$.
$N = 13(1 - 19u) + 6 \times 19u = 13 - 1319u + 6 \times 19u \equiv 13(19)$.
$N = 13 \times 12v + 6 \times (1 - 12v) = 13 \times 12v + 6 - 6 \times 12v \equiv 6(12)$.
N **est bien solution du système** S.

2. (a) Soit n_0 une solution de (S).
n est solution de (S) si et seulement si $\left\{\begin{array}{llll} n & \equiv & 13 & (19) \\ n & \equiv & 6 & (12) \end{array}\right.$ c'est-à-dire $\left\{\begin{array}{llllll} n & \equiv & 13 & \equiv & n_0 & (19) \\ n & \equiv & 6 & \equiv & n_0 & (12) \end{array}\right.$
donc (S) équivaut à $\left\{\begin{array}{llll} n & \equiv & n_0 & (19) \\ n & \equiv & n_0 & (12) \end{array}\right.$.

(b) • Si $n \equiv n_0(12 \times 19)$ alors il est clair que $n \equiv n_0(19)$ et $n \equiv n_0(12)$ donc que $\left\{\begin{array}{llll} n & \equiv & n_0 & (19) \\ n & \equiv & n_0 & (12) \end{array}\right.$.

• **Réciproquement :**
Si $\left\{\begin{array}{llll} n & \equiv & n_0 & (19) \\ n & \equiv & n_0 & (12) \end{array}\right.$, alors il existe k et k' entiers relatifs tels que $n - n_0 = 19k$ et $n - n_0 = 12k'$ donc $19k = 12k'$.
19 divise donc $12k'$. Comme 12 et 19 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 19 divise k' donc $k' = 12k''$, $k'' \in \mathbb{Z}$. Alors $n - n_0 = 12 \times 19k''$ donc $n \equiv n_0(12 \times 19)$.
On a montré que $\left\{\begin{array}{llll} n & \equiv & n_0 & (19) \\ n & \equiv & n_0 & (12) \end{array}\right.$ équivaut à $n \equiv n_0\ (12 \times 19)$.

3. (a) Appliquons l'algorithme d'Euclide :
On a successivement :
$19 = 1 \times 12 + 7$
$12 = 7 \times 1 + 5$
$7 = 5 \times 1 + 2$
$5 = 2 \times 2 + 1$
d'où $1 = 5-2\times2 = 5-2(7-5\times1) = 5\times3-2\times7 = (12-7)\times3-2\times7 = 12\times3-7\times5 = 12\times3-(19)12)\times5 = \boxed{12 \times 8 - 19 \times 5}$.
Un couple $(u\,;\ v)$ est : $\boxed{(u\,;\ v) = (-5\,;\ 8)}$.

Alors $\boxed{N = 13 \times 12 \times 8 + 6 \times 19 \times (-5) = \boxed{678}}$.

(b) $N = 678$ est une solution de S. D'après la question $2b$), les solutions de (S) sont tous les nombres n tels que $n \equiv N\ (12 \times 19)$ c'est-à-dire $n \equiv 678\ (228)$. (car $12 \times 19 = 228$)
$\boxed{\mathscr{S} = \{678 + 228k,\ k \in \mathbb{Z}\}}$

4. Soit n un entier tel que, si on le divise par 12, le reste est 6 et si on le divise par 19, le reste est 13. n est donc une solution de (S). Alors $n \equiv 678\ (228) \equiv 222\ (228)$. Le reste r de la division de n par $228 = 12 \times 19$ est $\boxed{222}$.

Exercice 4

1. Notons C l'événement « le ballon est crevé ». Alors $p(C) = 0,2$.
   (a) La probabilité que la ballon soit intact au bout de deux tirs est $p(\overline{C} \cap \overline{C})$. Comme les tirs sont indépendants, on a : $p(\overline{C} \cap \overline{C}) = p(\overline{C})^2 = (1 - p(C))^2 = 0,8^2 = 0,64$.
   (b) Calculons la probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon. L'événement contraire est : « deux tirs ne suffisent pas », autrement dit, le ballon n'est pas crevé au bout de deux tirs. C'est l'événement contraire de celui étudié au a). Sa probabilité vaut 1-0,64=0,36.
   (c) Calculons la probabilité p_n que n tirs suffisent pour crever le ballon. L'événement contraire est « le ballon n'est pas crevé au bout de n tirs », de probabilité $(p(\overline{C})^n = 0,8^n$ (car les tirs sont indépendants).
   Par conséquent : $\boxed{p_n = 1 - 0,8^n}$.
   (d) $p_n > 0,99$ équivaut à $1 - 0,8^n > 0,99$ c'est-à-dire à $0,8^n < 0,01$.
   La fonction ln étant croissante, on trouve $n \ln 0,8 < \ln 0,01$ donc $n > \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,8}$ soit $\boxed{n \geqslant 21}$.
   $\boxed{\text{Il faut que } n \geqslant 21 \text{ pour que } p_n > 0,99}$.
2. Pour chaque valeur de k compris entre 1 et 4, la probabilité de crever le ballon est la probabilité p_k, calculée en 1) c) : $p_k = 1 - 0,8^k$.
   Le dé n'est pas pipé donc chaque face a la même probabilité de sortie égale à $\dfrac{1}{4}$.
   La probabilité de crever le ballon est : $\dfrac{1}{4}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = \boxed{0,4096}$.
3. (a) Les fréquences sont : $f_1 = \dfrac{58}{200} = \dfrac{29}{100}$; $f_2 = \dfrac{49}{200}$; $f_3 = \dfrac{52}{200} = \dfrac{13}{50}$ et $f_4 = \dfrac{41}{200}$.
   (b) Alors $d^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{4} \left(f_k - \frac{1}{4}\right)^2 = \boxed{0,00375}$.
   (c) On constate que $d^2 < D_9$.
   $\boxed{\text{Au risque de 10\%, on peut considérer que le dé n'est pas pipé.}}$

∽ Baccalauréat ES France 15 juin 2006 ∾

EXERCICE 1 **3 points**

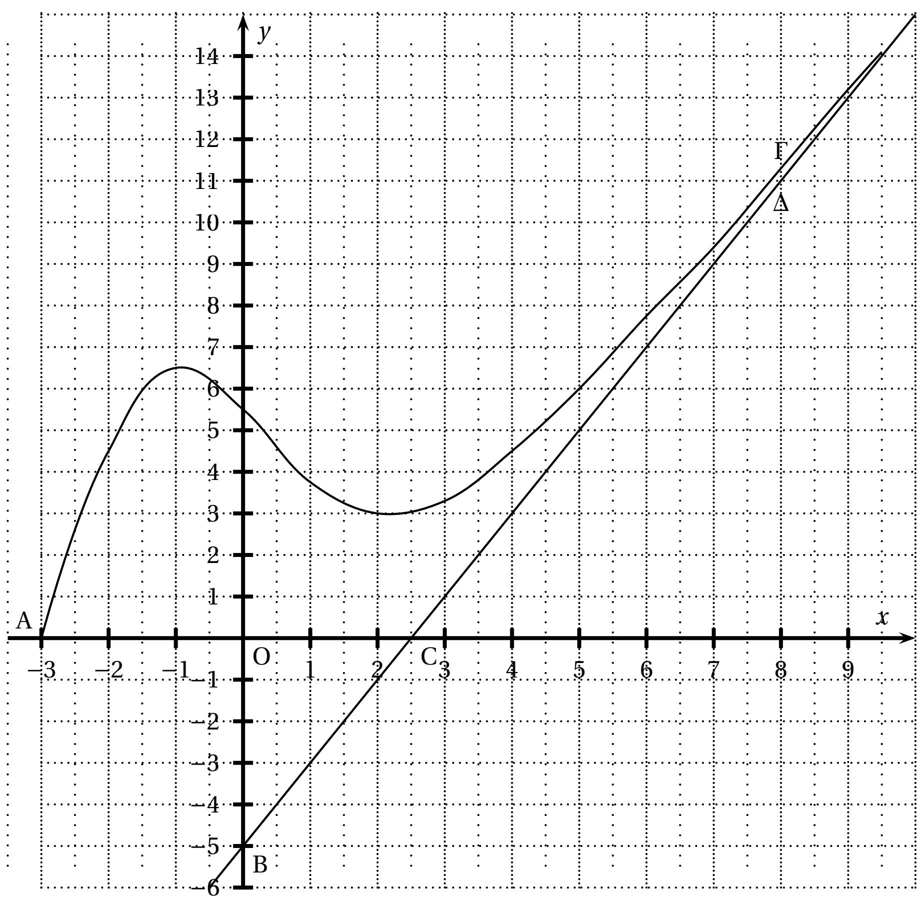
Commun tous les candidats

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-3\ ;\ +\infty[$, croissante sur les intervalles $[-3\ ;\ -1]$ et $[2\ ;\ +\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$.

On note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[-3\ ;\ +\infty[$.

La courbe Γ représentative de la fonction f est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$.

Elle passe par le point A$(-3\ ;\ 0)$ et admet pour asymptote la droite Δ d'équation $y = 2x - 5$.



Pour chacune des affirmations ci-dessous, cocher la case V (l'affirmation est vraie) ou la case F (l'affirmation est fausse) sur l'ANNEXE, à rendre avec la copie.
Les réponses ne seront pas justifiées.

NOTATION : *une réponse exacte rapporte* 0,5 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,25 *point l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est* 0.

a. L'équation $f(x) = 4$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-3\ ;\ +\infty[$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (2x-5)] = +\infty$.

d. $f'(0) = -1$.

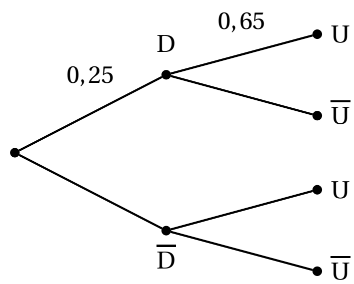
e. $f'(x) > 0$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[-2\ ;\ 1]$.

f. $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 7$.

EXERCICE 2 — **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

La médiathèque d'une université possède des DVD de deux provenances, les DVD reçus en dotation et les DVD achetés. Par ailleurs, on distingue les DVD qui sont de production européenne et les autres.
On choisit au hasard un de ces DVD. On note :
D l'évènement « le DVD a été reçu en dotation » et $\overline{\text{D}}$ l'évènement contraire,
U l'évènement « le DVD est de production européenne » et $\overline{\text{U}}$ l'évènement contraire.
On modélise cette situation aléatoire par l'arbre incomplet suivant dans lequel figurent quelques probabilités par exemple, la probabilité que le DVD ait été reçu en dotation est $p(\text{D}) = 0,25$.



On donne, de plus, la probabilité de l'évènement U : $p(\text{U}) = 0{,}762\ 5$.

Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A

1. **a.** Donner la probabilité de U sachant D.
   b. Calculer $p(\text{D})$.
2. **a.** Calculer la probabilité que le DVD choisi ait été reçu en dotation et soit de production européenne (donner la valeur exacte).
   b. Montrer que la probabilité que le DVD choisi ait été acheté et soit de production européenne est égale à 0,6.
3. Sachant que le DVD choisi a été acheté, calculer la probabilité qu'il soit de production européenne.

PARTIE B

On choisit trois DVD au hasard. On admet que le nombre de DVD est suffisamment grand pour que ce choix soit assimilé à trois tirages successifs indépendants avec remise. On rappelle que la probabilité de choisir un DVD reçu en dotation est égale à 0,25.
Déterminer la probabilité de l'évènement : « exactement deux des trois DVD choisis ont été reçus en dotation ». (Donner la valeur décimale arrondie au millième).

EXERCICE 2 — **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans une région de France supposée démographiquement stable, on compte 190 milliers d'habitants qui se déplacent en voiture pour aller travailler : les uns se déplacent seuls dans leur voiture, les autres pratiquent le co-voiturage. On admet que :

– si une année un habitant pratique le co-voiturage, l'année suivante il se déplace seul dans sa voiture avec une probabilité égale à 0,6 ;

– si une année un habitant se déplace seul dans sa voiture, l'année suivante il pratique le co-voiturage avec une probabilité égale à $0,35$.

Première partie

On note C l'état « pratiquer le co-voiturage » et V l'état « se déplacer seul dans sa voiture ».

1. Dessiner un graphe probabiliste de sommets C et V qui modélise la situation aléatoire décrite.
2. En considérant C et V dans cet ordre, en ligne, la matrice de transition associée à ce (graphe est $M = \begin{pmatrix} 0,40 & 0,60 \\ 0,35 & 0,65 \end{pmatrix}$. Vérifier que l'état stable du système correspond à la matrice ligne $(70 \quad 120)$.
   En donner une interprétation.

Deuxième partie

En 2000, 60 milliers d'habitants pratiquaient le co-voiturage et 130 milliers d'habitants se déplaçaient seuls dans leur voiture.
On appelle X_n (n entier naturel) le nombre de milliers d'habitants qui pratiquent le co-voiturage durant l'année $2000+n$. On a donc $X_0 = 60$.
On admet que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = 0,05X_n + 66,5$.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie pour tout entier naturel n par $U_n = X_n - 70$.

1. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $X_n = 70 - 10 \times 0,05^n$.
   Est-il possible que, durant une année, le nombre d'habitants pratiquant le co-voiturage atteigne la moitié de la population de cette région ?

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes

Le tableau ci-dessous donne la consommation médicale (exprimée en milliards d'euros) de la population d'un pays :

Année	1990	1995	2000	2001	2002	2003
Rang de l'année x_i	0	5	10	11	12	13
Consommation y_i	38	49,1	51,81	57	62,7	68,97

D'après INSEE

PARTIE A

Le but de cette partie est de mettre en oeuvre deux modélisations de cette consommation médicale.

1. **Premier modèle**
   a. On utilise un ajustement affine. Donner, à l'aide de la calculatrice, l'équation de la droite de régression de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés. Pour chacun des coefficients, donner la valeur décimale arrondie au centième.
   b. En supposant que l'évolution se poursuive selon ce modèle, en déduire une estimation de la consommation médicale en milliards d'euros pour l'année 2008 (donner la valeur décimale arrondie au centième).
2. **Deuxième modèle**

a. Calculer l'accroissement relatif de la consommation médicale de l'année 2000 à l'année 2001, puis de l'année 2001 à l'année 2002 (donner la valeur décimale arrondie au dixième).

b. À partir de l'année 2000, on modélise la consommation médicale par : $y = 51,81 \times 1,1^n$ pour l'année $2000 + n$ avec n entier naturel. En utilisant ce deuxième modèle, en déduire une estimation de la consommation médicale en milliards d'euros pour l'année 2008 (donner la valeur décimale arrondie au centième).

PARTIE B : Réduction des dépenses
Pour l'année 2005, la consommation médicale réelle s'est élevée à 83,44 milliards d'euros. Il a été décidé de réduire les dépenses et de les ramener en 2006 à 69,79 milliards d'euros.
De quel pourcentage (arrondi à 1 %) la consommation médicale doit-elle baisser pour atteindre cet objectif ?

Rappel de définitions

On désigne par a_1 et a_2 des nombres réels strictement positifs $a_2 > a_1$.
L'accroissement absolu de a_1 à a_2 est égal à $a_2 - a_1$.
L'accroissement relatif de a_1 à a_2 est égal $\dfrac{a_2 - a_1}{a_1}$.

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{x-3} - \frac{1}{x+4}$$

PARTIE A

1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on note f' sa fonction dérivée.
   Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2. En déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$
3. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
4. **a.** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
   b. On admet qu'il existe un unique nombre réel positif α tel que $f(\alpha) = 0$.
   Donner le signe de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
5. **a.** Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant (donner les valeurs décimales arrondies au dix-millième)

x	1,32	1,325	1,33
$f(x)$			

   b. En déduire la valeur décimale, arrondie au centième, du nombre α tel que $f(\alpha) = 0$.

PARTIE B

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^{x-3} - \ln(x+4)$$

a. La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$. On note g' sa fonction dérivée. Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$

b. Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ en utilisant les résultats de la PARTIE A.

2. Calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.
(Donner la valeur exacte, puis la valeur décimale arrondie au centième).

ANNEXE

EXERCICE 1

Commun à tous les candidats

À rendre avec la copie

Pour chacune des affirmations ci-dessous, cocher la case V (l'affirmation est vraie) ou la case F (l'affirmation est fausse) sur l'ANNEXE, à rendre avec la copie.
Les réponses ne seront pas justifiées.

NOTATION : *une réponse exacte rapporte* 0,5 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,25 *point l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est* 0.

AFFIRMATIONS	V	F
a. L'équation $f(x) = 4$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-3~;~+\infty[$.		
b. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.		
c. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (2x-5)] = +\infty$.		
d. $f'(0) = -1$.		
e. $f'(x) > 0$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[-2~;~1]$.		
f. $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 7$.		

CORRIGE

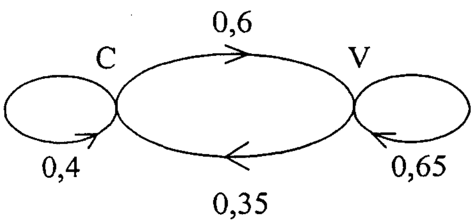
Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

	BACCALAUREAT GENERAL	
Série	ES	SESSION 2006
Epreuve	MATHEMATIQUES	Durée : 3h
Coef : 5 (obligatoire) 7 (Spécialité)	RECOMMANDATIONS DE CORRECTION	

Question	Réponse	Points	Commentaires
	Exercice 1 (3points) **Commun à tous les candidats**		
a) **b)** **b)** **d)** **e)** **f)**	F V F F F V		Pour chaque réponse : + 0,5 pt si exacte. - 0,25 pt si inexacte.

Question	Réponse	Points	Commentaires
	Exercice 2 (5 points) **Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**		
Partie A **1) a)**	$P_D(U) = 0,65$ d'après l'arbre.		
1) b)	$P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 0,75$.		
Partie A **2) a)**	On cherche $P(D \text{ et } U)$. $P(D \text{ et } U) = P(D) \times P_D(U) = 0,25 \times 0,65 = 0,1625$. Autre rédaction : D'après l'arbre : $P(D \text{ et } U) = 0,25 \times 0,65 = 0,1625$.		Autre notation $P(D \cap U)$.
2) b)	On s'interresse à $P(\bar{D} \text{ et } U)$. Les événements $(D \text{ et } U)$ et $(\bar{D} \text{ et } U)$ constituent une partition de l'événement U.		Autre notation $P(\bar{D} \cap U)$.

	Donc : $P(D\,\text{et}\,U)+P(\bar{D}\,\text{et}\,U)=P(U)$. $P(\bar{D}\,\text{et}\,U)=P(U)-P(\bar{D}\,\text{et}\,U)$. $=0,7625-0,1625=0,60$.		
Partie A **3)**	On cherche $P_{\bar{D}}(U)$. $P_{\bar{D}}(U)=\dfrac{P(\bar{D}\,\text{et}\,U)}{P(\bar{D})}=\dfrac{0,60}{0,75}=0,8$.		
Partie B	Le nombre X de DVD choisis provenant d'une dotation suit une loi binômiale de paramètres $n=3$ et $p=0,25$. La probabilité cherchée est : $P(X=2)=3\times p^2\times(1-p)$. $=3\times0,25^2\times0,75$. $\approx 0{,}141$ valeur arrondie au millième. Autre démarche possible : utiliser un arbre.		

Question	Réponse	Points	Commentaires
	<u>Exercice 2 (5 points)</u> **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**		
Partie 1 **1)**	 		
2)	L'état stable du système est la matrice P qui vérifie $P=PM$. D'où $a=70$ et $b=120$. Ici, on a bien $\begin{pmatrix}70 & 120\end{pmatrix}\times M=\begin{pmatrix}70 & 120\end{pmatrix}$. <u>Interprétation</u> : Le nombre d'habitants pratiquant le covoiturage tend vers 70 milliers. Le nombre d'habitants se déplaçant seuls dans leur voiture tend vers 120 milliers.		

Partie 2 **1)**	$U_{n+1} = X_{n+1} - 70$. $= 0,05\,X_n + 66,5 - 70$. $= 0,05X_n - 3,5$. $= 0,05(X_n - 70)$. $= 0,05U_n$. La suite (U_n) est donc géométrique. Raison : 0,05 Premier terme : $U_0 = X_0 - 70 = -10$.		
2)	$U_n = U_0 \times (0,05)^n = -10 \times (0,05)^n$. $X_n = U_n + 70$. $= 70 - 10 \times (0,05)^n$. Pour tout *n*, X_n est inférieur à 70 donc le nombre d'habitants pratiquant le covoiturage est inférieur à 70 000 et n'atteint pas la moitié de la population (c'est-à-dire 85000 personnes).		

Question	Réponse	Points	Commentaires
	Exercice 3 (5 points) **Commun à tous les candidats**		
Partie A **1) a)**	$y = ax + b$ avec $a \simeq 2,03$ arrondi au centième $b \simeq 37,31$ arrondi au centième.		
Partie A **1) b)**	2008 correspond à $x = 18$. En utilisant les valeurs arrondies au centième de a et b : $y \simeq 73,85$. La consommation médicale pour 2008 peut être estimée à 73,85 milliards d'euros.		Accepter tout résultat compatible avec l'équation obtenue au **a).**

Partie A 2) a)	Accroissement relatif de 2000 à 2001 : $\frac{57-51{,}81}{51{,}81} \simeq 0{,}1$. Accroissement relatif de 2001 à 2002 : $\frac{62{,}70-57}{57} = 0{,}1$.		
Partie A 2) b)	2008 correspond à $n=8$. $y = 51{,}81 \times 1{,}1^8 \simeq 111{,}06$ arrondi au centième. La consommation médicale pour 2008 peut être estimée, par ce modèle, à 111,06 milliards d'euros.		
Partie B	$\frac{69{,}79-83{,}44}{83{,}44} \simeq -0{,}16$. (arrondi au centième) La consommation médicale doit baisser de 16%.		

Question	Réponse	Points	Commentaires
	<u>**Exercice 4 (7 points)**</u> **Commun à tous les candidats**		
Partie A 1)	$f'(x) = e^{x-3} + \frac{1}{(x+4)^2}$.		
Partie A 2)	Pour tout x de $[0;+\infty[$, $f'(x) > 0$ car $e^{x-3} > 0$ et $\frac{1}{(x+4)^2} > 0$. Donc f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.		
Partie A 3)	• $\lim\limits_{x \to +\infty} x-3 = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x-3} = +\infty$. • $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x+4} = 0$. • Ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.		

Partie A **4) a)**	$\begin{array}{c\|ccc} x & 0 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & \\ \hline f(x) & f(0) & \nearrow & +\infty \end{array}$ $f(0) = e^{-3} - \frac{1}{4}$ $\approx -0,20$.		
Partie A **4) b)**	f s'annule en α. f' étant strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, f est strictement négative sur $[0\,;\alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha\,;+\infty[$.		
Partie A **5) a)**	$\begin{array}{c\|c\|c\|c} x & 1,32 & 1,325 & 1,33 \\ \hline f(x) & -0,0016 & -0,0005 & 0,0006 \end{array}$		
Partie A **5) b)**	$1,325 < \alpha < 1,33$ donc $\alpha \simeq 1,33$ arrondi au centième.		
Partie B **1) a)**	$g'(x) = e^{x-3} - \frac{1}{x+4} = f(x)$.		
Partie B **1) b)**	D'après le signe de f donné au **A – 4) b),** g est décroissante sur $[0,\alpha]$ et croissante sur $[\alpha\,;+\infty]$.		
Partie B **2)**	$\int_0^3 f(x)dx = [g(x)]_0^3$ $= g(3) - g(0)$ $= 1 - \ln 7 - e^{-3} + \ln 4$ $\simeq 0,39$ arrondi au centième.		

BACCALAUREAT GENERAL

SESSION 2006

MATHÉMATIQUES

SERIE : ES

Spécialité

DUREE DE L'EPREUVE : 3 heures - COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte 6 pages dont 1 feuille ANNEXE.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

L'usage des formulaires de mathématiques n'est pas autorisé.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

La feuille ANNEXE est à rendre avec la copie.

EXERCICE 1 (3 points)

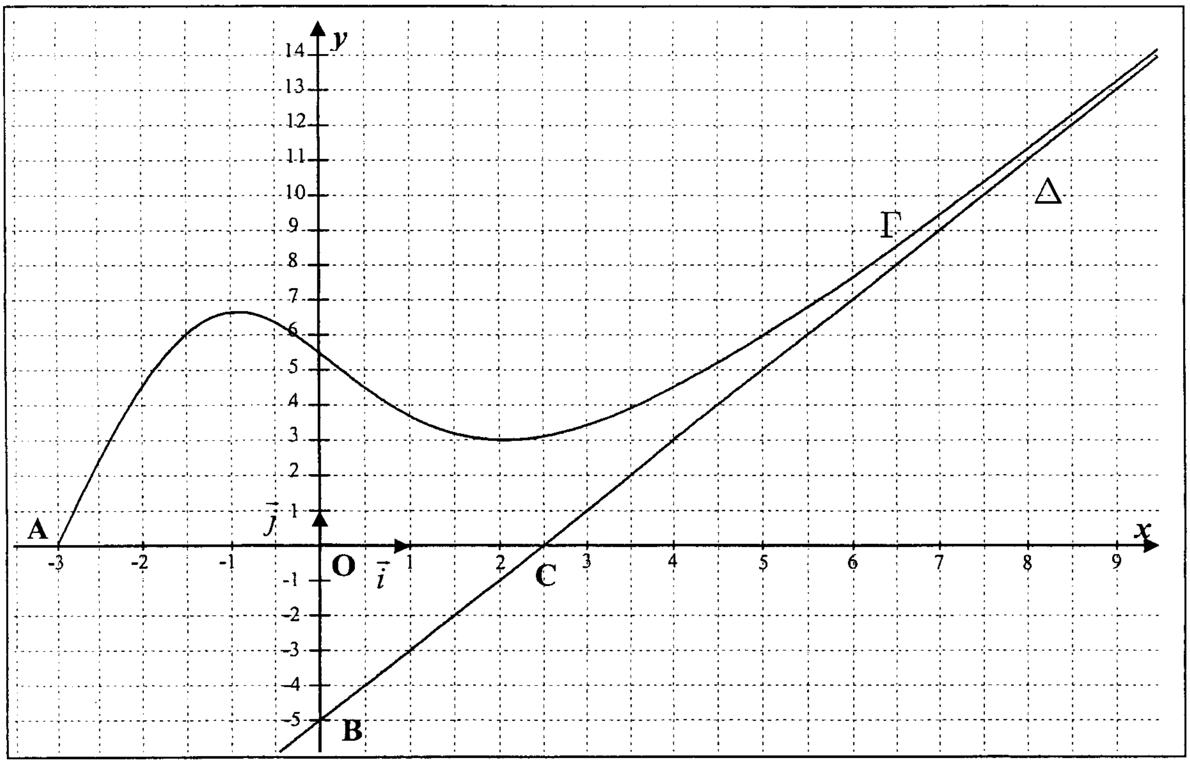
Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-3\,;+\infty[$, croissante sur les intervalles $[-3\,;-1]$ et $[2\,;+\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $[-1\,;2]$.

On note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[-3\,;+\infty[$.

La courbe Γ représentative de la fonction f est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Elle passe par le point $A(-3\,;0)$ et admet pour asymptote la droite Δ d'équation $y=2x-5$.



Pour chacune des affirmations ci-dessous, cocher la case V (l'affirmation est vraie) ou la case F (l'affirmation est fausse) sur l'ANNEXE, à rendre avec la copie.
Les réponses ne seront pas justifiées.

<u>NOTATION</u> : une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

a) L'équation $f(x)=4$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-3\,;+\infty[$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x-5)\right]=+\infty$.

d) $f'(0)=1$.

e) $f'(x)>0$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[-2\,;1]$.

f) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \geq 7$.

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Dans une région de France supposée démographiquement stable, on compte 190 milliers d'habitants qui se déplacent en voiture pour aller travailler : les uns se déplacent seuls dans leur voiture, les autres pratiquent le co-voiturage.
On admet que :

- si une année un habitant pratique le co-voiturage, l'année suivante il se déplace seul dans sa voiture avec une probabilité égale à 0,6 ;
- si une année un habitant se déplace seul dans sa voiture, l'année suivante il pratique le co-voiturage avec une probabilité égale à 0,35.

Première partie :

On note C l'état « pratiquer le co-voiturage » et V l'état « se déplacer seul dans sa voiture ».

1) Dessiner un graphe probabiliste de sommets C et V qui modélise la situation aléatoire décrite.

2) En considérant C et V dans cet ordre, en ligne, la matrice de transition associée à ce graphe est $M = \begin{pmatrix} 0,40 & 0,60 \\ 0,35 & 0,65 \end{pmatrix}$. Vérifier que l'état stable du système correspond à la matrice ligne (70 120).

En donner une interprétation.

Deuxième partie :

En 2000, 60 milliers d'habitants pratiquaient le co-voiturage et 130 milliers d'habitants se déplaçaient seuls dans leur voiture.
On appelle X_n (n entier naturel) le nombre de milliers d'habitants qui pratiquent le co-voiturage durant l'année 2000 + n. On a donc $X_0 = 60$.

On admet que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = 0,05X_n + 66,5$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $U_n = X_n - 70$.

1) Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

2) Montrer que pour tout entier naturel n, $X_n = 70 - 10 \times 0,05^n$.
Est-il possible que, durant une année, le nombre d'habitants pratiquant le co-voiturage atteigne la moitié de la population de cette région ?

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

Le tableau ci-dessous donne la consommation médicale (exprimée en milliards d'euros) de la population d'un pays :

Année	1990	1995	2000	2001	2002	2003
Rang de l'année x_i	0	5	10	11	12	13
Consommation y_i	38	49,1	51,81	57	62,7	68,97

D'après INSEE.

PARTIE A :

Le but de cette partie est de mettre en œuvre deux modélisations de cette consommation médicale.

1) Premier modèle :

a) On utilise un ajustement affine. Donner, à l'aide de la calculatrice, l'équation de la droite de régression de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés. Pour chacun des coefficients, donner la valeur décimale arrondie au centième.

b) En supposant que l'évolution se poursuive selon ce modèle, en déduire une estimation de la consommation médicale en milliards d'euros pour l'année 2008 (donner la valeur décimale arrondie au centième).

2) Deuxième modèle :

a) Calculer l'accroissement relatif de la consommation médicale de l'année 2000 à l'année 2001, puis de l'année 2001 à l'année 2002 (donner la valeur décimale arrondie au dixième).

b) À partir de l'année 2000, on modélise la consommation médicale par :
$y = 51{,}81 \times 1{,}1^n$ pour l'année $2000 + n$ avec n entier naturel.
En utilisant ce deuxième modèle, en déduire une estimation de la consommation médicale en milliards d'euros pour l'année 2008 (donner la valeur décimale arrondie au centième).

PARTIE B : *Réduction des dépenses.*

Pour l'année 2005, la consommation médicale réelle s'est élevée à 83,44 milliards d'euros. Il a été décidé de réduire les dépenses et de les ramener en 2006 à 69,79 milliards d'euros. De quel pourcentage (arrondi à 1 %) la consommation médicale doit-elle baisser pour atteindre cet objectif ?

Rappel de définitions

On désigne par a_1 et a_2 des nombres réels strictement positifs $a_2 > a_1$.

L'accroissement absolu de a_1 à a_2 est égal à $a_2 - a_1$.

L'accroissement relatif de a_1 à a_2 est égal à $\dfrac{a_2 - a_1}{a_1}$.

EXERCICE 4 (7 points)

Commun à tous les candidats.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x)=\mathrm{e}^{x-3}-\dfrac{1}{x+4}$.

PARTIE A :

1) La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$, on note f' sa fonction dérivée.
   Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$.
2) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

3) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
4) **a.** Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
   b. On admet qu'il existe un unique nombre réel positif α tel que $f(\alpha)=0$.
   Donner le signe de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

5) **a.** Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant (donner les valeurs décimales arrondies au dix-millième) :

x	1,32	1,325	1,33
$f(x)$			

   b. En déduire la valeur décimale, arrondie au centième, du nombre α tel que $f(\alpha)=0$.

PARTIE B :

1) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g(x)=\mathrm{e}^{x-3}-\ln(x+4)$.
   a. La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$. On note g' sa fonction dérivée.
   Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$.
   b. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$ en utilisant les résultats de la **PARTIE A**.

2) Calculer l'intégrale $I=\int_0^3 f(x)dx$.

   (Donner la valeur exacte, puis la valeur décimale arrondie au centième).

ANNEXE

EXERCICE 1

Commun à tous les candidats

À rendre avec la copie

Pour chacune des affirmations ci-dessous, cocher la case V (l'affirmation est vraie) ou la case F (l'affirmation est fausse) .

Les réponses ne seront pas justifiées.

NOTATION* : *une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

AFFIRMATIONS	V	F
a) L'équation $f(x) = 4$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-3\,;+\infty[$		
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$		
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (2x-5)\right] = +\infty$		
d) $f'(0) = 1$		
e) $f'(x) > 0$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[-2\,;1]$.		
f) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \geq 7$		

CORRIGE

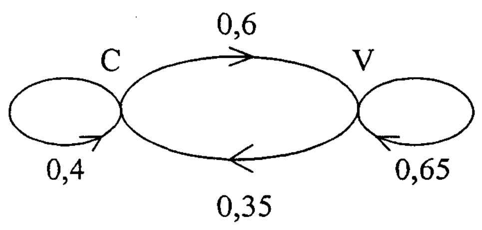
Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

	BACCALAUREAT GENERAL	
Série	ES	SESSION 2006
Epreuve	MATHEMATIQUES	Durée : 3h
Coef : 5 (obligatoire) 7 (Spécialité)	RECOMMANDATIONS DE CORRECTION	

Question	Réponse	Points	Commentaires
	Exercice 1 (3points) **Commun à tous les candidats**		
a) **b)** **b)** **d)** **e)** **f)**	F V F F F V		Pour chaque réponse : + 0,5 pt si exacte. - 0,25 pt si inexacte.

Question	Réponse	Points	Commentaires
	Exercice 2 (5 points) **Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**		
Partie A **1) a)**	$P_D(U) = 0,65$ d'après l'arbre.		
1) b)	$P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 0,75$.		
Partie A **2) a)**	On cherche $P(D \text{ et } U)$. $P(D \text{ et } U) = P(D) \times P_D(U) = 0,25 \times 0,65 = 0,1625$. Autre rédaction : D'après l'arbre : $P(D \text{ et } U) = 0,25 \times 0,65 = 0,1625$.		Autre notation $P(D \cap U)$.
2) b)	On s'interresse à $P(\bar{D} \text{ et } U)$. Les événements $(D \text{ et } U)$ et $(\bar{D} \text{ et } U)$ constituent une partition de l'événement U.		Autre notation $P(\bar{D} \cap U)$.

	Donc : $P(D\,\text{et}\,U)+P(\bar{D}\,\text{et}\,U)=P(U)$. $P(\bar{D}\,\text{et}\,U)=P(U)-P(\bar{D}\,\text{et}\,U)$. $=0,7625-0,1625=0,60$.		
Partie A **3)**	On cherche $P_{\bar{D}}(U)$. $P_{\bar{D}}(U)=\dfrac{P(\bar{D}\,\text{et}\,U)}{P(\bar{D})}=\dfrac{0,60}{0,75}=0,8$.		
Partie B	Le nombre X de DVD choisis provenant d'une dotation suit une loi binômiale de paramètres $n=3$ et $p=0,25$. La probabilité cherchée est : $P(X=2)=3\times p^2\times(1-p)$. $=3\times 0,25^2\times 0,75$. $\simeq 0,141$ valeur arrondie au millième. Autre démarche possible : utiliser un arbre.		

Question	Réponse	Points	Commentaires
	<u>Exercice 2 (5 points)</u> **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**		
Partie 1 **1)**			
2)	L'état stable du système est la matrice P qui vérifie $P=PM$. D'où $a=70$ et $b=120$. Ici, on a bien $\begin{pmatrix}70 & 120\end{pmatrix}\times M=\begin{pmatrix}70 & 120\end{pmatrix}$. <u>Interprétation</u> : Le nombre d'habitants pratiquant le covoiturage tend vers 70 milliers. Le nombre d'habitants se déplaçant seuls dans leur voiture tend vers 120 milliers.		

Partie 2 **1)**	$U_{n+1} = X_{n+1} - 70$. $= 0,05\, X_n + 66,5 - 70$. $= 0,05X_n - 3,5$. $= 0,05(X_n - 70)$. $= 0,05U_n$. La suite (U_n) est donc géométrique. Raison : 0,05 Premier terme : $U_0 = X_0 - 70 = -10$.		
2)	$U_n = U_0 \times (0,05)^n = -10 \times (0,05)^n$. $X_n = U_n + 70$. $= 70 - 10 \times (0,05)^n$. Pour tout n, X_n est inférieur à 70 donc le nombre d'habitants pratiquant le covoiturage est inférieur à 70 000 et n'atteint pas la moitié de la population (c'est-à-dire 85000 personnes).		

Question	**Réponse**	**Points**	**Commentaires**
	Exercice 3 (5 points) **Commun à tous les candidats**		
Partie A **1) a)**	$y = ax + b$ avec $a \simeq 2,03$ arrondi au centième $b \simeq 37,31$ arrondi au centième.		
Partie A **1) b)**	2008 correspond à $x = 18$. En utilisant les valeurs arrondies au centième de a et b : $y \simeq 73,85$. La consommation médicale pour 2008 peut être estimée à 73,85 milliards d'euros.		Accepter tout résultat compatible avec l'équation obtenue au **a).**

Partie A 2) a)	Accroissement relatif de 2000 à 2001 : $\frac{57-51,81}{51,81} \simeq 0,1$. Accroissement relatif de 2001 à 2002 : $\frac{62,70-57}{57} \simeq 0,1$.		
Partie A 2) b)	2008 correspond à $n=8$. $y=51,81\times 1,1^8 \simeq 111,06$ arrondi au centième. La consommation médicale pour 2008 peut être estimée, par ce modèle, à 111,06 milliards d'euros.		
Partie B	$\frac{69,79-83,44}{83,44} \simeq -0,16$. (arrondi au centième) La consommation médicale doit baisser de 16%.		

Question	Réponse	Points	Commentaires
	<u>Exercice 4 (7 points)</u> **Commun à tous les candidats**		
Partie A 1)	$f'(x)=e^{x-3}+\frac{1}{(x+4)^2}$.		
Partie A 2)	Pour tout x de $[0;+\infty[$, $f'(x)>0$ car $e^{x-3}>0$ et $\frac{1}{(x+4)^2}>0$. Donc f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.		
Partie A 3)	• $\lim\limits_{x\to+\infty} x-3=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-3}=+\infty$. • $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+4}=0$. • Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.		

Partie A 4) a)	$\begin{array}{c\|ccc} x & 0 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & \\ \hline f(x) & f(0) & \nearrow & +\infty \end{array}$ $f(0) = e^{-3} - \frac{1}{4}$ $\approx -0,20$.		
Partie A 4) b)	f s'annule en α. f' étant strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, f est strictement négative sur $[0\,;\alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha\,;+\infty[$.		
Partie A 5) a)	$\begin{array}{c\|c\|c\|c} x & 1,32 & 1,325 & 1,33 \\ \hline f(x) & -0,0016 & -0,0005 & 0,0006 \end{array}$		
Partie A 5) b)	$1,325 < \alpha < 1,33$ donc $\alpha \simeq 1,33$ arrondi au centième.		
Partie B 1) a)	$g'(x) = e^{x-3} - \frac{1}{x+4} = f(x)$.		
Partie B 1) b)	D'après le signe de f donné au **A – 4) b),** g est décroissante sur $[0, \alpha]$ et croissante sur $[\alpha\,;+\infty]$.		
Partie B 2)	$\int_0^3 f(x)dx = [g(x)]_0^3$ $= g(3) - g(0)$ $= 1 - \ln 7 - e^{-3} + \ln 4$ $\simeq 0,39$ arrondi au centième.		

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2007

MATHÉMATIQUES

- Série S -

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte une annexe à rendre avec la copie.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

EXERCICE 1 (3 points)

Commun à tous les candidats

L'espace est muni du repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soient (P) et (P') les plans d'équations respectives $x+2y-z+1=0$ et $-x+y+z=0$.
Soit A le point de coordonnées $(0 ; 1 ; 1)$.

1) Démontrer que les plans (P) et (P') sont perpendiculaires.

2) Soit (d) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{3}+t \\ y=-\frac{1}{3} \\ z=t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ est un nombre réel.}$$

Démontrer que les plans (P) et (P') se coupent selon la droite (d).

3) Calculer la distance du point A à chacun des plans (P) et (P').

4) En déduire la distance du point A à la droite (d).

EXERCICE 2 (3 points)

Commun à tous les candidats

1) Restitution organisée de connaissances

Démontrer la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle $[a ; b]$.

2) Soient les deux intégrales définies par $I = \int_0^\pi e^x \sin x \, dx$ et $J = \int_0^\pi e^x \cos x \, dx$.

a) Démontrer que $I = -J$ et que $I = J + e^\pi + 1$.

b) En déduire les valeurs exactes de I et de J.

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'équation : (E) $z^3-(4+\mathrm{i})\ z^2+(13+4\mathrm{i})\ z-13\mathrm{i}=0$ où z est un nombre complexe.

1) Démontrer que le nombre complexe i est solution de cette équation.

2) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z on ait :
$z^3-(4+\mathrm{i})\ z^2+(13+4\mathrm{i})\ z-13\mathrm{i}=(z-\mathrm{i})(az^2+bz+c)$.

3) En déduire les solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives i, 2 +3i et 2 − 3i.

1) Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer l'affixe du point A′, image du point A par la rotation r.

2) Démontrer que les points A′, B et C sont alignés et déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre B qui transforme C en A′.

EXERCICE 4 (4 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. On donnera sur la feuille la réponse choisie sans justification. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

Dans certaines questions, les résultats proposés ont été arrondis à 10^{-3} près.

1) Un représentant de commerce propose un produit à la vente.
Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'il rencontre un client, la probabilité qu'il vende son produit est égale à 0,2.
Il voit cinq clients par matinée en moyenne. La probabilité qu'il ait vendu exactement deux produits dans une matinée est égale à :

a) 0,4 **b)** 0,04 **c)** 0,1024 **d)** 0,2048

2) Dans une classe, les garçons représentent le quart de l'effectif. Une fille sur trois a eu son permis du premier coup, alors que seulement un garçon sur dix l'a eu du premier coup. On interroge un élève (garçon ou fille) au hasard. La probabilité qu'il ait eu son permis du premier coup est égale à :

a) 0,043 **b)** 0,275 **c)** 0,217 **d)** 0,033

3) Dans la classe de la question 2, on interroge un élève au hasard parmi ceux ayant eu leur permis du premier coup. La probabilité que cet élève soit un garçon est égale à :

a) 0,100 **b)** 0,091 **c)** 0,111 **d)** 0,25

4) Un tireur sur cible s'entraîne sur une cible circulaire comportant trois zones délimitées par des cercles concentriques, de rayons respectifs 10, 20 et 30 centimètres. On admet que la probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone et que le tireur atteint toujours la cible.
La probabilité d'atteindre la zone la plus éloignée du centre est égale à :

a) $\frac{5}{9}$ **b)** $\frac{9}{14}$ **c)** $\frac{4}{7}$ **d)** $\frac{1}{3}$

EXERCICE 5 (5 points)

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de f est donnée sur le document ***annexe*** que l'on complètera et que l'on rendra avec la copie.

Partie A : Étude de certaines propriétés de la courbe $\mathscr{C}$

1) On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-1;+\infty[$.

2) Pour tout x de l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$, on pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$.
Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $]-1\ ;\ +\infty[$.
Calculer $N(0)$. En déduire les variations de f.

3) Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$.
Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

Partie B : Étude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction f

1) Démontrer que si $x \in [0\ ;\ 4]$, alors $f(x) \in [0\ ;\ 4]$.

2) On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbf{N}$.

a) Sur le graphique de l'**annexe**, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$, placer les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3.

b) Démontrer que pour tout n de $\mathbf{N}$ on a : $u_n \in [0\ ;\ 4]$.

c) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

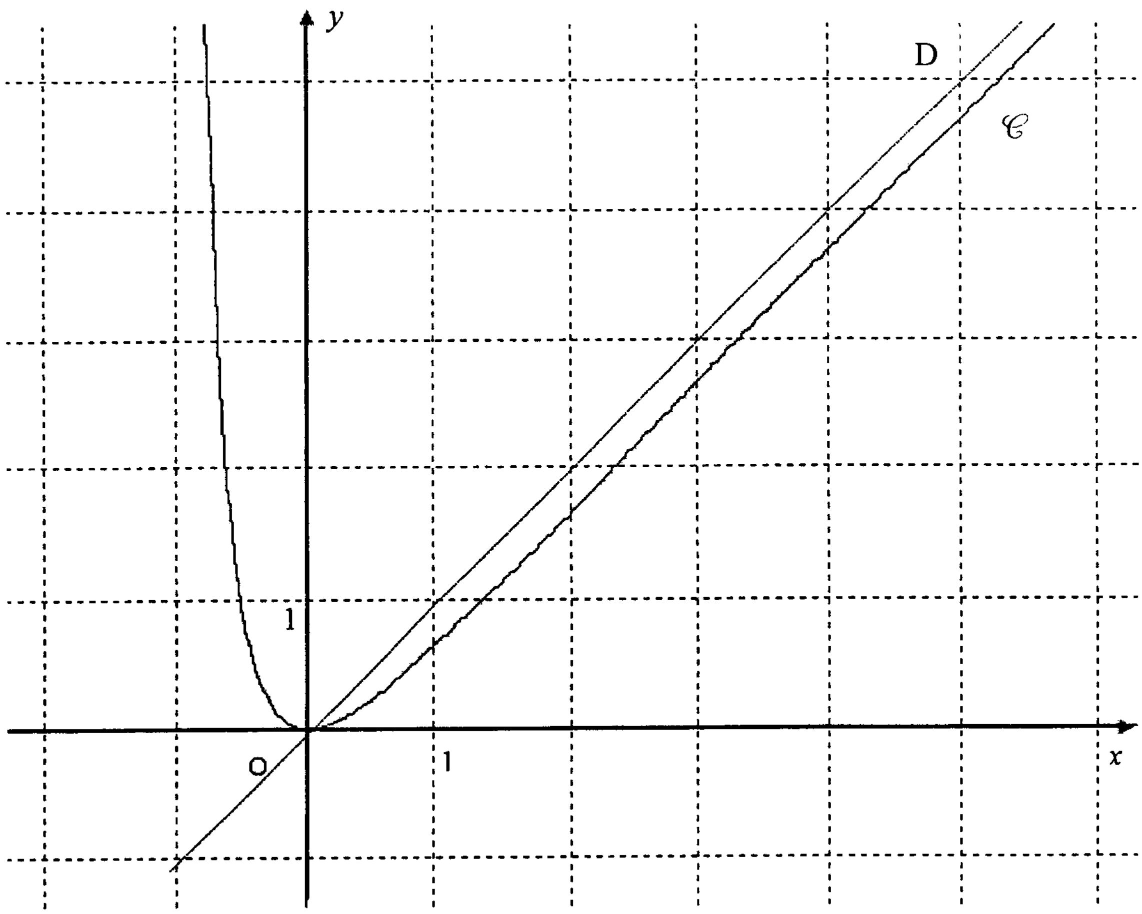
d) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On désigne par ℓ sa limite.

e) Utiliser la **partie A** pour donner la valeur de ℓ.

ANNEXE

À compléter et à rendre avec la copie

EXERCICE 5



CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

ELEMENTS DE CORRECTION

Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. La règle de confidentialité relative aux commissions d'entente et aux travaux des jurys s'applique à son contenu.

EXERCICE 1 (3 points)

1) $\vec{n}$ (1 ; 2 ; –1) et $\vec{n}'$ (–1 ;1 ;1) sont des vecteurs normaux et $\vec{n}.\vec{n}' = 0$

2) Soit (d) la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} + t \\ y = -\dfrac{1}{3} \\ z = t \end{cases}$ où t est un nombre réel

Les points de (d) ont des coordonnées qui vérifient simultanément les équations des deux plans. (d) est la droite intersection des deux plans.

3) $\mathrm{d}(\mathrm{A},P) = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$; $\mathrm{d}(\mathrm{A},P') = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

4) $(\mathrm{d}(\mathrm{A},(d)))^2 = (\dfrac{2}{\sqrt{6}})^2 + (\dfrac{2}{\sqrt{3}})^2 = 2$ d'où $\mathrm{d}(\mathrm{A},(d)) = \sqrt{2}$.

EXERCICE 2 (3 points)

1) $(uv)' = u'v + uv'$. On utilise la linéarité de l'intégration pour obtenir la formule d'intégration par parties.

$\int_a^b (uv)'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$.

Donc $\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$

2) a) Posons : $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = \sin x$

$\mathrm{I} = [e^x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x\mathrm{d}x$ donc $\mathrm{I} = -\mathrm{J}$ car le premier calcul entre crochet est nul. Posons :

$u'(x) = \sin x$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$

$\mathrm{I} = [-\mathrm{e}^x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos x\mathrm{d}x$ donc $\mathrm{I} = \mathrm{J} + \mathrm{e}^\pi + 1$

b) Donc $\mathrm{I} = \dfrac{\mathrm{e}^\pi + 1}{2}$ et $\mathrm{J} = -\dfrac{\mathrm{e}^\pi + 1}{2}$

EXERCICE 3 (5 points) **Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Partie A

On considère l'équation : (E) $z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=0$

1) $i^3-(4+i)i^2+(13+4i)i-13i=0$.

2) $z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=(z-i)(z^2-4z+13)$.

3) $S=\{i;2+3i;2-3i\}$.

Partie B

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives i ; 2 + 3i et 2 - 3i.

1) $A'=r'(A) \Leftrightarrow z_{A'}-z_B=e^{\frac{i\pi}{4}}(z_A-z_B) \Leftrightarrow z_{A'}=2+(3-2\sqrt{2})i$.

2) $\dfrac{z_{A'}-z_B}{z_C-z_B}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ donc $\arg\left(\dfrac{z_{A'}-z_B}{z_C-z_B}\right)=0\ [2\pi]$.

Les points A', B et C sont alignés et $z_{A'}-z_B=\dfrac{\sqrt{2}}{3}(z_C-z_B)$.

L'application complexe associée à l'homothétie de centre B qui transforme A′ en C est

$$z \mapsto \frac{\sqrt{2}}{3}z+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)(2+3i).$$

EXERCICE 3 (5 points) **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Voir figure complétée en annexe 1.

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points A, B et C, d'affixes respectives $-5+6i$; $-7-2i$ et $3-2i$.

On admet que le point F, d'affixe $-2+i$ est le centre du cercle Γ, circonscrit au triangle ABC.

1) $\dfrac{z_H - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{3}{8}(1-i) = \dfrac{3\sqrt{2}}{8}e^{-\frac{i\pi}{4}}$.

La similitude directe de centre A qui transforme C en H est une similitude d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$ et de rapport $\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$.

2) a) Soit s la transformation d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$ qui, au point M, associe le point M'.

Les points A et C sont invariants par s. Donc $s(A) = A$ et $s(C) = C$.

Les complexes a et b vérifient donc $\begin{cases} a(-5-6i)+b=-5+6i \\ a(3+2i)+b=3-2i \end{cases}$.

L'écriture complexe de s est donc $z' = -i\bar{z} + 1 + i$. Donc s est la symétrie orthogonale d'axe (AC).

b) $z_E = -i\,\bar{z}_H + 1 + i = 6i + 1$.

c) $FE = FA = \sqrt{34}$ donc E est sur Γ.

3) Soit I le milieu du segment [AC]. $z_I = -1+2i$.

G est l'image du point I par l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{2}{3}$ donc :

$$z_G - z_B = \frac{2}{3}(z_I - z_B) \Leftrightarrow z_G = -3 + \frac{2}{3}i$$

$z_G - z_H = 2 + \dfrac{2}{3}i$ $z_F - z_H = 3 + i$ donc $z_G - z_H = \dfrac{3}{2}(z_F - z_H)$ et les points H, G et F sont ainsi alignés.

EXERCICE 4 (4 points)

1) d : 0,2048

2) b : 0,275

3) b : 0,091

4) a : $\dfrac{5}{9}$

EXERCICE 5 (5 points)

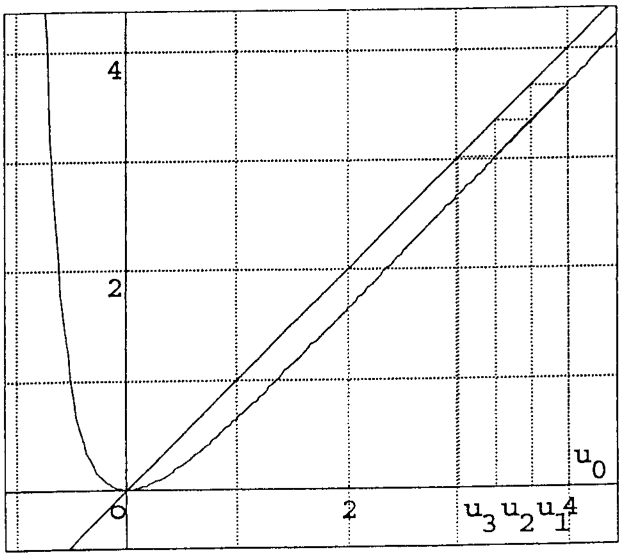
Partie A

1) On trouve que : $f'(x)=1-\dfrac{(1+x)\times\dfrac{1}{1+x}-\ln(1+x)}{(1+x)^2}=\dfrac{(1+x)^2-1+\ln(1+x)}{(1+x)^2}$.

2) $N(0)=0$. D'après les variations de *N*, on peut dire que *N* est strictement négative sur $]-1;0[$ et strictement positive sur $]0\,;+\infty[$. Puisque $f'(x)=\dfrac{N(x)}{(1+x)^2}$, on en déduit que f est strictement décroissante sur $]-1\,;\,0]$ et strictement croissante sur $[\,0;+\infty[$.

3) On doit résoudre l'équation $f(x)=x$, c'est-à-dire l'équation $\ln(1+x)=0$, c'est à dire l'équation $1+x=1$.
$\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ ont un unique point commun qui est le point O.

Partie B



1) La fonction *f* est strictement croissante sur $[\,0\,;+\infty[$, donc aussi sur $[\,0;4\,]$. Donc, si $x\in[\,0;4\,]$, alors $f(x)\in[\,f(0);f(4)\,]$. Or, $f(0)=0$ et $f(4)=4-\dfrac{\ln(5)}{5}<4$. Donc si $x\in[\,0;4\,]$ alors $f(x)\in[\,0;4\,]$.

2) a) Voir graphique.

b) On a $u_0=4$, donc $u_0\in[\,0;4\,]$.

Supposons que, pour *p* entier naturel, on ait $u_p\in[\,0;4\,]$. Alors $u_{p+1}=f(u_p)\in[\,0;4\,]$ d'après la question **1)**.

Donc, d'après l'axiome de récurrence, on a bien $u_n\in[\,0;4\,]$ pour tout *n* de **N**.

c) On a : $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=u_n-\dfrac{\ln(1+u_n)}{1+u_n}-u_n=-\dfrac{\ln(1+u_n)}{1+u_n}\leqslant 0$ puisque $u_n\geqslant 0$ (question 2b). La suite (u_n) est décroissante.

d) La suite (u_n) est décroissante, minorée par 0 ; donc elle converge.

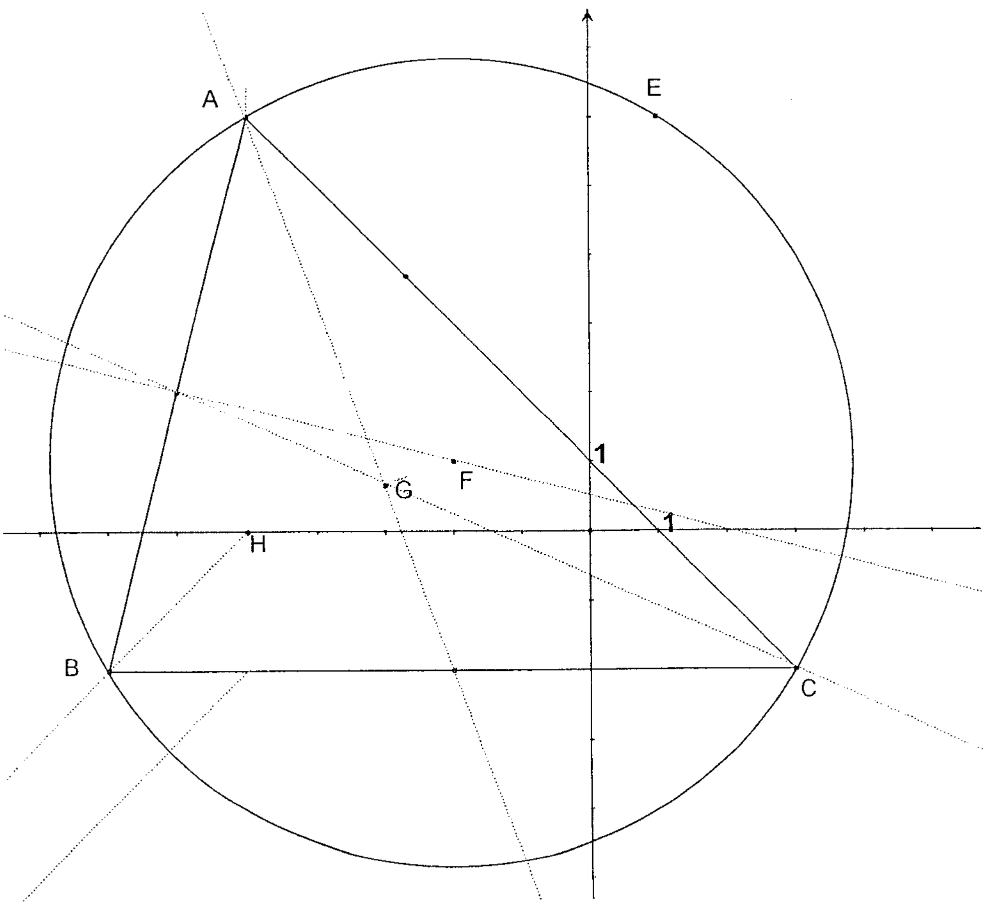
e) On a pour tout n : $u_{n+1}=f(u_n)$. Or : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}f(u_n)=f(\ell)$ puisque *f* est dérivable sur $]-1;+\infty[$, donc continue sur $]-1;+\infty[$, donc continue en ℓ.

Le réel ℓ est une solution de l'équation $f(x)=x$. Donc $\ell=0$ d'après A)3).

ANNEXE 1
À compléter et rendre avec la copie

EXERCICE 3

Annexe 1: (*exercice* 3 - *spécialité*)



CONSIGNES DE CORRECTION

Capacités évaluées : **1. Restituer et mobiliser des connaissances.** **2. Appliquer des méthodes.** **3. Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter.** **4. Mettre en forme un raisonnement, une démonstration, une démarche.** **5. Développer une démarche ou un raisonnement cohérent.** **6. Évaluer-critiquer un résultat, vérifier la validité d'un résultat ou d'une méthode.**

Exercice 1 (3 points)

1. Restituer et mobiliser des connaissances : questions 1) 3). 2. Appliquer des méthodes : questions 1) 2). 4. Mettre en forme un raisonnement, une démonstration, une démarche : questions 1) 2) 4). 5. Développer une démarche ou un raisonnement cohérent : question 4).	Une mobilisation adaptée des capacités 1, 2 et 4 assure l'obtention d'au moins 1,5 points.

Exercice 2 (3 points)

1. Restituer et mobiliser des connaissances : question 1). 2. Appliquer des méthodes : question 2). 3. Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter : question 2)a). 4. Construire et mettre en forme un raisonnement, une démonstration, une démarche : questions 1) 2)b).	Une mobilisation adaptée des capacités 1, 2 et 3 assure l'obtention d'au moins 1,5 points.

Exercice 3 (5 points) non spécialité

1. Restituer et mobiliser des connaissances : questions A-1), B-1). 2. Appliquer des méthodes : questions A-2) 3). 4. Construire et mettre en forme un raisonnement, une démonstration, une démarche : question B 2) 5. Développer une démarche ou un raisonnement cohérent : question B-2).	Une mobilisation adaptée des capacités 1, 2 et 4 assure l'obtention d'au moins 3 points.

Exercice 3 (5 points) spécialité

1. Restituer et mobiliser des connaissances : questions 1), 2)a). 2. Appliquer des méthodes : questions 1), 2)a) b) c). 4. Construire et mettre en forme un raisonnement, une démonstration, une démarche : question 3). 5. Développer une démarche ou un raisonnement cohérent : question 3). 6. Évaluer-critiquer un résultat, vérifier la validité d'un résultat ou d'une démarche : questions 2)b) c).	Une mobilisation adaptée des capacités 1, 2, 4 et 5 assure l'obtention d'au moins 3 points.

Exercice 4 (4 points)

QCM	

Exercice 5 (5 points)

1. Restituer et mobiliser des connaissances : questions A-1), B-2)d. **2.** Appliquer des méthodes : questions A, B-2)a) c). **3.** Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter : questions B-2)b). **4.** Mettre en forme un raisonnement, une démonstration, une démarche : questions B-1) 2)c). **5.** Développer une démarche ou un raisonnement cohérent : questions A-2), B-1) 2)c). **6.** Évaluer-critiquer un résultat, vérifier la validité d'un résultat ou d'une démarche : questions A-2), B-2)c) e).	Une mobilisation adaptée des capacités 1, 2, 5 et 6 assure l'obtention d'au moins 3 points.

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2007

MATHÉMATIQUES

- Série S -

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte deux annexes à rendre avec la copie.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1 à 6.

EXERCICE 1 (3 points)

Commun à tous les candidats

L'espace est muni du repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soient (P) et (P') les plans d'équations respectives $x+2y-z+1=0$ et $-x+y+z=0$.
Soit A le point de coordonnées $(0 ; 1 ; 1)$.

1) Démontrer que les plans (P) et (P') sont perpendiculaires.

2) Soit (d) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x=-\dfrac{1}{3}+t \\ y=-\dfrac{1}{3} \\ z=t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ est un nombre réel.}$$

Démontrer que les plans (P) et (P') se coupent selon la droite (d).

3) Calculer la distance du point A à chacun des plans (P) et (P').

4) En déduire la distance du point A à la droite (d).

EXERCICE 2 (3 points)

Commun à tous les candidats

1) Restitution organisée de connaissances

Démontrer la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle $[a ; b]$.

2) Soient les deux intégrales définies par $I=\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$ et $J=\int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx$.

a) Démontrer que $I=-J$ et que $I=J+e^{\pi}+1$.

b) En déduire les valeurs exactes de I et de J.

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

La figure est proposée en annexe 1. Elle sera complétée tout au long de l'exercice.

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C, d'affixes respectives $-5+6\,\mathrm{i}$, $-7-2\,\mathrm{i}$ et $3-2\,\mathrm{i}$.
On admet que le point F, d'affixe $-2+\mathrm{i}$ est le centre du cercle Γ circonscrit au triangle ABC.

1) Soit H le point d'affixe -5. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe de centre A qui transforme le point C en le point H.

2) **a)** Étant donné des nombres complexes z et z', on note M le point d'affixe z et M$'$ le point d'affixe z'. Soient a et b des nombres complexes.
Soit s la transformation d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$ qui, au point M, associe le point M$'$.
Déterminer a et b pour que les points A et C soient invariants par s. Quelle est alors la nature de s ?

b) En déduire l'affixe du point E, symétrique du point H par rapport à la droite (AC).

c) Vérifier que le point E est un point du cercle Γ.

3) Soit I le milieu du segment [AC].
Déterminer l'affixe du point G, image du point I par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{2}{3}$.
Démontrer que les points H, G et F sont alignés.

EXERCICE 4 (4 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. On donnera sur la feuille la réponse choisie sans justification. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

Dans certaines questions, les résultats proposés ont été arrondis à 10^{-3} près.

1) Un représentant de commerce propose un produit à la vente.
Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'il rencontre un client, la probabilité qu'il vende son produit est égale à 0,2.
Il voit cinq clients par matinée en moyenne. La probabilité qu'il ait vendu exactement deux produits dans une matinée est égale à :

a) 0,4 **b)** 0,04 **c)** 0,1024 **d)** 0,2048

2) Dans une classe, les garçons représentent le quart de l'effectif. Une fille sur trois a eu son permis du premier coup, alors que seulement un garçon sur dix l'a eu du premier coup. On interroge un élève (garçon ou fille) au hasard. La probabilité qu'il ait eu son permis du premier coup est égale à :

a) 0,043 **b)** 0,275 **c)** 0,217 **d)** 0,033

3) Dans la classe de la question 2, on interroge un élève au hasard parmi ceux ayant eu leur permis du premier coup. La probabilité que cet élève soit un garçon est égale à :

a) 0,100 **b)** 0,091 **c)** 0,111 **d)** 0,25

4) Un tireur sur cible s'entraîne sur une cible circulaire comportant trois zones délimitées par des cercles concentriques, de rayons respectifs 10, 20 et 30 centimètres. On admet que la probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone et que le tireur atteint toujours la cible.
La probabilité d'atteindre la zone la plus éloignée du centre est égale à :

a) $\frac{5}{9}$ **b)** $\frac{9}{14}$ **c)** $\frac{4}{7}$ **d)** $\frac{1}{3}$

EXERCICE 5 (5 points)

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de f est donnée sur le document ***annexe 2*** que l'on complètera et que l'on rendra avec la copie.

Partie A : Étude de certaines propriétés de la courbe $\mathscr{C}$

1) On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-1;+\infty[$.

2) Pour tout x de l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$, on pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$.
Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $]-1\ ;\ +\infty[$.
Calculer $N(0)$. En déduire les variations de f.

3) Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$.
Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

Partie B : Étude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction f

1) Démontrer que si $x \in [0\ ;\ 4]$, alors $f(x) \in [0\ ;\ 4]$.

2) On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbf{N}$.

a) Sur le graphique de l'***annexe 2***, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$, placer les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3.

b) Démontrer que pour tout n de $\mathbf{N}$ on a : $u_n \in [0\ ;\ 4]$.

c) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

d) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On désigne par ℓ sa limite.

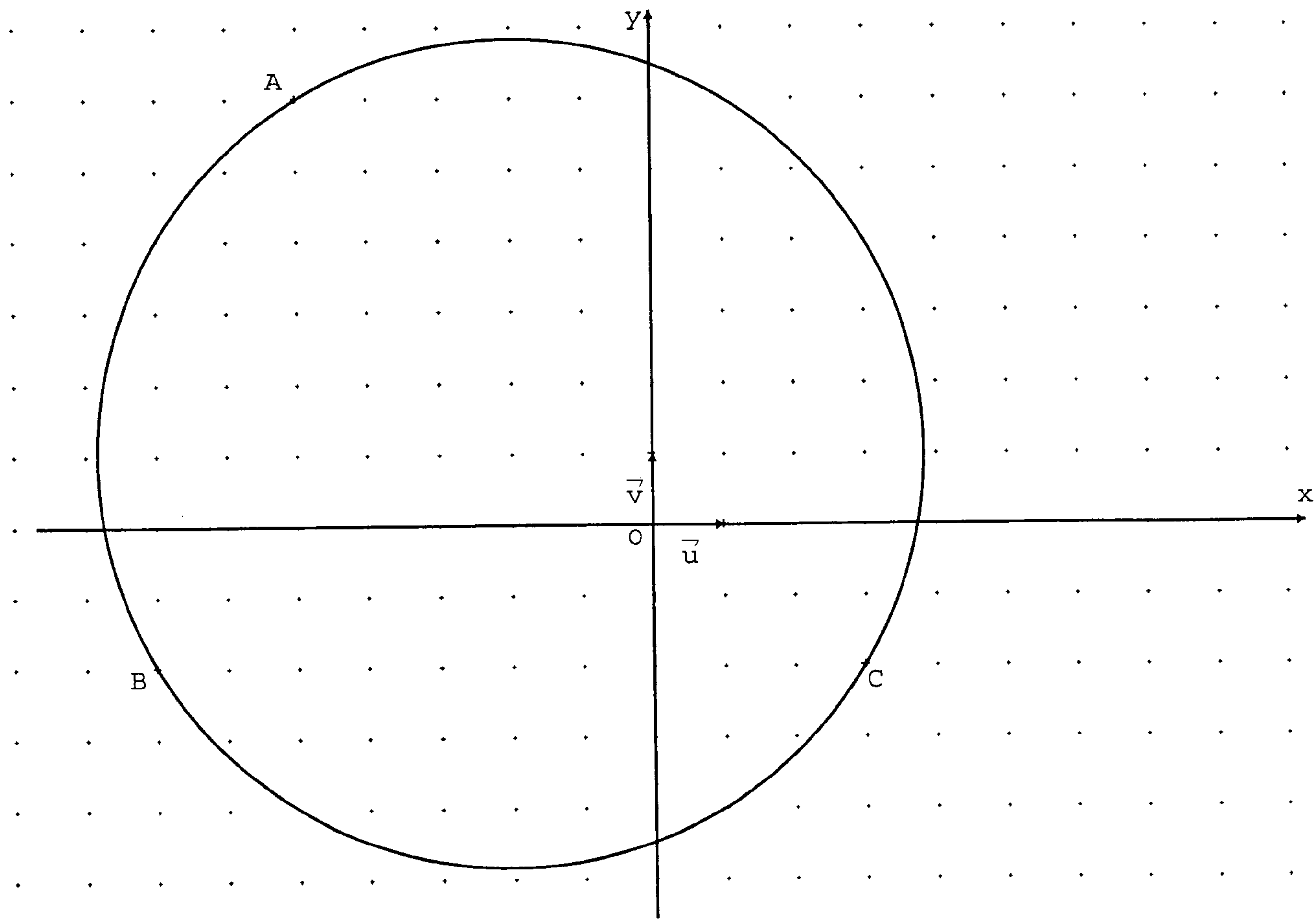
e) Utiliser la **partie A** pour donner la valeur de ℓ.

ANNEXE 1

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

À compléter et rendre avec la copie

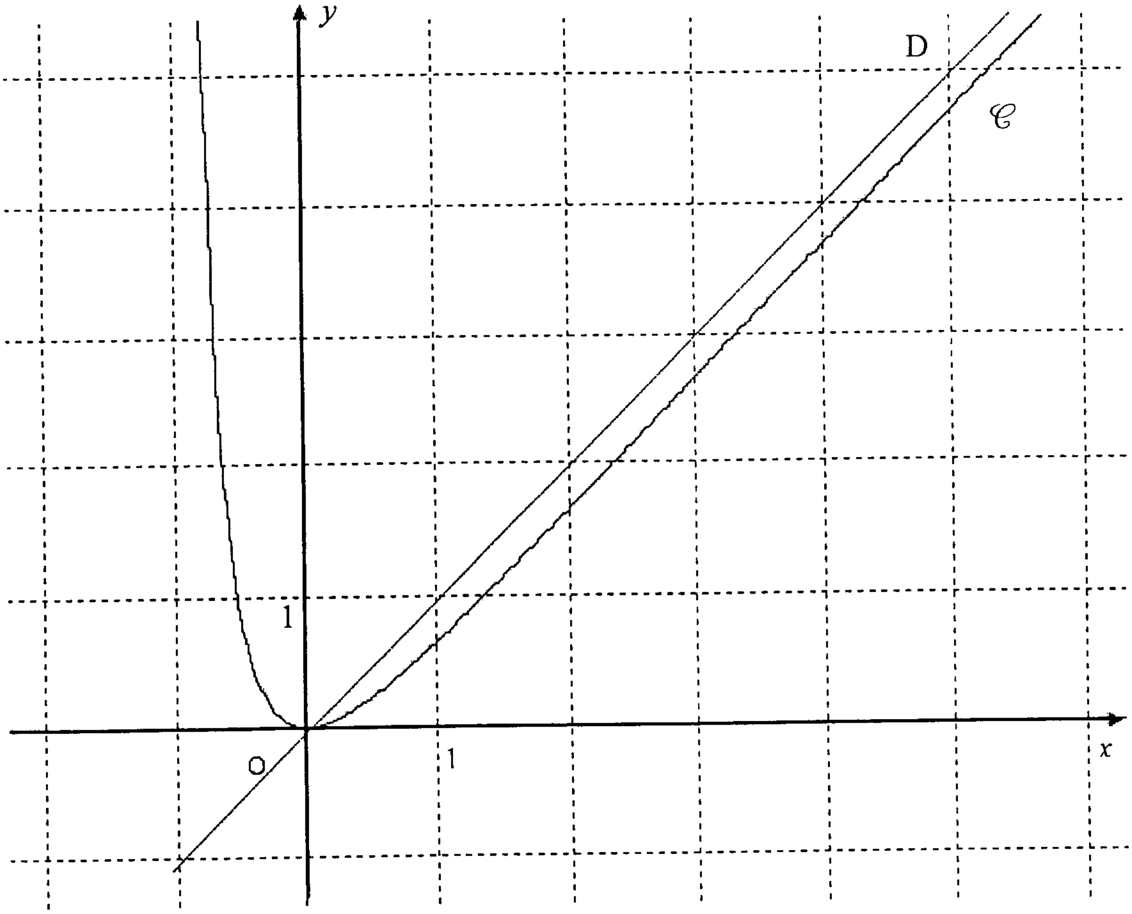
EXERCICE 3



ANNEXE 2

À compléter et à rendre avec la copie

EXERCICE 5



CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

ELEMENTS DE CORRECTION

Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. La règle de confidentialité relative aux commissions d'entente et aux travaux des jurys s'applique à son contenu.

EXERCICE 1 (3 points)

1) $\vec{n}$ (1 ; 2 ; −1) et $\vec{n}'$ (−1 ;1 ;1) sont des vecteurs normaux et $\vec{n}.\vec{n}' = 0$

2) Soit (d) la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -\frac{1}{3} + t \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = t \end{cases}$ où t est un nombre réel

Les points de (d) ont des coordonnées qui vérifient simultanément les équations des deux plans.
(d) est la droite intersection des deux plans.

3) $\mathrm{d}(A,P) = \frac{2}{\sqrt{6}}$; $\mathrm{d}(A,P') = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

4) $(\mathrm{d}(A,(d)))^2 = (\frac{2}{\sqrt{6}})^2 + (\frac{2}{\sqrt{3}})^2 = 2$ d'où $\mathrm{d}(A,(d)) = \sqrt{2}$.

EXERCICE 2 (3 points)

1) $(uv)' = u'v + uv'$. On utilise la linéarité de l'intégration pour obtenir la formule d'intégration par parties.

$\int_a^b (uv)'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$.

Donc $\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$

2) a) Posons : $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = \sin x$

$I = [e^x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x\mathrm{d}x$ donc I = – J car le premier calcul entre crochet est nul. Posons :

$u'(x) = \sin x$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$

$I = [-\mathrm{e}^x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos x\mathrm{d}x$ donc $I = J + \mathrm{e}^\pi + 1$

b) Donc $I = \frac{\mathrm{e}^\pi + 1}{2}$ et $J = -\frac{\mathrm{e}^\pi + 1}{2}$

EXERCICE 3 (5 points) **Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Partie A

On considère l'équation : (E) $z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=0$

1) $i^3-(4+i)i^2+(13+4i)i-13i=0$.

2) $z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=(z-i)(z^2-4z+13)$.

3) $S=\{i;2+3i;2-3i\}$.

Partie B

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives i ; 2 + 3i et 2 - 3i.

1) $A' = r'(A) \Leftrightarrow z_{A'}-z_B = e^{\frac{i\pi}{4}}(z_A-z_B) \Leftrightarrow z_{A'} = 2+(3-2\sqrt{2})i$.

2) $\dfrac{z_{A'}-z_B}{z_C-z_B} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ donc $\arg\left(\dfrac{z_{A'}-z_B}{z_C-z_B}\right) = 0\ [2\pi]$.

Les points A', B et C sont alignés et $z_{A'}-z_B = \dfrac{\sqrt{2}}{3}(z_C-z_B)$.

L'application complexe associée à l'homothétie de centre B qui transforme A′ en C est

$$z \mapsto \frac{\sqrt{2}}{3}z+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)(2+3i).$$

EXERCICE 3 (5 points) **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Voir figure complétée en annexe 1.

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points A, B et C, d'affixes respectives $-5 + 6i$; $-7 - 2i$ et $3 - 2i$.

On admet que le point F, d'affixe $-2 + i$ est le centre du cercle Γ, circonscrit au triangle ABC.

1) $\frac{z_H - z_A}{z_C - z_A} = \frac{3}{8}(1-i) = \frac{3\sqrt{2}}{8}e^{-\frac{i\pi}{4}}$.

La similitude directe de centre A qui transforme C en H est une similitude d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{3\sqrt{2}}{8}$.

2) a) Soit s la transformation d'écriture complexe $z' = a\overline{z} + b$ qui, au point M, associe le point M'.
Les points A et C sont invariants par s. Donc $s(A) = A$ et $s(C) = C$.

Les complexes a et b vérifient donc $\begin{cases} a(-5-6i)+b=-5+6i \\ a(3+2i)+b=3-2i \end{cases}$.

L'écriture complexe de s est donc $z' = -i\overline{z} + 1 + i$. Donc s est la symétrie orthogonale d'axe (AC).

b) $z_E = -i\,\overline{z}_H + 1 + i = 6i + 1$.

c) $FE = FA = \sqrt{34}$ donc E est sur Γ.

3) Soit I le milieu du segment [AC]. $z_I = -1+2i$.

G est l'image du point I par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{2}{3}$ donc :

$z_G - z_B = \frac{2}{3}(z_I - z_B) \Leftrightarrow z_G = -3 + \frac{2}{3}i$

$z_G - z_H = 2 + \frac{2}{3}i$ $z_F - z_H = 3 + i$ donc $z_G - z_H = \frac{3}{2}(z_F - z_H)$ et les points H, G et F sont ainsi alignés.

EXERCICE 4 (4 points)

1) d : 0,2048

2) b : 0,275

3) b : 0,091

4) a : $\frac{5}{9}$

EXERCICE 5 (5 points)

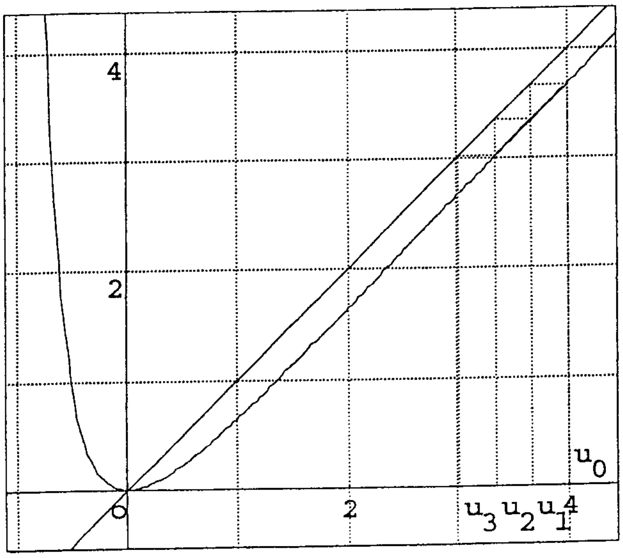
Partie A

1) On trouve que : $f'(x)=1-\dfrac{(1+x)\times\dfrac{1}{1+x}-\ln(1+x)}{(1+x)^2}=\dfrac{(1+x)^2-1+\ln(1+x)}{(1+x)^2}$.

2) $N(0)=0$. D'après les variations de *N*, on peut dire que *N* est strictement négative sur $]-1;0[$ et strictement positive sur $]0\,;+\infty[$. Puisque $f'(x)=\dfrac{N(x)}{(1+x)^2}$, on en déduit que f est strictement décroissante sur $]-1\,;\,0]$ et strictement croissante sur $[\,0;+\infty[$.

3) On doit résoudre l'équation $f(x)=x$, c'est-à-dire l'équation $\ln(1+x)=0$, c'est à dire l'équation $1+x=1$.
$\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ ont un unique point commun qui est le point O.

Partie B



1) La fonction f est strictement croissante sur $[\,0\,;+\infty[$, donc aussi sur $[\,0;4\,]$. Donc, si $x\in[\,0;4\,]$, alors $f(x)\in[\,f(0);f(4)\,]$. Or, $f(0)=0$ et $f(4)=4-\dfrac{\ln(5)}{5}<4$. Donc si $x\in[\,0;4\,]$ alors $f(x)\in[\,0;4\,]$.

2) a) Voir graphique.

b) On a $u_0=4$, donc $u_0\in[\,0;4\,]$.
Supposons que, pour *p* entier naturel, on ait $u_p\in[\,0;4\,]$. Alors $u_{p+1}=f(u_p)\in[\,0;4\,]$ d'après la question **1)**.
Donc, d'après l'axiome de récurrence, on a bien $u_n\in[\,0;4\,]$ pour tout *n* de **N**.

c) On a : $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=u_n-\dfrac{\ln(1+u_n)}{1+u_n}-u_n=-\dfrac{\ln(1+u_n)}{1+u_n}\leqslant 0$ puisque $u_n\geqslant 0$ (question 2b). La suite (u_n) est décroissante.

d) La suite (u_n) est décroissante, minorée par 0 ; donc elle converge.

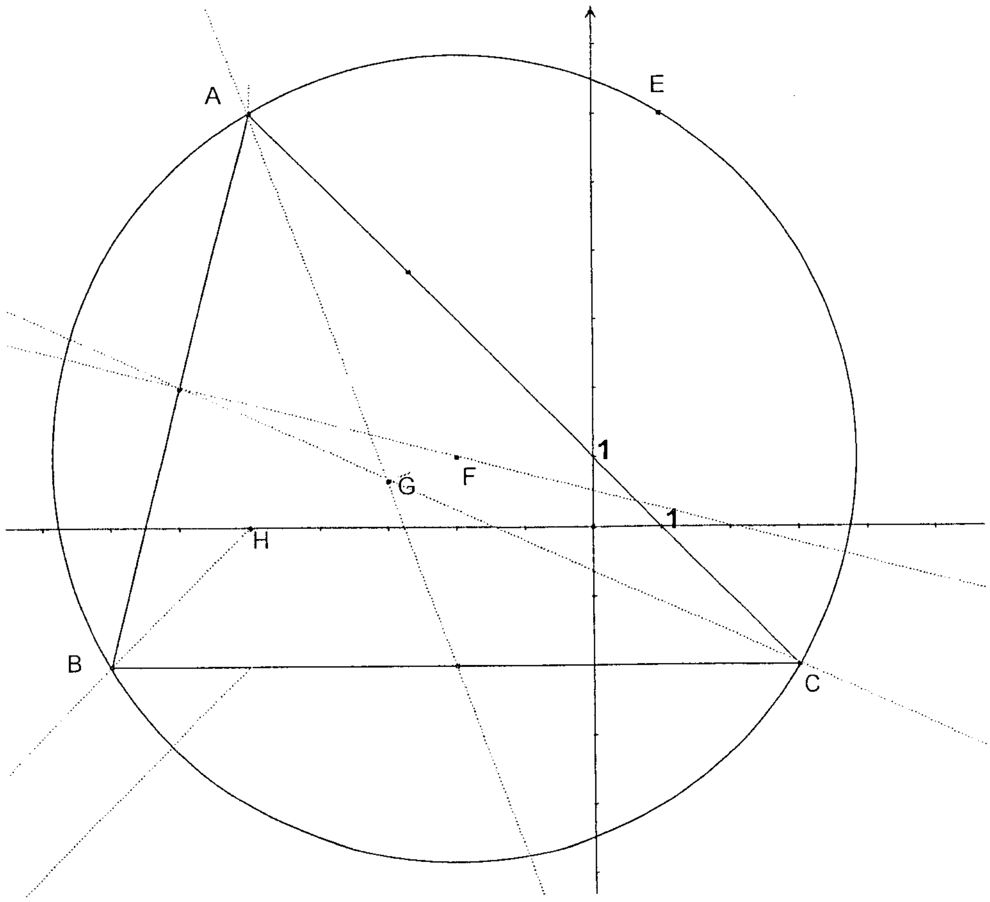
e) On a pour tout n : $u_{n+1}=f(u_n)$. Or : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}f(u_n)=f(\ell)$ puisque f est dérivable sur $]-1;+\infty[$, donc continue sur $]-1;+\infty[$, donc continue en ℓ.
Le réel ℓ est une solution de l'équation $f(x)=x$. Donc $\ell=0$ d'après A)3).

ANNEXE 1

À compléter et rendre avec la copie

EXERCICE 3

Annexe 1: (*exercice* 3 - *spécialité*)



CONSIGNES DE CORRECTION

Capacités évaluées :

1. **Restituer et mobiliser des connaissances.**
2. **Appliquer des méthodes.**
3. **Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter.**
4. **Mettre en forme un raisonnement, une démonstration, une démarche.**
5. **Développer une démarche ou un raisonnement cohérent.**
6. **Évaluer-critiquer un résultat, vérifier la validité d'un résultat ou d'une méthode.**

Exercice 1 (3 points)

1. Restituer et mobiliser des connaissances : questions 1) 3). 2. Appliquer des méthodes : questions 1) 2). 4. Mettre en forme un raisonnement, une démonstration, une démarche : questions 1) 2) 4). 5. Développer une démarche ou un raisonnement cohérent : question 4).	Une mobilisation adaptée des capacités 1, 2 et 4 assure l'obtention d'au moins 1,5 points.

Exercice 2 (3 points)

1. Restituer et mobiliser des connaissances : question 1). 2. Appliquer des méthodes : question 2). 3. Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter : question 2)a). 4. Construire et mettre en forme un raisonnement, une démonstration, une démarche : questions 1) 2)b).	Une mobilisation adaptée des capacités 1, 2 et 3 assure l'obtention d'au moins 1,5 points.

Exercice 3 (5 points) non spécialité

1. Restituer et mobiliser des connaissances : questions A-1), B-1). 2. Appliquer des méthodes : questions A-2) 3). 4. Construire et mettre en forme un raisonnement, une démonstration, une démarche : question B 2) 5. Développer une démarche ou un raisonnement cohérent : question B-2).	Une mobilisation adaptée des capacités 1, 2 et 4 assure l'obtention d'au moins 3 points.

Exercice 3 (5 points) spécialité

1. Restituer et mobiliser des connaissances : questions 1), 2)a). 2. Appliquer des méthodes : questions 1), 2)a) b) c). 4. Construire et mettre en forme un raisonnement, une démonstration, une démarche : question 3). 5. Développer une démarche ou un raisonnement cohérent : question 3). 6. Évaluer-critiquer un résultat, vérifier la validité d'un résultat ou d'une démarche : questions 2)b) c).	Une mobilisation adaptée des capacités 1, 2, 4 et 5 assure l'obtention d'au moins 3 points.

Exercice 4 (4 points)

QCM	

Exercice 5 (5 points)

1. Restituer et mobiliser des connaissances : questions A-1), B-2)d. **2.** Appliquer des méthodes : questions A, B-2)a) c). **3.** Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter : questions B-2)b). **4.** Mettre en forme un raisonnement, une démonstration, une démarche : questions B-1) 2)c). **5.** Développer une démarche ou un raisonnement cohérent : questions A-2), B-1) 2)c). **6.** Évaluer-critiquer un résultat, vérifier la validité d'un résultat ou d'une démarche : questions A-2), B-2)c) e).	Une mobilisation adaptée des capacités 1, 2, 5 et 6 assure l'obtention d'au moins 3 points.

BACCALAUREAT GENERAL

SESSION 2007

MATHÉMATIQUES

Obligatoire

<u>SERIE : ES</u>

DUREE DE L'EPREUVE : 3 heures - COEFFICIENT : 5

Ce sujet comporte 6 pages

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

L'usage des formulaires de mathématiques n'est pas autorisé.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

QCM

Pour chacune des questions, une seule des réponses A, B ou C est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

***NOTATION** : une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse enlève 0,25 point, l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.*

1) Pour tout nombre réel a et pour tout nombre réel b, on peut affirmer que $\dfrac{e^a}{e^b}$ est égal à :

Réponse A : $e^{\left(\frac{a}{b}\right)}$ **Réponse B** : $e^{(a-b)}$ **Réponse C** : $e^a - e^b$

2) On considère trois fonctions f, g et h définies sur **R** telles que, pour tout nombre réel x, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
Si l'on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors on peut en déduire que :

Réponse A : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ **Réponse B** : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ **Réponse C** : $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

3) On considère une fonction f définie et dérivable sur **R**, de dérivée f'. On donne ci-dessous son tableau de variations.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

a. L'équation $f(x) = 1$ admet dans **R** :

Réponse A : trois solutions **Réponse B** : deux solutions **Réponse C** : une solution

b. On note C la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
La tangente à la courbe C au point d'abscisse 0 peut avoir pour équation :

Réponse A : $y = -3x - 1$ **Réponse B** : $y = 3x + 1$ **Réponse C** : $y = -4$

EXERCICE 2 (5 points)

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A :

Dans un pays européen, le montant des recettes touristiques, exprimé en millions d'euros, est donné dans le tableau ci-dessous :

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5
Montant des recettes touristiques y_i en millions d'euros	24 495	26 500	29 401	33 299	33 675	34 190

1) On utilise un ajustement affine. Donner, à l'aide de la calculatrice, l'équation de la droite d'ajustement de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.
Les coefficients, obtenus à l'aide de la calculatrice, seront arrondis au centième.

2) En supposant que cet ajustement est valable jusqu'en 2007, calculer le montant que l'on peut prévoir pour les recettes touristiques de l'année 2007, arrondi au million d'euros.

PARTIE B :

On considère la fonction f définie pour tout nombre entier n par $f(n) = e^{10{,}13+0{,}07n}$.
On utilise cette fonction pour modéliser l'évolution des recettes touristiques de ce pays européen.
Ainsi $f(n)$ représente le montant des recettes touristiques (exprimé en millions d'euros) de ce pays européen pour l'année 2000+n.

1) Selon ce modèle, calculer le montant des recettes touristiques que l'on peut prévoir pour l'année 2007. Arrondir le résultat au million d'euros.

2) a. Déterminer le nombre entier n à partir duquel $f(n) > 45\,000$.
b. En déduire l'année à partir de laquelle, selon ce modèle, le montant des recettes touristiques dépasserait 45 000 millions d'euros.

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Amateur de sudoku (jeu consistant à compléter une grille de nombres), Pierre s'entraîne sur un site internet.
40 % des grilles de sudoku qui y sont proposées sont de niveau facile, 30 % sont de niveau moyen et 30 % de niveau difficile.
Pierre sait qu'il réussit les grilles de sudoku de niveau facile dans 95 % des cas, les grilles de sudoku de niveau moyen dans 60 % des cas et les grilles de sudoku de niveau difficile dans 40 % des cas.

Une grille de sudoku lui est proposée de façon aléatoire.

On considère les événements suivants :

F : « la grille est de niveau facile »
M : « la grille est de niveau moyen »
D : « la grille est de niveau difficile »
R : « Pierre réussit la grille » et $\overline{R}$ son événement contraire.

1) Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2) **a.** Calculer la probabilité que la grille proposée soit difficile et que Pierre la réussisse.
b. Calculer la probabilité que la grille proposée soit facile et que Pierre ne la réussisse pas.
c. Montrer que la probabilité que Pierre réussisse la grille proposée est égale à 0,68.

3) Sachant que Pierre n'a pas réussi la grille proposée, quelle est la probabilité que ce soit une grille de niveau moyen ?

4) Pierre a réussi la grille proposée. Sa petite sœur affirme : « Je pense que ta grille était facile ». Dans quelle mesure a-t-elle raison ? Justifier la réponse à l'aide d'un calcul.

EXERCICE 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

Un laboratoire pharmaceutique produit et commercialise un médicament en poudre. Sa production hebdomadaire, exprimée en kilogrammes, est limitée à 10 kilogrammes.

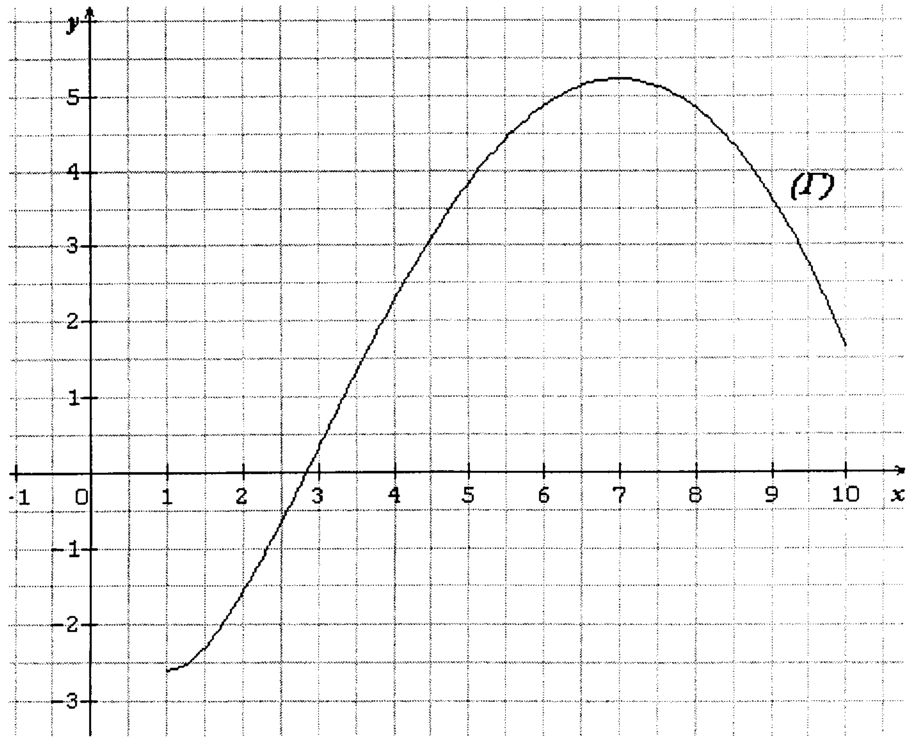
<u>PARTIE I</u> : étude des coûts hebdomadaires de production.

1) Le coût marginal de production est fonction de la quantité x de médicament produit.
Une étude a montré que, pour cette entreprise, l'évolution du coût marginal de production est modélisée par la fonction C_m définie pour les nombres réels x de l'intervalle $[0\,;10]$ par : $C_m(x) = x + \dfrac{16}{x+1}$.
($C_m(x)$ est exprimé en centaines d'euros, x en kilogrammes).
Étudier les variations de la fonction C_m, puis dresser le tableau de variation de la fonction C_m sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

2) En économie, le coût marginal de production correspond à la dérivée du coût total de production.
Ainsi le coût total de production hebdomadaire est modélisé par une primitive de la fonction C_m.
Déterminer la fonction C, primitive de la fonction C_m sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ qui modélise ce coût total, pour une production de médicaments comprise entre 0 et 10 kilogrammes, sachant que $C(0) = 0$.

<u>PARTIE II</u> : étude du bénéfice hebdomadaire.
On admet que le laboratoire produit une quantité hebdomadaire d'au moins 1 kg et que tout ce qui est produit est vendu.
Le bénéfice hebdomadaire (exprimé en centaines d'euros) dépend de la masse x (exprimée en kilogrammes) de médicament produit. Il peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[1\,;10]$ par : $B(x) = 9x - 0,5x^2 - 16\ln(x+1)$.

La représentation graphique de la fonction B dans le plan muni d'un repère orthogonal est la courbe (Γ) donnée ci-dessous.



1) a. On admet que la fonction B est strictement croissante sur l'intervalle $[1\ ;\ 7]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[7\ ;\ 10]$.

En déduire la quantité de médicaments que l'entreprise doit produire par semaine pour que son bénéfice hebdomadaire (en centaines d'euros) soit maximal.

b. Calculer ce bénéfice hebdomadaire maximal en centaines d'euros (arrondir à l'euro).

2) a. Utiliser la courbe ***(Γ)*** pour déterminer un encadrement d'amplitude 0,5 de la plus petite quantité x_0 de médicaments que l'entreprise doit produire par semaine pour ne pas perdre d'argent.

b. Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur décimale de x_0 approchée au centième.

CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

	BACCALAURÉAT GÉNÉRAL	
Série	**ES**	**SESSION 2007**
Épreuve	**MATHÉMATIQUES**	**Durée : 3h**
Coef : **5 (obligatoire)** **7 (Spécialité)**	**RECOMMANDATIONS DE CORRECTION**	

Note de service n°2003-069 du 29 avril 2004 fixant les modalités de l'épreuve de mathématiques au bac ES
« L'épreuve est destinée à évaluer la façon dont les candidats ont atteint les grands objectifs de formation mathématique visés par le programme de la série ES :
C1 *: acquérir des connaissances et les organiser ;*
C2 *: maîtriser la lecture et le traitement de l'information (graphique, algébrique, numérique) ;*
C3 *: savoir lier dans une même démarche observation, imagination, questionnement, synthèse, logique, argumentation et démonstration mathématique. »*

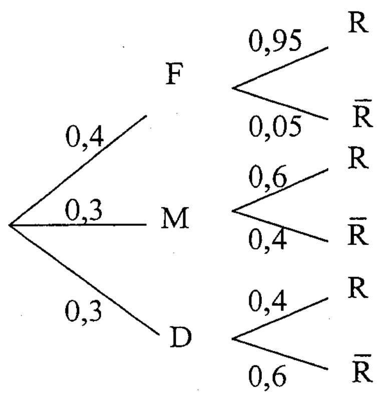
Question	Réponse	Compétences	Commentaires	Points
	Exercice 1 **(4 points)** **Commun à tous les candidats**			
1) **2)** **3)a** **3)b**	Réponse B Réponse C Réponse C Réponse A	**C1** **C1** **C2 (lecture tableau)** **C3**		Pour chaque réponse : 1 pt si exacte. - 0,25 pt si inexacte

Question	Réponse	Compétences	Commentaires	Points
	Exercice 2 **(5 points)** **Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**			
Partie A **1)**	$y = ax + b$ avec $a \approx 2111,37$ et $b \approx 24981,57$.	**C2 : traitement de l'information**		
2)	Pour $x = 7$, $y = 7a + b \approx 39761$. Le montant prévisible des recettes touristiques en 2007 est de 39 761 millions d'euros environ.	**C2 : calcul**		
Partie B **1)**	$f(7) = e^{10.62} \approx 40946$. Selon le modèle de la partie B, le montant des recettes touristiques en 2007 sera de 40 946 millions d'euros environ.	**C2 : calcul**		

2)a)	$n=9$.	**C3 : organiser une recherche**	On peut déterminer n en résolvant l'inéquation $f(n)>45000$ ou, f étant croissante, en utilisant la calculatrice.	
2)b)	Année 2009.	**C3 : déduction**		

Question	Réponse	Compétences	Commentaires	Points
	<u>**Exercice 2**</u> **(5 points)** **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**			
PARTIE 1 **1)**	Abscisse de A : 6 ; cote de A : 4. Ordonnée de A : y tel que $4=f(6\,;y)$. On résout l'équation : $4=\dfrac{18y}{6+y}$. On trouve : $y=\dfrac{12}{7}\approx 1,7$.	**C2 : lecture et traitement d'information**		
2)	Si la main d'œuvre travaille 6 heures par jour, une production journalière de 4 tonnes est obtenue en utilisant les machines pendant 1.7 heure.			
PARTIE 2 **1) a.**	$g'(x)=\dfrac{(8x-36)(x-12)-(4x^2-36x)}{(x-12)^2}$ puis $g'(x)=\dfrac{4x^2-96x+432}{(x-12)^2}$, puis $g'(x)=\dfrac{4(x-6)(x-18)}{(x-12)^2}$ en justifiant la transformation du numérateur (factorisation du trinôme ou développement du produit).	**C2 : calcul dérivée** **C3 : démontrer égalité**		
1) b.	$g'(x)$ a le même signe que $(x-6)(x-18)$. Sur]0 ;10], $x-18<0$ et donc $g'(x)$ a le signe opposé à(x-6). $g'(x)$ est donc positif sur]0 ;6] et négatif sur [6 ;10]. g est donc croissante sur l'intervalle]0 ;6] et décroissante sur l'intervalle [6 ;10].	**C3 : déduction**	Le signe de $g'(x)$ peut être expliqué par un tableau de signe à partir de la forme factorisée de $g'(x)$ ou du signe du trinôme $4x^2-96x+432$. Le sens de variations de g peut être donné dans un tableau de variations.	

2)a)	Pour un coût total de 36 milliers d'euros, la production maximale est obtenue pour $x = 6$. Alors : $y = 36 - 4x = 12$. Sous cette contrainte, la production maximale est obtenue pour une durée journalière de travail de 6 heures et une durée journalière d'utilisation des machines de 12 heures.	**C2 : calculs** **C3 : organiser démarche** **C1 : organiser connaissances**		
2) b)	La quantité maximale produite est alors de $g(6)$ tonnes, soit de 12 tonnes.	**C3 : déduction** **C2 : calcul**		

Question	Réponse	Compétences	Commentaires	Points
	<u>Exercice 3</u> (5 points) **Commun à tous les candidats**			
1)		**C2 : traitement information**		
2)a)	D'après l'arbre : $P(D\,et\,R) = 0.3 \times 0.4 = 0.12$	**C2 : traitement info + calcul**		
2)b)	D'après l'arbre : $P(F\,et\,\overline{R}) = 0.4 \times 0.05 = 0.02$	**C2 : traitement info + calcul**		
2)c)	$P(R) = P(F\,et\,R) + P(M\,et\,R) + P(D\,et\,R)$ $P(R) = (0.4 \times 0.95) + (0.3 \times 0.6) + (0.3 \times 0.4) = 0.68$	**C3 : organiser démarche**		
3)	On cherche $P_{\overline{R}}(M)$. $P_{\overline{R}}(M) = \dfrac{P(M\,et\,\overline{R})}{P(\overline{R})} = \dfrac{0.3 \times 0.4}{1 - 0.68} = 0.375$	**C2 : traitement info + calcul**		

4)	La probabilité que la petite sœur ait raison est : $P_R(F)$. $P_R(F)=\dfrac{P(F\ et\ R)}{P(R)}=\dfrac{0.4\times 0.95}{0.68}\approx 0.56$	**C3 : organiser la démarche** **C2 : calcul**		

<table>
<tr><th>Question</th><th>Réponse</th><th>Compétences</th><th>Commentaires</th><th>Points</th></tr>
<tr><td></td><td><u>Exercice 4</u> (6 points)
Commun à tous les candidats</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Partie 1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1)</td><td>$C_m'(x)=1-\dfrac{16}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)^2-16}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+5)(x-3)}{(x+1)^2}$
Sur l'intervalle [0 ;10], $C_m'(x)$ a le signe de $x-3$.
D'où le tableau de signe de $C_m'(x)$ et de variations de C_m :
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>3</td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td>$C'_m(x)$</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>$C_m(x)$</td><td>16</td><td>$\searrow$</td><td>7</td><td>$\nearrow$</td><td>$\dfrac{126}{11}$</td></tr>
</table></td><td>C2 : calculer la dérivée
C3 : organiser la démarche</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2)</td><td>$C(x)=\dfrac{x^2}{2}+16\ln(x+1)+K$, avec K constante.
C(0)=0 donc K=0.
Donc : $C(x)=\dfrac{x^2}{2}+16\ln(x+1)$</td><td>C2 : recherche primitive</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Partie II				
1) a)	Le bénéfice est maximal pour $x = 7$. L'entreprise doit vendre 7 kilos de médicaments par semaine pour que son bénéfice soit maximal.	**C2 : traitement de l'information**		
1) b)	Le bénéfice est alors de B(7) centaines d'euros, soit d'environ 523 euros.	**C2 : calcul**		
2)a)	$2.5 < x_0 < 3$ par lecture graphique.	**C2 : traitement de l'information**		
2) b)	En tabulant la fonction on obtient : $f(2.84)<0$ et $0<f(2.85)$. Comme $f(x_0) = 0$, on a donc : $f(2.84) < f(x_0) < f(2.85)$ Comme f est strictement croissante sur [1 ;7] , on en déduit : $2.84 < x_0 < 2.85$. 2.84 est une valeur décimale de x_0 approchée au centième. 2.85 en est une autre.	**C3 : organiser la démarche**	D'autres types d'utilisations de la calculatrice sont possibles.	

BACCALAUREAT GENERAL

SESSION 2007

MATHÉMATIQUES

Spécialité

SERIE : ES

DUREE DE L'EPREUVE : 3 heures - COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte 6 pages

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

L'usage des formulaires de mathématiques n'est pas autorisé.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

QCM

Pour chacune des questions, une seule des réponses A, B ou C est exacte.

<u>Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.</u>

Aucune justification n'est demandée.

***NOTATION** : une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse enlève 0,25 point, l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.*

1) Pour tout nombre réel a et pour tout nombre réel b, on peut affirmer que $\dfrac{e^a}{e^b}$ est égal à :

Réponse A : $e^{\left(\frac{a}{b}\right)}$ **Réponse B** : $e^{(a-b)}$ **Réponse C** : $e^a - e^b$

2) On considère trois fonctions f, g et h définies sur **R** telles que, pour tout nombre réel x, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Si l'on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors on peut en déduire que :

Réponse A : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ **Réponse B** : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ **Réponse C** : $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

3) On considère une fonction f définie et dérivable sur **R**, de dérivée f'. On donne ci-dessous son tableau de variations.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

a. L'équation $f(x) = 1$ admet dans **R** :

Réponse A : trois solutions **Réponse B** : deux solutions **Réponse C** : une solution

b. On note C la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O} ; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

La tangente à la courbe C au point d'abscisse 0 peut avoir pour équation :

Réponse A : $y = -3x - 1$ **Réponse B** : $y = 3x + 1$ **Réponse C** : $y = -4$

EXERCICE 2 (5 points)

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

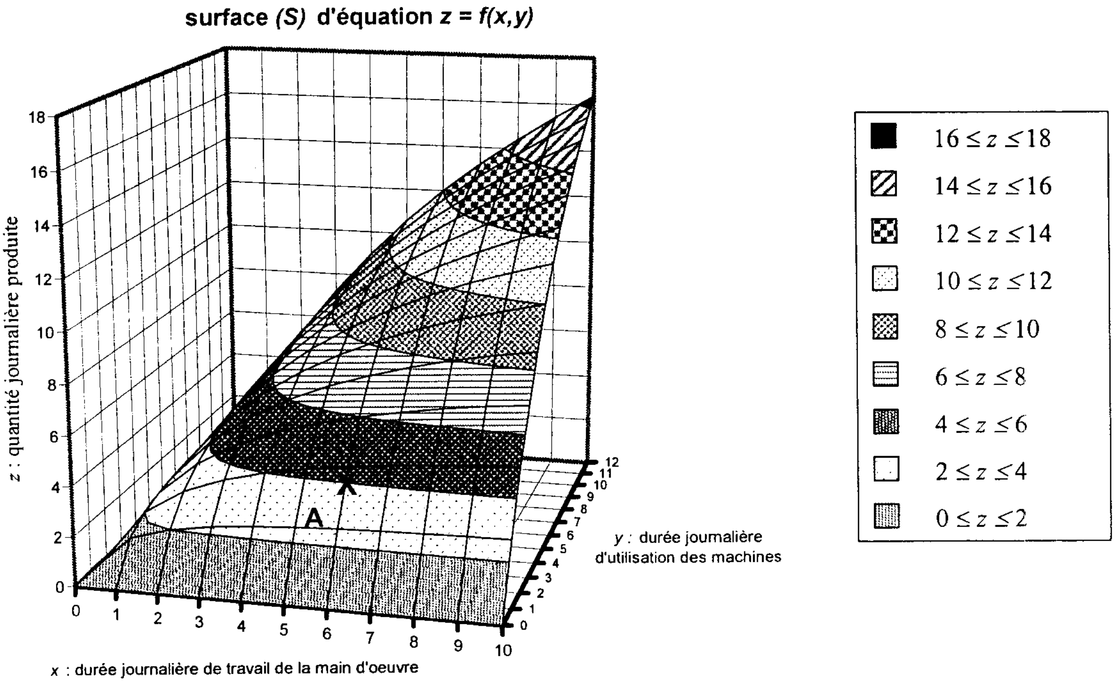
La production journalière d'une entreprise dépend de deux facteurs : le travail de la main d'œuvre et l'utilisation des machines. On désigne :

- par x la durée journalière de travail de la main d'oeuvre, exprimée en heures ; x appartient à l'intervalle $]0;10]$
- par y la durée journalière d'utilisation des machines, exprimée en heures ; y appartient à l'intervalle $]0;12]$

La quantité journalière produite (en tonnes) est donnée par la relation :

$$f(x\,,\,y)=\frac{3xy}{x+y} \text{ avec } 0<x\leq 10 \text{ et } 0<y\leq 12.$$

La figure ci-dessous représente la surface (S) d'équation : $z=f(x\,,\,y)$ pour $0<x\leq 10$ et $0<y\leq 12$.



PARTIE 1 : Le point A représenté par une croix est un point de la surface (S).

1) Déterminer graphiquement l'abscisse et la cote du point A. Calculer son ordonnée (arrondie au dixième).

2) Interpréter les résultats obtenus en référence à la production journalière de l'entreprise.

PARTIE 2 : Pour chaque heure, le coût total du travail s'élève à 4 milliers d'euros, et le coût total d'utilisation des machines s'élève à 1 millier d'euros.

L'entreprise décide de dépenser 36 milliers d'euros par jour et cherche à maximiser sa production journalière sous cette contrainte. On a alors $4x+y=36$.

La quantité journalière produite (en tonnes) sous cette contrainte de coût peut donc être modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,10]$ par $g(x)=\dfrac{4x^2-36x}{x-12}$.

1) On note g' la fonction dérivée de g sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.

a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;\,10]$, calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x)=\dfrac{4(x-6)(x-18)}{(x-12)^2}$.

b. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.

2) **a.** En déduire la durée journalière de travail et la durée journalière d'utilisation des machines permettant d'obtenir une production journalière maximale pour un coût total de 36 milliers d'euros.

b. Préciser la quantité journalière maximale produite en tonnes.

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Amateur de sudoku (jeu consistant à compléter une grille de nombres), Pierre s'entraîne sur un site internet.
40 % des grilles de sudoku qui y sont proposées sont de niveau facile, 30 % sont de niveau moyen et 30 % de niveau difficile.
Pierre sait qu'il réussit les grilles de sudoku de niveau facile dans 95 % des cas, les grilles de sudoku de niveau moyen dans 60 % des cas et les grilles de sudoku de niveau difficile dans 40 % des cas.

Une grille de sudoku lui est proposée de façon aléatoire.

On considère les événements suivants :

F : « la grille est de niveau facile »
M : « la grille est de niveau moyen »
D : « la grille est de niveau difficile »
R : « Pierre réussit la grille » et $\overline{R}$ son événement contraire.

1) Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2) **a.** Calculer la probabilité que la grille proposée soit difficile et que Pierre la réussisse.
b. Calculer la probabilité que la grille proposée soit facile et que Pierre ne la réussisse pas.
c. Montrer que la probabilité que Pierre réussisse la grille proposée est égale à 0,68.

3) Sachant que Pierre n'a pas réussi la grille proposée, quelle est la probabilité que ce soit une grille de niveau moyen ?

4) Pierre a réussi la grille proposée. Sa petite sœur affirme : « Je pense que ta grille était facile ». Dans quelle mesure a-t-elle raison ? Justifier la réponse à l'aide d'un calcul.

EXERCICE 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

Un laboratoire pharmaceutique produit et commercialise un médicament en poudre. Sa production hebdomadaire, exprimée en kilogrammes, est limitée à 10 kilogrammes.

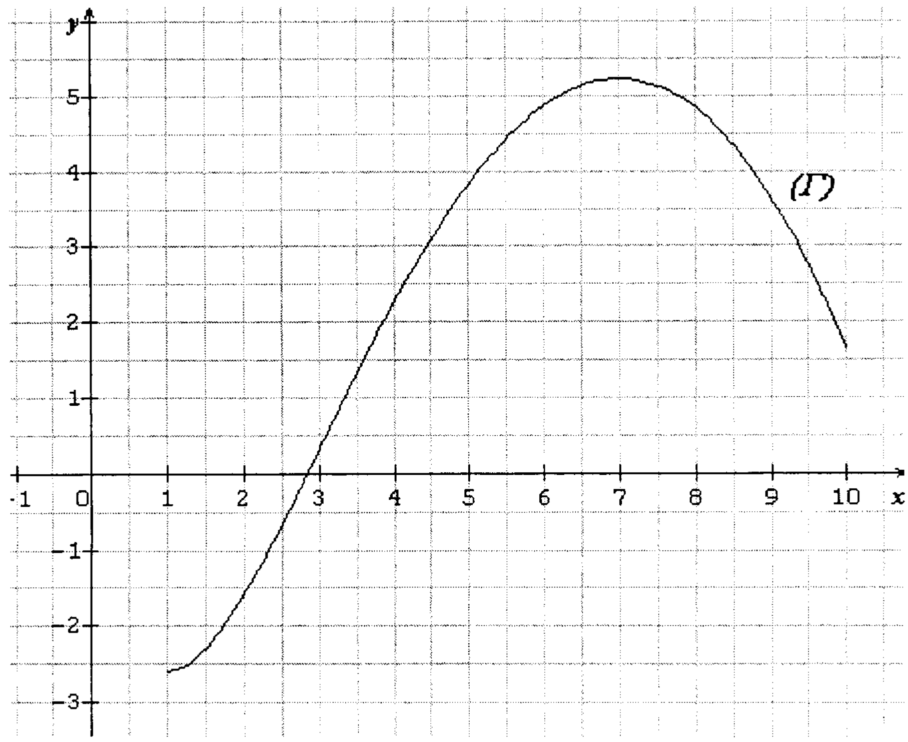
PARTIE I : étude des coûts hebdomadaires de production.

1) Le coût marginal de production est fonction de la quantité x de médicament produit.
Une étude a montré que, pour cette entreprise, l'évolution du coût marginal de production est modélisée par la fonction C_m définie pour les nombres réels x de l'intervalle $[0\,;10]$ par : $C_m(x) = x + \dfrac{16}{x+1}$.
($C_m(x)$ est exprimé en centaines d'euros, x en kilogrammes).
Étudier les variations de la fonction C_m, puis dresser le tableau de variation de la fonction C_m sur l'intervalle $[0\,;10]$.

2) En économie, le coût marginal de production correspond à la dérivée du coût total de production.
Ainsi le coût total de production hebdomadaire est modélisé par une primitive de la fonction C_m.
Déterminer la fonction C, primitive de la fonction C_m sur l'intervalle $[0\,;10]$ qui modélise ce coût total, pour une production de médicaments comprise entre 0 et 10 kilogrammes, sachant que $C(0) = 0$.

PARTIE II : étude du bénéfice hebdomadaire.
On admet que le laboratoire produit une quantité hebdomadaire d'au moins 1 kg et que tout ce qui est produit est vendu.
Le bénéfice hebdomadaire (exprimé en centaines d'euros) dépend de la masse x (exprimée en kilogrammes) de médicament produit. Il peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[1\,;10]$ par : $B(x) = 9x - 0{,}5x^2 - 16\ln(x+1)$.

La représentation graphique de la fonction B dans le plan muni d'un repère orthogonal est la courbe (Γ) donnée ci-dessous.



1) a. On admet que la fonction B est strictement croissante sur l'intervalle $[1\ ;\ 7]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[7\ ;\ 10]$.

En déduire la quantité de médicaments que l'entreprise doit produire par semaine pour que son bénéfice hebdomadaire (en centaines d'euros) soit maximal.

b. Calculer ce bénéfice hebdomadaire maximal en centaines d'euros (arrondir à l'euro).

2) a. Utiliser la courbe ***(Γ)*** pour déterminer un encadrement d'amplitude 0,5 de la plus petite quantité x_0 de médicaments que l'entreprise doit produire par semaine pour ne pas perdre d'argent.

b. Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur décimale de x_0 approchée au centième.

CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

	BACCALAURÉAT GÉNÉRAL	
Série	ES	SESSION 2007
Épreuve	MATHÉMATIQUES	Durée : 3h
Coef : 5 (obligatoire) 7 (Spécialité)	RECOMMANDATIONS DE CORRECTION	

Note de service n°2003-069 du 29 avril 2004 fixant les modalités de l'épreuve de mathématiques au bac ES
« L'épreuve est destinée à évaluer la façon dont les candidats ont atteint les grands objectifs de formation mathématique visés par le programme de la série ES :
C1 *: acquérir des connaissances et les organiser ;*
C2 *: maîtriser la lecture et le traitement de l'information (graphique, algébrique, numérique) ;*
C3 *: savoir lier dans une même démarche observation, imagination, questionnement, synthèse, logique, argumentation et démonstration mathématique. »*

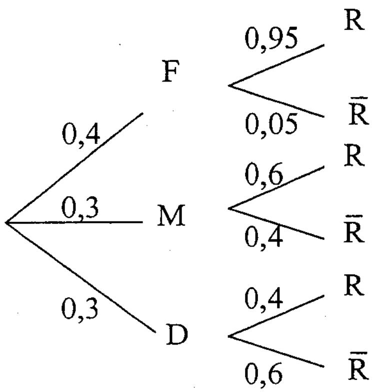
Question	Réponse	Compétences	Commentaires	Points
	Exercice 1 (4 points) **Commun à tous les candidats**			
1) 2) 3)a 3)b	Réponse B Réponse C Réponse C Réponse A	**C1** **C1** **C2 (lecture tableau)** **C3**		Pour chaque réponse : 1 pt si exacte. - 0,25 pt si inexacte

Question	Réponse	Compétences	Commentaires	Points
	Exercice 2 (5 points) **Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**			
Partie A 1)	$y = ax + b$ avec $a \approx 2111{,}37$ et $b \approx 24981{,}57$.	**C2 : traitement de l'information**		
2)	Pour $x = 7$, $y = 7a + b \approx 39761$. Le montant prévisible des recettes touristiques en 2007 est de 39 761 millions d'euros environ.	**C2 : calcul**		
Partie B 1)	$f(7) = e^{10.62} \approx 40946$. Selon le modèle de la partie B, le montant des recettes touristiques en 2007 sera de 40 946 millions d'euros environ.	**C2 : calcul**		

2)a)	$n = 9$.	**C3 : organiser une recherche**	On peut déterminer *n* en résolvant l'inéquation $f(n) > 45000$ ou, f étant croissante, en utilisant la calculatrice.	
2)b)	Année 2009.	**C3 : déduction**		

Question	Réponse	Compétences	Commentaires	Points
	<u>Exercice 2</u> (5 points) **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**			
PARTIE 1 **1)**	Abscisse de A : 6 ; cote de A : 4. Ordonnée de A : *y* tel que $4 = f(6\,;y)$. On résout l'équation : $4 = \frac{18y}{6+y}$. On trouve : $y = \frac{12}{7} \approx 1{,}7$.	**C2 : lecture et traitement d'information**		
2)	Si la main d'œuvre travaille 6 heures par jour, une production journalière de 4 tonnes est obtenue en utilisant les machines pendant 1.7 heure.			
PARTIE 2 **1) a.**	$g'(x) = \frac{(8x-36)(x-12)-(4x^2-36x)}{(x-12)^2}$ puis $g'(x) = \frac{4x^2-96x+432}{(x-12)^2}$, puis $g'(x) = \frac{4(x-6)(x-18)}{(x-12)^2}$ en justifiant la transformation du numérateur (factorisation du trinôme ou développement du produit).	**C2 : calcul dérivée** **C3 : démontrer égalité**		
1) b.	$g'(x)$ a le même signe que $(x-6)(x-18)$. Sur]0 ;10], $x-18<0$ et donc $g'(x)$ a le signe opposé à(x-6). $g'(x)$ est donc positif sur]0 ;6] et négatif sur [6 ;10]. *g* est donc croissante sur l'intervalle]0 ;6] et décroissante sur l'intervalle [6 ;10].	**C3 : déduction**	Le signe de $g'(x)$ peut être expliqué par un tableau de signe à partir de la forme factorisée de $g'(x)$ ou du signe du trinôme $4x^2-96x+432$. Le sens de variations de *g* peut être donné dans un tableau de variations.	

2)a)	Pour un coût total de 36 milliers d'euros, la production maximale est obtenue pour $x = 6$. Alors : $y = 36 - 4x = 12$. Sous cette contrainte, la production maximale est obtenue pour une durée journalière de travail de 6 heures et une durée journalière d'utilisation des machines de 12 heures.	**C2 : calculs** **C3 : organiser démarche** **C1 : organiser connaissances**		
2) b)	La quantité maximale produite est alors de $g(6)$ tonnes, soit de 12 tonnes.	**C3 : déduction** **C2 : calcul**		

Question	**Réponse**	**Compétences**	**Commentaires**	**Points**
	<u>**Exercice 3**</u> **(5 points)** **Commun à tous les candidats**			
1)		**C2 : traitement information**		
2)a)	D'après l'arbre : $P(D\, et\, R) = 0.3 \times 0.4 = 0.12$	**C2 : traitement info + calcul**		
2)b)	D'après l'arbre : $P(F\ et\ \overline{R}) = 0.4 \times 0.05 = 0.02$	**C2 : traitement info + calcul**		
2)c)	$P(R) = P(F\, et\, R) + P(M\ et\, R) + P(D\, et\, R)$ $P(R) = (0.4 \times 0.95) + (0.3 \times 0.6) + (0.3 \times 0.4) = 0.68$	**C3 : organiser démarche**		
3)	On cherche $P_{\overline{R}}(M)$. $P_{\overline{R}}(M) = \dfrac{P(M\ et\, \overline{R})}{P(\overline{R})} = \dfrac{0.3 \times 0.4}{1 - 0.68} = 0.375$	**C2 : traitement info + calcul**		

<table>
<tr><td>4)</td><td>La probabilité que la petite sœur ait raison est : $P_R(F)$.
$P_R(F)=\dfrac{P(F\ et\ R)}{P(R)}=\dfrac{0.4\times 0.95}{0.68}\approx 0.56$</td><td>C3 : organiser la démarche
C2 : calcul</td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Question</th><th>Réponse</th><th>Compétences</th><th>Commentaires</th><th>Points</th></tr>
<tr><td></td><td><u>Exercice 4</u> (6 points)
Commun à tous les candidats</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Partie 1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1)</td><td>$C_m'(x)=1-\dfrac{16}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)^2-16}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+5)(x-3)}{(x+1)^2}$
Sur l'intervalle [0 ;10], $C_m'(x)$ a le signe de $x-3$.
D'où le tableau de signe de $C_m'(x)$ et de variations de C_m :
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>3</td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td>$C'_m(x)$</td><td></td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>$C_m(x)$</td><td>16</td><td>↘</td><td>7</td><td>↗</td><td>$\dfrac{126}{11}$</td></tr>
</table></td><td>C2 : calculer la dérivée
C3 : organiser la démarche</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2)</td><td>$C(x)=\dfrac{x^2}{2}+16\ln(x+1)+K$, avec K constante.
C(0)=0 donc K=0.
Donc : $C(x)=\dfrac{x^2}{2}+16\ln(x+1)$</td><td>C2 : recherche primitive</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Partie II				
1) a)	Le bénéfice est maximal pour $x = 7$. L'entreprise doit vendre 7 kilos de médicaments par semaine pour que son bénéfice soit maximal.	**C2 : traitement de l'information**		
1) b)	Le bénéfice est alors de B(7) centaines d'euros, soit d'environ 523 euros.	**C2 : calcul**		
2)a)	2.5< x_0 < 3 par lecture graphique.	**C2 : traitement de l'information**		
2) b)	En tabulant la fonction on obtient : *f* (2.84)<0 et 0<*f* (2.85). Comme $f(x_0) = 0$, on a donc : $f(2.84) < f(x_0) < f(2.85)$ Comme *f* est strictement croissante sur [1 ;7] , on en déduit : $2.84 < x_0 < 2.85$. 2.84 est une valeur décimale de x_0 approchée au centième. 2.85 en est une autre.	**C3 : organiser la démarche**	D'autres types d'utilisations de la calculatrice sont possibles.	

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2008

SUJET SORTI

MATHÉMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

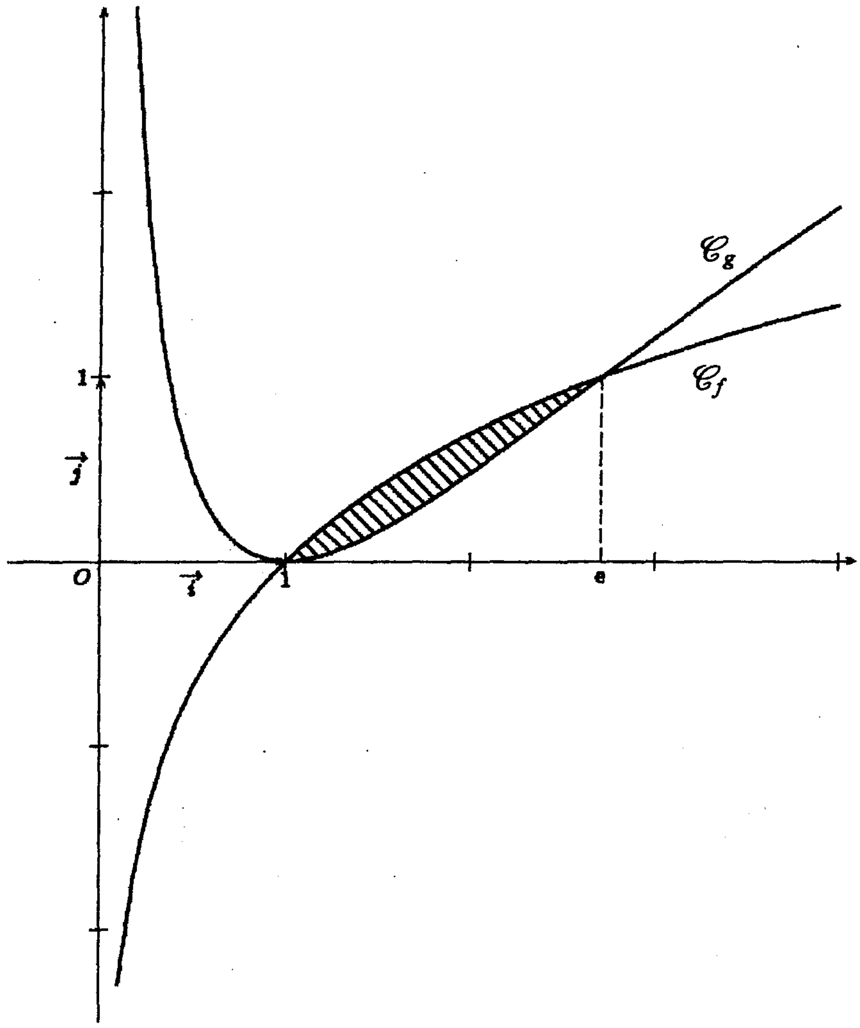
Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\ln x$ et $g(x)=(\ln x)^2$.



1) On cherche à déterminer l'aire A (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée.
On note $I=\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x$ et $J=\int_1^e (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$.

a) Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $F(x)=x\ln x-x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire I.

b) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J=\mathrm{e}-2I$.

c) En déduire J.

d) Donner la valeur de A.

2) *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*

Pour x appartenant à l'intervalle [1 ; e], on note M le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et N le point de la courbe $\mathscr{C}_g$ de même abscisse.
Pour quelle valeur de x la distance MN est maximale ? Calculer la valeur maximale de MN.

EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points
$A(1, 1, 0)$, $B(1, 2, 1)$ et $C(3, -1, 2)$.

1) a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x + y - z - 3 = 0$.

2) On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x + 2y - z - 4 = 0$ et $2x + 3y - 2z - 5 = 0$.

Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est une droite $(\mathscr{D})$, dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

3) Quelle est l'intersection des trois plans (ABC), (P) et (Q) ?

4) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Déterminer la distance du point A à la droite $(\mathscr{D})$.

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

La durée de vie, exprimée en heures, d'un agenda électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif.
On rappelle que pour tout $t \geqslant 0$, $P(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx$.
La fonction R définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $R(t) = P(X > t)$ est appelée fonction de fiabilité.

1) *Restitution organisée de connaissances*

a) Démontrer que pour tout $t \geqslant 0$ on a $R(t) = e^{-\lambda t}$.

b) Démontrer que la variable X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout réel $s \geqslant 0$, la probabilité conditionnelle $P_{X>t}(X > t + s)$ ne dépend pas du nombre $t \geqslant 0$.

2) Dans cette question, on prend $\lambda = 0{,}00026$.

a) Calculer $P(X \leqslant 1000)$ et $P(X > 1000)$.

b) Sachant que l'événement $(X > 1000)$ est réalisé, calculer la probabilité de l'événement $(X > 2000)$.

c) Sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2000 heures, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3000 heures ? Pouvait-on prévoir ce résultat ?

EXERCICE 4 **(5 points)**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 1 cm).
Soient A, B et I les points d'affixes respectives $1 + \mathrm{i}$, $3 - \mathrm{i}$ et 2.
À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$. Le point M' est appelé l'image de M.

1) Faire une figure sur une feuille de papier millimétré et compléter cette figure tout au long de l'exercice.

2) Calculer les affixes des points A' et B', images respectives des points A et B.
Que remarque-t-on ?

3) Déterminer les points qui ont pour image le point d'affixe -5.

4) **a)** Vérifier que pour tout nombre complexe z, on a : $z' + 4 = (z-2)^2$.

b) En déduire une relation entre $|z'+4|$ et $|z-2|$ et, lorsque z est différent de 2, une relation entre $\arg(z' + 4)$ et $\arg(z-2)$.

c) Que peut-on dire du point M' lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon 2 ?

5) Soient E le point d'affixe $2+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, J le point d'affixe -4 et E' l'image de E.

a) Calculer la distance IE et une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{IE}\right)$.

b) Calculer la distance JE' et une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{JE'}\right)$.

c) Construire à la règle et au compas le point E' ; on laissera apparents les traits de construction.

CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

Baccalauréat général Mathématiques série S

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

EXERCICE 1 (5 points)

	Consignes de correction	barème
1. a) Vérifier que F est une primitive de ln. $I = 1$.		
b) Intégration par parties.		
c) $J = \mathrm{e} - 2$.		
d) $A = 3 - \mathrm{e}$.		
2. *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.* La distance maximale est égale à $\frac{1}{4}$, elle est obtenue pour $x = \sqrt{\mathrm{e}}$.	Cette question permettra de valoriser les capacités des candidats à prendre des initiatives et à élaborer une démarche. Elle peut être abordée de plusieurs manières.	

EXERCICE 2 (5 points)

	Consignes de correction	barème
1. a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.	Aucune méthode ne sera privilégiée	
b) Démontrer que le plan (A B C) a pour équation $2x+y-z-3 = 0$.		
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D).	Une simple vérification sera prise en compte dans l'évaluation du candidat	
3. Le point de coordonnées (2, 3, 4) est le seul point de l'espace qui appartient aux trois plans.		
4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.* La distance demandée est égale à $\frac{\sqrt{34}}{2}$.	Toute définition convenable de la distance d'un point à une droite sera acceptée. Cette question permettra de valoriser le candidat qui s'engage dans une démarche de recherche.	

EXERCICE 3 (5 points)

	Consignes de correction	barème
Restitution organisée de connaissances 1. a) Démontrer que $R(t) = e^{-\lambda t}$.		
b) Démontrer que $P_{X>t}(X > t+s) = e^{-\lambda s}$.		
2. a) $p(X \leq 1000) = 1 - e^{-0,26} \approx 0{,}229$ et $p(X > 1000) = e^{-0,26} \approx 0{,}771$.		
b) La probabilité de l'événement (X>2000) sachant que l'événement X>1000 est réalisé est égale à $e^{-0,26}$.		
c) La probabilité cherchée est égale à $1 - e^{-0,26}$, ce qui correspond au résultat obtenu à la question 2 .a), ou à la propriété établie à la question 1 (loi de durée de vie sans vieillissement).		

EXERCICE 4 (5 points) ***pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité***

	Consignes de correction	barème
1. Figure complétée		
2. Les points A' et B' ont la même affixe -4-2i		
3. Les points d'affixe 2+i et 2-i.ont pour image le point d'affixe 5.		
4. a) Vérifier que $z'+4 = (z-2)^2$.		
b) On en déduit que $\lvert z'+4 \rvert = \lvert z-2 \rvert^2$ et $\arg(z'+4) = 2\arg(z-2)$ à 2π près.		
c) Le point M' décrit le cercle de centre Γ d'affixe -4 et de rayon 4.		
5. a) IE= 2 et une mesure de l'angle $(\vec{u};\overrightarrow{IE'})$ est égale à $\frac{\pi}{3}$.		
b) JE' = 4 et une mesure de l'angle $(\vec{u};\overrightarrow{JE'})$ est égale à $\frac{2\pi}{3}$.		
c) Construction à la règle et au compas le point E'.		

EXERCICE 4 (5 points) ***pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité***

	Consignes de correction	barème
1. Résolution dans ZxZ de l'équation $4x+3y = 1$.	On prendra en compte les réponses se limitant à une vérification.	
2. Une mesure de l'angle de la similitude est $\frac{\pi}{2}$ et son rapport est égal à $\frac{2}{3}$.		
3. Le point A est invariant . s est une similitude plane directe de centre A. Une mesure de l'angle de la similitude est $\frac{\pi}{2}$ et son rapport est égal à $\frac{2}{3}$		
4. a) $AB_{n+1} = \frac{2}{3} AB_n$.		
b) Le point B_n appartient au disque de centre A et rayon 10^{-2} à partir de $n = 17$		
c) A , B_1 et B_n sont alignés si et seulement si n est impair	Le barème tiendra compte des candidats qui donneraient seulement des valeurs particulières de *n*.	

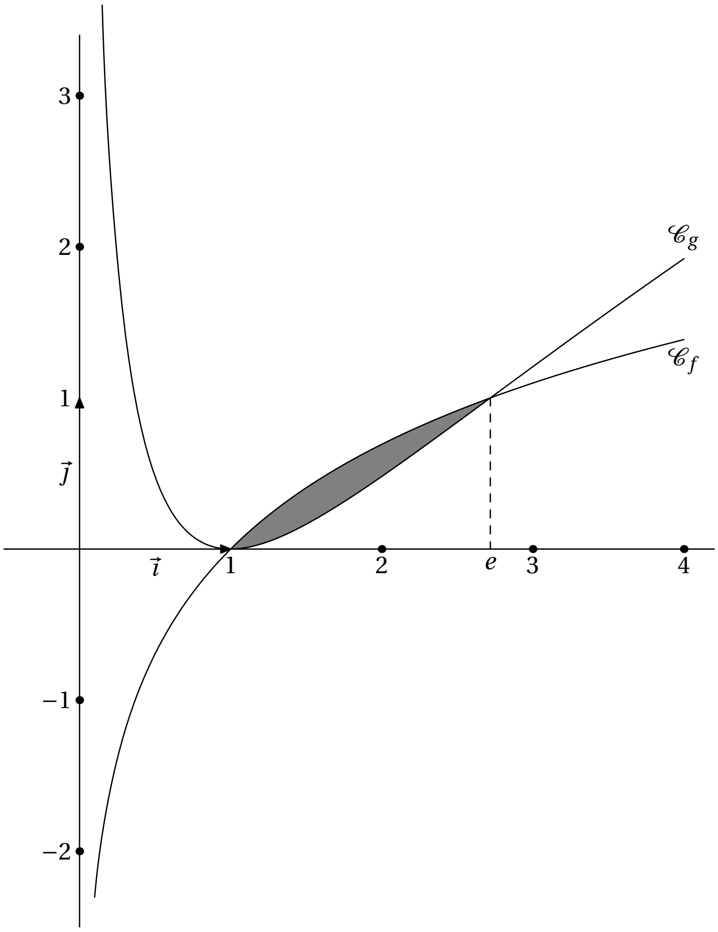
Baccalauréat S
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

19 juin 2008, 4 heures

Exercice 1 5 points

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x \quad \text{et} \quad g(x) = (\ln x)^2.$$



1. On cherche à déterminer l'aire $\mathscr{A}$ (en unités d'aire) de la partie du plan grisée.
   On note $\text{I} = \displaystyle\int_1^e \ln x\, dx$ et $\text{J} = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^2\, dx$.
   (a) Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par
   $\text{F}(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire I.
   (b) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $\text{J} = e - 2\text{I}$.
   (c) En déduire J.
   (d) Donner la valeur de $\mathscr{A}$.

2. *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n 'aboutit pas.*
   Pour x appartenant à l'intervalle $[1; e]$, on note M le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et N le point de la courbe $\mathscr{C}_g$ de même abscisse. Pour quelle valeur de x la distance MN est maximale ? Calculer la valeur maximale de MN.

Exercice 2 — 5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$, on considère les points

$$A(1 ; 1 ; 0), B(1 ; 2 ; 1) \text{ et } C(3 ; -1 ; 2).$$

1. (a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   (b) Démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x + y - z - 3 = 0$.
2. On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x + 2y - z - 4 = 0$ et $2x + 3y - 2z - 5 = 0$.
   Démontrer que l'intersection des plane (P) et (Q) est une droite $(\mathscr{D})$, dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2 + t \\ y & = & 3 \\ z & = & t \end{array}\right. \qquad (t \in \mathbb{R})$$

3. Quelle est l'intersection des trois plans (ABC), (P) et (Q) ?
4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer la distance du point A à la droite $(\mathscr{D})$.

Exercice 3 — 5 points

La durée de vie, exprimée en heures, d'un agenda électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où X est un réel strictement positif.
On rappelle que pour tout $t \geqslant 0$, $P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx$.
La fonction R définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $R(t) = P(X > t)$ est appelée fonction de fiabilité.

1. Restitution Organisée de Connaissances
   (a) Démontrer que pour tout $t \geqslant 0$ on a $R(t) = e^{-\lambda t}$.
   (b) Démontrer que la variable X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout réel $s \geqslant 0$, la probabilité conditionnelle $P_{X>t}(X > t + s)$ ne dépend pas du nombre $t \geqslant 0$.
2. Dans cette question, on prend $\lambda = 0,00026$.
   (a) Calculer $P(X \leqslant 1\,000)$ et $P(X > 1\,000)$.
   (b) Sachant que l'évènement $(X > 1\,000)$ est réalisé, calculer la probabilité de l'évènement $(X > 2\,000)$.
   (c) Sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2 000 heures, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3 000 heures ? Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Exercice 4 — 5 points

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique 1 cm).
Soient A, B et I les points d'affixes respectives $1 + i$, $3 - i$ et 2.
À tout point M d'affixe z, on associe le point M′ d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$. Le point M′ est appelé l'image de M.

1. Faire une figure sur une feuille de papier millimétré et compléter cette figure tout au long de l'exercice.
2. Calculer les affixes des pointsA′ et B′, images respectives des points A et B. Que remarque-t-on ?
3. Déterminer les points qui ont pour image le point d'affixe -5.
4. (a) Vérifier que pour tout nombre complexe z, on a : $z' + 4 = (z - 2)^2$.
   (b) En déduire une relation entre $|z' + 4|$ et $|z - 2|$ et, lorsque z est différent de 2, une relation entre $\arg(z' + 4)$ et $\arg(z - 2)$,

(c) Que peut-on dire du point M' lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon 2 ?

5. Soient E le point d'affixe $2 + 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, J le point d'affixe -4 et E' l'image de E.

   (a) Calculer la distance IE et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{u}\ ;\overrightarrow{\text{IE}}\right)$.

   (b) Calculer la distance JE' et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{u}\ ;\overrightarrow{\text{JE}'}\right)$.

   (c) Construire à la règle et au compas le point E' ; on laissera apparents les traits de construction.

Correction

Exercice 1 5 points

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x \quad \text{et} \quad g(x) = (\ln x)^2.$$

1. On cherche à déterminer l'aire $\mathscr{A}$ (en unités d'aire) de la partie du plan grisée.
   On note $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^e \ln x\, dx$ et $\mathrm{J} = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^2\, dx$.
   (a) $\mathrm{F}'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x$, donc F est une primitive de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle $[1; e]$.

$$\mathrm{I} = \int_0^e \ln x dx = [x\ln x - x]_0^e = 1$$

   (b) Intégration par parties :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(x) = (\ln x)^2 & ; & u'(x) = \dfrac{2}{x}\ln x \\ v'(x) = 1 & ; & v(x) = x \end{array}\right\} \text{donc } \mathrm{J} = \left[x(\ln x)^2\right]_0^e - 2\int_0^e \ln x dx = e - 2\mathrm{I}$$

   (c) $\mathrm{J} = e - 2\mathrm{I} = e - 2\displaystyle\int_0^e \ln x dx = e - 2\,[x\ln x - x]_0^e = e - 2.$
   (d) $\mathscr{A} = \left|\displaystyle\int_0^e \left|\ln x - (\ln x)^2\right| dx\right| = \displaystyle\int_0^e \left|\ln x - (\ln x)^2\right| dx = \int_0^e \left(\ln x - (\ln x)^2\right) dx = \mathrm{I} - \mathrm{J} = 1 - e + 2 = 3 - e \simeq 0,281.$
2. *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n 'aboutit pas.*
   Pour x appartenant à l'intervalle $[1; e]$, on note $\mathrm{M}(x; \ln x)$ et $\mathrm{N}(x; (\ln x)^2)$.

$$\mathrm{MN}(x) = \left|\ln x - (\ln x)^2\right| = \ln x - (\ln x)^2 \text{ car } (\ln x)^2 \leqslant \ln x \text{ sur } [1; e]$$

$$\mathrm{MN}'(x) = \frac{2}{x}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) \quad ; \quad \mathrm{MN}'(x) > 0 \text{ si } x < \sqrt{e}$$

x	1		$\sqrt{e}$		e
$\mathrm{MN}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathrm{MN}(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

   Ainsi, $\mathrm{MN}(x)$ possède un maximum pour $x = \sqrt{e}$. La valeur maximal est $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 2 5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$, on considère les points

$$\mathrm{A}(1\ ;\ 1\ ;\ 0), \mathrm{B}(1\ ;\ 2\ ;\ 1) \text{ et } \mathrm{C}(3\ ;\ -1\ ;\ 2).$$

1. (a) A, B et C ne sont pas alignés :

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{Les coordonnées ne sont pas proportionnelles.}$$

   $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ne sont donc pas colinéaires et A, B et C ne sont pas alignés ; ils déterminent ainsi un plan.

(b) Pour démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x+y-z-3=0$, il suffit de vérifier que les coordonnées des points A, B et C, non alignés, vérifient l'équation proposée :

$$\left\{\begin{array}{l} 2\times 1+1\times 1-1\times 0-3=0 \\ 2\times 1+1\times 2-1\times 1-3=0 \\ 2\times 3+1\times(-1)-1\times 2-3=0 \end{array}\right.$$

2. On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x+2y-z-4=0$ et $2x+3y-2z-5=0$.
Intersection des plane (P) et (Q) :

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y-z-4=0 \\ 2x+3y-2z-5=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x+2y=z+4 \\ 2x+3y=2z+5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2x+4y=2z+8 \\ 2x+3y=2z+5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x+2y=z+4 \\ y=3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=-2+z \\ y=3 \end{array}\right.$$

En posant $z=t$, on obtient une représentation paramétrique est la droite $(\mathscr{D})$, intersection des deux plans :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -2+t \\ y &=& 3 \\ z &=& t \end{array}\right. \qquad (t\in\mathbb{R})$$

3. $(\text{ABC})\cap((\text{P})\cap(\text{Q}))=(\text{ABC})\cap(\mathscr{D})$:

$$\text{M}(x;y;z)\in(\text{ABC})\cap(\mathscr{D}) \iff \left\{\begin{array}{l} 2x+y-z-3=0 \\ x=-2+t \\ y=3 \\ z=t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2(-2+t)+3-t-3=0 \\ x=-2+t \\ y=3 \\ z=t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} t=4 \\ x=2 \\ y=3 \\ z=4 \end{array}\right. \Longrightarrow \text{M}(2;3;4)$$

Distance du point A à la droite $(\mathscr{D})$:
Pour tout point M de la droite $(\mathscr{D})$, $\text{AM}^2=(-2+t-1)^2+(3-1)^2+(t-0)^2=2t^2-6t+13$.
$(2t^2-6t+13)'=4t-6$; le minimum de ce polynome du second degré (cœfficient de x^2 positif) est obtenu pour $t=\dfrac{3}{2}$.
Ainsi, la distance de A à la droite $(\mathscr{D})$ est :

$$d(\text{A},\mathscr{D})=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-3\right)^2+4+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{34}}{2}$$

Exercice 3 — 5 points

On rappelle que pour tout $t\geqslant 0$, $\text{P}(\text{X}\leqslant t)=\displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.
La fonction R définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $\text{R}(t)=\text{P}(\text{X}>t)$ est appelée fonction de fiabilité.

1. Restitution Organisée de Connaissances

(a) Pour tout $t\geqslant 0$ on a :

$$\text{R}(t)=\text{P}(\text{X}>t)=1-\text{P}(\text{X}\leqslant t)=1-\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx=1-\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t=e^{-\lambda t}$$

(b) La variable X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout réel $s\geqslant 0$, la probabilité conditionnelle $\text{P}_{\text{X}>t}(\text{X}>t+s)$ ne dépend pas du nombre $t\geqslant 0$:

$$\text{P}_{\text{X}>t}(\text{X}>t+s)=\frac{\text{P}((\text{X}>t+s)\cap(\text{X}>t))}{\text{P}(\text{X}>t)}=\frac{\text{P}(\text{X}>t+s)}{\text{P}(\text{X}>t)}=\frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}}=e^{-\lambda s}$$

2. Dans cette question, on prend $\lambda=0,00026$.

(a) $\text{P}(\text{X}\leqslant 1000)=1-\text{R}(1000)=1-e^{-0,00026\times 1000}=1-e^{-0,26}\simeq 1-0,77105=0,2289\simeq 0,229$
$\text{P}(\text{X}>1\ 000)=e^{-0,00026\times 1000}=e^{-0,26}\simeq 0,771.$

(b) Sachant que l'évènement (X > 1 000) est réalisé, calculer la probabilité de l'évènement (X > 2 000).

$$\begin{aligned}P_{X>1000}(X>2000) &= \frac{P((X>2000)\cap(X>1000))}{P(X>1000)} = \frac{P(X>2000)}{P(X>1000)}\\ &= \frac{e^{-0{,}00026\times 2000}}{e^{-0{,}00026\times 1000}} = e^{-0{,}00026\times(2000-1000)} = e^{-0{,}26} \simeq 0{,}771\end{aligned}$$

(c) Sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2 000 heures, la probabilité qu'il tombe en panne avant 3 000 heures est donné par :

$$\begin{aligned}P_{X>2000}(X\leqslant 3000) &= \frac{P((X>2000)\cap(X\leqslant 3000))}{P(X>2000)} = \frac{1-P(X<2000)-P(X\geqslant 3000)}{P(X>2000)}\\ &= \frac{1-\displaystyle\int_0^{2000}\lambda e^{-\lambda x}\,dx - e^{-3000\lambda}}{P(X>2000)} = \frac{1-1+e^{-2000\lambda}-e^{-3000\lambda}}{e^{-2000\lambda}} = 1-e^{-1000\lambda}\\ &= 1-e^{-0{,}26} = 1-0{,}771 = 0{,}229\end{aligned}$$

On aurait pu prévoir ce résultat d'après la question **1. b**. En effet,

$$P_{X>2000}(X\leqslant 3000) = 1-P_{X>2000}(X>3000) = 1-e^{-0{,}00026\times(3000-2000)} = 1-e^{-0{,}26} \simeq 1-0{,}771 = 0{,}229$$

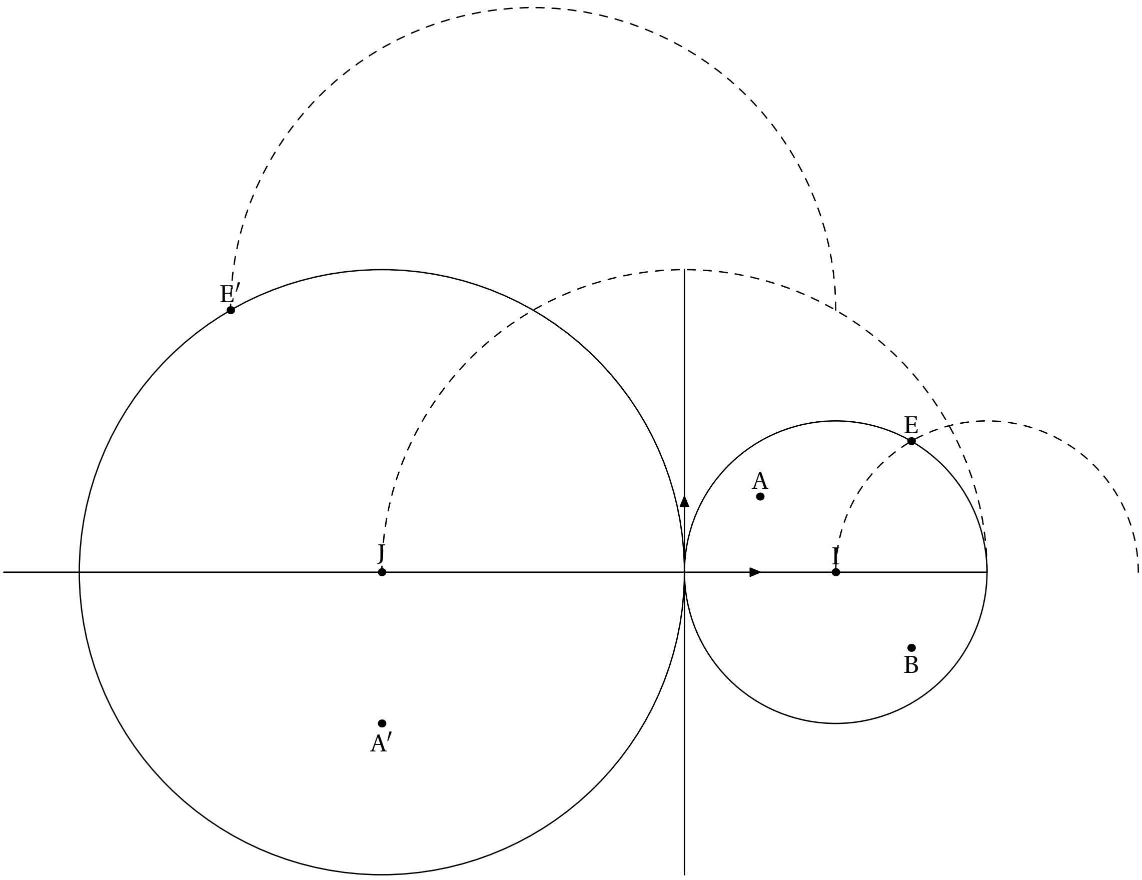
Exercice 4 — 5 points

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

Soient A, B et I les points d'affixes respectives $1+i$, $3-i$ et 2.

À tout point M d'affixe z, on associe le point M′ d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$. Le point M′ est appelé l'image de M.

1. Figure :



2. Affixes des pointsA′ et B′, images respectives des points A et B :

$$a' = (1+i)^2 - 4(1+i) = -4-2i \quad ; \quad b' = (3-i)^2 - 4(3-i) = -4-2i$$

On remarque que A′ = B′.

3. Points qui ont pour image le point d'affixe -5 :
Dire que M a pour image le point d'affixe -5 signifie que : $z^2 - 4z = -5 \iff z^2 - 4z + 5 = 0$.
C'est une équation du second degré. $\Delta = 16 - 20 = (2i)^2$.
D'où les solutions sont $z_1 = \dfrac{4+2i}{2} = 2 + i$ et $z_2 = \dfrac{4-2i}{2} = 2 - i$.

4. (a) Pour tout nombre complexe z, on a : $z' + 4 = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2$.

   (b) Ainsi :
   $\left|z'+4\right| = |z-2|^2$ et, lorsque z est différent de 2, $\arg\left(z'+4\right) = 2\arg(z-2)$.

   (c) Dire que M décrit le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon 2 signifie que $|z-2| = 2$.
   Donc $\left|z'+4\right| = |z-2|^2 = 4$, ce qui signifie que M$'$ appartient au cercle de centre le point I$'$ d'affixe -4 et de rayon 4.

5. E le point d'affixe $2 + 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2 + 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 3 + i\sqrt{3}$
Affixe de E$'$: $e' = \left(3 + i\sqrt{3}\right)^2 - 4\left(3 + i\sqrt{3}\right) = -6 + 2i\sqrt{3}$

   (a) Distance IE : $\text{IE} = |e-2| = \left|2 + 2e^{i\frac{\pi}{3}} - 2\right| = \left|2e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 2 \times \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 2$;
   Mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\text{IE}}\right)$: $\arg(e-2) = \arg\left(2 + 2e^{i\frac{\pi}{3}} - 2\right) = \arg\left(2 \times \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

   (b) Distance JE$'$: $\text{JE}' = \left|-6 + 2i\sqrt{3} + 4\right| = \left|-2 + 2i\sqrt{3}\right| = 4 \times \left|-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| = 4$;
   Mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\text{JE}'}\right)$: $\arg\left(4\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \dfrac{2\pi}{3}$.
   ou plus simplement :
   $$\text{JE}' = \left|e'+4\right| = |e-2|^2 = 2^2 = 4 \quad \text{et} \quad \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\text{JE}'}\right) = \arg(e'+4) = 2 \times \arg(e-2) = 2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

   (c) Construction : le point E est sur le cercle de centre I et de rayon 2 ; son image E$'$ est donc sur le cercle de centre J et de rayon 4.

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2008

MATHÉMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

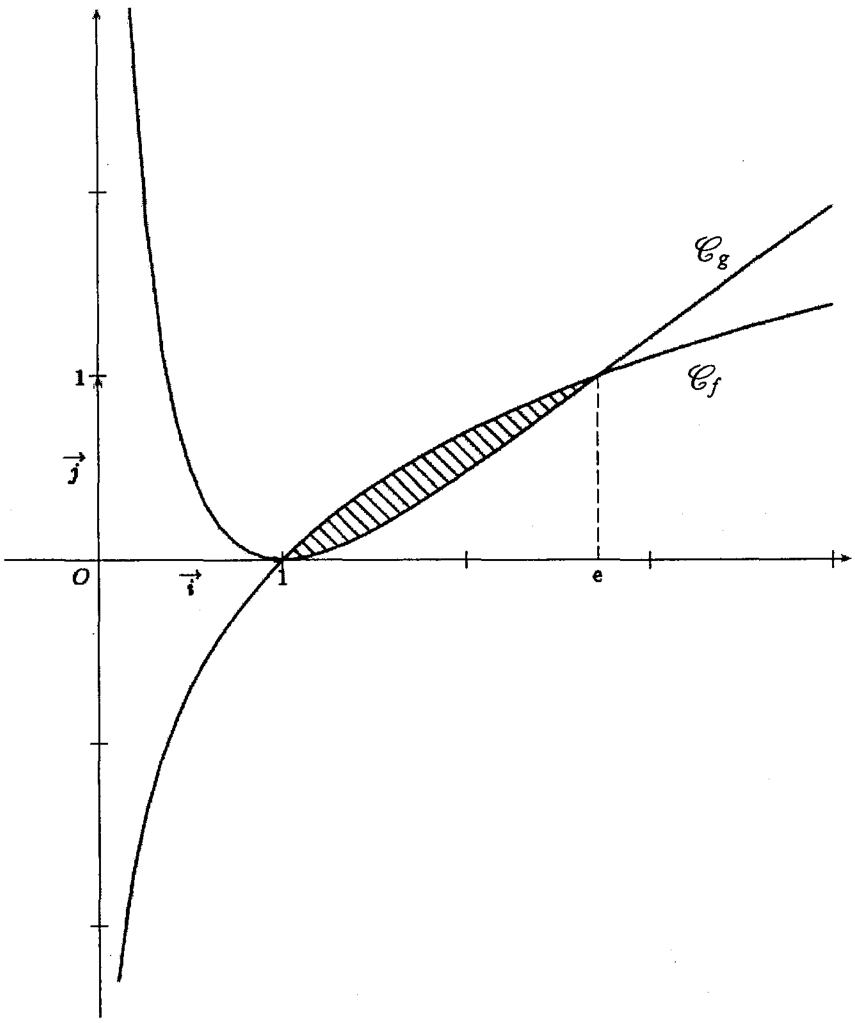
Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\ln x$ et $g(x)=(\ln x)^2$.



1) On cherche à déterminer l'aire A (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée.

On note $I=\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x$ et $J=\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$.

a) Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $F(x)=x\ln x-x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire I.

b) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J=\mathrm{e}-2I$.

c) En déduire J.

d) Donner la valeur de A.

2) *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*

Pour x appartenant à l'intervalle [1 ; e], on note M le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et N le point de la courbe $\mathscr{C}_g$ de même abscisse.
Pour quelle valeur de x la distance MN est maximale ? Calculer la valeur maximale de MN.

EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points
$A(1, 1, 0)$, $B(1, 2, 1)$ et $C(3, -1, 2)$.

1) a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x + y - z - 3 = 0$.

2) On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x + 2y - z - 4 = 0$ et $2x + 3y - 2z - 5 = 0$.

Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est une droite ($\mathscr{D}$), dont une représentation paramétrique

est : $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$

3) Quelle est l'intersection des trois plans (ABC), (P) et (Q) ?

4) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Déterminer la distance du point A à la droite ($\mathscr{D}$).

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

La durée de vie, exprimée en heures, d'un agenda électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif.
On rappelle que pour tout $t \geqslant 0$, $P(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.
La fonction R définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $R(t) = P(X > t)$ est appelée fonction de fiabilité.

1) *Restitution organisée de connaissances*

a) Démontrer que pour tout $t \geqslant 0$ on a $R(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

b) Démontrer que la variable X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout réel $s \geqslant 0$, la probabilité conditionnelle $P_{X>t}(X > t + s)$ ne dépend pas du nombre $t \geqslant 0$.

2) Dans cette question, on prend $\lambda = 0{,}00026$.

a) Calculer $P(X \leqslant 1000)$ et $P(X > 1000)$.

b) Sachant que l'événement ($X > 1000$) est réalisé, calculer la probabilité de l'événement ($X > 2000$).

c) Sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2000 heures, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3000 heures ? Pouvait-on prévoir ce résultat ?

EXERCICE 4 **(5 points)**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1 - \mathrm{i}$ et $z_B = 7 + \frac{7}{2}\mathrm{i}$.

1) On considère la droite (d) d'équation $4x + 3y = 1$.
Démontrer que l'ensemble des points de (d) dont les coordonnées sont entières est l'ensemble des points $M_k(3k+1, -4k-1)$ lorsque k décrit l'ensemble des entiers relatifs.

2) Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe de centre A qui transforme B en $M_{-1}(-2, 3)$.

3) Soit s la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{2}{3}\mathrm{i}\,z + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}\mathrm{i}$.

Déterminer l'image de A par s, puis donner la nature et les éléments caractéristiques de s.

4) On note B_1 l'image de B par s et pour tout entier naturel n non nul, B_{n+1} l'image de B_n par s.

a) Déterminer la longueur AB_{n+1} en fonction de AB_n.

b) À partir de quel entier n le point B_n appartient t-il au disque de centre A et de rayon 10^{-2} ?

c) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels A, B_1 et B_n sont alignés.

CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

Baccalauréat général Mathématiques série S

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des membres des jurys. La règle de confidentialité relative aux commissions d'entente et aux travaux des jurys s'applique à son contenu.

EXERCICE 1 (5 points)

	Consignes de correction	barème
1. a) Vérifier que F est une primitive de ln. $I = 1$.		
b) Intégration par parties.		
c) $J = \mathrm{e} - 2$.		
d) $A = 3 - \mathrm{e}$.		
2. *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.* La distance maximale est égale à $\frac{1}{4}$, elle est obtenue pour $x = \sqrt{\mathrm{e}}$.	Cette question permettra de valoriser les capacités des candidats à prendre des initiatives et à élaborer une démarche. Elle peut être abordée de plusieurs manières.	

EXERCICE 2 (5 points)

	Consignes de correction	barème
1. a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.	Aucune méthode ne sera privilégiée	
b) Démontrer que le plan (A B C) a pour équation $2x+y-z-3 = 0$.		
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D).	Une simple vérification sera prise en compte dans l'évaluation du candidat	
3. Le point de coordonnées (2, 3, 4) est le seul point de l'espace qui appartient aux trois plans.		
4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.* La distance demandée est égale à $\frac{\sqrt{34}}{2}$.	Toute définition convenable de la distance d'un point à une droite sera acceptée. Cette question permettra de valoriser le candidat qui s'engage dans une démarche de recherche.	

EXERCICE 3 (5 points)

	Consignes de correction	barème
Restitution organisée de connaissances 1. a) Démontrer que $R(t) = e^{-\lambda t}$.		
b) Démontrer que $P_{X>t}(X > t+s) = e^{-\lambda s}$.		
2. a) $p(X \leq 1000) = 1 - e^{-0,26} \approx 0{,}229$ et $p(X > 1000) = e^{-0,26} \approx 0{,}771$.		
b) La probabilité de l'événement (X>2000) sachant que l'événement X>1000 est réalisé est égale à $e^{-0,26}$.		
c) La probabilité cherchée est égale à $1 - e^{-0,26}$, ce qui correspond au résultat obtenu à la question 2 .a), ou à la propriété établie à la question 1 (loi de durée de vie sans vieillissement).		

EXERCICE 4 (5 points) ***pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité***

	Consignes de correction	barème
1. Figure complétée		
2. Les points *A'et B'* ont la même affixe -4-2i		
3. Les points d'affixe 2+i et 2-i.ont pour image le point d'affixe 5.		
4. a) Vérifier que $z'+4 = (z-2)^2$.		
b) On en déduit que $\|z'+4\| = \|z-2\|^2$ et $\arg(z'+4) = 2\arg(z-2)$ à 2π près.		
c) Le point M' décrit le cercle de centre Γ d'affixe -4 et de rayon 4.		
5. a) IE= 2 et une mesure de l'angle $(\vec{u};\overrightarrow{IE'})$ est égale à $\frac{\pi}{3}$.		
b) JE' = 4 et une mesure de l'angle $(\vec{u};\overrightarrow{JE'})$ est égale à $\frac{2\pi}{3}$.		
c) Construction à la règle et au compas le point E'.		

EXERCICE 4 (5 points) ***pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité***

	Consignes de correction	barème
1. Résolution dans ZxZ de l'équation $4x+3y = 1$.	On prendra en compte les réponses se limitant à une vérification.	
2. Une mesure de l'angle de la similitude est $\frac{\pi}{2}$ et son rapport est égal à $\frac{2}{3}$.		
3. Le point A est invariant . s est une similitude plane directe de centre A. Une mesure de l'angle de la similitude est $\frac{\pi}{2}$ et son rapport est égal à $\frac{2}{3}$		
4. a) $AB_{n+1} = \frac{2}{3} AB_n$.		
b) Le point B_n appartient au disque de centre A et rayon 10^{-2} à partir de $n = 17$		
c) A , B_1 et B_n sont alignés si et seulement si n est impair	Le barème tiendra compte des candidats qui donneraient seulement des valeurs particulières de n.	

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2008

SUJET SORTI

MATHÉMATIQUES

Série : ES

OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures.

Coefficient : 5

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats. (1 feuille)

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le sujet est composé de TROIS exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (6 points)

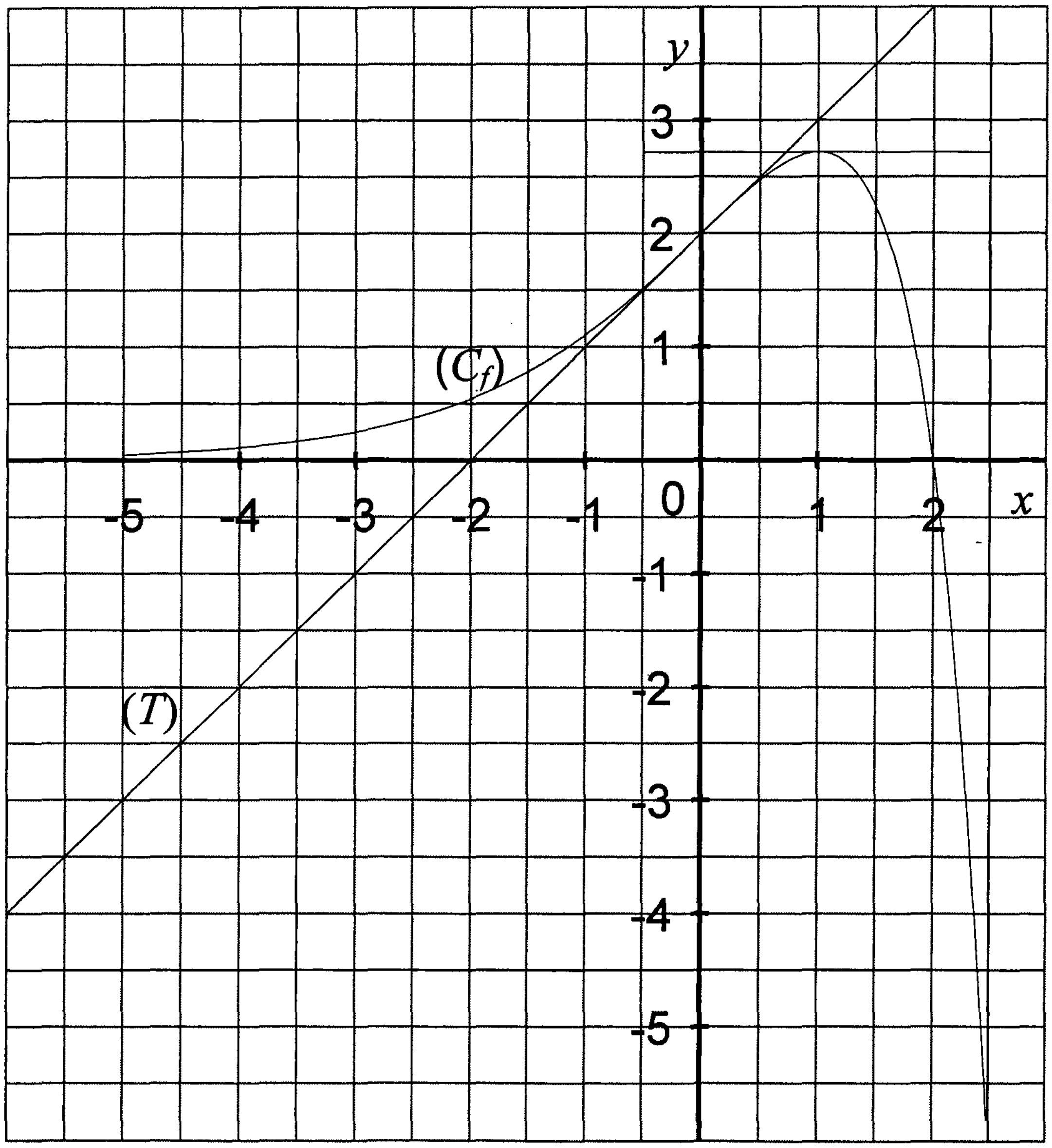
(Commun à tous les candidats)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, trois réponses sont proposées. Une seule de ces réponses est exacte.

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-5\ ;\ \frac{5}{2}]$.

Le plan est muni d'un repère orthonormal.

- La courbe (C_f) représentée ci-dessous est celle de la fonction f.
- Les points A (0 ; 2), B (1 ; e) et C (2 ; 0) appartiennent à la courbe (C_f).
- Le point de la courbe (C_f) d'abscisse (–5) a une ordonnée strictement positive.
- La tangente (T) en A à la courbe (C_f) passe par le point D (–2 ; 0).
- La tangente en B à la courbe (C_f) est parallèle à l'axe des abscisses.



Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Partie A : *aucune justification n'est demandée.*

Une réponse exacte rapporte 0,5 point.
Une réponse fausse enlève 0,25 point.
L'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Si le total des points de la partie A est négatif, la note attribuée à cette partie est ramenée à zéro.

1. On note $f'(0)$ le nombre dérivé de la fonction f en 0. Quelle est sa valeur ?

a. $f'(0)=1$ **b.** $f'(0)=2$ **c.** $f'(0)=0$

On note ln la fonction logarithme népérien et g la fonction composée $\ln(f)$.

2. Quel est l'ensemble de définition de la fonction g, noté D_g ?

a. $]0\,;\frac{5}{2}[$ **b.** $[-5\,;2]$ **c.** $[-5\,;2[$

3. Quelle est la valeur de $g(0)$?

a. $g(0)=2$ **b.** $g(0)=0$ **c.** $g(0)=\ln(2)$

4. On note g' la fonction dérivée de la fonction g. Quelle est la valeur de $g'(1)$?

a. $g'(1)=e$ **b.** $g'(1)=0$ **c.** $g'(1)=-\frac{1}{e^2}$

5. Quelle est la limite de $g(x)$ quand x tend vers 2 ?

a. $\lim_{x\to 2} g(x)=-\infty$ **b.** $\lim_{x\to 2} g(x)=0$ **c.** $\lim_{x\to 2} g(x)=+\infty$

Partie B : *chaque réponse doit être justifiée.*

Dans cette partie, toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

1. A quel intervalle appartient le réel $I=\int_0^2 f(x)dx$?

a. $[0\,;3]$ **b.** $[3\,;6]$ **c.** $[6\,;9]$

2. Parmi les trois courbes jointes en annexe, l'une est la représentation graphique de la fonction dérivée f' de la fonction f. Laquelle ?

a. La courbe (C_1) **b.** La courbe (C_2) **c.** La courbe (C_3)

3. Parmi les trois courbes jointes en annexe, l'une est la représentation graphique d'une primitive F de la fonction f, F étant définie sur l'intervalle $[-5,\frac{5}{2}]$. Laquelle ?

a. La courbe (C_1) **b.** La courbe (C_2) **c.** La courbe (C_3)

<u>Exercice 2</u> (5 points)
(Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le parc informatique d'un lycée est composé de 200 ordinateurs dont:
- 30 sont considérés comme neufs ;
- 90 sont considérés comme récents ;
- les autres sont considérés comme anciens.

Une étude statistique indique que :
- 5 % des ordinateurs neufs sont défaillants ;
- 10 % des ordinateurs récents sont défaillants ;
- 20 % des ordinateurs anciens sont défaillants.

On choisit au hasard un ordinateur de ce parc.

On note les évènements suivants :
N : « L'ordinateur est neuf » ;
R : « L'ordinateur est récent » ;
A : « L'ordinateur est ancien » ;
D : « L'ordinateur est défaillant » ;
$\overline{D}$: l'événement contraire de D.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

2. Calculer la probabilité que l'ordinateur choisi soit neuf et défaillant.

3. Démontrer que la probabilité que l'ordinateur choisi soit défaillant est égale à 0,1325.

4. Déterminer la probabilité que l'ordinateur soit ancien sachant qu'il est défaillant. Donner le résultat sous forme décimale arrondie au centième.

5. Pour équiper le centre de ressources de l'établissement, on choisit au hasard 3 ordinateurs dans le parc. On admet que le parc est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ces choix à des tirages successifs indépendants avec remise.
Déterminer la probabilité qu'exactement un des ordinateurs choisis soit défaillant. Donner le résultat sous forme décimale arrondie au centième.

Exercice 3 (9 points)
(Commun à tous les candidats)

On se propose d'étudier l'évolution des ventes d'un modèle de voiture de gamme moyenne depuis sa création en 1999.

Les parties I et II peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie I

Le tableau suivant donne le nombre annuel, exprimé en milliers, de véhicules vendus les cinq premières années de commercialisation :

Année	1999	2000	2001	2002	2003
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4
Nombre annuel de véhicules vendus en milliers : y_i	81,3	92,3	109,7	128,5	131,2

1. Dans le plan (P) muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 1cm pour une année sur l'axe des abscisses et 1cm pour 10 milliers de véhicules vendus sur l'axe des ordonnées, représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ pour i entier variant de 0 à 4.

2. L'allure du nuage de points permet d'envisager un ajustement affine.

a. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage.

b. Déterminer l'équation $y = ax + b$ de la droite (D) d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

c. Placer le point G et tracer la droite (D) sur le graphique précédent.

d. En utilisant l'ajustement affine du **b**, donner une estimation du nombre de véhicules vendus en 2007.

3. Le tableau suivant donne le nombre annuel de véhicules vendus, exprimé en milliers, de 2003 à 2007 :

Année	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année : x_i	4	5	6	7	8
Nombre annuel de véhicules vendus en milliers : y_i	131,2	110,8	101,4	86,3	76,1

a. Compléter le nuage de points précédent à l'aide de ces valeurs.

b. L'ajustement précédent est-il encore adapté ? Justifier la réponse.

c. On décide d'ajuster le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$, pour i entier variant de 4 à 8, par une courbe qui admet une équation de la forme $y = e^{cx+d}$.
Déterminer les réels c et d pour que cette courbe passe par les points A (4 ; 131,2) et B (8 ; 76,1).
On donnera la valeur exacte, puis l'arrondi au millième de chacun de ces nombres réels.

Partie II

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[4 ; 10]$ par : $f(x) = e^{-0,136x+5,421}$.
On suppose que f modélise en milliers l'évolution du nombre annuel de véhicules vendus à partir de l'année 2003.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[4 ; 10]$.

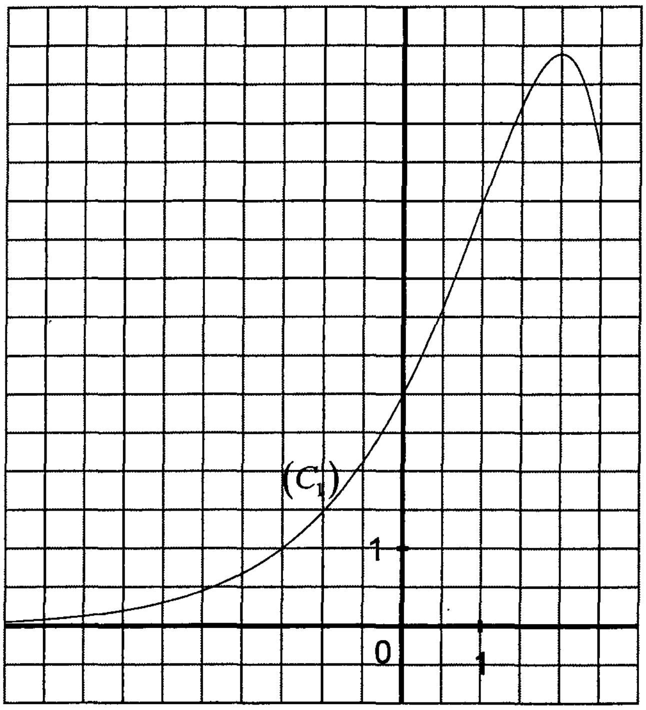
2. Tracer la courbe (C) représentative de la fonction f dans le même repère que le nuage de points.

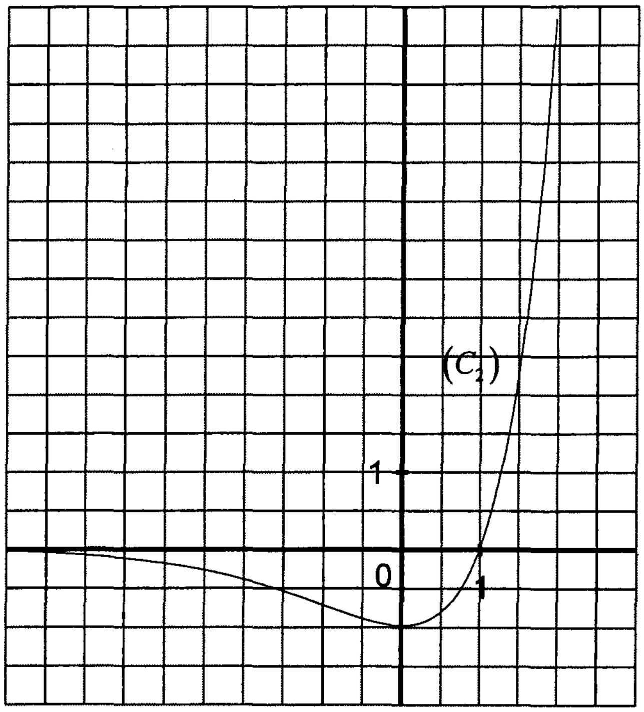
3. L'entreprise décide d'arrêter la fabrication du modèle l'année où le nombre annuel de véhicules vendus devient inférieur à 65 000.

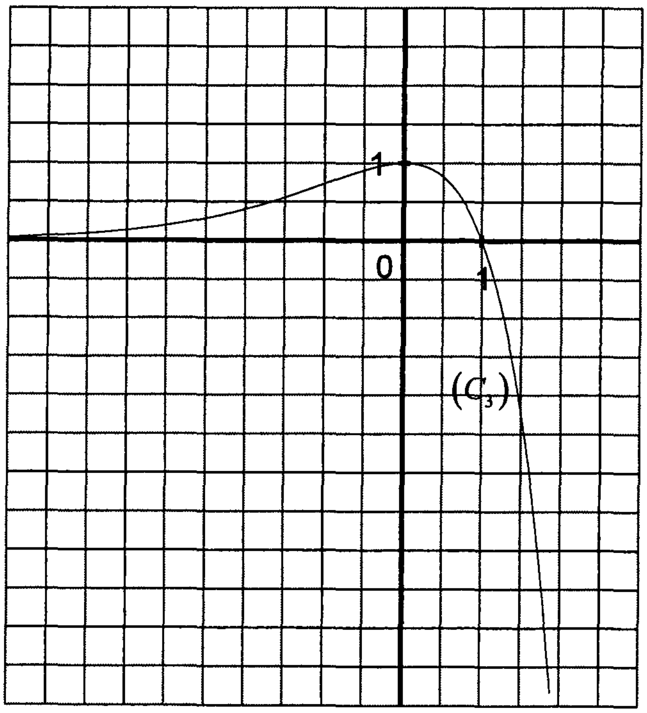
a. Résoudre algébriquement dans l'intervalle $[4 ; 10]$ l'inéquation $f(x) \leq 65$.
En quelle année l'entreprise doit-elle prévoir cet arrêt ?

b. Retrouver graphiquement le résultat précédent en laissant apparents les traits de construction nécessaires.

Annexe
Exercice 1, partie B







CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

	BACCALAURÉAT GÉNÉRAL	
Série	**ES**	**SESSION 2008**
Épreuve	**MATHÉMATIQUES**	**Durée : 3h**
Coef : **5 (obligatoire)** **7 (Spécialité)**	**RECOMMANDATIONS DE CORRECTION**	

L'évaluation au baccalauréat a pour but de vérifier l'acquisition non seulement de connaissances mais aussi d'un certain nombre de compétences :

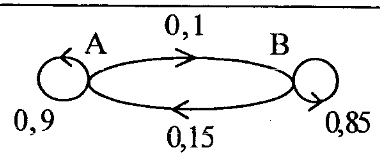
Les compétences de base :	**Les compétences évoluées :**
C1 : Mobiliser et restituer des connaissances.	C3 : Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter.
C2 : Appliquer des méthodes.	C4 : Raisonner, démontrer, élaborer une démarche.
	C5 : Evaluer, critiquer un résultat, vérifier la validité d'un résultat ou d'une méthode
	C6 : Montrer une certaine autonomie dans le traitement de l'information

Exercice I commun 6 points

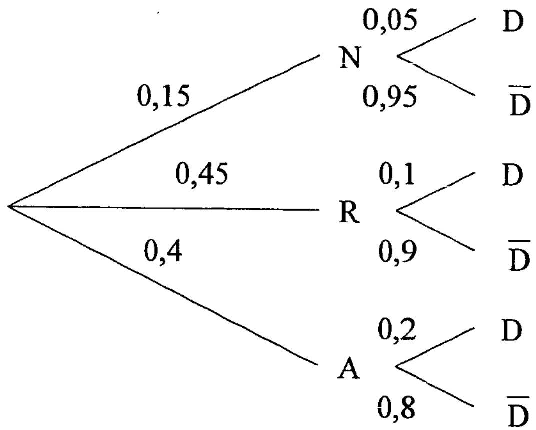
<table>
<tr><th>Question</th><th>Réponse</th><th>Compétences</th><th>Commentaires</th><th>Points</th></tr>
<tr><td>A1
A2
A3
A4
A5</td><td>Réponse a
Réponse c
Réponse c
Réponse b
Réponse a</td><td>C5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B1</td><td>Réponse b : I est l'aire en unités d'aire du domaine D plan défini par $0 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq f(x)$.
On peut encadrer I par l'aire obtenue « en comptant les carreaux » de deux polygones.
On peut obtenir $3{,}875 \leq I \leq 5$.</td><td>C3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B2</td><td>Réponse c
<table>
<tr><td>x</td><td>-5</td><td></td><td>1</td><td></td><td>2,5</td></tr>
<tr><td>Variation de f</td><td></td><td>↗</td><td></td><td>↘</td><td></td></tr>
<tr><td>Signe de f '(x)</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td></td></tr>
</table></td><td>C5 C6</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B3</td><td>Réponse a

F ' = f
<table>
<tr><td>x</td><td>-5</td><td></td><td>2</td><td></td><td>2,5</td></tr>
<tr><td>Signe de f (x)</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td></td></tr>
<tr><td>Variation de F</td><td></td><td>↗</td><td></td><td>↘</td><td></td></tr>
</table></td><td>C5 C6</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Exercice II pour les candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité 5 points

Question	*Réponse*	*Compétences*	*Commentaires*	*Points*
1	$P_0 = [0{,}2 \quad 0{,}8]$	C6		
2		C2		
3a	$M = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}85 \end{bmatrix}$	C2		
3b	$a_1 = 0{,}9\ a_0 + 0{,}15\ b_0$ $b_1 = 0{,}1\ a_0 + 0{,}85\ b_0$ $P_1 = [0{,}3 \quad 0{,}7]$	C2		
4a	Par théorème, pour tout entier naturel n, $P_n = P_0 \times M^n$	C1		
4b	$P_3 = P_0 \times M^3$ Donc $P_3 = [0{,}43125 \qquad 0{,}56875]$ On peut estimer qu'au bout de la 3$^{\text{ème}}$ semaine de campagne, plus de 43 % de la population sera favorable au parfum Aurore.	C2 C5		
5	P l'état stable du système vérifie $P = P \times M$ et $P = [a \quad 1\text{-}a]$. Soit à résoudre l'équation $0{,}9\ a + 0{,}15\ (1 - a) = a$. $a = 0{,}6$ et $b = 0{,}4$. Par théorème, $a = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$. On peut estimer qu'à terme 60 % de la population sera favorable au parfum Aurore.	C1 C2 C5		

Exercice II pour les candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité 5 points

Question	*Réponse*	*Compétences*	*Commentaires*	*Points*
1		C6		
2	$p(N \cap D) = p(N) \times p_N(D)$ $p(N \cap D) = 0,15 \times 0,05$ $p(N \cap D) = 0,0075$.	C1		
3	{N ; R ; A} est une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales, $p(D) = p(N \cap D) + p(R \cap D) + p(A \cap D)$ $p(D) = 0,0075 + 0,45 \times 0,1 + 0,4 \times 0,2$ $p(D) = 0,1325$.	C4		
4	$p_D(A) = \dfrac{p(A \cap D)}{p(D)}$ $\quad p_D(A) = \dfrac{0,08}{0,1325}$ $\quad p_D(A) = \dfrac{32}{53}$ $p_D(A) \approx 0,60$.	C1		
5	Il y a 3 possibilités qu'un ordinateur exactement sur les 3 soit défaillant. La probabilité demandée est $p = 3 \times p(D) \times p(\overline{D})^2$. Soit $p = 3 \times 0,1325 \times 0,8675^2$ d'où $p \approx 0,30$.	C4		

Exercice III commun 9 points

Question	*Réponse*	*Compétences*	*Commentaires*	*Points*
I 1	Cf.figure	C1		
I 2a	G ($\overline{x};\overline{y}$) G(2 ; 108,6)	C1		
I 2b	y = 13,6 x + 81,4	C2		
I 2c	Cf.figure	C2		
I 2d	Le rang de l'année 2007 est 8. Pour x = 8, y = 190,2. Selon ce modèle, on peut estimer que le nombre de véhicules vendus en 2007 sera 190200.	C5		
I 3a	Cf.figure	C1		
I 3b	L'ajustement précédent n'est plus adapté car la fonction affine $x \mapsto 13,6\,x + 81,4$ est croissante et les valeurs y_i, $4 \leq x \leq 10$, sont dans l'ordre décroissantes.	C5		
I 3c	Le couple (c ; d) est solution du système (S) $\begin{cases} 131,2 = e^{4c+d} \\ 76,1 = e^{8c+d} \end{cases}$ (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} 4c + d = \ln(131,2) \\ 8c + d = \ln(76,1) \end{cases}$ (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} c = \dfrac{\ln(76,1) - \ln(131,2)}{4} \\ d = 2\ln(131,2) - \ln(76,1) \end{cases}$ $c \approx -0,136$ et $d \approx 5,421$.	C4	Toute initiative ou démarche cohérente sera valorisée.	

II 1	Soit x un réel de [4 ; 10], $f'(x) = -0{,}136\, e^{-0{,}136x+5{,}421}$ La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives. Par produit $f'(x) < 0$. La fonction f est donc strictement décroissante sur [4 ; 10].	C2		

II 2	Cf.figure	C2		
II 3a	$e^{-0{,}136x+5{,}421} \leq 65$ $-0{,}136\,x + 5{,}421 \leq \ln 65$ $0{,}136\,x \geq 5{,}421 - \ln 65$ $x \geq \dfrac{5{,}421-\ln 65}{0{,}136}$ Comme $\dfrac{5{,}421-\ln 65}{0{,}136} \approx 9{,}2$, c'est au cours de l'année 2009 qu'on peut prévoir l'arrêt de la fabrication.	C2 C5		
II 3b	Cf.figure	C5		

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2008

SUJET SORTI

MATHÉMATIQUES

SPECIALITE

Série : ES

Durée de l'épreuve : 3 heures.

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats. (1 feuille)

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le sujet est composé de TROIS exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

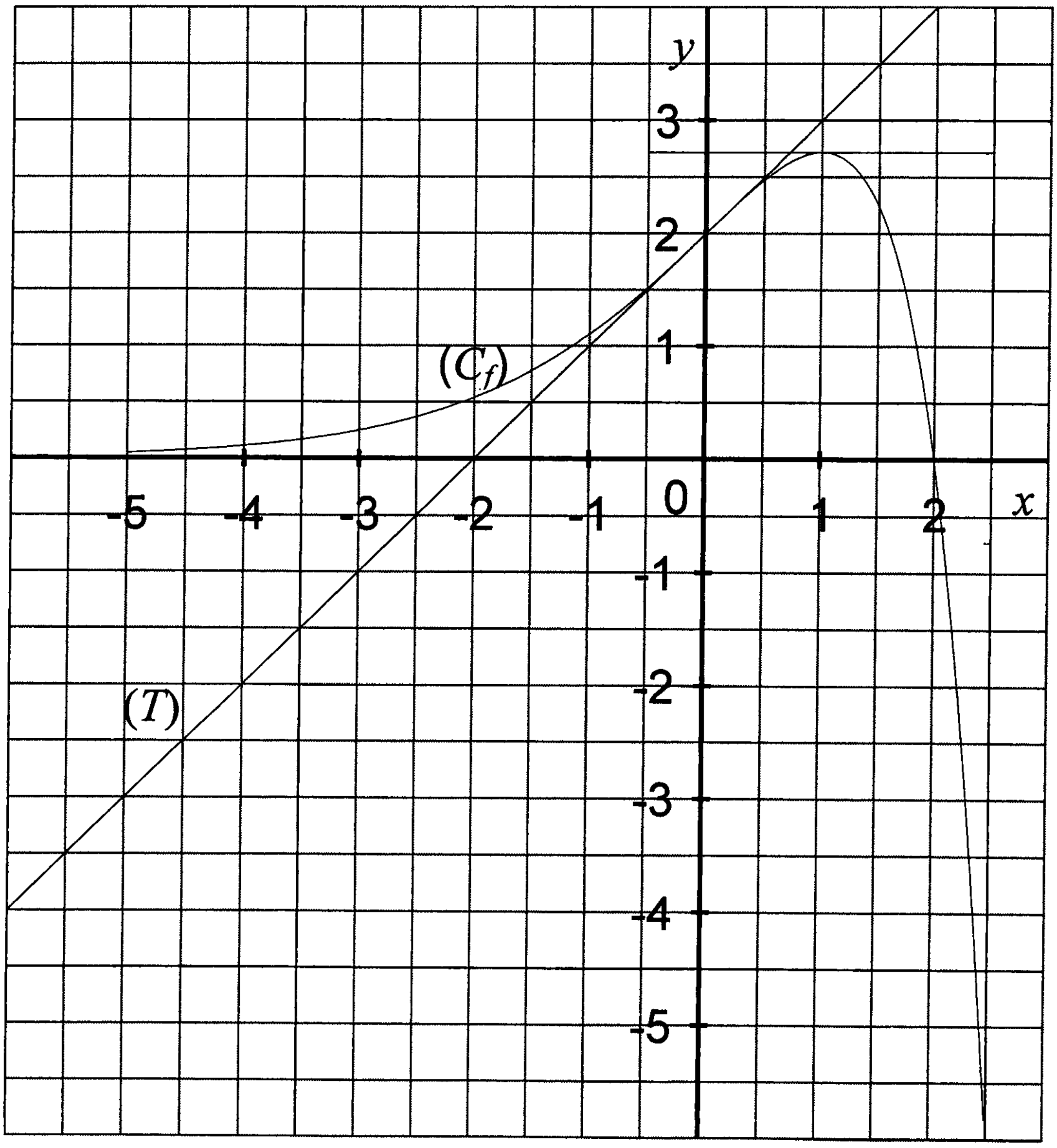
Exercice 1 **(6 points)**
(Commun à tous les candidats)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, trois réponses sont proposées. Une seule de ces réponses est exacte.

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-5 \; ; \; \frac{5}{2}]$.

Le plan est muni d'un repère orthonormal.

- La courbe (C_f) représentée ci-dessous est celle de la fonction f.
- Les points A (0 ; 2), B (1 ; e) et C (2 ; 0) appartiennent à la courbe (C_f).
- Le point de la courbe (C_f) d'abscisse (–5) a une ordonnée strictement positive.
- La tangente (T) en A à la courbe (C_f) passe par le point D (–2 ; 0).
- La tangente en B à la courbe (C_f) est parallèle à l'axe des abscisses.



Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Partie A : *aucune justification n'est demandée.*

Une réponse exacte rapporte 0,5 point.
Une réponse fausse enlève 0,25 point.
L'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Si le total des points de la partie A est négatif, la note attribuée à cette partie est ramenée à zéro.

1. On note $f'(0)$ le nombre dérivé de la fonction f en 0. Quelle est sa valeur ?

a. $f'(0)=1$ **b.** $f'(0)=2$ **c.** $f'(0)=0$

On note ln la fonction logarithme népérien et g la fonction composée $\ln(f)$.

2. Quel est l'ensemble de définition de la fonction g, noté D_g ?

a. $]0\,;\,\frac{5}{2}[$ **b.** $[-5\,;\,2]$ **c.** $[-5\,;\,2[$

3. Quelle est la valeur de $g(0)$?

a. $g(0)=2$ **b.** $g(0)=0$ **c.** $g(0)=\ln(2)$

4. On note g' la fonction dérivée de la fonction g. Quelle est la valeur de $g'(1)$?

a. $g'(1)=e$ **b.** $g'(1)=0$ **c.** $g'(1)=-\frac{1}{e^2}$

5. Quelle est la limite de $g(x)$ quand x tend vers 2 ?

a. $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=-\infty$ **b.** $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=0$ **c.** $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=+\infty$

Partie B : *chaque réponse doit être justifiée.*

Dans cette partie, toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

1. A quel intervalle appartient le réel $I=\int_0^2 f(x)\,dx$?

a. $[0\,;\,3]$ **b.** $[3\,;\,6]$ **c.** $[6\,;\,9]$

2. Parmi les trois courbes jointes en annexe, l'une est la représentation graphique de la fonction dérivée f' de la fonction f. Laquelle ?

a. La courbe (C_1) **b.** La courbe (C_2) **c.** La courbe (C_3)

3. Parmi les trois courbes jointes en annexe, l'une est la représentation graphique d'une primitive F de la fonction f, F étant définie sur l'intervalle $[-5,\frac{5}{2}]$. Laquelle ?

a. La courbe (C_1) **b.** La courbe (C_2) **c.** La courbe (C_3)

Exercice 2 (5 points)
(Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Deux fabricants de parfum lancent simultanément leur nouveau produit qu'ils nomment respectivement Aurore et Boréale.
Afin de promouvoir celui-ci, chacun organise une campagne de publicité.
L'un d'eux contrôle l'efficacité de sa campagne par des sondages hebdomadaires.
Chaque semaine, il interroge les mêmes personnes qui toutes se prononcent en faveur de l'un de ces deux produits.

Au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Aurore et les autres préfèrent Boréale.
Les arguments publicitaires font évoluer cette répartition : 10 % des personnes préférant Aurore et 15 % des personnes préférant Boréale changent d'avis d'une semaine sur l'autre.

La semaine du début de la campagne est notée semaine 0.
Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste de la semaine n est défini par la matrice ligne $P_n = (a_n \quad b_n)$, où a_n désigne la probabilité qu'une personne interrogée au hasard préfère Aurore la semaine n et b_n la probabilité que cette personne préfère Boréale la semaine n.

1. Déterminer la matrice ligne P_0 de l'état probabiliste initial.

2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B, A pour Aurore et B pour Boréale.

3. **a.** Ecrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
b. Montrer que la matrice ligne P_1 est égale à $(0,3 \quad 0,7)$.

4. **a.** Exprimer, pour tout entier naturel n, P_n en fonction de P_0 et de n.
b. En déduire la matrice ligne P_3. Interpréter ce résultat.

Dans la question suivante, toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

5. Soit $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste stable.

a. Déterminer a et b.

b. Le parfum Aurore finira-t-il par être préféré au parfum Boréale ? Justifier.

Exercice 3 (9 points)

(Commun à tous les candidats)

On se propose d'étudier l'évolution des ventes d'un modèle de voiture de gamme moyenne depuis sa création en 1999.

Les parties I et II peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie I

Le tableau suivant donne le nombre annuel, exprimé en milliers, de véhicules vendus les cinq premières années de commercialisation :

Année	1999	2000	2001	2002	2003
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4
Nombre annuel de véhicules vendus en milliers : y_i	81,3	92,3	109,7	128,5	131,2

1. Dans le plan (P) muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 1cm pour une année sur l'axe des abscisses et 1cm pour 10 milliers de véhicules vendus sur l'axe des ordonnées, représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ pour i entier variant de 0 à 4.

2. L'allure du nuage de points permet d'envisager un ajustement affine.

a. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage.

b. Déterminer l'équation $y = ax + b$ de la droite (D) d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

c. Placer le point G et tracer la droite (D) sur le graphique précédent.

d. En utilisant l'ajustement affine du **b**, donner une estimation du nombre de véhicules vendus en 2007.

3. Le tableau suivant donne le nombre annuel de véhicules vendus, exprimé en milliers, de 2003 à 2007 :

Année	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année : x_i	4	5	6	7	8
Nombre annuel de véhicules vendus en milliers : y_i	131,2	110,8	101,4	86,3	76,1

a. Compléter le nuage de points précédent à l'aide de ces valeurs.

b. L'ajustement précédent est-il encore adapté ? Justifier la réponse.

c. On décide d'ajuster le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$, pour i entier variant de 4 à 8, par une courbe qui admet une équation de la forme $y = e^{cx+d}$.
Déterminer les réels c et d pour que cette courbe passe par les points A (4 ; 131,2) et B (8 ; 76,1).
On donnera la valeur exacte, puis l'arrondi au millième de chacun de ces nombres réels.

Partie II

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[4 ; 10]$ par : $f(x) = e^{-0,136x+5,421}$.
On suppose que f modélise en milliers l'évolution du nombre annuel de véhicules vendus à partir de l'année 2003.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[4 ; 10]$.

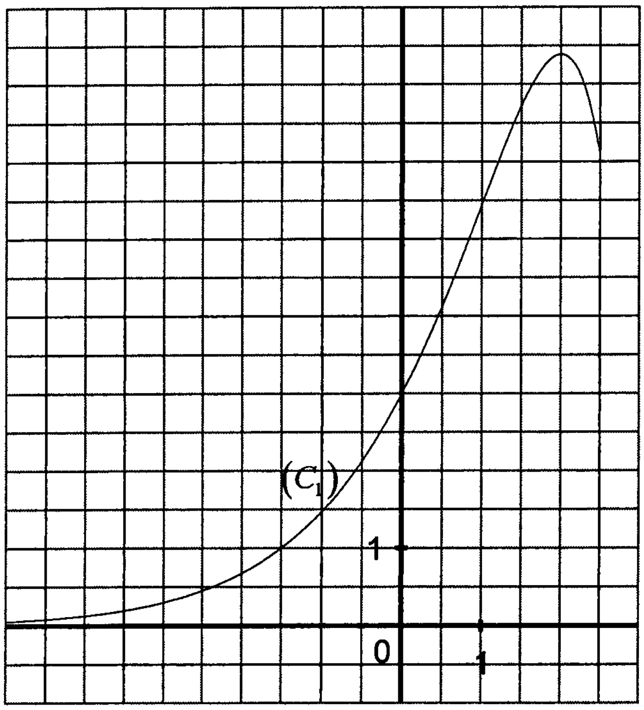
2. Tracer la courbe (C) représentative de la fonction f dans le même repère que le nuage de points.

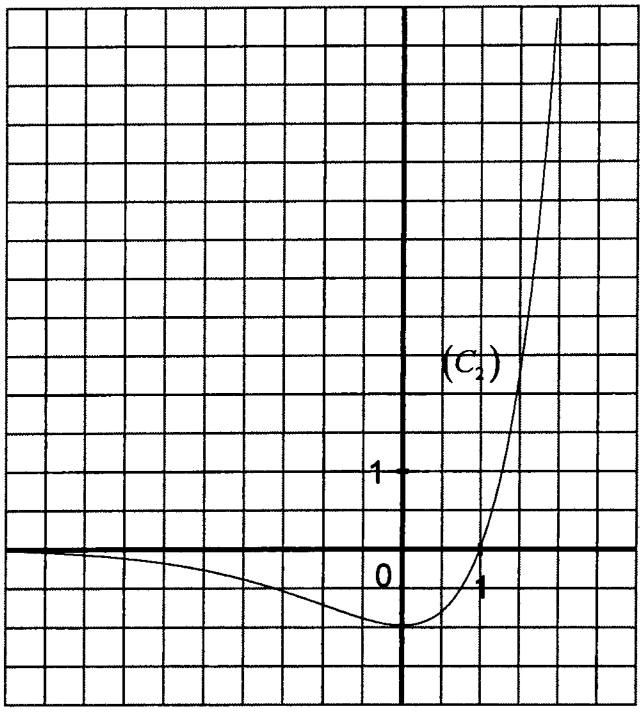
3. L'entreprise décide d'arrêter la fabrication du modèle l'année où le nombre annuel de véhicules vendus devient inférieur à 65 000.

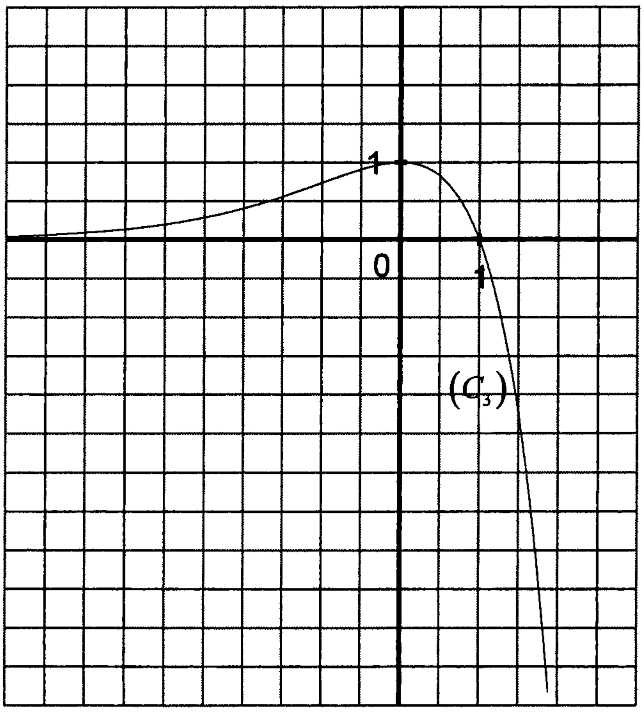
a. Résoudre algébriquement dans l'intervalle $[4 ; 10]$ l'inéquation $f(x) \leq 65$.
En quelle année l'entreprise doit-elle prévoir cet arrêt ?

b. Retrouver graphiquement le résultat précédent en laissant apparents les traits de construction nécessaires.

Annexe
Exercice 1, partie B







CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

	BACCALAURÉAT GÉNÉRAL	
Série	**ES**	**SESSION 2008**
Épreuve	**MATHÉMATIQUES**	**Durée : 3h**
Coef : **5 (obligatoire)** **7 (Spécialité)**	**RECOMMANDATIONS DE CORRECTION**	

L'évaluation au baccalauréat a pour but de vérifier l'acquisition non seulement de connaissances mais aussi d'un certain nombre de compétences :

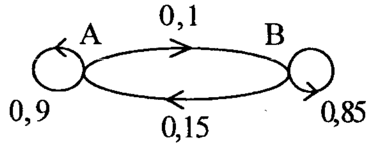
Les compétences de base :	**Les compétences évoluées :**
C1 : Mobiliser et restituer des connaissances.	C3 : Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter.
C2 : Appliquer des méthodes.	C4 : Raisonner, démontrer, élaborer une démarche.
	C5 : Evaluer, critiquer un résultat, vérifier la validité d'un résultat ou d'une méthode
	C6 : Montrer une certaine autonomie dans le traitement de l'information

Exercice I commun 6 points

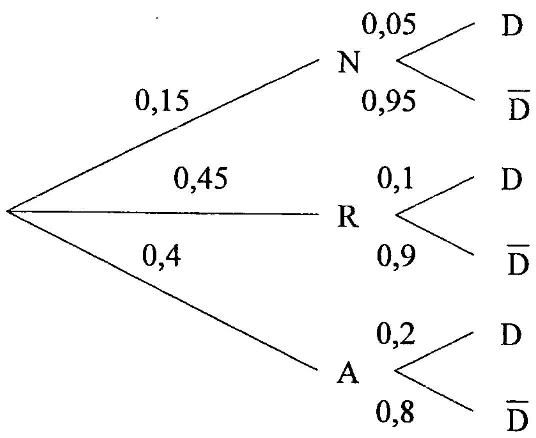
<table>
<tr><th>Question</th><th>Réponse</th><th>Compétences</th><th>Commentaires</th><th>Points</th></tr>
<tr><td>A1
A2
A3
A4
A5</td><td>Réponse a
Réponse c
Réponse c
Réponse b
Réponse a</td><td>C5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B1</td><td>Réponse b : I est l'aire en unités d'aire du domaine D plan défini par $0 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq f(x)$.
On peut encadrer I par l'aire obtenue « en comptant les carreaux » de deux polygones.
On peut obtenir $3,875 \leq I \leq 5$.</td><td>C3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B2</td><td>Réponse c
<table><tr><td>x</td><td>-5   1   2,5</td></tr><tr><td>Variation de f</td><td>↗   ↘</td></tr><tr><td>Signe de f '(x)</td><td>+   0   -</td></tr></table></td><td>C5 C6</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B3</td><td>Réponse a

F ' = f
<table><tr><td>x</td><td>-5   2   2,5</td></tr><tr><td>Signe de f (x)</td><td>+   0   -</td></tr><tr><td>Variation de F</td><td>↗   ↘</td></tr></table></td><td>C5 C6</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Exercice II pour les candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité 5 points

Question	*Réponse*	*Compétences*	*Commentaires*	*Points*
1	$P_0 = [0{,}2 \quad 0{,}8]$	C6		
2	 	C2		
3a	$M = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}85 \end{bmatrix}$	C2		
3b	$a_1 = 0{,}9\ a_0 + 0{,}15\ b_0$ $b_1 = 0{,}1\ a_0 + 0{,}85\ b_0$ $P_1 = [0{,}3 \quad 0{,}7]$	C2		
4a	Par théorème, pour tout entier naturel n, $P_n = P_0 \times M^n$	C1		
4b	$P_3 = P_0 \times M^3$ Donc $P_3 = [0{,}43125 \quad 0{,}56875]$ On peut estimer qu'au bout de la 3ème semaine de campagne, plus de 43 % de la population sera favorable au parfum Aurore.	C2 C5		
5	P l'état stable du système vérifie $P = P \times M$ et $P = [a \quad 1\text{-}a]$. Soit à résoudre l'équation $0{,}9\ a + 0{,}15\ (1 - a) = a$. $a = 0{,}6$ et $b = 0{,}4$. Par théorème, $a = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$. On peut estimer qu'à terme 60 % de la population sera favorable au parfum Aurore.	 C1 C2 C5		

Exercice II pour les candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité 5 points

Question	*Réponse*	*Compétences*	*Commentaires*	*Points*
1		C6		
2	$p(N \cap D) = p(N) \times p_N(D)$ $p(N \cap D) = 0{,}15 \times 0{,}05$ $p(N \cap D) = 0{,}0075$.	C1		
3	$\{N ; R ; A\}$ est une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales, $p(D) = p(N \cap D) + p(R \cap D) + p(A \cap D)$ $p(D) = 0{,}0075 + 0{,}45 \times 0{,}1 + 0{,}4 \times 0{,}2$ $p(D) = 0{,}1325$.	C4		
4	$p_D(A) = \dfrac{p(A \cap D)}{p(D)}$ $\quad p_D(A) = \dfrac{0{,}08}{0{,}1325}$ $\quad p_D(A) = \dfrac{32}{53}$ $p_D(A) \approx 0{,}60$.	C1		
5	Il y a 3 possibilités qu'un ordinateur exactement sur les 3 soit défaillant. La probabilité demandée est $p = 3 \times p(D) \times p(\overline{D})^2$. Soit $p = 3 \times 0{,}1325 \times 0{,}8675^2$ d'où $p \approx 0{,}30$.	C4		

Exercice III commun 9 points

Question	*Réponse*	*Compétences*	*Commentaires*	*Points*
I 1	Cf.figure	C1		
I 2a	G ($\bar{x};\bar{y}$) G(2 ; 108,6)	C1		
I 2b	y = 13,6 x + 81,4	C2		
I 2c	Cf.figure	C2		
I 2d	Le rang de l'année 2007 est 8. Pour x = 8, y = 190,2. Selon ce modèle, on peut estimer que le nombre de véhicules vendus en 2007 sera 190200.	C5		
I 3a	Cf.figure	C1		
I 3b	L'ajustement précédent n'est plus adapté car la fonction affine $x \mapsto 13,6\,x + 81,4$ est croissante et les valeurs y_i, $4 \leq x \leq 10$, sont dans l'ordre décroissantes.	C5		
I 3c	Le couple (c ; d) est solution du système (S) $\begin{cases} 131,2 = e^{4c+d} \\ 76,1 = e^{8c+d} \end{cases}$ (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} 4c + d = \ln(131,2) \\ 8c + d = \ln(76,1) \end{cases}$ (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} c = \dfrac{\ln(76,1) - \ln(131,2)}{4} \\ d = 2\ln(131,2) - \ln(76,1) \end{cases}$ c ≈ -0,136 et d ≈ 5,421.	C4	Toute initiative ou démarche cohérente sera valorisée.	

II 1	Soit x un réel de [4 ; 10], $f'(x) = -0,136\, e^{-0,136x+5,421}$ La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives. Par produit $f'(x) < 0$. La fonction f est donc strictement décroissante sur [4 ; 10].	C2		

II 2	Cf.figure	C2		
II 3a	$e^{-0,136x+5,421} \leq 65$ $-0,136\,x + 5,421 \leq \ln 65$ $0,136\,x \geq 5,421 - \ln 65$ $x \geq \dfrac{5,421 - \ln 65}{0,136}$ Comme $\dfrac{5,421 - \ln 65}{0,136} \approx 9,2$, c'est au cours de l'année 2009 qu'on peut prévoir l'arrêt de la fabrication.	C2 C5		
II 3b	Cf.figure	C5		

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2009

SUJET SORTI

MATHÉMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte deux annexes à rendre avec la copie.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7

EXERCICE 1 : (4 points)

Commun à tous les candidats

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1) On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$.

On pose, pour tout nombre entier naturel n, $v_n = u_n - 6$.

a) Pour tout nombre entier naturel n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n.
Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b) Démontrer que pour tout nombre entier naturel n, $u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$.

c) Étudier la convergence de la suite (u_n).

2) On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geq 1$:

$$n\,w_n = (n+1)\,w_{n-1} + 1 \quad \text{et} \quad w_0 = 1.$$

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

a) Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.

b) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Donner la nature de la suite (w_n). Calculer w_{2009}.

EXERCICE 2 : (6 points)

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln\left(1+xe^{-x}\right)$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. La courbe $\mathscr{C}$ est représentée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

PARTIE I

1) Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2) Justifier que pour tout nombre réel positif x, le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$.

3) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

PARTIE II

Soit λ un nombre réel strictement positif. On pose $\mathrm{A}(\lambda)=\displaystyle\int_0^{\lambda} f(x)\,\mathrm{d}x$.

On se propose de majorer $\mathrm{A}(\lambda)$ à l'aide de deux méthodes différentes.

1) Première méthode.

a) Représenter, sur l'annexe jointe (à rendre avec la copie), la partie du plan dont l'aire en unité d'aire, est égale à $\mathrm{A}(\lambda)$.

b) Justifier que pour tout nombre réel λ strictement positif, $\mathrm{A}(\lambda)\leq\lambda\times f(1)$.

2) Deuxième méthode.

a) Calculer à l'aide d'une intégration par parties $\displaystyle\int_0^{\lambda} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ en fonction de λ.

b) On admet que pour tout nombre réel positif u, $\ln(1+u)\leq u$.
Démontrer alors que, pour tout nombre réel λ strictement positif, $\mathrm{A}(\lambda)\leq-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}-\mathrm{e}^{-\lambda}+1$.

3) ***Application numérique.***

Avec chacune des deux méthodes, trouver un majorant de A(5), arrondi au centième.
Quelle méthode donne le meilleur majorant dans le cas où $\lambda=5$?

<u>EXERCICE 3</u> : (5 points)

Commun à tous les candidats

I *Cette question est une restitution organisée de connaissances.*

On rappelle que si n et p sont deux nombres entiers naturels tels que $p \leq n$ *alors* $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démontrer que pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre entier naturel p tels que $1 \leq p < n$ on a : $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ p \end{pmatrix}$.

II Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :
7 jetons blancs numérotés de 1 à 7 et 3 jetons noirs numérotés de 1 à 3.

On tire simultanément deux jetons de ce sac.

1) a) On note A l'événement «obtenir deux jetons blancs».
Démontrer que la probabilité de l'événement A est égale à $\dfrac{7}{15}$.

b) On note B l'événement «obtenir deux jetons portant des numéros impairs».
Calculer la probabilité de B.

c) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2) Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de jetons blancs obtenus lors de ce tirage simultané.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

EXERCICE 4 : (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on associe à tout point M d'affixe z non nulle, le point M' milieu du segment $[MM_1]$, où M_1 est le point d'affixe $\frac{1}{z}$.

Le point M' est appelé l'image du point M.

1) a) Montrer que les distances OM et OM_1 vérifient la relation $OM \times OM_1 = 1$ et que les angles $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM_1}\right)$ et $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ vérifient l'égalité des mesures suivantes $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM_1}\right) = -\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ à 2π près.

b) Sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie) le point A appartient au cercle de centre O et de rayon 2.
Construire le point A' image du point A. (On laissera apparents les traits de construction).

2) a) Justifier que pour tout nombre complexe z non nul, le point M' a pour affixe $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

b) Soient B et C les points d'affixes respectives 2i et -2i. Calculer les affixes des points B' et C' images respectives des points B et C.

c) Placer les points B, C, B' et C' sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie).

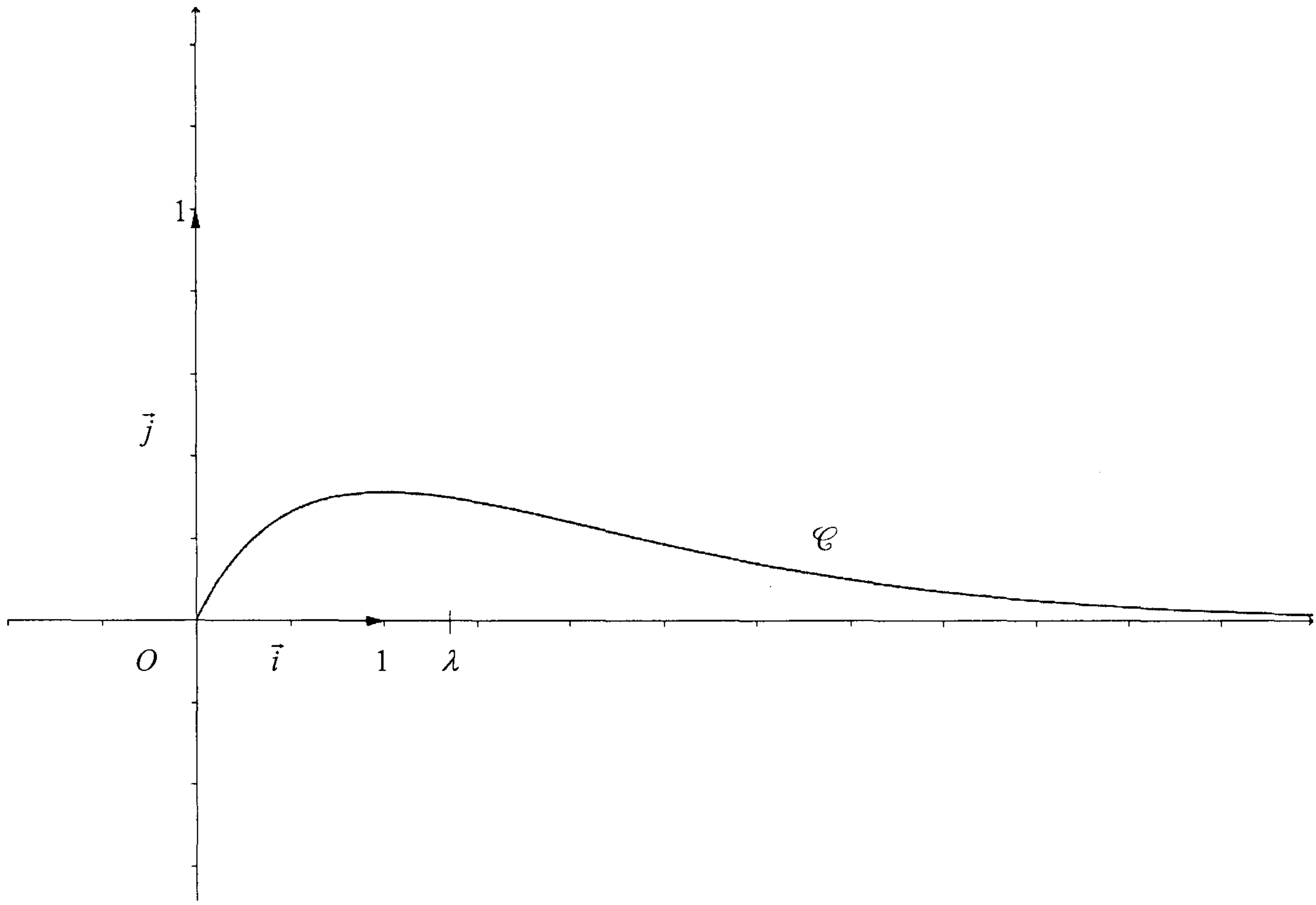
3) Déterminer l'ensemble des points M tels que $M' = M$.

4) *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Montrer que si le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 alors son image M' appartient au segment $[KL]$ où K et L sont les points d'affixes respectives -1 et 1.

ANNEXE 1
Exercice 2

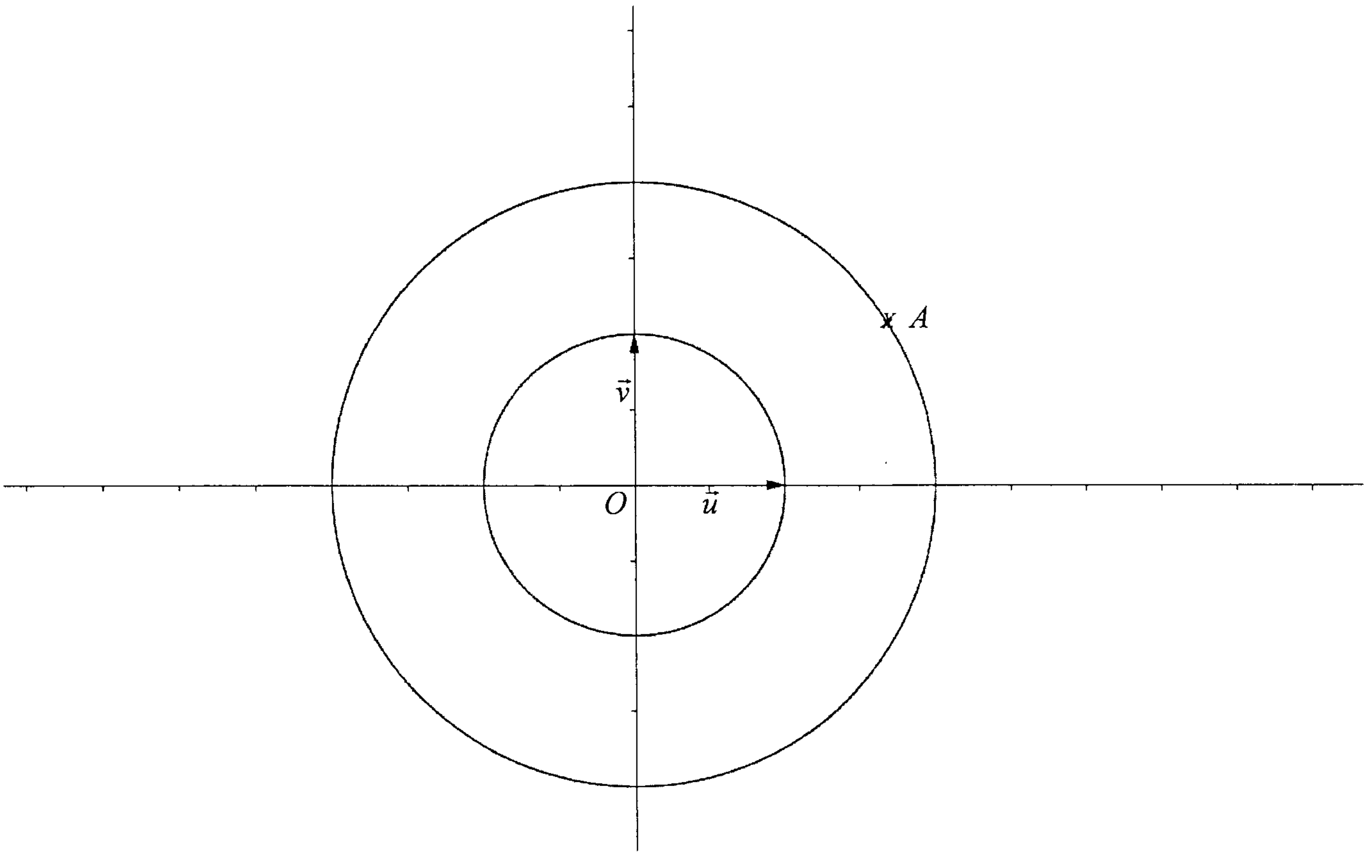
(À rendre avec la copie)



ANNEXE 2
Exercice 4

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

(À rendre avec la copie)



CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL
SESSION 2009 Série S
ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des membres des jurys. La règle de confidentialité relative aux commissions d'entente et aux travaux des jurys s'applique à son contenu.

Outre les compétences de base (C1: restituer et mobiliser des connaissances, C2:appliquer une méthode), le sujet permet d'évaluer des compétences évoluées parmi les suivantes :
C3 : Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter
C4: Raisonner, démontrer, élaborer une démarche
C5: Évaluer, critiquer un résultat, vérifier la validité d' un résultat ou d' une méthode.

Exercice 1 : (4 points)

	Consignes de correction	*barème*
1.a) Montrer que pour tout entier n, $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$ et en déduire que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et dont le premier terme v_0 est égal à -5.		
1.b) Pour tout nombre entier naturel n, on a : $v_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$.		
1.c) Étude de la convergence de la suite (u_n).		
2.a) $10w_{10} = 11w_9 + 1$; $w_{10} = 21$		
2.b) *Dans cette question toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation* La suite (w_n) est une suite arithmétique. Pour tout nombre entier n, $w_n = 2n + 1$.	Cette question pourra permettre d'évaluer les compétences *C3* et *C4*	

Exercice 2 : (6 points)

		Consignes de correction	*barème*
Partie I	**1)** Calcul de la limite de f en $+\infty$. Cette limite est égale à 0.		
	2) $f'(x)=\dfrac{(1-x)e^{-x}}{1+xe^{-x}}$. Justification du signe de $f'(x)$.		
	3) Étude des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.		
Partie II	**1.a)** Représentation de la partie du plan dont l'aire est égale à $A(\lambda)$.		
	1.b) Justifier que pour tout réel λ strictement positif, $A(\lambda)\leq\lambda\times f(1)$.		
	2.a) $\int_0^{\lambda} xe^{-x}\,dx=(-\lambda-1)e^{-\lambda}+1$.		
	2.b) Démontrer que pour tout réel λ strictement positif, $A(\lambda)\leq-\lambda e^{-\lambda}-e^{-\lambda}+1$.		
	3. Première méthode : $A(5)\leq 1{,}57$ Deuxième méthode : $A(5)\leq 0{,}96$ La deuxième méthode donne une meilleure majoration.	Cette question pourra permettre d'évaluer les compétences *C5*	

Exercice 3 : (5 points)

		Consignes de correction	*barème*
Partie I	**Restitution organisée de connaissances**		
Partie II	**1.a)** Calcul de $P(\mathrm{A})$.		
	1.b) $P(\mathrm{B})=\frac{1}{3}$.		
	1.c) Les événements A et B ne sont pas indépendants car $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\neq P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B})$.		
	2.a) La loi de probabilité de X : x_i : 0 ; 1 ; 2 $P(X=x_i)$: $\frac{1}{15}$; $\frac{7}{15}$; $\frac{7}{15}$		
	2.b) $E(X)=\frac{7}{5}$.		

Exercice 4 : (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

	Consignes de correction	*barème*
1.a) Justifier les deux égalités $OM\times OM_1=1$ et $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM_1})=-(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$ à 2π près.		
1.b) Construction du point A'.		
2.a) Justifier que pour tout nombre complexe z non nul, le point M' a pour affixe $z'=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.		
2.b) B' et C' ont pour affixes respectives : $\frac{3}{4}\mathrm{i}$ et $-\frac{3}{4}\mathrm{i}$.		
2.c) Placer les points B, C, B' et C'.		
3) Les points M qui vérifient $M=M'$ ont pour affixes respectives 1 et -1.		
4. *Dans cette question toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation* Montrer que si le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 alors son image M' appartient au segment $[KL]$ où K et L sont les points d'affixes respectives -1 et 1.	Cette question pourra permettre d'évaluer les compétences *C3* et *C4*	

Exercice 4 : (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

	Consignes de correction	*barème*
1.a) Les couples solutions de l'équation (E) sont les couples du type $(5k+1, 8k+1)$ lorsque k décrit l'ensemble des entiers relatifs.		
1.b) Montrer que le couple (p, q) est solution de l'équation (E) et en déduire que $m \equiv 9$ (modulo 40).		
1.c) Le nombre cherché est 2009.		
2.a) Démontrer que pour tout nombre entier naturel k on a : $2^{3k} \equiv 1$ (modulo 7).		
2.b) Le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7 est égal à 4.		
3.a) Vérifier que $10^3 \equiv -1$ (modulo 7).		
3.b) *Dans cette question toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation* Les nombres cherchés sont : 1001, 1008, 2002, 2009, 3003, 4004, 5005, 6006, 7000, 7007,8001, 8008, 9002 et 9009.	Cette question pourra permettre d'évaluer les compétences ***C3*** et ***C4***	

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2009

SUJET SORTI

MATHÉMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

**Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.**

Le sujet comporte une annexe à rendre avec la copie.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6

EXERCICE 1 : (4 points)

Commun à tous les candidats

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1) On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$.

On pose, pour tout nombre entier naturel n, $v_n = u_n - 6$.

a) Pour tout nombre entier naturel n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n.
Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b) Démontrer que pour tout nombre entier naturel n, $u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$.

c) Étudier la convergence de la suite (u_n).

2) On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geq 1$:

$$n\,w_n = (n+1)\,w_{n-1} + 1 \quad \text{et} \quad w_0 = 1.$$

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

a) Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.

b) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Donner la nature de la suite (w_n). Calculer w_{2009}.

EXERCICE 2 : (6 points)

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln\left(1+xe^{-x}\right)$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. La courbe $\mathscr{C}$ est représentée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

PARTIE I

1) Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2) Justifier que pour tout nombre réel positif x, le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$.

3) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

PARTIE II

Soit λ un nombre réel strictement positif. On pose $\mathrm{A}(\lambda)=\displaystyle\int_0^{\lambda} f(x)\,\mathrm{d}x$.

On se propose de majorer $\mathrm{A}(\lambda)$ à l'aide de deux méthodes différentes.

1) Première méthode.

a) Représenter, sur l'annexe jointe (à rendre avec la copie), la partie du plan dont l'aire en unité d'aire, est égale à $\mathrm{A}(\lambda)$.

b) Justifier que pour tout nombre réel λ strictement positif, $\mathrm{A}(\lambda)\leq\lambda\times f(1)$.

2) Deuxième méthode.

a) Calculer à l'aide d'une intégration par parties $\displaystyle\int_0^{\lambda} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ en fonction de λ .

b) On admet que pour tout nombre réel positif u, $\ln(1+u)\leq u$.
Démontrer alors que, pour tout nombre réel λ strictement positif, $\mathrm{A}(\lambda)\leq-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}-\mathrm{e}^{-\lambda}+1$.

3) ***Application numérique***.

Avec chacune des deux méthodes, trouver un majorant de A(5), arrondi au centième.
Quelle méthode donne le meilleur majorant dans le cas où $\lambda=5$?

EXERCICE 3 : (5 points)

Commun à tous les candidats

I *Cette question est une restitution organisée de connaissances.*

On rappelle que si n et p sont deux nombres entiers naturels tels que $p \leq n$ *alors* $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démontrer que pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre entier naturel p tels que $1 \leq p < n$ on a : $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

II Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :
7 jetons blancs numérotés de 1 à 7 et 3 jetons noirs numérotés de 1 à 3.

On tire simultanément deux jetons de ce sac.

1) a) On note A l'événement «obtenir deux jetons blancs».
Démontrer que la probabilité de l'événement A est égale à $\frac{7}{15}$.

b) On note B l'événement «obtenir deux jetons portant des numéros impairs».
Calculer la probabilité de B.

c) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2) Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de jetons blancs obtenus lors de ce tirage simultané.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

EXERCICE 4 : (5 points)

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1) a) Déterminer l'ensemble des couples (x,y) de nombres entiers relatifs, solution de l'équation (E) : $8x-5y=3$.

b) Soit m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple (p, q) de nombres entiers vérifiant $m=8p+1$ et $m=5q+4$.
Montrer que le couple (p, q) est solution de l'équation (E) et en déduire que $m \equiv 9$ (modulo 40).

c) Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à 2000.

2) Soit n un nombre entier naturel.

a) Démontrer que pour tout nombre entier naturel k on a : $2^{3k} \equiv 1$ (modulo 7).

b) Quel est le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7 ?

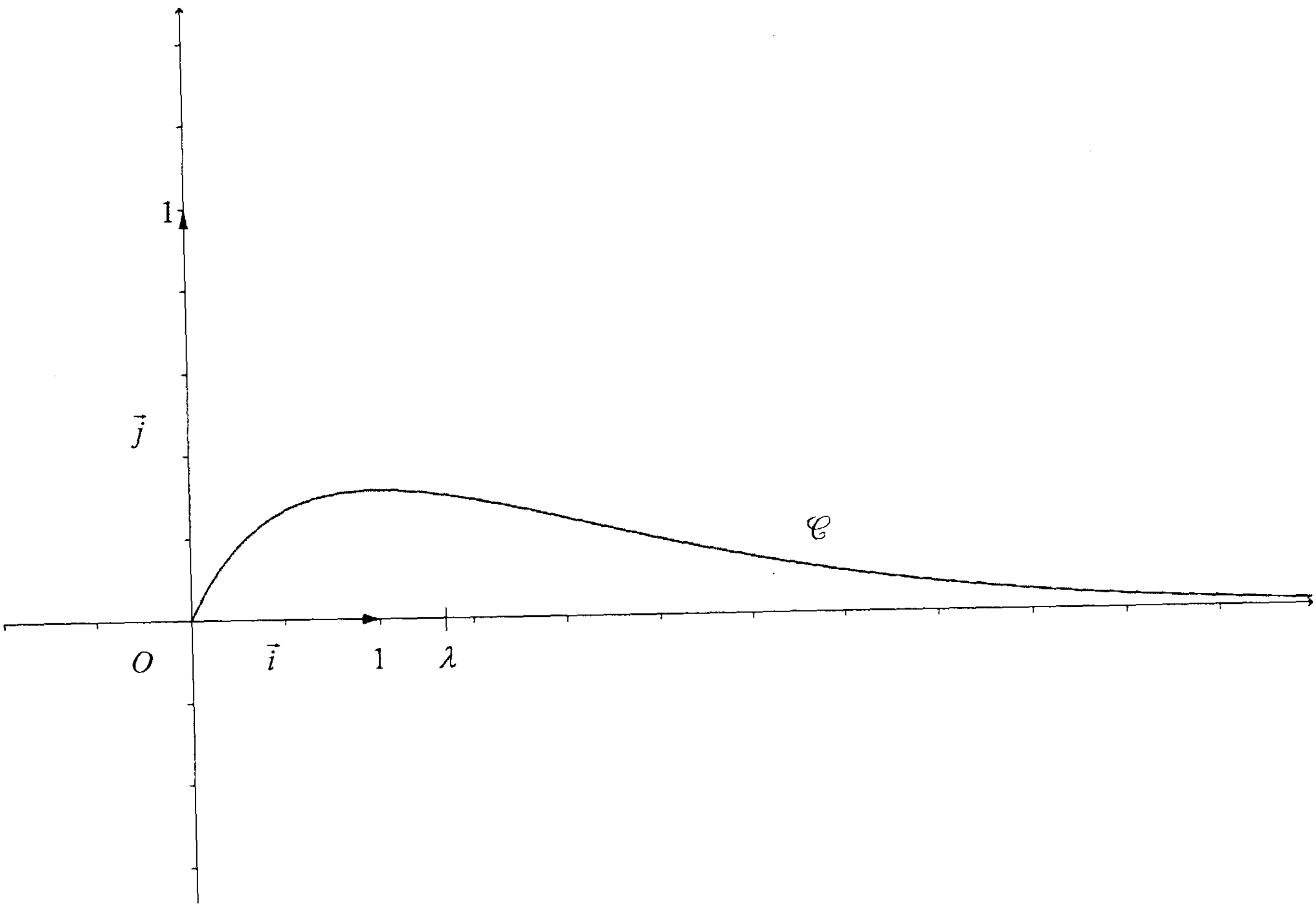
3) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.
On considère le nombre $N = a\times10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$
On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.

a) Vérifier que $10^3 \equiv -1$ (modulo 7).

b) En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

ANNEXE 1
Exercice 2

(À rendre avec la copie)



CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL
SESSION 2009 Série S
ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des membres des jurys. La règle de confidentialité relative aux commissions d'entente et aux travaux des jurys s'applique à son contenu.

Outre les compétences de base (C1: restituer et mobiliser des connaissances, C2:appliquer une méthode), le sujet permet d'évaluer des compétences évoluées parmi les suivantes :
C3 : Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter
C4: Raisonner, démontrer, élaborer une démarche
C5: Évaluer, critiquer un résultat, vérifier la validité d' un résultat ou d' une méthode.

Exercice 1 : (4 points)

	Consignes de correction	*barème*
1.a) Montrer que pour tout entier n, $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$ et en déduire que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et dont le premier terme v_0 est égal à -5.		
1.b) Pour tout nombre entier naturel n, on a : $v_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$.		
1.c) Étude de la convergence de la suite (u_n).		
2.a) $10w_{10} = 11w_9 + 1$; $w_{10} = 21$		
2.b) *Dans cette question toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation* La suite (w_n) est une suite arithmétique. Pour tout nombre entier n, $w_n = 2n + 1$.	Cette question pourra permettre d'évaluer les compétences *C3* et *C4*	

Exercice 2 : (6 points)

		Consignes de correction	*barème*
Partie I	**1)** Calcul de la limite de f en $+\infty$. Cette limite est égale à 0.		
	2) $f'(x)=\dfrac{(1-x)e^{-x}}{1+xe^{-x}}$. Justification du signe de $f'(x)$.		
	3) Étude des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.		
Partie II	**1.a)** Représentation de la partie du plan dont l'aire est égale à $A(\lambda)$.		
	1.b) Justifier que pour tout réel λ strictement positif, $A(\lambda)\leq\lambda\times f(1)$.		
	2.a) $\int_0^{\lambda} xe^{-x}\,dx=(-\lambda-1)e^{-\lambda}+1$.		
	2.b) Démontrer que pour tout réel λ strictement positif, $A(\lambda)\leq-\lambda e^{-\lambda}-e^{-\lambda}+1$.		
	3. Première méthode : $A(5)\leq 1{,}57$ Deuxième méthode : $A(5)\leq 0{,}96$ La deuxième méthode donne une meilleure majoration.	Cette question pourra permettre d'évaluer les compétences *C5*	

Exercice 3 : (5 points)

		Consignes de correction	*barème*
Partie I	**Restitution organisée de connaissances**		
Partie II	**1.a)** Calcul de $P(\mathrm{A})$.		
	1.b) $P(\mathrm{B})=\frac{1}{3}$.		
	1.c) Les événements A et B ne sont pas indépendants car $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\neq P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B})$.		
	2.a) La loi de probabilité de X : $\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline x_i & 0 & 1 & 2 \\ \hline P(X=x_i) & \frac{1}{15} & \frac{7}{15} & \frac{7}{15} \\ \hline\end{array}$		
	2.b) $E(X)=\frac{7}{5}$.		

Exercice 4 : (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

	Consignes de correction	*barème*
1.a) Justifier les deux égalités $OM\times OM_1=1$ et $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM_1})=-(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$ à 2π près.		
1.b) Construction du point A'.		
2.a) Justifier que pour tout nombre complexe z non nul, le point M' a pour affixe $z'=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.		
2.b) B' et C' ont pour affixes respectives : $\frac{3}{4}\mathrm{i}$ et $-\frac{3}{4}\mathrm{i}$.		
2.c) Placer les points B, C, B' et C'.		
3) Les points M qui vérifient $M=M'$ ont pour affixes respectives 1 et -1.		
4. *Dans cette question toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation* Montrer que si le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 alors son image M' appartient au segment $[KL]$ où K et L sont les points d'affixes respectives -1 et 1.	Cette question pourra permettre d'évaluer les compétences ***C3*** et ***C4***	

Exercice 4 : (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

	Consignes de correction	*barème*
1.a) Les couples solutions de l'équation (E) sont les couples du type $(5k+1,8k+1)$ lorsque k décrit l'ensemble des entiers relatifs.		
1.b) Montrer que le couple (p, q) est solution de l'équation (E) et en déduire que $m \equiv 9$ (modulo 40).		
1.c) Le nombre cherché est 2009.		
2.a) Démontrer que pour tout nombre entier naturel k on a : $2^{3k} \equiv 1$ (modulo 7).		
2.b) Le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7 est égal à 4.		
3.a) Vérifier que $10^3 \equiv -1$ (modulo 7).		
3.b) *Dans cette question toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation* Les nombres cherchés sont : 1001, 1008, 2002, 2009, 3003, 4004, 5005, 6006, 7000, 7007,8001, 8008, 9002 et 9009.	Cette question pourra permettre d'évaluer les compétences ***C3*** et ***C4***	

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2009

SUJET SORTI

MATHÉMATIQUES

OBLIGATOIRE

Série : **ES**

Durée de l'épreuve : 3 heures.

Coefficient : 5

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le sujet est composé de QUATRE exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de l'indice des prix de vente des appartements anciens à Paris au quatrième trimestre des années 2000 à 2007.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Indice : y_i	100	108,5	120,7	134,9	154,8	176,4	193,5	213,6

Source : INSEE.

1. Calculer le pourcentage d'augmentation de cet indice de l'année 2000 à l'année 2007.

2. Construire le nuage de points $M_i(x_i\ ;y_i)$ dans le plan (*P*) muni d'un repère orthogonal défini de la manière suivante :

- sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 2 cm pour représenter une année.
- sur l'axe des ordonnées, on placera 100 à l'origine et on choisira 1 cm pour représenter 10 unités.

3. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage. Placer le point G dans le plan (*P*).

4. L'allure de ce nuage permet de penser qu'un ajustement affine est adapté.

a. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite (d) d'ajustement de y en x , obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis au centième.

b. Tracer la droite (d) dans le plan (*P*).

5. En supposant que cet ajustement affine reste valable pour les deux années suivantes, estimer l'indice du prix de vente des appartements anciens à Paris au quatrième trimestre 2009. Justifier la réponse.

Exercice 2 **(5 points)**
(Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\ ;\ 5]$, décroissante sur chacun des intervalles $[-2\ ;\ 0]$ et $[2\ ;\ 5]$ et croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$.
On note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[-2\ ;\ 5]$.

La courbe (Γ) représentative de la fonction f est tracée en annexe 1 dans le plan muni d'un repère orthogonal. Elle passe par les points A $(-2\ ;\ 9)$, B $(0\ ;\ 4)$, C $(1\ ;\ 4{,}5)$, D $(2\ ;\ 5)$ et E $(4\ ;\ 0)$.
En chacun des points B et D, la tangente à la courbe (Γ) est parallèle à l'axe des abscisses.
On note F le point de coordonnées $(3\ ;\ 6)$. La droite (CF) est la tangente à la courbe (Γ) au point C.

1. À l'aide des informations précédentes et de l'annexe 1, préciser sans justifier :

a. les valeurs de $f(0)$, $f'(1)$ et $f'(2)$,

b. le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[-2\ ;\ 5]$,

c. le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[-2\ ;\ 5]$.

2. On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln(f(x))$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

a. Expliquer pourquoi la fonction g est définie sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4[$.

b. Calculer $g(-2)$, $g(0)$ et $g(2)$.

c. Préciser, en le justifiant, le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4[$.

d. Déterminer la limite de la fonction g lorsque x tend vers 4.
Interpréter ce résultat pour la représentation graphique de la fonction g.

e. Dresser le tableau de variation de la fonction g.

<u>Exercice 3</u> (5 points)

(Commun à tous les candidats)

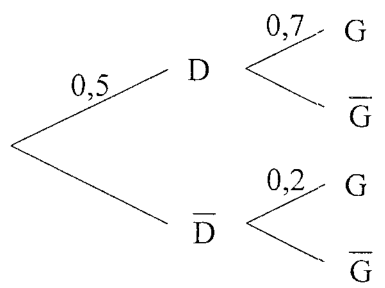
Une salle de jeux comporte deux consoles identiques proposant le même jeu.
Un jour, l'une des deux est déréglée.
Les joueurs ne peuvent pas savoir laquelle des deux est déréglée.

1. Ce jour-là, un joueur choisit au hasard l'une des deux consoles et il joue une partie sur cette console.

On note :

- D l'événement « le joueur choisit la console déréglée » et $\overline{D}$ l'événement contraire.
- G l'événement « le joueur gagne la partie » et $\overline{G}$ l'événement contraire.

Cette situation aléatoire est modélisée par l'arbre incomplet suivant, dans lequel figurent certaines probabilités :



Ainsi 0,7 est la probabilité que le joueur gagne sachant qu'il a choisi la console déréglée.

a. Reproduire cet arbre sur la copie et le compléter.
b. Calculer la probabilité de l'événement « le joueur choisit la console déréglée et il gagne ».
c. Calculer la probabilité de l'événement « le joueur choisit la console non déréglée et il gagne ».
d. Montrer que la probabilité que le joueur gagne est égale à 0,45.
e. Calculer la probabilité que le joueur ait choisi la console déréglée sachant qu'il a gagné.

2. Trois fois successivement et de façon indépendante, un joueur choisit au hasard l'une des deux consoles et joue une partie.

Calculer la probabilité de l'événement « le joueur gagne exactement deux fois ». Le résultat sera donné sous forme décimale arrondie au millième.

<u>Exercice 4</u> (6 points)
(Commun à tous les candidats)

Partie A - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$ par $f(x)=20(x-1)e^{-0,5x}$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$.

1. **a.** Démontrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$, $f'(x)=10(-x+3)e^{-0,5x}$.

   b. Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f.

2. Construire la courbe représentative (C) de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$. On prendra pour unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

3. Justifier que la fonction F définie sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$ par $F(x) = \dfrac{-40\ (x+1)}{e^{0,5x}}$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$.

4. Calculer la valeur exacte de l'intégrale I définie par $I = \int_{1,5}^{5} f(x)\ dx$.

Partie B – Application économique

Une entreprise produit sur commande des bicyclettes pour des municipalités.
La production mensuelle peut varier de 50 à 800 bicyclettes.
Le bénéfice mensuel réalisé par cette production peut être modélisé par la fonction f de la **partie A** de la façon suivante : si, un mois donné, on produit x centaines de bicyclettes, alors $f(x)$ modélise le bénéfice, exprimé en milliers d'euros, réalisé par l'entreprise ce même mois.
Dans la suite de l'exercice, on utilise ce modèle.

1. **a.** Vérifier que si l'entreprise produit 220 bicyclettes un mois donné, alors elle réalise ce mois là un bénéfice de 7989 euros.

   b. Déterminer le bénéfice réalisé par une production de 408 bicyclettes un mois donné.

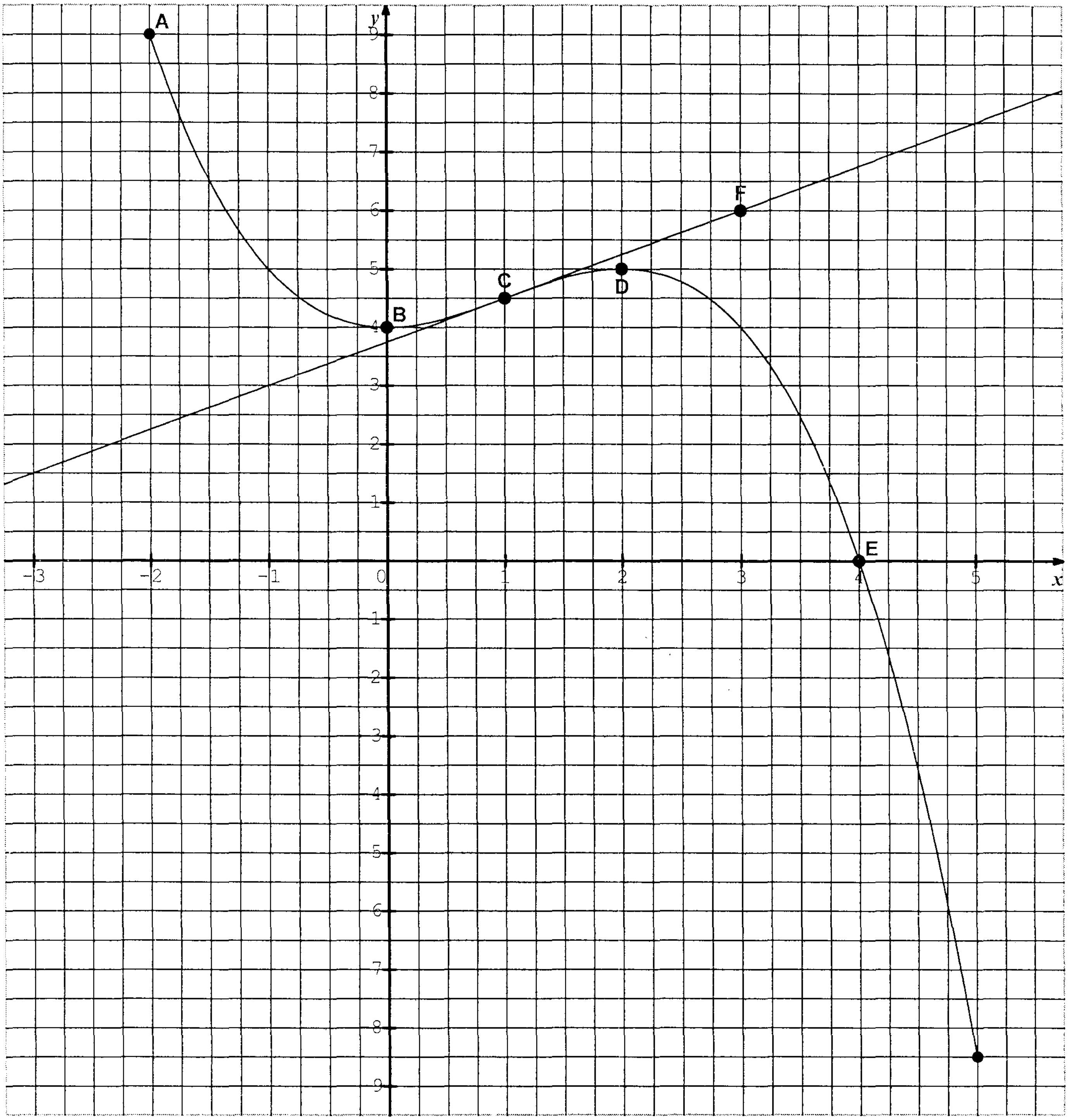
2. *Pour cette question, toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte.*
   Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats de la **partie A** et le modèle précédent.
   Justifier chaque réponse.

   a. Combien, pour un mois donné, l'entreprise doit-elle produire au minimum de bicyclettes pour ne pas travailler à perte ?

   b. Combien, pour un mois donné, l'entreprise doit-elle produire de bicyclettes pour réaliser un bénéfice maximum ? Préciser alors ce bénéfice à l'euro près.

   c. Combien, pour un mois donné, l'entreprise doit-elle produire de bicyclettes pour réaliser un bénéfice supérieur à 8000 euros ?

Annexe 1



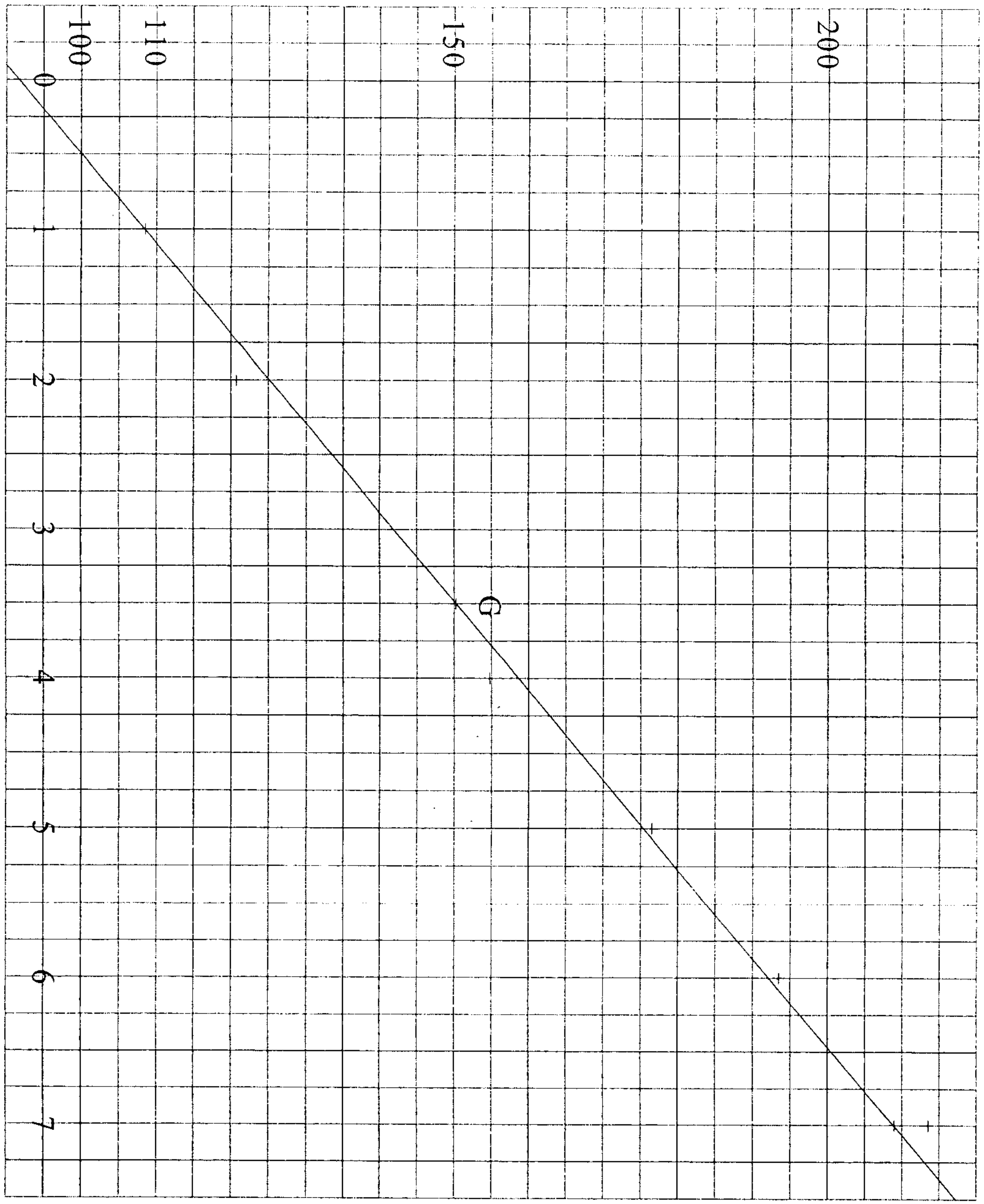
CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

	BACCALAURÉAT GÉNÉRAL	
Série	ES	**SESSION 2009**
Épreuve	MATHÉMATIQUES	**Durée : 3h**
Coef : **5 (obligatoire)** **7 (Spécialité)**	**ELEMENTS DE CORRECTION**	

Exercice 1 (4 points) *(Commun à tous les candidats)*

Question		Réponse	Compétence évoluée	Commentaires	Points
1		L'indice a augmenté de 113,6 % de 2000 à 2007.			
2		Voir graphique.			
3		$G(3{,}5\ ;\ 150{,}3)$. Voir graphique.			
4	a	D'après la calculatrice, $y = 16{,}75x + 91{,}67$.			
	b	Voir graphique.			
5		En prenant $x = 9$, on trouve $y = 242{,}42$. Au quatrième trimestre 2009, l'indice devrait être d'environ 242,4.			



100
110
150
200
0
1
2
3
4
5
6
7
G

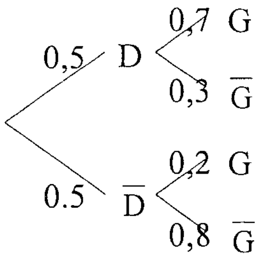
Exercice 2 (5 points) *(Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)*

Question		Réponse	Compétence évoluée	Commentaires	Points
1	a	$f(0)=4$, $f'(1)=0,75$ et $f'(2)=0$.			
	b	$f'(x)<0$ sur $[-2\,;\,0[$ et sur $]2\,;\,5]$. $f'(x)=0$ pour $x=0$ et $x=2$. $f'(x)>0$ sur $]0\,;\,2[$.			
	c	$f(x)>0$ sur $[-2\,;\,4[$, $f(x)=0$ pour $x=4$, $f(x)<0$ sur $]4\,;\,5]$.			
2	a	g est définie lorsque $f(x)>0$ soit sur $[-2\,;\,4[$.			
	b	$g(-2)=2\ln 3$, $g(0)=2\ln 2$ et $g(2)=\ln 5$.		Toute réponse exacte est acceptée	
	c	g' est du signe de f' sur $[-2\,;\,4[$ donc g est décroissante sur $[-2\,;\,0]$ et sur $[2\,;\,4[$ et g est croissante sur $[0\,;\,2]$.	Raisonner, démontrer, élaborer une démarche	Toute démarche correcte sera valorisée.	
	d	$\lim\limits_{x\to 4} g(x)=-\infty$. La droite d'équation $x=4$ est asymptote à la courbe en 4.			
	e	$\begin{array}{c\|ccccccc} x & -2 & & 0 & & 2 & & 4 \\ \hline g(x) & 2\ln 3 & \searrow & 2\ln 2 & \nearrow & \ln 5 & \searrow & -\infty \end{array}$			

Exercice 2 (5 points) *(Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)*

Question			Réponse	Compétence évoluée	Commentaires	Points
Partie I	1	a	Oui	Evaluer, critiquer un résultat, vérifier la validité d'un résultat ou d'une démarche		
		b	Non			
		c	Oui			
		d	Non			
	2		CDEF est un sous-graphe complet d'ordre 4. Le nombre chromatique est donc supérieur ou égal à 4. On trouve une coloration avec 4 couleurs, par exemple : Première couleur : C et G, Deuxième couleur : D et A, Troisième couleur : F et B, Quatrième couleur : E. Le nombre chromatique est donc 4.	Raisonner, démontrer, élaborer une démarche		
Partie II			L'algorithme de Dijkstra donne comme chemin le plus court ACEFG avec 7 feux tricolores.			

Exercice 3 (5 points) *(Commun à tous les candidats)*

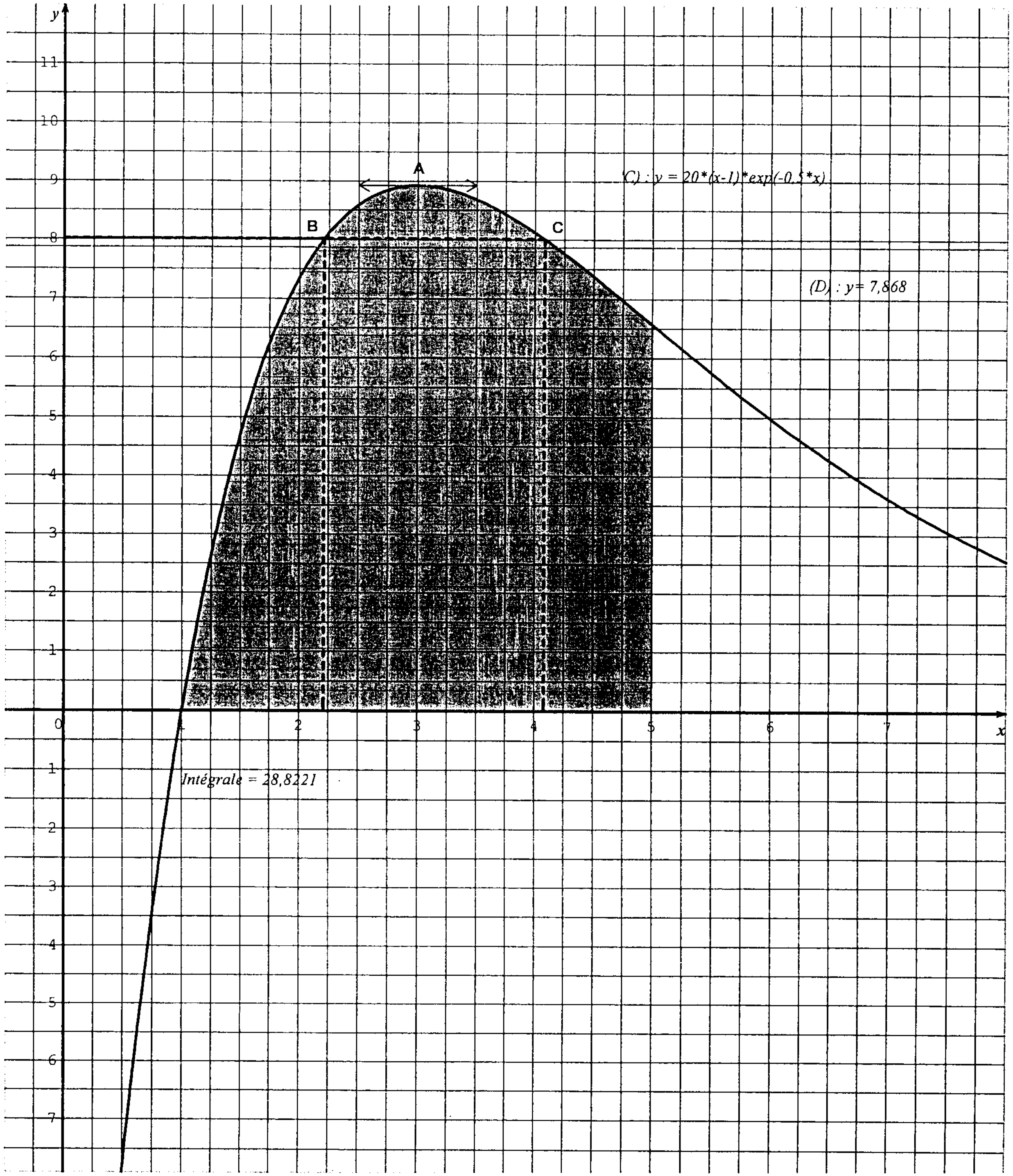
Question		Réponse	Compétence	Commentaires	Points
1	a				
	b	$p(D\cap G)=p(D)\times p_D(G)=0,35$			
	c	$p(\overline{D}\cap G)=0,5\times 0,2=0,10$			
	d	$p(G)=p(D\cap G)+p(\overline{D}\cap G)=$ $=0,35+0,10=0,45.$			
	e	$p_G(D)=\dfrac{p(D\cap G)}{p(G)}=\dfrac{0,35}{0,45}=\dfrac{7}{9}$ donc $p_G(D)\simeq 0,778.$			
2		$p(\text{Gagner exactement 2 fois})=3\times 0,45^2\times 0,55$ donc $p(\text{Gagner exactement 2 fois})\simeq 0,334.$			

Exercice 4 (6 points) :

<table>
<tr><th>Question</th><th>Réponse</th><th>Compétences évoluée</th><th>Commentaires</th><th>Points</th></tr>
<tr><td>A.1.a.</td><td>$f'(x) = 20 \times [1 \times e^{-0,5x} + (x - 1) \times (-0,5) \times e^{-0,5x}]$
$f'(x) = 10 \times e^{-0,5x} \times (3 - x)$.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A.1.b.</td><td>Comme la fonction exponentielle est à valeur strictement positive sur R et $10 > 0$, d'après le signe d'un produit, $f'(x)$ et $3 - x$ ont le même signe. D'où le tableau de variation de la fonction f :
<table>
<tr><td>x</td><td>0,5</td><td></td><td>3</td><td></td><td>8</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>–</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$-10e^{-0,25}$</td><td>$\nearrow$</td><td>$40e^{-1,5}$</td><td>$\searrow$</td><td>$140e^{-4}$</td></tr>
</table></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A.2.</td><td>Voir figure annexe.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A.3.</td><td>F est dérivable sur l'intervalle [0,5 ; 8] et F' = f.
donc F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle [0,5 ; 8].</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A.4.</td><td>$I = \int_{1,5}^{5} f(x)\,dx$. $I = F(5) - F(1,5)$
$I = -240\, e^{-2,5} + 100\, e^{-0,75}$.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B.1.a.</td><td>$f(2,2) \approx 7,989$ donc la fabrication mensuelle de 220 bicyclettes permet un bénéfice mensuel de 7989 €.</td><td rowspan="2">Montrer une certaine autonomie dans le traitement de l'information</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B.1.b.</td><td>$f(4.08) \approx 8,010$ donc la fabrication mensuelle de 408 bicyclettes permet un bénéfice mensuel de 8010 €.</td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>B.2.a.</td>
<td>L'entreprise ne travaille pas à perte signifie qu'elle réalise un bénéfice mensuel positif ou nul.
Il s'agit donc de résoudre dans sur l'intervalle [0,5 ; 8] l'inéquation (1) $f(x) \geq 0$. On peut le faire algébriquement :
Comme la fonction exponentielle est à valeur strictement positive sur $\mathbf{R}$ et qu'on a 20 >0, les inéquations $f(x) \geq 0$ et $x - 1 \geq 0$ ont les mêmes solutions sur l'intervalle [0,5 ; 8].
L'ensemble des solutions de l'inéquation (1) est l'intervalle [1 ; 8].
L'entreprise est bénéficiaire pour une production mensuelle comprise entre 100 et 800 bicyclettes.</td>
<td rowspan="2">Montrer une certaine autonomie dans le traitement de l'information</td>
<td>Tout réponse correctement argumentée utilisant le tableau de variation ou la courbe représentative de la fonction f sera acceptée.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>B.2.b.</td>
<td>D'après le tableau de variation de la fonction f, cette fonction admet sur l'intervalle [1 ; 8] un maximum qui est $40e^{-1,5}$ atteint pour $x = 3$.
$40e^{-1,5} \approx 8,925$.

L'entreprise réalise un bénéfice mensuel maximal de 8925 € pour une production de 300 bicyclettes.</td>
<td>Tout réponse correctement argumentée utilisant le tableau de variation ou la courbe représentative de la fonction f sera acceptée.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>B.2.c.</td>
<td>On peut utiliser le tableau de variation de la fonction f correctement complété avec les solutions dans l'intervalle [0,5 ; 8], notées α et β, de l'équation $f(x) = 8$ ainsi que les tableaux de valeurs suivants :
<table>
<tr><td>x</td><td>2,20</td><td>α</td><td>2,21</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>7,989</td><td>8</td><td>8,015</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>x</td><td>4,08</td><td>β</td><td>4,09</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>9,010</td><td>8</td><td>7,996</td></tr>
</table>
L'entreprise réalise un bénéfice mensuel d'au moins 8000 € pour une production mensuelle comprise entre 221 et 408 bicyclettes.</td>
<td>Raisonner, démontrer, élaborer une démarche</td>
<td>Toute démarche correcte sera valorisée.</td>
<td></td>
</tr>
</table>



Graphique de l'exercice 4 à l'échelle 3/4

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2009

SUJET SORTI

MATHÉMATIQUES

SPECIALITE

Série : ES

Durée de l'épreuve : 3 heures.

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le sujet est composé de QUATRE exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de l'indice des prix de vente des appartements anciens à Paris au quatrième trimestre des années 2000 à 2007.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Indice : y_i	100	108,5	120,7	134,9	154,8	176,4	193,5	213,6

Source : INSEE.

1. Calculer le pourcentage d'augmentation de cet indice de l'année 2000 à l'année 2007.

2. Construire le nuage de points $M_i(x_i\ ; y_i)$ dans le plan (*P*) muni d'un repère orthogonal défini de la manière suivante :

- sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 2 cm pour représenter une année.
- sur l'axe des ordonnées, on placera 100 à l'origine et on choisira 1 cm pour représenter 10 unités.

3. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage. Placer le point G dans le plan (*P*).

4. L'allure de ce nuage permet de penser qu'un ajustement affine est adapté.

a. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite (d) d'ajustement de y en x , obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis au centième.

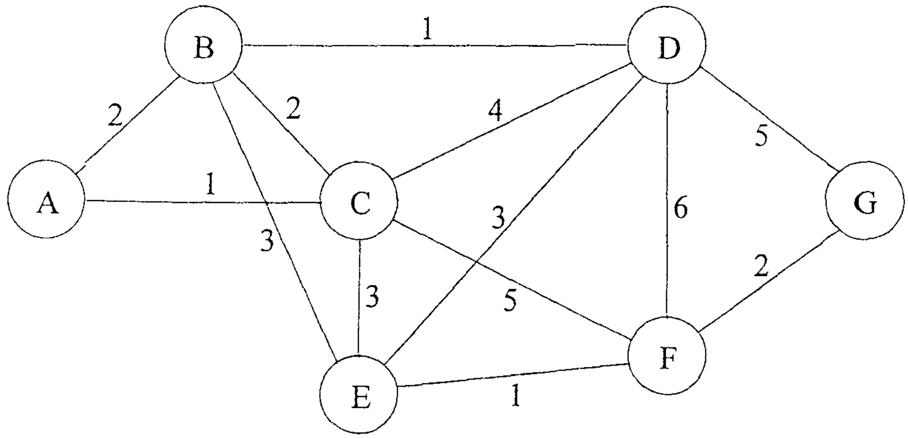
b. Tracer la droite (d) dans le plan (*P*).

5. En supposant que cet ajustement affine reste valable pour les deux années suivantes, estimer l'indice du prix de vente des appartements anciens à Paris au quatrième trimestre 2009. Justifier la réponse.

Exercice 2 (5 points)

(Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Le graphe ci-dessous représente le plan d'une ville. Le sommet A désigne l'emplacement des services techniques. Les sommets B, C, D, E, F et G désignent les emplacements de jardins publics. Une arête représente l'avenue reliant deux emplacements et est pondérée par le nombre de feux tricolores situés sur le trajet.



Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I : On s'intéresse au graphe non pondéré.

1. Répondre sans justification aux quatre questions suivantes :

- **a.** Ce graphe est-il connexe ?
- **b.** Ce graphe est-il complet ?
- **c.** Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ?
- **d.** Ce graphe admet-il un cycle eulérien ?

2. Déterminer, en justifiant, le nombre chromatique de ce graphe.

Partie II : On s'intéresse au graphe pondéré.

Proposer un trajet comportant un minimum de feux tricolores reliant A à G.
La réponse sera justifiée par un algorithme.

Exercice 3 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

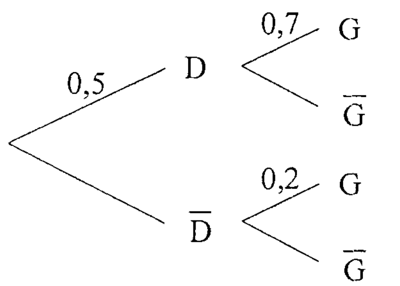
Une salle de jeux comporte deux consoles identiques proposant le même jeu.
Un jour, l'une des deux est déréglée.
Les joueurs ne peuvent pas savoir laquelle des deux est déréglée.

1. Ce jour-là, un joueur choisit au hasard l'une des deux consoles et il joue une partie sur cette console.

On note :

- D l'événement « le joueur choisit la console déréglée » et $\overline{D}$ l'événement contraire.
- G l'événement « le joueur gagne la partie » et $\overline{G}$ l'événement contraire.

Cette situation aléatoire est modélisée par l'arbre incomplet suivant, dans lequel figurent certaines probabilités :



Ainsi 0,7 est la probabilité que le joueur gagne sachant qu'il a choisi la console déréglée.

a. Reproduire cet arbre sur la copie et le compléter.
b. Calculer la probabilité de l'événement « le joueur choisit la console déréglée et il gagne ».
c. Calculer la probabilité de l'événement « le joueur choisit la console non déréglée et il gagne ».
d. Montrer que la probabilité que le joueur gagne est égale à 0,45.
e. Calculer la probabilité que le joueur ait choisi la console déréglée sachant qu'il a gagné.

2. Trois fois successivement et de façon indépendante, un joueur choisit au hasard l'une des deux consoles et joue une partie.

Calculer la probabilité de l'événement « le joueur gagne exactement deux fois ». Le résultat sera donné sous forme décimale arrondie au millième.

Exercice 4 (6 points)
(Commun à tous les candidats)

Partie A - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$ par $f(x)=20(x-1)e^{-0,5x}$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$.

1. **a.** Démontrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$, $f'(x)=10(-x+3)e^{-0,5x}$.

   b. Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f.

2. Construire la courbe représentative (C) de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$. On prendra pour unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

3. Justifier que la fonction F définie sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$ par $F(x) = \dfrac{-40\ (x+1)}{e^{0,5x}}$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$.

4. Calculer la valeur exacte de l'intégrale I définie par $I = \int_{1,5}^{5} f(x)\, dx$.

Partie B – Application économique

Une entreprise produit sur commande des bicyclettes pour des municipalités.
La production mensuelle peut varier de 50 à 800 bicyclettes.
Le bénéfice mensuel réalisé par cette production peut être modélisé par la fonction f de la **partie A** de la façon suivante : si, un mois donné, on produit x centaines de bicyclettes, alors $f(x)$ modélise le bénéfice, exprimé en milliers d'euros, réalisé par l'entreprise ce même mois.
Dans la suite de l'exercice, on utilise ce modèle.

1. **a.** Vérifier que si l'entreprise produit 220 bicyclettes un mois donné, alors elle réalise ce mois là un bénéfice de 7989 euros.

   b. Déterminer le bénéfice réalisé par une production de 408 bicyclettes un mois donné.

2. *Pour cette question, toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte.*
   Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats de la **partie A** et le modèle précédent.
   Justifier chaque réponse.

   a. Combien, pour un mois donné, l'entreprise doit-elle produire au minimum de bicyclettes pour ne pas travailler à perte ?

   b. Combien, pour un mois donné, l'entreprise doit-elle produire de bicyclettes pour réaliser un bénéfice maximum ? Préciser alors ce bénéfice à l'euro près.

   c. Combien, pour un mois donné, l'entreprise doit-elle produire de bicyclettes pour réaliser un bénéfice supérieur à 8000 euros ?

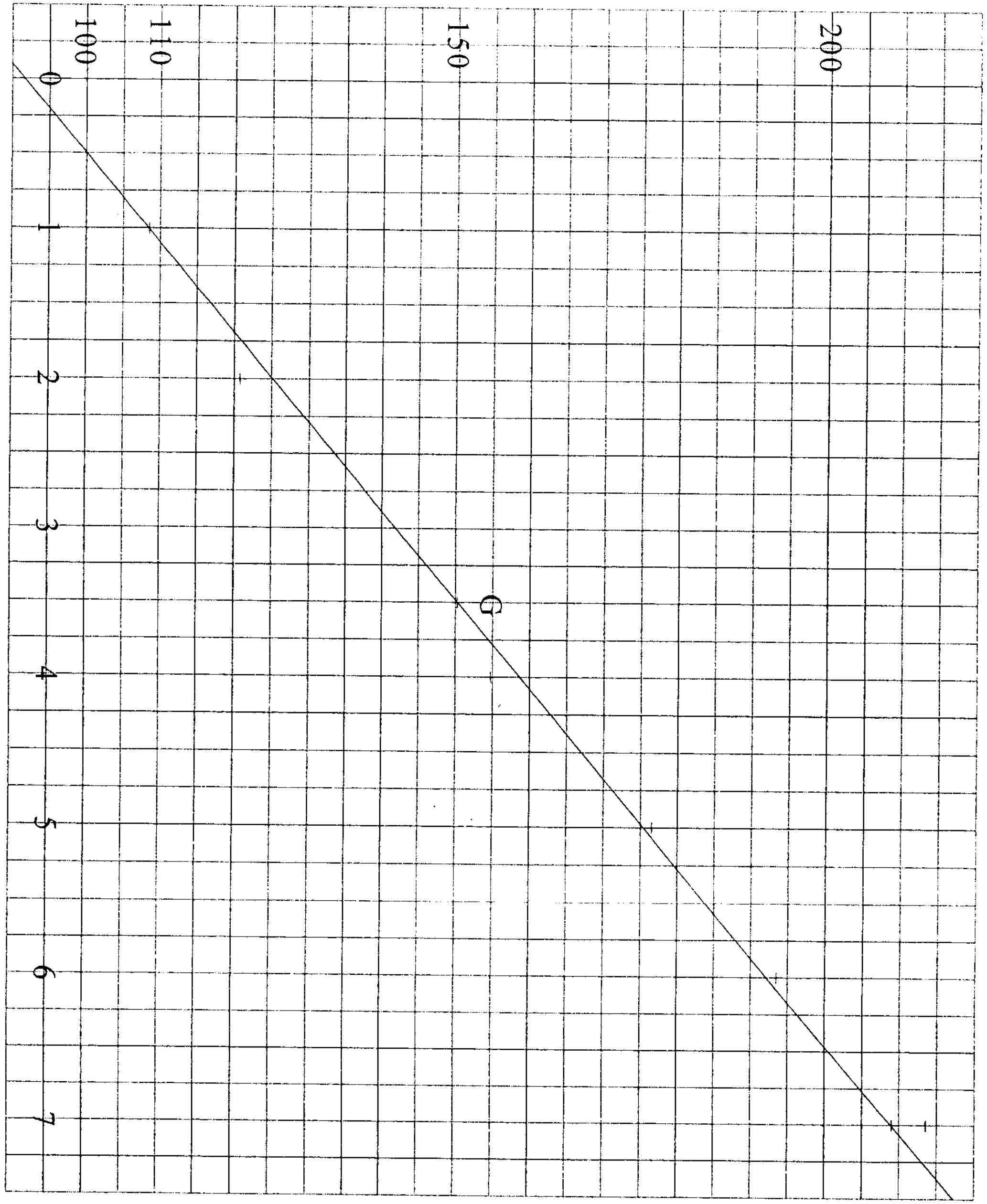
CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

	BACCALAURÉAT GÉNÉRAL	
Série	ES	**SESSION 2009**
Épreuve	MATHÉMATIQUES	**Durée : 3h**
Coef : **5 (obligatoire)** **7 (Spécialité)**	**ELEMENTS DE CORRECTION**	

Exercice 1 (4 points) *(Commun à tous les candidats)*

Question		Réponse	Compétence évoluée	Commentaires	Points
1		L'indice a augmenté de 113,6 % de 2000 à 2007.			
2		Voir graphique.			
3		$G(3{,}5\ ;\ 150{,}3)$. Voir graphique.			
4	a	D'après la calculatrice, $y = 16{,}75x + 91{,}67$.			
	b	Voir graphique.			
5		En prenant $x = 9$, on trouve $y = 242{,}42$. Au quatrième trimestre 2009, l'indice devrait être d'environ 242,4.			


100
110
150
200
0
1
2
3
4
5
6
7
G

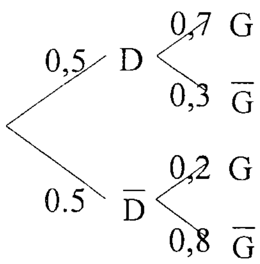
Exercice 2 (5 points) *(Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)*

Question		Réponse	Compétence évoluée	Commentaires	Points
1	a	$f(0)=4$, $f'(1)=0,75$ et $f'(2)=0$.			
	b	$f'(x)<0$ sur $[-2 ; 0[$ et sur $]2 ; 5]$. $f'(x)=0$ pour $x=0$ et $x=2$. $f'(x)>0$ sur $]0 ; 2[$.			
	c	$f(x)>0$ sur $[-2 ; 4[$, $f(x)=0$ pour $x=4$, $f(x)<0$ sur $]4 ; 5]$.			
2	a	g est définie lorsque $f(x)>0$ soit sur $[-2 ; 4[$.			
	b	$g(-2)=2\ln 3$, $g(0)=2\ln 2$ et $g(2)=\ln 5$.		Toute réponse exacte est acceptée	
	c	g' est du signe de f' sur $[-2 ; 4[$ donc g est décroissante sur $[-2 ; 0]$ et sur $[2 ; 4[$ et g est croissante sur $[0 ; 2]$.	Raisonner, démontrer, élaborer une démarche	Toute démarche correcte sera valorisée.	
	d	$\lim\limits_{x \to 4} g(x) = -\infty$. La droite d'équation $x=4$ est asymptote à la courbe en 4.			
	e	$\begin{array}{c\|ccccccc} x & -2 & & 0 & & 2 & & 4 \\ \hline g(x) & 2\ln 3 & \searrow & 2\ln 2 & \nearrow & \ln 5 & \searrow & -\infty \end{array}$			

Exercice 2 (5 points) *(Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)*

<table>
<tr><th colspan="3">Question</th><th>Réponse</th><th>Compétence évoluée</th><th>Commentaires</th><th>Points</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Partie I</td><td rowspan="4">1</td><td>a</td><td>Oui</td><td rowspan="4">Evaluer , critiquer un résultat, vérifier la validité d'un résultat ou d'une démarche</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b</td><td>Non</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c</td><td>Oui</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>d</td><td>Non</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td><td>CDEF est un sous-graphe complet d'ordre 4.
Le nombre chromatique est donc supérieur ou égal à 4.
On trouve une coloration avec 4 couleurs, par exemple :
Première couleur : C et G,
Deuxième couleur : D et A,
Troisième couleur : F et B,
Quatrième couleur : E.
Le nombre chromatique est donc 4.</td><td>Raisonner, démontrer, élaborer une démarche</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Partie II</td><td>L'algorithme de Dijkstra donne comme chemin le plus court ACEFG avec 7 feux tricolores.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Exercice 3 (5 points) *(Commun à tous les candidats)*

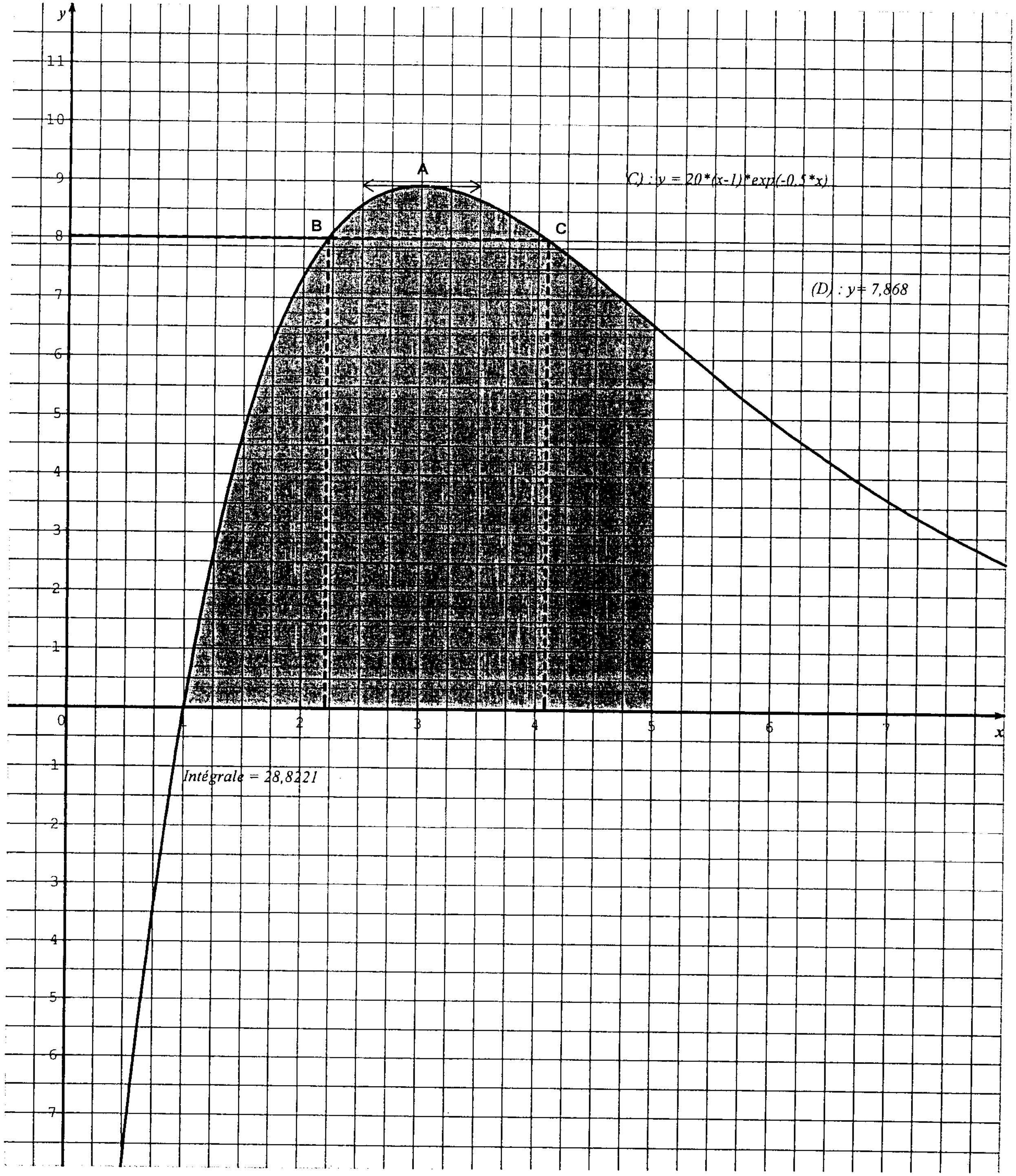
Question		Réponse	Compétence	Commentaires	Points
1	a				
	b	$p(D \cap G) = p(D) \times p_D(G) = 0,35$			
	c	$p(\overline{D} \cap G) = 0,5 \times 0,2 = 0,10$			
	d	$p(G) = p(D \cap G) + p(\overline{D} \cap G) =$ $= 0,35 + 0,10 = 0,45.$			
	e	$p_G(D) = \dfrac{p(D \cap G)}{p(G)} = \dfrac{0,35}{0,45} = \dfrac{7}{9}$ donc $p_G(D) \simeq 0,778.$			
2		$p(\text{Gagner exactement 2 fois}) = 3 \times 0,45^2 \times 0,55$ donc $p(\text{Gagner exactement 2 fois}) \simeq 0,334.$			

Exercice 4 (6 points) :

<table>
<tr><th>Question</th><th>Réponse</th><th>Compétences évoluée</th><th>Commentaires</th><th>Points</th></tr>
<tr><td>A.1.a.</td><td>$f'(x) = 20 \times [1 \times e^{-0,5x} + (x-1) \times (-0,5) \times e^{-0,5x}]$
$f'(x) = 10 \times e^{-0,5x} \times (3 - x)$.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A.1.b.</td><td>Comme la fonction exponentielle est à valeur strictement positive sur R et 10 > 0, d'après le signe d'un produit, $f'(x)$ et $3 - x$ ont le même signe. D'où le tableau de variation de la fonction f :
<table>
<tr><td>x</td><td>0,5</td><td></td><td>3</td><td></td><td>8</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>−</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$-10e^{-0,25}$</td><td>$\nearrow$</td><td>$40e^{-1,5}$</td><td>$\searrow$</td><td>$140e^{-4}$</td></tr>
</table></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A.2.</td><td>Voir figure annexe.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A.3.</td><td>F est dérivable sur l'intervalle [0,5 ; 8] et F' = f.
donc F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle [0,5 ; 8].</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A.4.</td><td>$\mathrm{I} = \int_{1,5}^{5} f(x)\,dx$.   I = F(5) − F(1,5)
$\mathrm{I} = -240\,e^{-2,5} + 100\,e^{-0,75}$.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B.1.a.</td><td>$f(2,2) \approx 7,989$ donc la fabrication mensuelle de 220 bicyclettes permet un bénéfice mensuel de 7989 €.</td><td rowspan="2">Montrer une certaine autonomie dans le traitement de l'information</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B.1.b.</td><td>$f(4.08) \approx 8,010$ donc la fabrication mensuelle de 408 bicyclettes permet un bénéfice mensuel de 8010 €.</td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>B.2.a.</td>
<td>L'entreprise ne travaille pas à perte signifie qu'elle réalise un bénéfice mensuel positif ou nul.
Il s'agit donc de résoudre dans sur l'intervalle [0,5 ; 8] l'inéquation (1) $f(x) \geq 0$. On peut le faire algébriquement :
Comme la fonction exponentielle est à valeur strictement positive sur R et qu'on a 20 >0, les inéquations $f(x) \geq 0$ et $x - 1 \geq 0$ ont les mêmes solutions sur l'intervalle [0,5 ; 8].
L'ensemble des solutions de l'inéquation (1) est l'intervalle [1 ; 8].
L'entreprise est bénéficiaire pour une production mensuelle comprise entre 100 et 800 bicyclettes.</td>
<td rowspan="2">Montrer une certaine autonomie dans le traitement de l'information</td>
<td>Tout réponse correctement argumentée utilisant le tableau de variation ou la courbe représentative de la fonction f sera acceptée.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>B.2.b.</td>
<td>D'après le tableau de variation de la fonction f, cette fonction admet sur l'intervalle [1 ; 8] un maximum qui est $40e^{-1,5}$ atteint pour $x = 3$.
$40e^{-1,5} \approx 8,925$.

L'entreprise réalise un bénéfice mensuel maximal de 8925 € pour une production de 300 bicyclettes.</td>
<td>Tout réponse correctement argumentée utilisant le tableau de variation ou la courbe représentative de la fonction f sera acceptée.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>B.2.c.</td>
<td>On peut utiliser le tableau de variation de la fonction f correctement complété avec les solutions dans l'intervalle [0,5 ; 8], notées α et β, de l'équation $f(x) = 8$ ainsi que les tableaux de valeurs suivants :
<table>
<tr><td>x</td><td>2,20</td><td>α</td><td>2,21</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>7,989</td><td>8</td><td>8,015</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>x</td><td>4,08</td><td>β</td><td>4,09</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>9,010</td><td>8</td><td>7,996</td></tr>
</table>
L'entreprise réalise un bénéfice mensuel d'au moins 8000 € pour une production mensuelle comprise entre 221 et 408 bicyclettes.</td>
<td>Raisonner, démontrer, élaborer une démarche</td>
<td>Toute démarche correcte sera valorisée.</td>
<td></td>
</tr>
</table>



Graphique de l'exercice 4 à l'échelle 3/4

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2010

MATHÉMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte deux annexes à rendre avec la copie.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

<u>EXERCICE 1</u> : (6 points)

Commun à tous les candidats

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

<u>Partie A</u> :

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$.

1) Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels IR par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).

2) On considère l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$. Résoudre l'équation différentielle (E').

3) Soit v une fonction définie et dérivable sur IR. Montrer que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E').

4) En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

5) Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

<u>Partie B</u> :

On considère la fonction f_k définie sur l'ensemble IR des nombres réels par $f_k(x) = (x + k)e^{-x}$ où k est un nombre réel donné.
On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal.

1) Montrer que la fonction f_k admet un maximum en $xk=21$.

2) On note M_k le point de la courbe $\mathcal{C}_k$ d'abscisse $12k$. Montrer que le point M_k appartient à la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$.

3) Sur le graphique donné en annexe 1 (à rendre avec la copie), le repère est orthogonal mais l'unité sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées ainsi que les noms des courbes n'apparaissent pas. Sur ce graphique, on a tracé deux courbes :

- la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$;
- la courbe $\mathcal{C}_k$ d'équation $y = (x + k)e^{-x}$ pour un certain nombre réel k donné.

a) Identifier les courbes et les nommer sur l'annexe 1 (à rendre avec la copie).

b) En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k correspondante ainsi que l'unité graphique sur chacun des axes.

4) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^2 (x + 2)e^{-x}dx$. Donner une interprétation graphique de cette intégrale.

<u>EXERCICE 2</u> : (5 points)

Commun à tous les candidats

1) Restitution organisée de connaissances.

Démontrer à l'aide de la définition et des deux propriétés ci-dessous que si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.

Définition : deux suites sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante et la différence des deux converge vers 0.

Propriété 1 : si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante alors, pour tout entier naturel n, $v_n > u_n$.

Propriété 2 : toute suite croissante et majorée converge ; toute suite décroissante et minorée converge.

Dans la suite de cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

2) Dans les cas suivants, les suites (u_n) et (v_n) ont-elles la même limite ? Sont-elles adjacentes ? Justifier les réponses.

a) $u_n = 1 - 10^{-n}$ et $v_n = 1 + 10^{-n}$;

b) $u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \ln(n+1) + \dfrac{1}{n}$;

c) $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

3) On considère un nombre réel a positif et les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout nombre entier naturel n non nul par : $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \ln\left(a + \dfrac{1}{n}\right)$.

Existe-t-il une valeur de a telle que les suites soient adjacentes ?

EXERCICE 3 : (4 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chaque question, trois réponses sont proposées, une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de la question suivi de la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

1) Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 7 sont blanches et 3 sont noires. On tire simultanément 3 boules de l'urne. La probabilité de tirer 2 boules blanches et 1 boule noire est égale à :

- $\frac{21}{40}$
- $\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{1}{3}$
- $\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}\times\frac{1}{3}$

2) De la même urne, on tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ; on procède ainsi à 5 tirages successifs avec remise. La probabilité d'avoir obtenu 3 boules noires et 2 boules blanches est égale à:

- $\frac{3^3\times 7^2}{10^5}$
- $\binom{5}{2}\times\left(\frac{3}{10}\right)^2\times\left(\frac{7}{10}\right)^3$
- $\binom{5}{2}\times\left(\frac{3}{10}\right)^3\times\left(\frac{7}{10}\right)^2$

3) De la même urne, on tire une seule boule. Si elle est blanche, on lance un dé cubique (dont les faces sont numérotées de 1 à 6). Si la boule est noire, on lance un dé tétraédrique (dont les faces sont numérotées de 1 à 4). On suppose les dés bien équilibrés. Le joueur gagne s'il obtient le numéro 1. Sachant que le joueur a gagné, la probabilité qu'il ait tiré une boule blanche est égale à:

- $\frac{7}{60}$
- $\frac{14}{23}$
- $\dfrac{\frac{7}{10}\times\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}$

4) On note X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un nombre réel strictement positif). La probabilité de l'événement $[1 \leq X \leq 3]$ est égale à :

- $e^{-\lambda}-e^{-3\lambda}$
- $e^{-3\lambda}-e^{-\lambda}$
- $\frac{e^{-\lambda}}{e^{-3\lambda}}$

EXERCICE 4 : **(5 points)**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, on considère le point A d'affixe 2 et le cercle c de centre O passant par A.
Dans tout l'exercice on note α le nombre complexe $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$ et $\overline{\alpha}$ le nombre complexe conjugué du nombre complexe α.

1) a) Démontrer que $\alpha^2 - 4\alpha = 2\overline{\alpha} - 8$.

b) Démontrer que les points B et C d'affixes respectives α et $\overline{\alpha}$ appartiennent au cercle c .

2) Soit D un point du cercle c d'affixe $2e^{i\theta}$ où θ est un nombre réel de l'intervalle $]-\pi ; \pi]$

a) Construire sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie) le point E image du point D par la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

b) Justifier que le point E a pour affixe $z_E = \alpha e^{i\theta}$.

3) Soient F et G les milieux respectifs des segments $[BD]$ et $[CE]$.

a) Justifier que le point F a pour affixe $z_F = \dfrac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$.

b) On admet que le point G a pour affixe $z_G = \dfrac{\alpha e^{i\theta} + \overline{\alpha}}{2}$.

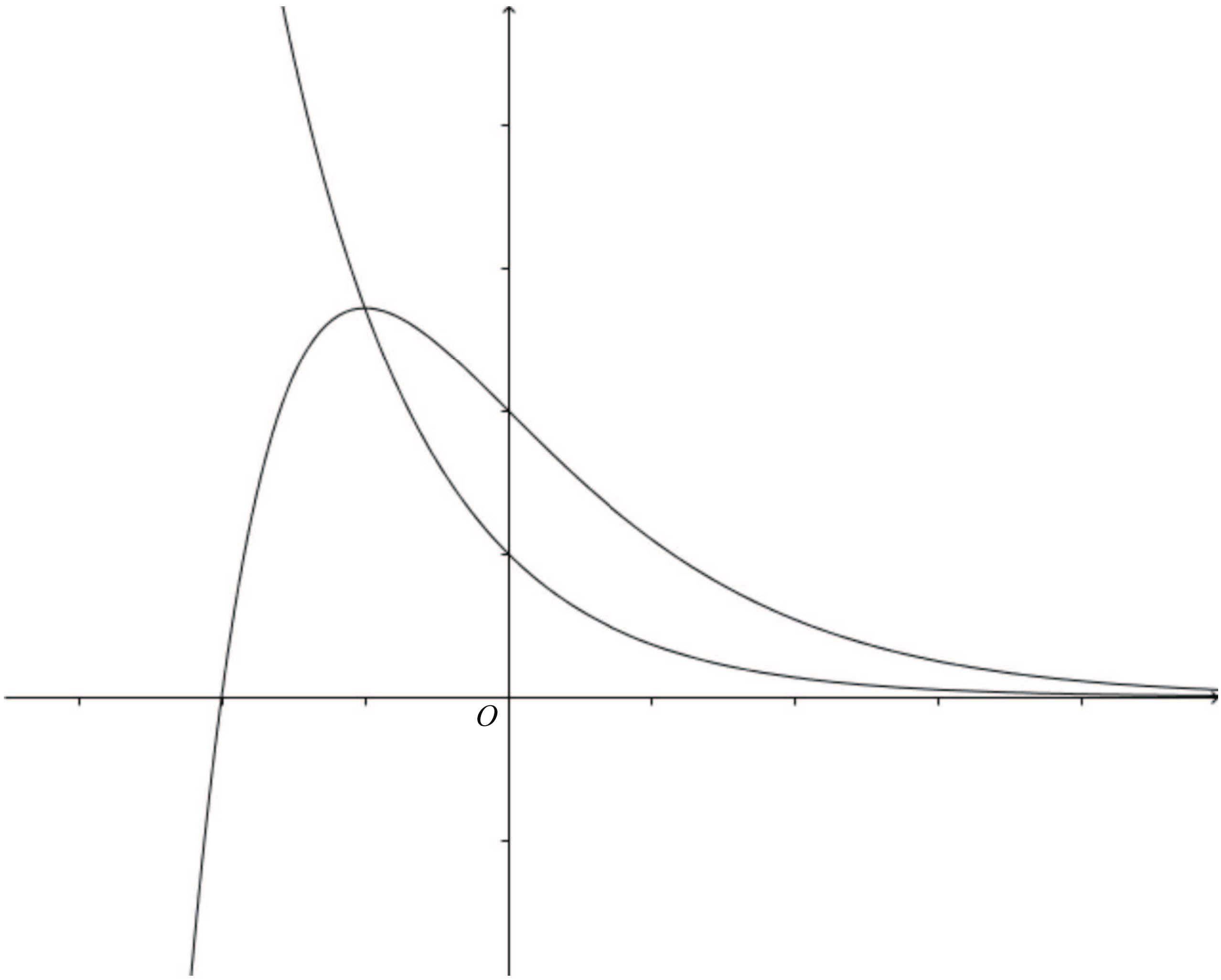
Démontrer que $\dfrac{z_G - 2}{z_F - 2} = \dfrac{\alpha}{2}$. On pourra utiliser la question **1) a)**.
En déduire que le triangle AFG est équilatéral.

4) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on conjecture qu'il existe une position du point D, défini à la question 2, pour laquelle la longueur du coté AF du triangle AFG est minimale.
On admet que $AF^2 = 4 - 3\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-\pi ; +\pi]$ par $f(x) = 4 - 3\cos x + \sqrt{3}\sin x$.

Le tableau ci-dessous donne les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi ; +\pi]$.
Compléter ce tableau de variation. Permet-il de valider la conjecture ? Justifier.

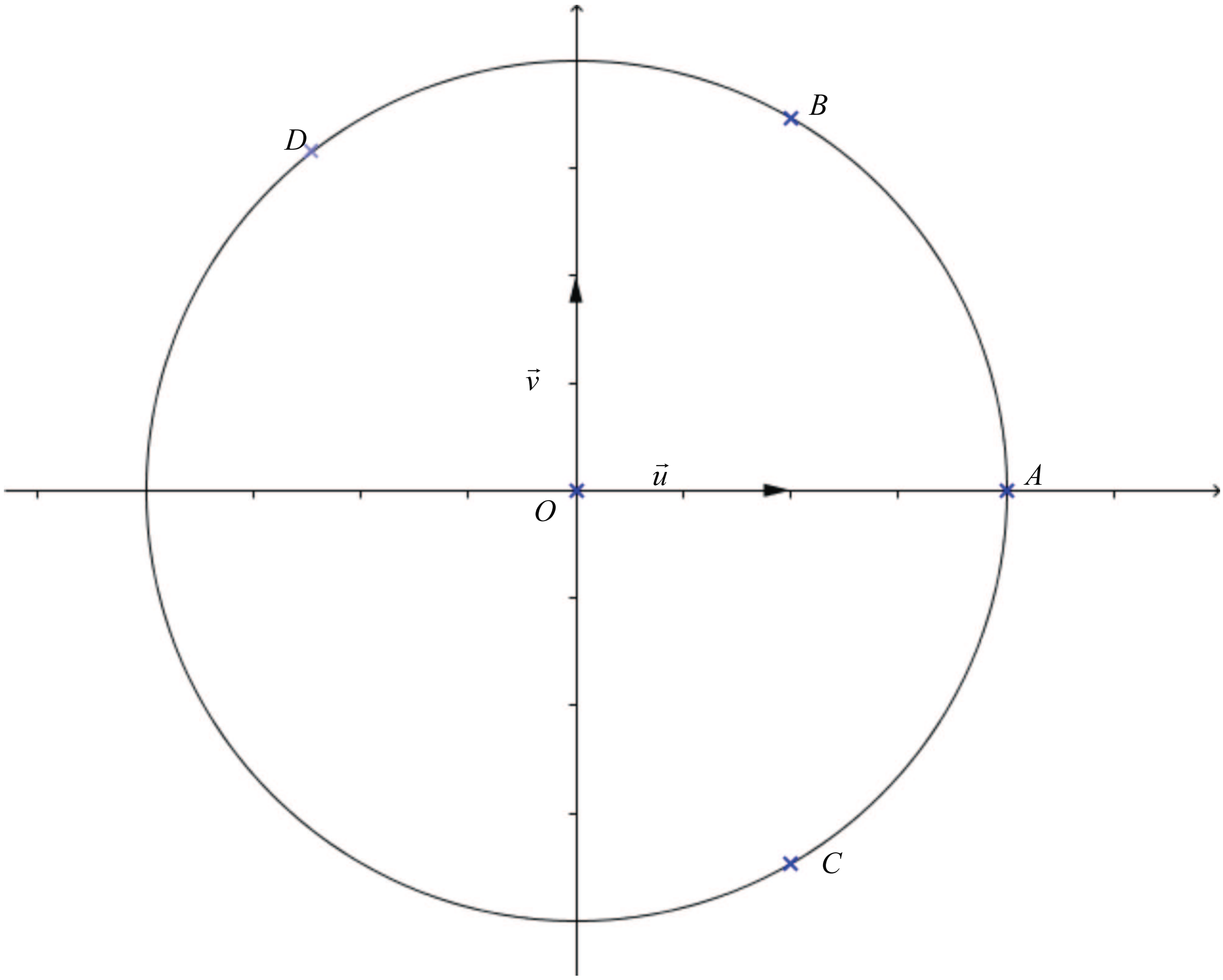
x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{6}$		$\dfrac{5\pi}{6}$		π
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

ANNEXE 1 (Exercice 1)
(à rendre avec la copie)



ANNEXE 2 (Exercice 4)
(à rendre avec la copie)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)



CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

Baccalauréat général
Série S – Session 2010
Eléments de correction

Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des membres des jurys. La règle de confidentialité relative aux commissions d'entente et aux travaux des jurys s'applique à son contenu.

Outre les compétences de base (C1: restituer et mobiliser des connaissances, C2:appliquer une méthode), le sujet permet d'évaluer des compétences évoluées parmi les suivantes :
C3 : Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter
C4: Raisonner, démontrer, élaborer une démarche
C5: Évaluer, critiquer un résultat, vérifier la validité d' un résultat ou d' une méthode.

Exercice 1 : (6 points) Commun à tous les candidats

	Consignes de correction	barème
A1. Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).		
A2. Résoudre l'équation différentielle (E').		
A3. équivalence à démontrer		
A4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).		
A5. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.		
B1. Montrer que la fonction f_k admet un maximum en $x = 1 - k$.		
B2. Montrer que le point M_k appartient à la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$		
B3.a) Identifier les courbes et les nommer sur l'annexe		
B3.b déterminer la valeur du nombre réel k correspondante ainsi que l'unité graphique sur chacun des axes, en expliquant la démarche		
B4. Calculer $\int_0^2 (x+2)e^{-x}dx.$ Donner une interprétation graphique de cette intégrale.		

Exercice 2 : (5 points) Commun à tous les candidats

	Consignes de correction	Barème
1. ROC		
2.a) (u_n) et (v_n) sont adjacentes		
2.b (u_n) et (v_n) ont pour limite $+\infty$. Elles ne sont pas adjacentes.		
2.c) (u_n) et (v_n) ont pour limite 1 et ne sont pas adjacentes.		
3. Existe-t-il une valeur de a telle que les suites soient adjacentes		

Exercice 3 : **(4 points) Commun à tous les candidats QCM**

1. $\dfrac{21}{40}$ **2.** $\dbinom{5}{2}\times\left(\dfrac{3}{10}\right)^3\times\left(\dfrac{7}{10}\right)^2$ **3.** $\dfrac{14}{23}$ **4.** $e^{-\lambda}-e^{-3\lambda}$

Exercice 4 : **(5 points) (candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité)**

	Consignes de correction	Barème
1. a) Démontrer que $\alpha^2-4\alpha=2\overline{\alpha}-8$.		
1. b) Démontrer que les points B et C appartiennent au cercle $\mathscr{C}$		
2. a) Construire sur la figure le point E		
2. b) Justifier que le point E a pour affixe $z_E=\alpha e^{i\theta}$.		
3. a) Justifier que le point F a pour affixe $z_F=\dfrac{\alpha}{2}+e^{i\theta}$.		
3. b) Démontrer que $\dfrac{z_G-2}{z_F-2}=\dfrac{\alpha}{2}$. En déduire la nature du triangle AFG		
4. Compléter le tableau de variation et conclure		

Exercice 4 : **(5 points) (candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité)**

	Consignes de correction	Barème
1.a) Déterminer les images respectives du point A et du point Ω		
1.b) déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation		
1.c) image par la transformation T du cercle $(\mathscr{C})$		
2.a) Construire le point A'		
2.b) Déterminer le module et un argument de $\dfrac{z'-2}{z}$.		
3.a) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation r		
3.b) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe		
3.c) Quel est le lieu géométrique du point M_1		

ELEMENTS DE CORRECTION DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES (SERIE S)

Exercice 1 :

Partie A

1) u est dérivable sur IR comme produit de fonctions dérivables, et pour tout réel x :
$u'(x) = e^{-x} - x\, e^{-x}$.
Donc pour tout réel x : $u'(x) + u(x) = e^{-x}$. u est donc bien solution de (E).

2) Les solutions de (E') sont de la forme : $y(x) = C\, e^{-x}$, où C est un réel fixé.

3) v est solution de (E) si et seulement si pour tout réel x $v'(x) + v(x) = e^{-x}$, ce qui équivaut à :
pour tout réel x $v'(x) + v(x) = u'(x) + u(x)$, ce qui équivaut à :
pour tout réel x $(v - u)'(x) + (v - u)(x) = 0$, ce qui équivaut à :
v – u est solution de (E').

4) De ce qui précède, on déduit que les solutions de (E) sont les fonctions de la forme :
$v(x) = Ce^{-x} + xe^{-x}$, où C est un réel fixé.

5) g est solution de (E) donc il existe un réel C tel que pour tout x : $g(x) = Ce^{-x} + xe^{-x}$.
Comme $g(0) = 2$, on en déduit que C = 2.

Partie B

1) Pour tout réel k la fonction f_k est dérivable sur IR comme produit de fonctions dérivables, et pour tout réel x : $f_k'(x) = (1 - (x + k))\, e^{-x}$.
Pour tout réel x : $e^{-x} > 0$, donc $f_k'(x)$ est du signe de $(1 - x - k)$ à savoir positif sur $]-\infty ; 1 - k]$, négatif sinon. Du lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction, on déduit que la fonction f_k admet un maximum pour $x = 1 - k$.

2) M_k est le point de $\mathscr{C}_k$ d'abscisse $1 - k$ donc son ordonnée est $f_k(1 - k) = e^{k-1} = e^{-(1-k)}$. Il est donc bien sur Γ.

3) a) Par composition, la fonction représentée par Γ est décroissante, alors que f_k n'est pas monotone, les courbes sont donc faciles à identifier.

b) Γ passe par le point de coordonnées (0 ; 1). On en déduit que l'unité graphique en ordonnée est 2cm. Comme $f_k(0) = k$, on « lit » k =2.
$f_2(x) = 0$ si et seulement si $x = -2$, donc la courbe $\mathscr{C}_2$ passe par le point de coordonnées (-2 ; 0).
On en déduit que l'unité graphique en abscisse est également 2cm.

<u>Remarque</u> : on retrouve, comme par hasard, la fonction g de la partie A !

4) En dérivant le polynôme, et intégrant l'exponentielle, on trouve :

$$I = \left[-(x+2)e^{-x}\right]_0^2 - \int_0^2 -e^{-x}dx = -4e^{-2} + 2 + \left[-e^{-x}\right]_0^2 = 3 - 5e^{-2}$$

La fonction f_k étant positive sur [0 ; 2], on a ainsi calculé l'aire (en unités d'aire) délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_k$ et les droites d'équations x = 0 et x = 2.

Exercice 2 :

1) Soient (u_n) et (v_n) des suites adjacentes, avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante.
De la première propriété, on déduit que (u_n) est majorée par v_0 et que (v_n) est minorée par u_0.
De la deuxième propriété, on déduit que les suites (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers des réels U et V. Comme leur différence des deux suites converge vers 0, $U = V$.

2) a) Les deux suites sont adjacentes, car :
(u_n) est croissante (pour tout entier n : $u_{n+1} - u_n = 0{,}9 \times 10^{-n}$),
(v_n) décroissante, (pour tout entier n : $v_{n+1} - v_n = -0{,}9 \times 10^{-n}$),
pour tout entier n : $u_n \leq v_n$
$v_n - u_n = 2 \times 10^{-n}$ qui converge bien vers 0.
Ces suites ont donc la même limite qui est 1, par propriété des suites géométriques.

b) (u_n) et (v_n) ont pour limite $+\infty$. Elles ne peuvent de ce fait pas être adjacentes.

c) (u_n) et (v_n) ont pour limite 1 (par des propriétés usuelles sur les limites), mais elles ne sont pas adjacentes, la suite (v_n) n'étant pas monotone.

3) (u_n) est croissante, (v_n) décroissante (par des propriétés usuelles sur les variations de fonctions). La suite (u_n) converge vers 1.
Si $a = 0$, la suite (v_n) converge vers $-\infty$, sinon elle converge vers $\ln(a)$ (par des propriétés usuelles sur les limites).
Pour que les suites soient adjacentes, il faut que $a = \mathrm{e}$.
Réciproquement, lorsque $a = \mathrm{e}$, les suites vérifient bien la définition de suites adjacentes.

Exercice 3 :

1) $$\frac{\binom{7}{2}\binom{3}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{21}{40};$$

2) Comme la boule est remise après chaque tirage, les tirages sont indépendants. Il ne faut pas oublier que l'ordre de tirage n'est pas pris en compte. La probabilité demandée est donc :
$$\binom{5}{2}\left(\frac{3}{10}\right)^3\left(\frac{7}{10}\right)^2$$

3) Si on note N l'événement la boule tirée est noire, B l'événement la boule tirée est blanche, et U le nombre obtenu est 1, la probabilité demandée est :
$$P_U(B) = \frac{P(U\cap B)}{P(U)} = \frac{P(U\cap B)}{P_B(U)\times P(B) + P_N(U)\times P(N)} = \frac{\frac{7}{10}\times\frac{1}{6}}{\frac{7}{10}\times\frac{1}{6}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}} = \frac{14}{23}.$$

4) $P(1 \leq X \leq 3) = \int_1^3 \lambda e^{-\lambda t}dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_1^3 = e^{-\lambda} - e^{-3\lambda}$.

Exercice 4 : **(ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE)**

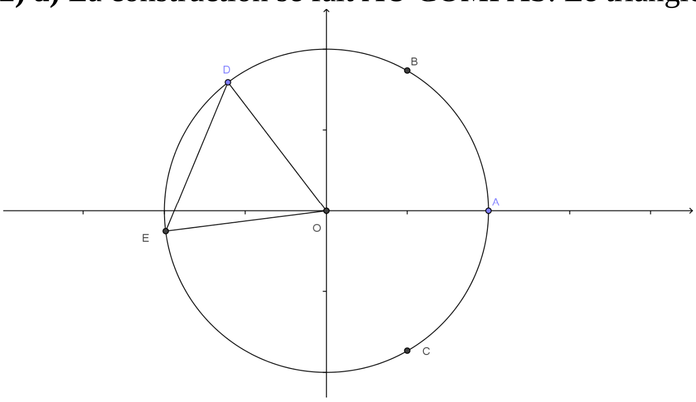
1) a) $\alpha^2-4\alpha=\left(1+i\sqrt{3}\right)^2-4\left(1+i\sqrt{3}\right)=1-3-4+i\left(2\sqrt{3}-4\sqrt{3}\right)=-6-2\sqrt{3}i$

$2\overline{\alpha}-8=2\left(1-i\sqrt{3}\right)-8=-6-2\sqrt{3}i$

b) $|\alpha|=|\overline{\alpha}|=2$

Les points *B* et *C* sont donc sur le cercle de centre *O* et de rayon 2 (qui passe par *A*).

2) a) La construction se fait AU COMPAS. Le triangle *ODE* est équilatéral direct.



b) D'après l'expression complexe des rotations, on a :

$z_E=e^{i\frac{\pi}{3}}z_D$. Comme $\alpha=2e^{i\frac{\pi}{3}}$, on en déduit $z_E=\alpha e^{i\theta}$.

3) a) $z_F=\dfrac{z_B+z_D}{2}=\dfrac{\alpha+2e^{i\theta}}{2}=\dfrac{\alpha}{2}+e^{i\theta}$.

b) $\dfrac{z_G-2}{z_F-2}=\dfrac{\dfrac{\alpha e^{i\theta}+\overline{\alpha}}{2}-2}{\dfrac{\alpha}{2}+e^{i\theta}-2}=\dfrac{\alpha e^{i\theta}+\overline{\alpha}-4}{\alpha+2e^{i\theta}-4}$

Or d'après la question **1) a)** : $\alpha(\alpha-4)=2\left(\overline{\alpha}-4\right)$ d'où : $\dfrac{z_G-2}{z_F-2}=\dfrac{\dfrac{\alpha(\alpha-4)}{2}+\alpha e^{i\theta}}{\alpha+2e^{i\theta}-4}=\dfrac{\alpha\left(\alpha-4+2e^{i\theta}\right)}{2\left(\alpha-4+2e^{i\theta}\right)}=\dfrac{\alpha}{2}$.

$\dfrac{\alpha}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$, donc $\dfrac{AG}{AF}=\dfrac{|z_G-2|}{|z_F-2|}=1$ et $\left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AG}\right)=\arg\left(\dfrac{z_G-2}{z_F-2}\right)=\dfrac{\pi}{3}$ (à 2π – près).

On en déduit que le triangle *AFG* est équilatéral.

4) $f(-\pi)=f(\pi)=7$; $f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=4-2\sqrt{3}$; $f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=4+2\sqrt{3}$.

La fonction *f* admet un minimum pour $x=-\dfrac{\pi}{6}$, et ce minimum est positif. La conjecture est donc validée : *AF* est minimum pour $x=-\dfrac{\pi}{6}$.

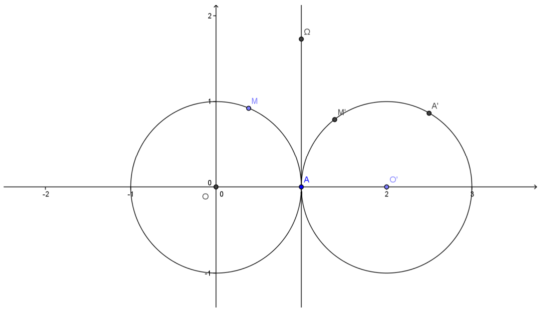
Exercice 4 : **(ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE)**

1) a) L'image de A a pour affixe 1, celle de Ω a pour affixe $1+i\sqrt{3}$.
On constate que les deux points sont invariants.

b) On reconnait l'expression complexe d'une similitude indirecte de rapport 1.
Du fait de l'invariance des points A et Ω on déduit qu'il s'agit de la réflexion d'axe $(A\Omega)$, c'est-à-dire la droite d'équation $x = 1$.

c) L'image d'un cercle par une similitude est un cercle de centre l'image du centre et de rayon le rayon multiplié par le rapport de la similitude (qui ici vaut 1).
L'image de O a pour affixe 2. L'image du cercle $(\mathscr{C})$ par T est donc le cercle de centre le point O' d'affixe 2 et de rayon 1.

2) a)



b) $\left|\dfrac{z'-2}{z}\right| = \dfrac{O'M'}{OM} = 1$ et $\arg\left(\dfrac{z'-2}{z}\right) = \left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{O'M'}\right) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

On a donc : $\dfrac{z'-2}{z} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ d'où $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z + 2$.

c) On reconnait l'expression complexe d'une similitude directe, de rapport $\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$, d'angle en radians $\arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$, et de centre d'affixe α tel que $\alpha = e^{i\frac{\pi}{3}}\alpha + 2$, donc $\alpha = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, qui est l'affixe de Ω. La transformation r est la rotation de centre Ω d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ radians.

3) Remarque : le point M' est défini précédemment pour des points M du cercle $(\mathscr{C})$. Il faut donc comprendre dans cette question que l'on définit les points M_1 également dans ce cas.

Avec des notations évidentes, on a : $z_{M_1} = \dfrac{z_M + z_{M'}}{2} = \dfrac{1+e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} z_M + 1$.

On déduit de cette expression que M_1 est l'image de M par une similitude directe.
Ainsi, lorsque M décrit le cercle $(\mathscr{C})$, M_1 décrit également un cercle.

Comme $\left|z_{M_1} - 1\right| = \left|\dfrac{1+e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right| \left|z_M\right|$, on en déduit que lorsque M décrit le cercle $(\mathscr{C})$, le point M_1 décrit le cercle de centre A et de rayon $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2010

MATHÉMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte une annexe à rendre avec la copie.

Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

EXERCICE 1 : (6 points)

Commun à tous les candidats

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A :

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$.

1) Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels IR par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).

2) On considère l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$. Résoudre l'équation différentielle (E').

3) Soit v une fonction définie et dérivable sur IR. Montrer que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E').

4) En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

5) Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Partie B :

On considère la fonction f_k définie sur l'ensemble IR des nombres réels par $f_k(x) = (x + k)e^{-x}$ où k est un nombre réel donné.
On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal.

1) Montrer que la fonction f_k admet un maximum en $xk=2$.

2) On note M_k le point de la courbe $\mathcal{C}_k$ d'abscisse $1\,2\,k$. Montrer que le point M_k appartient à la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$.

3) Sur le graphique donné en annexe 1 (à rendre avec la copie), le repère est orthogonal mais l'unité sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées ainsi que les noms des courbes n'apparaissent pas. Sur ce graphique, on a tracé deux courbes :

- la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$;
- la courbe $\mathcal{C}_k$ d'équation $y = (x + k)e^{-x}$ pour un certain nombre réel k donné.

a) Identifier les courbes et les nommer sur l'annexe 1 (à rendre avec la copie).

b) En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k correspondante ainsi que l'unité graphique sur chacun des axes.

4) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^2 (x + 2)e^{-x}dx$. Donner une interprétation graphique de cette intégrale.

EXERCICE 2 : (5 points)

Commun à tous les candidats

1) Restitution organisée de connaissances.

Démontrer à l'aide de la définition et des deux propriétés ci-dessous que si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.

Définition : deux suites sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante et la différence des deux converge vers 0.

Propriété 1 : si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante alors, pour tout entier naturel n, $v_n > u_n$.

Propriété 2 : toute suite croissante et majorée converge ; toute suite décroissante et minorée converge.

Dans la suite de cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

2) Dans les cas suivants, les suites (u_n) et (v_n) ont-elles la même limite ? Sont-elles adjacentes ? Justifier les réponses.

a) $u_n = 1 - 10^{-n}$ et $v_n = 1 + 10^{-n}$;

b) $u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \ln(n+1) + \dfrac{1}{n}$;

c) $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

3) On considère un nombre réel a positif et les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout nombre entier naturel n non nul par : $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \ln\left(a + \dfrac{1}{n}\right)$.

Existe-t-il une valeur de a telle que les suites soient adjacentes ?

EXERCICE 3 : (4 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chaque question, trois réponses sont proposées, une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de la question suivi de la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

1) Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 7 sont blanches et 3 sont noires. On tire simultanément 3 boules de l'urne. La probabilité de tirer 2 boules blanches et 1 boule noire est égale à :

- $\frac{21}{40}$
- $\frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{1}{3}$
- $\frac{7}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{1}{3}$

2) De la même urne, on tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ; on procède ainsi à 5 tirages successifs avec remise. La probabilité d'avoir obtenu 3 boules noires et 2 boules blanches est égale à:

- $\frac{3^3 \times 7^2}{10^5}$
- $\binom{5}{2} \times \left(\frac{3}{10}\right)^2 \times \left(\frac{7}{10}\right)^3$
- $\binom{5}{2} \times \left(\frac{3}{10}\right)^3 \times \left(\frac{7}{10}\right)^2$

3) De la même urne, on tire une seule boule. Si elle est blanche, on lance un dé cubique (dont les faces sont numérotées de 1 à 6). Si la boule est noire, on lance un dé tétraédrique (dont les faces sont numérotées de 1 à 4). On suppose les dés bien équilibrés. Le joueur gagne s'il obtient le numéro 1. Sachant que le joueur a gagné, la probabilité qu'il ait tiré une boule blanche est égale à:

- $\frac{7}{60}$
- $\frac{14}{23}$
- $\dfrac{\frac{7}{10} \times \frac{1}{6}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}$

4) On note X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un nombre réel strictement positif). La probabilité de l'événement $[1 \leq X \leq 3]$ est égale à :

- $e^{-\lambda} - e^{-3\lambda}$
- $e^{-3\lambda} - e^{-\lambda}$
- $\frac{e^{-\lambda}}{e^{-3\lambda}}$

EXERCICE 4 : (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans tout l'exercice, $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan complexe (unité graphique : 4 cm).

On désigne par A le point d'affixe $z_A = 1$.

1) On considère la transformation T du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point d'affixe $-\bar{z}+2$.

a) Déterminer les images respectives par la transformation T du point A et du point Ω d'affixe $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation T.

c) Déterminer l'image par la transformation T du cercle (c) de centre O et de rayon 1.

2) (c') désigne le cercle de centre O' d'affixe 2 et de rayon 1.

a) Construire le point A' appartenant au cercle (c') tel que : $(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{O'A'}) = \frac{\pi}{3}$ [modulo 2π].

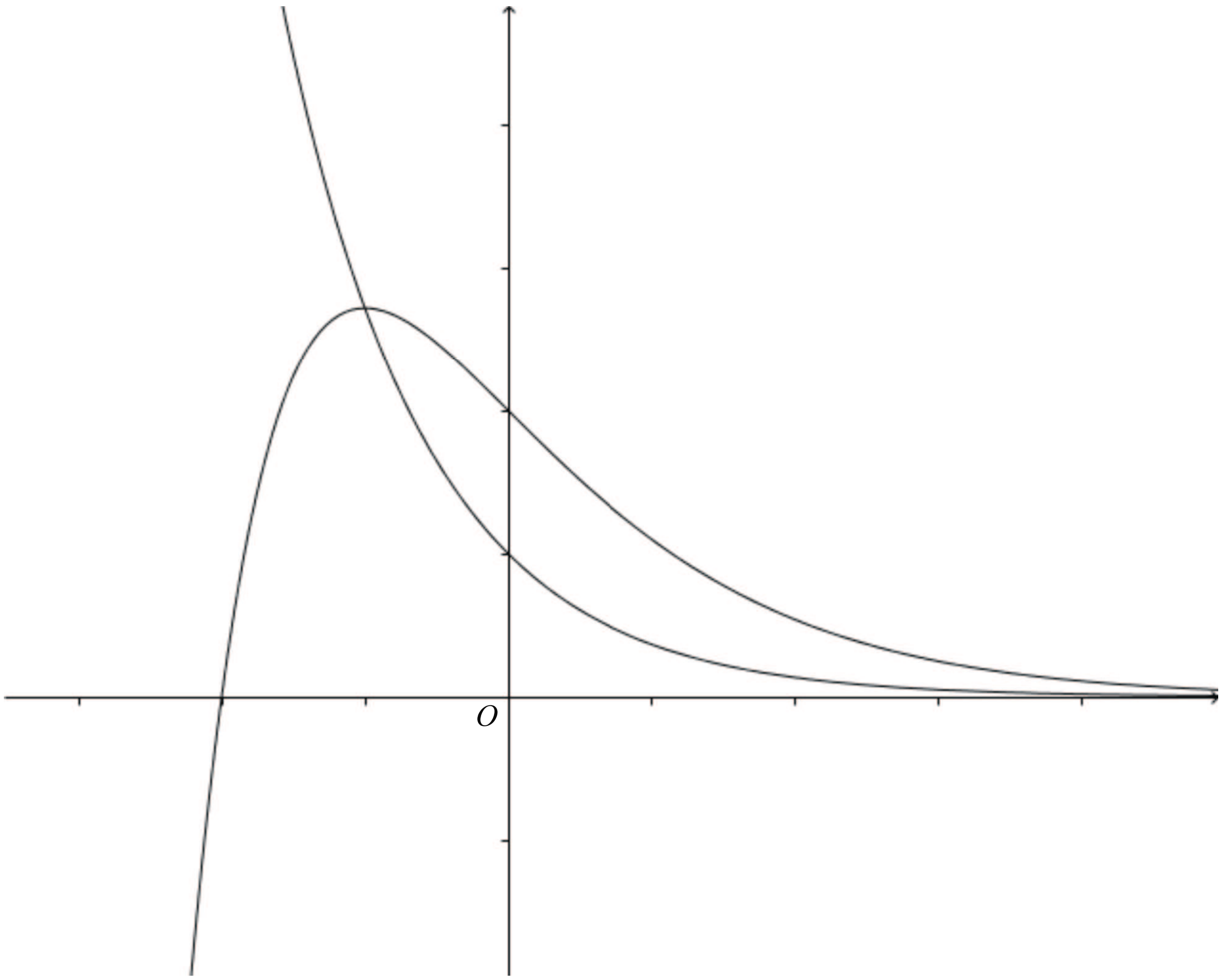
b) À tout point M du cercle (c) d'affixe z, on associe le point M' du cercle (c') d'affixe z' tel que : $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{O'M'}) = \frac{\pi}{3}$ [modulo 2π].

Déterminer le module et un argument de $\frac{z'-2}{z}$. En déduire que $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}z+2$.

c) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation r qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}z+2$.

3) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
À tout point M du plan, on associe le point M_1 milieu du segment $[MM']$.
Quel est le lieu géométrique du point M_1 lorsque M décrit le cercle (c) ?

ANNEXE 1 (Exercice 1)
(à rendre avec la copie)



CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

Baccalauréat général
Série S – Session 2010
Eléments de correction

Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des membres des jurys. La règle de confidentialité relative aux commissions d'entente et aux travaux des jurys s'applique à son contenu.

Outre les compétences de base (C1: restituer et mobiliser des connaissances, C2:appliquer une méthode), le sujet permet d'évaluer des compétences évoluées parmi les suivantes :
C3 : Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter
C4: Raisonner, démontrer, élaborer une démarche
C5: Évaluer, critiquer un résultat, vérifier la validité d' un résultat ou d' une méthode.

Exercice 1 : (6 points) Commun à tous les candidats

	Consignes de correction	barème
A1. Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).		
A2. Résoudre l'équation différentielle (E').		
A3. équivalence à démontrer		
A4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).		
A5. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.		
B1. Montrer que la fonction f_k admet un maximum en $x = 1 - k$.		
B2. Montrer que le point M_k appartient à la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$		
B3.a) Identifier les courbes et les nommer sur l'annexe		
B3.b déterminer la valeur du nombre réel k correspondante ainsi que l'unité graphique sur chacun des axes, en expliquant la démarche		
B4. Calculer $\int_0^2 (x+2)e^{-x}dx$. Donner une interprétation graphique de cette intégrale.		

Exercice 2 : (5 points) Commun à tous les candidats

	Consignes de correction	Barème
1. ROC		
2.a) (u_n) et (v_n) sont adjacentes		
2.b (u_n) et (v_n) ont pour limite $+\infty$. Elles ne sont pas adjacentes.		
2.c) (u_n) et (v_n) ont pour limite 1 et ne sont pas adjacentes.		
3. Existe-t-il une valeur de a telle que les suites soient adjacentes		

Exercice 3 : (4 points) Commun à tous les candidats QCM

1. $\frac{21}{40}$ **2.** $\binom{5}{2}\times\left(\frac{3}{10}\right)^3\times\left(\frac{7}{10}\right)^2$ **3.** $\frac{14}{23}$ **4.** $e^{-\lambda}-e^{-3\lambda}$

Exercice 4 : (5 points) (candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité)

	Consignes de correction	Barème
1. a) Démontrer que $\alpha^2-4\alpha=2\overline{\alpha}-8$.		
1. b) Démontrer que les points B et C appartiennent au cercle $\mathscr{C}$		
2. a) Construire sur la figure le point E		
2. b) Justifier que le point E a pour affixe $z_E=\alpha e^{i\theta}$.		
3. a) Justifier que le point F a pour affixe $z_F=\frac{\alpha}{2}+e^{i\theta}$.		
3. b) Démontrer que $\frac{z_G-2}{z_F-2}=\frac{\alpha}{2}$. En déduire la nature du triangle AFG		
4. Compléter le tableau de variation et conclure		

Exercice 4 : (5 points) (candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité)

	Consignes de correction	Barème
1.a) Déterminer les images respectives du point A et du point Ω		
1.b) déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation		
1.c) image par la transformation T du cercle ($\mathscr{C}$)		
2.a) Construire le point A'		
2.b) Déterminer le module et un argument de $\frac{z'-2}{z}$.		
3.a) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation r		
3.b) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe		
3.c) Quel est le lieu géométrique du point M_1		

ELEMENTS DE CORRECTION DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES (SERIE S)

Exercice 1 :

Partie A

1) u est dérivable sur IR comme produit de fonctions dérivables, et pour tout réel x :
$u'(x) = e^{-x} - x\, e^{-x}$.
Donc pour tout réel x : $u'(x) + u(x) = e^{-x}$. u est donc bien solution de (E).

2) Les solutions de (E') sont de la forme : $y(x) = C\, e^{-x}$, où C est un réel fixé.

3) v est solution de (E) si et seulement si pour tout réel x $v'(x) + v(x) = e^{-x}$, ce qui équivaut à :
pour tout réel x $v'(x) + v(x) = u'(x) + u(x)$, ce qui équivaut à :
pour tout réel x $(v - u)'(x) + (v - u)(x) = 0$, ce qui équivaut à :
v – u est solution de (E').

4) De ce qui précède, on déduit que les solutions de (E) sont les fonctions de la forme :
$v(x) = Ce^{-x} + xe^{-x}$, où C est un réel fixé.

5) g est solution de (E) donc il existe un réel C tel que pour tout x : $g(x) = Ce^{-x} + xe^{-x}$.
Comme $g(0) = 2$, on en déduit que C = 2.

Partie B

1) Pour tout réel k la fonction f_k est dérivable sur IR comme produit de fonctions dérivables, et pour tout réel x : $f_k'(x) = (1 - (x + k))\, e^{-x}$.
Pour tout réel x : $e^{-x} > 0$, donc $f_k'(x)$ est du signe de $(1 - x - k)$ à savoir positif sur $]-\infty ; 1 - k]$, négatif sinon. Du lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction, on déduit que la fonction f_k admet un maximum pour $x = 1 - k$.

2) M_k est le point de $\mathscr{C}_k$ d'abscisse $1 - k$ donc son ordonnée est $f_k(1 - k) = e^{k-1} = e^{-(1-k)}$. Il est donc bien sur Γ.

3) a) Par composition, la fonction représentée par Γ est décroissante, alors que f_k n'est pas monotone, les courbes sont donc faciles à identifier.

b) Γ passe par le point de coordonnées (0 ; 1). On en déduit que l'unité graphique en ordonnée est 2cm. Comme $f_k(0) = k$, on « lit » k =2.
$f_2(x) = 0$ si et seulement si $x = -2$, donc la courbe $\mathscr{C}_2$ passe par le point de coordonnées (-2 ; 0). On en déduit que l'unité graphique en abscisse est également 2cm.

<u>Remarque</u> : on retrouve, comme par hasard, la fonction g de la partie A !

4) En dérivant le polynôme, et intégrant l'exponentielle, on trouve :

$$I = \left[-(x+2)e^{-x}\right]_0^2 - \int_0^2 -e^{-x}dx = -4e^{-2} + 2 + \left[-e^{-x}\right]_0^2 = 3 - 5e^{-2}$$

La fonction f_k étant positive sur [0 ; 2], on a ainsi calculé l'aire (en unités d'aire) délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_k$ et les droites d'équations x = 0 et x = 2.

Exercice 2 :

1) Soient (u_n) et (v_n) des suites adjacentes, avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante.
De la première propriété, on déduit que (u_n) est majorée par v_0 et que (v_n) est minorée par u_0.
De la deuxième propriété, on déduit que les suites (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers des réels U et V. Comme leur différence des deux suites converge vers 0, $U = V$.

2) a) Les deux suites sont adjacentes, car :
(u_n) est croissante (pour tout entier n : $u_{n+1} - u_n = 0{,}9 \times 10^{-n}$),
(v_n) décroissante, (pour tout entier n : $v_{n+1} - v_n = -0{,}9 \times 10^{-n}$),
pour tout entier n : $u_n \leq v_n$
$v_n - u_n = 2 \times 10^{-n}$ qui converge bien vers 0.
Ces suites ont donc la même limite qui est 1, par propriété des suites géométriques.

b) (u_n) et (v_n) ont pour limite $+\infty$. Elles ne peuvent de ce fait pas être adjacentes.

c) (u_n) et (v_n) ont pour limite 1 (par des propriétés usuelles sur les limites), mais elles ne sont pas adjacentes, la suite (v_n) n'étant pas monotone.

3) (u_n) est croissante, (v_n) décroissante (par des propriétés usuelles sur les variations de fonctions). La suite (u_n) converge vers 1.
Si $a = 0$, la suite (v_n) converge vers $-\infty$, sinon elle converge vers $\ln(a)$ (par des propriétés usuelles sur les limites).
Pour que les suites soient adjacentes, il faut que $a = \mathrm{e}$.
Réciproquement, lorsque $a = \mathrm{e}$, les suites vérifient bien la définition de suites adjacentes.

Exercice 3 :

1) $$\frac{\binom{7}{2}\binom{3}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{21}{40};$$

2) Comme la boule est remise après chaque tirage, les tirages sont indépendants. Il ne faut pas oublier que l'ordre de tirage n'est pas pris en compte. La probabilité demandée est donc :

$$\binom{5}{2}\left(\frac{3}{10}\right)^3\left(\frac{7}{10}\right)^2$$

3) Si on note N l'événement la boule tirée est noire, B l'événement la boule tirée est blanche, et U le nombre obtenu est 1, la probabilité demandée est :

$$P_U(B) = \frac{P(U \cap B)}{P(U)} = \frac{P(U \cap B)}{P_B(U) \times P(B) + P_N(U) \times P(N)} = \frac{\frac{7}{10} \times \frac{1}{6}}{\frac{7}{10} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{4}} = \frac{14}{23}.$$

4) $P(1 \leq X \leq 3) = \int_1^3 \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_1^3 = e^{-\lambda} - e^{-3\lambda}$.

Exercice 4 : (ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE)

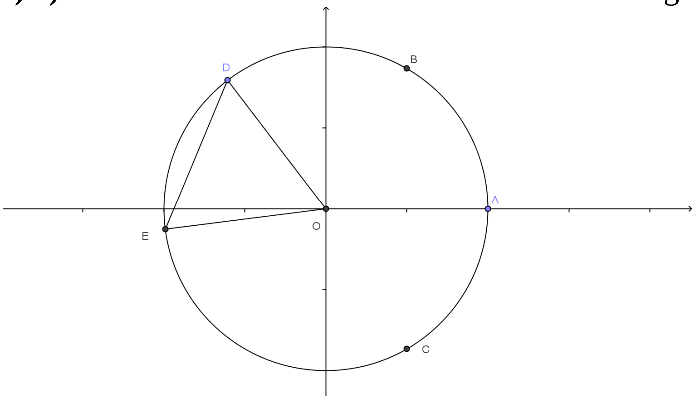
1) a) $\alpha^2 - 4\alpha = \left(1+i\sqrt{3}\right)^2 - 4\left(1+i\sqrt{3}\right) = 1-3-4+i\left(2\sqrt{3}-4\sqrt{3}\right) = -6-2\sqrt{3}i$

$2\overline{\alpha} - 8 = 2\left(1-i\sqrt{3}\right) - 8 = -6-2\sqrt{3}i$

b) $|\alpha| = |\overline{\alpha}| = 2$

Les points *B* et *C* sont donc sur le cercle de centre *O* et de rayon 2 (qui passe par *A*).

2) a) La construction se fait AU COMPAS. Le triangle *ODE* est équilatéral direct.



b) D'après l'expression complexe des rotations, on a :

$z_E = e^{i\frac{\pi}{3}} z_D$. Comme $\alpha = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, on en déduit $z_E = \alpha e^{i\theta}$.

3) a) $z_F = \dfrac{z_B + z_D}{2} = \dfrac{\alpha + 2e^{i\theta}}{2} = \dfrac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$.

b) $$\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\dfrac{\alpha e^{i\theta} + \overline{\alpha}}{2} - 2}{\dfrac{\alpha}{2} + e^{i\theta} - 2} = \frac{\alpha e^{i\theta} + \overline{\alpha} - 4}{\alpha + 2e^{i\theta} - 4}$$

Or d'après la question **1) a)** : $\alpha(\alpha-4) = 2\left(\overline{\alpha}-4\right)$ d'où : $\dfrac{z_G - 2}{z_F - 2} = \dfrac{\dfrac{\alpha(\alpha-4)}{2} + \alpha e^{i\theta}}{\alpha + 2e^{i\theta} - 4} = \dfrac{\alpha\left(\alpha - 4 + 2e^{i\theta}\right)}{2\left(\alpha - 4 + 2e^{i\theta}\right)} = \dfrac{\alpha}{2}$.

$\dfrac{\alpha}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$, donc $\dfrac{AG}{AF} = \dfrac{|z_G - 2|}{|z_F - 2|} = 1$ et $\left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AG}\right) = \arg\left(\dfrac{z_G - 2}{z_F - 2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ (à $2\pi -$ près).

On en déduit que le triangle *AFG* est équilatéral.

4) $f(-\pi) = f(\pi) = 7$; $f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = 4 - 2\sqrt{3}$; $f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = 4 + 2\sqrt{3}$.

La fonction *f* admet un minimum pour $x = -\dfrac{\pi}{6}$, et ce minimum est positif. La conjecture est donc validée : *AF* est minimum pour $x = -\dfrac{\pi}{6}$.

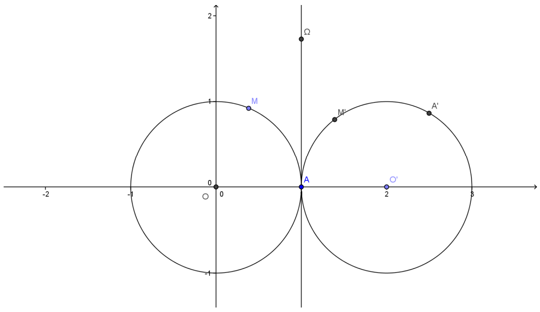
Exercice 4 : **(ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE)**

1) a) L'image de *A* a pour affixe 1, celle de Ω a pour affixe $1+i\sqrt{3}$.
On constate que les deux points sont invariants.

b) On reconnait l'expression complexe d'une similitude indirecte de rapport 1.
Du fait de l'invariance des points *A* et Ω on déduit qu'il s'agit de la réflexion d'axe $(A\Omega)$, c'est-à-dire la droite d'équation x = 1.

c) L'image d'un cercle par une similitude est un cercle de centre l'image du centre et de rayon le rayon multiplié par le rapport de la similitude (qui ici vaut 1).
L'image de *O* a pour affixe 2. L'image du cercle ($\mathscr{C}$) par *T* est donc le cercle de centre le point *O*' d'affixe 2 et de rayon 1.

2) a)



b) $\left|\dfrac{z'-2}{z}\right| = \dfrac{O'M'}{OM} = 1$ et $\arg\left(\dfrac{z'-2}{z}\right) = \left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{O'M'}\right) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

On a donc : $\dfrac{z'-2}{z} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ d'où $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2$.

c) On reconnait l'expression complexe d'une similitude directe, de rapport $\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$, d'angle en radians $\arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$, et de centre d'affixe α tel que $\alpha = e^{i\frac{\pi}{3}}\alpha + 2$, donc $\alpha = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, qui est l'affixe de Ω. La transformation *r* est la rotation de centre Ω d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ radians.

3) <u>Remarque</u> : le point *M*' est défini précédemment pour des points *M* du cercle ($\mathscr{C}$). Il faut donc comprendre dans cette question que l'on définit les points M_1 également dans ce cas.

Avec des notations évidentes, on a : $z_{M_1} = \dfrac{z_M + z_{M'}}{2} = \dfrac{1+e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}z_M + 1$.

On déduit de cette expression que M_1 est l'image de *M* par une similitude directe.
Ainsi, lorsque *M* décrit le cercle ($\mathscr{C}$), M_1 décrit également un cercle.

Comme $\left|z_{M_1} - 1\right| = \left|\dfrac{1+e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right|\left|z_M\right|$, on en déduit que lorsque *M* décrit le cercle ($\mathscr{C}$), le point M_1 décrit le cercle de centre *A* et de rayon $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Bac ES – France – juin 2010

Exercice 1 (4 points)
(*Commun à tous les candidats*)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Les questions indépendantes les unes des autres. Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une seule réponse par question est acceptée et ***aucune justification n'est demandée****.*
Une bonne réponse rapporte un point.
Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse rapporte ni n'enlève aucun point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question **et la réponse choisie** correspondante.

Question 1
Le nombre –3 est solution de l'équation :
- $\ln x = -\ln 3$
- $\ln(e^x) = -3$
- $e^{\ln x} = -3$
- $e^x = -3$

Question 2
La limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur l'intervalle $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-2x^3 + 3x}{(2x-1)^3}$ est :
- $-\infty$
- $+\infty$
- -1
- $-\dfrac{1}{4}$

Question 3
Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 3\ln x - 2x + 5$.
Dans le plan muni d'un repère, la tangente à la courbe représentative de la fonction f en son point d'abscisse 1 admet pour équation :
- $y = x + 2$
- $y = -x + 4$
- $y = 3x + 1$
- $y = x + 3$

Question 4
Un jeu consiste à lancer une fois un dé cubique non pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Un joueur donne 3 euros pour participer à ce jeu.
Il lance le dé et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure de ce dé :
- si le numéro est 1, le joueur reçoit 10 euros,
- si le numéro est 2 ou 4, il reçoit 1 euro,
- sinon, il ne reçoit rien.

À ce jeu, l'espérance mathématique du gain algébrique, exprimée en euros, est :
- 1
- 0
- –1
- –2

Exercice 2 (5 points)

(*Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*)

Une entreprise a équipé chacun de ses employés d'un seul ordinateur.
Pour le suivi de ses ordinateurs, l'entreprise fait appel à un même service de maintenance informatique.
Pour évaluer ce service, l'entreprise réalise une enquête et dispose ainsi, chaque employé, d'une fiche précisant la marque de son ordinateur et son avis sur le service de maintenance.

Il y a trois marques d'ordinateurs Aliet, Balart et Celt.

- 25 % des employés ont un ordinateur Aliet,
- 40 % des employés ont un ordinateur Balart,
- le reste des employés a un ordinateur Celt.

L'enquête a fourni les résultats suivants :

- parmi les employés équipés d'un ordinateur Aliet, 90 % sont satisfaits du service de maintenance,
- parmi les employés équipés d'un ordinateur Balart, 65 % sont satisfaits du service de maintenance,
- parmi les employés équipés d'un ordinateur Celt, 80 % sont satisfaits du service de maintenance.

On choisit au hasard la fiche d'un employé de l'entreprise, chacune ayant la même probabilité d'être choisie.
On note :

- A l'événement : « La fiche choisie est celle d'un employé équipé d'un ordinateur Aliet »,
- B l'événement : « La fiche choisie est celle d'un employé équipé d'un ordinateur Balart »,
- C l'événement : « La fiche choisie est celle d'un employé équipé d'un ordinateur Celt »,
- S l'événement : « La fiche choisie est celle d'un employé satisfait du service de maintenance ».

1) Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

2) Calculer la probabilité que la fiche choisie soit celle d'un employé équipé d'un ordinateur Aliet et satisfait du service de maintenance.

3) Démontrer que la probabilité que la fiche choisie soit celle d'un employé satisfait du service de maintenance est 0,765.

4) Sachant que la fiche choisie est celle d'un employé satisfait du service de maintenance, calculer la probabilité que cet employé soit équipé d'un ordinateur de la marque Celt.
Le résultat sera arrondi à 10^{-3}.

Exercice 2 (5 points)
(*Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*)

Un équipementier fabrique pour une usine de l'industrie automobile deux types de sièges : un modèle « luxe » et un modèle « confort ».
Soit x le nombre, exprimé **en centaines**, de sièges « luxe » et y le nombre, exprimé **en centaines**, de sièges « confort » produits chaque mois.
La fonction coût mensuel de production est la fonction F définie pour x et y appartenant à l'intervalle [0 ; 3] par :
$F(x\,,\,y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6$.
$F(x\,,\,y)$ désigne le coût mensuel de production, exprimé **en dizaine de milliers d'euros**, pour x **centaines** de sièges « luxe » et pour y **centaines** de sièges « confort ».

1) Au mois de janvier 2010, l'équipementier a produit 120 sièges « luxe » et 160 sièges « confort ».
   Justifier que le coût de production mensuel a été de 12 000 euros.

2) Vérifier que, x et y étant deux nombres réels, $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + 1$
   En déduire que le coût de production mensuel minimal est 10 000 euros.
   Préciser pour quelles quantités mensuelles respectives de sièges « luxe » et « confort » produites ce coût de production est obtenu.

3) À partir du mois de juillet 2010, la production mensuelle prévue de sièges et exactement 250.
   a. Justifier que $y = 2{,}5 - x$.
      Démontrer que, sous cette condition, le coût de production mensuel, exprimé en dizaines de milliers d'euros, est égal à $2x^2 - 3x + 2{,}25$.

   b. On note f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 2,5] par $f(x) = 2x^2 - 3x + 2{,}25$.
      Dresser en le justifiant le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 2,5].

   c. En déduire les quantités mensuelles respectives de sièges « luxe » et « confort » que l'équipementier doit produire à partir du mois de juillet 2010 pour minimiser le coût mensuel de production. Préciser ce coût minimal.

Exercice 3 (5 points)
(*Commun à tous les candidats*)

Pour i nombre entier variant de 0 à 8, on définit le tableau suivant qui donne les valeurs du SMIC horaire brut, exprimé en euros, de 2001 à 2009 (source INSEE).

On se propose d'en étudier l'évolution :

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
SMIC horaire brut (en euros), y_i	6,67	6,83	7,19	7,61	8,03	8,27	8,44	8,71	8,82

Dans tout l'exercice les pourcentages seront arrondis à 0,01 % et les valeurs du SMIC horaire brut au centime d'euro.

Partie A : Observation des données

1) Pour i entier variant de 0 à 8, représenter le nuage de points $M_i\ (x_i\,;\,y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal défini de la façon suivante :
   - sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 1 cm pour 1 année,
   - on graduera l'axe des ordonnées en commençant à 6 et on choisira 5 cm pour 1 euro.

2) Calculer le pourcentage d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut entre 2001 et 2009.

3) Démontrer qu'une valeur approchée du pourcentage annuel moyen d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut entre 2001 et 2005 est 4,75 %.

On observe sur le graphique un changement de tendance à partir de 2005 : le pourcentage annuel moyen d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut est alors de 2,4 % environ.
En supposant que cette nouvelle tendance se poursuive, on désire estimer la valeur du SMIC horaire brut en 2012.
Dans la suite de l'exercice, on ne s'intéresse qu'au sous-nuage constitué des cinq derniers points M_4, M_5, M_6, M_7 et M_8 du nuage précédent.

Partie B : Modélisation de la série statistique $(x_i\,;\,y_i)_{4 \leqslant i \leqslant 8}$ par un ajustement exponentiel

En observant le pourcentage annuel moyen d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut entre 2005 et 2009, on estime à $8{,}03\times1{,}024^n$ la valeur, exprimée en euros, du SMIC horaire brut pour l'année 2005+n, n désignant un entier naturel.
On considère que ce nouveau modèle reste valable jusqu'à l'année 2016.

1) Calculer une estimation de la valeur du SMIC horaire brut en 2012.

2) À partir de quelle année la valeur du SMIC horaire brut dépassera-t-elle 10 euros ?

Exercice 4 (6 points)
(*Commun à tous les candidats*)

L'annexe 1 est à rendre avec la copie.

Un nouveau modèle de mini-ordinateur portable est mis sur le marché.
Soit x la quantité d'appareils pouvant être vendus, exprimée **en milliers**.
La fonction d'offre de cet appareil est la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 35] par :

$$f(x) = 153\ \mathrm{e}^{0,05x}.$$

Le nombre réel $f(x)$ désigne le prix unitaire en euros d'un appareil, proposé par les fournisseurs, en fonction de la quantité x, exprimée en milliers, d'appareils pouvant être vendus.

La fonction de demande de cet appareil est la fonction g définie sur l'intervalle [0 ; 35] par :

$$g(x) = -116 \ln(x + 1) + 504.$$

Le nombre réel $g(x)$ désigne le prix unitaire en euros d'un appareil, accepté par les consommateurs, en fonction de la quantité x, exprimée en milliers, d'appareils disponibles.

1) a. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; 35].
   b. Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle [0 ; 35].
   c. Les courbes représentatives respectives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions f et g, tracées dans un repère orthogonal, sont fournies en annexe 1 **à rendre avec la copie**.
   Lire avec la précision autorisée par le graphique une valeur approchée des coordonnées de leur point d'intersection E.

2) Afin de déterminer les coordonnées du point E de façon précise, on est amené à résoudre dans l'intervalle [0 ; 35] l'équation $f(x) = g(x)$.
   Pour cela on considère la fonction h définie sur l'intervalle [0 ; 35] par $h(x) = f(x) - g(x)$.
   a. Déterminer le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle [0 ; 35].
   On pourra utiliser la question 1.
   b. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle [0 ; 35].
   c. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'arrondi de x_0 au millième.
   d. On pose $y_0 = f(x_0)$. En utilisant la question précédente, calculer l'arrondi de y_0 au centième.
   e. Sachant que y_0 représente le prix unitaire d'équilibre de cet appareil, préciser ce prix à un centime d'euro près. Quel est le nombre d'appareils disponibles à ce prix ?

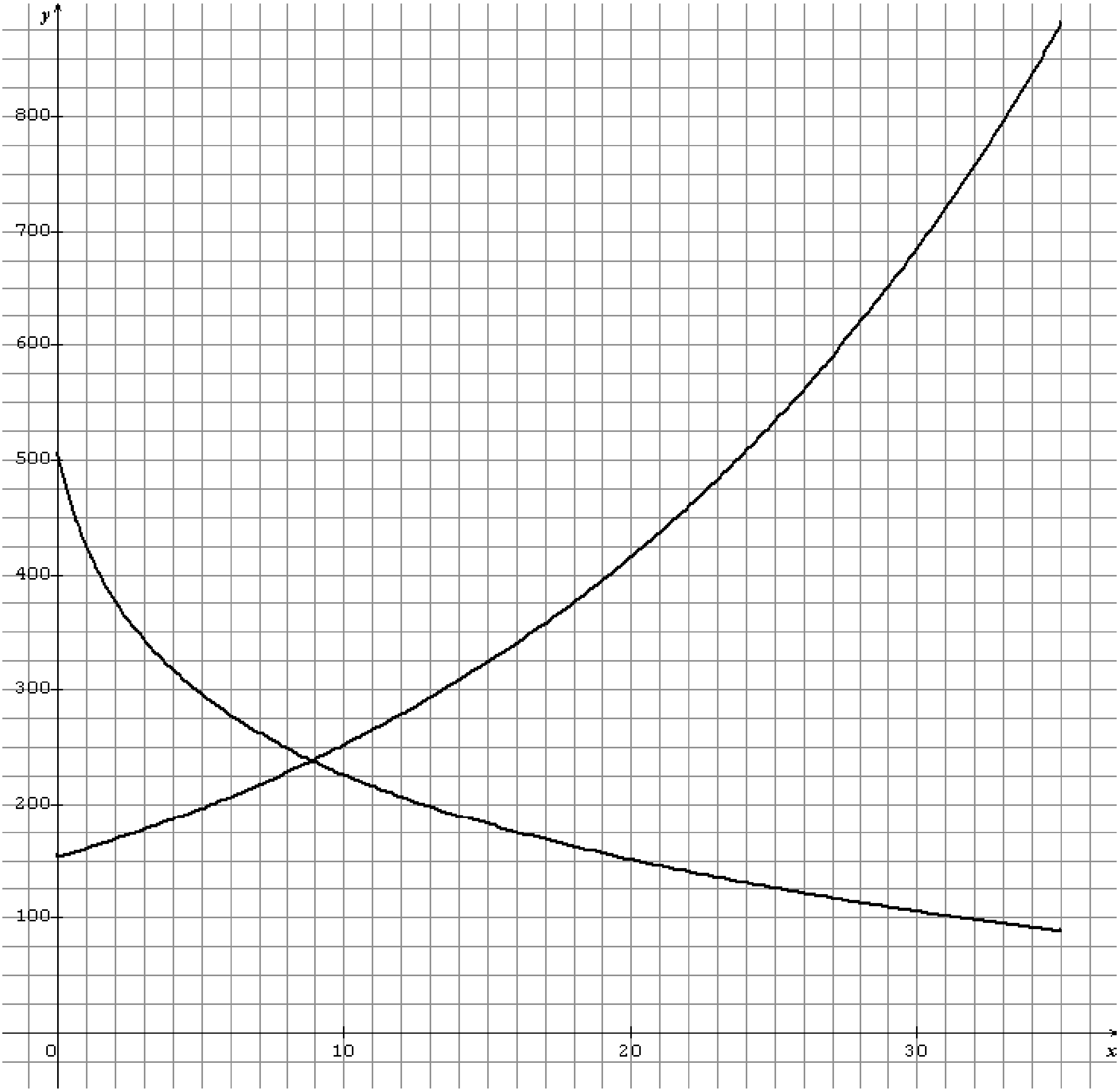
3) On prendra dans cette question $x_0 = 8,871$ et $y_0 = 238,41$.
   a. Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 35].
   b. On appelle surplus des fournisseurs le nombre réel S défini par la formule :

$$S = x_0 \times y_0 - \int_0^{x_0} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

   Hachurer, sur le graphique de la feuille annexe 1 **à rendre avec la copie**, le domaine du plan dont l'aire en unités d'aire est le nombre réel S.
   Déterminer la valeur arrondie au millième du nombre réel S.

ANNEXE 1 : à rendre avec la copie

Exercice 4 : *commun à tous les candidats*



CORRIGE

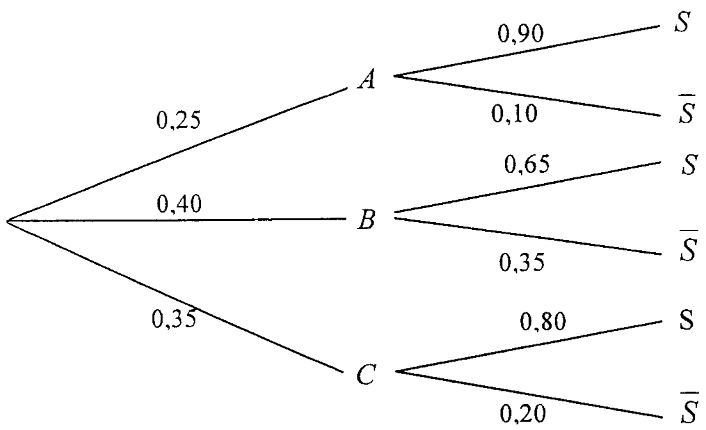
Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

Série ES	BACCALAURÉAT GÉNÉRAL	SESSION 2010
Coefficient : 5 (obligatoire) 7 (Spécialité)	**Épreuve de MATHÉMATIQUES**	**Durée :** 3h

Exercice 1 (4 points) *(Commun à tous les candidats)*

Question	Éléments de correction	Compétences	Points
1.	$\ln(e^x) = -3$	Évaluer, critiquer un résultat, vérifier la validité d'un résultat ou d'une démarche.	
2.	$-\dfrac{1}{4}$		
3.	$y = x + 2$		
4.	-1		

Exercice 2 (5 points) *(Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)*

Question	Éléments de correction	Commentaires	Points
1.			
2.	$p(A \cap S) = 0{,}25 \times 0{,}9 = 0{,}225$.		
3.	$p(S) = p(A \cap S) + p(B \cap S) + p(C \cap S)$ $p(S) = 0{,}225 + 0{,}40 \times 0{,}65 + 0{,}35 \times 0{,}80$ $p(S) = 0{,}765$.	Un arbre de probabilité correctement construit constitue une preuve.	
4.	$p_S(C) = \dfrac{p(C \cap S)}{p(S)}$; $p_S(C) = \dfrac{0{,}28}{0{,}765}$; $p_S(C) = \dfrac{56}{153}$; $p_S(C) \approx 0{,}366$		

Exercice 2 (5 points) *(Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)*

Question	Éléments de réponse	Compétences et Commentaires	Points
1.	En janvier 2010, $x = 1{,}2$; $y = 1{,}6$ et $F(1{,}2\ ,\ 1{,}6) = 1{,}2$. Le coût de production en janvier est 12 000 €.		
2.	En développant : $(x-1)^2 + (y-2)^2 + 1$, on obtient $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6$. Comme, pour tous réels x et y : $(x-1)^2 \geq 0$ et $(y-2)^2 \geq 0$, on a $(x-1)^2 + (y-2)^2 + 1 \geq 1$. On en déduit que $F(x\ ,y)$ est minimal lorsque les deux carrés sont nuls, c'est à dire $x = 1$ et $y = 2$. On a alors $F(1\ ,2) = 1$. Donc le coût de production mensuel est minimal pour la production de 100 sièges "luxe" et 200 sièges "confort et vaut alors 10 000 €.	Raisonner, démontrer, élaborer une démarche.	

<table>
<tr><td>3.a</td><td>La production mensuelle est de 250 sièges donc $x + y = 2{,}5$
soit $y = 2{,}5 - x$.
$F(x\ , y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6$ et $y = 2{,}5 - x$ donc
Le coût de production mensuel vaut :
$x^2 - 2x + (2{,}5 - x\ )^2 - 4(2{,}5 - x\ ) + 6$ soit $2x^2 - 3x + 2{,}25$.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3.b.</td><td>$f'(x) = 4\ x - 3$.
Tableau de variation de la fonction f :
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>0,75</td><td></td><td>2,5</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>2,25</td><td>$\searrow$</td><td>1,125</td><td>$\nearrow$</td><td>7,25</td></tr>
</table></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3.c.</td><td>Au deuxième semestre 2010, l'équipementier doit produire 75 sièges luxe" et 175 sièges "confort" pour réaliser un coût de production minimal de 11 250 €.</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Exercice 3 (5 points) *(Commun à tous les candidats)*

<table>
<tr><th colspan="2">Question</th><th>Éléments de correction</th><th>Compétences et commentaires</th><th>Points</th></tr>
<tr><td rowspan="3">A</td><td>1.</td><td>Voir figure.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.</td><td>$\dfrac{8{,}82}{6{,}67} \approx 1{,}322$ donc entre 2001 et 2009 le SMIC horaire brut a augmenté de 32,2 %.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Le pourcentage annuel moyen d'augmentation t du SMIC horaire brut entre 2001 et 2005 vérifie $(1+t)^4 = \dfrac{8{,}03}{6{,}67}$.

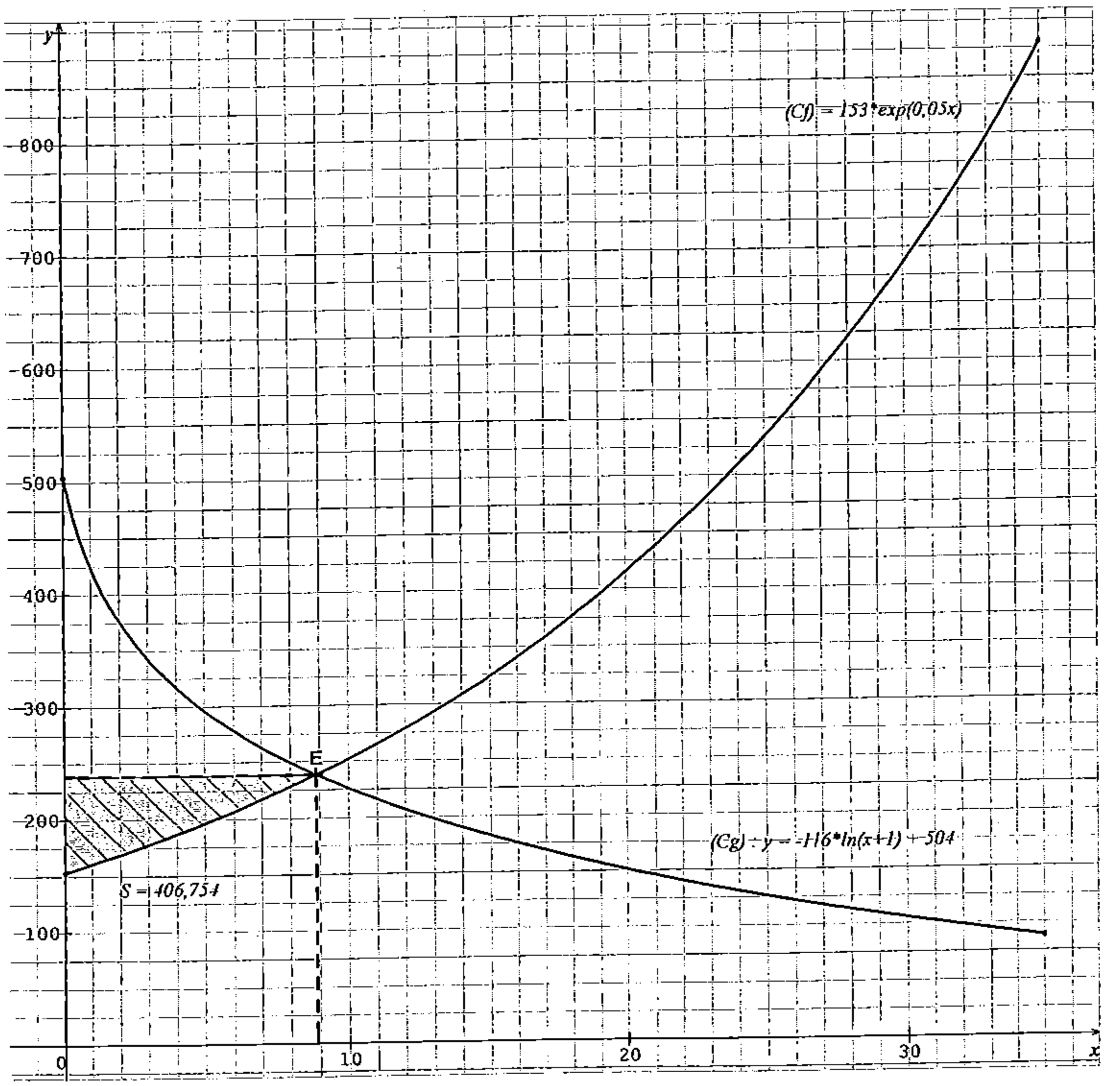
Soit $t = \left(\dfrac{8{,}03}{6{,}67}\right)^{\frac{1}{4}}$ -1. Donc $t \approx 0{,}047$ soit $t \approx 4{,}7$ %.</td><td>Évaluer, critiquer un résultat, vérifier la validité d'un résultat ou d'une démarche.

Toute autre démarche correcte sera acceptée.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">B</td><td>1</td><td>Selon ce deuxième modèle :
pour $n = 7$, $y = 8{,}03 \times 1{,}024^7$ soit $y \approx 9{,}48$.
Estimation du SMIC horaire brut en 2012 : 9,48 €.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.</td><td>On résout l'inéquation $8{,}03 \times 1{,}024^n > 10$.
Soit $n > \dfrac{\ln \dfrac{10}{8{,}03}}{\ln 1{,}024}$ donc $n \geq 10$ à partir de 2015.</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Exercice 4 (6 points) *(Commun à tous les candidats)*

Question	Éléments de correction	Compétences et commentaires	Points
1.a.	Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0 ; 35] : $f'(x) = 153 \times 0{,}05\ e^{0{,}05x}$ donc $f'(x) = 7{,}65\ e^{0{,}05x}$. Pour tout nombre réel x, $e^{0{,}05x} > 0$, donc, $f'(x) > 0$. La fonction f est strictement croissante sur [0 ; 35].		
1.b	Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0 ; 35] : $g'(x) = -\dfrac{116}{x+1}$ avec $x+1 > 0$. Donc, d'après le signe d'un quotient, $g'(x) < 0$. La fonction g est strictement décroissante sur [0 ; 35].		

1.c.	Par lecture graphique, un résultat attendu est (8,9 , 238).	Tout résultat cohérent sera accepté.	
2.a.	La fonction g est strictement décroissante sur [0 ; 35], donc la fonction $(-g)$ est strictement croissante sur [0 ; 35]. Comme f l'est aussi, la fonction h est strictement croissante sur [0 ; 35].	Toute autre démarche correcte sera acceptée.	
2.b.	La fonction h est dérivable et strictement croissante sur [0 ; 35]. De plus $h(0) = -351$ et $h(35) = 792$. D'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet donc une solution unique x_0 dans [0 ; 35].	Toute autre justification correcte sera acceptée.	
2.c.	A l'aide de la calculatrice, $x_0 \approx 8{,}871$		
2.d.	$y_0 = f(x_0)$ et $f(8{,}871) \approx 238{,}41$. Donc $y_0 \approx 238{,}41$.		
2.e.	D'après la question précédente, le prix d'équilibre est 238,41€ pour 8871 appareils disponibles.		
3.a	Une des primitives de la fonction f sur [0 ; 35] est la fonction F définie sur [0 ; 35] par $F(x) = \dfrac{153}{0{,}05}\, e^{0{,}05x}$; $F(x) = 3060\, e^{0{,}05x}$.		
3.b	$S = x_0 \times y_0 - \int_0^{x_0} f(x)\mathrm{d}x$. $S \approx 8{,}871 \times 238{,}41 - [F(8{,}871) - F(0)]$. $S \approx 406{,}754$ Voir graphique.		



Correction Bac ES – France – juin 2010

Exercice 1 (4 points) (*Commun à tous les candidats*)
Pour une meilleure compréhension, les réponses seront justifiées dans ce corrigé.

Question 1
Le nombre –3 est solution de l'équation : $\ln(e^x) = -3$

En effet, on sait que pour tout x réel, $\ln(e^x) = x$ et donc, $\ln(e^x) = -3 \Leftrightarrow x = -3$.

Question 2
La limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur l'intervalle $]\frac{1}{2} ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-2x^3 + 3x}{(2x-1)^3}$ est $-\dfrac{1}{4}$

En effet, on sait que la limite en $+\infty$ d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.
Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^3}{(2x)^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2}{8} = -\dfrac{1}{4}$

Question 3
Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 3\ln x - 2x + 5$.
Dans le plan muni d'un repère, la tangente à la courbe représentative de la fonction f en son point d'abscisse 1 admet pour équation : $y = x + 2$

En effet, cette tangente a pour équation : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$
On a : $f(1) = 3\ln(1) - 2\times 1 + 5 = 3$ et $f'(x) = 3\times\dfrac{1}{x} - 2$ d'où, $f'(1) = 3 - 2 = 1$.
Ainsi, la tangente a pour équation : $y = 1(x-1) + 3$ soit, $y = x + 2$.

Question 4
Un jeu consiste à lancer une fois un dé cubique non pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. **Un joueur donne 3 euros** pour participer à ce jeu.
Il lance le dé et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure de ce dé :

- si le numéro est 1, le joueur reçoit 10 euros,
- si le numéro est 2 ou 4, il reçoit 1 euro,
- sinon, il ne reçoit rien.

À ce jeu, l'espérance mathématique du gain algébrique, exprimée en euros, est : –1

En effet, le gain suit la loi de probabilité suivante :

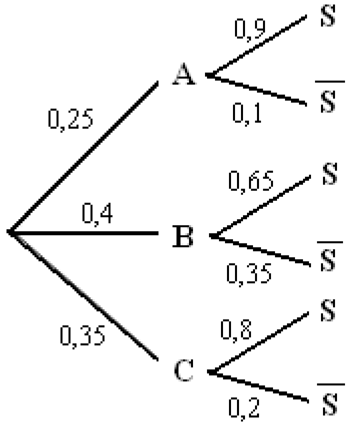
Gain	7	–2	–3
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

Son espérance est : $7\times\dfrac{1}{6} + (-2)\times\dfrac{2}{6} + (-3)\times\dfrac{3}{6} = -1$

Exercice 2 (5 points) (*Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*)

1) Comme : 25 % des employés ont un ordinateur Aliet, on a : p(A) = 0,25.
40 % des employés ont un ordinateur Balart, on a : p(B) = 0,4.
Comme le reste des employés a un ordinateur Celt, les événements A, B et C forment une partition et ainsi, p(A) + p(B) + p(C) = 1 d'où, p(C) = 1 – 0,25 – 0,4 = 0,35.

Parmi les employés équipés d'un ordinateur Aliet, 90 % sont satisfaits du service de maintenance donc, $p_A(S) = 0{,}9$.
Parmi les employés équipés d'un ordinateur Balart, 65 % sont satisfaits du service de maintenance donc, $p_B(S) = 0{,}65$
Parmi les employés équipés d'un ordinateur Celt, 80 % sont satisfaits du service de maintenance donc, $p_C(S) = 0{,}8$.
On a donc l'arbre pondéré suivant :



2) On a : $p(A \cap S) = p(A) \times p_A(S) = 0{,}25 \times 0{,}9 = 0{,}225$.
Donc, la probabilité que la fiche choisie soit celle d'un employé équipé d'un ordinateur Aliet et satisfait du service de maintenance est de 0,225.

3) Comme les événements A, B et C forment une partition de l'univers, d'après la ormule des probabilités totales, on a :
$p(S) = p(A \cap S) + p(B \cap S) + p(C \cap S)$
$p(S) = 0{,}225 + 0{,}4 \times 0{,}65 + 0{,}35 \times 0{,}8$
$p(S) = 0{,}765$.

4) On a : $p_S(C) = \dfrac{p(S \cap C)}{p(S)} = \dfrac{0{,}35 \times 0{,}8}{0{,}765} = 0{,}366$ à 10^{-3} près.
Donc, sachant que la fiche choisie est celle d'un employé satisfait du service de maintenance, la probabilité que cet employé soit équipé d'un ordinateur de la marque Celt est égale à 0,336.

Exercice 2 (5 points) (*Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*)

Soit x le nombre, exprimé **en centaines**, de sièges « luxe » et y le nombre, exprimé **en centaines**, de sièges « confort » produits chaque mois.
La fonction coût mensuel de production est la fonction F définie pour x et y appartenant à l'intervalle [0 ; 3] par :
$F(x , y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6$.
$F(x , y)$ désigne le coût mensuel de production, exprimé **en dizaine de milliers d'euros**, pour x **centaines** de sièges « luxe » et pour y **centaines** de sièges « confort ».

1) $F(1{,}2 ; 1{,}6) = 1{,}2^2 - 2\times1{,}2 + 1{,}6^2 - 4\times1{,}6 + 6 = 1{,}2$.
Donc, en janvier 2010, le coût de production a été de 1,2 dizaine de milliers d'euros soit de 12 000 €.

2) Pour tout x et y réels, on a : $(x-1)^2 + (y-2)^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + 1$
Soit, $(x-1)^2 + (y-2)^2 + 1 = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6$.

De ce qui précède, on déduit que : $F(x , y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + 1$.
Comme un carré est toujours positif, le coût de production sera minimal quand les carrés seront nuls, c'est-à-dire quand $x = 1$ et $y = 2$ et $F(1 ; 2) = 1$.
Ainsi, le coût de production mensuel est de 10 000 euros et il est atteint pour une production de 100 sièges « luxe » et 200 sièges « confort ».

3) À partir du mois de juillet 2010, la production mensuelle prévue de sièges et exactement 250.
a. La production mensuelle est de $x + y$ centaines de sièges. Or, 250 = 2,5 centaines.
Donc, on a : $x + y = 2{,}5$ soit, $y = 2{,}5 - x$.

Ainsi, le coût peut s'écrire : $F(x ; y) = x^2 - 2x + (2{,}5 - x)^2 - 4(2{,}5 - x) + 6$
$F(x ; y) = x^2 - 2x + 6{,}25 - 5x + x^2 - 10 + 4x + 6$
$F(x ; y) = 2x^2 - 3x + 2{,}25$.

b. On note f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 2,5] par $f(x) = 2x^2 - 3x + 2{,}25$.
La fonction f est une fonction trinôme dont la parabole est « tournée vers le haut » car $a = 2 > 0$ et elle change de variation en $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$.
On a donc le tableau de variation suivant :

x	0	0,75	2,5
f	2,25 ↘	1,125	↗ 7,25

c. La fonction f atteint son minimum 1,125 pour $x = 0{,}75$ et $y = 2{,}5 - x = 1{,}75$.
Donc, en juillet 2010, l'équipementier doit produire 75 sièges « luxe » et 175 sièges « confort » pour un coût de production minimal égal à 11 250 €.

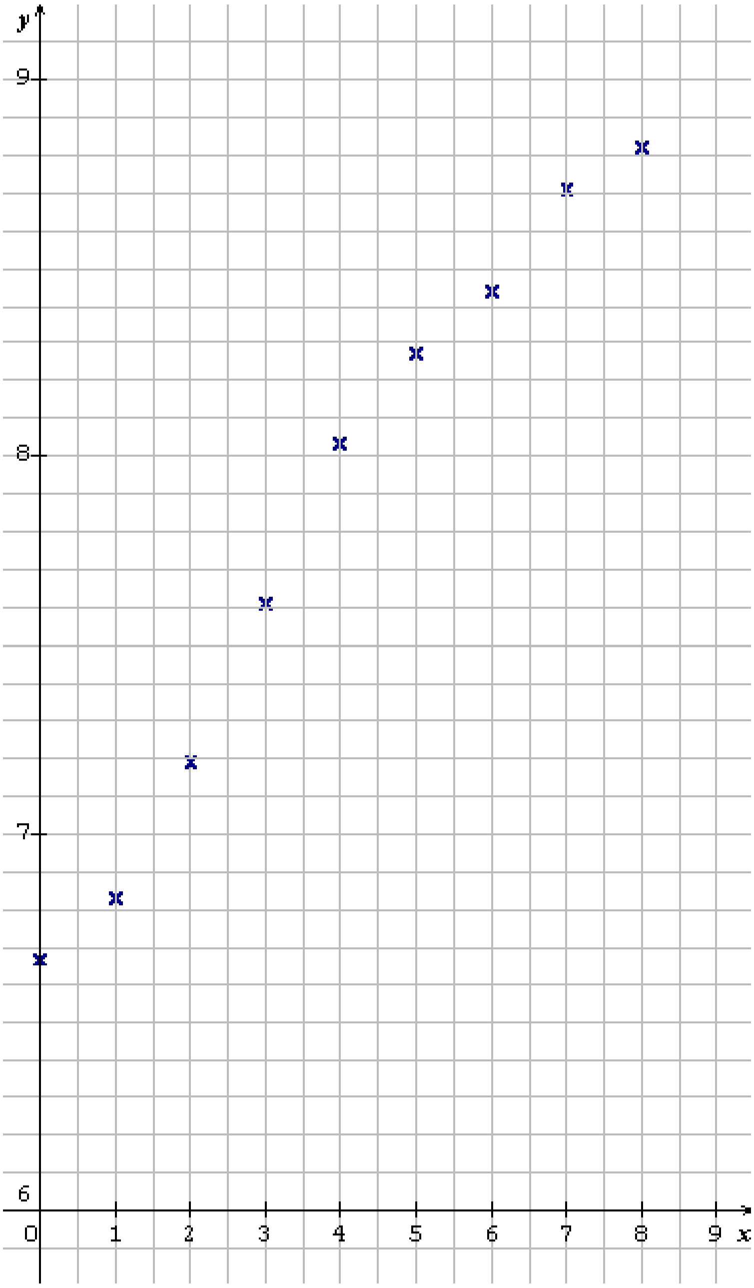
Exercice 3 (5 points) (*Commun à tous les candidats*)

Pour i nombre entier variant de 0 à 8, on définit le tableau suivant qui donne les valeurs du SMIC horaire brut, exprimé en euros, de 2001 à 2009 (source INSEE).
On se propose d'en étudier l'évolution :

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
SMIC horaire brut (en euros), y_i	6,67	6,83	7,19	7,61	8,03	8,27	8,44	8,71	8,82

Partie A : Observation des données

1) On a le nuage de points suivant :



2) On a : $\dfrac{8{,}82-6{,}67}{6{,}67}\times 100 = 32{,}23$ à 10^{-2} près.

Ainsi, la valeur du SMIC horaire brut a augmenté de 32,23 % entre 2001 et 2009.

3) Soit x le coefficient multiplicateur associé au taux annuel moyen d'augmentation entre 2001 et 2005.

Alors, le coefficient multiplicateur global est : $x^4 = \dfrac{8,03}{6,67}$

Ainsi, $x = \sqrt[4]{\dfrac{8,03}{6,67}} = 1,0475$ à 10^{-4} près.

Donc, le pourcentage annuel moyen d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut entre 2001 et 2005 est bien de 4,75 %.

Partie B : Modélisation de la série statistique $(x_i\,;\,y_i)_{4 \leqslant i \leqslant 8}$ par un ajustement exponentiel

En observant le pourcentage annuel moyen d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut entre 2005 et 2009, on estime à $8,03\times1,024^n$ la valeur, exprimée en euros, du SMIC horaire brut pour l'année 2005+n, n désignant un entier naturel.
On considère que ce nouveau modèle reste valable jusqu'à l'année 2016.

1) $2012 = 2005 + 7$ et $8,03\times1,024^7 = 9,48$ à 10^{-2} près.
Donc, si ce modèle reste valable, en 2016, le SMIC horaire brut serait de 9,48 €.

2) On cherche n tel que $8,03\times1,024^n \geqslant 10$.

$$\begin{aligned}
8,03\times1,024^n \geqslant 10 &\iff 1,024^n \geqslant \frac{10}{8,03}\\
&\iff \ln(1,024^n) \geqslant \ln\left(\frac{10}{8,03}\right) \text{ car la fonction ln est croissante.}\\
&\iff n\ln(1,024) \geqslant \ln\left(\frac{10}{8,03}\right)\\
&\iff n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{10}{8,03}\right)}{\ln(1,024)} \text{ car } \ln(1,024) > 0.
\end{aligned}$$

Or, $\dfrac{\ln\left(\frac{10}{8,03}\right)}{\ln(1,024)} \approx 9,25$

C'est donc à partir de l'année 2015, 2005 + 10, que la valeur du SMIC horaire brut dépassera 10 euros.

Exercice 4 (6 points) (*Commun à tous les candidats*)

Un nouveau modèle de mini-ordinateur portable est mis sur le marché.
Soit x la quantité d'appareils pouvant être vendus, exprimée **en milliers**.
La fonction d'offre de cet appareil est la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 35] par :

$$f(x) = 153\,e^{0,05x}.$$

Le nombre réel $f(x)$ désigne le prix unitaire en euros d'un appareil, proposé par les fournisseurs, en fonction de la quantité x, exprimée en milliers, d'appareils pouvant être vendus.

La fonction de demande de cet appareil est la fonction g définie sur l'intervalle [0 ; 35] par :

$$g(x) = -116\ln(x+1) + 504.$$

Le nombre réel $g(x)$ désigne le prix unitaire en euros d'un appareil, accepté par les consommateurs, en fonction de la quantité x, exprimée en milliers, d'appareils disponibles.

1) a. On a : $f'(x) = 153\times 0,05e^{0,05x}$.
   Comme pour tout x réel, $e^{0,05x} > 0$, $f'(x) > 0$ (produit de nombres positifs).
   Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; 35].

   b. On a : $g'(x) = -116\times\dfrac{1}{x+1}$
   Comme pour tout réel $x \in [0\,;35]$, $x + 1 > 0$, $g'(x) < 0$.
   Ainsi, la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle [0 ; 35].

   c. Le point E semble avoir pour coordonnées (8,9 ; 240).

2) Afin de déterminer les coordonnées du point E de façon précise, on est amené à résoudre dans l'intervalle [0 ; 35] l'équation $f(x) = g(x)$.
   Pour cela on considère la fonction h définie sur l'intervalle [0 ; 35] par $h(x) = f(x) - g(x)$.

   a. On a : $h'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) + (-g'(x))$.
   Pour tout $x \in [0\,;35]$, on a : $g'(x) < 0$ donc, $-g'(x) > 0$ et on a : $f'(x) > 0$ donc, par somme de nombres positifs, $h'(x) > 0$ pour $x \in [0\,;35]$.
   Ainsi, la fonction h est strictement croissante sur [0 ; 35].

   b. La fonction h est continue et strictement croissante sur [0 ; 35].
   De plus, $h(0) = 153 - 504 < 0$ et $h(35) \approx 792 > 0$.
   Donc, d'après le théorème de la bijection, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution x_0 sur l'intervalle [0 ; 35].

   c. À l'aide de la calculatrice, on trouve : $x_0 \approx 8,871$.

   d. $y_0 = f(x_0) = f(8,871) \approx 238,41$.

   e. De la question précédente, on déduit que le prix unitaire d'équilibre de cet appareil est de 238,41 € et pour ce prix, 8 871 appareils sont disponibles.

3) On prendra dans cette question $x_0 = 8{,}871$ et $y_0 = 238{,}41$.

a. $f(x) = 153\mathrm{e}^{0,05x}$ donc, une primitive est : $F(x) = 153 \times \dfrac{1}{0{,}05}\,\mathrm{e}^{0,05x} = 3\,060\,\mathrm{e}^{0,05x}$.

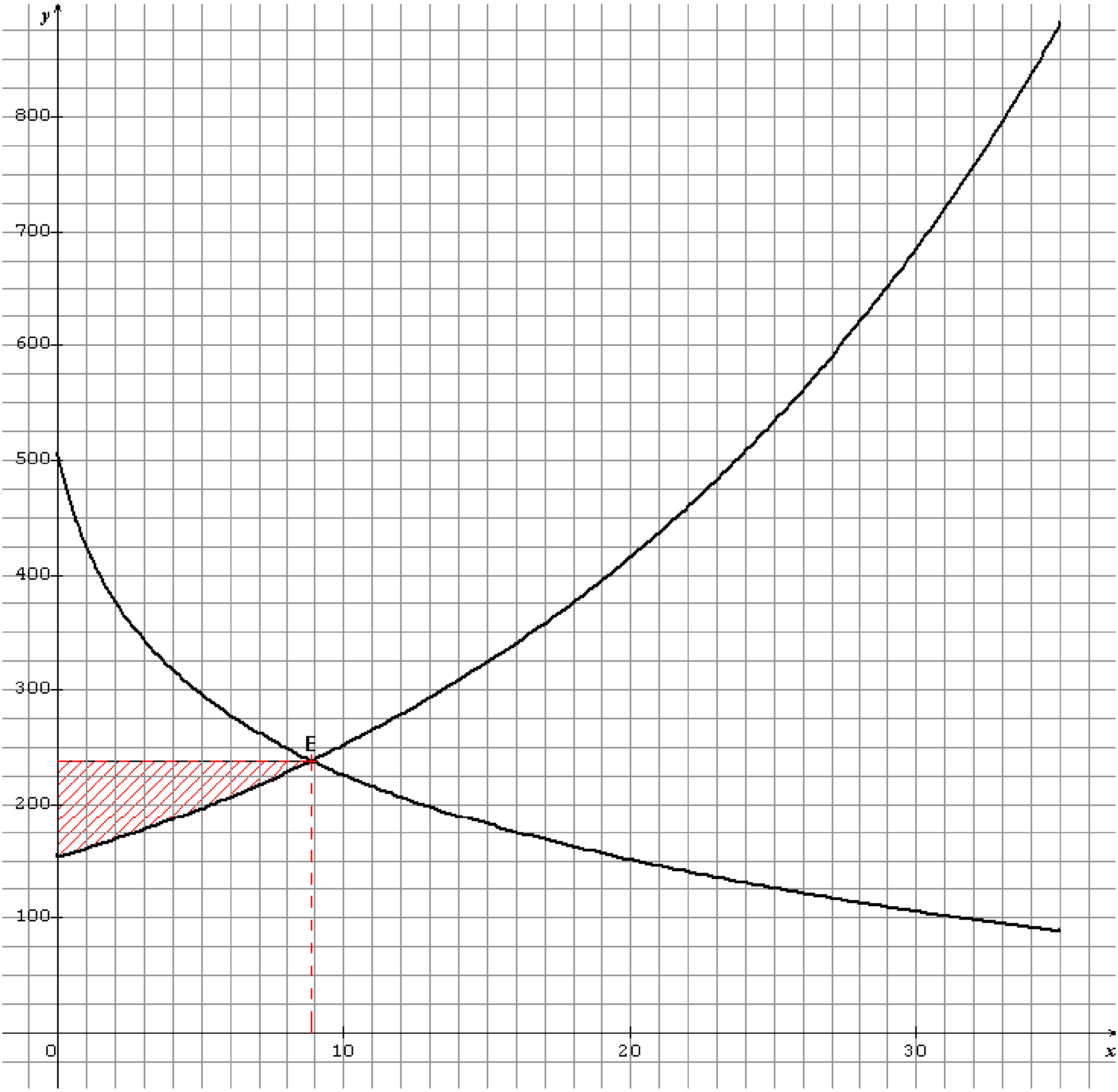
b. On appelle surplus des fournisseurs le nombre réel S défini par la formule :

$$S = x_0 \times y_0 - \int_0^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Voir le graphique pour le domaine du plan dont l'aire, en u.a. est le nombre réel S.

On a : $\int_0^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x = F(x_0) - F(0) = 3\,060\mathrm{e}^{0,05\,x_0} - 3\,060$

D'où, $S = 8{,}871 \times 234{,}41 + 3\,060 - 3\,060\,\mathrm{e}^{0,05\,x_0} \approx 406{,}754$.



Bac ES – France – juin 2010

Exercice 1 (4 points)
(*Commun à tous les candidats*)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Les questions indépendantes les unes des autres. Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une seule réponse par question est acceptée et ***aucune justification n'est demandée****.*
Une bonne réponse rapporte un point.
Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse rapporte ni n'enlève aucun point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question **et la réponse choisie** correspondante.

Question 1
Le nombre –3 est solution de l'équation :
- $\ln x = -\ln 3$
- $\ln(e^x) = -3$
- $e^{\ln x} = -3$
- $e^x = -3$

Question 2
La limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur l'intervalle $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-2x^3 + 3x}{(2x-1)^3}$ est :
- $-\infty$
- $+\infty$
- -1
- $-\dfrac{1}{4}$

Question 3
Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 3\ln x - 2x + 5$.
Dans le plan muni d'un repère, la tangente à la courbe représentative de la fonction f en son point d'abscisse 1 admet pour équation :
- $y = x + 2$
- $y = -x + 4$
- $y = 3x + 1$
- $y = x + 3$

Question 4
Un jeu consiste à lancer une fois un dé cubique non pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Un joueur donne 3 euros pour participer à ce jeu.
Il lance le dé et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure de ce dé :
- si le numéro est 1, le joueur reçoit 10 euros,
- si le numéro est 2 ou 4, il reçoit 1 euro,
- sinon, il ne reçoit rien.

À ce jeu, l'espérance mathématique du gain algébrique, exprimée en euros, est :
- 1
- 0
- –1
- –2

Exercice 2 (5 points)
(*Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*)

Une entreprise a équipé chacun de ses employés d'un seul ordinateur.
Pour le suivi de ses ordinateurs, l'entreprise fait appel à un même service de maintenance informatique.
Pour évaluer ce service, l'entreprise réalise une enquête et dispose ainsi, chaque employé, d'une fiche précisant la marque de son ordinateur et son avis sur le service de maintenance.

Il y a trois marques d'ordinateurs Aliet, Balart et Celt.

- 25 % des employés ont un ordinateur Aliet,
- 40 % des employés ont un ordinateur Balart,
- le reste des employés a un ordinateur Celt.

L'enquête a fourni les résultats suivants :

- parmi les employés équipés d'un ordinateur Aliet, 90 % sont satisfaits du service de maintenance,
- parmi les employés équipés d'un ordinateur Balart, 65 % sont satisfaits du service de maintenance,
- parmi les employés équipés d'un ordinateur Celt, 80 % sont satisfaits du service de maintenance.

On choisit au hasard la fiche d'un employé de l'entreprise, chacune ayant la même probabilité d'être choisie.
On note :

- A l'événement : « La fiche choisie est celle d'un employé équipé d'un ordinateur Aliet »,
- B l'événement : « La fiche choisie est celle d'un employé équipé d'un ordinateur Balart »,
- C l'événement : « La fiche choisie est celle d'un employé équipé d'un ordinateur Celt »,
- S l'événement : « La fiche choisie est celle d'un employé satisfait du service de maintenance ».

1) Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

2) Calculer la probabilité que la fiche choisie soit celle d'un employé équipé d'un ordinateur Aliet et satisfait du service de maintenance.

3) Démontrer que la probabilité que la fiche choisie soit celle d'un employé satisfait du service de maintenance est 0,765.

4) Sachant que la fiche choisie est celle d'un employé satisfait du service de maintenance, calculer la probabilité que cet employé soit équipé d'un ordinateur de la marque Celt.
Le résultat sera arrondi à 10^{-3}.

Exercice 2 (5 points)
(*Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*)

Un équipementier fabrique pour une usine de l'industrie automobile deux types de sièges : un modèle « luxe » et un modèle « confort ».
Soit x le nombre, exprimé **en centaines**, de sièges « luxe » et y le nombre, exprimé **en centaines**, de sièges « confort » produits chaque mois.
La fonction coût mensuel de production est la fonction F définie pour x et y appartenant à l'intervalle $[0 ; 3]$ par :
$F(x , y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6$.
$F(x , y)$ désigne le coût mensuel de production, exprimé **en dizaine de milliers d'euros**, pour x **centaines** de sièges « luxe » et pour y **centaines** de sièges « confort ».

1) Au mois de janvier 2010, l'équipementier a produit 120 sièges « luxe » et 160 sièges « confort ».
Justifier que le coût de production mensuel a été de 12 000 euros.

2) Vérifier que, x et y étant deux nombres réels, $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 1$
En déduire que le coût de production mensuel minimal est 10 000 euros.
Préciser pour quelles quantités mensuelles respectives de sièges « luxe » et « confort » produites ce coût de production est obtenu.

3) À partir du mois de juillet 2010, la production mensuelle prévue de sièges et exactement 250.
a. Justifier que $y = 2{,}5 - x$.
Démontrer que, sous cette condition, le coût de production mensuel, exprimé en dizaines de milliers d'euros, est égal à $2x^2 - 3x + 2{,}25$.

b. On note f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 2{,}5]$ par $f(x) = 2x^2 - 3x + 2{,}25$.
Dresser en le justifiant le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 2{,}5]$.

c. En déduire les quantités mensuelles respectives de sièges « luxe » et « confort » que l'équipementier doit produire à partir du mois de juillet 2010 pour minimiser le coût mensuel de production. Préciser ce coût minimal.

Exercice 3 (5 points)
(*Commun à tous les candidats*)

Pour i nombre entier variant de 0 à 8, on définit le tableau suivant qui donne les valeurs du SMIC horaire brut, exprimé en euros, de 2001 à 2009 (source INSEE).

On se propose d'en étudier l'évolution :

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
SMIC horaire brut (en euros), y_i	6,67	6,83	7,19	7,61	8,03	8,27	8,44	8,71	8,82

Dans tout l'exercice les pourcentages seront arrondis à 0,01 % et les valeurs du SMIC horaire brut au centime d'euro.

Partie A : Observation des données

1) Pour i entier variant de 0 à 8, représenter le nuage de points $M_i\ (x_i\,;\, y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal défini de la façon suivante :
   - sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 1 cm pour 1 année,
   - on graduera l'axe des ordonnées en commençant à 6 et on choisira 5 cm pour 1 euro.

2) Calculer le pourcentage d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut entre 2001 et 2009.

3) Démontrer qu'une valeur approchée du pourcentage annuel moyen d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut entre 2001 et 2005 est 4,75 %.

On observe sur le graphique un changement de tendance à partir de 2005 : le pourcentage annuel moyen d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut est alors de 2,4 % environ.
En supposant que cette nouvelle tendance se poursuive, on désire estimer la valeur du SMIC horaire brut en 2012.
Dans la suite de l'exercice, on ne s'intéresse qu'au sous-nuage constitué des cinq derniers points M_4, M_5, M_6, M_7 et M_8 du nuage précédent.

Partie B : Modélisation de la série statistique $(x_i\,;\, y_i)_{4 \leqslant i \leqslant 8}$ par un ajustement exponentiel

En observant le pourcentage annuel moyen d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut entre 2005 et 2009, on estime à $8{,}03 \times 1{,}024^n$ la valeur, exprimée en euros, du SMIC horaire brut pour l'année 2005+n, n désignant un entier naturel.
On considère que ce nouveau modèle reste valable jusqu'à l'année 2016.

1) Calculer une estimation de la valeur du SMIC horaire brut en 2012.

2) À partir de quelle année la valeur du SMIC horaire brut dépassera-t-elle 10 euros ?

Exercice 4 (6 points)
(*Commun à tous les candidats*)

L'annexe 1 est à rendre avec la copie.

Un nouveau modèle de mini-ordinateur portable est mis sur le marché.
Soit x la quantité d'appareils pouvant être vendus, exprimée **en milliers**.
La fonction d'offre de cet appareil est la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 35] par :

$$f(x) = 153\ \mathrm{e}^{0,05x}.$$

Le nombre réel $f(x)$ désigne le prix unitaire en euros d'un appareil, proposé par les fournisseurs, en fonction de la quantité x, exprimée en milliers, d'appareils pouvant être vendus.

La fonction de demande de cet appareil est la fonction g définie sur l'intervalle [0 ; 35] par :

$$g(x) = -116\ln(x+1) + 504.$$

Le nombre réel $g(x)$ désigne le prix unitaire en euros d'un appareil, accepté par les consommateurs, en fonction de la quantité x, exprimée en milliers, d'appareils disponibles.

1) a. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; 35].
   b. Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle [0 ; 35].
   c. Les courbes représentatives respectives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions f et g, tracées dans un repère orthogonal, sont fournies en annexe 1 **à rendre avec la copie**.
   Lire avec la précision autorisée par le graphique une valeur approchée des coordonnées de leur point d'intersection E.

2) Afin de déterminer les coordonnées du point E de façon précise, on est amené à résoudre dans l'intervalle [0 ; 35] l'équation $f(x) = g(x)$.
   Pour cela on considère la fonction h définie sur l'intervalle [0 ; 35] par $h(x) = f(x) - g(x)$.
   a. Déterminer le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle [0 ; 35].
   On pourra utiliser la question 1.
   b. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle [0 ; 35].
   c. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'arrondi de x_0 au millième.
   d. On pose $y_0 = f(x_0)$. En utilisant la question précédente, calculer l'arrondi de y_0 au centième.
   e. Sachant que y_0 représente le prix unitaire d'équilibre de cet appareil, préciser ce prix à un centime d'euro près. Quel est le nombre d'appareils disponibles à ce prix ?

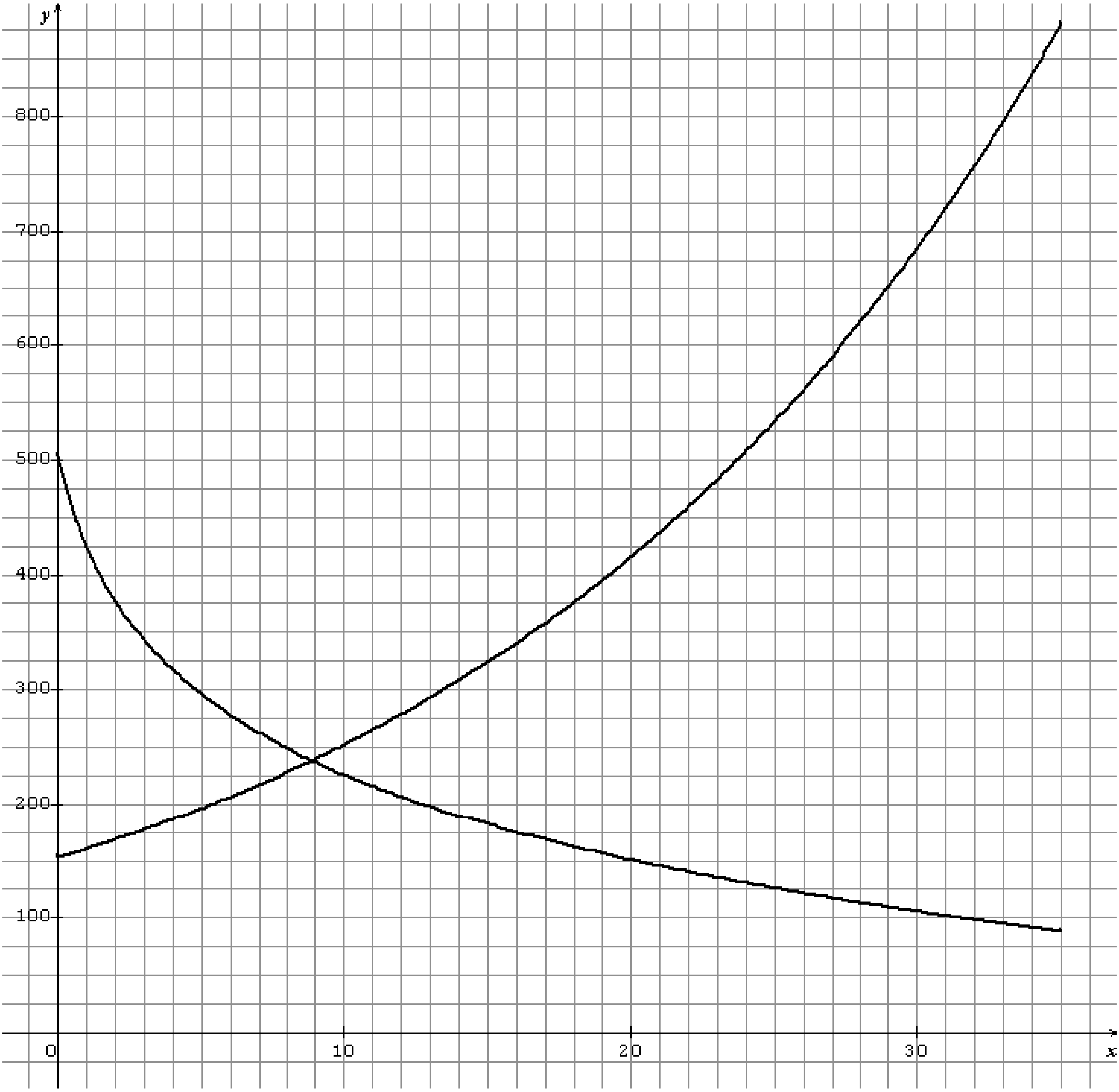
3) On prendra dans cette question $x_0 = 8,871$ et $y_0 = 238,41$.
   a. Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 35].
   b. On appelle surplus des fournisseurs le nombre réel S défini par la formule :

$$S = x_0 \times y_0 - \int_0^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Hachurer, sur le graphique de la feuille annexe 1 **à rendre avec la copie**, le domaine du plan dont l'aire en unités d'aire est le nombre réel S.
   Déterminer la valeur arrondie au millième du nombre réel S.

ANNEXE 1 : à rendre avec la copie

Exercice 4 : *commun à tous les candidats*



Correction Bac ES – France – juin 2010

Exercice 1 (4 points) (*Commun à tous les candidats*)
Pour une meilleure compréhension, les réponses seront justifiées dans ce corrigé.

Question 1
Le nombre –3 est solution de l'équation : $\ln(e^x) = -3$

En effet, on sait que pour tout x réel, $\ln(e^x) = x$ et donc, $\ln(e^x) = -3 \Leftrightarrow x = -3$.

Question 2
La limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{-2x^3 + 3x}{(2x-1)^3}$ est $-\dfrac{1}{4}$

En effet, on sait que la limite en $+\infty$ d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^3}{(2x)^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{8} = -\dfrac{1}{4}$

Question 3
Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 3\ln x - 2x + 5$.
Dans le plan muni d'un repère, la tangente à la courbe représentative de la fonction f en son point d'abscisse 1 admet pour équation : $y = x + 2$

En effet, cette tangente a pour équation : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$
On a : $f(1) = 3\ln(1) - 2\times 1 + 5 = 3$ et $f'(x) = 3\times\dfrac{1}{x} - 2$ d'où, $f'(1) = 3 - 2 = 1$.
Ainsi, la tangente a pour équation : $y = 1(x-1) + 3$ soit, $y = x + 2$.

Question 4
Un jeu consiste à lancer une fois un dé cubique non pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. **Un joueur donne 3 euros** pour participer à ce jeu.
Il lance le dé et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure de ce dé :

- si le numéro est 1, le joueur reçoit 10 euros,
- si le numéro est 2 ou 4, il reçoit 1 euro,
- sinon, il ne reçoit rien.

À ce jeu, l'espérance mathématique du gain algébrique, exprimée en euros, est : –1

En effet, le gain suit la loi de probabilité suivante :

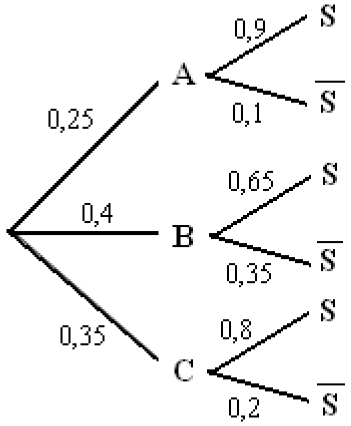
Gain	7	–2	–3
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

Son espérance est : $7\times\dfrac{1}{6} + (-2)\times\dfrac{2}{6} + (-3)\times\dfrac{3}{6} = -1$

Exercice 2 (5 points) (*Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*)

1) Comme : 25 % des employés ont un ordinateur Aliet, on a : p(A) = 0,25.
40 % des employés ont un ordinateur Balart, on a : p(B) = 0,4.
Comme le reste des employés a un ordinateur Celt, les événements A, B et C forment une partition et ainsi, p(A) + p(B) + p(C) = 1 d'où, p(C) = 1 – 0,25 – 0,4 = 0,35.

Parmi les employés équipés d'un ordinateur Aliet, 90 % sont satisfaits du service de maintenance donc, $p_A(S) = 0,9$.
Parmi les employés équipés d'un ordinateur Balart, 65 % sont satisfaits du service de maintenance donc, $p_B(S) = 0,65$
Parmi les employés équipés d'un ordinateur Celt, 80 % sont satisfaits du service de maintenance donc, $p_C(S) = 0,8$.
On a donc l'arbre pondéré suivant :



2) On a : $p(A \cap S) = p(A) \times p_A(S) = 0,25 \times 0,9 = 0,225$.
Donc, la probabilité que la fiche choisie soit celle d'un employé équipé d'un ordinateur Aliet et satisfait du service de maintenance est de 0,225.

3) Comme les événements A, B et C forment une partition de l'univers, d'après la ormule des probabilités totales, on a :
$p(S) = p(A \cap S) + p(B \cap S) + p(C \cap S)$
$p(S) = 0,225 + 0,4 \times 0,65 + 0,35 \times 0,8$
$p(S) = 0,765$.

4) On a : $p_S(C) = \dfrac{p(S \cap C)}{p(S)} = \dfrac{0,35 \times 0,8}{0,765} = 0,366$ à 10^{-3} près.
Donc, sachant que la fiche choisie est celle d'un employé satisfait du service de maintenance, la probabilité que cet employé soit équipé d'un ordinateur de la marque Celt est égale à 0,336.

Exercice 2 (5 points) (*Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*)

Soit x le nombre, exprimé **en centaines**, de sièges « luxe » et y le nombre, exprimé **en centaines**, de sièges « confort » produits chaque mois.
La fonction coût mensuel de production est la fonction F définie pour x et y appartenant à l'intervalle [0 ; 3] par :
$F(x , y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6$.
$F(x , y)$ désigne le coût mensuel de production, exprimé **en dizaine de milliers d'euros**, pour x **centaines** de sièges « luxe » et pour y **centaines** de sièges « confort ».

1) F(1,2 ; 1,6) = $1{,}2^2 - 2\times1{,}2 + 1{,}6^2 - 4\times1{,}6 + 6 = 1{,}2$.
Donc, en janvier 2010, le coût de production a été de 1,2 dizaine de milliers d'euros soit de 12 000 €.

2) Pour tout x et y réels, on a : $(x-1)^2 + (y-2)^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + 1$
Soit, $(x-1)^2 + (y-2)^2 + 1 = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6$.

De ce qui précède, on déduit que : $F(x , y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + 1$.
Comme un carré est toujours positif, le coût de production sera minimal quand les carrés seront nuls, c'est-à-dire quand $x = 1$ et $y = 2$ et F(1 ; 2) = 1.
Ainsi, le coût de production mensuel est de 10 000 euros et il est atteint pour une production de 100 sièges « luxe » et 200 sièges « confort ».

3) À partir du mois de juillet 2010, la production mensuelle prévue de sièges et exactement 250.
a. La production mensuelle est de $x + y$ centaines de sièges. Or, 250 = 2,5 centaines.
Donc, on a : $x + y = 2{,}5$ soit, $y = 2{,}5 - x$.

Ainsi, le coût peut s'écrire : $F(x ; y) = x^2 - 2x + (2{,}5 - x)^2 - 4(2{,}5 - x) + 6$
$F(x ; y) = x^2 - 2x + 6{,}25 - 5x + x^2 - 10 + 4x + 6$
$F(x ; y) = 2x^2 - 3x + 2{,}25$.

b. On note f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 2,5] par $f(x) = 2x^2 - 3x + 2{,}25$.
La fonction f est une fonction trinôme dont la parabole est « tournée vers le haut » car $a = 2 > 0$ et elle change de variation en $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$.
On a donc le tableau de variation suivant :

x	0	0,75	2,5
f	2,25 ↘	1,125	↗ 7,25

c. La fonction f atteint son minimum 1,125 pour $x = 0{,}75$ et $y = 2{,}5 - x = 1{,}75$.
Donc, en juillet 2010, l'équipementier doit produire 75 sièges « luxe » et 175 sièges « confort » pour un coût de production minimal égal à 11 250 €.

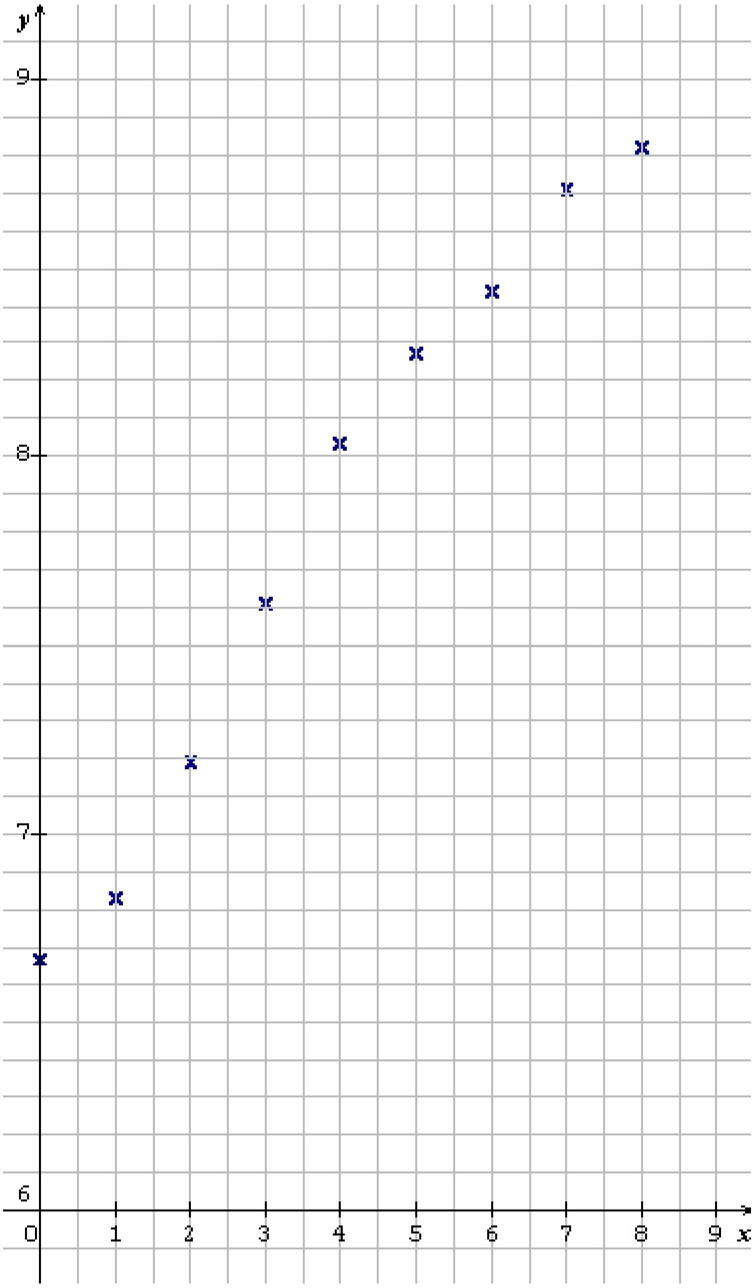
Exercice 3 (5 points) (*Commun à tous les candidats*)

Pour i nombre entier variant de 0 à 8, on définit le tableau suivant qui donne les valeurs du SMIC horaire brut, exprimé en euros, de 2001 à 2009 (source INSEE).
On se propose d'en étudier l'évolution :

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
SMIC horaire brut (en euros), y_i	6,67	6,83	7,19	7,61	8,03	8,27	8,44	8,71	8,82

Partie A : Observation des données

1) On a le nuage de points suivant :



2) On a : $\dfrac{8,82-6,67}{6,67}\times 100 = 32,23$ à 10^{-2} près.

Ainsi, la valeur du SMIC horaire brut a augmenté de 32,23 % entre 2001 et 2009.

3) Soit x le coefficient multiplicateur associé au taux annuel moyen d'augmentation entre 2001 et 2005.

Alors, le coefficient multiplicateur global est : $x^4 = \dfrac{8{,}03}{6{,}67}$

Ainsi, $x = \sqrt[4]{\dfrac{8{,}03}{6{,}67}} = 1{,}0475$ à 10^{-4} près.

Donc, le pourcentage annuel moyen d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut entre 2001 et 2005 est bien de 4,75 %.

Partie B : Modélisation de la série statistique $(x_i\,;\,y_i)_{4 \leqslant i \leqslant 8}$ par un ajustement exponentiel

En observant le pourcentage annuel moyen d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut entre 2005 et 2009, on estime à $8{,}03 \times 1{,}024^n$ la valeur, exprimée en euros, du SMIC horaire brut pour l'année 2005+n, n désignant un entier naturel.
On considère que ce nouveau modèle reste valable jusqu'à l'année 2016.

1) $2012 = 2005 + 7$ et $8{,}03 \times 1{,}024^7 = 9{,}48$ à 10^{-2} près.
Donc, si ce modèle reste valable, en 2016, le SMIC horaire brut serait de 9,48 €.

2) On cherche n tel que $8{,}03 \times 1{,}024^n \geqslant 10$.

$$8{,}03 \times 1{,}024^n \geqslant 10 \iff 1{,}024^n \geqslant \frac{10}{8{,}03}$$

$$\iff \ln(1{,}024^n) \geqslant \ln\left(\frac{10}{8{,}03}\right) \text{ car la fonction ln est croissante.}$$

$$\iff n\ln(1{,}024) \geqslant \ln\left(\frac{10}{8{,}03}\right)$$

$$\iff n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{10}{8{,}03}\right)}{\ln(1{,}024)} \text{ car } \ln(1{,}024) > 0.$$

Or, $\dfrac{\ln\left(\frac{10}{8{,}03}\right)}{\ln(1{,}024)} \approx 9{,}25$

C'est donc à partir de l'année 2015, 2005 + 10, que la valeur du SMIC horaire brut dépassera 10 euros.

Exercice 4 (6 points) (*Commun à tous les candidats*)

Un nouveau modèle de mini-ordinateur portable est mis sur le marché.
Soit x la quantité d'appareils pouvant être vendus, exprimée **en milliers**.
La fonction d'offre de cet appareil est la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 35] par :

$$f(x) = 153\,e^{0,05x}.$$

Le nombre réel $f(x)$ désigne le prix unitaire en euros d'un appareil, proposé par les fournisseurs, en fonction de la quantité x, exprimée en milliers, d'appareils pouvant être vendus.

La fonction de demande de cet appareil est la fonction g définie sur l'intervalle [0 ; 35] par :

$$g(x) = -116\ln(x+1) + 504.$$

Le nombre réel $g(x)$ désigne le prix unitaire en euros d'un appareil, accepté par les consommateurs, en fonction de la quantité x, exprimée en milliers, d'appareils disponibles.

1) a. On a : $f'(x) = 153\times 0,05e^{0,05x}$.
   Comme pour tout x réel, $e^{0,05x} > 0$, $f'(x) > 0$ (produit de nombres positifs).
   Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; 35].

   b. On a : $g'(x) = -116\times\dfrac{1}{x+1}$
   Comme pour tout réel $x \in [0\,;35]$, $x + 1 > 0$, $g'(x) < 0$.
   Ainsi, la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle [0 ; 35].

   c. Le point E semble avoir pour coordonnées (8,9 ; 240).

2) Afin de déterminer les coordonnées du point E de façon précise, on est amené à résoudre dans l'intervalle [0 ; 35] l'équation $f(x) = g(x)$.
   Pour cela on considère la fonction h définie sur l'intervalle [0 ; 35] par $h(x) = f(x) - g(x)$.

   a. On a : $h'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) + (-g'(x))$.
   Pour tout $x \in [0\,;35]$, on a : $g'(x) < 0$ donc, $-g'(x) > 0$ et on a : $f'(x) > 0$ donc, par somme de nombres positifs, $h'(x) > 0$ pour $x \in [0\,;35]$.
   Ainsi, la fonction h est strictement croissante sur [0 ; 35].

   b. La fonction h est continue et strictement croissante sur [0 ; 35].
   De plus, $h(0) = 153 - 504 < 0$ et $h(35) \approx 792 > 0$.
   Donc, d'après le théorème de la bijection, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution x_0 sur l'intervalle [0 ; 35].

   c. À l'aide de la calculatrice, on trouve : $x_0 \approx 8,871$.

   d. $y_0 = f(x_0) = f(8,871) \approx 238,41$.

   e. De la question précédente, on déduit que le prix unitaire d'équilibre de cet appareil est de 238,41 € et pour ce prix, 8 871 appareils sont disponibles.

3) On prendra dans cette question $x_0 = 8{,}871$ et $y_0 = 238{,}41$.

a. $f(x) = 153\mathrm{e}^{0{,}05x}$ donc, une primitive est : $F(x) = 153\times\dfrac{1}{0{,}05}\,\mathrm{e}^{0{,}05x} = 3\,060\,\mathrm{e}^{0{,}05x}$.

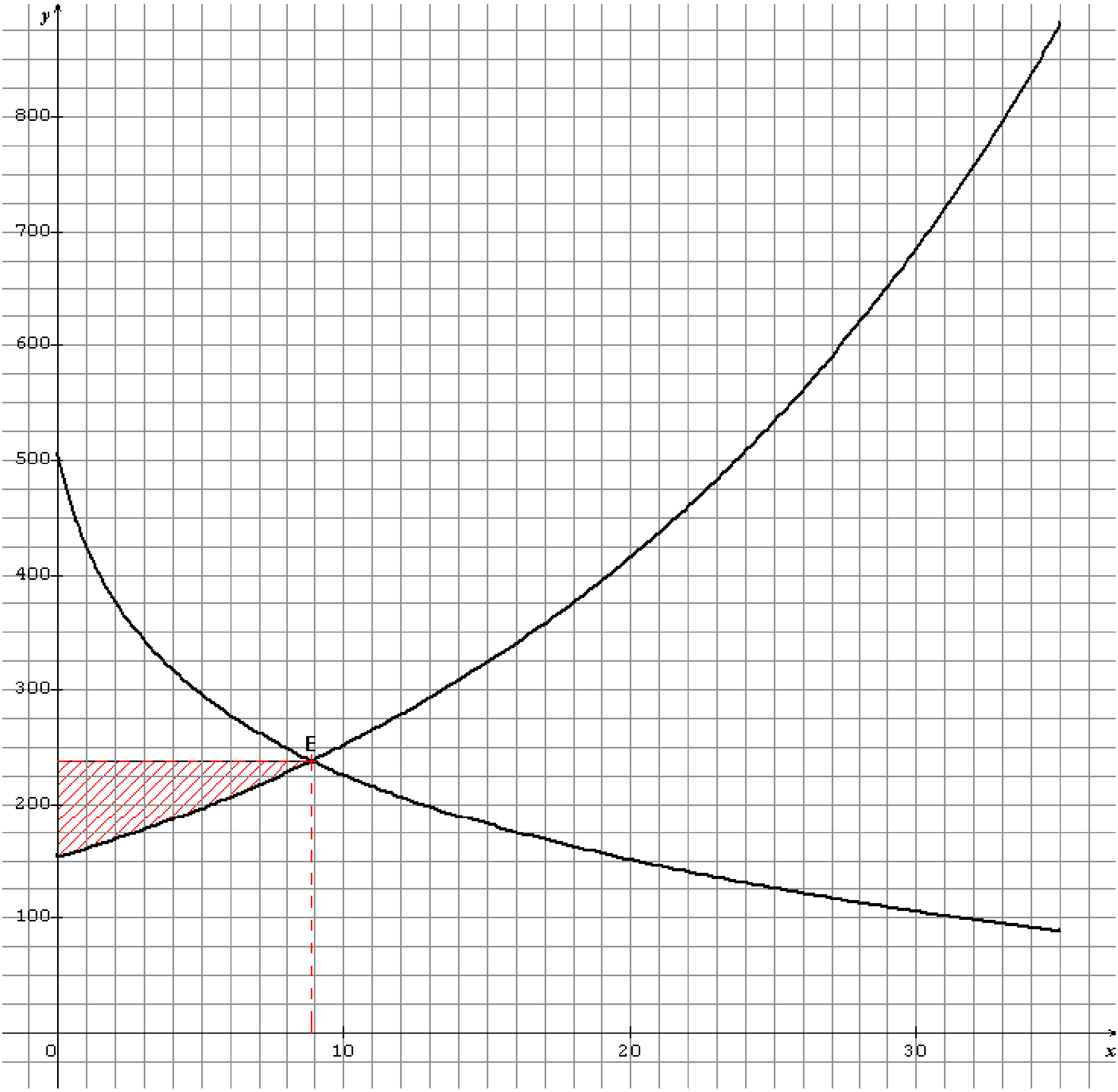
b. On appelle surplus des fournisseurs le nombre réel S défini par la formule :

$$S = x_0\times y_0 - \int_0^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Voir le graphique pour le domaine du plan dont l'aire, en u.a. est le nombre réel S.

On a : $\int_0^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x = F(x_0) - F(0) = 3\,060\mathrm{e}^{0{,}05\,x_0} - 3\,060$

D'où, $S = 8{,}871\times 234{,}41 + 3\,060 - 3\,060\,\mathrm{e}^{0{,}05\,x_0} \approx 406{,}754$.



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2011

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 7**

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.
Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

PARTIE A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note V l'événement « la personne est contaminée par le virus » et T l'événement « le test est positif ».
$\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les événements contraires de V et T.

1. **a.** Préciser les valeurs des probabilités $P(V)$, $P_V(T)$, $P_{\overline{V}}(\overline{T})$.
   Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

   b. En déduire la probabilité de l'événement $V \cap T$.
2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,0492.
3. **a.** Justifier par un calcul la phrase :
   « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».

   b. Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif .

PARTIE B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

EXERCICE 2 (4 points)

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v}\right)$.
On désigne par A, B, C, D les points d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = \text{i}$, $z_C = -1$, $z_D = -\text{i}$.

1. L'image E du point D par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ a pour affixe :

- $z_E = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1+\text{i})$,
- $z_E = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1-\text{i})$,
- $z_E = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}(1-\text{i})$,
- $z_E = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}(1+\text{i})$.

2. L'ensemble des points d'affixe z telle que $|z+\text{i}| = |z-1|$ est :

- la médiatrice du segment $[BC]$,
- le milieu du segment $[BC]$,
- le cercle de centre O et de rayon 1,
- la médiatrice du segment $[AD]$.

3. L'ensemble des points d'affixe z telle que $\dfrac{z+\text{i}}{z+1}$ soit un imaginaire pur est :

- la droite (CD) privée du point C,
- le cercle de diamètre $[CD]$ privé du point C,
- le cercle de diamètre $[BD]$ privé du point C,
- la médiatrice du segment $[AB]$.

4. L'ensemble des points d'affixe z telle que $\arg(z-\text{i}) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ est :

- le demi-cercle de diamètre $[BD]$ passant par A,
- la droite (BD),
- la demi-droite $]BD)$ d'origine B passant par D privée de B,
- le cercle de diamètre $[BD]$ privé de B et D.

EXERCICE 3 (7 points)

Commun à tous les candidats

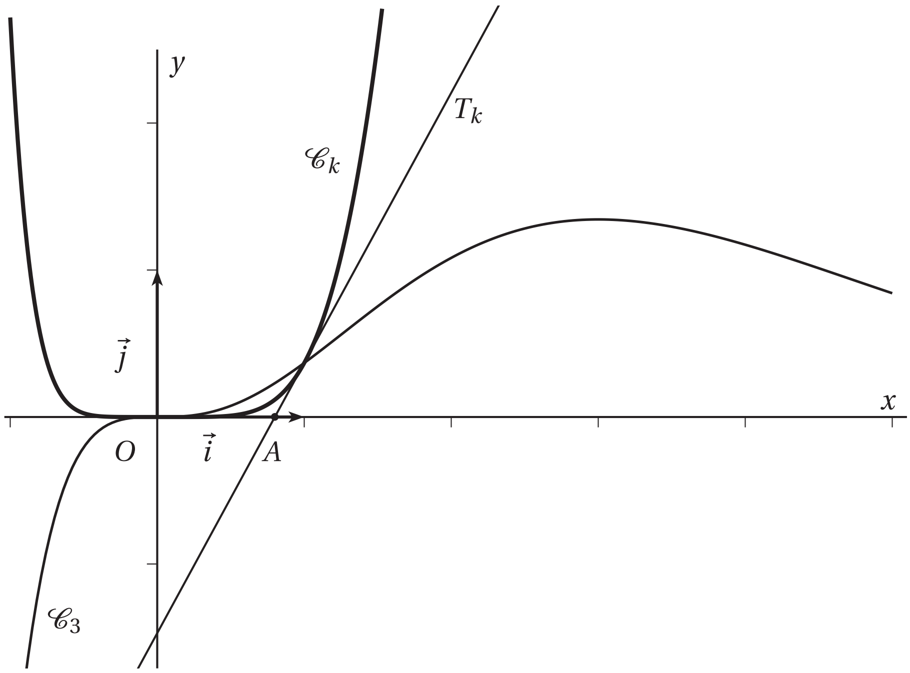
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ du plan.

PARTIE A

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe $\mathscr{C}_k$ où k est un entier naturel non nul, sa tangente T_k au point d'abscisse 1 et la courbe $\mathscr{C}_3$.
La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\frac{4}{5},\, 0\right)$.



1. **a.** Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b. Étudier les variations de la fonction f_1 et dresser le tableau de variations de f_1.
   c. À l'aide du graphique, justifier que k est un entier supérieur ou égal à 2.

2. **a.** Démontrer que pour $n \geqslant 1$, toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par le point O et un autre point dont on donnera les coordonnées.
   b. Vérifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour tout réel x,

$$f_n'(x) = x^{n-1}(n-x)\mathrm{e}^{-x}\,.$$

3. Sur le graphique, la fonction f_3 semble admettre un maximum atteint pour $x = 3$.
Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

4. **a.** Démontrer que la droite T_k coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\dfrac{k-2}{k-1},\ 0\right)$.

   b. En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur de l'entier k.

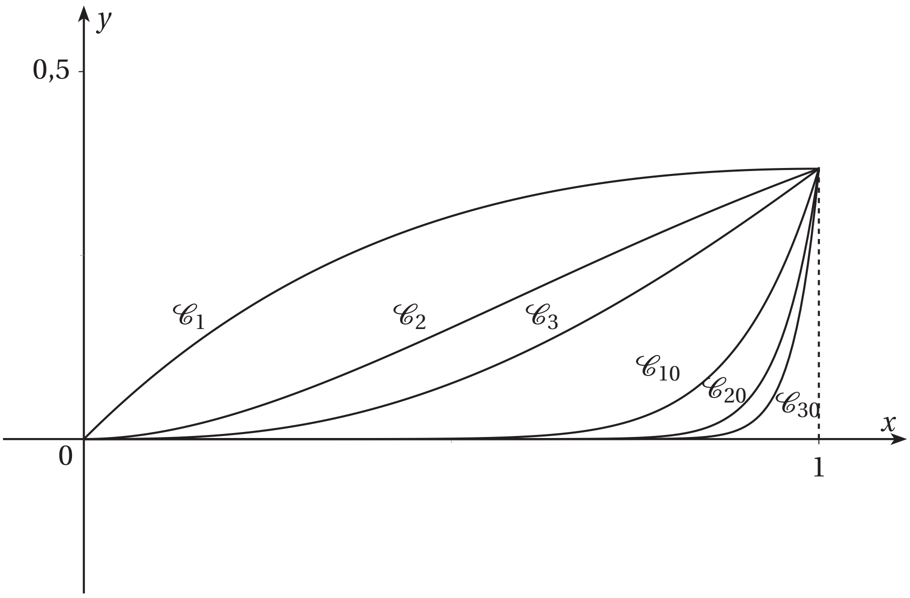
PARTIE B

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\, dx.$$

1. Calculer I_1.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les portions des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_{10}$, $\mathscr{C}_{20}$, $\mathscr{C}_{30}$ comprises dans la bande définie par $0 \leqslant x \leqslant 1$.



   a. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en décrivant sa démarche.

   b. Démontrer cette conjecture.

   c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.

   d. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\right)$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

On désigne par $\mathcal{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et par M_0 le point de coordonnées $\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right)$. On appelle H le projeté orthogonal du point M_0 sur le plan $\mathcal{P}$.

On suppose connue la propriété suivante.

Propriété : Le vecteur $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

Le but de cette partie est de démontrer que la distance $d\left(M_0,\ \mathcal{P}\right)$ du point M_0 au plan $\mathcal{P}$, c'est-à-dire la distance M_0H, est telle que

$$d\left(M_0,\ \mathcal{P}\right) = \frac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\ .$$

1. Justifier que $\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0H}\right| = M_0H\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
2. Démontrer que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0H} = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d$.
3. Conclure.

Partie B

On désigne par A, B, C, F les points de coordonnées respectives $(4,\ 1,\ 5)$, $(-3,\ 2,\ 0)$, $(1,\ 3,\ 6)$, $(-7,\ 0,\ 4)$.

1. **a.** Démontrer que les points A, B, C définissent un plan $\mathcal{P}$ et que ce plan a pour équation cartésienne $x + 2y - z - 1 = 0$.

   b. Déterminer la distance d du point F au plan $\mathcal{P}$.
2. Le but de cette question est de calculer la distance d par une autre méthode.
   On appelle Δ la droite qui passe par le point F et qui est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

   b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point F sur le plan $\mathcal{P}$.

   c. Retrouver le résultat de la question **1. b**.
3. Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre F et de rayon 6.

   a. Justifier que le point B appartient à la sphère $\mathcal{S}$.

   b. Préciser le centre et déterminer le rayon du cercle $\mathcal{C}$, intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{P}$.

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2011

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 9**

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.
Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

PARTIE A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note V l'événement « la personne est contaminée par le virus » et T l'événement « le test est positif ».
$\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les événements contraires de V et T.

1. **a.** Préciser les valeurs des probabilités $P(V)$, $P_V(T)$, $P_{\overline{V}}(\overline{T})$.
Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

   b. En déduire la probabilité de l'événement $V \cap T$.

2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,0492.

3. **a.** Justifier par un calcul la phrase :
« Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».

   b. Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif .

PARTIE B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

EXERCICE 2 (4 points)

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$.
On désigne par A, B, C, D les points d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = \text{i}$, $z_C = -1$, $z_D = -\text{i}$.

1. L'image E du point D par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ a pour affixe :

- $z_E = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1+\text{i})$,
- $z_E = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1-\text{i})$,
- $z_E = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}(1-\text{i})$,
- $z_E = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}(1+\text{i})$.

2. L'ensemble des points d'affixe z telle que $|\, z+\text{i}\,| = |\, z-1\,|$ est :

- la médiatrice du segment $[BC]$,
- le milieu du segment $[BC]$,
- le cercle de centre O et de rayon 1,
- la médiatrice du segment $[AD]$.

3. L'ensemble des points d'affixe z telle que $\dfrac{z+\text{i}}{z+1}$ soit un imaginaire pur est :

- la droite (CD) privée du point C,
- le cercle de diamètre $[CD]$ privé du point C,
- le cercle de diamètre $[BD]$ privé du point C,
- la médiatrice du segment $[AB]$.

4. L'ensemble des points d'affixe z telle que $\arg(z-\text{i}) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ est :

- le demi-cercle de diamètre $[BD]$ passant par A,
- la droite (BD),
- la demi-droite $]BD)$ d'origine B passant par D privée de B,
- le cercle de diamètre $[BD]$ privé de B et D.

EXERCICE 3 (7 points)

Commun à tous les candidats

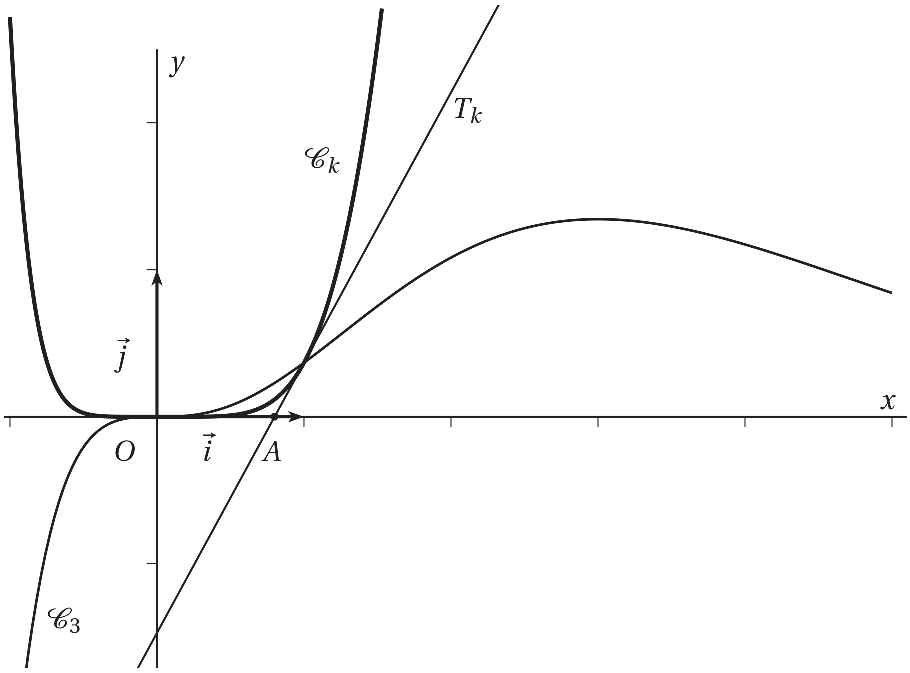
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O\,;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ du plan.

PARTIE A

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe $\mathscr{C}_k$ où k est un entier naturel non nul, sa tangente T_k au point d'abscisse 1 et la courbe $\mathscr{C}_3$.
La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\dfrac{4}{5},\ 0\right)$.



1. **a.** Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b. Étudier les variations de la fonction f_1 et dresser le tableau de variations de f_1.
   c. À l'aide du graphique, justifier que k est un entier supérieur ou égal à 2.

2. **a.** Démontrer que pour $n \geqslant 1$, toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par le point O et un autre point dont on donnera les coordonnées.
   b. Vérifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour tout réel x,

$$f_n'(x) = x^{n-1}(n - x)\mathrm{e}^{-x}.$$

3. Sur le graphique, la fonction f_3 semble admettre un maximum atteint pour $x = 3$.
Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

4. **a.** Démontrer que la droite T_k coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\dfrac{k-2}{k-1},\ 0\right)$.

   b. En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur de l'entier k.

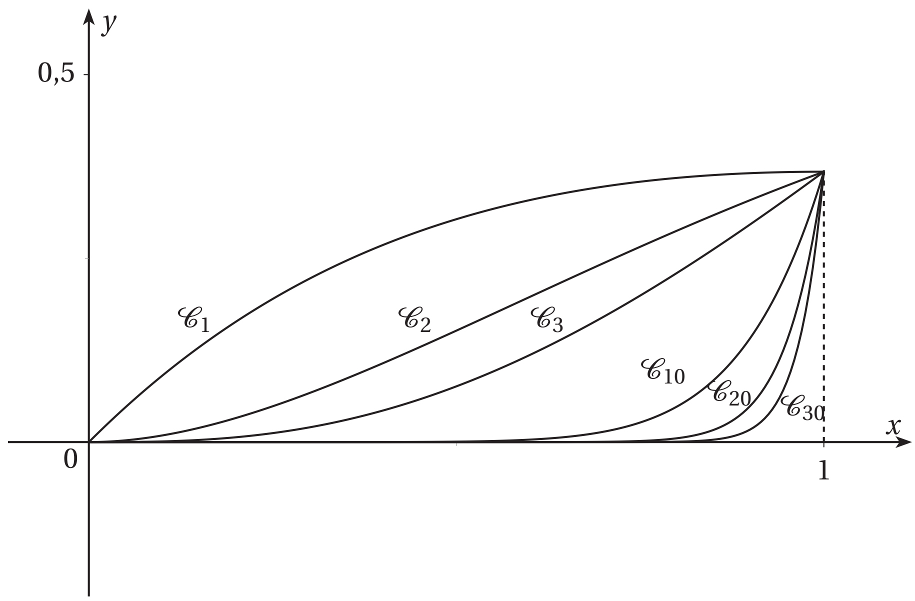
PARTIE B

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,dx.$$

1. Calculer I_1.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les portions des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_{10}$, $\mathscr{C}_{20}$, $\mathscr{C}_{30}$ comprises dans la bande définie par $0 \leqslant x \leqslant 1$.



   a. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en décrivant sa démarche.

   b. Démontrer cette conjecture.

   c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.

   d. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A - Restitution organisée de connaissances

On rappelle ci-dessous le théorème de BÉZOUT et le théorème de GAUSS.

Théorème de BÉZOUT :
Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si, il existe un couple $(u,\ v)$ d'entiers relatifs vérifiant $au + bv = 1$.

Théorème de GAUSS :
Soient a, b, c des entiers relatifs.
Si a divise le produit bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

1. En utilisant le théorème de BÉZOUT, démontrer le théorème de GAUSS.
2. Soient p et q deux entiers naturels tels que p et q sont premiers entre eux.
Déduire du théorème de GAUSS que, si a est un entier relatif, tel que $a \equiv 0\ [p]$ et $a \equiv 0\ [q]$, alors $a \equiv 0\ [pq]$.

.

PARTIE B
On se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\begin{cases} n \equiv 9\ [17] \\ n \equiv 3\ [5] \end{cases}$$

1. Recherche d'un élément de $\mathscr{S}$.
On désigne par (u, v) un couple d'entiers relatifs tel que $17u + 5v = 1$.
   - **a.** Justifier l'existence d'un tel couple (u, v).
   - **b.** On pose $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$.
   Démontrer que n_0 appartient à $\mathscr{S}$.
   - **c.** Donner un exemple d'entier n_0 appartenant à $\mathscr{S}$.
2. Caractérisation des éléments de $\mathscr{S}$
   - **a.** Soit n un entier relatif appartenant à $\mathscr{S}$.
   Démontrer que $n - n_0 \equiv 0\ [85]$.
   - **b.** En déduire qu'un entier relatif n appartient à $\mathscr{S}$ si et seulement si n peut s'écrire sous la forme $n = 43 + 85k$ où k est un entier relatif.
3. Application
Zoé sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons. Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9. Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3.
Combien a-t-elle de jetons ?

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2011

MATHÉMATIQUES

Série ES

Enseignement Obligatoire

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 5

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

La feuille Annexe de l'exercice 4 est à rendre avec la copie.

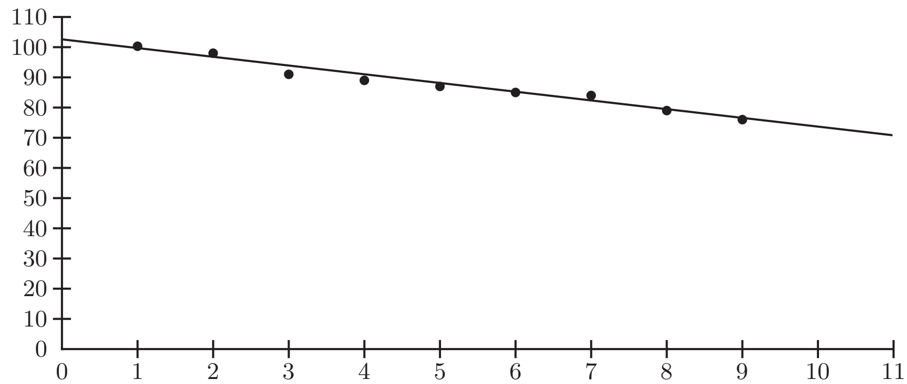
EXERCICE 1 (5 points)
Commun à tous les candidats

La Caisse Nationale de l'Assurance Maladie des Travailleurs Salariés (CNAMTS) publie, chaque année, des statistiques sur les accidents du travail en France. Celles-ci permettent d'obtenir divers indicateurs, notamment **l'indice de fréquence** (nombre moyen d'accidents du travail avec arrêt pour 1000 salariés).

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de l'indice de fréquence pour le secteur du BTP (Bâtiment et Travaux Publics) en France, au cours des années 2001 à 2009 :

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Indice de fréquence : y_i	100,3	98,9	91,6	89,5	87,6	85,4	84,0	79,9	76,0

1. **Premier ajustement**
   Grâce à un logiciel, un élève a obtenu le nuage de points représentant la série statistique $(x_i\,;\,y_i)$ et, par la méthode des moindres carrés, la droite d'ajustement de y en x dont une équation est $y = -2,89x + 102,59$ (les coefficients sont arrondis à 0,01).



   (a) En supposant que cet ajustement affine est valable jusqu'en 2012, déterminer une estimation de l'indice de fréquence en l'année 2012.
   (b) Quel serait le pourcentage d'évolution entre 2007 et 2012 de l'indice de fréquence selon ce modèle ? On arrondira le résultat à 10^{-2}.

2. **Deuxième ajustement**
   Un autre élève envisage un ajustement exponentiel de la série statistique $(x_i\,;\,y_i)$.
   On pose $z_i = \ln y_i$.
   (a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous (les valeurs de z_i seront arrondies à 10^{-3}).

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$z_i = \ln y_i$	4,608	4,594	4,517						

   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement de z en x sous la forme $z = ax + b$, les coefficients a et b étant arrondis à 10^{-4}.
   (c) En déduire une expression de y en fonction de x sous la forme $y = Ke^{-0,0328x}$, K étant une constante arrondie à 10^{-1} près.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   La stratégie européenne de santé au travail a fixé comme objectif une réduction de 25% de l'indice de fréquence entre 2007 et 2012.
   Peut-on prévoir d'atteindre cet objectif selon les deux ajustements précédents, que l'on suppose valables jusqu'en 2012 ?

EXERCICE 2 (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une chaîne de production d'une usine fabrique des vêtements pour nourrissons. Une étude statistique a montré que :

- 12% des vêtements fabriqués ont un défaut dans la couleur,
- parmi les vêtements ayant un défaut dans la couleur, 20% ont un défaut dans la forme,
- parmi les vêtements n'ayant pas de défaut dans la couleur, 8% présentent un défaut dans la forme.

On appelle C l'événement « le vêtement présente un défaut dans la couleur » et $\overline{\text{C}}$ l'événement contraire.
On appelle F l'événement « le vêtement présente un défaut dans la forme » et $\overline{\text{F}}$ l'événement contraire.
Un employé choisit un vêtement au hasard, dans un lot de vêtements fabriqués et conformes à l'étude statistique ci-dessus.

1. Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. (a) Calculer la probabilité que le vêtement choisi ait un défaut dans la couleur et un défaut dans la forme.

   (b) Calculer la probabilité que le vêtement choisi ait un défaut dans la forme.

   (c) Les événements C et F sont-ils indépendants ? Justifier.
3. Le directeur de l'usine affirme que 92% des vêtements fabriqués ne présentent aucun défaut. Cette affirmation est-elle correcte ? Expliquer.
4. Les employés de l'usine sont autorisés à acheter des vêtements à tarif préférentiel.
   L'un d'entre eux choisit au hasard trois vêtements. Le nombre de vêtements fabriqués est suffisamment grand pour considérer que les trois choix sont indépendants.
   Quelle est la probabilité pour qu'aucun de ces trois vêtements choisis ne présente de défaut ? Le résultat sera arrondi à 10^{-3}.

EXERCICE 3 (4 points)
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte.
Recopier le numéro de chaque question et indiquer la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Barème : Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. La fonction f est définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-2x+1}$$

   On note f' sa fonction dérivée.

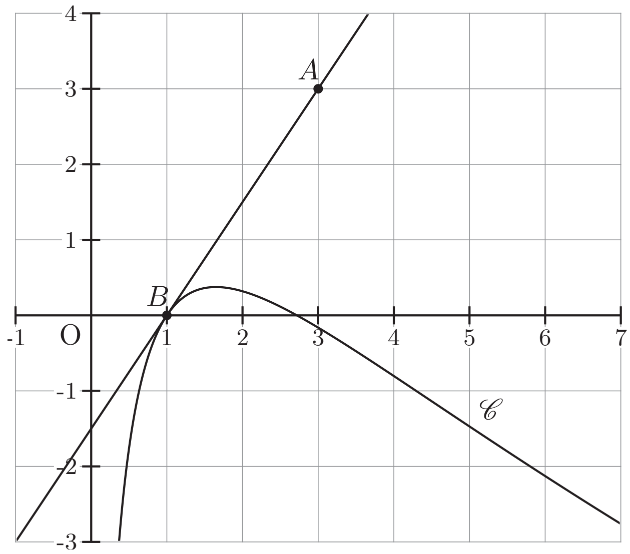
   (a) Pour tout x de $\mathbf{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-2}$
   (b) Pour tout x de $\mathbf{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-2x+1}$
   (c) Pour tout x de $\mathbf{R}$, $f'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x+1}$

2. On donne le tableau de variation d'une fonction g définie et continue sur l'intervalle $[-5 ; 12]$.

x	-5	2	8	12
$g(x)$	-3 ↘	-8 ↗	1 ↘	0

   (a) $\displaystyle\int_{-5}^{2} g(x)\,dx = 7$
   (b) L'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $[-5 ; 12]$
   (c) Pour tout x appartenant à l'intervalle $[-5 ; 8]$, $g(x) < 0$

3. La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction h définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. La droite (AB), tracée sur le graphique, est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B d'abscisse 1.



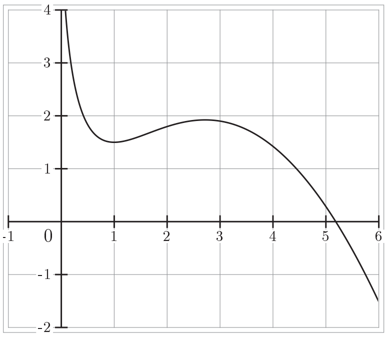
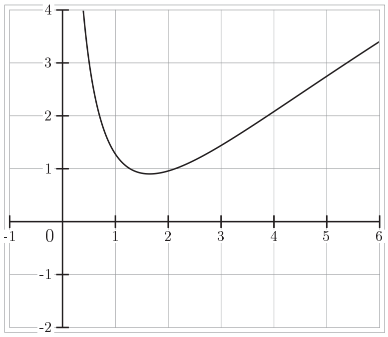
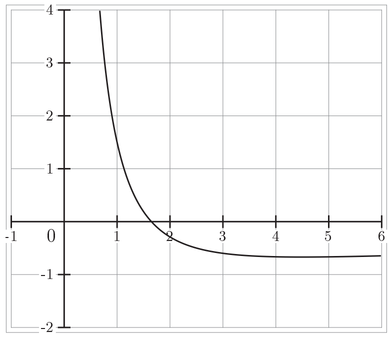
On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

(a) $h'(1) = 0$

(b) $h'(1) = 1,5$

(c) $h'(1) = -\dfrac{2}{3}$

4. Une seule des trois courbes ci-après est la représentation graphique d'une primitive de la fonction h (introduite à la question 3.) sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. Préciser laquelle.

(a)	(b)	(c)
		

EXERCICE 4 (6 points)
Commun à tous les candidats

Dans une entreprise, le résultat mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé en vendant x centaines d'objets fabriqués, est modélisé par la fonction B définie et dérivable sur l'intervalle $[0,1\,;\,10]$ par :

$$B(x) = 10 \times \frac{1 + \ln x}{x}.$$

Si $B(x)$ est positif, il s'agit d'un bénéfice ; s'il est négatif, il s'agit d'une perte.

1. Coraline utilise un logiciel de calcul formel. A plusieurs reprises, elle entre une commande, et le logiciel renvoie une réponse. Elle obtient l'écran suivant :

(Commande)	B(x) :=10*((1+ln(x))/x)
(Réponse 1)	$x -> 10 * \left(\frac{1+\ln x}{x}\right)$
(Commande)	deriver(B(x),x)
(Réponse 2)	$\frac{10}{x^2} + \frac{10 * (1 + \ln(x)) * (-1)}{x^2}$
(Commande)	resoudre(B(x)=0,x)
(Réponse 3)	$[\exp(-1)]$
(Commande)	resoudre(B(x)>0,x)
(Réponse 4)	$[x > \exp(-1)]$
(Commande)	maximum(B(x),[0.1 ;10])
(Réponse 5)	10

   (a) Traduire sur le graphique donné en annexe, illustrant la courbe représentative de la fonction B, les réponses 3, 4 et 5 renvoyées par le logiciel de calcul formel.

   (b) Justifier la réponse 3 renvoyée par le logiciel de calcul formel. Interpréter cette valeur en terme de résultat mensuel pour l'entreprise.

2. (a) Démontrer qu'une primitive de la fonction B sur l'intervalle $[0,1\,;\,10]$ est la fonction F définie sur $[0,1\,;\,10]$ par

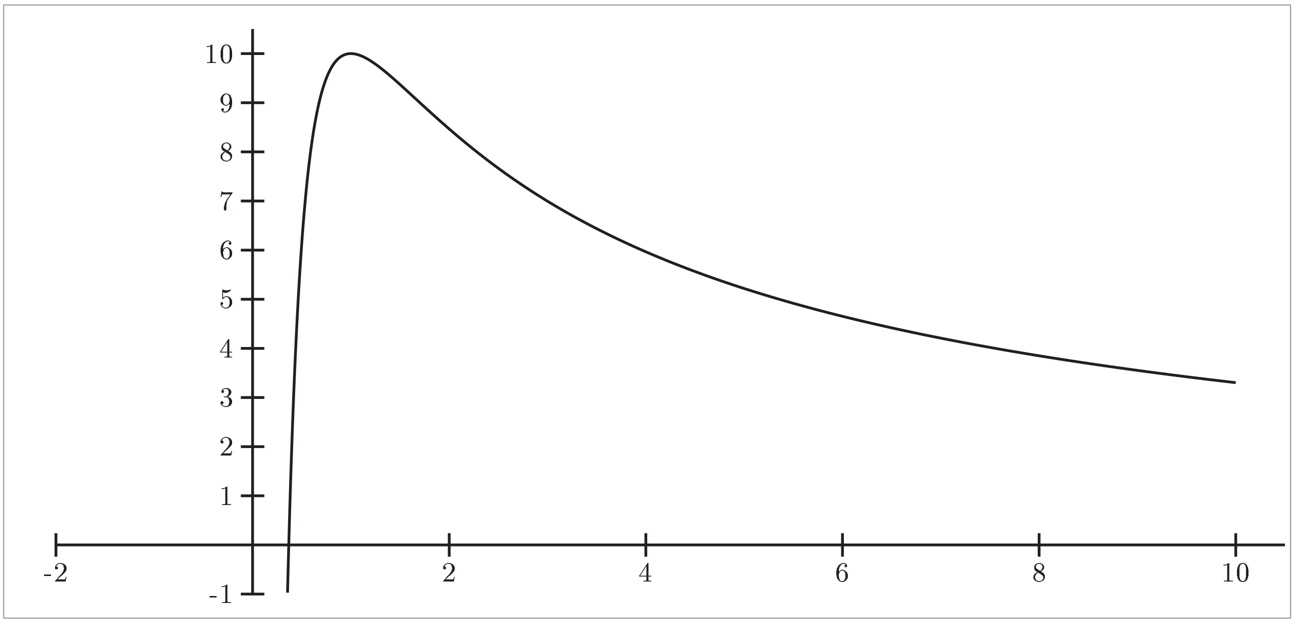
   $$F(x) = 5 \ln x\,(\ln x + 2)$$

   (b) Calculer $\displaystyle\int_{0,5}^{1,5} B(x)\,\mathrm{d}x$ puis en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

   Ce nombre représente le bénéfice mensuel moyen en milliers d'euros lorsque l'entreprise produit et vend chaque mois un nombre d'objets compris entre 50 et 150.

3. Pour quel nombre d'objets le bénéfice mensuel B est-il maximal ? Justifier la réponse par un calcul.

Annexe à rendre avec la copie



BACCALAURÉAT GENÉRAL

Session 2011

MATHÉMATIQUES

Série ES

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

La feuille Annexe de l'exercice 4 est à rendre avec la copie.

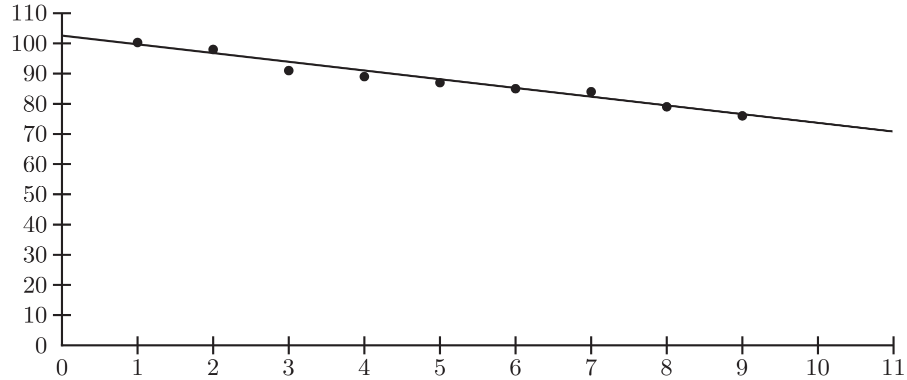
EXERCICE 1 (5 points)
Commun à tous les candidats

La Caisse Nationale de l'Assurance Maladie des Travailleurs Salariés (CNAMTS) publie, chaque année, des statistiques sur les accidents du travail en France. Celles-ci permettent d'obtenir divers indicateurs, notamment **l'indice de fréquence** (nombre moyen d'accidents du travail avec arrêt pour 1000 salariés).

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de l'indice de fréquence pour le secteur du BTP (Bâtiment et Travaux Publics) en France, au cours des années 2001 à 2009 :

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Indice de fréquence : y_i	100,3	98,9	91,6	89,5	87,6	85,4	84,0	79,9	76,0

1. **Premier ajustement**
   Grâce à un logiciel, un élève a obtenu le nuage de points représentant la série statistique $(x_i \,;\, y_i)$ et, par la méthode des moindres carrés, la droite d'ajustement de y en x dont une équation est $y = -2,89x + 102,59$ (les coefficients sont arrondis à 0,01).



   (a) En supposant que cet ajustement affine est valable jusqu'en 2012, déterminer une estimation de l'indice de fréquence en l'année 2012.

   (b) Quel serait le pourcentage d'évolution entre 2007 et 2012 de l'indice de fréquence selon ce modèle ? On arrondira le résultat à 10^{-2}.

2. **Deuxième ajustement**
   Un autre élève envisage un ajustement exponentiel de la série statistique $(x_i \,;\, y_i)$.
   On pose $z_i = \ln y_i$.

   (a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous (les valeurs de z_i seront arrondies à 10^{-3}).

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$z_i = \ln y_i$	4,608	4,594	4,517						

   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement de z en x sous la forme $z = ax + b$, les coefficients a et b étant arrondis à 10^{-4}.

   (c) En déduire une expression de y en fonction de x sous la forme $y = Ke^{-0,0328x}$, K étant une constante arrondie à 10^{-1} près.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   La stratégie européenne de santé au travail a fixé comme objectif une réduction de 25% de l'indice de fréquence entre 2007 et 2012.
   Peut-on prévoir d'atteindre cet objectif selon les deux ajustements précédents, que l'on suppose valables jusqu'en 2012 ?

EXERCICE 2 (5 points)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Chaque année, une association de cyclotourisme prépare de nouveaux circuits. Pour satisfaire ses nombreux membres, elle élabore des circuits de différents niveaux : « niveau facile» « niveau moyen » et « niveau difficile ».

Au premier janvier 2010, l'association a fait son bilan :
- 20% de ses adhérents ont choisi le niveau facile, noté A,
- 70% de ses adhérents ont choisi le niveau moyen, noté B,
- 10% de ses adhérents ont choisi le niveau difficile, noté C.

Pour répondre aux attentes des adhérents et les fidéliser sur le long terme, une enquête est effectuée. Il s'avère que, d'une année à l'autre :
- parmi les adhérents ayant choisi le niveau A, 40% restent à ce niveau et 60% passent au niveau B,
- parmi les adhérents ayant choisi le niveau B, 70% restent à ce niveau, 20% reviennent au niveau A et les autres passent au niveau C,
- parmi les adhérents ayant choisi le niveau C, 85% restent à ce niveau et les autres reviennent au niveau B.

On note :
- A l'état « l'adhérent choisit le niveau A »,
- B l'état « l'adhérent choisit le niveau B »,
- C l'état « l'adhérent choisit le niveau C ».

Pour n entier naturel positif ou nul, on note $P_n = (a_n \quad b_n \quad c_n)$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste de la répartition dans les différents niveaux (indiqués dans l'ordre donné dans l'énoncé), au premier janvier de l'année $2010 + n$. Ainsi $P_0 = (0,2 \;\; 0,7 \;\; 0,1)$.

On décide de se baser uniquement sur ces résultats pour prévoir l'évolution de la répartition à partir du premier janvier 2010 (on néglige donc les nouveaux abonnés et les départs).

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets A , B et C.
2. Reproduire et compléter la matrice de transition M de ce graphe probabiliste, en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

$$M = \begin{pmatrix} \dots & \dots & 0 \\ 0,2 & \dots & \dots \\ \dots & 0,15 & \dots \end{pmatrix}$$

3. Une seule des trois matrices Q, R, T ci-dessous correspond à l'état probabiliste stable.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Le président de l'association affirme qu'environ 50% des adhérents choisiront après un certain nombre d'années le niveau B. Cette affirmation est-elle correcte ?

EXERCICE 3 (4 points)
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte.
Recopier le numéro de chaque question et indiquer la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Barème : Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. La fonction f est définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-2x+1}$$

On note f' sa fonction dérivée.

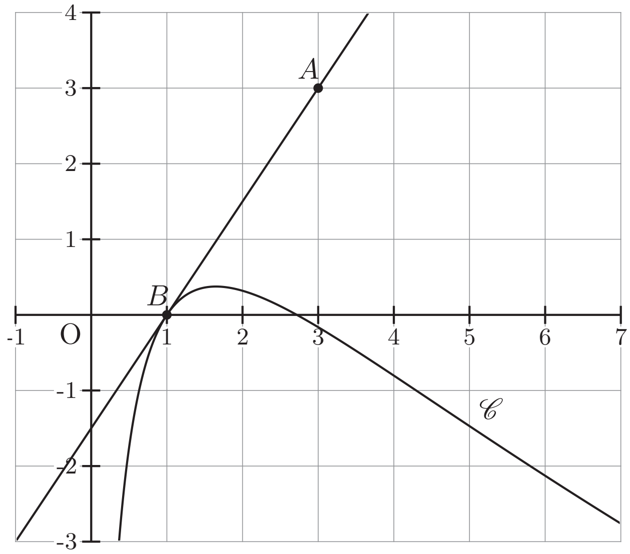
(a) Pour tout x de $\mathbf{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-2}$
(b) Pour tout x de $\mathbf{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-2x+1}$
(c) Pour tout x de $\mathbf{R}$, $f'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x+1}$

2. On donne le tableau de variation d'une fonction g définie et continue sur l'intervalle $[-5\,;\,12]$.

x	-5		2		8		12
$g(x)$	-3	↘	-8	↗	1	↘	0

(a) $\displaystyle\int_{-5}^{2} g(x)\,dx = 7$
(b) L'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $[-5\,;\,12]$
(c) Pour tout x appartenant à l'intervalle $[-5\,;\,8]$, $g(x) < 0$

3. La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction h définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. La droite (AB), tracée sur le graphique, est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B d'abscisse 1.



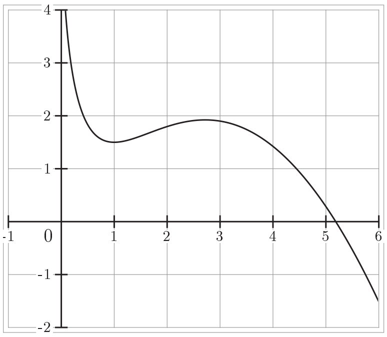
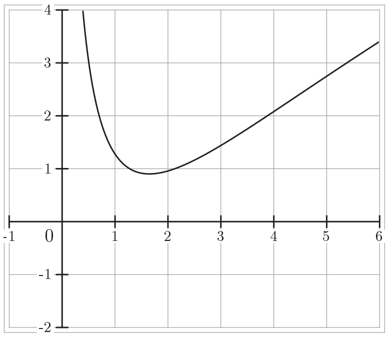
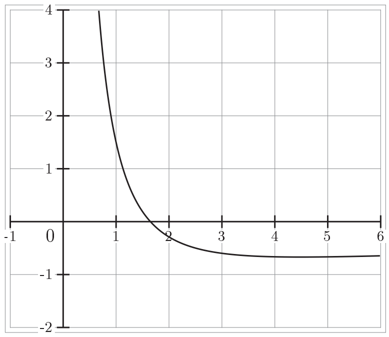
On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

(a) $h'(1) = 0$

(b) $h'(1) = 1,5$

(c) $h'(1) = -\dfrac{2}{3}$

4. Une seule des trois courbes ci-après est la représentation graphique d'une primitive de la fonction h (introduite à la question 3.) sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. Préciser laquelle.

(a)	(b)	(c)
		

EXERCICE 4 (6 points)
Commun à tous les candidats

Dans une entreprise, le résultat mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé en vendant x centaines d'objets fabriqués, est modélisé par la fonction B définie et dérivable sur l'intervalle $[0,1\,;\,10]$ par :

$$B(x) = 10 \times \frac{1+\ln x}{x}.$$

Si $B(x)$ est positif, il s'agit d'un bénéfice ; s'il est négatif, il s'agit d'une perte.

1. Coraline utilise un logiciel de calcul formel. A plusieurs reprises, elle entre une commande, et le logiciel renvoie une réponse. Elle obtient l'écran suivant :

(Commande) B(x) :=10∗((1+ln(x))/x)

(Réponse 1) $x- > 10 * \left(\dfrac{1+\ln x}{x}\right)$

(Commande) deriver(B(x),x)

(Réponse 2) $\dfrac{10}{x^2} + \dfrac{10*(1+\ln(x))*(-1)}{x^2}$

(Commande) resoudre(B(x)=0,x)

(Réponse 3) $[\exp(-1)]$

(Commande) resoudre(B(x)>0,x)

(Réponse 4) $[x > \exp(-1)]$

(Commande) maximum(B(x),[0.1 ;10])

(Réponse 5) 10

   (a) Traduire sur le graphique donné en annexe, illustrant la courbe représentative de la fonction B, les réponses 3, 4 et 5 renvoyées par le logiciel de calcul formel.

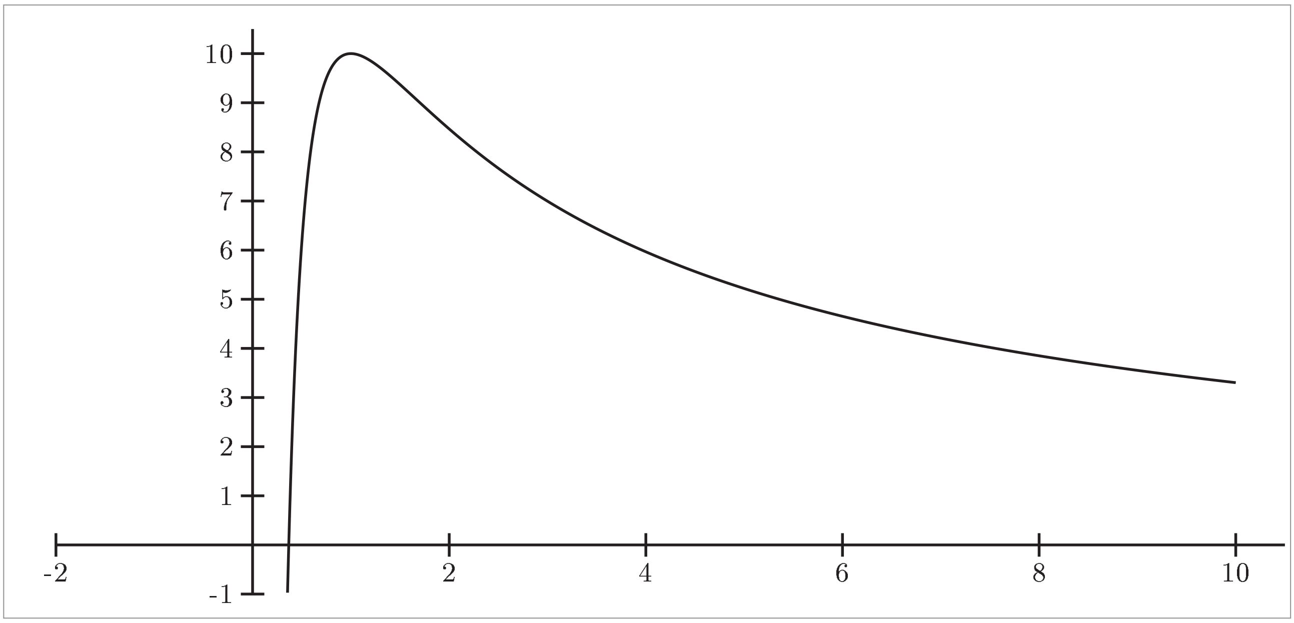
   (b) Justifier la réponse 3 renvoyée par le logiciel de calcul formel. Interpréter cette valeur en terme de résultat mensuel pour l'entreprise.

2. (a) Démontrer qu'une primitive de la fonction B sur l'intervalle $[0,1\,;\,10]$ est la fonction F définie sur $[0,1\,;\,10]$ par
$$F(x) = 5\ln x\,(\ln x + 2)$$

   (b) Calculer $\displaystyle\int_{0,5}^{1,5} B(x)\,\mathrm{d}x$ puis en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
   Ce nombre représente le bénéfice mensuel moyen en milliers d'euros lorsque l'entreprise produit et vend chaque mois un nombre d'objets compris entre 50 et 150.

3. Pour quel nombre d'objets le bénéfice mensuel B est-il maximal ? Justifier la réponse par un calcul.

Annexe à rendre avec la copie



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2012

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 7**

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

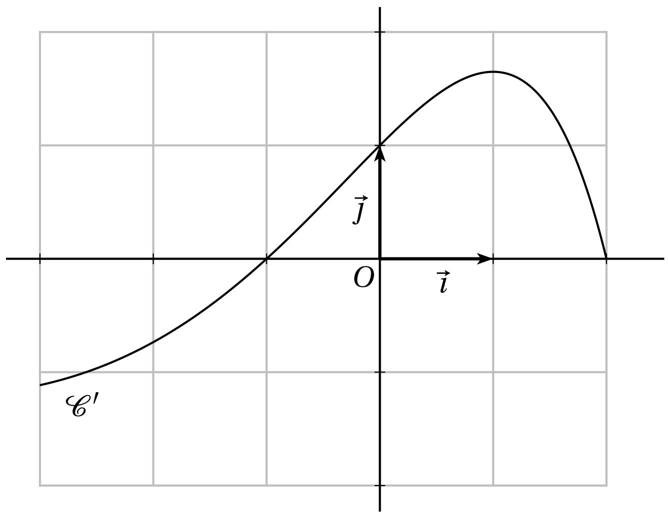
EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3,\,2]$.

On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathscr{C}'$ ci-dessous.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3,\,-1]$, $\quad f'(x) \leqslant 0$.

2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1,\,2]$.

3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3,\,2]$, $f(x) \geqslant -1$.

4. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1,\,0)$.

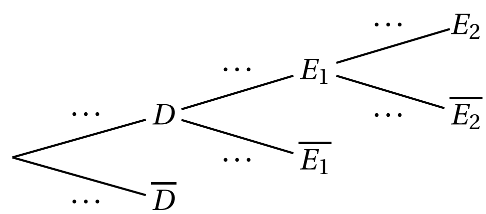
EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40% des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70% d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25% des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.
On considère les événements suivants :
D : « Le candidat est retenu sur dossier »,
E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,
E_2 : « Le candidat est recruté ».

a. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



b. Calculer la probabilité de l'événement E_1.

c. On note F l'événement « Le candidat n'est pas recruté ».
Démontrer que la probabilité de l'événement F est égale à 0,93.

2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à 0,07.
On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

a. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

b. Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3}.

3. Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à 0,999 ?

EXERCICE 3 (6 points)

Commun à tous les candidats

Il est possible de traiter la partie C sans avoir traité la partie B.

Partie A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[1,\ +\infty[$ par

$$f(x)=\frac{1}{x+1}+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1,+\infty[$, $\quad f'(x)=\dfrac{1}{x(x+1)^2}$.
Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1,\ +\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier strictement positif par $u_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\ln n$.

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	i et n sont des entiers naturels.
	u est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0.
Traitement :	Pour i variant de 1 à n.
	Affecter à u la valeur $u+\dfrac{1}{i}$.
Sortie :	Afficher u.

Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $n=3$.

2. Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n.

3. Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à 10^{-3}.

n	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	1500	2000
u_n	0,697	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632	0,626	0,582	0,578	0, 578	0,577

À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite (u_n) et son éventuelle convergence.

Partie C

Cette partie peut être traitée indépendamment de la partie B.
Elle permet de démontrer les conjectures formulées à propos de la suite (u_n) telle que pour tout entier strictement positif n,

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. Démontrer que pour tout entier strictement positif n,

$$u_{n+1} - u_n = f(n)$$

où f est la fonction définie dans la partie **A**.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

2. **a.** Soit k un entier strictement positif.

Justifier l'inégalité $\displaystyle\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right)\, \mathrm{d}x \geqslant 0.$

En déduire que $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}.$

Démontrer l'inégalité $\ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$ (1).

b. Écrire l'inégalité (1) en remplaçant successivement k par 1, 2, ..., n et démontrer que pour tout entier strictement positif n,

$$\ln(n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

c. En déduire que pour tout entier strictement positif n, $u_n \geqslant 0$.

3. Prouver que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v}\right)$.
On appelle f l'application qui à tout point M d'affixe z différente de -1, fait correspondre le point M' d'affixe $\dfrac{1}{z+1}$.
Le but de l'exercice est de déterminer l'image par f de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$.

1. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = -\dfrac{1}{2}$, $z_B = -\dfrac{1}{2} + \text{i}$ et $z_C = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\text{i}$.

- **a.** Placer les trois points A, B et C sur une figure que l'on fera sur la copie en prenant 2 cm pour unité graphique.
- **b.** Calculer les affixes des points $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$, et placer les points A', B' et C' sur la figure.
- **c.** Démontrer que les points A', B' et C' ne sont pas alignés.

2. Soit g la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M_1 d'affixe $z+1$.

- **a.** Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g.
- **b.** Sans donner d'explication, placer les points A_1, B_1 et C_1, images respectives par g de A, B et C et tracer la droite $\mathcal{D}_1$, image de la droite $\mathcal{D}$ par g.
- **c.** Démontrer que $\mathcal{D}_1$ est l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-1| = |z|$.

3. Soit h l'application qui, à tout point M d'affixe z non nulle, associe le point M_2 d'affixe $\dfrac{1}{z}$.

- **a.** Justifier que $h(A_1) = A'$, $h(B_1) = B'$ et $h(C_1) = C'$.
- **b.** Démontrer que, pour tout nombre complexe non nul z, on a :

$$\left|\frac{1}{z} - 1\right| = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |z|.$$

- **c.** En déduire que l'image par h de la droite $\mathcal{D}_1$ est incluse dans un cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle sur la figure.
  On admet que l'image par h de la droite $\mathcal{D}_1$ est le cercle $\mathcal{C}$ privé de O.

4. Déterminer l'image par l'application f de la droite $\mathcal{D}$.

Correction
Obligatoire

Exercice 1

1. D'après le graphique, la courbe représentative $\mathscr{C}'$ de la fonction f' est en dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-3;-1]$, par suite pour tout x de l'intervalle $[-3;-1]$, $f'(x) \leqslant 0$. L'affirmation est VRAIE. [1 point]

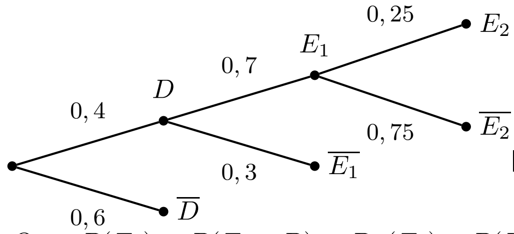
2. D'après le graphique, pour tout $x \in [-1;2]$ on a $f'(x) \leqslant 0$, ainsi la fonction f est croissante sur cette intervalle. L'affirmation est VRAIE. [1 point]

3. D'après la question précédente, f est strictement croissante sur l'intervalle $[-1;0]$, or d'après l'énoncé $f(0) = -1$, par suite $f(-1) < f(0)$. L'affirmation est FAUSSE. [1 point]

4. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)x + f(0)$. Or, $f'(0) = 1$ et $f(0) = -1$, ainsi cette équation est $y = x - 1$ et le point de coordonnées $(1;0)$ appartient bien à cette droite. L'affirmation est VRAIE. [1 point]

Exercice 2

1. a)



[1 point]

b) On a $P(E_1) = P(E_1 \cap D) = P_D(E_1) \times P(D) = 0,7 \times 0,4 = 0,28$. [0,75 point]

c) $F = \overline{E_2}$. Par ailleurs, $P(E_2) = P(E_2 \cap E_1) = P_{E_1}(E_2) \times P(E_1) = 0,25 \times 0,28 = 0,07$. Par suite, $P(\overline{E_2}) = 0,93$. [0,5 point]

2. a) L'expérience qui consiste pour une de ces personnes à savoir si elle est recrutée ou non est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,07$ dont le succès est «la personne est recrutée». En répétant 5 fois de manière indépendantes cette expérience, on obtient un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire X qui compte ne nombre de succès de ce schéma de Bernoulli suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,07$. [1 point]

b) $P(X = 5) = \binom{2}{5} 0,07^2 \times 0,93^3 \simeq 0,039$ à 10^{-3} près. [0,75 point]

3. Il s'agit de determiner le nombre minimum de dossiers que le cabinet doit traiter pour que la probabilité de ne recruter aucun candidat soit inférieur à $0,001$. La probabilité de ne par recruter un candidat étant de $0,93$, s'agissant de la répétition d'expériences indentiques et indépendantes, il faut trouver n pour que $0,93^n \leqslant 10^{-3}$.

Or, $0,93^n \leqslant 10^{-3} \Leftrightarrow n \ln 0,93 \leqslant -3 \ln 10 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{-3\ln 10}{\ln 0,93}$ car $\ln 0,93 < 0$. Mais, $\dfrac{-3\ln 10}{ln 0,93} \simeq 95,2$. Il au moins traiter 96 dossiers. [1 point]

Exercice 3

Partie A

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$, en posant $X = \dfrac{x}{x+1}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} X = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} = 1$, or la fonction ln étant continue en 1, on a $\lim\limits_{X\to1} \ln X = \ln 1 = 0$. Par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = 0$. Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. $x + 1 \neq 0$ et $\dfrac{x}{x+1} > 0$ pour $x \in [1;+\infty[$, par composée et somme de fonction dériavables, f est dérivable sur $[1;+\infty[$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \dfrac{x}{x+1}$ et $u'(x) = \dfrac{1(x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, par suite $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} = -\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{-x+x+1}{x(x+1)^2} = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$.

Ainsi, pour $x \in [1;+\infty[$, $f'(x) > 0$ et la fonction f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

x	1	$+\infty$
$f(x)$	$\frac{1}{2} - \ln 2$ $\nearrow$	0

3. Puisque $\frac{1}{2} - \ln 2 < 0$, et le tableau de variation de la fonction f, f est négative sur $[1; +\infty[$.

Partie B

1. On trouve $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$.

2.

Variables :	i et n sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0
Traintement :	Pour i variant de 1 à n
	Affecter à u la valeur $u + \frac{1}{i}$
Sortie :	Afficher $u - \ln n$

3. La suite (u_n) semble décroissante et convergente vers un réel proche de $0,577$.

Partie C

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - ... - \frac{1}{n} + \ln n = \frac{1}{n+1} + \ln \frac{n}{n+1} = f(n)$.

D'après la question **3.** de la partie A, on en déduit que $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout entier naturel n et la suite (u_n) est strictement décroissante.

2. a) Pour $x \in [k; k+1]$,

on a $k \leqslant x \leqslant k+1$, la fonction inverse étant décroissante sur $]0; +\infty[$, on a $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$, d'où $\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \geqslant 0$, en passant à l'intégrale dans l'inégalité, on obtient $\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \geqslant 0$.

Or, par linéarité de l'intégrale, $\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \int_k^{k+1} \frac{1}{k} \mathrm{d}x - \int_k^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$. Par suite, $\frac{1}{k} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$.

Or, $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = [\ln x]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln k$, ainsi $\ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}$.

b)

$$\begin{aligned} \ln 2 - \ln 1 &\leqslant 1 \\ \ln 3 - \ln 2 &\leqslant \frac{1}{2} \\ &\vdots \\ \ln(n+1) - \ln n &\leqslant \frac{1}{n} \end{aligned}$$

En ajoutant membres à membres les inégalités, on obtient :

$\ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + ... + \ln(n+1) - \ln n \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$, c'est-à-dire $\ln(n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question précédente :

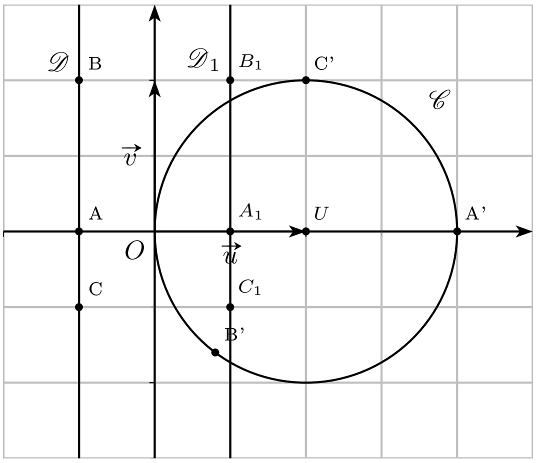
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ln n \geqslant \ln(n+1) - \ln n$, d'où $u_n \geqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$. Or, pour $n \geqslant 1$, $\frac{n+1}{n} > 1$, par suite $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) > 0$. d'où $u_n \geqslant 0$.

3. (u_n) étant une suite décroissante et minorée par 0, elle converge.

Exercice 4

Obligatoire

1. a)



b) $z_{A'} = \dfrac{1}{z_A + 1} = \dfrac{1}{-\frac{1}{2}+1} = 2,$

$z_{B'} = \dfrac{1}{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}+1} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}+\mathrm{i}} = \dfrac{\frac{1}{2}-\mathrm{i}}{\frac{1}{4}+1} = \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\right) = \dfrac{2}{5} - \dfrac{4}{5}\mathrm{i}.$

$z_{C'} = \dfrac{1}{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}+1} = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = 2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 1+\mathrm{i}.$

c) $z_{\overrightarrow{A'B'}} = z_{B'} - z_{A'} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{4}{5}\mathrm{i} - 2 = \dfrac{8}{5} - \dfrac{4}{5}\mathrm{i}$ et $z_{\overrightarrow{A'C'}} = z_{C'} - z_{A'} = 1+\mathrm{i}-2 = -1+\mathrm{i}$. En observant, leurs affixes, il est clair que les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ ne sont pas colinéaires et que les points A', B' et C' ne sont pas alignés.

2. a) g est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe 1.

b) Voir la figure.

c) $\mathscr{D}_1$ étant l'image de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$, par la translation g ainsi $\mathscr{D}_1$ est la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$, c'est donc la médiatrice du segment $[OU]$ où U est le point d'affixe 1.
Ainsi, $M \in \mathscr{D}_1 \Leftrightarrow UM = OM \Leftrightarrow |z-1| = |z|$.

3. a) $A_1 = g(A)$ et $h(A_1) = h \circ g(A) = f(A) = A'$, de même pour $h(B_1) = B'$ et $h(C_1) = C'$.

b) Pour $z \in \mathbb{C}^*$,
$\left|\dfrac{1}{z} - 1\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{1-z}{z}\right| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|1-z|}{|z|} = 1 \Leftrightarrow |1-z| = |z| \Leftrightarrow |z-1| = |z|$ car $|1-z| = |-(z-1)| = |z-1|$.

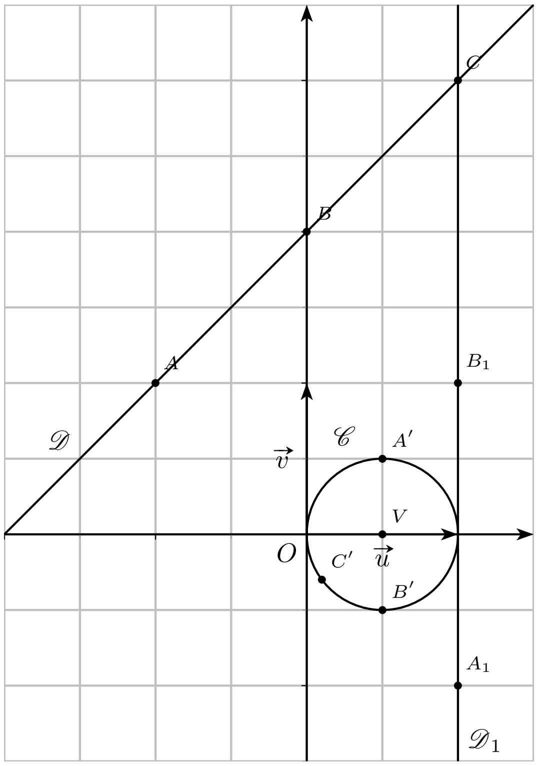
c) Soit $M(z) \in \mathscr{D}_1$, on a $|z-1| = |z|$, donc d'après la question précédente $\left|\dfrac{1}{z} - 1\right| = 1$, par suite $|h(z) - 1| = 1$, ainsi $h(z)$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre $U(1)$ et de rayon 1.

4. Puisque $g(\mathscr{D}) = \mathscr{D}_1$ d'après la question **2.b)**, $h \circ g(\mathscr{D}) = h(\mathscr{D}_1) = \mathscr{C}$ d'après la question précédente, d'où $f(\mathscr{D}) = \mathscr{C} \setminus \{O\}$.
L'image de la droite $\mathscr{C}$ par f est le cercle $\mathscr{C}$ privé de O.

Exercice 3

Spécialité

1. Dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on a $A(-1;1)$, $B(0;2)$ et $C(1;3)$, de plus $-1+2=1$, $0+2=2$ et $1+2=3$, ainsi les points A, B et C appartiennent à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=x+2$.



2. $(1+\mathrm{i})z+3-\mathrm{i}=0 \Leftrightarrow (1+\mathrm{i})z=-3+\mathrm{i} \Leftrightarrow z=\dfrac{-3+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(-3+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2}=\dfrac{-4-2\mathrm{i}}{2}=-2-\mathrm{i}$. D'où $\mathscr{S}=\{-2-\mathrm{i}\}$.
De plus, $-2+2=0\neq -1$, ainsi le point d'affixe $-2-\mathrm{i}$ n'appartient par à la droite $\mathscr{D}$.

3. a) g est de la forme $z\mapsto az+b$ où a et b sont des nombres complexes avec a non nul, g est alors une similitude directe de rapport $k=|1+\mathrm{i}|=\sqrt{2}$ et d'angle $\theta=\arg(1+\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

Le centre Ω d'affixe ω vérifie $h(\Omega)=\Omega \Leftrightarrow (1+\mathrm{i})\omega+3-\mathrm{i}=\omega \Leftrightarrow \mathrm{i}\omega=-3+\mathrm{i}\Leftrightarrow \omega=\dfrac{-3+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=1+3\mathrm{i}$. Ainsi $\Omega=C$.

b) $z_{A_1}=(1+\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})+3-\mathrm{i}=-2+3-\mathrm{i}=1-\mathrm{i}$.
$z_{B_1}=(1+\mathrm{i})\times 2\mathrm{i}+3-\mathrm{i}=1+\mathrm{i}$.
$z_{C_1}=z_C=1+3\mathrm{i}$ (vu à la question précédente).

c) Par une similitude directe, l'image d'une droite est une droite. D'après la question précédente cette droite passe par les points A_1 et B_1 d'affixes respectives $1-\mathrm{i}$ et $1+\mathrm{i}$ de même partie réelle égale à 1, il s'agit donc de la droite d'équation $x=1$.

4. a) Soit $A'=h(A_1)$, $B'=h(B_1)$ et $C'=h(C_1)$.
On a $z_{A'}=\dfrac{1}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$, $z_{B'}=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ et $z_{C'}=\dfrac{1}{1+3\mathrm{i}}=\dfrac{1-3\mathrm{i}}{10}=\dfrac{1}{10}-\dfrac{3}{10}\mathrm{i}$.

b) Soit $z\in\mathbb{C}^*$, $\left|\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left|\dfrac{2-z}{2z}\right|=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{|2-z|}{|2z|}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow|2-z|=\dfrac{|2z|}{2}\Leftrightarrow|2-z|=\dfrac{2|z|}{2}\Leftrightarrow|z-2|=|z|$ car $|2-z|=|z-2|$.

c) $\mathscr{D}_1$ étant la droite d'équation $x=1$, c'est la médiatrice du segment $[OU]$ où U est le point d'affixe 2.
Soit $M(z)\in\mathscr{D}_1$, on a $|z-2|=|z|$ avec $z\neq 0$, d'où $\left|\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$, ainsi le point $M_1=h(M)$ est un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre V d'affixe $\dfrac{1}{2}$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

d) Soit $M_1(z_1)$ un point du cercle $\mathscr{C}$ distinct du point O, on a $\left|z_1-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$. Soit $z=\dfrac{1}{z_1}\neq 0$, on a $\left|\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire $|z-2|=|z|$. Par suite, le point M d'affixe z est un point de la droite $\mathscr{D}_1$ et puisque $z_1=\dfrac{1}{z}$, $h(M)=M_1$.

5. D'après les questions précédente, $g(\mathscr{D})=\mathscr{D}_1$ et $h(D_1)=\mathscr{C}\setminus\{O\}$, par suite $f(\mathscr{D})=h\circ g(\mathscr{D})=\mathscr{C}\setminus\{O\}$. L'image par f de la droite $\mathscr{D}$ est le cercle $\mathscr{C}$ privé du point O.

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2012

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 9**

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

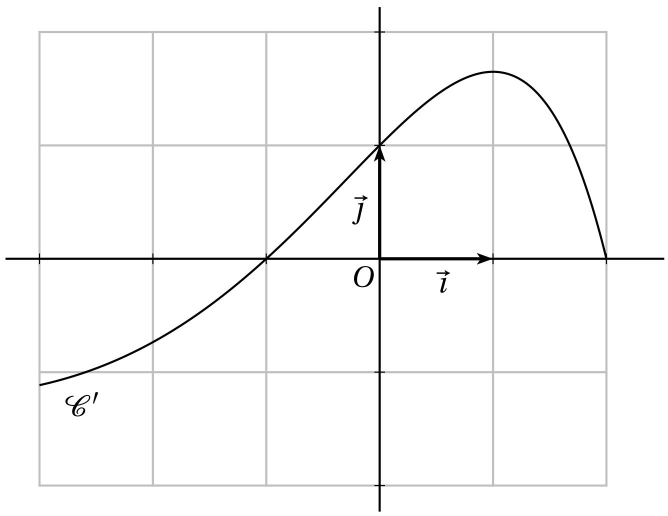
EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$.
On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3,\ 2]$.

On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathscr{C}'$ ci-dessous.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3,\ -1]$, $\quad f'(x) \leqslant 0$.

2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1,\ 2]$.

3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3,\ 2]$, $f(x) \geqslant -1$.

4. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1,\ 0)$.

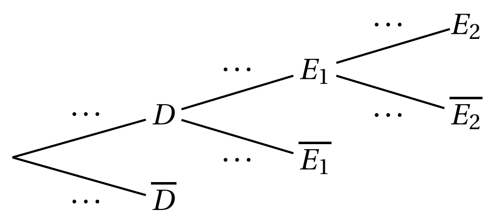
EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40% des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70% d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25% des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.
On considère les événements suivants :
D : « Le candidat est retenu sur dossier »,
E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,
E_2 : « Le candidat est recruté ».

a. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



b. Calculer la probabilité de l'événement E_1.

c. On note F l'événement « Le candidat n'est pas recruté ».
Démontrer que la probabilité de l'événement F est égale à 0,93.

2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à 0,07.
On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

a. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

b. Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3}.

3. Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à 0,999 ?

EXERCICE 3 (6 points)

Commun à tous les candidats

Il est possible de traiter la partie C sans avoir traité la partie B.

Partie A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[1,\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1, +\infty[$, $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$.
   Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1,\ +\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier strictement positif par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$.

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	i et n sont des entiers naturels.
	u est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0.
Traitement :	Pour i variant de 1 à n.
	Affecter à u la valeur $u + \dfrac{1}{i}$.
Sortie :	Afficher u.

   Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $n = 3$.
2. Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n.
3. Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à 10^{-3}.

n	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	1500	2000
u_n	0,697	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632	0,626	0,582	0,578	0, 578	0,577

   À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite (u_n) et son éventuelle convergence.

Partie C

Cette partie peut être traitée indépendamment de la partie B.
Elle permet de démontrer les conjectures formulées à propos de la suite (u_n) telle que pour tout entier strictement positif n,

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. Démontrer que pour tout entier strictement positif n,

$$u_{n+1} - u_n = f(n)$$

où f est la fonction définie dans la partie **A**.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

2. **a.** Soit k un entier strictement positif.

Justifier l'inégalité $\displaystyle\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \geqslant 0.$

En déduire que $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}.$

Démontrer l'inégalité $\ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$ (1).

b. Écrire l'inégalité (1) en remplaçant successivement k par 1, 2, ..., n et démontrer que pour tout entier strictement positif n,

$$\ln(n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

c. En déduire que pour tout entier strictement positif n, $u_n \geqslant 0$.

3. Prouver que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\ \vec{u}\,,\ \vec{v}\right)$.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = -1+\mathrm{i}$, $z_B = 2\mathrm{i}$ et $z_C = 1+3\mathrm{i}$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x+2$.

1. Prouver que les points A, B et C appartiennent à la droite $\mathcal{D}$.
Sur une figure que l'on fera sur la copie en prenant 2 cm pour unité graphique, placer les points A, B, C et tracer la droite $\mathcal{D}$.

2. Résoudre l'équation $(1+\mathrm{i})\,z+3-\mathrm{i}=0$ et vérifier que la solution de cette équation est l'affixe d'un point qui n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$.

Dans la suite de l'exercice, on appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z différente de $-1+2\mathrm{i}$, fait correspondre le point M' d'affixe $\dfrac{1}{(1+\mathrm{i})\,z+3-\mathrm{i}}$.
Le but de l'exercice est de déterminer l'image par f de la droite $\mathcal{D}$.

3. Soit g la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M_1 d'affixe $(1+\mathrm{i})\,z+3-\mathrm{i}$.

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g.

b. Calculer les affixes des points A_1, B_1 et C_1, images respectives par g des points A, B et C.

c. Déterminer l'image $\mathcal{D}_1$ de la droite $\mathcal{D}$ par la transformation g et la tracer sur la figure.

4. Soit h l'application qui, à tout point M d'affixe z non nulle, fait correspondre le point M_2 d'affixe $\dfrac{1}{z}$.

a. Déterminer les affixes des points $h(A_1)$, $h(B_1)$ et $h(C_1)$ et placer ces points sur la figure.

b. Démontrer que, pour tout nombre complexe non nul z, on a :

$$\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |z-2| = |z|.$$

c. En déduire que l'image par h de la droite $\mathcal{D}_1$ est incluse dans un cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle sur la figure.

d. Démontrer que tout point du cercle $\mathcal{C}$ qui est distinct de O est l'image par h d'un point de la droite $\mathcal{D}_1$.

5. Déterminer l'image par l'application f de la droite $\mathcal{D}$.

Correction
Obligatoire

Exercice 1

1. D'après le graphique, la courbe représentative $\mathscr{C}'$ de la fonction f' est en dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-3;-1]$, par suite pour tout x de l'intervalle $[-3;-1]$, $f'(x) \leqslant 0$. L'affirmation est VRAIE. [1 point]

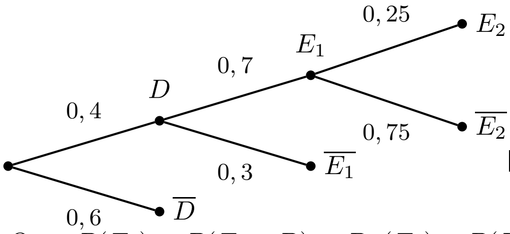
2. D'après le graphique, pour tout $x \in [-1;2]$ on a $f'(x) \leqslant 0$, ainsi la fonction f est croissante sur cette intervalle. L'affirmation est VRAIE. [1 point]

3. D'après la question précédente, f est strictement croissante sur l'intervalle $[-1;0]$, or d'après l'énoncé $f(0) = -1$, par suite $f(-1) < f(0)$. L'affirmation est FAUSSE. [1 point]

4. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)x + f(0)$. Or, $f'(0) = 1$ et $f(0) = -1$, ainsi cette équation est $y = x - 1$ et le point de coordonnées $(1;0)$ appartient bien à cette droite. L'affirmation est VRAIE. [1 point]

Exercice 2

1. a)



[1 point]

b) On a $P(E_1) = P(E_1 \cap D) = P_D(E_1) \times P(D) = 0,7 \times 0,4 = 0,28$. [0,75 point]

c) $F = \overline{E_2}$. Par ailleurs, $P(E_2) = P(E_2 \cap E_1) = P_{E_1}(E_2) \times P(E_1) = 0,25 \times 0,28 = 0,07$. Par suite, $P(\overline{E_2}) = 0,93$. [0,5 point]

2. a) L'expérience qui consiste pour une de ces personnes à savoir si elle est recrutée ou non est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,07$ dont le succès est «la personne est recrutée». En répétant 5 fois de manière indépendantes cette expérience, on obtient un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire X qui compte ne nombre de succès de ce schéma de Bernoulli suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,07$. [1 point]

b) $P(X = 5) = \binom{2}{5} 0,07^2 \times 0,93^3 \simeq 0,039$ à 10^{-3} près. [0,75 point]

3. Il s'agit de determiner le nombre minimum de dossiers que le cabinet doit traiter pour que la probabilité de ne recruter aucun candidat soit inférieur à $0,001$. La probabilité de ne par recruter un candidat étant de $0,93$, s'agissant de la répétition d'expériences indentiques et indépendantes, il faut trouver n pour que $0,93^n \leqslant 10^{-3}$.

Or, $0,93^n \leqslant 10^{-3} \Leftrightarrow n \ln 0,93 \leqslant -3 \ln 10 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{-3\ln 10}{\ln 0,93}$ car $\ln 0,93 < 0$. Mais, $\dfrac{-3\ln 10}{ln 0,93} \simeq 95,2$. Il au moins traiter 96 dossiers. [1 point]

Exercice 3

Partie A

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$, en posant $X = \dfrac{x}{x+1}$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} X = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x} = 1$, or la fonction ln étant continue en 1, on a $\lim\limits_{X \to 1} \ln X = \ln 1 = 0$. Par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = 0$. Par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2. $x + 1 \neq 0$ et $\dfrac{x}{x+1} > 0$ pour $x \in [1;+\infty[$, par composée et somme de fonction dériavables, f est dérivable sur $[1;+\infty[$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \dfrac{x}{x+1}$ et $u'(x) = \dfrac{1(x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, par suite $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} = -\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{-x+x+1}{x(x+1)^2} = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$.

Ainsi, pour $x \in [1;+\infty[$, $f'(x) > 0$ et la fonction f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

x	1		$+\infty$
$f(x)$	$\frac{1}{2} - \ln 2$	$\nearrow$	0

3. Puisque $\frac{1}{2} - \ln 2 < 0$, et le tableau de variation de la fonction f, f est négative sur $[1;+\infty[$.

Partie B

1. On trouve $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$.

2.

Variables :	i et n sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0
Traintement :	Pour i variant de 1 à n
	Affecter à u la valeur $u + \frac{1}{i}$
Sortie :	Afficher $u - \ln n$

3. La suite (u_n) semble décroissante et convergente vers un réel proche de $0,577$.

Partie C

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - ... - \frac{1}{n} + \ln n = \frac{1}{n+1} + \ln \frac{n}{n+1} = f(n)$.

D'après la question **3.** de la partie A, on en déduit que $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout entier naturel n et la suite (u_n) est strictement décroissante.

2. a) Pour $x \in [k; k+1]$,

on a $k \leqslant x \leqslant k+1$, la fonction inverse étant décroissante sur $]0;+\infty[$, on a $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$, d'où $\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \geqslant 0$, en passant à l'intégrale dans l'inégalité, on obtient $\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \geqslant 0$.

Or, par linéarité de l'intégrale, $\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \int_k^{k+1} \frac{1}{k} \mathrm{d}x - \int_k^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$. Par suite, $\frac{1}{k} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$.

Or, $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = [\ln x]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln k$, ainsi $\ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}$.

b)

$$\begin{aligned} \ln 2 - \ln 1 &\leqslant 1 \\ \ln 3 - \ln 2 &\leqslant \frac{1}{2} \\ &\vdots \\ \ln(n+1) - \ln n &\leqslant \frac{1}{n} \end{aligned}$$

En ajoutant membres à membres les inégalités, on obtient :

$\ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + ... + \ln(n+1) - \ln n \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$, c'est-à-dire $\ln(n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question précédente :

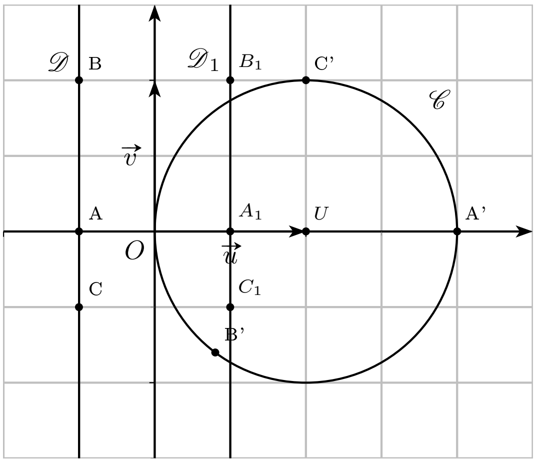
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ln n \geqslant \ln(n+1) - \ln n$, d'où $u_n \geqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$. Or, pour $n \geqslant 1$, $\frac{n+1}{n} > 1$, par suite $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) > 0$. d'où $u_n \geqslant 0$.

3. (u_n) étant une suite décroissante et minorée par 0, elle converge.

Exercice 4

Obligatoire

1. a)



b) $z_{A'} = \dfrac{1}{z_A+1} = \dfrac{1}{-\frac{1}{2}+1} = 2,$

$z_{B'} = \dfrac{1}{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}+1} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}+\mathrm{i}} = \dfrac{\frac{1}{2}-\mathrm{i}}{\frac{1}{4}+1} = \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\right) = \dfrac{2}{5}-\dfrac{4}{5}\mathrm{i}.$

$z_{C'} = \dfrac{1}{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}+1} = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = 2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 1+\mathrm{i}.$

c) $z_{\overrightarrow{A'B'}} = z_{B'} - z_{A'} = \dfrac{2}{5}-\dfrac{4}{5}\mathrm{i}-2 = \dfrac{8}{5}-\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$ et $z_{\overrightarrow{A'C'}} = z_{C'} - z_{A'} = 1+\mathrm{i}-2 = -1+\mathrm{i}$. En observant, leurs affixes, il est clair que les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ ne sont pas colinéaires et que les points A', B' et C' ne sont pas alignés.

2. a) g est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe 1.

b) Voir la figure.

c) $\mathscr{D}_1$ étant l'image de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$, par la translation g ainsi $\mathscr{D}_1$ est la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$, c'est donc la médiatrice du segment $[OU]$ où U est le point d'affixe 1.

Ainsi, $M \in \mathscr{D}_1 \Leftrightarrow UM = OM \Leftrightarrow |z-1| = |z|$.

3. a) $A_1 = g(A)$ et $h(A_1) = h\circ g(A) = f(A) = A'$, de même pour $h(B_1) = B'$ et $h(C_1) = C'$.

b) Pour $z \in \mathbb{C}^*$,

$\left|\dfrac{1}{z}-1\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{1-z}{z}\right| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|1-z|}{|z|} = 1 \Leftrightarrow |1-z| = |z| \Leftrightarrow |z-1| = |z|$ car $|1-z| = |-(z-1)| = |z-1|$.

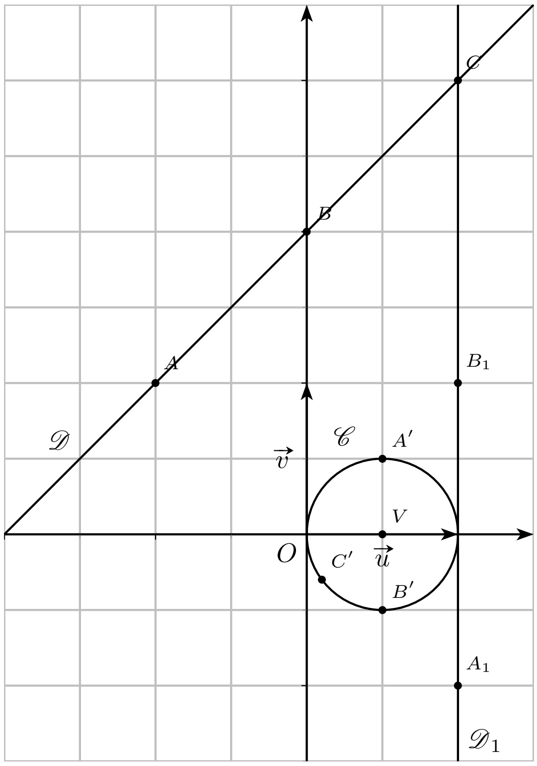
c) Soit $M(z) \in \mathscr{D}_1$, on a $|z-1| = |z|$, donc d'après la question précédente $\left|\dfrac{1}{z}-1\right| = 1$, par suite $|h(z)-1| = 1$, ainsi $h(z)$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre $U(1)$ et de rayon 1.

4. Puisque $g(\mathscr{D}) = \mathscr{D}_1$ d'après la question **2.b)**, $h\circ g(\mathscr{D}) = h(\mathscr{D}_1) = \mathscr{C}$ d'après la question précédente, d'où $f(\mathscr{D}) = \mathscr{C}\setminus\{O\}$.
L'image de la droite $\mathscr{C}$ par f est le cercle $\mathscr{C}$ privé de O.

Exercice 3

Spécialité

1. Dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on a $A(-1;1)$, $B(0;2)$ et $C(1;3)$, de plus $-1+2=1$, $0+2=2$ et $1+2=3$, ainsi les points A, B et C appartiennent à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x+2$.



2. $(1+\mathrm{i})z + 3 - \mathrm{i} = 0 \Leftrightarrow (1+\mathrm{i})z = -3+\mathrm{i} \Leftrightarrow z = \dfrac{-3+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{(-3+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2} = \dfrac{-4-2\mathrm{i}}{2} = -2-\mathrm{i}$. D'où $\mathscr{S} = \{-2-\mathrm{i}\}$.
De plus, $-2+2 = 0 \neq -1$, ainsi le point d'affixe $-2-\mathrm{i}$ n'appartient par à la droite $\mathscr{D}$.

3. a) g est de la forme $z \mapsto az+b$ où a et b sont des nombres complexes avec a non nul, g est alors une similitude directe de rapport $k = |1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$ et d'angle $\theta = \arg(1+\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

Le centre Ω d'affixe ω vérifie $h(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow (1+\mathrm{i})\omega + 3 - \mathrm{i} = \omega \Leftrightarrow \mathrm{i}\omega = -3+\mathrm{i} \Leftrightarrow \omega = \dfrac{-3+\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = 1+3\mathrm{i}$. Ainsi $\Omega = C$.

b) $z_{A_1} = (1+\mathrm{i})(-1+\mathrm{i}) + 3 - \mathrm{i} = -2+3-\mathrm{i} = 1-\mathrm{i}$.
$z_{B_1} = (1+\mathrm{i}) \times 2\mathrm{i} + 3 - \mathrm{i} = 1+\mathrm{i}$.
$z_{C_1} = z_C = 1+3\mathrm{i}$ (vu à la question précédente).

c) Par une similitude directe, l'image d'une droite est une droite. D'après la question précédente cette droite passe par les points A_1 et B_1 d'affixes respectives $1-\mathrm{i}$ et $1+\mathrm{i}$ de même partie réelle égale à 1, il s'agit donc de la droite d'équation $x=1$.

4. a) Soit $A' = h(A_1)$, $B' = h(B_1)$ et $C' = h(C_1)$.
On a $z_{A'} = \dfrac{1}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$, $z_{B'} = \dfrac{1}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{1-\mathrm{i}}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ et $z_{C'} = \dfrac{1}{1+3\mathrm{i}} = \dfrac{1-3\mathrm{i}}{10} = \dfrac{1}{10} - \dfrac{3}{10}\mathrm{i}$.

b) Soit $z \in \mathbb{C}^*$, $\left|\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\dfrac{2-z}{2z}\right| = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{|2-z|}{|2z|} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow |2-z| = \dfrac{|2z|}{2} \Leftrightarrow |2-z| = \dfrac{2|z|}{2} \Leftrightarrow |z-2| = |z|$ car $|2-z| = |z-2|$.

c) $\mathscr{D}_1$ étant la droite d'équation $x=1$, c'est la médiatrice du segment $[OU]$ où U est le point d'affixe 2.
Soit $M(z) \in \mathscr{D}_1$, on a $|z-2| = |z|$ avec $z \neq 0$, d'où $\left|\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$, ainsi le point $M_1 = h(M)$ est un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre V d'affixe $\dfrac{1}{2}$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

d) Soit $M_1(z_1)$ un point du cercle $\mathscr{C}$ distinct du point O, on a $\left|z_1 - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$. Soit $z = \dfrac{1}{z_1} \neq 0$, on a $\left|\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire $|z-2| = |z|$. Par suite, le point M d'affixe z est un point de la droite $\mathscr{D}_1$ et puisque $z_1 = \dfrac{1}{z}$, $h(M) = M_1$.

5. D'après les questions précédente, $g(\mathscr{D}) = \mathscr{D}_1$ et $h(D_1) = \mathscr{C} \setminus \{O\}$, par suite $f(\mathscr{D}) = h \circ g(\mathscr{D}) = \mathscr{C} \setminus \{O\}$. L'image par f de la droite $\mathscr{D}$ est le cercle $\mathscr{C}$ privé du point O.

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2012

MATHÉMATIQUES

Série ES

Enseignement Obligatoire

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 5

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

La feuille Annexe de l'exercice 1
est à rendre avec la copie.

EXERCICE 1 (5 points)
Commun à tous les candidats

Sur le site http://www.agencebio.org, on a extrait des informations concernant l'agriculture en France métropolitaine.

Document 1

En 2008, la surface agricole utilisée (SAU) était de 27 537 688 hectares dont 583 799 hectares en mode de production biologique.

Document 2

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Surface en mode de production biologique (en hectares)	419 750	517 965	550 990	534 037	550 488	552 824	557 133	583 799
Part (en %) de la surface en mode de production biologique dans la SAU : y_i	1,4	1,75	1,87	1,93	1,99	2	2,02	2,12

Partie A

1. D'après le document 2, la part de la surface en mode de production biologique dans la SAU est de 2,12 % en 2008. En utilisant le document 1, justifier par un calcul cette information.
2. Calculer le pourcentage d'évolution de la surface en mode de production biologique entre 2007 et 2008. Ce pourcentage sera arrondi à 0,01 %.

Partie B

On a représenté, sur l'annexe, partie B, à rendre avec la copie, le nuage de points représentant la série statististique $(x_i\,;\,y_i)$.

1. A l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis à 10^{-2}.
2. Tracer cette droite dans le repère fourni sur l'annexe, partie B.
3. À l'occasion d'un TPE, un groupe d'élèves a trouvé sur une autre page du site qu'en 2009 et en 2010, les parts de la surface en mode de production biologique dans la SAU sont respectivement 2,46 % et 3,09 %. L'ajustement affine précédent est-il adapté à ces nouvelles données ?

Partie C :

Pour la suite de ce TPE, les élèves ont modélisé à l'aide d'un logiciel l'évolution de la part de surface en mode de production biologique dans la SAU sur la période de 2001 à 2012 par la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;\,12]$ par

$$f(x) = 0{,}0096x^3 - 0{,}1448x^2 + 0{,}7132x + 0{,}813$$

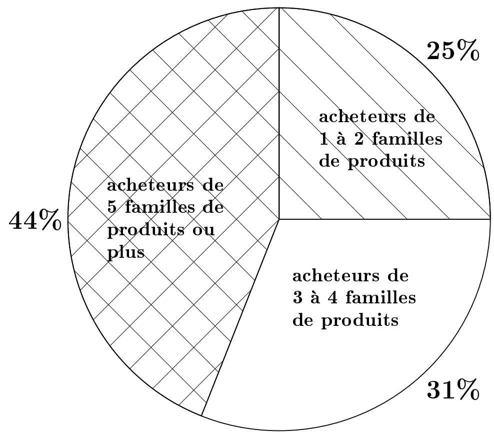
Cet ajustement est représenté sur l'annexe, partie C.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le Grenelle de l'environnement s'est fixé comme objectif d'avoir 6 % de la SAU en mode de production biologique en 2012. Selon ce modèle, peut-on espérer que cet objectif soit atteint ?

EXERCICE 2 (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

La Fédération e-commerce et Vente à Distance (FEVAD) a effectué en octobre 2010 une enquête auprès de 719 acheteurs à distance âgés de 18 ans et plus. Sur le questionnaire proposé, ces personnes ont été interrogées sur le nombre de familles de produits (vêtements, informatique, loisirs...) achetés à distance au cours des 12 derniers mois. L'étude statistique a permis d'obtenir les informations suivantes :



Parmi les acheteurs de 1 à 2 familles de produits, 45 % sont retraités.

Parmi les acheteurs de 3 à 4 familles de produits, 25 % sont retraités.

Le responsable des ventes tire un questionnaire au hasard, chacun ayant la même probabilité d'être tiré. On note :

- A l'événement : « Le questionnaire tiré est celui d'un acheteur de 1 à 2 familles de produits. »
- B l'événement : « Le questionnaire tiré est celui d'un acheteur de 3 à 4 familles de produits. »
- C l'événement : « Le questionnaire tiré est celui d'un acheteur de 5 familles de produits ou plus. »
- R l'événement : « Le questionnaire tiré est celui d'un retraité. »

1. Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre.
2. (a) Calculer la probabilité $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{R})$.

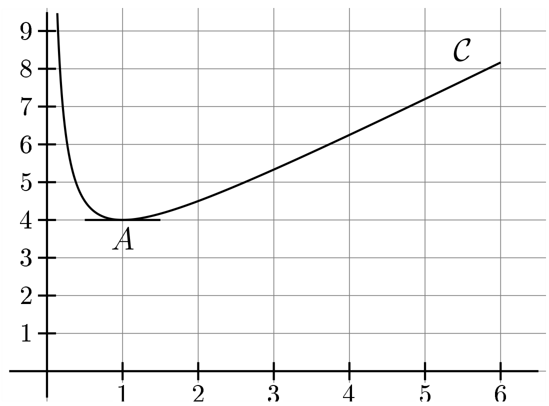
   (b) Déterminer la probabilité de l'événement : « Le questionnaire tiré est celui d'un retraité acheteur de 3 à 4 familles de produits.»

   (c) On sait de plus que 21,7 % des acheteurs interrogés sont des retraités.
   Vérifier que $p(\mathrm{C} \cap \mathrm{R})=0{,}027$.
3. Le responsable des ventes décide de lancer une campagne publicitaire dès lors que le pourcentage de retraités parmi les acheteurs de 5 familles de produits ou plus est inférieur à 8 %.
   Quelle décision prendra-t-il ?

EXERCICE 3 (4 points)
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples).
Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

On a représenté ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,6]$. Le point $A(1;4)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}$. La tangente en A à la courbe $\mathcal{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.



1. Le nombre dérivé de la fonction f en 1 est égal à :
   a. 4 b. 0 c. -2 d. 1

2. Sur l'intervalle $]0\,;6]$, l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$ admet comme ensemble de solutions :
   a. $]0\,;\,1]$ b. $]0\,;\,6]$ c. $[1\,;\,6]$ d. $[4\,;\,9]$

3. On pose $I = \displaystyle\int_3^5 f(x)dx$. On peut affirmer que :
   a. $12 < I < 13$ b. $0 < I < 2$ c. $5 < I < 8$ d. $-2 < I < 0$

4. On appelle F une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,6]$. L'expression de F peut-être :
   a. $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ b. $F(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$

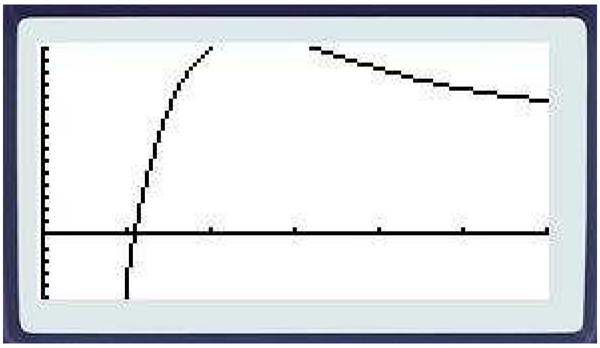
   c. $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + \ln x$ d. $F(x) = 2x + \ln x$

EXERCICE 4 (6 points)
Commun à tous les candidats

Le bénéfice en milliers d'euros que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique et vend x centaines d'objets (pour x compris entre 0 et 6) est donné par

$$f(x) = (200x - 300)\mathrm{e}^{-x-1} + 10$$

Alix a affiché sur l'écran de sa calculatrice la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,6]$.



Partie A : objectif « réaliser un bénéfice maximal ».

L'écran ne permet pas à Alix de déterminer le bénéfice maximal.
Il décide donc d'étudier la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,6]$. On admet que cette fonction est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,6]$. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. Établir que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,6]$,

$$f'(x) = (500 - 200x)\mathrm{e}^{-x-1}$$

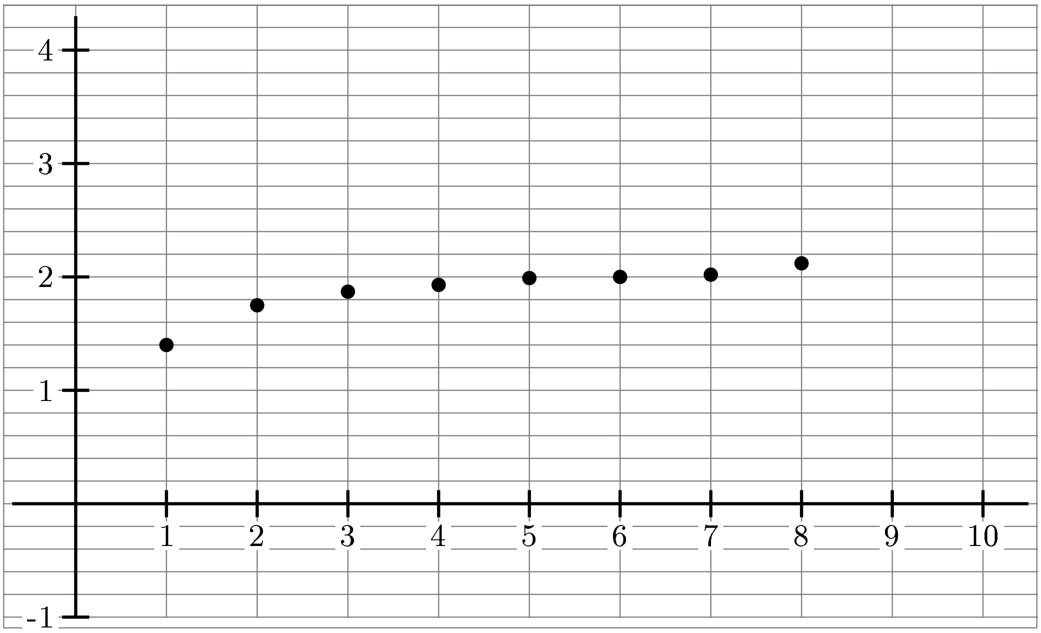
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,6]$.
3. En déduire le nombre d'objets à vendre pour réaliser un bénéfice maximal.
   Quel est ce bénéfice maximal en euros ? (Donner la réponse arrondie à l'euro).
4. Proposer un réglage de la fenêtre graphique permettant de visualiser le maximum de la fonction f.

Partie B : objectif « ne pas vendre à perte ».

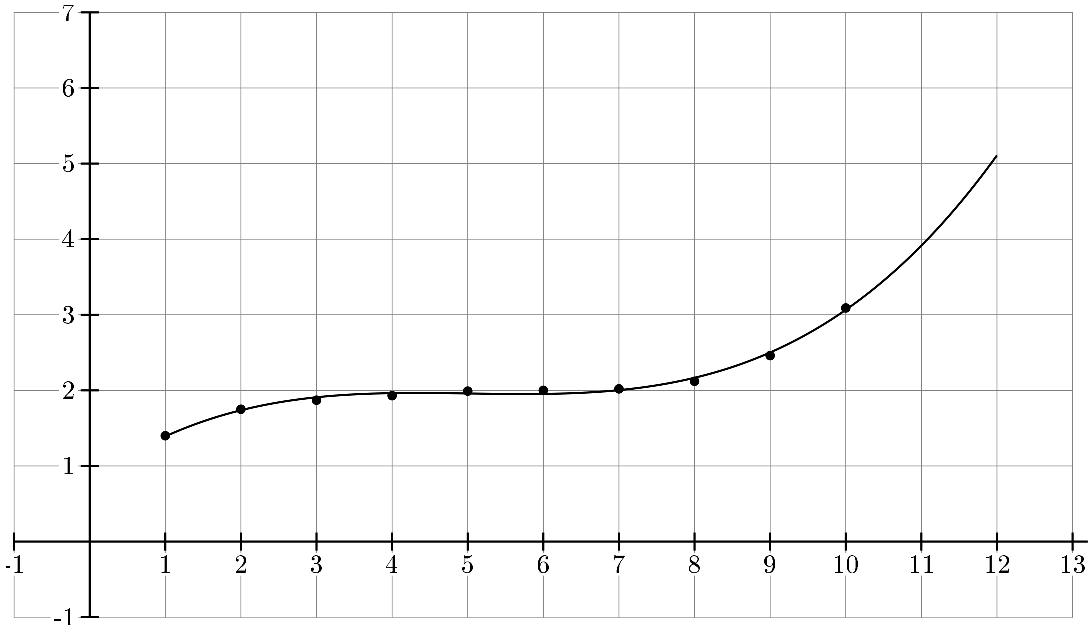
1. Au vu du graphique obtenu par Alix, à partir de combien d'objets l'entreprise ne vend-elle pas à perte ?
2. Démontrer que sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α.
3. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4. Préciser le nombre d'objets à partir duquel l'entreprise ne vend pas à perte.

Annexe à rendre avec la copie

PARTIE B



PARTIE C



BACCALAURÉAT GENÉRAL

Session 2012

MATHÉMATIQUES

Série ES

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

La feuille Annexe de l'exercice 1 est à rendre avec la copie.

EXERCICE 1 (5 points)
Commun à tous les candidats

Sur le site http://www.agencebio.org, on a extrait des informations concernant l'agriculture en France métropolitaine.

Document 1

En 2008, la surface agricole utilisée (SAU) était de 27 537 688 hectares dont 583 799 hectares en mode de production biologique.

Document 2

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Surface en mode de production biologique (en hectares)	419 750	517 965	550 990	534 037	550 488	552 824	557 133	583 799
Part (en %) de la surface en mode de production biologique dans la SAU : y_i	1,4	1,75	1,87	1,93	1,99	2	2,02	2,12

Partie A

1. D'après le document 2, la part de la surface en mode de production biologique dans la SAU est de 2,12 % en 2008. En utilisant le document 1, justifier par un calcul cette information.
2. Calculer le pourcentage d'évolution de la surface en mode de production biologique entre 2007 et 2008. Ce pourcentage sera arrondi à 0,01 %.

Partie B

On a représenté, sur l'annexe, partie B, à rendre avec la copie, le nuage de points représentant la série statististique $(x_i\,;\,y_i)$.

1. A l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis à 10^{-2}.
2. Tracer cette droite dans le repère fourni sur l'annexe, partie B.
3. À l'occasion d'un TPE, un groupe d'élèves a trouvé sur une autre page du site qu'en 2009 et en 2010, les parts de la surface en mode de production biologique dans la SAU sont respectivement 2,46 % et 3,09 %. L'ajustement affine précédent est-il adapté à ces nouvelles données ?

Partie C :

Pour la suite de ce TPE, les élèves ont modélisé à l'aide d'un logiciel l'évolution de la part de surface en mode de production biologique dans la SAU sur la période de 2001 à 2012 par la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;\,12]$ par

$$f(x) = 0{,}0096x^3 - 0{,}1448x^2 + 0{,}7132x + 0{,}813$$

Cet ajustement est représenté sur l'annexe, partie C.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Le Grenelle de l'environnement s'est fixé comme objectif d'avoir 6 % de la SAU en mode de production biologique en 2012. Selon ce modèle, peut-on espérer que cet objectif soit atteint ?

EXERCICE 2 (5 points)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une région se divise en deux zones :

- une zone A à proximité d'une grande agglomération,
- une zone B à proximité de la mer.

Chaque année, 20 % des habitants de la zone A partent habiter dans la zone B pour avoir un meilleur cadre de vie, et 5 % des habitants de la zone B partent habiter dans la zone A pour se rapprocher de leur lieu de travail.

On sait de plus qu'en 2010, 40 % de la population habitait en zone A.
On suppose que le nombre total d'habitants de la région reste constant au cours du temps.

Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste correspondant à l'année $2010+n$ est défini par la matrice ligne $P_n = (a_n \quad b_n)$, où a_n et b_n désignent respectivement les proportions d'habitants des zones A et B.

1. Déterminer la matrice ligne P_0 de l'état initial.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
3. (a) Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

   (b) Donner la répartition de la population en 2012.
4. Dans la question suivante, on considère la matrice ligne $P = (a \quad b)$ où a et b sont deux nombres réels tels que $a+b=1$.

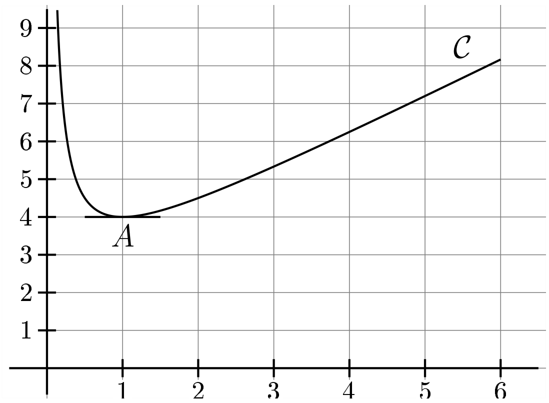
   (a) Déterminer a et b pour que $P = PM$.

   (b) Les infrastructures de la zone B permettent d'accueillir au maximum 75 % de la population. Lors d'un conseil municipal, le maire affirme qu'il va falloir prévoir de nouvelles infrastructures. A-t-il raison ?

EXERCICE 3 (4 points)
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples).
Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

On a représenté ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,6]$. Le point $A(1;4)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}$. La tangente en A à la courbe $\mathcal{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.



1. Le nombre dérivé de la fonction f en 1 est égal à :
   a. 4 b. 0 c. -2 d. 1

2. Sur l'intervalle $]0\,;6]$, l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$ admet comme ensemble de solutions :
   a. $]0\,;\,1]$ b. $]0\,;\,6]$ c. $[1\,;\,6]$ d. $[4\,;\,9]$

3. On pose $I = \displaystyle\int_3^5 f(x)dx$. On peut affirmer que :
   a. $12 < I < 13$ b. $0 < I < 2$ c. $5 < I < 8$ d. $-2 < I < 0$

4. On appelle F une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,6]$. L'expression de F peut-être :
   a. $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ b. $F(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$

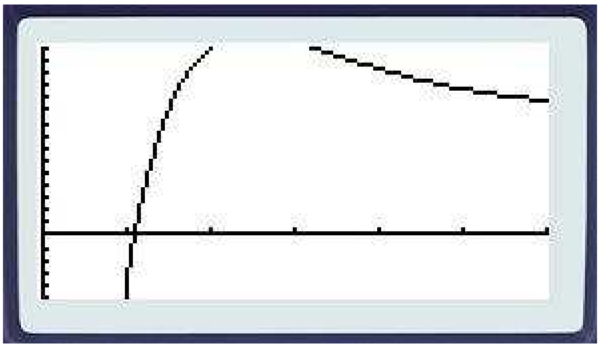
   c. $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + \ln x$ d. $F(x) = 2x + \ln x$

EXERCICE 4 (6 points)
Commun à tous les candidats

Le bénéfice en milliers d'euros que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique et vend x centaines d'objets (pour x compris entre 0 et 6) est donné par

$$f(x) = (200x - 300)\mathrm{e}^{-x-1} + 10$$

Alix a affiché sur l'écran de sa calculatrice la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,6]$.



Partie A : objectif « réaliser un bénéfice maximal ».

L'écran ne permet pas à Alix de déterminer le bénéfice maximal.
Il décide donc d'étudier la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,6]$. On admet que cette fonction est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,6]$. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. Établir que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,6]$,

$$f'(x) = (500 - 200x)\mathrm{e}^{-x-1}$$

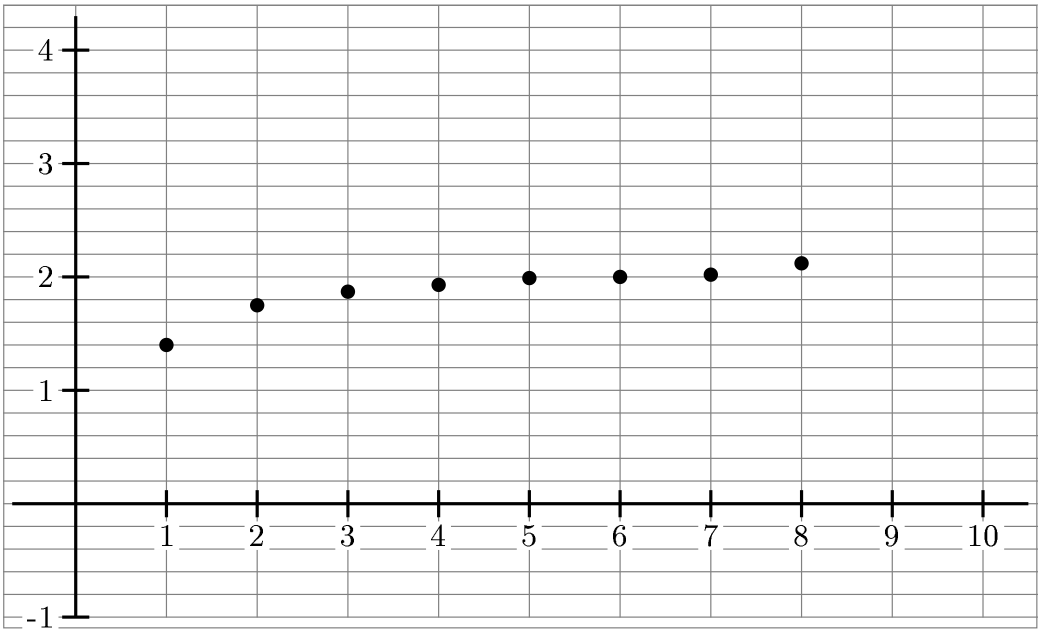
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,6]$.
3. En déduire le nombre d'objets à vendre pour réaliser un bénéfice maximal.
   Quel est ce bénéfice maximal en euros ? (Donner la réponse arrondie à l'euro).
4. Proposer un réglage de la fenêtre graphique permettant de visualiser le maximum de la fonction f.

Partie B : objectif « ne pas vendre à perte ».

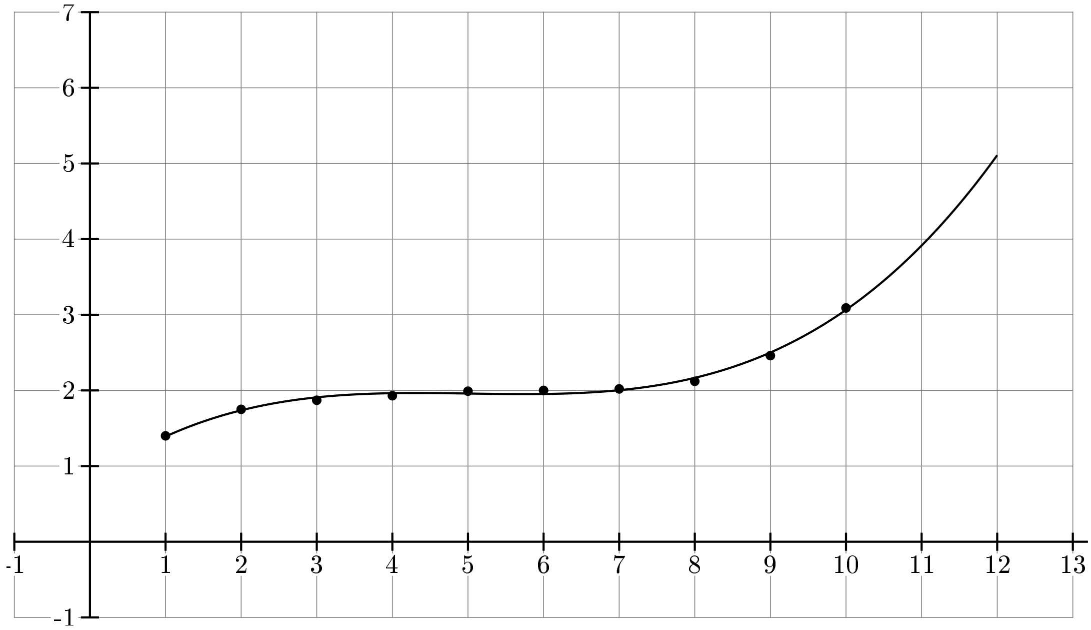
1. Au vu du graphique obtenu par Alix, à partir de combien d'objets l'entreprise ne vend-elle pas à perte ?
2. Démontrer que sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α.
3. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4. Préciser le nombre d'objets à partir duquel l'entreprise ne vend pas à perte.

Annexe à rendre avec la copie

PARTIE B



PARTIE C



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2013

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 7**

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35% des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25% de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.
La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80% de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50% et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30%.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.
On envisage les évènements suivants :
- H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
- H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
- H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
- C : « l'arbre choisi est un conifère »,
- F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

a. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

b. Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.

c. Justifier que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,525.

d. L'arbre choisi est un conifère.
Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3}.

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

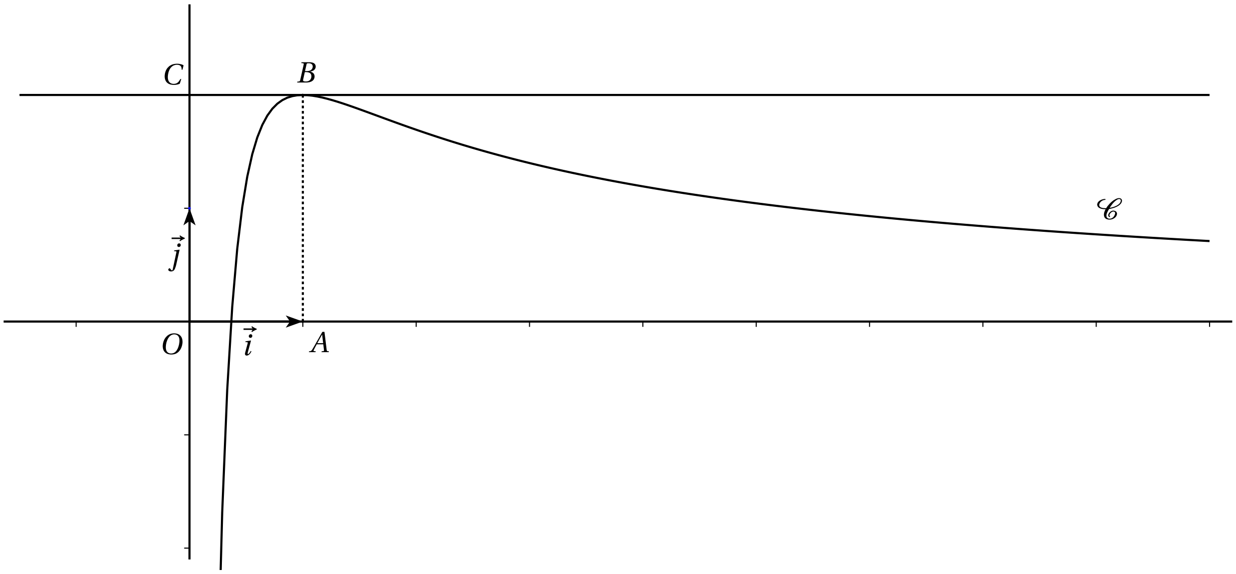
b. Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ? On arrondira à 10^{-3}.

c. Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ? On arrondira à 10^{-3}.

EXERCICE 2 (7 points)

Commun à tous les candidats

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0,\,+\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1,\,0)$, $(1,\,2)$, $(0,\,2)$;
- la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}.$$

1. **a.** En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

b. Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.

c. En déduire les réels a et b.

2. **a.** Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0,\,+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

b. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\,\dfrac{\ln x}{x}$.

c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0,\,1]$.

b. Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1,\,+\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$.
Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n+1$.

4. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	a, b et m sont des nombres réels.
Initialisation :	Affecter à a la valeur 0.
	Affecter à b la valeur 1.
Traitement :	Tant que $b - a > 0,1$
	Affecter à m la valeur $\dfrac{1}{2}(a+b)$.
	Si $f(m) < 1$ alors Affecter à a la valeur m.
	Sinon Affecter à b la valeur m.
	Fin de Si.
	Fin de Tant que.
Sortie :	Afficher a.
	Afficher b.

a. Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0				
b	1				
$b-a$					
m					

b. Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

c. Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}.

5. Le but de cette question est de démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ partage le rectangle $OABC$ en deux domaines d'aires égales.

a. Justifier que cela revient à démontrer que $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

b. En remarquant que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire $\dfrac{2}{x} + 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x$, terminer la démonstration.

EXERCICE 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

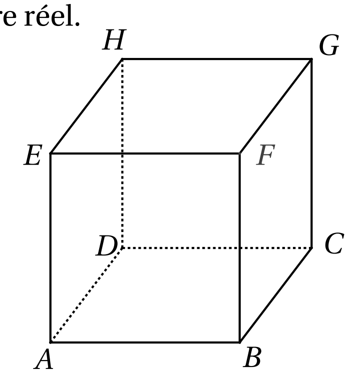
Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1 :** Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $|z - \mathrm{i}| = |z + 1|$ est une droite.

2. **Proposition 2 :** Le nombre complexe $\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^4$ est un nombre réel.

3. Soit $ABCDEFGH$ un cube.

   Proposition 3 : Les droites (EC) et (BG) sont orthogonales.



4. L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}\right)$. Soit le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $x + y + 3z + 4 = 0$. On note S le point de coordonnées $(1\,,\,-2,\,-2)$.
   Proposition 4 : La droite qui passe par S et qui est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + 3t \end{array}\right.\quad, t \in \mathbf{R}$.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbf{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \text{pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. **a.** Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

   b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant n + 3.$$

   b. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}\left(n + 3 - u_n\right).$$

   c. En déduire une validation de la conjecture précédente.

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbf{N}$ par $v_n = u_n - n$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

   b. En déduire que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n.$$

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = \frac{S_n}{n^2}.$$

   a. Exprimer S_n en fonction de n.

   b. Déterminer la limite de la suite (T_n).

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2013

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 9**

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35% des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25% de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.
La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80% de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50% et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30%.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.
On envisage les évènements suivants :
- H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
- H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
- H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
- C : « l'arbre choisi est un conifère »,
- F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

a. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

b. Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.

c. Justifier que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,525.

d. L'arbre choisi est un conifère.
Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3}.

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

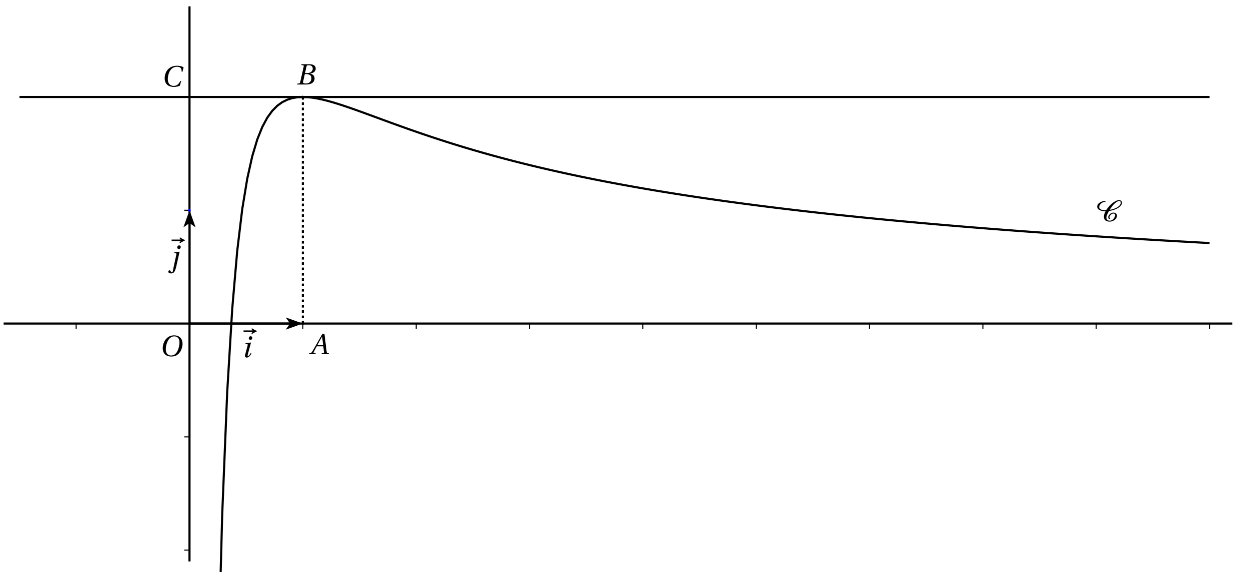
b. Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ? On arrondira à 10^{-3}.

c. Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ? On arrondira à 10^{-3}.

EXERCICE 2 (7 points)

Commun à tous les candidats

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0,\,+\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1,\,0)$, $(1,\,2)$, $(0,\,2)$;
- la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}.$$

1. **a.** En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

b. Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.

c. En déduire les réels a et b.

2. **a.** Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0,\,+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

b. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\,\dfrac{\ln x}{x}$.

c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0,\,1]$.

b. Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1,\,+\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$.
Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n+1$.

4. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	a, b et m sont des nombres réels.
Initialisation :	Affecter à a la valeur 0.
	Affecter à b la valeur 1.
Traitement :	Tant que $b - a > 0,1$
	Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a + b)$.
	Si $f(m) < 1$ alors Affecter à a la valeur m.
	Sinon Affecter à b la valeur m.
	Fin de Si.
	Fin de Tant que.
Sortie :	Afficher a.
	Afficher b.

a. Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0				
b	1				
$b-a$					
m					

b. Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

c. Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}.

5. Le but de cette question est de démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ partage le rectangle $OABC$ en deux domaines d'aires égales.

a. Justifier que cela revient à démontrer que $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

b. En remarquant que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire $\frac{2}{x} + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$, terminer la démonstration.

EXERCICE 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

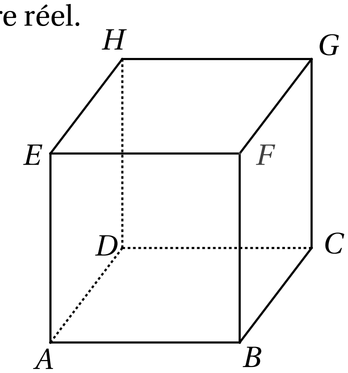
Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1 :** Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $|z - \mathrm{i}| = |z + 1|$ est une droite.

2. **Proposition 2 :** Le nombre complexe $\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^4$ est un nombre réel.

3. Soit $ABCDEFGH$ un cube.

   Proposition 3 : Les droites (EC) et (BG) sont orthogonales.



4. L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$. Soit le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $x + y + 3z + 4 = 0$. On note S le point de coordonnées $(1\ ,\ -2,\ -2)$.
   Proposition 4 : La droite qui passe par S et qui est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + 3t \end{array}\right.\quad, t \in \mathbf{R}$.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On étudie la population d'une région imaginaire. Le 1er janvier 2013, cette région comptait 250 000 habitants dont 70% résidaient à la campagne et 30% en ville.
L'examen des données statistiques recueillies au cours de plusieurs années amène à choisir de modéliser l'évolution de la population pour les années à venir de la façon suivante :

- l'effectif de la population est globalement constant,
- chaque année, 5% de ceux qui résident en ville décident d'aller s'installer à la campagne et 1% de ceux qui résident à la campagne choisissent d'aller habiter en ville.

Pour tout entier naturel n, on note v_n le nombre d'habitants de cette région qui résident en ville au 1er janvier de l'année $(2013+n)$ et c_n le nombre de ceux qui habitent à la campagne à la même date.

1. Pour tout entier naturel n, exprimer v_{n+1} et c_{n+1} en fonction de v_n et c_n.

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix}$.

On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où a, b sont deux réels fixés et $Y = AX$.

Déterminer, en fonction de a et b, les réels c et d tels que $Y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Les résultats précédents permettent d'écrire que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$ où $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ c_n \end{pmatrix}$. On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

3. Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer PQ et QP. En déduire la matrice P^{-1} en fonction de Q.

b. Vérifier que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. Les résultats des questions précédentes permettent d'établir que

$$v_n = \frac{1}{6}\left(1 + 5 \times 0,94^n\right) v_0 + \frac{1}{6}\left(1 - 0,94^n\right) c_0$$

Quelles informations peut-on en déduire pour la répartition de la population de cette région à long terme ?

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2013

MATHÉMATIQUES - Série ES
ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 5

MATHÉMATIQUES - Série L
ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 4

SUJET

L'usage d'une calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 6 pages, y compris celle-ci.
La page 6 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 - 6 points

Une usine de composants électriques dispose de deux unités de production, A et B.
La production journalière de l'unité A est de 600 pièces, celle de l'unité B est de 900 pièces.

On prélève au hasard un composant de la production d'une journée.

La probabilité qu'un composant présente un défaut de soudure sachant qu'il est produit par l'unité A est égale à 0,014.
La probabilité qu'un composant présente un défaut de soudure sachant qu'il est produit par l'unité B est égale à 0,024.
On note :

- D l'événement : « le composant présente un défaut de soudure »
- A l'événement : « le composant est produit par l'unité A »
- B l'événement : « le composant est produit par l'unité B »

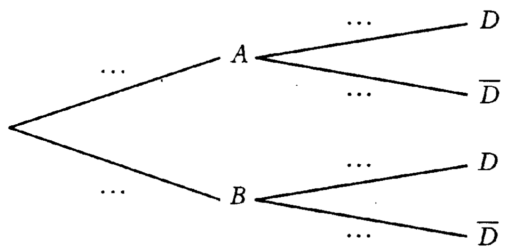
On note $p(D)$ la probabilité de l'événement D et $p_A(D)$ la probabilité de l'événement D sachant que l'événement A est réalisé.

Partie A : généralités

1) **a)** D'après les données de l'énoncé, préciser $p_A(D)$ et $p_B(D)$.

b) Calculer $p(A)$ et $p(B)$.

2) Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



3) **a)** Calculer $p(A \cap D)$ et $p(B \cap D)$.

b) En déduire $p(D)$.

4) On prélève dans la production totale un composant présentant un défaut de soudure. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'unité A ?

Partie B : contrôle de qualité

On suppose que les composants doivent présenter une résistance globale comprise entre 195 et 205 ohms.
On admet que la variable aléatoire R qui, à un composant prélevé au hasard dans la production, associe sa résistance, suit une loi normale de moyenne $\mu = 200{,}5$ et d'écart-type $\sigma = 3{,}5$.
On prélève un composant dans la production.
*Les résultats seront arrondis à 0,0001 près, ils pourront être obtenus à l'aide de la calculatrice ou de la table fournie en **annexe 1**.*

1) Calculer la probabilité p_1 de l'événement : « La résistance du composant est supérieure à 211 ohms ».

2) Calculer la probabilité p_2 de l'événement : « La résistance du composant est comprise dans l'intervalle de tolérance indiqué dans l'énoncé ».

3) On prélève au hasard dans la production trois composants. On suppose que les prélèvements sont indépendants l'un de l'autre et que la probabilité qu'un composant soit accepté est égale à 0,84. Déterminer la probabilité p qu'exactement deux des trois composants prélevés soient acceptés.

Exercice 2 – **4 points**

Pour chacune des questions posées, une proposition est faite. Il est demandé de déterminer si cette proposition est vraie ou fausse, en justifiant.

Question 1

Un étudiant a travaillé durant l'été et dispose d'un capital de 2500 euros.

A partir du premier septembre 2013, il place son capital $c_0 = 2500$ sur un compte rapportant 0,2% d'intérêts composés par mois et il loue une chambre qui lui coûte 425 euros par mois.
On note c_n le capital disponible, exprimé en euros, au début de chaque mois. Par exemple le capital disponible au début du mois d'octobre vaudra : $c_1 = 1{,}002c_0 - 425 = 2080$ euros.
L'année universitaire s'achève à la fin du mois de juin 2014.

On admet que la suite des capitaux (c_n) est décrite par les relations :
- $c_0 = 2500$
- Pour tout entier naturel n, $c_{n+1} = 1{,}002 \times c_n - 425$

PROPOSITION : Sans apport supplémentaire l'étudiant sera à découvert à partir du début du mois de mars 2014.

Question 2

Sur $I =]0\,;+\infty[$, on définit la fonction f par $f(x) = 2x + 1 - \ln x$.

PROPOSITION : f est une fonction convexe sur I.

Question 3

On définit sur l'intervalle $I =]0\,;+\infty[$, $F(x) = 2x\ln x - 2x + 5$. On a effectué à l'aide d'un logiciel de calcul formel les séquences suivantes :

1	dériver((2x) * ln(x) – 2x + 5) $2{*}\ln(x)+\dfrac{2*x}{x}-2$
2	simplifier$\left(2*\ln(x)+\dfrac{2*x}{x}-2\right)$ $\ln(x^2)$

PROPOSITION : F est une primitive de la fonction f définie sur I par $f(x) = 2\ln x$.

Question 4

X est une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance $\mu = 0$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}6$.

PROPOSITION : : $P(-0{,}6 \leq X \leq 0{,}6) \approx 0{,}68$

Exercice 3 - 5 points

Une entreprise fabrique des poulies utilisées dans l'industrie automobile. On suppose que toute la production est vendue.
L'entreprise peut fabriquer entre 0 et 3600 poulies par semaine. On note x le nombre de milliers de poulies fabriquées et vendues en une semaine. (x varie donc dans l'intervalle $[0\,;3{,}6]$).
Le bénéfice hebdomadaire est noté $B(x)$, il est exprimé en milliers d'euros.

L'objet de cet exercice est d'étudier cette fonction B. Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A : étude graphique

On a représenté, en **annexe 2**, la fonction B dans un repère du plan.
Chaque résultat sera donné à cent poulies près ou à cent euros près suivant les cas.
Les traits utiles à la compréhension du raisonnement seront laissés sur le graphique et une réponse écrite sur la copie sera attendue pour chaque question posée.

1) Déterminer dans quel intervalle peut varier le nombre de poulies pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 13000 euros.
2) Quel est le bénéfice maximum envisageable pour l'entreprise ?
Pour quel nombre N de poulies fabriquées et vendues semble-t-il être réalisé ?

Partie B : étude théorique

Le bénéfice hebdomadaire noté $B(x)$, exprimé en milliers d'euros vaut $B(x) = -5 + (4-x)\mathrm{e}^x$.

1) a) On note B' la fonction dérivée de la fonction B.
Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $I = [0\,;3{,}6]$, on a : $B'(x) = (3-x)\mathrm{e}^x$.
   b) Déterminer le signe de la fonction dérivée B' sur l'intervalle I.
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle I. On indiquera les valeurs de la fonction B aux bornes de l'intervalle.
2) a) Justifier que l'équation $B(x) = 13$ admet deux solutions x_1 et x_2, l'une dans l'intervalle $[0\,;3]$ l'autre dans l'intervalle $[3\,;3{,}6]$.
   b) À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 0,01 près de chacune des deux solutions.

Exercice 4 - 5 points

Dans cet exercice on étudie l'évolution de la dépense des ménages français en programmes audiovisuels (redevance audiovisuelle, billets de cinémas, vidéos ...).

On note D_n la dépense des ménages en programmes audiovisuels, exprimée en milliards d'euros, au cours de l'année $1995+n$.

année	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
n	0	1	2	3	4	5	6	7
D_n	4,95	5,15	5,25	5,4	5,7	6,3	6,55	6,9

année	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
n	8	9	10	11	12	13	14	15
D_n	7,3	7,75	7,65	7,79	7,64	7,82	7,89	8,08

Soit f la fonction définie, pour tout nombre réel x, par $f(x) = -0{,}0032x^3 + 0{,}06x^2 + 5$.
Pour tout entier n vérifiant $0 \leqslant n \leqslant 20$, on décide de modéliser la dépense des ménages français en programmes audiovisuels exprimée en milliards d'euros, au cours de l'année n par le nombre $f(n)$.

1) Calculer $f(5)$.

2) Déterminer le pourcentage p, de l'erreur commise en remplaçant D_5 par $f(5)$.
(Le pourcentage d'erreur est obtenu par le calcul : $p = \dfrac{\text{valeur réelle} - \text{valeur estimée}}{\text{valeur réelle}}$ et le résultat sera donné à 0,1% près.)

3) En utilisant la fonction f, quelle estimation de la dépense totale peut-on effectuer pour l'année 2013 ? (On arrondira le résultat au centième de milliard d'euros).

4) On veut utiliser la fonction f pour estimer la dépense moyenne des ménages entre le 1er janvier 1995 et le 1er janvier 2015.
On calcule pour cela $M = \dfrac{1}{20}\displaystyle\int_0^{20} f(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;20]$.

b) Calculer M.

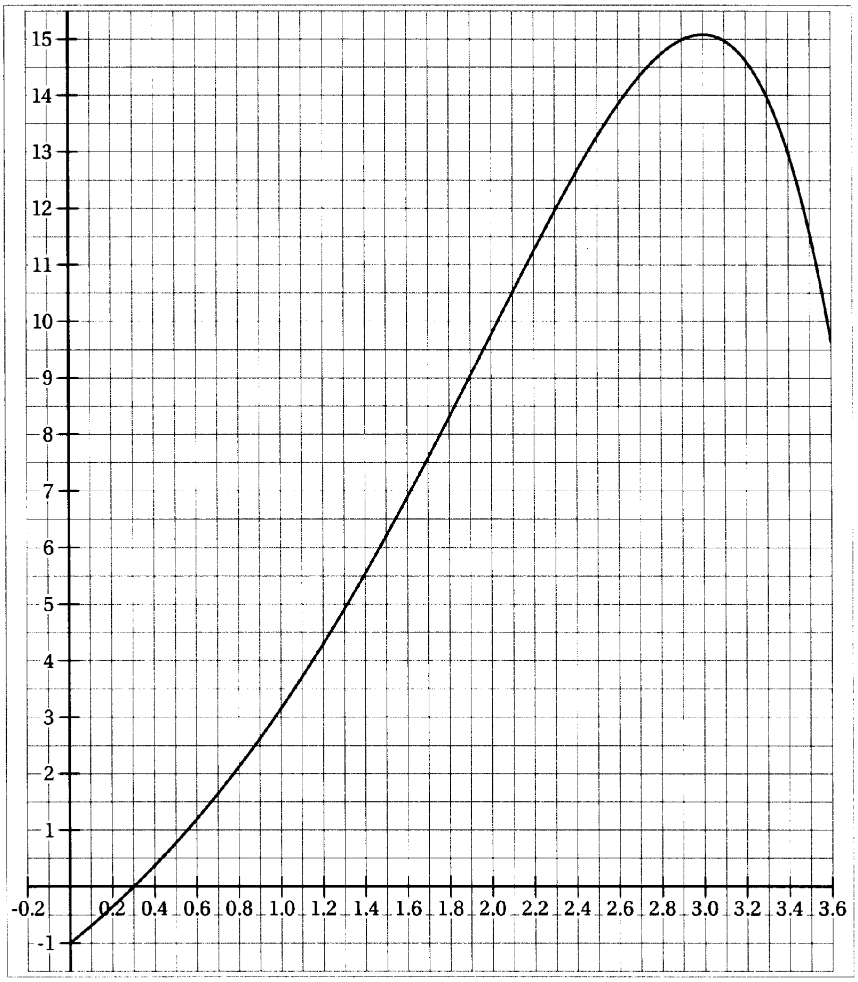
Annexes - à rendre avec la copie

Annexe 1

Extrait de la table de la loi normale pour $\mu = 200{,}5$ **et** $\sigma = 3{,}5$

t	$p(X \leqslant t)$	t	$p(X \leqslant t)$	t	$p(X \leqslant t)$
186	0,0000	196	0,0993	206	0,9420
187	0,0001	197	0,1587	207	0,9684
188	0,0002	198	0,2375	208	0,9839
189	0,0005	199	0,3341	209	0,9924
190	0,0013	200	0,4432	210	0,9967
191	0,0033	201	0,5568	211	0,9987
192	0,0076	202	0,6659	212	0,9995
193	0,0161	203	0,7625	213	0,9998
194	0,0316	204	0,8413	214	0,9999
195	0,0580	205	0,9007	215	1,0000

Annexe 2



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2013

MATHÉMATIQUES - Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 7

L'usage d'une calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 6 pages, y compris celle-ci.
La page 6 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 – 6 points

Une usine de composants électriques dispose de deux unités de production, A et B.
La production journalière de l'unité A est de 600 pièces, celle de l'unité B est de 900 pièces.

On prélève au hasard un composant de la production d'une journée.

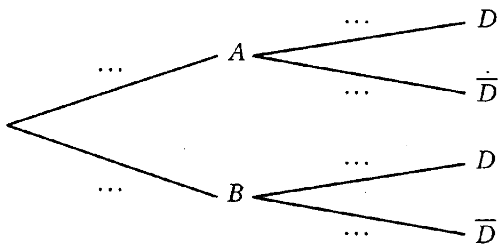
La probabilité qu'un composant présente un défaut de soudure sachant qu'il est produit par l'unité A est égale à 0,014.
La probabilité qu'un composant présente un défaut de soudure sachant qu'il est produit par l'unité B est égale à 0,024.
On note :

- D l'événement : « le composant présente un défaut de soudure »
- A l'événement : « le composant est produit par l'unité A »
- B l'événement : « le composant est produit par l'unité B »

On note $p(D)$ la probabilité de l'événement D et $p_A(D)$ la probabilité de l'événement D sachant que l'événement A est réalisé.

Partie A : généralités

1) a) D'après les données de l'énoncé, préciser $p_A(D)$ et $p_B(D)$.
   b) Calculer $p(A)$ et $p(B)$.
2) Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



3) a) Calculer $p(A \cap D)$ et $p(B \cap D)$.
   b) En déduire $p(D)$.
4) On prélève dans la production totale un composant présentant un défaut de soudure. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'unité A ?

Partie B : contrôle de qualité

On suppose que les composants doivent présenter une résistance globale comprise entre 195 et 205 ohms.
On admet que la variable aléatoire R qui, à un composant prélevé au hasard dans la production, associe sa résistance, suit une loi normale de moyenne $\mu = 200{,}5$ et d'écart-type $\sigma = 3{,}5$.
On prélève un composant dans la production.
Les résultats seront arrondis à 0,0001 près, ils pourront être obtenus à l'aide de la calculatrice ou de la table fournie en ***annexe 1***.

1) Calculer la probabilité p_1 de l'événement : « La résistance du composant est supérieure à 211 ohms ».
2) Calculer la probabilité p_2 de l'événement : « La résistance du composant est comprise dans l'intervalle de tolérance indiqué dans l'énoncé ».
3) On prélève au hasard dans la production trois composants. On suppose que les prélèvements sont indépendants l'un de l'autre et que la probabilité qu'un composant soit accepté est égale à 0,84. Déterminer la probabilité p qu'exactement deux des trois composants prélevés soient acceptés.

Exercice 2 – 4 points

Pour chacune des questions posées, une proposition est faite. Il est demandé de déterminer si cette proposition est vraie ou fausse, en justifiant.

Question 1

Un étudiant a travaillé durant l'été et dispose d'un capital de 2500 euros.

A partir du premier septembre 2013, il place son capital $c_0 = 2500$ sur un compte rapportant 0,2% d'intérêts composés par mois et il loue une chambre qui lui coûte 425 euros par mois.
On note c_n le capital disponible, exprimé en euros, au début de chaque mois. Par exemple le capital disponible au début du mois d'octobre vaudra : $c_1 = 1{,}002c_0 - 425 = 2080$ euros.
L'année universitaire s'achève à la fin du mois de juin 2014.

On admet que la suite des capitaux (c_n) est décrite par les relations :

- $c_0 = 2500$
- Pour tout entier naturel n, $c_{n+1} = 1{,}002 \times c_n - 425$

PROPOSITION : Sans apport supplémentaire l'étudiant sera à découvert à partir du début du mois de mars 2014.

Question 2

Sur $I =]0; +\infty[$, on définit la fonction f par $f(x) = 2x + 1 - \ln x$.

PROPOSITION : f est une fonction convexe sur I.

Question 3

On définit sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$, $F(x) = 2x\ln x - 2x + 5$. On a effectué à l'aide d'un logiciel de calcul formel les séquences suivantes :

1	dériver((2x) * ln(x) − 2x + 5) $2*\ln(x)+\dfrac{2*x}{x}-2$
2	$\text{simplifier}\left(2*\ln(x)+\dfrac{2*x}{x}-2\right)$ $\ln(x^2)$

PROPOSITION : F est une primitive de la fonction f définie sur I par $f(x) = 2\ln x$.

Question 4

X est une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance $\mu = 0$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}6$.

PROPOSITION : : $P(-0{,}6 \leq X \leq 0{,}6) \approx 0{,}68$

Exercice 3 - 5 points

Une entreprise fabrique des poulies utilisées dans l'industrie automobile. On suppose que toute la production est vendue.
L'entreprise peut fabriquer entre 0 et 3600 poulies par semaine. On note x le nombre de milliers de poulies fabriquées et vendues en une semaine. (x varie donc dans l'intervalle $[0\,;3{,}6]$).
Le bénéfice hebdomadaire est noté $B(x)$, il est exprimé en milliers d'euros.

L'objet de cet exercice est d'étudier cette fonction B. Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A : étude graphique

On a représenté, en **annexe 2**, la fonction B dans un repère du plan.
Chaque résultat sera donné à cent poulies près ou à cent euros près suivant les cas.
Les traits utiles à la compréhension du raisonnement seront laissés sur le graphique et une réponse écrite sur la copie sera attendue pour chaque question posée.

1) Déterminer dans quel intervalle peut varier le nombre de poulies pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 13000 euros.
2) Quel est le bénéfice maximum envisageable pour l'entreprise ?
   Pour quel nombre N de poulies fabriquées et vendues semble-t-il être réalisé ?

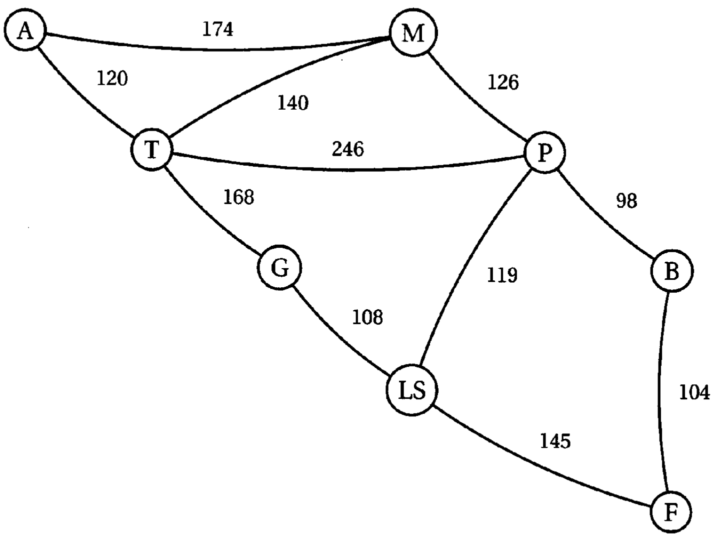
Partie B : étude théorique

Le bénéfice hebdomadaire noté $B(x)$, exprimé en milliers d'euros vaut $B(x) = -5 + (4-x)e^{x}$.

1) a) On note B' la fonction dérivée de la fonction B.
   Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $I = [0\,;3{,}6]$, on a : $B'(x) = (3-x)e^{x}$.
   b) Déterminer le signe de la fonction dérivée B' sur l'intervalle I.
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle I. On indiquera les valeurs de la fonction B aux bornes de l'intervalle.
2) a) Justifier que l'équation $B(x) = 13$ admet deux solutions x_1 et x_2, l'une dans l'intervalle $[0\,;3]$ l'autre dans l'intervalle $[3\,;3{,}6]$.
   b) À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 0,01 près de chacune des deux solutions.

Exercice 4 - 5 points

Un chauffeur-livreur réside en Italie dans la ville d'Aoste.
Quatre fois par mois, son employeur l'envoie livrer du matériel informatique dans la ville de Florence.
Il est établi que le trajet en camion coûte, en carburant, 0,51 euro au kilomètre. Le chauffeur dispose d'un budget mensuel de 2200 euros pour son carburant. Ce qu'il réussit à économiser lui permet de toucher une prime P équivalente en fin de mois.
Il consulte donc la carte routière ci-dessous pour optimiser ses trajets.
Le graphe ci-dessous indique les distances entre différentes villes d'Italie : Aoste, Milan, Parme, Turin, Gènes, La Spézia, Bologne et Florence. Chaque ville est désignée par son initiale.



Les deux parties sont indépendantes.

Partie A : Étude du trajet

1) Déterminer le trajet le plus court entre Aoste et Florence. (On indiquera les villes parcourues et l'ordre de parcours).
2) Déterminer le budget carburant nécessaire aux quatre voyages aller-retour du mois (le résultat sera arrondi à l'euro près).
   En déduire le montant de la prime P qui lui sera versée en fin de mois, à l'euro près.

Partie B : Traversée de Parme

Durant son trajet, le chauffeur est obligé de traverser Parme et ses très nombreux feux tricolores. Lorsque le feu est orange, le chauffeur se comporte comme lorsqu'il est rouge, il s'arrête.
L'expérience lui a permis d'établir que s'il se présente à un feu, il se produit les événements suivants :
- Arrivé au feu, celui-ci est au vert (V) : la probabilité que le suivant soit vert est de 0,85
- Arrivé au feu, celui-ci est orange ou rouge (R) : la probabilité que le suivant soit vert est de 0,30

1) Représenter la situation par un graphe probabiliste.
2) Indiquer la matrice de transition M du graphe, en considérant les sommets dans l'ordre (V, R) en ligne comme en colonne.
3) Le premier feu rencontré est vert. La matrice P_1 donnant l'état initial est donc $(1 \quad 0)$.
   a) Déterminer les matrices $P_2 = P_1 \times M$ et $P_3 = P_2 \times M$. (Le détail des calculs n'est pas demandé.)
   b) Conclure quant à la probabilité p de l'événement « Le chauffeur doit s'arrêter au troisième feu ».

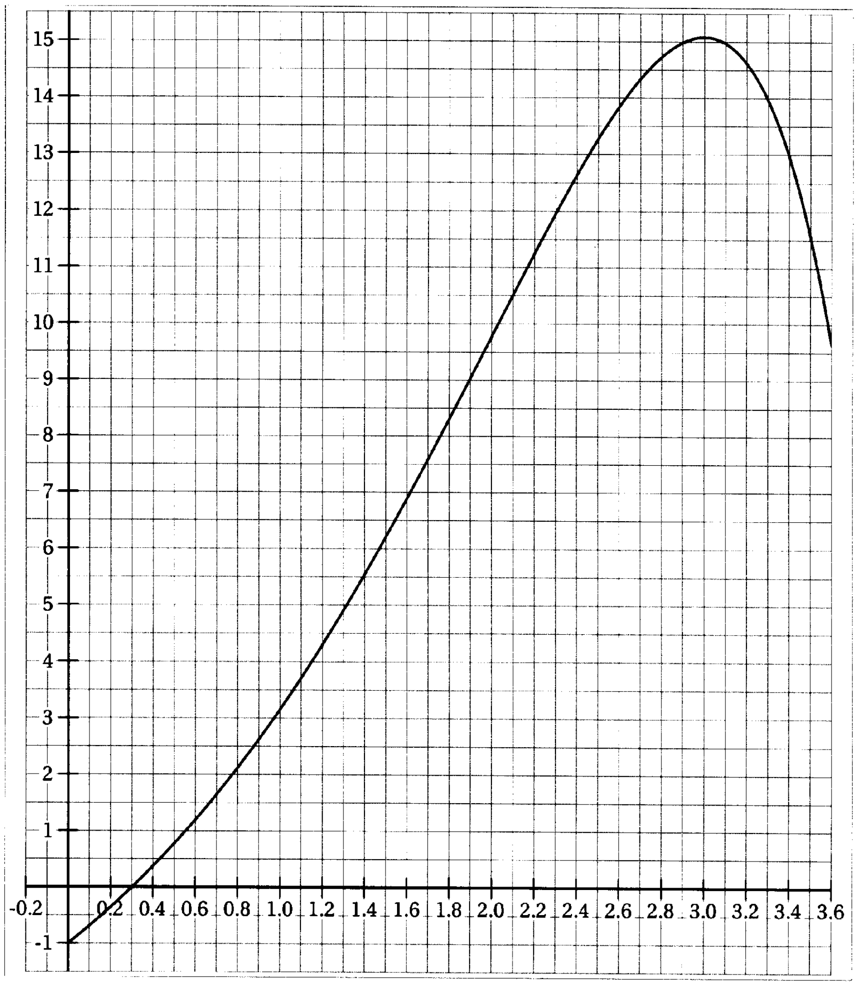
Annexes - à rendre avec la copie

Annexe 1

Extrait de la table de la loi normale pour $\mu = 200{,}5$ et $\sigma = 3{,}5$

t	$p(X \leqslant t)$	t	$p(X \leqslant t)$	t	$p(X \leqslant t)$
186	0,0000	196	0,0993	206	0,9420
187	0,0001	197	0,1587	207	0,9684
188	0,0002	198	0,2375	208	0,9839
189	0,0005	199	0,3341	209	0,9924
190	0,0013	200	0,4432	210	0,9967
191	0,0033	201	0,5568	211	0,9987
192	0,0076	202	0,6659	212	0,9995
193	0,0161	203	0,7625	213	0,9998
194	0,0316	204	0,8413	214	0,9999
195	0,0580	205	0,9007	215	1,0000

Annexe 2



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2014

MATHÉMATIQUES

Série S

ÉPREUVE DU JEUDI 19 JUIN 2014

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 7**

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur $\mathbf{R}$ par :

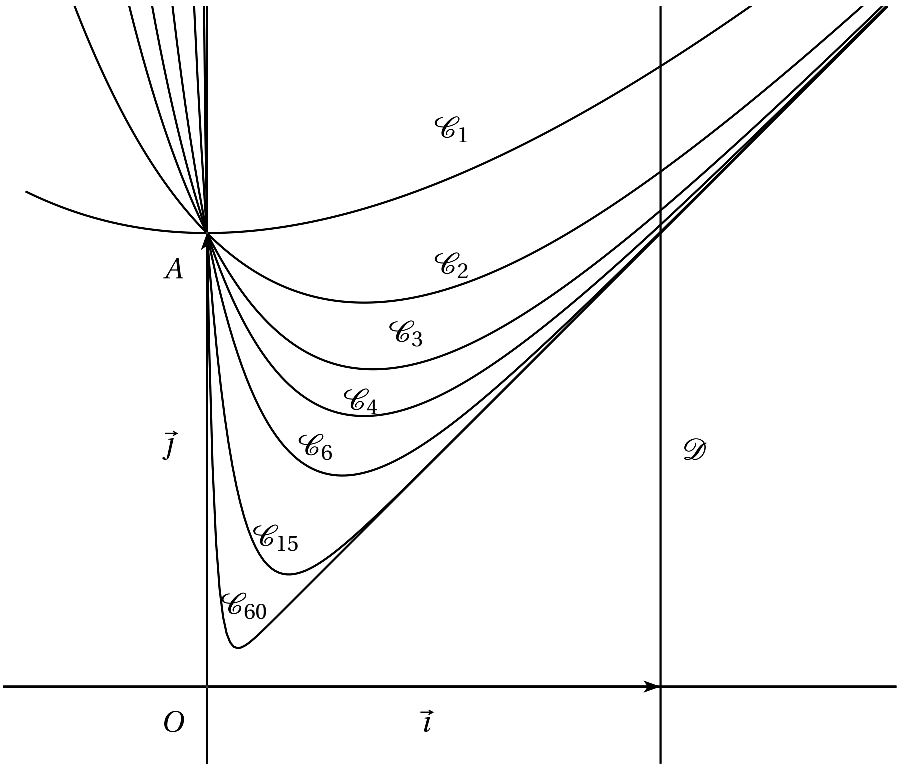
$$f_1(x) = x + \mathrm{e}^{-x}$$

1. Justifier que $\mathscr{C}_1$ passe par le point A de coordonnées $(0, 1)$.
2. Déterminer le tableau de variation de la fonction f_1. On précisera les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Partie B

L'objet de cette partie est d'étudier la suite (I_n) définie sur $\mathbf{N}$ par : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \left(x + \mathrm{e}^{-nx}\right) \mathrm{d}x$.

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$, pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}$ par $f_n(x) = x + \mathrm{e}^{-nx}$.
   Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathscr{C}_n$ pour plusieurs valeurs de l'entier n et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = 1$.



   a. Interpréter géométriquement l'intégrale I_n.
   b. En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \mathrm{e}^{-(n+1)x}\left(1 - \mathrm{e}^x\right)\,\mathrm{d}x.$$

En déduire le signe de $I_{n+1} - I_n$ puis démontrer que la suite (I_n) est convergente.

3. Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (I_n).

EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Un laboratoire pharmaceutique propose des tests de dépistage de diverses maladies. Son service de communication met en avant les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est 0,99 ;
- la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est 0,001.

1. Pour une maladie qui vient d'apparaître, le laboratoire élabore un nouveau test. Une étude statistique permet d'estimer que le pourcentage de personnes malades parmi la population d'une métropole est égal à $0,1\%$. On choisit au hasard une personne dans cette population et on lui fait subir le test.
On note M l'évènement « la personne choisie est malade » et T l'évènement « le test est positif ».

a. Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.

b. Démontrer que la probabilité $P(T)$ de l'évènement T est égale à $1,989 \times 10^{-3}$.

c. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.
Affirmation : « Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade ».

2. Le laboratoire décide de commercialiser un test dès lors que la probabilité qu'une personne testée positivement soit malade est supérieure ou égale à $0,95$. On désigne par x la proportion de personnes atteintes d'une certaine maladie dans la population.
À partir de quelle valeur de x le laboratoire commercialise-t-il le test correspondant ?

Partie B

La chaine de production du laboratoire fabrique, en très grande quantité, le comprimé d'un médicament.

1. Un comprimé est conforme si sa masse est comprise entre 890 et 920 mg. On admet que la masse en milligrammes d'un comprimé pris au hasard dans la production peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ de moyenne $\mu = 900$ et d'écart-type $\sigma = 7$.
   a. Calculer la probabilité qu'un comprimé prélevé au hasard soit conforme. On arrondira à 10^{-2}.
   b. Déterminer l'entier positif h tel que $P(900 - h \leqslant X \leqslant 900 + h) \approx 0,99$ à 10^{-3} près.
2. La chaine de production a été réglée dans le but d'obtenir au moins 97% de comprimés conformes. Afin d'évaluer l'efficacité des réglages, on effectue un contrôle en prélevant un échantillon de 1000 comprimés dans la production. La taille de la production est supposée suffisamment grande pour que ce prélèvement puisse être assimilé à 1000 tirages successifs avec remise.
   Le contrôle effectué a permis de dénombrer 53 comprimés non conformes sur l'échantillon prélevé.
   Ce contrôle remet-il en question les réglages faits par le laboratoire ? On pourra utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%.

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

On désigne par (E) l'équation $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ d'inconnue complexe z.

1. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$.
   Écrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.
2. On désigne par a le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à $\dfrac{\pi}{3}$.
   Calculer a^2 sous forme algébrique.
   En déduire les solutions dans $\mathbf{C}$ de l'équation $z^2 = -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$. On écrira les solutions sous forme algébrique.
3. **Restitution organisée de connaissances**
   On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}\,y$ où $x \in \mathbf{R}$ et $y \in \mathbf{R}$, le conjugué de z est le nombre complexe $\overline{z}$ défini par $\overline{z} = x - \mathrm{i}\,y$.
   Démontrer que :
   – Pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$.
   – Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.

4. Démontrer que si z est une solution de l'équation (E) alors son conjugué $\overline{z}$ est également une solution de (E).
En déduire les solutions dans $\mathbf{C}$ de l'équation (E). On admettra que (E) admet au plus quatre solutions.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace, on considère un tétraèdre $ABCD$ dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.

On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ de l'espace.

1. On désigne par $\mathscr{P}$ le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF).
On note H le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (DF).

   a. Donner les coordonnées des points D et F.
   b. Donner une représentation paramétrique de la droite (DF).
   c. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.
   d. Calculer les coordonnées du point H.
   e. Démontrer que l'angle $\widehat{EHG}$ est un angle droit.

2. On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DF}$. On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{EMG}$.
Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale.

   a. Démontrer que $ME^2 = \dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{5}{2}t + \dfrac{5}{4}$.
   b. Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M.
   En déduire que $ME \sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.
   c. Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.
   En déduire que α est maximale si et seulement si ME^2 est minimal.
   d. Conclure.

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2014

MATHÉMATIQUES

Série S

ÉPREUVE DU JEUDI 19 JUIN 2014

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 9**

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur $\mathbf{R}$ par :

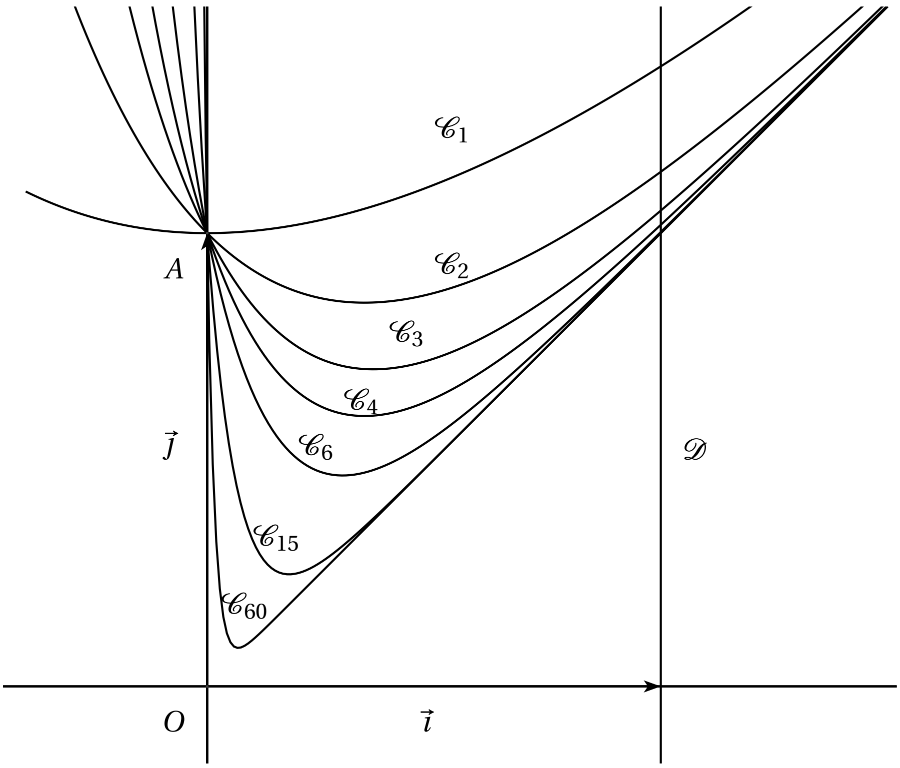
$$f_1(x) = x + \mathrm{e}^{-x}$$

1. Justifier que $\mathscr{C}_1$ passe par le point A de coordonnées $(0, 1)$.
2. Déterminer le tableau de variation de la fonction f_1. On précisera les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Partie B

L'objet de cette partie est d'étudier la suite (I_n) définie sur $\mathbf{N}$ par : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \left(x + \mathrm{e}^{-nx}\right) \mathrm{d}x$.

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}$ par $f_n(x) = x + \mathrm{e}^{-nx}$.
Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathscr{C}_n$ pour plusieurs valeurs de l'entier n et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = 1$.



   a. Interpréter géométriquement l'intégrale I_n.
   b. En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x}\left(1 - e^x\right) dx.$$

En déduire le signe de $I_{n+1} - I_n$ puis démontrer que la suite (I_n) est convergente.

3. Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (I_n).

EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Un laboratoire pharmaceutique propose des tests de dépistage de diverses maladies. Son service de communication met en avant les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est 0,99 ;
- la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est 0,001.

1. Pour une maladie qui vient d'apparaître, le laboratoire élabore un nouveau test. Une étude statistique permet d'estimer que le pourcentage de personnes malades parmi la population d'une métropole est égal à $0,1\%$. On choisit au hasard une personne dans cette population et on lui fait subir le test.
On note M l'évènement « la personne choisie est malade » et T l'évènement « le test est positif ».

   a. Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.

   b. Démontrer que la probabilité $P(T)$ de l'évènement T est égale à $1,989 \times 10^{-3}$.

   c. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.
   Affirmation : « Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade ».

2. Le laboratoire décide de commercialiser un test dès lors que la probabilité qu'une personne testée positivement soit malade est supérieure ou égale à $0,95$. On désigne par x la proportion de personnes atteintes d'une certaine maladie dans la population.
À partir de quelle valeur de x le laboratoire commercialise-t-il le test correspondant ?

Partie B

La chaine de production du laboratoire fabrique, en très grande quantité, le comprimé d'un médicament.

1. Un comprimé est conforme si sa masse est comprise entre 890 et 920 mg. On admet que la masse en milligrammes d'un comprimé pris au hasard dans la production peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ de moyenne $\mu = 900$ et d'écart-type $\sigma = 7$.
   - **a.** Calculer la probabilité qu'un comprimé prélevé au hasard soit conforme. On arrondira à 10^{-2}.
   - **b.** Déterminer l'entier positif h tel que $P(900 - h \leqslant X \leqslant 900 + h) \approx 0,99$ à 10^{-3} près.
2. La chaine de production a été réglée dans le but d'obtenir au moins 97% de comprimés conformes. Afin d'évaluer l'efficacité des réglages, on effectue un contrôle en prélevant un échantillon de 1000 comprimés dans la production. La taille de la production est supposée suffisamment grande pour que ce prélèvement puisse être assimilé à 1000 tirages successifs avec remise.
   Le contrôle effectué a permis de dénombrer 53 comprimés non conformes sur l'échantillon prélevé.
   Ce contrôle remet-il en question les réglages faits par le laboratoire ? On pourra utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%.

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

On désigne par (E) l'équation $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ d'inconnue complexe z.

1. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$.
   Écrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.
2. On désigne par a le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à $\dfrac{\pi}{3}$.
   Calculer a^2 sous forme algébrique.
   En déduire les solutions dans $\mathbf{C}$ de l'équation $z^2 = -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$. On écrira les solutions sous forme algébrique.
3. **Restitution organisée de connaissances**
   On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ où $x \in \mathbf{R}$ et $y \in \mathbf{R}$, le conjugué de z est le nombre complexe $\overline{z}$ défini par $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$.
   Démontrer que :
   – Pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$.
   – Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.

4. Démontrer que si z est une solution de l'équation (E) alors son conjugué $\overline{z}$ est également une solution de (E).
En déduire les solutions dans **C** de l'équation (E). On admettra que (E) admet au plus quatre solutions.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un pisciculteur dispose de deux bassins A et B pour l'élevage de ses poissons. Tous les ans à la même période :

- il vide le bassin B et vend tous les poissons qu'il contenait et transfère tous les poissons du bassin A dans le bassin B ;
- la vente de chaque poisson permet l'achat de deux petits poissons destinés au bassin A.
  Par ailleurs, le pisciculteur achète en plus 200 poissons pour le bassin A et 100 poissons pour le bassin B.

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, on note respectivement a_n et b_n les effectifs de poissons des bassins A et B au bout de n années. En début de première année, le nombre de poissons du bassin A est $a_0 = 200$ et celui du bassin B est $b_0 = 100$.

1. Justifier que $a_1 = 400$ et $b_1 = 300$ puis calculer a_2 et b_2.

2. On désigne par A et B les matrices telles que $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
   a. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $\quad X_{n+1} = AX_n + B$.
   b. Déterminer les réels x et y tels que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$.
   c. Pour tout entier naturel n, on pose $Y_n = \begin{pmatrix} a_n + 400 \\ b_n + 300 \end{pmatrix}$.
   Démontrer que pour tout entier naturel n, $Y_{n+1} = AY_n$.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $Z_n = Y_{2n}$.
   a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = A^2 Z_n$. En déduire que pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = 2Z_n$.
   b. On admet que cette relation de récurrence permet de conclure que pour tout entier naturel n,
   $$Y_{2n} = 2^n Y_0.$$
   En déduire que $Y_{2n+1} = 2^n Y_1$ puis démontrer que pour tout entier naturel n,
   $$a_{2n} = 600 \times 2^n - 400 \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = 800 \times 2^n - 400.$$

4. Le bassin A a une capacité limitée à 10 000 poissons.

a. On donne l'algorithme suivant.

Variables :	a, p et n sont des entiers naturels.
Initialisation :	Demander à l'utilisateur la valeur de p.
Traitement :	Si p est pair
	Affecter à n la valeur $\dfrac{p}{2}$
	Affecter à a la valeur $600 \times 2^n - 400$.
	Sinon
	Affecter à n la valeur $\dfrac{p-1}{2}$
	Affecter à a la valeur $800 \times 2^n - 400$.
	Fin de Si.
Sortie :	Afficher a.

Que fait cet algorithme ? Justifier la réponse.

b. Écrire un algorithme qui affiche le nombre d'années pendant lesquelles le pisciculteur pourra utiliser le bassin A.

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2014

MATHÉMATIQUES – Série ES
ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 5

MATHÉMATIQUES – Série L
ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 4

SUJET

ÉPREUVE DU VENDREDI 20 JUIN 2014

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

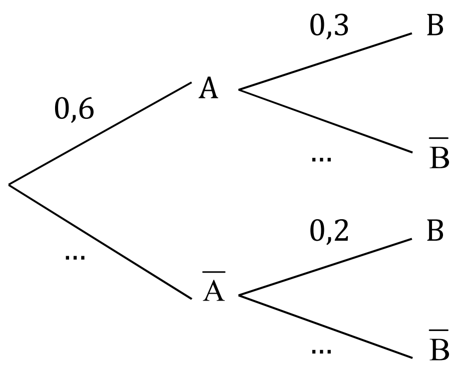
Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 6 pages, y compris celle-ci ; la page 6 est à rendre avec la copie.

<u>Exercice 1</u> : (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. L'arbre de probabilités ci-dessous représente une situation où A et B sont deux événements, dont les événements contraires sont respectivement notés $\overline{\mathrm{A}}$ et $\overline{\mathrm{B}}$.



Alors

a) $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = 0{,}18$ ***b)*** $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0{,}9$ ***c)*** $P_{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{B}}) = 0{,}7$ ***d)*** $P(\mathrm{B}) = 0{,}5$

2. Avec le même arbre, la probabilité de l'événement B est égale à :

a) 0,5 ***b)*** 0,18 ***c)*** 0,26 ***d)*** 0,38

3. On considère une fonction f définie et continue sur l'intervalle [1 ; 15]. Son tableau de variation est indiqué ci-dessous.

x	1	3	4	12	15
$f(x)$	3 ↘	0	↘ −2 ↗	−1 ↘	−3

Soit F une primitive de la fonction f sur l'intervalle [1 ; 15]. On peut être certain que :

a) La fonction F est négative sur l'intervalle [3 ; 4].
b) La fonction F est positive sur l'intervalle [4 ; 12].
c) La fonction F est décroissante sur l'intervalle [4 ; 12].
d) La fonction F est décroissante sur l'intervalle [1 ; 3].

4. Pour tout réel x de l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$:
l'équation $\ln x + \ln(x+3) = 3\ln 2$ est équivalente à l'équation :

a) $2x + 3 = 6$ ***b)*** $2x + 3 = 8$ ***c)*** $x^2 + 3x = 6$ ***d)*** $x^2 + 3x = 8$

5. g est la fonction définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par $g(x) = \frac{5}{x}$.
On note C sa courbe représentative.
L'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe C, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 6$, est égale à :

a) $5\,(\ln 6 - \ln 2)$ ***b)*** $\frac{1}{6-2}\int_2^6 g(x)dx$ ***c)*** $5\ln 6 + 5\ln 2$ ***d)*** $g(6) - g(2)$

<u>Exercice 2</u> : (5 points)

À l'automne 2010, Claude achète une maison à la campagne ; il dispose d'un terrain de 1500m^2 entièrement engazonné. Mais tous les ans, 20% de la surface engazonnée est détruite et remplacée par de la mousse. Claude arrache alors, à chaque automne, la mousse sur une surface de 50m^2 et la remplace par du gazon.

Pour tout nombre entier naturel *n*, on note u_n la surface en m^2 de terrain engazonné au bout de *n* années, c'est-à-dire à l'automne 2010 + *n*. On a donc $u_0 = 1\,500$.

1. Calculer u_1.

2. Justifier que, pour tout nombre entier naturel *n*, $u_{n+1} = 0{,}8\,u_n + 50$.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout nombre entier naturel *n* par : $v_n = u_n - 250$.
a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
b) Exprimer v_n en fonction de *n*.
En déduire que, pour tout nombre entier naturel *n*, $u_n = 250 + 1\,250 \times 0{,}8^n$.
c) Quelle est la surface de terrain engazonné au bout de 4 années ?

4. ***a)*** Déterminer par le calcul la plus petite valeur de l'entier naturel *n* telle que :
$$250 + 1\,250 \times 0{,}8^n < 500$$
Interpréter le résultat obtenu.
b) Compléter l'algorithme fourni en **annexe 1** pour qu'il affiche la solution obtenue à la question précédente.

5. Claude est certain que les mauvaises herbes ne peuvent envahir la totalité de son terrain. A-t-il raison ? Justifier la réponse.

<u>Exercice 3</u> : (5 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A :

Chaque jour, Antoine s'entraine au billard américain pendant une durée comprise entre 20 minutes et une heure. On modélise la durée de son entrainement, en minutes, par une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur l'intervalle [20 ; 60].

1. Calculer la probabilité p pour que l'entrainement dure plus de 30 minutes.
2. Calculer l'espérance de X. Interpréter ce résultat.

Partie B :

Dans cette partie les probabilités seront, si besoin, arrondies au millième.

Les boules de billard américain avec lesquelles Antoine s'entraine sont dites de premier choix si leur diamètre est compris entre 56,75 mm et 57,25 mm ; sinon elles sont dites de second choix.

On note D la variable aléatoire qui, à chaque boule prélevée au hasard dans la production de l'entreprise, associe son diamètre, en millimètres.

On suppose que D suit la loi normale d'espérance 57 et d'écart-type 0,11.

1. Déterminer la probabilité p_1 que la boule prélevée ait un diamètre inférieur à 57mm.
2. Déterminer la probabilité p_2 que la boule prélevée soit une boule de premier choix.
3. En déduire la probabilité p_3 que la boule prélevée soit une boule de second choix.

Partie C :

Le président de la fédération française de billard (FFB) souhaite estimer le niveau de satisfaction de ses 14 000 licenciés quant à l'organisation des tournois.

Antoine estime que les 80 adhérents de son club constituent un échantillon représentatif des licenciés de la FFB. Il est chargé de faire une étude au sein de son club : les 80 adhérents ont répondu, et 66 ont déclaré qu'ils étaient satisfaits.

1. Quelle est, sur cet échantillon, la fréquence observée f de personnes satisfaites de la FFB ?
2. Déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 de la proportion p de licenciés satisfaits de la FFB. Les bornes de l'intervalle seront arrondies au millième.

<u>Exercice 4</u> : (5 points)

On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang.

On obtient la courbe fournie en **annexe 2**.

A. ***Étude graphique :***

Avec la précision permise par le graphique, indiquer :

1. la concentration à l'instant initial *;*

2. l'intervalle de temps pendant lequel la concentration est supérieure ou égale à 0,4 gramme par litre.
On fera apparaitre sur le graphique les traits de construction nécessaires.

B. ***Étude théorique :***

On admet que la concentration peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[\,0\,;\,15\,]$ par : $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-0{,}5x}$, où x représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(x)$ la concentration, en grammes par litre, du médicament dans le sang.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Justifier que $f'(x) = -0{,}5x\mathrm{e}^{-0{,}5x}$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur [0 ; 15].

2. Justifier que l'équation $f(x) = 0{,}1$ admet une unique solution α sur l'intervalle [0 ; 15].

3. Déterminer un encadrement de α d'amplitude un dixième.

4. Un logiciel de calcul formel donne le résultat ci-dessous :

```
1 deriver((x+2)*exp(-0.5*x))
                                   exp(-0.5*x)-0.5*exp(-0.5*x)*(x+2)
2 deriver(exp(-0.5*x)-0.5*exp(-0.5*x)*(x+2))
                                  -exp(-0.5*x)+0.25*exp(-0.5*x)*(x+2)
3 factoriser(-exp(-0.5*x)+0.25*exp(-0.5*x)*(x+2))
                                              (0.25*x-0.5)*exp(-0.5*x)
```

En vous appuyant sur ces résultats, étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 15] et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion.

C. ***Interprétation des résultats :***

En vous aidant des résultats obtenus, soit dans la partie B, soit par lecture graphique et sans justifier, répondre aux questions ci-dessous.

1. On estime que le médicament n'est plus actif lorsque la concentration est strictement inférieure à 0,1 gramme par litre. Pendant combien de temps le médicament est-il actif ?

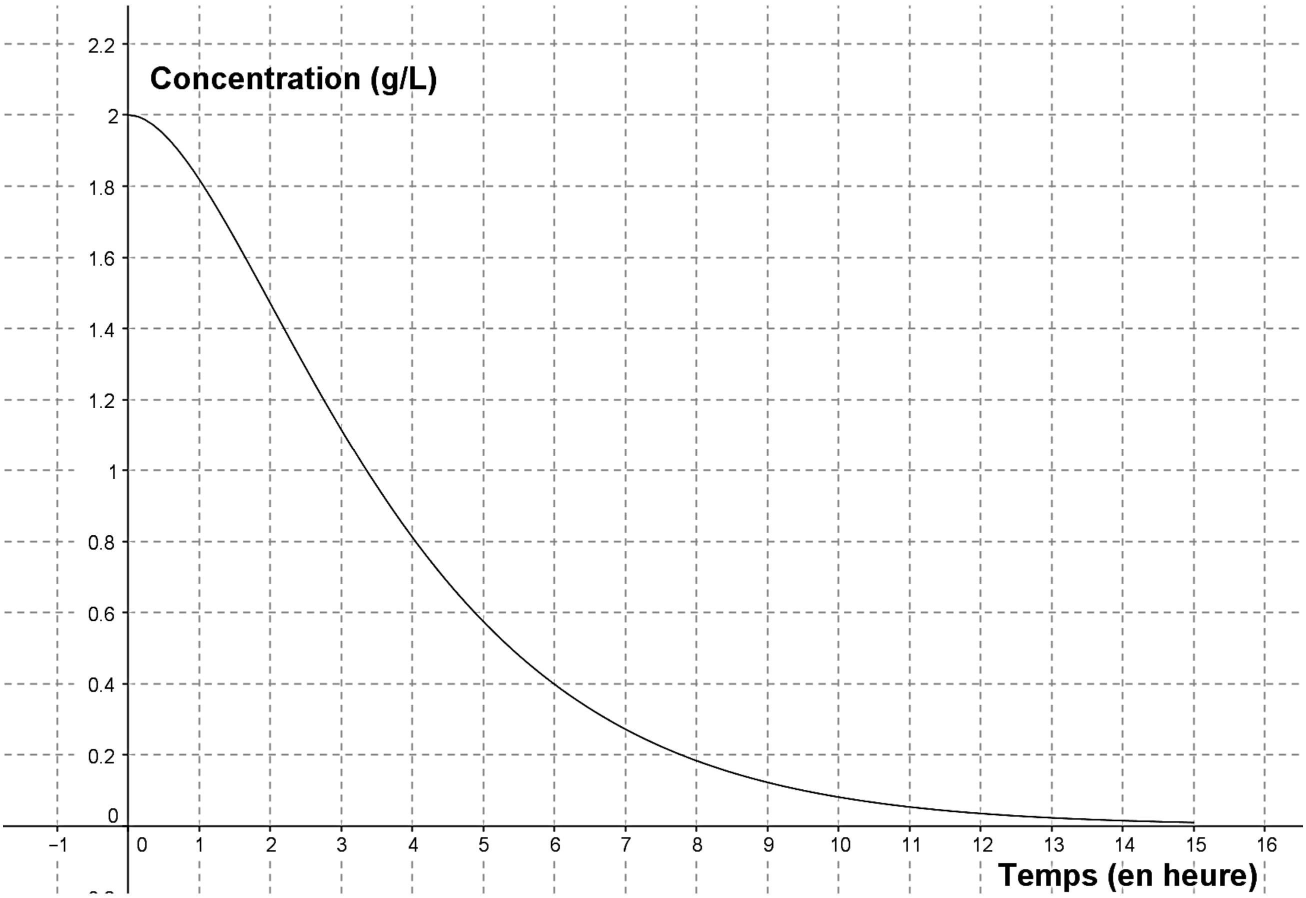
2. Au bout de combien d'heures la baisse de concentration ralentit-elle ?

Annexes – à rendre avec la copie

Annexe 1

Initialisation
u prend la valeur 1500
n prend la valeur 0
Traitement
Tant que ………… faire
  u prend la valeur ………………
  n prend la valeur ………………
Fin Tant que
Sortie
Afficher n

Annexe 2



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2014

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

ÉPREUVE DU VENDREDI 20 JUIN 2014

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

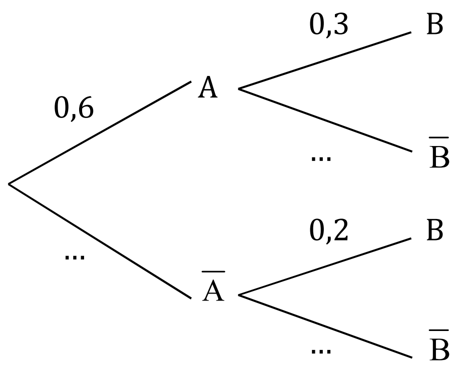
Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 6 pages, y compris celle-ci ; la page 6 est à rendre avec la copie.

<u>Exercice 1</u> : (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. L'arbre de probabilités ci-dessous représente une situation où A et B sont deux événements, dont les événements contraires sont respectivement notés $\overline{\mathrm{A}}$ et $\overline{\mathrm{B}}$.



Alors

a) $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = 0{,}18$ ***b)*** $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0{,}9$ ***c)*** $P_{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{B}}) = 0{,}7$ ***d)*** $P(\mathrm{B}) = 0{,}5$

2. Avec le même arbre, la probabilité de l'événement B est égale à :

a) 0,5 ***b)*** 0,18 ***c)*** 0,26 ***d)*** 0,38

3. On considère une fonction f définie et continue sur l'intervalle [1 ; 15]. Son tableau de variation est indiqué ci-dessous.

x	1	3	4	12	15
$f(x)$	3 ↘	0	↘ −2 ↗	−1 ↘	−3

Soit F une primitive de la fonction f sur l'intervalle [1 ; 15]. On peut être certain que :

a) La fonction F est négative sur l'intervalle [3 ; 4].
b) La fonction F est positive sur l'intervalle [4 ; 12].
c) La fonction F est décroissante sur l'intervalle [4 ; 12].
d) La fonction F est décroissante sur l'intervalle [1 ; 3].

4. Pour tout réel x de l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$:
l'équation $\ln x + \ln(x+3) = 3\ln 2$ est équivalente à l'équation :

a) $2x+3=6$ ***b)*** $2x+3=8$ ***c)*** $x^2+3x=6$ ***d)*** $x^2+3x=8$

5. g est la fonction définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par $g(x)=\frac{5}{x}$.
On note C sa courbe représentative.
L'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe C, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x=2$ et $x=6$, est égale à :

a) $5\,(\ln 6 - \ln 2)$ ***b)*** $\frac{1}{6-2}\int_2^6 g(x)dx$ ***c)*** $5\ln 6 + 5\ln 2$ ***d)*** $g(6)-g(2)$

<u>Exercice 2</u> : (5 points)

Alice participe à une compétition de tir à l'arc ; elle effectue plusieurs lancers de flèches.
Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à 0,9.
Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, Alice se déconcentre et la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à 0,4.
On suppose qu'au premier lancer, elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.
Pour tout nombre entier naturel *n* strictement positif, on note :

a_n la probabilité qu'Alice atteigne la cible au *n*-ième lancer ;
b_n la probabilité qu'Alice manque la cible au *n*-ième lancer ;
$P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste au *n*-ième lancer.

1. ***a)*** Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B (A représentant l'état « Alice atteint la cible » et B l'état « Alice manque sa cible »).

   b) Indiquer la matrice de transition M associée à ce graphe. On prendra les sommets A et B dans l'ordre (A, B).

   c) Justifier que $P_1 = (0{,}5 \;\; 0{,}5)$ et $P_2 = (0{,}65 \;\; 0{,}35)$.

2. ***a)*** Montrer que, pour tout nombre entier *n* strictement positif, $a_{n+1} = 0{,}9a_n + 0{,}4b_n$.

   b) En déduire que, pour tout nombre entier *n* strictement positif, $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 0{,}4$.

3. ***a)*** Compléter l'algorithme fourni en **annexe 1** de façon à ce qu'il affiche l'état probabiliste au *n*-ième lancer.

   b) Déterminer l'affichage de cet algorithme pour *n* = 5.

4. ***a)*** On considère la suite (u_n) définie pour tout nombre entier naturel *n* strictement positif par : $u_n = a_n - 0{,}8$.
   Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   b) Donner l'expression de u_n en fonction de *n*, puis en déduire que pour tout nombre entier naturel *n* strictement positif, $a_n = 0{,}8 - 0{,}3 \times 0{,}5^{n-1}$.

c) À long terme, que peut-on penser de la probabilité qu'Alice atteigne la cible ?
d) Par quelle autre méthode aurait-on pu trouver le résultat précédent ?

<u>Exercice 3</u> : (5 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A :

Chaque jour, Antoine s'entraine au billard américain pendant une durée comprise entre 20 minutes et une heure. On modélise la durée de son entrainement, en minutes, par une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur l'intervalle [20 ; 60].

1. Calculer la probabilité p pour que l'entrainement dure plus de 30 minutes.
2. Calculer l'espérance de X. Interpréter ce résultat.

Partie B :

Dans cette partie les probabilités seront, si besoin, arrondies au millième.

Les boules de billard américain avec lesquelles Antoine s'entraine sont dites de premier choix si leur diamètre est compris entre 56,75 mm et 57,25 mm ; sinon elles sont dites de second choix.

On note D la variable aléatoire qui, à chaque boule prélevée au hasard dans la production de l'entreprise, associe son diamètre, en millimètres.

On suppose que D suit la loi normale d'espérance 57 et d'écart-type 0,11.

1. Déterminer la probabilité p_1 que la boule prélevée ait un diamètre inférieur à 57mm.
2. Déterminer la probabilité p_2 que la boule prélevée soit une boule de premier choix.
3. En déduire la probabilité p_3 que la boule prélevée soit une boule de second choix.

Partie C :

Le président de la fédération française de billard (FFB) souhaite estimer le niveau de satisfaction de ses 14 000 licenciés quant à l'organisation des tournois.

Antoine estime que les 80 adhérents de son club constituent un échantillon représentatif des licenciés de la FFB. Il est chargé de faire une étude au sein de son club : les 80 adhérents ont répondu, et 66 ont déclaré qu'ils étaient satisfaits.

1. Quelle est, sur cet échantillon, la fréquence observée f de personnes satisfaites de la FFB ?
2. Déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 de la proportion p de licenciés satisfaits de la FFB. Les bornes de l'intervalle seront arrondies au millième.

<u>Exercice 4</u> : (5 points)

On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang.

On obtient la courbe fournie en **annexe 2**.

A. *Étude graphique :*

Avec la précision permise par le graphique, indiquer :

1. la concentration à l'instant initial ;
2. l'intervalle de temps pendant lequel la concentration est supérieure ou égale à 0,4 gramme par litre.
   On fera apparaitre sur le graphique les traits de construction nécessaires.

B. *Étude théorique :*

On admet que la concentration peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[\,0\,;\ 15\,]$ par : $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-0,5x}$, où x représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(x)$ la concentration, en grammes par litre, du médicament dans le sang.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Justifier que $f'(x) = -0,5x\mathrm{e}^{-0,5x}$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur [0 ; 15].
2. Justifier que l'équation $f(x) = 0,1$ admet une unique solution α sur l'intervalle [0 ; 15].
3. Déterminer un encadrement de α d'amplitude un dixième.
4. Un logiciel de calcul formel donne le résultat ci-dessous :

```
1  deriver((x+2)*exp(-0.5*x))
                                   exp(-0.5*x)-0.5*exp(-0.5*x)*(x+2)
2  deriver(exp(-0.5*x)-0.5*exp(-0.5*x)*(x+2))
                                   -exp(-0.5*x)+0.25*exp(-0.5*x)*(x+2)
3  factoriser(-exp(-0.5*x)+0.25*exp(-0.5*x)*(x+2))
                                   (0.25*x-0.5)*exp(-0.5*x)
```

   En vous appuyant sur ces résultats, étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 15] et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion.

C. *Interprétation des résultats :*

En vous aidant des résultats obtenus, soit dans la partie B, soit par lecture graphique et sans justifier, répondre aux questions ci-dessous.

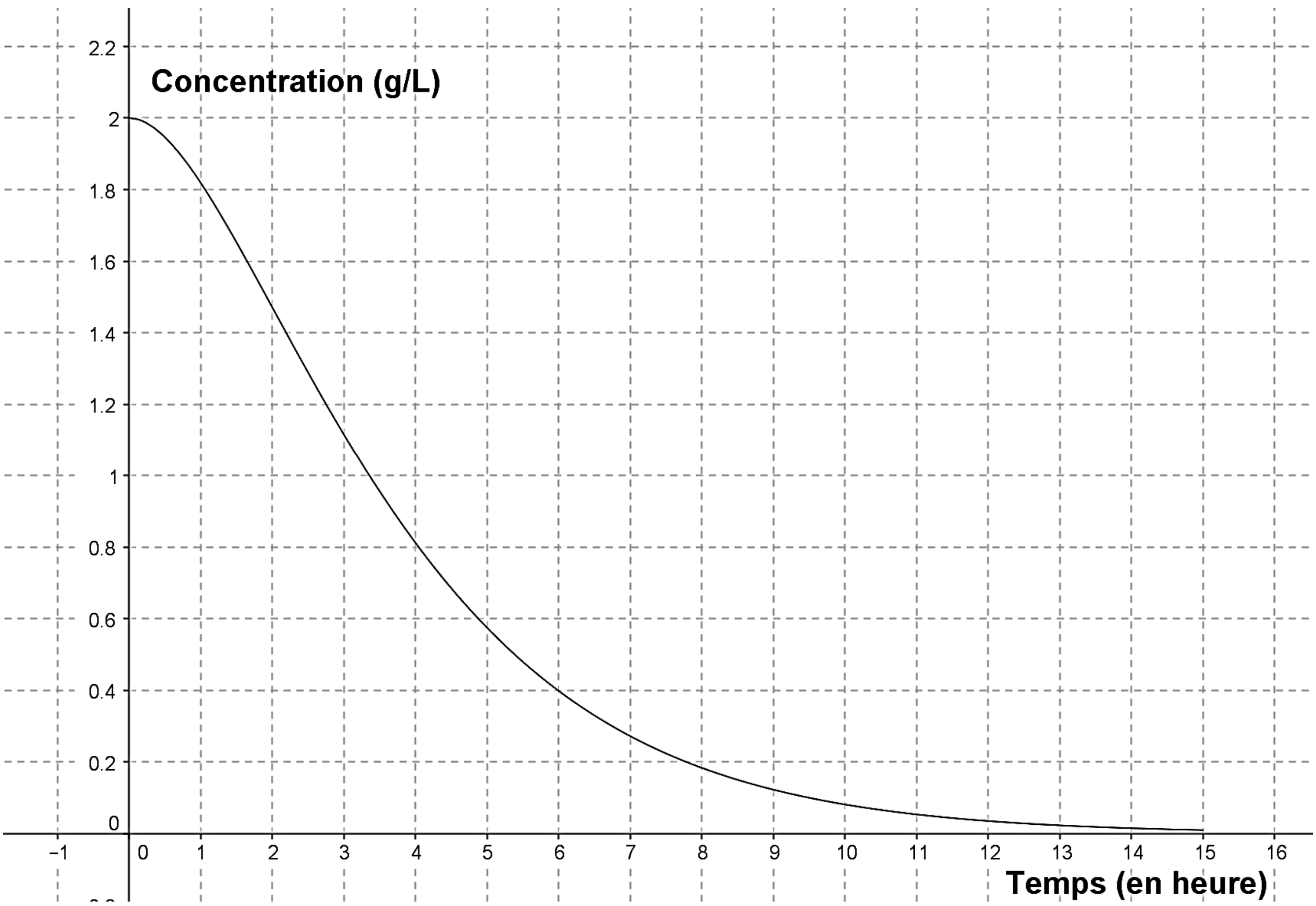
1. On estime que le médicament n'est plus actif lorsque la concentration est strictement inférieure à 0,1 gramme par litre. Pendant combien de temps le médicament est-il actif ?
2. Au bout de combien d'heures la baisse de concentration ralentit-elle ?

Annexes – à rendre avec la copie

Annexe 1

Entrées
Saisir n.
Traitement
a prend la valeur 0,5
b prend la valeur 0,5
Pour i allant de 2 à n
  a prend la valeur …… $\times a +$ ……
  b prend la valeur $1 - a$
Fin Pour
Sortie
Afficher a, b

Annexe 2



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2015

MATHEMATIQUES

Série S

ÉPREUVE DU LUNDI 22 JUIN 2015

Enseignement Obligatoire ***Coefficient : 7***

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.
Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (6 points) Commun à tous les candidats

Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-3} près.

Partie 1

1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif donné.

On rappelle que la densité de probabilité de cette loi est la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

a. Soit c et d deux réels tels que $0 \leq c < d$.

Démontrer que la probabilité $P(c \leq X \leq d)$ vérifie $P(c \leq X \leq d) = \mathrm{e}^{-\lambda c} - \mathrm{e}^{-\lambda d}$.

b. Déterminer une valeur de λ à 10^{-3} près de telle sorte que la probabilité $P(X > 20)$ soit égale à 0,05.

c. Donner l'espérance de la variable aléatoire X.

Dans la suite de l'exercice on prend $\lambda = 0{,}15$.

d. Calculer $P(10 \leq X \leq 20)$.

e. Calculer la probabilité de l'événement $(X > 18)$.

2. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 16 et d'écart type 1,95.

a. Calculer la probabilité de l'événement $(20 \leq Y \leq 21)$.

b. Calculer la probabilité de l'événement $(Y < 11) \cup (Y > 21)$.

Partie 2

Une chaîne de magasins souhaite fidéliser ses clients en offrant des bons d'achat à ses clients privilégiés. Chacun d'eux reçoit un bon d'achat de couleur verte ou rouge sur lequel est inscrit un montant.

Les bons d'achats sont distribués de façon à avoir, dans chaque magasin, un quart de bons rouges et trois quarts de bons verts.

Les bons d'achat verts prennent la valeur de 30 euros avec une probabilité égale à 0,067 ou des valeurs comprises entre 0 et 15 euros avec des probabilités non précisées ici.

De façon analogue, les bons d'achat rouges prennent les valeurs 30 ou 100 euros avec des probabilités respectivement égales à 0,015 et 0,010 ou des valeurs comprises entre 10 et 20 euros avec des probabilités non précisées ici.

1. Calculer la probabilité d’avoir un bon d’achat d’une valeur supérieure ou égale à 30 euros sachant qu’il est rouge.

2. Montrer qu’une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité d'avoir un bon d'achat d’une valeur supérieure ou égale à 30 euros vaut 0,057.

Pour la question suivante, on utilise cette valeur.

3. Dans un des magasins de cette chaîne, sur 200 clients privilégiés, 6 ont reçu un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 €.

Le directeur du magasin considéré estime que ce nombre est insuffisant et doute de la répartition au hasard des bons d’achats dans les différents magasins de la chaîne.
Ses doutes sont-ils justifiés ?

Exercice 2 (3 points) Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points $A(0\ ;\ -1\ ;\ 5)$, $B(2\ ;\ -1\ ;\ 5)$, $C(11\ ;\ 0\ ;\ 1)$, $D(11\ ;\ 4\ ;\ 4)$.

Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde.
Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.
À l'instant $t = 0$ le point M est en A et le point N est en C.
On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de *t* secondes, *t* désignant un nombre réel positif.

On admet que M_t et N_t ont pour coordonnées : $M_t(t\ ;\ -1\ ;\ 5)$ et $N_t(11\ ;\ 0{,}8\,t\ ;\ 1+0{,}6\,t)$.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1.

a. La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel ?

b. La droite (CD) se trouve dans un plan $\mathscr{P}$ parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK). Lequel ? On donnera une équation de ce plan $\mathscr{P}$.

c. Vérifier que la droite (AB), orthogonale au plan $\mathscr{P}$, coupe ce plan au point $E\ (11\ ;\ -1\ ;\ 5)$.

d. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

2.

a. Montrer que $M_tN_t^{\ 2} = 2\,t^2 - 25{,}2\,t + 138$.

b. À quel instant *t* la longueur M_tN_t est-elle minimale ?

Exercice 3 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

1. Résoudre dans l'ensemble **C** des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^2 - 8z + 64 = 0$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}; \vec{u},\ \vec{v})$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$, $b = 4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c = 8\mathrm{i}$.

a. Calculer le module et un argument du nombre a.

b. Donner la forme exponentielle des nombres a et b.

c. Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle $\mathscr{C}$ de centre O dont on déterminera le rayon.

d. Placer les points A, B et C dans le repère $(\mathrm{O}; \vec{u},\ \vec{v})$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question 2.d. complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

3. On considère les points A', B' et C' d'affixes respectives $a' = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, $b' = b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $c' = c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

a. Montrer que $b' = 8$.

b. Calculer le module et un argument du nombre a'.

Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4\,\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4\,\mathrm{i}$.

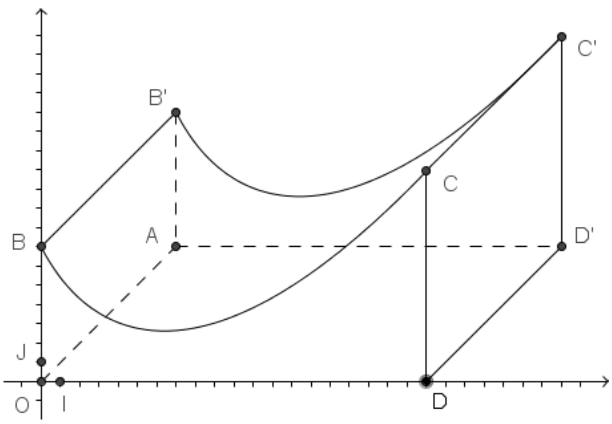
4. On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment $[\mathrm{MN}]$ a pour affixe $\dfrac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n - m|$.

a. On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments $[\mathrm{A'B}]$, $[\mathrm{B'C}]$ et $[\mathrm{C'A}]$.

Calculer r et s. On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + \mathrm{i}(2+2\sqrt{3})$.

b. Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ? Justifier ce résultat.

Exercice 4 (6 points) Commun à tous les candidats



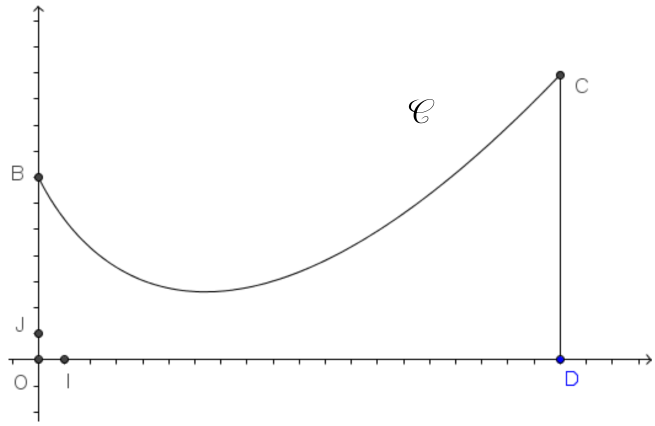
Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune.
Le dessin ci-contre en fournit une perspective cavalière. Les quadrilatères OAD'D, DD'C'C, et OAB'B sont des rectangles.
Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité est le mètre. La largeur du module est de 10 mètres, autrement dit, DD' = 10, sa longueur OD est de 20 mètres.

Le but du problème est de déterminer l'aire des différentes surfaces à peindre.

Le profil du module de skateboard a été modélisé à partir d'une photo par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 20]$ par

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère (O, I, J).



Partie 1

1. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 20]$, on a $f'(x) = \ln(x+1) - 2$.

2. En déduire les variations de f sur l'intervalle $[0\ ;\ 20]$ et dresser son tableau de variation.

3. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
La valeur absolue de ce coefficient est appelée l'inclinaison du module de skateboard au point B.

4. On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 20]$ par $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$ a pour dérivée la fonction g' définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 20]$ par $g'(x) = (x+1)\ln(x+1)$.
Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 20]$.

Partie 2

Les trois questions de cette partie sont indépendantes.

1. Les propositions suivantes sont-elles exactes ? Justifier les réponses.

P1 : La différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est au moins égale à 8 mètres.

P2 : L'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C.

2. On souhaite recouvrir les quatre faces latérales de ce module d'une couche de peinture rouge. La peinture utilisée permet de couvrir une surface de 5 m² par litre.

Déterminer, à 1 litre près, le nombre minimum de litres de peinture nécessaires.

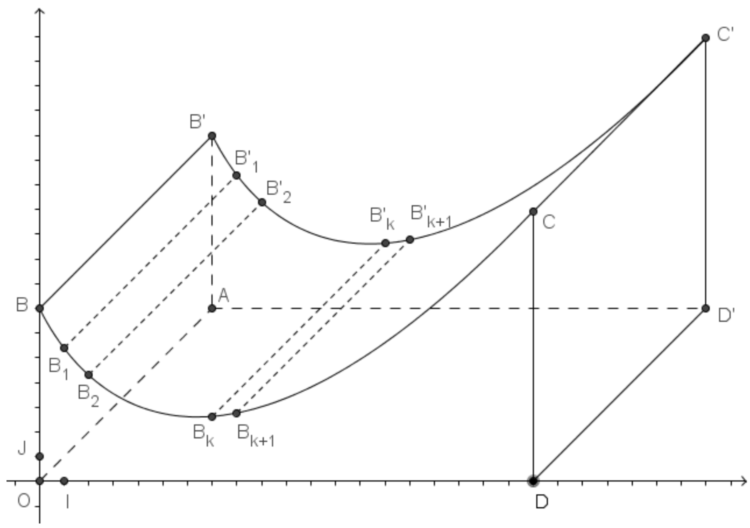
3. On souhaite peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module.

Afin de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie à peindre, on considère dans le repère (O, I, J) du plan de face, les points $B_k(k; f(k))$ pour k variant de 0 à 20.

Ainsi, $B_0 = B$.

On décide d'approcher l'arc de la courbe $\mathscr{C}$ allant de B_k à B_{k+1} par le segment $[B_kB_{k+1}]$.

Ainsi l'aire de la surface à peindre sera approchée par la somme des aires des rectangles du type $B_k\ B_{k+1}\ B'_{k+1}\ B'_k$ (voir figure).



a. Montrer que pour tout entier k variant de 0 à 19, $B_kB_{k+1} = \sqrt{1 + (f(k+1) - f(k))^2}$.

b. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche une estimation de l'aire de la partie roulante.

Variables Fonction	S: réel K: entier f : définie par $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$
Traitement	S prend pour valeur 0 Pour K variant de …… à …… S prend pour valeur ………………….. Fin Pour
Sortie	Afficher …..

Corrigé du bac 2015 : Mathématiques Obligatoire Série S – Métropole

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2015

MATHEMATIQUES

Série S

ÉPREUVE DU LUNDI 22 JUIN 2015

Enseignement Obligatoire *Coefficient : 7*

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site www.sujetdebac.fr

Exercice 1 (6 points)

Partie 1

1. a. $P(c \le X \le d) = \int_c^d (\lambda e^{-\lambda x})dx$

$P(c \le X \le d) = \left[-e^{-\lambda x}\right]_c^d = -e^{-\lambda d} - (-e^{-\lambda c})$

$P(c \le X \le d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$

b. $P(X > 20) = 1 - P(X \le 20)$

$P(X > 20) = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{20} = 1 - (e^{-0\lambda} - e^{-20\lambda})$

$P(X > 20) = 1 - (1 - e^{-20\lambda}) = 1 - 1 + e^{-20\lambda}$

$P(X > 20) = e^{-20\lambda}$

On veut que P(X>20)=0,05.

$P(X > 20) = 0{,}05 \Leftrightarrow e^{-20\lambda} = 0{,}05$

$\ln(e^{-20\lambda}) = \ln(0{,}05)$

$-20\lambda = \ln(0{,}05)$

$\lambda = \dfrac{\ln(0{,}05)}{-20}$

$\lambda \approx 0{,}150$

c. On sait que $E(x) = \dfrac{1}{\lambda}$

Donc $E(x) = \dfrac{1}{0{,}150}$

$E(x) \approx 6{,}667$

d. $P(10 \le X \le 20) = e^{-10\times 0{,}15} - e^{-20\times 0{,}15}$

$P(10 \le X \le 20) = e^{-1{,}5} - e^{-3}$

$P(10 \le X \le 20) \simeq 0{,}173$

e. $P(X > 18) = 1 - P(X \le 20)$

$P(X > 18) = 1 - (e^{-0\times 0{,}15} - e^{-18\times 0{,}15})$

$P(X > 18) = 1 - (1 - e^{-2{,}7})$

$P(X > 18) = e^{-2{,}7} \simeq 0{,}067$

2. a. $P(20 \le X \le 21) \simeq 0{,}015$

b. $P((Y < 11) \cup (Y > 21)) = P(Y < 11) + P(Y > 21) - P((Y < 11) \cap (Y > 21))$

$P((Y < 11) \cup (Y > 21)) \simeq 0{,}01$

Partie 2

1. X représente la valeur du bon d'achat; R et V représentent la couleur du bon d'achat. $P_R(X \ge 30)$ représente la probabilité d'avoir un bon d'achat de valeur supérieure ou égale à 30€ sachant qu'il est rouge.

$P_R(X \geq 30) = P_R(X = 30) + P_R(X = 100) = 0{,}015 + 0{,}010 = 0{,}025$

2. $P(X \geq 30) = P((X \geq 30) \cap (R)) + P((X \geq 30) \cap (V))$

$P(X \geq 30) = P_R(X \geq 30) \times P(R) + P_V(X \geq 30) \times P(V)$

$P(X \geq 30) = 0{,}025 \times 0{,}25 + 0{,}067 \times 0{,}75$

$P(X \geq 30) = 0{,}0565 \simeq 0{,}057$

3. Nous avons : n=200 (>30) ; np=200×0,057=11,4 (>5) ; n×(1-p)=200×0,943=188,6 (>5).

Nous pouvons donc appliquer la formule de l'intervalle de fluctuation :

$$I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

$$I = \left[0{,}057 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}057 \times 0{,}943}}{\sqrt{200}} ; 0{,}057 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}057 \times 0{,}943}}{\sqrt{200}} \right]$$

$$I \simeq [0{,}0248 ; 0{,}0892]$$

(On arrondit les bornes afin de ne pas perdre de valeurs : 0,02486->0,0248 et 0,08913->0,0892).

Or en réalité 6 clients sur 200 ont reçu un bon d'achat de valeur supérieure ou égale à 30€, ce qui correspond à une fréquence observée de 0,03; $0{,}03 \in I$, les doutes du directeur ne sont donc pas justifiés (au seuil de 95%).

Exercice 2 (3 points)

1. **a.** Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ -1-(-1) \\ 5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, il est donc parallèle à l'axe (OI) car il a un déplacement nul sur les deux autres axes de l'espace, et se déplace seulement selon l'axe des abscisses.

b. La droite (CD) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \\ z_D - z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11-11 \\ 4-0 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, ce vecteur a un déplacement nul selon l'axe des abscisses et se déplace uniquement selon les axes (OJ) et (OK), donc dans un plan parallèle au plan (OJK).

Comme le plan $\mathscr{P}$ est parallèle à (OJK), tous ses points ont la même abscisse : x=11. Le plan $\mathscr{P}$ regroupe tous les points d'abscisse 11, et une équation de $\mathscr{P}$ est x=11.

c. Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_E - x_A \\ y_E - y_A \\ z_E - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11-0 \\ -1-(-1) \\ 5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, il est donc colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ ($\overrightarrow{AE} = \frac{11}{2}\overrightarrow{AB}$), les points A, B et E sont donc alignés, donc E∈(AB).

L'équation du plan $\mathscr{P}$ étant x=11, et E vérifiant x=11, E∈$\mathscr{P}$.

(AB) est parallèle à l'axe (OI) alors que $\mathscr{P}$ est parallèle au plan (OJK), et comme l'axe (OI) est perpendiculaire au plan (OJK) (repère orthonormé), (AB) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$ en un seul et unique point : E.

d. Une équation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = x_A + tx_{\overrightarrow{AB}} \\ y = y_A + ty_{\overrightarrow{AB}} \\ z = z_A + tz_{\overrightarrow{AB}} \end{cases} = \begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = -1 + 0t \\ z = 5 + 0t \end{cases} = \begin{cases} x = 2t \\ y = -1 \\ z = 5 \end{cases}$ avec t∈$\mathbb{R}$.

Une équation paramétrique de la droite (CD) est $\begin{cases} x = x_C + t'x_{\overrightarrow{CD}} \\ y = y_C + t'y_{\overrightarrow{CD}} \\ z = z_C + t'z_{\overrightarrow{CD}} \end{cases} = \begin{cases} x = 11 + 0t' \\ y = 0 + 4t' \\ z = 1 + 3t' \end{cases} = \begin{cases} x = 11 \\ y = 4t' \\ z = 1 + 3t' \end{cases}$ avec t'∈$\mathbb{R}$.

Si les droites (AB) et (CD) sont sécantes, alors il existe des points qui vérifient les deux équations à la fois. Donc $\begin{cases} 2t = 11 \\ -1 = 4t' \\ 5 = 1 + 3t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{11}{2} \\ t' = -\dfrac{1}{4} \\ t' = \dfrac{4}{3} \end{cases}$. On trouve deux *t'* différents, les droites (AB) et (CD) ne sont donc pas sécantes.

2. a. $M_tN_t = \sqrt{(x_{N_t} - x_{M_t})^2 + (y_{N_t} - y_{M_t})^2 + (z_{N_t} - z_{M_t})^2}$

$M_tN_t^2 = (x_{N_t} - x_{M_t})^2 + (y_{N_t} - y_{M_t})^2 + (z_{N_t} - z_{M_t})^2$

$M_tN_t^2 = (11 - t)^2 + (0{,}8t - (-1))^2 + (1 + 0{,}6t - 5)^2$

$M_tN_t^2 = (11^2 - 22t + t^2) + (0{,}64t^2 + 1{,}6t + 1^2) + (0{,}36t^2 - 4{,}8t + 4^2)$

$M_tN_t^2 = 121 - 22t + t^2 + 0{,}64t^2 + 1{,}6t + 1 + 0{,}36t^2 - 4{,}8t + 16$

$M_tN_t^2 = 2t^2 - 25{,}2t + 138$

b. L'expression est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, a est positif donc la courbe représentative est d'abord décroissante puis croissante, et admet un minimum en : $t = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-25{,}2)}{2 \times 2} = \dfrac{25{,}2}{4} = 6{,}3s$.

La valeur du minimum est $f(6{,}3) = 2 \times 6{,}3^2 - 25{,}2 \times 6{,}3 + 138$

$f(6{,}3) = 58{,}62$

Exercice 3 (5 points)

1. $z^2 - 8z + 64 = 0$

L'équation est sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, on peut donc calculer le discriminant :

$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 64 = -192$

Le discriminant est négatif, donc il n'existe pas de solution dans $\mathbb{R}$; on peut trouver des solutions dans $\mathbb{C}$.

Les solutions sont de la forme : $z = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Ainsi : $z_1 = \dfrac{8 - i\sqrt{192}}{2} = \dfrac{8 - 8i\sqrt{3}}{2} = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $z_2 = \dfrac{8 + i\sqrt{192}}{2} = \dfrac{8 + 8i\sqrt{3}}{2} = 4 + 4i\sqrt{3}$.

2. **a.** Module de a: $|a| = \sqrt{x^2 + y^2}$ avec $a = x + iy$, donc $|a| = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16+48} = \sqrt{64} = 8$.

Argument de a : $a = |a|(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Or $|a| = 8$ et $a = 4 + 4i\sqrt{3} = |a|(\cos\theta + i\sin\theta) = 8 \times (\frac{4}{8} + \frac{4i\sqrt{3}}{8}) = 8 \times (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2})$.

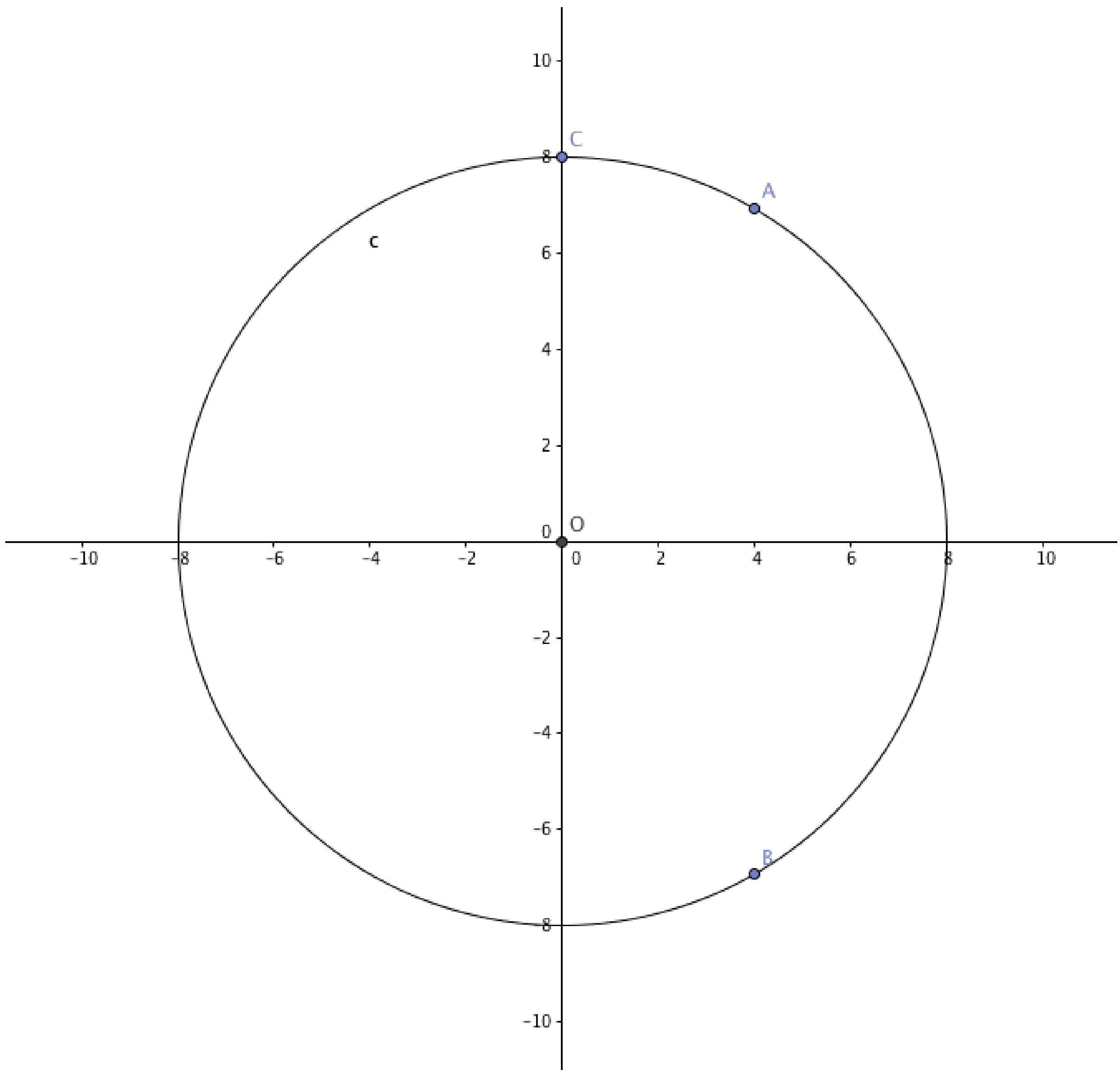
L'angle θ correspondant, ayant pour cosinus $\frac{1}{2}$ et pour sinus $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est $\frac{\pi}{3}$, donc $\arg(a) = \frac{\pi}{3}$.

b. a peut s'écrire sous la forme exponentielle : $a = |a|e^{i\times\arg(a)}$ donc $a = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b étant le conjugué de a, il peut s'écrire : $b = 8e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

c. $|a| = |b| = 8$, et $|c| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0^2 + 8^2} = 8$; les points A, B et C sont donc équidistants du point O (centre du repère) ; ils appartiennent donc au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 8.

d.



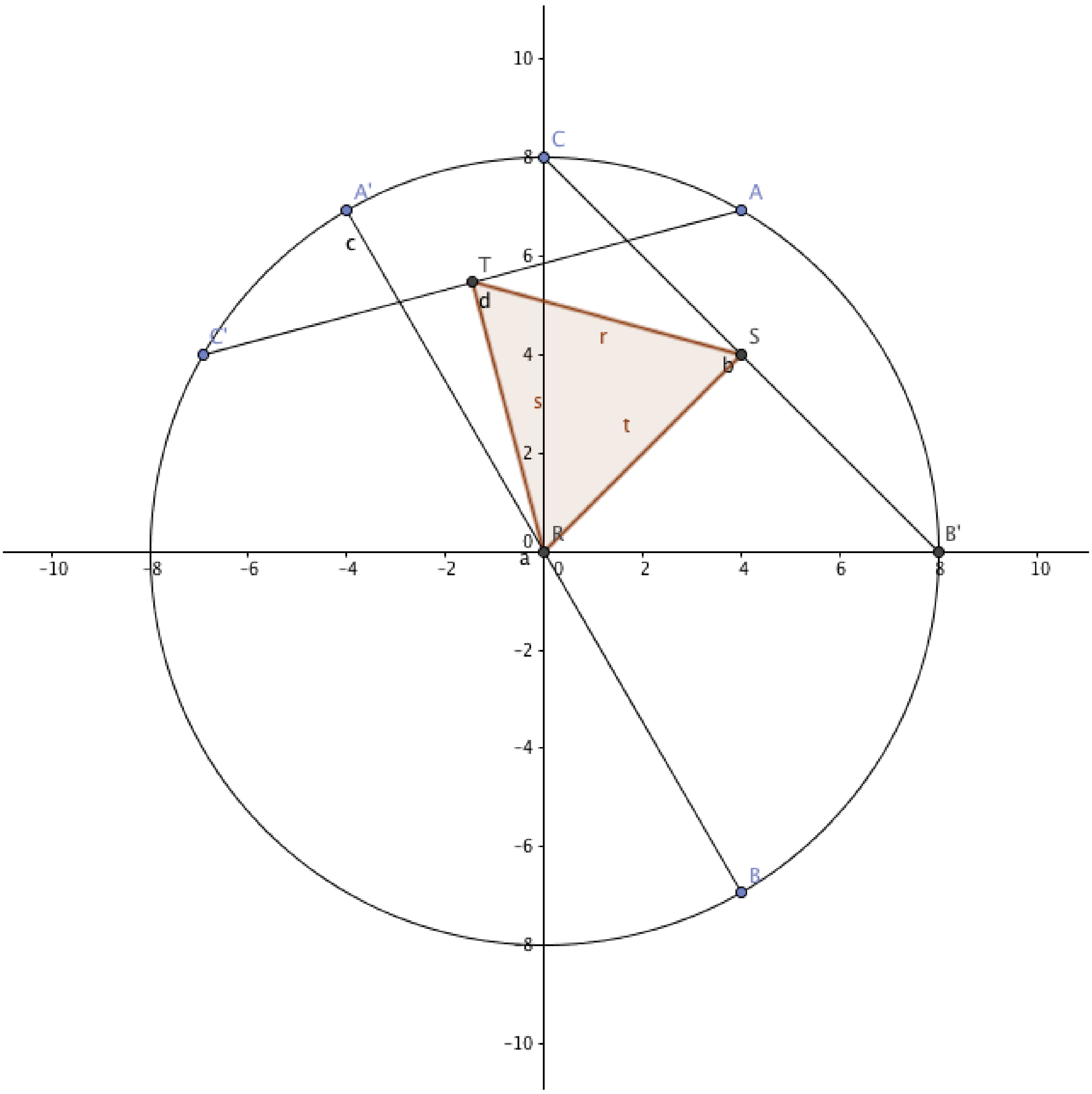
3. **a.** $b' = be^{i\frac{\pi}{3}} = 8e^{-i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = 8e^{-i\frac{\pi}{3}+i\frac{\pi}{3}} = 8e^{0} = 8$.

b. $a' = ae^{i\frac{\pi}{3}} = 8e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = 8e^{i\frac{\pi}{3}+i\frac{\pi}{3}} = 8e^{i\frac{2\pi}{3}}$, donc $|a'| = 8$ et $\arg(a') = \dfrac{2\pi}{3}$.

4. **a.** R est le milieu de [A'B], donc $r = \dfrac{a'+b}{2} = \dfrac{-4+4i\sqrt{3}+4-4i\sqrt{3}}{2} = 0$.

S est le milieu de [B'C], donc $s = \dfrac{b'+c}{2} = \dfrac{8+8i}{2} = 4+4i$.

b.



On peut conjecturer que le triangle RST est un triangle équilatéral.
Pour le prouver, on calcule les longueurs de [RS], [ST] et [TR].

[RS]$=|s-r| = |4+4i-0| = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$[ST]=|t-s|=|2-2\sqrt{3}+i(2+2\sqrt{3})-(4+4i)|=|-2-2\sqrt{3}+i(-2+2\sqrt{3})|=\sqrt{(-2-2\sqrt{3})^2+(-2+2\sqrt{3})^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$[TR]=|r-t|=|0-(2-2\sqrt{3}+i(2+2\sqrt{3}))|=|-2+2\sqrt{3}-i(2+2\sqrt{3}))|=\sqrt{(-2+2\sqrt{3})^2+(-2-2\sqrt{3})^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

[RS]=[ST]=[TR], le triangle RST est donc bien équilatéral.

Exercice 4 (6 points)

Partie 1

1. $f(x)=(x+1)\ln(x+1)-3x+7$

Soit $u=x+1$ et $v=\ln(x+1)$; $u'=1$ et $v'=\dfrac{1}{x+1}$; on sait que $(uv)'=u'v+uv'$, donc :

$((x+1)\ln(x+1))'=1\times\ln(x+1)+\dfrac{x+1}{x+1}=\ln(x+1)+1$.

x	**0**		e^2-1		**20**
f'(x)		-	0	+	
f(x)	7	↘	2,61	↗	10,94

Donc $f'(x)=\ln(x+1)+1-3=\ln(x+1)-2$.

2. On étudie les variations de la fonction *f* sur l'intervalle [0;20] ; pour cela on étudie le signe de la dérivée :
$f'(x)>0 \Leftrightarrow \ln(x+1)-2>0 \Leftrightarrow \ln(x+1)>2 \Leftrightarrow x+1>e^2 \Leftrightarrow x>e^2-1\simeq 6,39$

Donc pour $x\in\left]e^2-1;20\right]$ *f'* est positive ; pour $x\in\left[0;e^2-1\right[$ *f'* est négative ; *f'* s'annule en e^2-1.

On dresse le tableau de variation de la fonction *f* :

3. Le coefficient de la tangente en 0 est *f'*(0).
$f'(0)=\ln(0+1)-2=\ln(1)-2=-2$.

4. On sait que la fonction $g'(x)=(x+1)\ln(x+1)$ a pour primitive la fonction *g* :
$g(x)=\dfrac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1)-\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}x$.

Or $f(x)=g'(x)-3x+7$, donc une primitive de *f* est : $F(x)=g(x)+\int -3x+7=g(x)-\dfrac{3}{2}x^2+7x$.

Donc $F(x)=\dfrac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1)-\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}x^2+7x=\dfrac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1)-\dfrac{7}{4}x^2+\dfrac{13}{2}x$.

Partie 2

1. P1 : La différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est au moins égale à 8 mètres : VRAI.

Le minimum de la courbe est atteint en l'abscisse $x=e^2-1$; le maximum est atteint en 20.

f(20)-*f*(e^2-1)=8,32m.

P2 : L'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C : VRAI.

Le coefficient directeur de la tangente en B est -2 (cf **Partie 1-3**).

Le coefficient directeur de la tangente en C est *f'*(20)=ln(20+1)-2=ln(21)-2=1,04.

$\dfrac{f'(0)}{f'(20)} = 1{,}92 \simeq 2$.

2. Calcul de la surface à peindre (somme des aires des faces latérales) :

$\mathscr{A}=\mathscr{A}_{OAB'B}+\mathscr{A}_{DD'C'C}+2\mathscr{A}_{ODCB}$

$\mathscr{A}_{OAB'B}=OB\times OA=7\times 10=70m^2$
$\mathscr{A}_{DD'C'C}=CD\times DD'=10{,}94\times 10=109{,}4m^2$

Pour le calcul de $\mathscr{A}_{ODCB}$, on utilise l'intégrale de la fonction f représentant le profil du module de skateboard.

$$\mathscr{A}_{ODCB}=\left[\frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1)-\frac{7}{4}x^2+\frac{13}{2}x\right]_0^{20}$$

$$\mathscr{A}_{ODCB}=\frac{1}{2}(21)^2\ln(21)-\frac{7}{4}\times 20^2+\frac{13}{2}\times 20-\left[\frac{1}{2}(1)^2\ln(1)-\frac{7}{4}\times 0^2+\frac{13}{2}\times 0\right]$$

$$\mathscr{A}_{ODCB}=\frac{441}{2}\ln(21)-700+130-[0]$$

$\mathscr{A}_{ODCB}=101{,}3m^2$

Donc $\mathscr{A}=70+109{,}4+2\times 101{,}3=382{,}0m^2$.
Il faut 1L de peinture pour peindre $5m^2$: pour calculer le nombre de litres nécessaires, on divise $\mathscr{A}$ par 5.
$V=\dfrac{382}{5}=76{,}4L$, il faut donc 77 litres de peinture au minimum pour peindre les faces latérales du module.

3. a. $B_kB_{k+1}=\sqrt{(x_{B_{k+1}}-x_{B_k})^2+(y_{B_{k+1}}-y_{B_k})^2}$

$B_kB_{k+1}=\sqrt{(k+1-k)^2+(f(k+1)-f(k))^2}$

$B_kB_{k+1}=\sqrt{1+(f(k+1)-f(k))^2}$ pour tout entier k variant de 0 à 19.

b. S prend la valeur 0
Pour k variant de 0 à 19
S prend la valeur $S+10\sqrt{1+(f(k+1)-f(k))^2}$
Afficher S

BACCALAUREAT GENERAL

Session 2015

MATHEMATIQUES

Série S

ÉPREUVE DU LUNDI 22 JUIN 2015

Enseignement Spécialité ***Coefficient : 9***

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8.
Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (6 points) Commun à tous les candidats

Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-3} près.

Partie 1

1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif donné.

On rappelle que la densité de probabilité de cette loi est la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

a. Soit c et d deux réels tels que $0 \leq c < d$.

Démontrer que la probabilité $P(c \leq X \leq d)$ vérifie $P(c \leq X \leq d) = \mathrm{e}^{-\lambda c} - \mathrm{e}^{-\lambda d}$.

b. Déterminer une valeur de λ à 10^{-3} près de telle sorte que la probabilité $P(X > 20)$ soit égale à 0,05.

c. Donner l'espérance de la variable aléatoire X.

Dans la suite de l'exercice on prend $\lambda = 0{,}15$.

d. Calculer $P(10 \leq X \leq 20)$.

e. Calculer la probabilité de l'événement $(X > 18)$.

2. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 16 et d'écart type 1,95.

a. Calculer la probabilité de l'événement $(20 \leq Y \leq 21)$.

b. Calculer la probabilité de l'événement $(Y < 11) \cup (Y > 21)$.

Partie 2

Une chaîne de magasins souhaite fidéliser ses clients en offrant des bons d'achat à ses clients privilégiés. Chacun d'eux reçoit un bon d'achat de couleur verte ou rouge sur lequel est inscrit un montant.

Les bons d'achats sont distribués de façon à avoir, dans chaque magasin, un quart de bons rouges et trois quarts de bons verts.

Les bons d'achat verts prennent la valeur de 30 euros avec une probabilité égale à 0,067 ou des valeurs comprises entre 0 et 15 euros avec des probabilités non précisées ici.

De façon analogue, les bons d'achat rouges prennent les valeurs 30 ou 100 euros avec des probabilités respectivement égales à 0,015 et 0,010 ou des valeurs comprises entre 10 et 20 euros avec des probabilités non précisées ici.

1. Calculer la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros sachant qu'il est rouge.

2. Montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros vaut 0,057.

Pour la question suivante, on utilise cette valeur.

3. Dans un des magasins de cette chaîne, sur 200 clients privilégiés, 6 ont reçu un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 €.

Le directeur du magasin considéré estime que ce nombre est insuffisant et doute de la répartition au hasard des bons d'achats dans les différents magasins de la chaîne.
Ses doutes sont-ils justifiés ?

Exercice 2 (3 points) Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points $A(0\ ;\ -1\ ;5)$, $B(2\ ;\ -1\ ;5)$, $C(11\ ;\ 0\ ;1)$, $D(11\ ;\ 4\ ;4)$.

Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde.
Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.
À l'instant $t = 0$ le point M est en A et le point N est en C.
On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de *t* secondes, *t* désignant un nombre réel positif.

On admet que M_t et N_t ont pour coordonnées : $M_t(t\ ;\ -1\ ;5)$ et $N_t(11\ ;\ 0{,}8\,t\ ;1+0{,}6\,t)$.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1.

a. La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel ?

b. La droite (CD) se trouve dans un plan $\mathscr{P}$ parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK). Lequel ? On donnera une équation de ce plan $\mathscr{P}$.

c. Vérifier que la droite (AB), orthogonale au plan $\mathscr{P}$, coupe ce plan au point $E\ (11\ ;\ -1\ ;5)$.

d. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

2.

a. Montrer que $M_tN_t^{\,2} = 2\,t^2 - 25{,}2\,t + 138$.

b. À quel instant *t* la longueur M_tN_t est-elle minimale ?

Exercice 3 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

1. On considère l'équation (E) à résoudre dans **Z** : $7x-5y=1$.

a. Vérifier que le couple $(3\,;4)$ est solution de (E).

b. Montrer que le couple d'entiers $(x\,;y)$ est solution de (E) si et seulement si $7(x-3)=5(y-4)$.

c. Montrer que les solutions entières de l'équation (E) sont exactement les couples $(x\,;y)$ d'entiers relatifs tels que :

$$\begin{cases} x=5k+3 \\ y=7k+4 \end{cases} \quad \text{où } k\in\mathbf{Z}$$

2. Une boîte contient 25 jetons, des rouges, des verts et des blancs. Sur les 25 jetons il y a x jetons rouges et y jetons verts. Sachant que $7x-5y=1$, quels peuvent être les nombres de jetons rouges, verts et blancs ?

Dans la suite, on supposera qu'il y a 3 jetons rouges et 4 jetons verts.

3. On considère la marche aléatoire suivante d'un pion sur un triangle ABC. À chaque étape, on tire au hasard un des jetons parmi les 25, puis on le remet dans la boîte.

Lorsqu'on est en A :
Si le jeton tiré est rouge, le pion va en B. Si le jeton tiré est vert, le pion va en C. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en A.
Lorsqu'on est en B :
Si le jeton tiré est rouge, le pion va en A. Si le jeton tiré est vert, le pion va en C. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en B.
Lorsqu'on est en C :
Si le jeton tiré est rouge, le pion va en A. Si le jeton tiré est vert, le pion va en B. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en C.

Au départ, le pion est sur le sommet A.

Pour tout entier naturel *n*, on note a_n, b_n et c_n les probabilités que le pion soit respectivement sur les sommets A, B et C à l'étape *n*.

On note X_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ et T la matrice $\begin{pmatrix} 0{,}72 & 0{,}12 & 0{,}16 \\ 0{,}12 & 0{,}72 & 0{,}16 \\ 0{,}12 & 0{,}16 & 0{,}72 \end{pmatrix}$.

Donner la matrice ligne X_0 et montrer que pour tout entier naturel *n*, $X_{n+1}=X_nT$.

4. On admet que $T = PDP^{-1}$ où $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{37}{110} & \frac{4}{11} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}56 \end{pmatrix}$.

a. À l'aide de la calculatrice, donner les coefficients de la matrice P. On pourra remarquer qu'ils sont entiers.

b. Montrer que $T^n = PD^nP^{-1}$.

c. Donner sans justification les coefficients de la matrice D^n.

On note α_n, β_n, γ_n les coefficients de la première ligne de la matrice T^n ainsi :

$$T^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

On admet que $\alpha_n = \frac{3}{10} + \frac{7}{10} \times 0{,}6^n$ et $\beta_n = \frac{37 - 77 \times 0{,}6^n + 40 \times 0{,}56^n}{110}$.
On ne cherchera pas à calculer les coefficients de la deuxième ligne ni ceux de la troisième ligne.

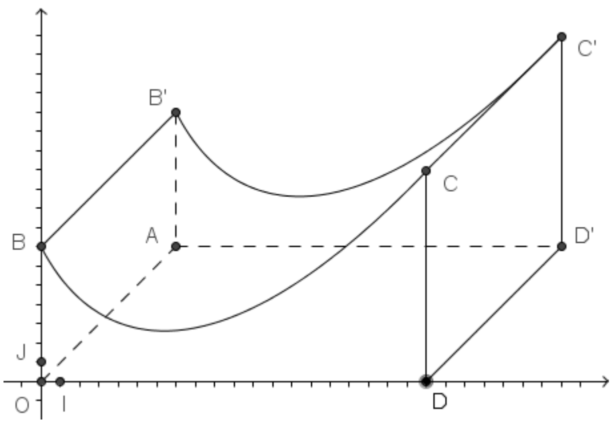
5. On rappelle que, pour tout entier naturel n, $X_n = X_0 T^n$.

a. Déterminer les nombres a_n, b_n à l'aide des coefficients α_n et β_n. En déduire c_n.

b. Déterminer les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

c. Sur quel sommet a-t-on le plus de chance de se retrouver après un grand nombre d'itérations de cette marche aléatoire ?

Exercice 4 **(6 points)** **Commun à tous les candidats**



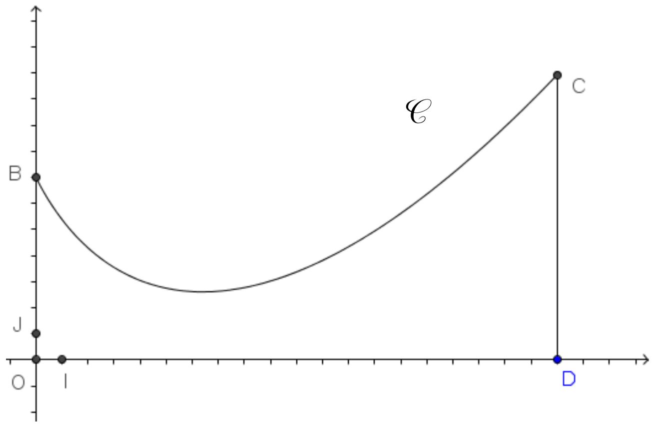
Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune.
Le dessin ci-contre en fournit une perspective cavalière. Les quadrilatères OAD'D, DD'C'C, et OAB'B sont des rectangles.
Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité est le mètre. La largeur du module est de 10 mètres, autrement dit, DD' = 10, sa longueur OD est de 20 mètres.

Le but du problème est de déterminer l'aire des différentes surfaces à peindre.

Le profil du module de skateboard a été modélisé à partir d'une photo par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 20]$ par

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère (O, I, J).



Partie 1

1. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 20]$, on a $f'(x) = \ln(x+1) - 2$.

2. En déduire les variations de f sur l'intervalle $[0\ ;\ 20]$ et dresser son tableau de variation.

3. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
La valeur absolue de ce coefficient est appelée l'inclinaison du module de skateboard au point B.

4. On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 20]$ par $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$ a pour dérivée la fonction g' définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 20]$ par $g'(x) = (x+1)\ln(x+1)$.
Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 20]$.

Partie 2

Les trois questions de cette partie sont indépendantes.

1. Les propositions suivantes sont-elles exactes ? Justifier les réponses.

P1 : La différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est au moins égale à 8 mètres.

P2 : L'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C.

2. On souhaite recouvrir les quatre faces latérales de ce module d'une couche de peinture rouge. La peinture utilisée permet de couvrir une surface de 5 m² par litre.

Déterminer, à 1 litre près, le nombre minimum de litres de peinture nécessaires.

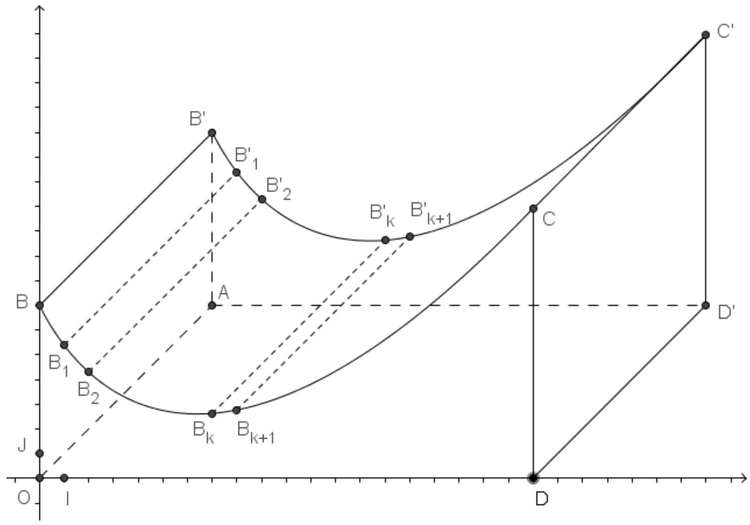
3. On souhaite peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module.

Afin de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie à peindre, on considère dans le repère (O, I, J) du plan de face, les points $B_k(k; f(k))$ pour k variant de 0 à 20.

Ainsi, $B_0 = B$.

On décide d'approcher l'arc de la courbe $\mathscr{C}$ allant de B_k à B_{k+1} par le segment $[B_kB_{k+1}]$.

Ainsi l'aire de la surface à peindre sera approchée par la somme des aires des rectangles du type $B_k\ B_{k+1}\ B'_{k+1}\ B'_k$ (voir figure).



a. Montrer que pour tout entier k variant de 0 à 19, $B_kB_{k+1} = \sqrt{1+(f(k+1)-f(k))^2}$.

b. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche une estimation de l'aire de la partie roulante.

Variables Fonction	S: réel K: entier f : définie par $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$
Traitement	S prend pour valeur 0 Pour K variant de …… à …… S prend pour valeur ………………….. Fin Pour
Sortie	Afficher …..

Corrigé du bac 2015 : Mathématiques Spécialité Série S – Métropole

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2015

MATHEMATIQUES

Série S

ÉPREUVE DU LUNDI 22 JUIN 2015

Enseignement Spécialité *Coefficient : 9*

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site www.sujetdebac.fr

Exercice 1 (6 points)

Partie 1

1. **a.** $P(c \leq X \leq d) = \int_c^d (\lambda e^{-\lambda x})dx$

$P(c \leq X \leq d) = \left[-e^{-\lambda x}\right]_c^d = -e^{-\lambda d} - (-e^{-\lambda c})$

$P(c \leq X \leq d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$

b. $P(X > 20) = 1 - P(X \leq 20)$

$P(X > 20) = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{20} = 1 - (e^{-0\lambda} - e^{-20\lambda})$

$P(X > 20) = 1 - (1 - e^{-20\lambda}) = 1 - 1 + e^{-20\lambda}$

$P(X > 20) = e^{-20\lambda}$

On veut que P(X>20)=0,05.

$P(X > 20) = 0{,}05 \Leftrightarrow e^{-20\lambda} = 0{,}05$

$\ln(e^{-20\lambda}) = \ln(0{,}05)$

$-20\lambda = \ln(0{,}05)$

$\lambda = \dfrac{\ln(0{,}05)}{-20}$

$\lambda \approx 0{,}150$

c. On sait que $E(x) = \dfrac{1}{\lambda}$

Donc $E(x) = \dfrac{1}{0{,}150}$

$E(x) \approx 6{,}667$

d. $P(10 \leq X \leq 20) = e^{-10\times 0{,}15} - e^{-20\times 0{,}15}$

$P(10 \leq X \leq 20) = e^{-1{,}5} - e^{-3}$

$P(10 \leq X \leq 20) \simeq 0{,}173$

e. $P(X > 18) = 1 - P(X \leq 20)$

$P(X > 18) = 1 - (e^{-0\times 0{,}15} - e^{-18\times 0{,}15})$

$P(X > 18) = 1 - (1 - e^{-2{,}7})$

$P(X > 18) = e^{-2{,}7} \simeq 0{,}067$

2. **a.** $P(20 \leq X \leq 21) \simeq 0{,}015$

b. $P((Y < 11) \cup (Y > 21)) = P(Y < 11) + P(Y > 21) - P((Y < 11) \cap (Y > 21))$

$P((Y < 11) \cup (Y > 21)) \simeq 0{,}01$

Partie 2

1. *X* représente la valeur du bon d'achat; *R* et *V* représentent la couleur du bon d'achat. $P_R(X \geq 30)$ représente la probabilité d'avoir un bon d'achat de valeur supérieure ou égale à 30€ sachant qu'il est rouge.

$P_R(X \geq 30) = P_R(X = 30) + P_R(X = 100) = 0{,}015 + 0{,}010 = 0{,}025$

2. $P(X \geq 30) = P((X \geq 30) \cap (R)) + P((X \geq 30) \cap (V))$

$P(X \geq 30) = P_R(X \geq 30) \times P(R) + P_V(X \geq 30) \times P(V)$

$P(X \geq 30) = 0{,}025 \times 0{,}25 + 0{,}067 \times 0{,}75$

$P(X \geq 30) = 0{,}0565 \simeq 0{,}057$

3. Nous avons : n=200 (>30) ; np=200×0,057=11,4 (>5) ; n×(1-p)=200×0,943=188,6 (>5).

Nous pouvons donc appliquer la formule de l'intervalle de fluctuation :

$$I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

$$I = \left[0{,}057 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}057 \times 0{,}943}}{\sqrt{200}} ; 0{,}057 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}057 \times 0{,}943}}{\sqrt{200}} \right]$$

$$I \simeq [0{,}0248 ; 0{,}0892]$$

(On arrondit les bornes afin de ne pas perdre de valeurs : 0,02486->0,0248 et 0,08913->0,0892).

Or en réalité 6 clients sur 200 ont reçu un bon d'achat de valeur supérieure ou égale à 30€, ce qui correspond à une fréquence observée de 0,03; $0{,}03 \in I$, les doutes du directeur ne sont donc pas justifiés (au seuil de 95%).

Exercice 2 (3 points)

1. a. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ -1-(-1) \\ 5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, il est donc parallèle à l'axe (OI) car il a un déplacement nul sur les deux autres axes de l'espace, et se déplace seulement selon l'axe des abscisses.

b. La droite (CD) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \\ z_D - z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11-11 \\ 4-0 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, ce vecteur a un déplacement nul selon l'axe des abscisses et se déplace uniquement selon les axes (OJ) et (OK), donc dans un plan parallèle au plan (OJK).

Comme le plan $\mathscr{P}$ est parallèle à (OJK), tous ses points ont la même abscisse : x=11. Le plan $\mathscr{P}$ regroupe tous les points d'abscisse 11, et une équation de $\mathscr{P}$ est x=11.

c. Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_E - x_A \\ y_E - y_A \\ z_E - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11-0 \\ -1-(-1) \\ 5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, il est donc colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ ($\overrightarrow{AE} = \frac{11}{2}\overrightarrow{AB}$), les points A, B et E sont donc alignés, donc E$\in$(AB).

L'équation du plan $\mathscr{P}$ étant x=11, et E vérifiant x=11, E$\in \mathscr{P}$.

(AB) est parallèle à l'axe (OI) alors que $\mathscr{P}$ est parallèle au plan (OJK), et comme l'axe (OI) est perpendiculaire au plan (OJK) (repère orthonormé), (AB) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$ en un seul et unique point : E.

d. Une équation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = x_A + tx_{\overrightarrow{AB}} \\ y = y_A + ty_{\overrightarrow{AB}} \\ z = z_A + tz_{\overrightarrow{AB}} \end{cases} = \begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = -1 + 0t \\ z = 5 + 0t \end{cases} = \begin{cases} x = 2t \\ y = -1 \\ z = 5 \end{cases}$ avec t∈ℝ.

Une équation paramétrique de la droite (CD) est $\begin{cases} x = x_C + t'x_{\overrightarrow{CD}} \\ y = y_C + t'y_{\overrightarrow{CD}} \\ z = z_C + t'z_{\overrightarrow{CD}} \end{cases} = \begin{cases} x = 11 + 0t' \\ y = 0 + 4t' \\ z = 1 + 3t' \end{cases} = \begin{cases} x = 11 \\ y = 4t' \\ z = 1 + 3t' \end{cases}$ avec t'∈ℝ.

Si les droites (AB) et (CD) sont sécantes, alors il existe des points qui vérifient les deux équations à la fois. Donc $\begin{cases} 2t = 11 \\ -1 = 4t' \\ 5 = 1 + 3t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{11}{2} \\ t' = -\dfrac{1}{4} \\ t' = \dfrac{4}{3} \end{cases}$. On trouve deux *t'* différents, les droites (AB) et (CD) ne sont donc pas sécantes.

2. **a.** $M_tN_t = \sqrt{(x_{N_t} - x_{M_t})^2 + (y_{N_t} - y_{M_t})^2 + (z_{N_t} - z_{M_t})^2}$

$M_tN_t^{\,2} = (x_{N_t} - x_{M_t})^2 + (y_{N_t} - y_{M_t})^2 + (z_{N_t} - z_{M_t})^2$

$M_tN_t^{\,2} = (11 - t)^2 + (0,8t - (-1))^2 + (1 + 0,6t - 5)^2$

$M_tN_t^{\,2} = (11^2 - 22t + t^2) + (0,64t^2 + 1,6t + 1^2) + (0,36t^2 - 4,8t + 4^2)$

$M_tN_t^{\,2} = 121 - 22t + t^2 + 0,64t^2 + 1,6t + 1 + 0,36t^2 - 4,8t + 16$

$M_tN_t^{\,2} = 2t^2 - 25,2t + 138$

b. L'expression est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, a est positif donc la courbe représentative est d'abord décroissante puis croissante, et admet un minimum en : $t = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-25,2)}{2 \times 2} = \dfrac{25,2}{4} = 6,3s$.

La valeur du minimum est $f(6,3) = 2 \times 6,3^2 - 25,2 \times 6,3 + 138$

$f(6,3) = 58,62$

Exercice de spécialité (5 points)

1. **a.** $7x - 5y = 1$

$7 \times 3 - 5 \times 4 = 21 - 20 = 1$

Le couple (3;4) est donc bien solution de l'équation.

b. $7x - 5y = 1$, or $7 \times 3 - 5 \times 4 = 1$ donc $7x - 5y = 7 \times 3 - 5 \times 4$ si (*x*;*y*) sont des solutions de l'équation.

$7x - 7 \times 3 = 5y - 5 \times 4$

$7(x - 3) = 5(y - 4)$

c. 7 est un diviseur de 5(*y*-4). Or 5 et 7 sont premiers entre eux, donc 7 est un diviseur de (*y*-4).

Il existe donc un nombre entier relatif k tel que y-4=7k.

5 est un diviseur de 7(x-3). Or 5 et 7 sont premiers entre eux, donc 5 est un diviseur de (x-3).
Il existe donc un nombre entier relatif k' tel que x-3=5k'.

$$7(x-3)=5(y-4) \Leftrightarrow 7\times 5k'=5\times 7k \Leftrightarrow k=k'$$

Donc $\begin{cases} x-3=5k \\ y-4=7k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5k+3 \\ y=7k+4 \end{cases}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

2. On sait qu'il y a 25 jetons de trois couleurs en tout. de plus, 7x-5y=1, donc comme montré à la question **1. c.**, $\begin{cases} x=5k+3 \\ y=7k+4 \end{cases}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Si k=0, $\begin{cases} x=5\times 0+3 \\ y=7\times 0+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$: une des possibilités est donc : 3 jetons rouges, 4 jetons verts et 18 jetons blancs (25-(3+4)=25-7=18).

Si k=1, $\begin{cases} x=5\times 1+3 \\ y=7\times 1+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=11 \end{cases}$: une autre possibilité est donc 8 jetons rouges, 11 jetons verts et 6 jetons blancs (25-(8+11)=25-19=6).

Si k=2, $\begin{cases} x=5\times 2+3 \\ y=7\times 2+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=13 \\ y=18 \end{cases}$: x+y=13+18=31>25, il n'y a donc plus de solutions pour k≥2, car on a seulement 25 jetons.

Donc :
- soit 3 jetons rouges, 4 jetons verts et 18 jetons blancs.
- soit 8 jetons rouges, 11 jetons verts et 6 jetons blancs.

3. $X_0=\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ car les pions sont tous en A au départ.

Pour arriver en X_1, on retranscrit les règles de la marche aléatoire :

$$\begin{cases} a_1=a_0\times p(B)+b_0\times p(R)+c_0\times p(R) \\ b_1=a_0\times p(R)+b_0\times p(B)+c_0\times p(V) \\ c_1=a_0\times p(V)+b_0\times p(V)+c_0\times p(B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=a_0\times\dfrac{18}{25}+b_0\times\dfrac{3}{25}+c_0\times\dfrac{3}{25} \\ b_1=a_0\times\dfrac{3}{25}+b_0\times\dfrac{18}{25}+c_0\times\dfrac{4}{25} \\ c_1=a_0\times\dfrac{4}{25}+b_0\times\dfrac{4}{25}+c_0\times\dfrac{18}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=0{,}72a_0+0{,}12b_0+0{,}12c_0 \\ b_1=0{,}12a_0+0{,}72b_0+0{,}16c_0 \\ c_1=0{,}16a_0+0{,}16b_0+0{,}72c_0 \end{cases}$$

De même, $\begin{cases} a_{n+1}=0{,}72a_n+0{,}12b_n+0{,}12c_n \\ b_{n+1}=0{,}12a_n+0{,}72b_n+0{,}16c_n \\ c_{n+1}=0{,}16a_n+0{,}16b_n+0{,}72c_n \end{cases}$, d'où

$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}72 & 0{,}12 & 0{,}16 \\ 0{,}12 & 0{,}72 & 0{,}16 \\ 0{,}12 & 0{,}16 & 0{,}72 \end{pmatrix}$, donc $X_{n+1}=X_n\times T$.

4. a. A la calculatrice, on obtient $P=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$.

b. Initialisation : On sait que $T=PDP^{-1}$, donc $T^1=PD^1P^{-1}$.

Récurrence : Supposons que $T^n = PD^nP^{-1}$ à l'ordre n, on a alors : $T^{n+1} = T^n \times T$.

$$T^{n+1} = PD^nP^{-1} \times T = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^n \times (P^{-1} \times P) \times DP^{-1} = PD^n \times (P^{-1+1}) \times DP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

Donc, par récurrence, on a démontré que $T^n = PD^nP^{-1}$.

c. Nous savons que $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,56 \end{pmatrix}$, donc $D^n = \begin{pmatrix} 1^n = 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6^n & 0 \\ 0 & 0 & 0,56^n \end{pmatrix}$.

5. a. Nous savons que $X_n = X_0 T^n$.

On sait que $T = \begin{pmatrix} 0,72 & 0,12 & 0,16 \\ 0,12 & 0,72 & 0,16 \\ 0,12 & 0,16 & 0,72 \end{pmatrix}$, et on pose $\alpha = 0,72$, $\beta = 0,12$ et $\gamma = 0,16$.

Donc $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \alpha & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$, ainsi $T_n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \beta_n & \alpha_n & \gamma_n \\ \beta_n & \gamma_n & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Donc $\begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \beta_n & \alpha_n & \gamma_n \\ \beta_n & \gamma_n & \alpha_n \end{pmatrix}$.

D'où les équations suivantes : $\begin{cases} a_n = a_0 \times \alpha_n + b_0 \times \beta_n + c_0 \times \beta_n \\ b_n = a_0 \times \beta_n + b_0 \times \alpha_n + c_0 \times \gamma_n \\ b_n = a_0 \times \gamma_n + b_0 \times \gamma_n + c_0 \times \alpha_n \end{cases}$.

On sait que $\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on remplace :

$\begin{cases} a_n = 1 \times \alpha_n + 0 \times \beta_n + 0 \times \beta_n \\ b_n = 1 \times \beta_n + 0 \times \alpha_n + 0 \times \gamma_n \\ c_n = 1 \times \gamma_n + 0 \times \gamma_n + 0 \times \alpha_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \alpha_n \\ b_n = \beta_n \\ c_n = \gamma_n \end{cases}$, et $c_n = 1 - (a_n + b_n)$, ou alors $c_n = 1 - (\alpha_n + \beta_n)$.

b. $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(\alpha_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{10} + \frac{7}{10} \times 0,6^n\right) = \frac{3}{10} + \frac{7}{10} \times 0 = 0,3$

$\lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(\beta_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{37 - 77 \times 0,6^n + 40 \times 0,56^n}{110}\right) = \frac{37 - 0 + 0}{110} = \frac{37}{110} \simeq 0,34$

$\lim_{n\to\infty}(c_n) = 1 - (\lim(\alpha_n) + \lim(\beta_n)) = 1 - (0,3 + 0,34) = 1 - 0,64 = 0,36$

c. On a le plus de chances de se retrouver sur le sommet C après un grand nombre d'itérations de cette marche aléatoire car la limite de c_n est la plus élevée.

Exercice 4 (6 points)

Partie 1

1. $f(x)=(x+1)\ln(x+1)-3x+7$

Soit $u=x+1$ et $v=\ln(x+1)$; $u'=1$ et $v'=\dfrac{1}{x+1}$; on sait que $(uv)'=u'v+uv'$, donc :

$((x+1)\ln(x+1))'=1\times\ln(x+1)+\dfrac{x+1}{x+1}=\ln(x+1)+1$.

Donc $f'(x)=\ln(x+1)+1-3=\ln(x+1)-2$.

2. On étudie les variations de la fonction *f* sur l'intervalle [0;20] ; pour cela on étudie le signe de la dérivée :

$f'(x)>0\Leftrightarrow\ln(x+1)-2>0\Leftrightarrow\ln(x+1)>2\Leftrightarrow x+1>e^2\Leftrightarrow x>e^2-1\simeq 6,39$

Donc pour $x\in\left]e^2-1;20\right]$ *f'* est positive ; pour $x\in\left[0;e^2-1\right[$ *f'* est négative ; *f'* s'annule en e^2-1.

On dresse le tableau de variation de la fonction *f* :

x	**0**		e^2-1		**20**
f'(x)		-	0	+	
f(x)	7	↘	2,61	↗	10,94

3. Le coefficient de la tangente en 0 est *f'*(0).

$f'(0)=\ln(0+1)-2=\ln(1)-2=-2$.

4. On sait que la fonction $g'(x)=(x+1)\ln(x+1)$ a pour primitive la fonction *g* :

$g(x)=\dfrac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1)-\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}x$.

Or $f(x)=g'(x)-3x+7$, donc une primitive de *f* est : $F(x)=g(x)+\int -3x+7=g(x)-\dfrac{3}{2}x^2+7x$.

Donc $F(x)=\dfrac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1)-\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}x^2+7x=\dfrac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1)-\dfrac{7}{4}x^2+\dfrac{13}{2}x$.

Partie 2

1. P1 : La différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est au moins égale à 8 mètres : VRAI.

Le minimum de la courbe est atteint en l'abscisse $x=e^2-1$; le maximum est atteint en 20.

$f(20)-f(e^2-1)$=8,32m.

P2 : L'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C : VRAI.

Le coefficient directeur de la tangente en B est -2 (cf **Partie 1-3**).

Le coefficient directeur de la tangente en C est *f'*(20)=ln(20+1)-2=ln(21)-2=1,04.

$\dfrac{f'(0)}{f'(20)}=1,92\simeq 2$.

2. Calcul de la surface à peindre (somme des aires des faces latérales) :

$\mathscr{A}=\mathscr{A}_{OAB'B}+\mathscr{A}_{DD'C'C}+2\mathscr{A}_{ODCB}$

$\mathscr{A}_{OAB'B}$=OB×OA=7×10=70m^2

$\mathscr{A}_{DD'C'C}$=CD×DD'=10,94×10=109,4m^2

Pour le calcul de $\mathscr{A}_{ODCB}$, on utilise l'intégrale de la fonction *f* représentant le profil du module de skateboard.

$\mathscr{A}_{ODCB}=\left[\frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1)-\frac{7}{4}x^2+\frac{13}{2}x\right]_0^{20}$

$\mathscr{A}_{ODCB}=\frac{1}{2}(21)^2\ln(21)-\frac{7}{4}\times 20^2+\frac{13}{2}\times 20-\left[\frac{1}{2}(1)^2\ln(1)-\frac{7}{4}\times 0^2+\frac{13}{2}\times 0\right]$

$\mathscr{A}_{ODCB}=\frac{441}{2}\ln(21)-700+130-[0]$

$\mathscr{A}_{ODCB}$=101,3m^2

Donc $\mathscr{A}$=70+109,4+2×101,3=382,0m^2.

Il faut 1L de peinture pour peindre 5m^2 : pour calculer le nombre de litres nécessaires, on divise $\mathscr{A}$ par 5.

$V=\frac{382}{5}=76{,}4L$, il faut donc 77 litres de peinture au minimum pour peindre les faces latérales du module.

3. a. $B_kB_{k+1}=\sqrt{(x_{B_{k+1}}-x_{B_k})^2+(y_{B_{k+1}}-y_{B_k})^2}$

$B_kB_{k+1}=\sqrt{(k+1-k)^2+(f(k+1)-f(k))^2}$

$B_kB_{k+1}=\sqrt{1+(f(k+1)-f(k))^2}$ pour tout entier *k* variant de 0 à 19.

b. *S* prend la valeur 0
Pour *k* variant de 0 à 19
S prend la valeur $S+10\sqrt{1+(f(k+1)-f(k))^2}$
Afficher *S*

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2015

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 5

MATHÉMATIQUES – Série L

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 4

SUJET

Mercredi 24 Juin 2015

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 6 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE 1 – 6 points

Le service marketing d'un magasin de téléphonie a procédé à une étude du comportement de sa clientèle. Il a ainsi observé que celle-ci est composée de 42% de femmes. 35% des femmes qui entrent dans le magasin y effectuent un achat, alors que cette proportion est de 55% pour les hommes.

Une personne entre dans le magasin. On note :

- F l'événement : « La personne est une femme » ;
- R l'événement : « La personne repart sans rien acheter » ;

Pour tout événement A, on note $\bar{A}$ son événement contraire et $p(A)$ sa probabilité.

Dans tout l'exercice, donner des valeurs approchées des résultats au millième.
Les parties A, B et C peuvent être traitées de manière indépendante.

PARTIE A

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
2. Calculer la probabilité que la personne qui est entrée dans le magasin soit une femme et qu'elle reparte sans rien acheter.
3. Montrer que $p(R) = 0{,}534$.

PARTIE B

Un client du magasin s'inquiète de la durée de vie du téléphone de type T_1 qu'il vient de s'offrir.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque téléphone mobile de type T_1 prélevé au hasard dans la production, associe sa durée de vie, en mois.
On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 48$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

1. Justifier que la probabilité que le téléphone de type T_1 prélevé fonctionne plus de 3 ans, c'est-à-dire 36 mois, est d'environ 0,885.
2. On sait que le téléphone de type T_1 prélevé a fonctionné plus de 3 ans. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne moins de 5 ans ?

PARTIE C

Le gérant du magasin émet l'hypothèse que 30% des personnes venant au magasin achètent uniquement des accessoires (housse, chargeur…).
Afin de vérifier son hypothèse, le service marketing complète son étude.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la fréquence de personnes ayant uniquement acheté des accessoires dans un échantillon de taille 1 500.
2. Le service marketing interroge un échantillon de 1 500 personnes. L'étude indique que 430 personnes ont acheté uniquement des accessoires. Doit-on rejeter au seuil de 5% l'hypothèse formulée par le gérant ?

EXERCICE 2 – 5 points

Le fonctionnement de certaines centrales géothermiques repose sur l'utilisation de la chaleur du sous-sol. Pour pouvoir exploiter cette chaleur naturelle, il est nécessaire de creuser plusieurs puits suffisamment profonds.

Lors de la construction d'une telle centrale, on modélise le tarif pour le forage du premier puits par la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n non nul, par :
$u_n = 2\,000 \times 1{,}008^{n-1}$ où u_n représente le coût en euros du forage de la n-ième dizaine de mètres.
On a ainsi $u_1 = 2\,000$ et $u_2 = 2\,016$, c'est-à-dire que le forage des dix premiers mètres coûte 2 000 euros, et celui des dix mètres suivants coûte 2 016 euros.

Dans tout l'exercice, arrondir les résultats obtenus au centième.

1. Calculer u_3 puis le coût total de forage des 30 premiers mètres.
2. Pour tout entier naturel n non nul :
   a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et préciser la nature de la suite (u_n).
   b. En déduire le pourcentage d'augmentation du coût du forage de la $(n+1)$-ième dizaine de mètres par rapport à celui de la n-ième dizaine de mètres.
3. On considère l'algorithme ci-dessous :

```
INITIALISATION
u prend la valeur 2 000
S prend la valeur 2 000

TRAITEMENT
Saisir n
Pour i allant de 2 à n
        u prend la valeur u × 1,008
        S prend la valeur S + u
Fin Pour

SORTIE
Afficher S
```

La valeur de n saisie est 5.

   a. Faire fonctionner l'algorithme précédent pour cette valeur de n.

Résumer les résultats obtenus à chaque étape dans le tableau ci-dessous (à recopier sur la copie et à compléter en ajoutant autant de colonnes que nécessaire).

Valeur de i		2	
Valeur de u	2 000		
Valeur de S	2 000		

b. Quelle est la valeur de S affichée en sortie ? Interpréter cette valeur dans le contexte de cet exercice.

4. On note $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ la somme des n premiers termes de la suite (u_n), n étant un entier naturel non nul. On admet que :

$$S_n = -250\,000 + 250\,000 \times 1{,}008^n.$$

Le budget consenti pour le forage du premier puits est de 125 000 euros. On souhaite déterminer la profondeur maximale du puits que l'on peut espérer avec ce budget.

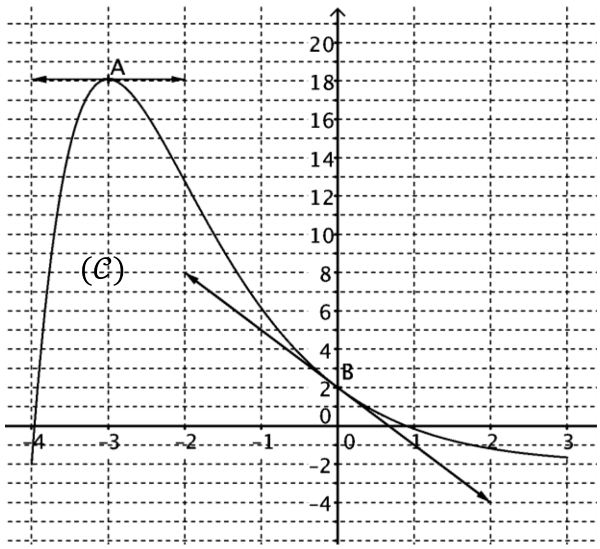
a. Calculer la profondeur maximale par la méthode de votre choix (utilisation de la calculatrice, résolution d'une inéquation...).

b. Modifier l'algorithme précédent afin qu'il permette de répondre au problème posé.

EXERCICE 3 – 6 points

La courbe $(\mathcal{C})$ ci-dessous représente dans un repère orthogonal une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\,;\,3]$. Les points A d'abscisse -3 et B$(0\,;\,2)$ sont sur la courbe $(\mathcal{C})$.

Sont aussi représentées sur ce graphique les tangentes à la courbe $(\mathcal{C})$ respectivement aux points A et B, la tangente au point A étant horizontale. On note f' la fonction dérivée de f.



Les PARTIES A et B sont indépendantes.

PARTIE A

1. Par lecture graphique, déterminer :
   a. $f'(-3)$;
   b. $f(0)$ et $f'(0)$.

2. La fonction f est définie sur $[-4\,;\,3]$ par $f(x) = a + (x+b)e^{-x}$ où a et b sont deux réels que l'on va déterminer dans cette partie.
   a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $[-4\,;\,3]$.
   b. À l'aide des questions 1.b. et 2.a., montrer que les nombres a et b vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 1 - b = -3 \end{cases}$$

   c. Déterminer alors les valeurs des nombres a et b.

PARTIE B

On admet que la fonction f est définie sur $[-4\,;\,3]$ par $f(x) = -2 + (x+4)e^{-x}$.

1. Justifier que, pour tout réel x de $[-4\,;\,3]$, $f'(x) = (-x-3)e^{-x}$ et en déduire le tableau de variation de f sur $[-4\,;\,3]$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-3\,;\,3]$, puis donner une valeur approchée de α à 0,01 près par défaut.

3. On souhaite calculer l'aire S, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -3$ et $x = 0$.
   a. Exprimer, en justifiant, cette aire à l'aide d'une intégrale.

b. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

```
1  F(x):=-2x+(-x-5)*exp(-x)
   // Interprète F
   // Succès lors de la compilation F
                                        x  ->-2*x+(-x-5)*exp(-x)
2  derive(F(x))
                                        -exp(-x)-exp(-x)*(-x-5)-2
3  simplifier(-exp(-x)-exp(-x)*(-x-5)-2)
                                        x*exp(-x)+4*exp(-x)-2
```

À l'aide de ces résultats, calculer la valeur exacte de l'aire S puis sa valeur arrondie au centième.

EXERCICE 4 – 3 points

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 3x - 3x\ln(x)$.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé et T la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

Quelle est la position relative de C_f par rapport à T ?

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2015

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

Mercredi 24 Juin 2015

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 6 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE 1 – 6 points

Le service marketing d'un magasin de téléphonie a procédé à une étude du comportement de sa clientèle. Il a ainsi observé que celle-ci est composée de 42% de femmes. 35% des femmes qui entrent dans le magasin y effectuent un achat, alors que cette proportion est de 55% pour les hommes.

Une personne entre dans le magasin. On note :

- F l'événement : « La personne est une femme » ;
- R l'événement : « La personne repart sans rien acheter » ;

Pour tout événement A, on note $\bar{A}$ son événement contraire et $p(A)$ sa probabilité.

Dans tout l'exercice, donner des valeurs approchées des résultats au millième.
Les parties A, B et C peuvent être traitées de manière indépendante.

PARTIE A

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
2. Calculer la probabilité que la personne qui est entrée dans le magasin soit une femme et qu'elle reparte sans rien acheter.
3. Montrer que $p(R) = 0{,}534$.

PARTIE B

Un client du magasin s'inquiète de la durée de vie du téléphone de type T_1 qu'il vient de s'offrir.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque téléphone mobile de type T_1 prélevé au hasard dans la production, associe sa durée de vie, en mois.
On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 48$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

1. Justifier que la probabilité que le téléphone de type T_1 prélevé fonctionne plus de 3 ans, c'est-à-dire 36 mois, est d'environ 0,885.
2. On sait que le téléphone de type T_1 prélevé a fonctionné plus de 3 ans. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne moins de 5 ans ?

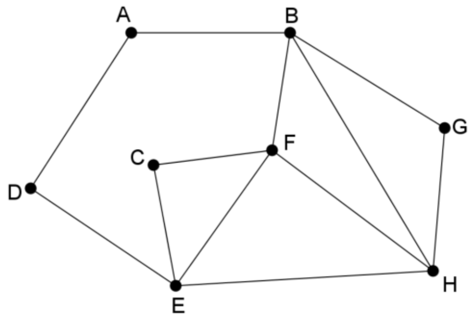
PARTIE C

Le gérant du magasin émet l'hypothèse que 30% des personnes venant au magasin achètent uniquement des accessoires (housse, chargeur…).
Afin de vérifier son hypothèse, le service marketing complète son étude.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la fréquence de personnes ayant uniquement acheté des accessoires dans un échantillon de taille 1 500.
2. Le service marketing interroge un échantillon de 1 500 personnes. L'étude indique que 430 personnes ont acheté uniquement des accessoires. Doit-on rejeter au seuil de 5% l'hypothèse formulée par le gérant ?

EXERCICE 2 – 5 points

PARTIE A On considère le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous :



1. Déterminer en justifiant si ce graphe :
   a. est connexe ;
   b. admet une chaîne eulérienne.
2. On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.
   On donne :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 3 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 5 & 9 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 6 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 5 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 5 & 4 & 8 & 3 & 9 \\ 2 & 9 & 6 & 3 & 8 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 8 & 3 & 2 & 9 & 9 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

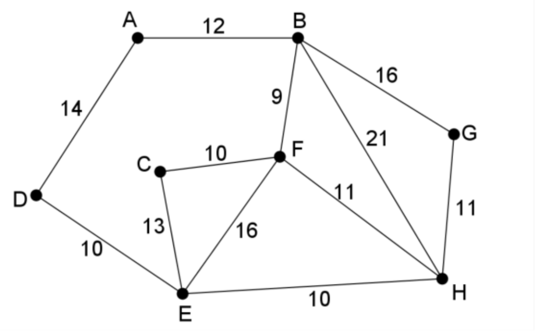
   Donner, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à B.

PARTIE B

Un club alpin souhaite proposer à ses membres des randonnées de plusieurs jours dans les Alpes. À cet effet, huit refuges notés A, B, C, D, E, F, G et H ont été sélectionnés.
Le graphe $\mathcal{G}$ de la partie A permet de visualiser les différents itinéraires possibles, les sommets représentant les refuges et les arêtes schématisant tous les sentiers de randonnée balisés les reliant.

1. D'après l'étude effectuée dans la partie A, le club alpin est-il en mesure de proposer :
   a. un itinéraire au départ du refuge A qui passerait par tous les refuges en empruntant une fois et une seule fois chacun des sentiers ? Si oui, proposer un tel itinéraire ;
   b. des itinéraires de trois jours (un jour correspondant à une liaison entre deux refuges) reliant le refuge E au refuge B ? Si oui, combien peut-il en proposer ?

2. Le graphe $\mathcal{G}$ est complété ci-dessous par la longueur en kilomètres de chacun des sentiers.

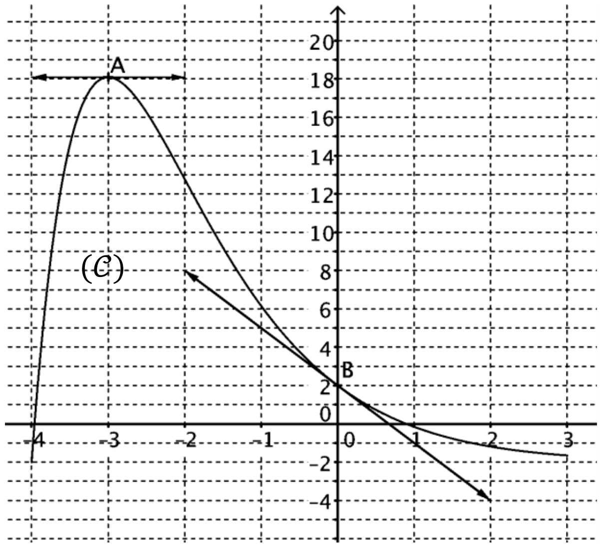


Le club alpin désire aussi proposer à ses membres l'itinéraire le plus court reliant A à H.
Déterminer cet itinéraire et en préciser la longueur en kilomètres.

EXERCICE 3 – 6 points

La courbe $(\mathcal{C})$ ci-dessous représente dans un repère orthogonal une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\ ;\ 3]$. Les points A d'abscisse -3 et B$(0\ ;\ 2)$ sont sur la courbe $(\mathcal{C})$.

Sont aussi représentées sur ce graphique les tangentes à la courbe $(\mathcal{C})$ respectivement aux points A et B, la tangente au point A étant horizontale. On note f' la fonction dérivée de f.



Les PARTIES A et B sont indépendantes.

PARTIE A

1. Par lecture graphique, déterminer :
   a. $f'(-3)$;
   b. $f(0)$ et $f'(0)$.

2. La fonction f est définie sur $[-4\ ;\ 3]$ par $f(x) = a + (x + b)e^{-x}$ où a et b sont deux réels que l'on va déterminer dans cette partie.
   a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $[-4\ ;\ 3]$.
   b. À l'aide des questions 1.b. et 2.a., montrer que les nombres a et b vérifient le système suivant :
   $$\begin{cases} a + b = 2 \\ 1 - b = -3 \end{cases}$$
   c. Déterminer alors les valeurs des nombres a et b.

PARTIE B

On admet que la fonction f est définie sur $[-4\ ;\ 3]$ par $f(x) = -2 + (x + 4)e^{-x}$.

1. Justifier que, pour tout réel x de $[-4\ ;\ 3]$, $f'(x) = (-x - 3)e^{-x}$ et en déduire le tableau de variation de f sur $[-4\ ;\ 3]$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-3\ ;\ 3]$, puis donner une valeur approchée de α à 0,01 près par défaut.

3. On souhaite calculer l'aire S, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -3$ et $x = 0$.
   a. Exprimer, en justifiant, cette aire à l'aide d'une intégrale.

b. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

```
1  F(x):=-2x+(-x-5)*exp(-x)
   // Interprète F
   // Succès lors de la compilation F
                                  x  ->-2*x+(-x-5)*exp(-x)
2  derive(F(x))
                                  -exp(-x)-exp(-x)*(-x-5)-2
3  simplifier(-exp(-x)-exp(-x)*(-x-5)-2)
                                  x*exp(-x)+4*exp(-x)-2
```

À l'aide de ces résultats, calculer la valeur exacte de l'aire S puis sa valeur arrondie au centième.

EXERCICE 4 – 3 points

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 3x - 3x\ln(x)$.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé et T la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

Quelle est la position relative de C_f par rapport à T ?

BACCALAUREAT GENERAL

SESSION 2016

MATHEMATIQUES

Série S

ÉPREUVE DU LUNDI 20 JUIN 2016

Enseignement Obligatoire ***Coefficient : 7***

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.
Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies

Exercice 1 (6 points) Commun à tous les candidats

Partie A

Une usine fabrique un composant électronique. Deux chaînes de fabrication sont utilisées.
La chaîne A produit 40% des composants et la chaîne B produit le reste.

Une partie des composants fabriqués présentent un défaut qui les empêche de fonctionner à la vitesse prévue par le constructeur. En sortie de chaîne A, 20% des composants présentent ce défaut alors qu'en sortie de chaîne B, ils ne sont que 5%.

On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.
On note :

A l'événement « le composant provient de la chaîne A »
B l'événement « le composant provient de la chaîne B »
S l'événement « le composant est sans défaut »

1. Montrer que la probabilité de l'événement S est $\mathrm{P}(S) = 0{,}89$.

2. Sachant que le composant ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de la chaîne A. On donnera le résultat à 10^{-2} près.

Partie B

Des améliorations apportées à la chaîne A ont eu pour effet d'augmenter la proportion p de composants sans défaut.

Afin d'estimer cette proportion, on prélève au hasard un échantillon de 400 composants parmi ceux fabriqués par la chaîne A.
Dans cet échantillon, la fréquence observée de composants sans défaut est de 0,92.

1. Déterminer un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 95 %.

2. Quelle devrait être la taille minimum de l'échantillon pour qu'un tel intervalle de confiance ait une amplitude maximum de 0,02 ?

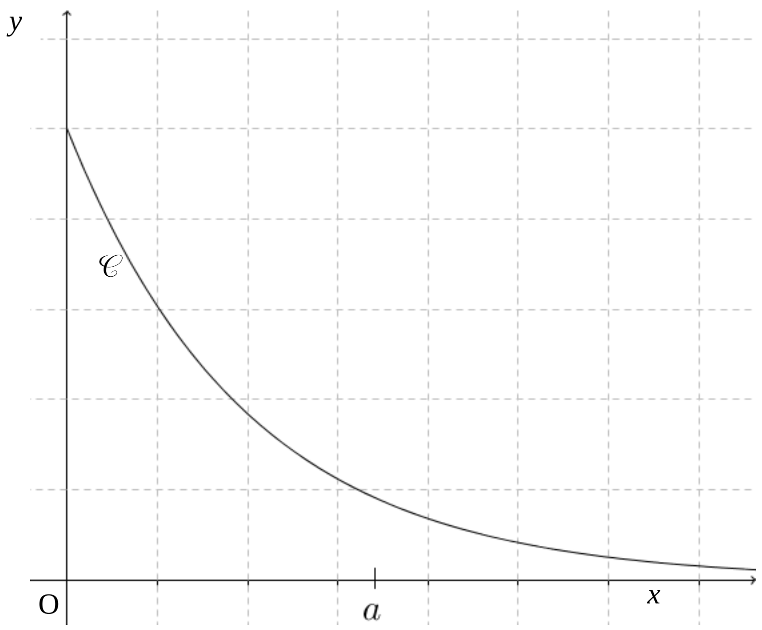
Partie C

La durée de vie, en années, d'un composant électronique fabriqué dans cette usine est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un nombre réel strictement positif).

On note f la fonction densité associée à la variable aléatoire T. On rappelle que :

- pour tout nombre réel $x \geq 0$, $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$
- pour tout nombre réel $a \geq 0$, $\mathrm{P}(T \leq a) = \int_0^a f(x)\, \mathrm{d}x$.

1. La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



a. Interpréter graphiquement $\mathrm{P}(T \leq a)$ où $a > 0$.

b. Montrer que pour tout nombre réel $t \geq 0$: $\mathrm{P}(T \leq t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

c. En déduire que $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{P}(T \leq t) = 1$.

2. On suppose que $\mathrm{P}(T \leq 7) = 0{,}5$. Déterminer λ à 10^{-3} près.

3. Dans cette question on prend $\lambda = 0{,}099$ et on arrondit les résultats des probabilités au centième.

a. On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.
Déterminer la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans.

b. On choisit au hasard un composant parmi ceux qui fonctionnent encore au bout de 2 ans.
Déterminer la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans.

c. Donner l'espérance mathématique $\mathrm{E}(T)$ de la variable aléatoire T à l'unité près.
Interpréter ce résultat.

Exercice 2 (4 points) Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on donne les points :

$A(1, 2, 3)$, $B(3, 0, 1)$, $C(-1, 0, 1)$, $D(2, 1, -1)$, $E(-1, -2, 3)$ et $F(-2, -3, 4)$.

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : Les trois points A, B, et C sont alignés.

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n}(0, 1, -1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 3 : La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu du segment [BC].

Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

Exercice 3 **(5 points)** **Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Partie A

Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = x - \ln\left(x^2 + 1\right)$.

1. Résoudre dans **R** l'équation : $f(x) = x$.

2. Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admet.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

3. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0\,;1]$, $f(x)$ appartient à $[0\,;1]$.

4. On considère l'algorithme suivant :

Variables	N et A des entiers naturels ;
Entrée	Saisir la valeur de A
Traitement	N prend la valeur 0 Tant que $N - \ln\left(N^2 + 1\right) < A$ N prend la valeur $N+1$ Fin tant que
Sortie	Afficher N

a. Que fait cet algorithme ?

b. Déterminer la valeur N fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour A est 100.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln\left(u_n^2 + 1\right)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[0\,;1]$.

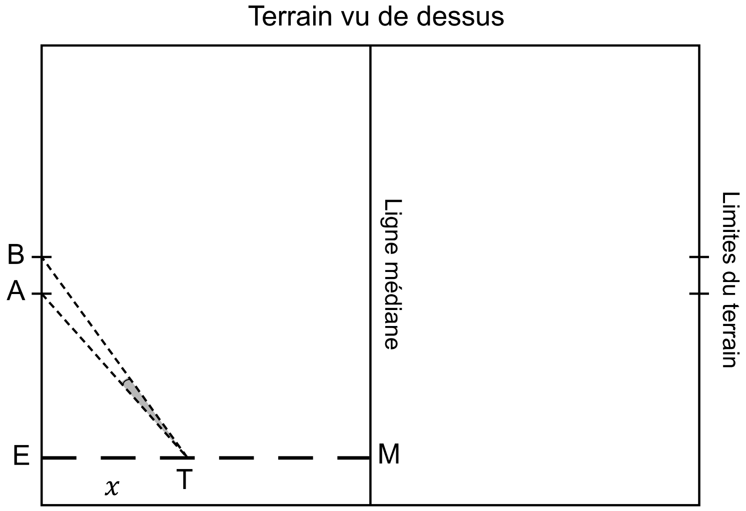
2. Étudier les variations de la suite (u_n).

3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

4. On note ℓ sa limite, et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.

En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 4 (5 points) Commun à tous les candidats



Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir figure ci-contre) situé à l'extérieur du segment $[AB]$.

La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment $[EM]$ perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E. La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.

Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible.

Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment $[EM]$ pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.
Dans toute la suite, on note x la longueur ET, qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes : $EM = 50$ m, $EA = 25$ m et $AB = 5{,}6$ m. On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETA}$, β la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETB}$ et γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ATB}$.

1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ en fonction de x.

La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

2. Montrer que la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

3. L'angle $\widehat{ATB}$ admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.

On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \times \tan b}$.

Montrer que $\tan\gamma = \frac{5{,}6x}{x^2+765}$.

4. L'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque sa mesure γ est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle $]0\,;\,50]$ de la fonction f définie par : $f(x) = x + \frac{765}{x}$.

Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{ATB}$ à 0,01 radian près.

Remarque : sur un terrain, un joueur de rugby ne se soucie pas d'une telle précision.

Corrigé du bac 2016 : Mathématiques Obligatoire Série S – Métropole

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2016

MATHEMATIQUES

Série S

ÉPREUVE DU LUNDI 20 JUIN 2016

Enseignement Obligatoire *Coefficient : 7*

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site
www.sujetdebac.fr

EXERCICE 1

Partie A

Traduisons tout d'abord les données du texte. La chaîne A produit 40% des composants, donc la chaîne B en produit 60%. La probabilité de choisir un composant issu de la chaîne A se note P(A) et vaut 0,4 – celle de choisir un composant issu de la chaîne B se note P(B) et vaut 0,6.

En sortie de chaîne A, 20% des composants présentent ce défaut alors qu'en sortie de chaîne B, ils ne sont que 5%, ce qui se traduit en notations probabilistes : $P_A(S)= 1 - 0,20 = 0,80$ et $P_B(S)= 1 - 0,05 = 0,95$.

Remarque : Faire attention ici car S représente l'événement « le composant est **SANS** défaut ». $P_A(S)$ veut donc dire « la probabilité que le composant est sans défaut sachant qu'il provient de la chaîne A », or 20% représente la proportion de composants issus de la chaîne A **AVEC** un défaut.

1) En utilisant la formule des probabilités totales, on obtient :

$$\mathbf{P(S)} = P(A)*P_A(S) + P(B)*P_B(S) = 0,4 * 0,8 + 0,6* 0,95 = \mathbf{0,89}$$

2) Probabilité que le composant provienne de la chaîne A sachant qu'il ne possède pas de défaut :

$$P_s(A) = \frac{P(A\cap S)}{P(S)}$$

Or $P(A) = P(A \cap S) + P(A \cap \bar{S})$ d'où on en déduit

$$P(A \cap S) = P(A) - P(A \cap \bar{S}) = P(A) - P_A(\bar{S}) * P(A) = P(A) * \left(1 - P_A(\bar{S})\right) = 0,4 * (1 - 0,2) = 0,32$$

Donc $\boldsymbol{P_s(A)} = \frac{P(A\cap S)}{P(S)} = \frac{0,32}{0,89} = \mathbf{0,36}$

Partie B

1) En vérifiant les hypothèses du théorème de l'intervalle de confiance à 95%, à savoir :

- $n \geq 30$; ici n = 400 donc OK
- $nf \geq 5$; ici $nf = 368$ donc OK
- $n(1 - f) \geq 5$; ici $n(1 - f) = 32$ donc OK

On peut appliquer la formule qui nous donne l'intervalle de confiance.

L'intervalle de confiance est défini tel que : $I = [f - \frac{1}{\sqrt{n}} \; ; \; f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ avec f la fréquence observée de composants sans défaut et n le nombre d'échantillons étudiés. On obtient alors :

$I = [0,92 - \frac{1}{\sqrt{400}} \; ; \; 0,92 + \frac{1}{\sqrt{400}}]$ c'est-à-dire $\boldsymbol{I} = [\mathbf{0,87} \; ; \; \mathbf{0,97}]$.

2) L'amplitude étant la longueur de l'intervalle de confiance I calculé juste avant, si on veut trouver le nombre d'échantillons pour lequel cette amplitude soit inférieure ou égale à 0,02 on doit alors résoudre l'inégalité suivante : $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0{,}02$ ce qui nous donne $\boldsymbol{n \geq 10\ 000}$.

Partie C

1.a) $P(T \leq a)$ représente l'aire sous la courbe du graphique, c'est-à-dire entre les abscisses x=0 et x=a.

1.b) t étant positif, on peut se servir de la définition donnée à la question précédente et écrire :

$$\boldsymbol{P(T \leq t)} = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = [-\frac{1}{\lambda} * \lambda e^{-\lambda x}]_0^t = -e^{-\lambda t} - (-1) = \boldsymbol{1 - e^{-\lambda t}}$$

1.c) Calculons $\lim_{t \to +\infty} P(T \leq t) = \lim_{t \to +\infty} \left(\boldsymbol{1 - e^{-\lambda t}}\right)$

Or $\lim_{t \to +\infty} -\lambda t = -\infty$ et $\lim_{X \to -\infty} (\boldsymbol{e^{X}}) = 0$ donc $\lim_{t \to +\infty} \left(\boldsymbol{e^{-\lambda t}}\right) = 0$

Ainsi, $\boldsymbol{\lim_{t \to +\infty} P(T \leq t)} = \lim_{t \to +\infty} \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = 1 - 0 = \boldsymbol{1}$

2) On suppose que $P(T \leq 7) = 0{,}5$ donc $1 - e^{-7\lambda} = 0{,}5$ puis $e^{-7\lambda} = 0{,}5$

Enfin, $-7\lambda = \ln(0{,}5)$ et $\boldsymbol{\lambda} = -\frac{\ln(0{,}5)}{7} \approx \boldsymbol{0{,}099}$

3.a) T étant la variable aléatoire propre à la durée de vie du composant, on doit alors calculer $P(T \geq 5)$ pour avoir la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans. Avec λ=0,099, on a : $\boldsymbol{P(T \geq 5)} = 1 - P(T \leq 5) = e^{-0{,}099 \times 5} = \boldsymbol{0{,}61.}$

3.b) On nous demande, parmi les composants qui fonctionnent encore au bout de 2 ans, quelle est la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans. On veut alors calculer $P_{T \geq 2}(T \geq 7)$.

Or, si X est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle, alors pour tous réels positifs t et h : $P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$. $P_{T \geq 2}(T \geq 7) = P_{T \geq 2}(T \geq 2 + 5) = P(T \geq 5)$

D'après la question 3.a), $\boldsymbol{P_{T \geq 2}(T \geq 7) = 0{,}61.}$

3.c) L'espérance mathématique E(T) qui suit une loi exponentielle de paramètre λ s'exprime telle que : $E(T) = \frac{1}{\lambda}$ d'où $\boldsymbol{E(T)} = \frac{1}{0{,}099} \approx \boldsymbol{10.}$

Cela signifie que la durée moyenne de vie d'un composant est de 10 ans.

EXERCICE 2

Affirmation 1 : Les trois points A, B et C sont alignés.

Calculons pour cela les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ par exemple. On a :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-1=2 \\ 0-2=-2 \\ 1-3=-2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1-3=-4 \\ 0-0=0 \\ 1-1=0 \end{pmatrix}$$

Les deux vecteurs calculés ne sont pas colinéaires (aucune relation de proportionnalité ne peut être trouvée entre ces deux vecteurs) donc les trois points A, B et C ne sont pas alignés.

L'affirmation 1 est **fausse**.

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

Effectuons le produit scalaire du vecteur $\vec{n}$ à deux vecteurs non colinéaires du plan ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ par exemple) :

$$\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 2*0+(-2)*1+(-2)*(-1) = -2+2 = 0$$
$$\overrightarrow{BC}.\vec{n} = (-4)*0+0*1+0*(-1) = 0$$

Les produits scalaires sont nuls : le vecteur $\vec{n}$ est donc normal au plan (ABC).

L'affirmation 2 est **vraie**.

Affirmation 3 : La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu M du segment [BC].

Le point M est situé en (1, 0, 1). Etant le milieu du segment [BC], il appartient forcément au plan (ABC).

Si la droite (EF) coupe le plan (ABC) en ce point, cela veut dire que les points E, F et M sont alignés. On le vérifie en étudiant la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EM}$ par exemple :

$$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{EM}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs sont colinéaires car $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EM}$. Ainsi, M∈(ABC) et M∈(EF).

Donc l'affirmation 3 est **vraie**.

Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

Ecrivons les équations paramétriques des droites (AB) et (CD) :

$$(AB):\begin{cases}1+2t\\2-2t\\3-2t\end{cases} \quad \text{et} \quad (CD):\begin{cases}1-3u\\u\\1-2u\end{cases}$$

Si elles sont sécantes, nous devrions trouver un couple (t, u) caractéristique du point de rencontre des deux droites. On résout alors le système suivant :

$$\begin{cases}1+2t=1-3u\\2-2t=u\\3-2t=1-2u\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}2t=-3u\\u=2-2t\ (2)\\2-2t=2u\ \ (3)\end{cases}$$

Les équations (2) et (3) sont contradictoires ; il n'existe pas de solution à ce système d'équation. L'affirmation 4 est donc **fausse**.

EXERCICE 3

Partie A

1) Soit $f(x) = x - \ln(x^2+1)$

$f(x) = x \leftrightarrow x - \ln(x^2+1) = x \leftrightarrow ln(x^2+1) = 0 \leftrightarrow x^2+1 = e^0 = 1 \leftrightarrow \boldsymbol{x = 0}$.

2)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$				$+\infty$

Calculons la derivée de la fontion *f(x)* : $f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \geq 0$ dans $\mathbb{R}$.

La dérivée *f'(x)* étant positive sur]- ∞ ; +∞[, la fonction *f(x)* est alors croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} [x - \ln(x^2+1)]$

or $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} -\ln(X) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} [x - \ln(x^2+1)] = -\infty$

3) Calculons *f(0)* et *f(1)* :

$f(0) = 0 - \ln(0+1) = \ln(1) = 0$ et $f(1) = 1 - \ln(1+1) = 1 - \ln(2) \approx 0{,}31$

La fonction f étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, ses valeurs sont comprises entre 0 et 1 sur l'intervalle [0, 1].

4.a) L'algorithme étudié retourne le plus petit entier N respectant la condition $f(N) \geq A$.

4.b) A l'aide de la calculatrice, on trouve $f(109) \approx 99{,}62 < 100$ et $f(110) \approx 100{,}60 > 100$. Dans ce cas, pour A = 100, **N = 110**.

Partie B

$u_{n+1} = u_n - \ln(u_n{}^2 + 1)$

1) Notons (P_n) : $u_n \in [0 ; 1]$ la propriété étudiée.

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 1 \in [0 ; 1]$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on suppose (P_n) vraie.
$u_{n+1} = u_n - \ln(u_n{}^2 + 1) = f(u_n)$

D'après la question 3) de la partie A, pour tout $x \in [0 ; 1]$, $f(x) \in [0 ; 1]$. Ainsi, par analogie avec les suites, $u_n \in [0 ; 1]$ implique que $f(u_n) \in [0 ; 1]$, donc $\boldsymbol{u_{n+1}} \in [\mathbf{0} ; \mathbf{1}]$: (P_{n+1}) est vraie.

On a ainsi démontré la propriété au rang n + 1.

De ce fait, la propriété (P_n) est vraie quel que soit n.

2) Pour étudier les variations de la suite (u_n), on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$:

$u_{n+1} - u_n = u_n - \ln(u_n^2 + 1) - u_n = -\ln(u_n^2 + 1)$ or $u_n^2 + 1 \geq 1$ puis en appliquant la fonction logarithme népérien ln à l'inégalité (fonction croissante sur $\mathbb{R}$) :

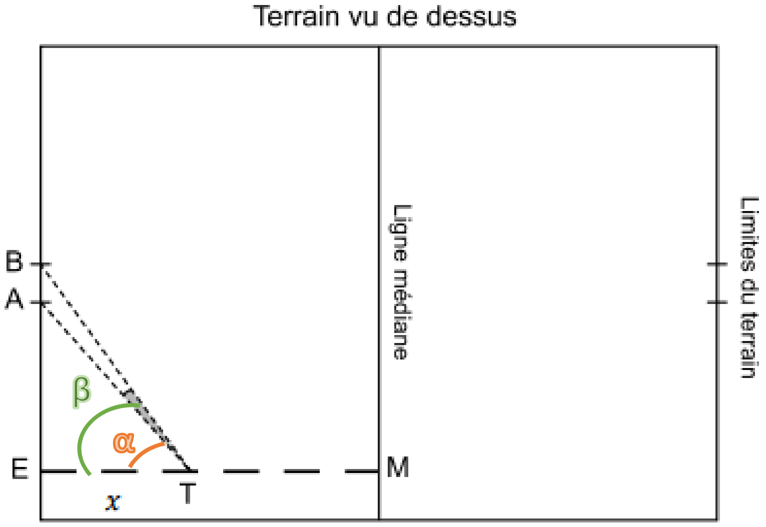
$\ln(u_n^2 + 1) \geq 0$ d'où $-\ln(u_n^2 + 1) \leq 0$

Le résultat de la différence est négatif quel que soit n, donc la suite (u_n) est décroissante.

3) D'après la question 1), on sait que tous les termes de la suite (u_n) sont compris entre 0 et 1 ; la suite est donc minorée par 0. D'après la question 2) on sait que la suite est également décroissante.
La suite (u_n) converge alors vers une limite l.

4) En admettant que l vérifie l'égalité $f(l) = l$, on en déduit que **l = 0** car nous avons vu dans la question 1) que la seule solution à l'égalité $f(x) = x$ se trouvait en x = 0.

EXERCICE 4



1) Exprimons tan α :

$$\tan\alpha = \frac{EA}{ET} = \frac{25}{x}$$

Puis tan β :

$$\tan\beta = \frac{EB}{ET} = \frac{25+5{,}6}{x} = \frac{30{,}6}{x}$$

2) Notons $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ et étudions le signe de sa dérivée, ce qui est possible car *f(x)* est dérivable sur]0 ; π/2[comme quotient de fonctions dérivables :

$f'(x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$ sur]0 ; π/2[. La dérivée de la fonction tangente étant strictement positive sur cet intervalle, la fonction tangente est donc strictement croissante sur]0 ; π/2[.

3) Sur la figure, et d'après la relation de Chasles, on déduit que γ = β – α.

Les angles α et β appartiennent bien à l'intervalle]0 ; π/2[, par conséquent leur différence aussi. On peut donc exprimer tan γ pour x ∈]0 ; 50] :

$$\tan\gamma = \tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{30{,}6}{x}-\frac{25}{x}}{1+\frac{30{,}6}{x}*\frac{25}{x}} = \frac{\frac{5{,}6}{x}}{\frac{x^2+765}{x^2}} = \frac{5{,}6x}{x^2+765}$$

4) La fonction tangente étant strictement croissante sur l'intervalle d'étude]0 ; π/2[, l'angle γ est maximal quand $\frac{5{,}6x}{x^2+765} = \frac{5{,}6}{x+\frac{765}{x}}$ l'est, donc lorsque $x + \frac{765}{x}$ est minimal.

Soit $g(x) = x + \frac{765}{x}$. Cette fonction est dérivable sur]0 ; 50] comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.

On calcule sa dérivée : $(g(x))' = 1 - \frac{765}{x^2} = \frac{x^2-765}{x^2}$ on en déduit que son signe dépend de celui du numérateur, car le dénominateur est toujours positif.

En résolvant $x^2 - 765 = 0$ on trouve $x = \ \pm\sqrt{765}$. On peut maintenant poser le tableau pour l'étude du sens de variation de la fonction *g(x)* :

x	0		$\sqrt{765}$		50
g'(x)		$-$	0	$+$	
g(x)		$\searrow$	55,32	$\nearrow$	

Le minimum de la fonction *g(x)* correspond au maximum de $\tan\gamma$ (composition de la fonction inverse, strictement décroissante sur l'intervalle d'étude, avec *g(x)*).

Ainsi, $\tan\gamma$ est maximal pour $x = \sqrt{765}$. On mesure ensuite l'angle correspondant à cette mesure : $\tan\gamma = \frac{5{,}6*\sqrt{765}}{765+765}$ puis $\boldsymbol{\gamma} = Arctan\left(\frac{5{,}6*\sqrt{765}}{765+765}\right) = \ Arctan\left(\frac{5{,}6*\sqrt{765}}{765+765}\right) \approx \mathbf{0{,}10\ \boldsymbol{rad}}$

BACCALAUREAT GENERAL

SESSION 2016

MATHEMATIQUES

Série S

ÉPREUVE DU LUNDI 20 JUIN 2016

Enseignement Spécialité ***Coefficient : 9***

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.
Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies

Exercice 1 (6 points) Commun à tous les candidats

Partie A

Une usine fabrique un composant électronique. Deux chaînes de fabrication sont utilisées.
La chaîne A produit 40% des composants et la chaîne B produit le reste.

Une partie des composants fabriqués présentent un défaut qui les empêche de fonctionner à la vitesse prévue par le constructeur. En sortie de chaîne A, 20% des composants présentent ce défaut alors qu'en sortie de chaîne B, ils ne sont que 5%.

On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.
On note :

A l'événement « le composant provient de la chaîne A »
B l'événement « le composant provient de la chaîne B »
S l'événement « le composant est sans défaut »

1. Montrer que la probabilité de l'événement S est $\mathrm{P}(S) = 0{,}89$.

2. Sachant que le composant ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de la chaîne A. On donnera le résultat à 10^{-2} près.

Partie B

Des améliorations apportées à la chaîne A ont eu pour effet d'augmenter la proportion p de composants sans défaut.

Afin d'estimer cette proportion, on prélève au hasard un échantillon de 400 composants parmi ceux fabriqués par la chaîne A.
Dans cet échantillon, la fréquence observée de composants sans défaut est de 0,92.

1. Déterminer un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 95 %.

2. Quelle devrait être la taille minimum de l'échantillon pour qu'un tel intervalle de confiance ait une amplitude maximum de 0,02 ?

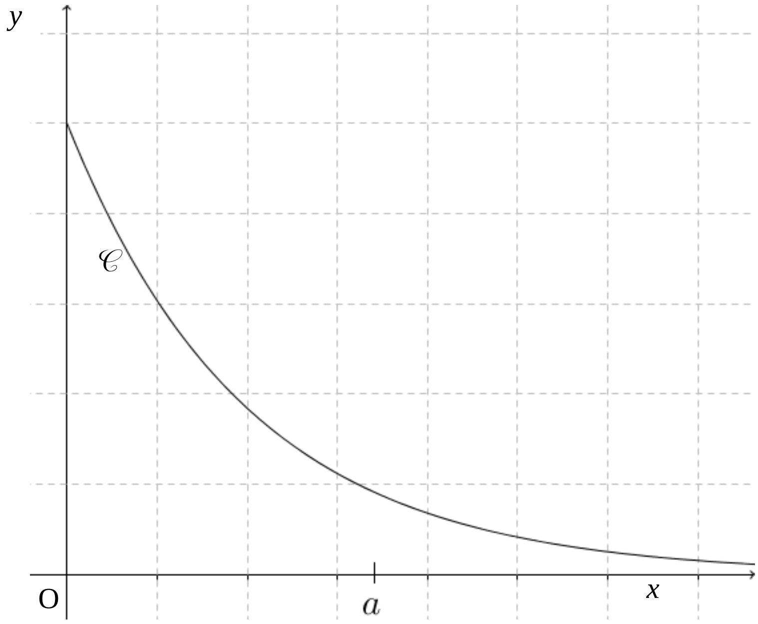
Partie C

La durée de vie, en années, d'un composant électronique fabriqué dans cette usine est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un nombre réel strictement positif).

On note f la fonction densité associée à la variable aléatoire T. On rappelle que :

- pour tout nombre réel $x \geq 0$, $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$
- pour tout nombre réel $a \geq 0$, $\mathrm{P}(T \leq a) = \int_0^a f(x)\, \mathrm{d}x$.

1. La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



a. Interpréter graphiquement $\mathrm{P}(T \leq a)$ où $a > 0$.

b. Montrer que pour tout nombre réel $t \geq 0$: $\mathrm{P}(T \leq t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

c. En déduire que $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{P}(T \leq t) = 1$.

2. On suppose que $\mathrm{P}(T \leq 7) = 0{,}5$. Déterminer λ à 10^{-3} près.

3. Dans cette question on prend $\lambda = 0{,}099$ et on arrondit les résultats des probabilités au centième.

a. On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.
Déterminer la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans.

b. On choisit au hasard un composant parmi ceux qui fonctionnent encore au bout de 2 ans.
Déterminer la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans.

c. Donner l'espérance mathématique $\mathrm{E}(T)$ de la variable aléatoire T à l'unité près.
Interpréter ce résultat.

Exercice 2 (4 points) Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on donne les points :

$A(1, 2, 3)$, $B(3, 0, 1)$, $C(-1, 0, 1)$, $D(2, 1, -1)$, $E(-1, -2, 3)$ et $F(-2, -3, 4)$.

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : Les trois points A, B, et C sont alignés.

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n}(0, 1, -1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 3 : La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu du segment [BC].

Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

Exercice 3 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour tout couple d'entiers relatifs non nuls (a,b), on note $\text{pgcd}(a,b)$ le plus grand diviseur commun de a et b.
Le plan est muni d'un repère $(\text{O} ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Exemple. Soit Δ_1 la droite d'équation $y = \dfrac{5}{4}x - \dfrac{2}{3}$.

- **a.** Montrer que si (x, y) est un couple d'entiers relatifs alors l'entier $15x - 12y$ est divisible par 3.
- **b.** Existe-il au moins un point de la droite Δ_1 dont les coordonnées sont deux entiers relatifs ? Justifier.

Généralisation

On considère désormais une droite Δ d'équation (E) : $y = \dfrac{m}{n}x - \dfrac{p}{q}$ où m, n, p et q sont des entiers relatifs non nuls tels que $\text{pgcd}(m,n) = \text{pgcd}(p,q) = 1$.

Ainsi, les coefficients de l'équation (E) sont des fractions irréductibles et on dit que Δ est une droite rationnelle.

Le but de l'exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m, n, p et q pour qu'une droite rationnelle Δ comporte au moins un point dont les coordonnées sont deux entiers relatifs.

2. On suppose ici que la droite Δ comporte un point de coordonnées (x_0, y_0) où x_0 et y_0 sont des entiers relatifs.

- **a.** En remarquant que le nombre $n\,y_0 - m\,x_0$ est un entier relatif, démontrer que q divise le produit np.
- **b.** En déduire que q divise n.

3. Réciproquement, on suppose que q divise n, et on souhaite trouver un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs tels que $y_0 = \dfrac{m}{n}x_0 - \dfrac{p}{q}$.

- **a.** On pose $n = qr$, où r est un entier relatif non nul. Démontrer qu'on peut trouver deux entiers relatifs u et v tels que $qru - mv = 1$.
- **b.** En déduire qu'il existe un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs tels que $y_0 = \dfrac{m}{n}x_0 - \dfrac{p}{q}$.

4. Soit Δ la droite d'équation $y = \dfrac{3}{8}x - \dfrac{7}{4}$. Cette droite possède-t-elle un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs ? Justifier.

5. On donne l'algorithme suivant :

Variables :	M, N, P, Q : entiers relatifs non nuls, tels que $\text{pgcd}(M, N) = \text{pgcd}(P, Q) = 1$ X : entier naturel
Entrées :	Saisir les valeurs de M, N, P, Q

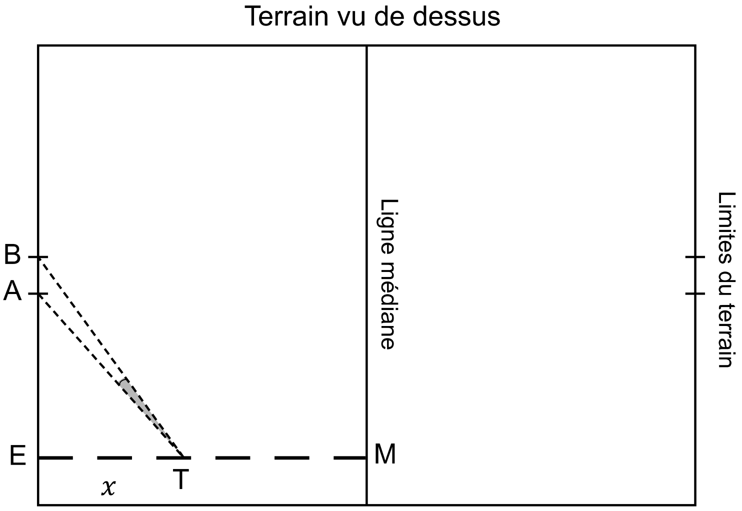
Traitement et sorties :

```
Si Q divise N alors
    X prend la valeur 0
    Tant que (M/N X + P/Q n'est pas entier) et (−M/N X + P/Q n'est pas entier) faire
        X prend la valeur X + 1
    Fin tant que
    Si M/N X + P/Q est entier alors
        Afficher X, M/N X + P/Q
    Sinon
        Afficher −X , −M/N X + P/Q
    Fin Si
Sinon
    Afficher "Pas de solution"
Fin Si
```

a. Justifier que cet algorithme se termine pour toute entrée de M, N, P, Q, entiers relatifs non nuls tels que $\text{pgcd}(M, N) = \text{pgcd}(P, Q) = 1$.

b. Que permet-il d'obtenir ?

Exercice 4 (5 points) Commun à tous les candidats



Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir figure ci-contre) situé à l'extérieur du segment $[AB]$.

La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment $[EM]$ perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E. La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.

Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible.

Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment $[EM]$ pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.
Dans toute la suite, on note x la longueur ET, qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes : $EM = 50$ m, $EA = 25$ m et $AB = 5{,}6$ m. On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETA}$, β la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETB}$ et γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ATB}$.

1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ en fonction de x.

La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

2. Montrer que la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

3. L'angle $\widehat{ATB}$ admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.

On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \times \tan b}$.

Montrer que $\tan\gamma = \dfrac{5{,}6x}{x^2+765}$.

4. L'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque sa mesure γ est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle $]0\,;\,50]$ de la fonction f définie par : $f(x) = x + \dfrac{765}{x}$.

Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{ATB}$ à 0,01 radian près.

Remarque : sur un terrain, un joueur de rugby ne se soucie pas d'une telle précision.

Corrigé du bac 2016 : Mathématiques Spécialité Série S – Métropole

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2016

MATHEMATIQUES

Série S

ÉPREUVE DU LUNDI 20 JUIN 2016

Enseignement Spécialité *Coefficient : 9*

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site
www.sujetdebac.fr

EXERCICE 1

Partie A

Traduisons tout d'abord les données du texte. La chaîne A produit 40% des composants, donc la chaîne B en produit 60%. La probabilité de choisir un composant issu de la chaîne A se note P(A) et vaut 0,4 – celle de choisir un composant issu de la chaîne B se note P(B) et vaut 0,6.

En sortie de chaîne A, 20% des composants présentent ce défaut alors qu'en sortie de chaîne B, ils ne sont que 5%, ce qui se traduit en notations probabilistes : $P_A(S)$= 1 - 0,20 = 0,80 et $P_B(S)$= 1 - 0,05 = 0,95.

Remarque : Faire attention ici car S représente l'événement « le composant est **SANS** défaut ». $P_A(S)$ veut donc dire « la probabilité que le composant est sans défaut sachant qu'il provient de la chaîne A », or 20% représente la proportion de composants issus de la chaîne A **AVEC** un défaut.

1) En utilisant la formule des probabilités totales, on obtient :

P(S) = P(A)*$P_A(S)$ + P(B)*$P_B(S)$ = 0,4 * 0,8 + 0,6* 0,95 = **0,89**

2) Probabilité que le composant provienne de la chaîne A sachant qu'il ne possède pas de défaut :

$P_S(A) = \frac{P(A\cap S)}{P(S)}$

Or $P(A) = P(A \cap S) + P(A \cap \bar{S})$ d'où on en déduit

$$P(A \cap S) = P(A) - P(A \cap \bar{S}) = P(A) - P_A(\bar{S}) * P(A) = P(A) * \left(1 - P_A(\bar{S})\right) = 0{,}4 * (1 - 0{,}2) = 0{,}32$$

Donc $\boldsymbol{P_s(A)} = \frac{P(A\cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}32}{0{,}89} = \mathbf{0{,}36}$

Partie B

1) En vérifiant les hypothèses du théorème de l'intervalle de confiance à 95%, à savoir :

- $n \geq 30$; ici n = 400 donc OK
- $nf \geq 5$; ici nf = 368 donc OK
- $n(1 - f) \geq 5$; ici $n(1 - f)$ = 32 donc OK

On peut appliquer la formule qui nous donne l'intervalle de confiance.

L'intervalle de confiance est défini tel que : $I = [f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ avec f la fréquence observée de composants sans défaut et n le nombre d'échantillons étudiés. On obtient alors :

$I = [0{,}92 - \frac{1}{\sqrt{400}}\ ;\ 0{,}92 + \frac{1}{\sqrt{400}}]$ c'est-à-dire $\boldsymbol{I} = [\mathbf{0{,}87}\ ;\ \mathbf{0{,}97}]$.

2) L'amplitude étant la longueur de l'intervalle de confiance I calculé juste avant, si on veut trouver le nombre d'échantillons pour lequel cette amplitude soit inférieure ou égale à 0,02 on doit alors résoudre l'inégalité suivante : $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0{,}02$ ce qui nous donne $\boldsymbol{n \geq 10\,000}$.

Partie C

1.a) $P(T \leq a)$ représente l'aire sous la courbe du graphique, c'est-à-dire entre les abscisses x=0 et x=a.

1.b) t étant positif, on peut se servir de la définition donnée à la question précédente et écrire :

$$\boldsymbol{P(T \leq t)} = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = [-\frac{1}{\lambda} * \lambda e^{-\lambda x}]_0^t = -e^{-\lambda t} - (-1) = \boldsymbol{1 - e^{-\lambda t}}$$

1.c) Calculons $\lim\limits_{t \to +\infty} P(T \leq t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \left(\boldsymbol{1 - e^{-\lambda t}}\right)$

Or $\lim\limits_{t \to +\infty} -\lambda t = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} (\boldsymbol{e^{X}}) = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(\boldsymbol{e^{-\lambda t}}\right) = 0$

Ainsi, $\boldsymbol{\lim\limits_{t \to +\infty} P(T \leq t)} = \lim\limits_{t \to +\infty} \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = 1 - 0 = \boldsymbol{1}$

2) On suppose que $P(T \leq 7) = 0{,}5$ donc $1 - e^{-7\lambda} = 0{,}5$ puis $e^{-7\lambda} = 0{,}5$

Enfin, $-7\lambda = \ln(0{,}5)$ et $\boldsymbol{\lambda} = -\frac{\ln(0{,}5)}{7} \approx \boldsymbol{0{,}099}$

3.a) T étant la variable aléatoire propre à la durée de vie du composant, on doit alors calculer $P(T \geq 5)$ pour avoir la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans. Avec λ=0,099, on a : $\boldsymbol{P(T \geq 5)} = 1 - P(T \leq 5) = e^{-0{,}099 \times 5} = \boldsymbol{0{,}61.}$

3.b) On nous demande, parmi les composants qui fonctionnent encore au bout de 2 ans, quelle est la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans. On veut alors calculer $P_{T \geq 2}(T \geq 7)$.

Or, si X est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle, alors pour tous réels positifs t et h : $P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$. $P_{T \geq 2}(T \geq 7) = P_{T \geq 2}(T \geq 2 + 5) = P(T \geq 5)$

D'après la question 3.a), $\boldsymbol{P_{T \geq 2}(T \geq 7)} = \boldsymbol{0{,}61.}$

3.c) L'espérance mathématique E(T) qui suit une loi exponentielle de paramètre λ s'exprime telle que : $E(T) = \frac{1}{\lambda}$ d'où $\boldsymbol{E(T)} = \frac{1}{0{,}099} \approx \boldsymbol{10.}$

Cela signifie que la durée moyenne de vie d'un composant est de 10 ans.

EXERCICE 2

Affirmation 1 : Les trois points A, B et C sont alignés.

Calculons pour cela les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ par exemple. On a :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-1=2 \\ 0-2=-2 \\ 1-3=-2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1-3=-4 \\ 0-0=0 \\ 1-1=0 \end{pmatrix}$$

Les deux vecteurs calculés ne sont pas colinéaires (aucune relation de proportionnalité ne peut être trouvée entre ces deux vecteurs) donc les trois points A, B et C ne sont pas alignés.

L'affirmation 1 est **fausse**.

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

Effectuons le produit scalaire du vecteur $\vec{n}$ à deux vecteurs non colinéaires du plan ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ par exemple) :

$$\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 2*0+(-2)*1+(-2)*(-1) = -2+2 = 0$$
$$\overrightarrow{BC}.\vec{n} = (-4)*0+0*1+0*(-1) = 0$$

Les produits scalaires sont nuls : le vecteur $\vec{n}$ est donc normal au plan (ABC).

L'affirmation 2 est **vraie**.

Affirmation 3 : La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu M du segment [BC].

Le point M est situé en (1, 0, 1). Etant le milieu du segment [BC], il appartient forcément au plan (ABC).

Si la droite (EF) coupe le plan (ABC) en ce point, cela veut dire que les points E, F et M sont alignés. On le vérifie en étudiant la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EM}$ par exemple :

$$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{EM}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs sont colinéaires car $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EM}$. Ainsi, M∈(ABC) et M∈(EF).

Donc l'affirmation 3 est **vraie**.

Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

Ecrivons les équations paramétriques des droites (AB) et (CD) :

$(AB)\!:\begin{cases}1+2t\\2-2t\\3-2t\end{cases}$ et $(CD)\!:\begin{cases}1-3u\\u\\1-2u\end{cases}$

Si elles sont sécantes, nous devrions trouver un couple (t, u) caractéristique du point de rencontre des deux droites. On résout alors le système suivant :

$$\begin{cases}1+2t=1-3u\\2-2t=u\\3-2t=1-2u\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}2t=-3u\\u=2-2t\ (2)\\2-2t=2u\ \ (3)\end{cases}$$

Les équations (2) et (3) sont contradictoires ; il n'existe pas de solution à ce système d'équation. L'affirmation 4 est donc **fausse**.

EXERCICE 3 (spé)

1.a) Avec (x, y) un couple d'entiers relatifs, si $15x-12y$ est divisible par 3, on peut l'écrire sous la forme $3*(ax-by)$. C'est en effet le cas, car $15x-12y=3*(5x-4y)$.
$15x-12y$ est bien divisible par 3.

1. b) Pour qu'un point M(x, y) appartienne à la droite $y=\frac{5}{4}x-\frac{2}{3}$, il faut qu'il vérifie cette équation.

Ainsi, $M(x,y)\in\Delta_1\leftrightarrow y=\frac{5}{4}x-\frac{2}{3}\leftrightarrow 12y=15x-8\leftrightarrow 12y-15x=8.$

Or nous avions supposé à la question 1.a) que si (x, y) était un couple d'entiers relatifs, $15x-12y$ était divisible par 3. Cependant, 8 n'est pas divisible par 3 !
Conclusion : il n'existe pas de point M(x, y) tels que x et y sont des entiers relatifs.

2.a) On suppose ici que la droite Δ comporte un point de coordonnées (x_0, y_0) où x_0 et y_0 sont des entiers relatifs.

Le nombre ny_0-mx_0 est une différence de deux entiers relatifs, donc est lui-même un entier relatif. Montrons maintenant que q divise l'entier np.
$y=\frac{m}{n}x-\frac{p}{q}$ et en faisant apparaître np : $ny=mx-\frac{np}{q}$ (1)

Le point $M_0(x_0, y_0)$ appartenant à la droite Δ, il vérifie alors l'équation (1) donc on peut écrire $ny_0=mx_0-\frac{np}{q}$, puis en faisant apparaître l'entier relatif N_0= ny_0-mx_0 : $N_0=-\frac{np}{q}$

Le quotient d'entiers relatifs étant également un entier relatif, on en déduit que **q divise np.**

2.b) D'après le théorème de Gauss, avec a, b et c des entiers, si a divise le produit bc, et a et b sont premiers entre eux, alors a divise c. Ici, q divise np, et p et q sont premiers entre eux, donc q divise n.

3.a) On pose n = qr. D'après le théorème de Bézout, deux entiers naturels a et b sont premiers entre eux, si et seulement si, il existe deux entiers u et v tels que au + bv = 1.
n et *r* sont premiers entre eux d'après l'énoncé, il existe un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que nu + mv = 1.

En effectuant un changement de variable avec n=qr et v=-v', on se retrouve avec **qru – mv'=1**.

3.b) Partons de la relation démontée à la question précédente, à savoir nu - mv=1 **(1)**. On veut montrer qu'il existe un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs tels qu'on ait $y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$.

(1) $\leftrightarrow\ (pr) * nu - (pr) * mv = pr\ \leftrightarrow\ upr - vpr * \frac{m}{n} = \frac{pr}{n}$
Or $n = qr$ donc $\frac{r}{n} = q$
Ainsi, **(1)** $\leftrightarrow\ upr - vpr * \frac{m}{n} = \frac{p}{q}\ \leftrightarrow\ -upr = -vpr * \frac{m}{n} - \frac{p}{q}$

En posant **x_0 = -vpr** et **y_0 = -upr**, on obtient la relation souhaitée : $y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$.

Il existe donc bien un couple (x_0 = -vpr, y_0 =-upr) d'entiers relatifs tel que $y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$.

4) Considérons la droite Δ d'équation : $y_0 = \frac{3}{8}x_0 - \frac{7}{4}$.

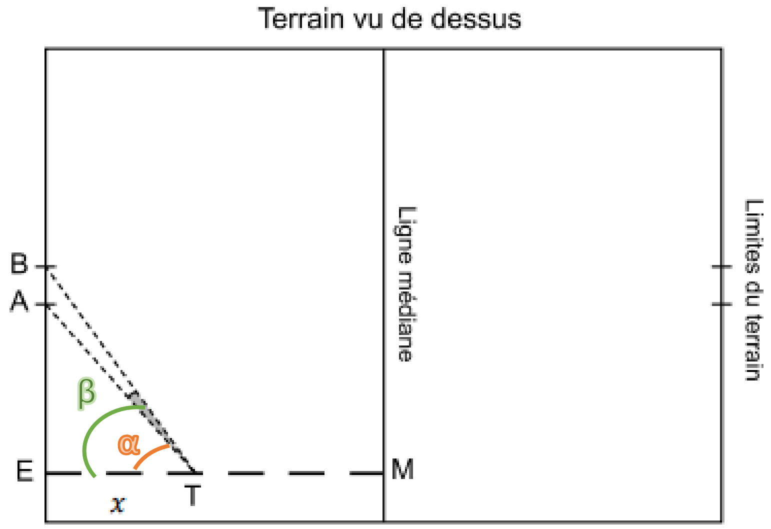
Par identification avec la relation **(2)**, on a : $\begin{cases} m = 3 \\ n = 8 \\ p = 7 \\ q = 4 \end{cases}$

Pour montrer que cette droite possède un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs, il faut reprendre le raisonnement et les hypothèses utilisés lors des questions précédentes. Pour résoudre la question 3b), nous avions montré d'abord que q divisait n avec $n = qr$. Ici, 4 divise bien 8, donc nous pouvons en déduire qu'il existe bien un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs appartenant à la droite d'équation : $y_0 = \frac{3}{8}x_0 - \frac{7}{4}$.

5.a) L'algorithme étudié reprend les étapes du raisonnement mené tout au long de cet exercice. A la question 3b), nous avons montré que si q ne divise pas n, alors il n'y a pas de solution, c'est-à-dire pas de couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs appartenant à la droite Δ. C'est bien ce que l'algorithme fait : lorsque q ne divise pas n, il renvoie « Pas de solution ». Au contraire, si q divise n, il existe un couple d'entiers relatifs appartenant à la droite Δ - l'algorithme teste bien cette condition et cherche le point correspondant. Il va se terminer, car nous avons imposé que q divise n et dans ces conditions, il existe forcément un couple d'entiers relatifs qui appartiennent à Δ.

5.b) L'algorithme affiche, dans le cas ou q divise n, le point de coordonnées entières relatives qui appartient à la droite Δ. Sinon, il affiche qu'il n'y a pas de solutions.

EXERCICE 4



1) Exprimons tan α :

$$\tan\alpha = \frac{EA}{ET} = \frac{25}{x}$$

Puis tan β :

$$\tan\beta = \frac{EB}{ET} = \frac{25+5{,}6}{x} = \frac{30{,}6}{x}$$

2) Notons $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ et étudions le signe de sa dérivée, ce qui est possible car *f(x)* est dérivable sur]0 ; π/2[comme quotient de fonctions dérivables :

$f'(x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$ sur]0 ; π/2[. La dérivée de la fonction tangente étant strictement positive sur cet intervalle, la fonction tangente est donc strictement croissante sur]0 ; π/2[.

3) Sur la figure, et d'après la relation de Chasles, on déduit que γ = β – α.

Les angles α et β appartiennent bien à l'intervalle]0 ; π/2[, par conséquent leur différence aussi. On peut donc exprimer tan γ pour x ∈]0 ; 50] :

$$\tan\gamma = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{30,6}{x} - \frac{25}{x}}{1 + \frac{30,6}{x} * \frac{25}{x}} = \frac{\frac{5,6}{x}}{\frac{x^2+765}{x^2}} = \frac{5,6x}{x^2+765}$$

4) La fonction tangente étant strictement croissante sur l'intervalle d'étude]0 ; π/2[, l'angle γ est maximal quand $\frac{5,6x}{x^2+765} = \frac{5,6}{x+\frac{765}{x}}$ l'est, donc lorsque $x + \frac{765}{x}$ est minimal.

Soit $g(x) = x + \frac{765}{x}$. Cette fonction est dérivable sur]0 ; 50] comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.
On calcule sa dérivée : $(g(x))' = 1 - \frac{765}{x^2} = \frac{x^2-765}{x^2}$ on en déduit que son signe dépend de celui du numérateur, car le dénominateur est toujours positif.

En résolvant $x^2 - 765 = 0$ on trouve $x = \pm\sqrt{765}$. On peut maintenant poser le tableau pour l'étude du sens de variation de la fonction *g(x)* :

x	0		$\sqrt{765}$		50
g'(x)		−	0	+	
g(x)		↘	55,32	↗	

Le minimum de la fonction *g(x)* correspond au maximum de tan γ (composition de la fonction inverse, strictement décroissante sur l'intervalle d'étude, avec *g(x)*).

Ainsi, tan γ est maximal pour $x = \sqrt{765}$. On mesure ensuite l'angle correspondant à cette mesure : $\tan\gamma = \frac{5,6*\sqrt{765}}{765+765}$ puis $\boldsymbol{\gamma} = Arctan\left(\frac{5,6*\sqrt{765}}{765+765}\right) = Arctan\left(\frac{5,6*\sqrt{765}}{765+765}\right) \approx \boldsymbol{0,10\ rad}$

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2016

MATHÉMATIQUES – Série ES
ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 5

MATHÉMATIQUES – Série L
ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 4

SUJET

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 5 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE 1 – 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des quatre questions, quatre réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie sans justifier le choix effectué.
Une bonne réponse rapporte 1 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. Un organisme de formation désire estimer la proportion de stagiaires satisfaits de la formation reçue au cours de l'année 2013. Pour cela, il interroge un échantillon représentatif de 300 stagiaires. On constate que 225 sont satisfaits.

Alors, un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 de la proportion de stagiaires satisfaits de la formation reçue au cours de l'année 2013 est :

(a) $[0{,}713\ ;\ 0{,}771]$ **(b)** $[0{,}692\ ;\ 0{,}808]$ **(c)** $[0{,}754\ ;\ 0{,}813]$ **(d)** $[0{,}701\ ;\ 0{,}799]$

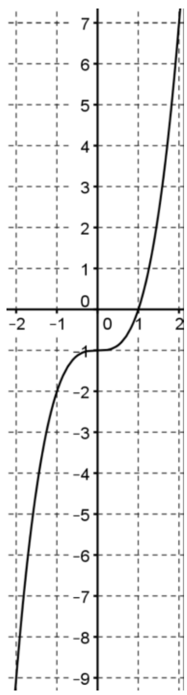
2. En suivant la loi uniforme, on choisit un nombre au hasard dans l'intervalle $[4\ ;\ 11]$. La probabilité que ce nombre soit inférieur à 10 est :

(a) $\frac{6}{11}$ **(b)** $\frac{10}{7}$ **(c)** $\frac{10}{11}$ **(d)** $\frac{6}{7}$

3. On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-2x+3}$. La fonction f est dérivable sur **R** et sa fonction dérivée f' est donnée par :

(a) $f(x) = -2\mathrm{e}^{-2x+3}$ **(b)** $f'(x) = \mathrm{e}^{-2x+3}$
(c) $f'(x) = (-2x+3)\mathrm{e}^{-2x+3}$ **(d)** $f'(x) = (-2x-1)\mathrm{e}^{-2x+3}$

4. On considère une fonction f définie et dérivable sur **R** telle que sa fonction dérivée f' soit aussi dérivable sur **R**. La courbe ci-contre représente la fonction f''.
On peut alors affirmer que :



(a) f est convexe sur $[-2\ ;\ 2]$. **(b)** f est concave sur $[-2\ ;\ 2]$.

(c) La courbe représentative de f sur $[-2\ ;\ 2]$ admet un point d'inflexion. **(d)** f' est croissante sur $[-2\ ;\ 2]$.

EXERCICE 2 – 5 points

Un loueur de voitures dispose au 1er mars 2015 d'un total de 10 000 voitures pour l'Europe.

Afin d'entretenir son parc automobile, il décide de revendre, au 1er mars de chaque année, 25% de son parc et d'acheter 3 000 voitures neuves.

On modélise le nombre de voitures de l'agence à l'aide d'une suite :
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de voitures présentes dans le parc automobile au 1er mars de l'année 2015 + n.
On a donc $u_0 = 10\,000$.

1. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 3\,000$.

2. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 12\,000$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75. Préciser le premier terme.

b. Exprimer v_n en fonction de n.
Déterminer la limite de la suite (v_n).

c. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_n = 12\,000 - 2\,000 \times 0{,}75^n$.

d. En vous appuyant sur les réponses données aux deux questions précédentes, que pouvez-vous conjecturer sur le nombre de voitures que comptera le parc automobile de ce loueur au bout d'un grand nombre d'années ?

3. On admet dans cette question que la suite (u_n) est croissante.
On aimerait déterminer l'année à partir de laquelle le parc automobile comptera au moins 11 950 voitures.

a. Recopier l'algorithme suivant et compléter les pointillés afin qu'il permette de répondre au problème posé.

```
INITIALISATION
        U prend la valeur 10 000
        N prend la valeur 0
TRAITEMENT
        Tant que …….
            N prend la valeur ………………………..
            U prend la valeur ………………………..
        Fin Tant que

SORTIE
        Afficher …….
```

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année recherchée.

c. Retrouver ce résultat en résolvant l'inéquation $12\,000 - 2\,000 \times 0{,}75^n \geq 11\,950$.

EXERCICE 3 – 5 points

Un téléphone portable contient en mémoire 3 200 chansons archivées par catégories : rock, techno, rap, reggae… dont certaines sont interprétées en français.

Parmi toutes les chansons enregistrées, 960 sont classées dans la catégorie rock.

Une des fonctionnalités du téléphone permet d'écouter de la musique en mode « lecture aléatoire » : les chansons écoutées sont choisies au hasard et de façon équiprobable parmi l'ensemble du répertoire.
Au cours de son footing hebdomadaire, le propriétaire du téléphone écoute une chanson grâce à ce mode de lecture.

On note :

- R l'événement : « la chanson écoutée est une chanson de la catégorie rock » ;
- F l'événement : « la chanson écoutée est interprétée en français ».

Les PARTIES A et B sont indépendantes.

PARTIE A

1. Calculer $P(\mathrm{R})$, la probabilité de l'événement R.
2. 35% des chansons de la catégorie rock sont interprétées en français ; traduire cette donnée en utilisant les événements R et F.
3. Calculer la probabilité que la chanson écoutée soit une chanson de la catégorie rock et qu'elle soit interprétée en français.
4. Parmi toutes les chansons enregistrées 38,5% sont interprétées en français.
   Montrer que $P(\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{R}}) = 0{,}28$.
5. En déduire $P_{\overline{\mathrm{R}}}(\mathrm{F})$ et exprimer par une phrase ce que signifie ce résultat.

PARTIE B *Les résultats de cette partie seront arrondis au millième.*

Le propriétaire du téléphone écoute régulièrement de la musique à l'aide de son téléphone portable.

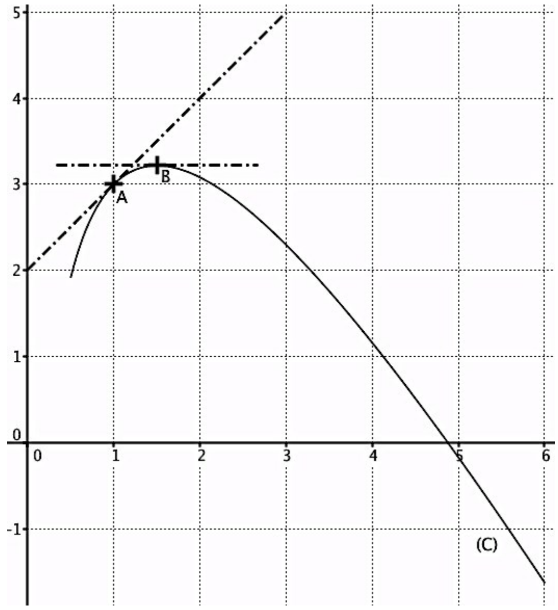
On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque écoute de musique, associe la durée (en minutes) correspondante ; on admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 30$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

Le propriétaire écoute de la musique.

1. Quelle est la probabilité que la durée de cette écoute soit comprise entre 15 et 45 minutes ?
2. Quelle est la probabilité que cette écoute dure plus d'une heure ?

EXERCICE 4 – 6 points

La courbe (C) ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur [0,5 ; 6]. Les points A(1 ; 3) et B d'abscisse 1,5 sont sur la courbe (C).
Les tangentes à la courbe (C) aux points A et B sont aussi représentées en pointillés sur ce graphique, la tangente au point B est horizontale.
On note f' la fonction dérivée de f.



Les PARTIES A et B sont indépendantes.

PARTIE A : ÉTUDE GRAPHIQUE

1. Déterminer $f'(1{,}5)$.
2. La tangente à la courbe (C) au point A passe par le point de coordonnées (0 ; 2). Déterminer une équation de cette tangente.
3. Donner un encadrement de l'aire, en unités d'aire et à l'unité près, du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.
4. Déterminer la convexité de la fonction f sur [0,5 ; 6]. Argumenter la réponse.

PARTIE B : ÉTUDE ANALYTIQUE

On admet que la fonction f est définie sur [0,5 ; 6] par $f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x)$.

1. Pour tout réel x de $[0{,}5\ ;\ 6]$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{-2x+3}{x}$.
2. Étudier le signe de f' sur [0,5 ; 6] puis dresser le tableau de variation de f sur [0,5 ; 6].
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution α sur [0,5 ; 6].

   Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4. En déduire le tableau de signe de f sur [0,5 ; 6].
5. On considère la fonction F définie sur [0,5 ; 6] par $F(x) = -x^2 + 2x + 3x\ln(x)$.
   a. Montrer que F est une primitive de f sur [0,5 ; 6].
   b. En déduire l'aire exacte, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$. En donner ensuite une valeur arrondie au dixième.

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2016

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 5 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE 1 – 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des quatre questions, quatre réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie sans justifier le choix effectué.
Une bonne réponse rapporte 1 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. Un organisme de formation désire estimer la proportion de stagiaires satisfaits de la formation reçue au cours de l'année 2013. Pour cela, il interroge un échantillon représentatif de 300 stagiaires. On constate que 225 sont satisfaits.

Alors, un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 de la proportion de stagiaires satisfaits de la formation reçue au cours de l'année 2013 est :

(a) $[0{,}713 ; 0{,}771]$ **(b)** $[0{,}692 ; 0{,}808]$ **(c)** $[0{,}754 ; 0{,}813]$ **(d)** $[0{,}701 ; 0{,}799]$

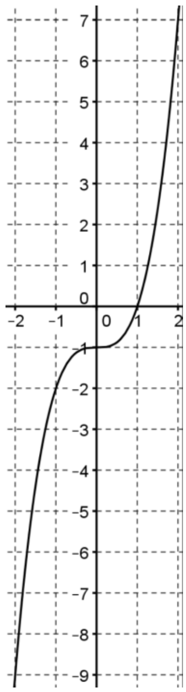
2. En suivant la loi uniforme, on choisit un nombre au hasard dans l'intervalle $[4 ; 11]$. La probabilité que ce nombre soit inférieur à 10 est :

(a) $\frac{6}{11}$ **(b)** $\frac{10}{7}$ **(c)** $\frac{10}{11}$ **(d)** $\frac{6}{7}$

3. On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = (x + 1)\mathrm{e}^{-2x+3}$. La fonction f est dérivable sur **R** et sa fonction dérivée f' est donnée par :

(a) $f(x) = -2\mathrm{e}^{-2x+3}$ **(b)** $f'(x) = \mathrm{e}^{-2x+3}$
(c) $f'(x) = (-2x + 3)\mathrm{e}^{-2x+3}$ **(d)** $f'(x) = (-2x - 1)\mathrm{e}^{-2x+3}$

4. On considère une fonction f définie et dérivable sur **R** telle que sa fonction dérivée f' soit aussi dérivable sur **R**. La courbe ci-contre représente la fonction f''.
On peut alors affirmer que :



(a) f est convexe sur $[-2 ; 2]$. **(b)** f est concave sur $[-2 ; 2]$.

(c) La courbe représentative de f sur $[-2 ; 2]$ admet un point d'inflexion. **(d)** f' est croissante sur $[-2 ; 2]$.

EXERCICE 2 – 5 points

Afin de se préparer à courir des marathons, Hugo aimerait effectuer quotidiennement un footing à compter du 1er janvier 2014.

On admet que :

- Si Hugo court un jour donné, la probabilité qu'il ne coure pas le lendemain est de 0,2 ;
- s'il ne court pas un jour donné, la probabilité qu'il ne coure pas le lendemain est de 0,4.

On note C l'état « Hugo court » et R l'état « Hugo ne court pas ».

Pour tout entier naturel n, on note :

- c_n la probabilité de l'événement « Hugo court le $(n+1)$-ième jour » ;
- r_n la probabilité de l'événement « Hugo ne court pas le $(n+1)$-ième jour » ;
- P_n la matrice $(c_n \quad r_n)$ correspondant à l'état probabiliste le $(n+1)$-ième jour.

Le 1er janvier 2014, motivé, le jeune homme court.
On a donc : $P_0 = (c_0 \quad r_0) = (1 \quad 0)$.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets C et R.

2. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

3. On donne $M^6 = \begin{pmatrix} 0{,}750016 & 0{,}249984 \\ 0{,}749952 & 0{,}250048 \end{pmatrix}$.
   Quel calcul matriciel permet de déterminer la probabilité c_6 qu'Hugo coure le 7e jour ? Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de c_6.

4.
   a. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $c_{n+1} = 0{,}2c_n + 0{,}6$.

5. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par $v_n = c_n - 0{,}75$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,2. Préciser le premier terme.
   b. Exprimer v_n en fonction de n.
   Déterminer la limite de la suite (v_n).
   c. Justifier que, pour tout entier naturel n, $c_n = 0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}2^n$.
   d. Que peut-on conjecturer concernant la probabilité qu'Hugo coure le 29 décembre 2014 ?
   e. Conjecturer alors l'état stable de ce graphe.
   Comment valider votre conjecture ?

EXERCICE 3 – 5 points

Un téléphone portable contient en mémoire 3 200 chansons archivées par catégories : rock, techno, rap, reggae... dont certaines sont interprétées en français.

Parmi toutes les chansons enregistrées, 960 sont classées dans la catégorie rock.

Une des fonctionnalités du téléphone permet d'écouter de la musique en mode « lecture aléatoire » : les chansons écoutées sont choisies au hasard et de façon équiprobable parmi l'ensemble du répertoire.
Au cours de son footing hebdomadaire, le propriétaire du téléphone écoute une chanson grâce à ce mode de lecture.

On note :

- R l'événement : « la chanson écoutée est une chanson de la catégorie rock » ;
- F l'événement : « la chanson écoutée est interprétée en français ».

Les PARTIES A et B sont indépendantes.

PARTIE A

1. Calculer $P(\mathrm{R})$, la probabilité de l'événement R.
2. 35% des chansons de la catégorie rock sont interprétées en français ; traduire cette donnée en utilisant les événements R et F.
3. Calculer la probabilité que la chanson écoutée soit une chanson de la catégorie rock et qu'elle soit interprétée en français.
4. Parmi toutes les chansons enregistrées 38,5% sont interprétées en français.
   Montrer que $P(\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{R}}) = 0{,}28$.
5. En déduire $P_{\overline{\mathrm{R}}}(\mathrm{F})$ et exprimer par une phrase ce que signifie ce résultat.

PARTIE B *Les résultats de cette partie seront arrondis au millième.*

Le propriétaire du téléphone écoute régulièrement de la musique à l'aide de son téléphone portable.

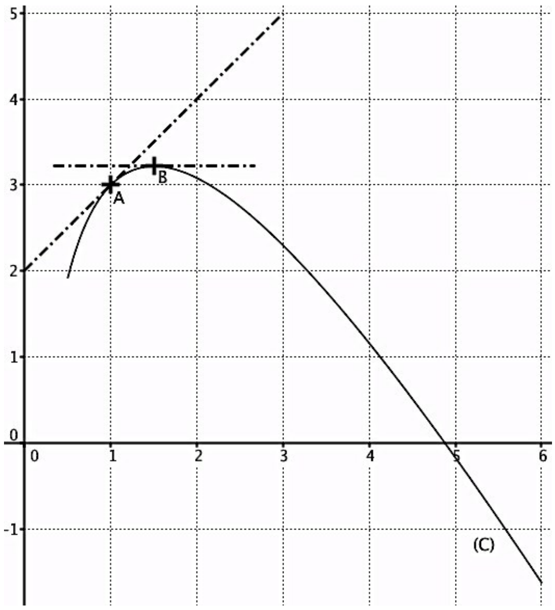
On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque écoute de musique, associe la durée (en minutes) correspondante ; on admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 30$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

Le propriétaire écoute de la musique.

1. Quelle est la probabilité que la durée de cette écoute soit comprise entre 15 et 45 minutes ?
2. Quelle est la probabilité que cette écoute dure plus d'une heure ?

EXERCICE 4 – 6 points

La courbe (C) ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur [0,5 ; 6]. Les points A(1 ; 3) et B d'abscisse 1,5 sont sur la courbe (C).
Les tangentes à la courbe (C) aux points A et B sont aussi représentées en pointillés sur ce graphique, la tangente au point B est horizontale.
On note f' la fonction dérivée de f.



Les PARTIES A et B sont indépendantes.

PARTIE A : ÉTUDE GRAPHIQUE

1. Déterminer $f'(1,5)$.
2. La tangente à la courbe (C) au point A passe par le point de coordonnées (0 ; 2). Déterminer une équation de cette tangente.
3. Donner un encadrement de l'aire, en unités d'aire et à l'unité près, du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.
4. Déterminer la convexité de la fonction f sur [0,5 ; 6]. Argumenter la réponse.

PARTIE B : ÉTUDE ANALYTIQUE

On admet que la fonction f est définie sur [0,5 ; 6] par $f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x)$.

1. Pour tout réel x de $[0,5 ; 6]$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{-2x+3}{x}$.
2. Étudier le signe de f' sur [0,5 ; 6] puis dresser le tableau de variation de f sur [0,5 ; 6].
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution α sur [0,5 ; 6].

   Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4. En déduire le tableau de signe de f sur [0,5 ; 6].
5. On considère la fonction F définie sur [0,5 ; 6] par $F(x) = -x^2 + 2x + 3x\ln(x)$.
   - **a.** Montrer que F est une primitive de f sur [0,5 ; 6].
   - **b.** En déduire l'aire exacte, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$. En donner ensuite une valeur arrondie au dixième.

B A C C A L A U R É A T   G É N É R A L

SESSION 2017

ÉPREUVE DU MERCREDI 21 JUIN 2017

MATHÉMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire **Coefficient : 7**

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages numérotées de 1 à 8.

La page 8 est une annexe à rendre avec la copie.

Exercice 1 (7 points) : **commun à tous les candidats**

Partie A

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $h(x) = xe^{-x}$.

1. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.

3. L'objectif de cette question est de déterminer une primitive de la fonction h.

a. Vérifier que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on a :

$$h(x) = e^{-x} - h'(x)$$

où h' désigne la fonction dérivée de h.

b. Déterminer une primitive sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto e^{-x}$.

c. Déduire des deux questions précédentes une primitive de la fonction h sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Partie B

On définit les fonctions f et g sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = xe^{-x} + \ln(x+1) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \ln(x+1).$$

On note C_f et C_g les représentations graphiques respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé.
Ces deux courbes sont tracées en annexe page 8. Cette annexe est à rendre avec la copie.

1. Pour un nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on appelle M le point de coordonnées $(x; f(x))$ et N le point de coordonnées $\left(x; g(x)\right)$: M et N sont donc les points d'abscisse x appartenant respectivement aux courbes C_f et C_g.

a. Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN est maximale et donner cette distance maximale.

b. Placer sur le graphique fourni en annexe **page 8** les points M et N correspondant à la valeur maximale de MN.

2. Soit λ un réel appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$. On note D_λ le domaine du plan délimité par les courbes C_f et C_g et par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

a. Hachurer le domaine D_λ correspondant à la valeur λ proposée sur le graphique en annexe **page 8**.

b. On note A_λ l'aire du domaine D_λ, exprimée en unités d'aire. Démontrer que :

$$A_\lambda = 1 - \frac{\lambda+1}{e^\lambda}.$$

c. Calculer la limite de A_λ lorsque λ tend vers $+\infty$ et interpréter le résultat.

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables :
λ est un réel positif
S est un réel strictement compris entre 0 et 1.
Initialisation :
Saisir S
λ prend la valeur 0
Traitement :
Tant Que $1 - \frac{\lambda+1}{e^{\lambda}} < S$ faire
λ prend la valeur $\lambda + 1$
Fin Tant Que
Sortie :
Afficher λ

a. Quelle valeur affiche cet algorithme si on saisit la valeur $S = 0{,}8$?

b. Quel est le rôle de cet algorithme ?

Exercice 2 (3 points) : **commun à tous les candidats**

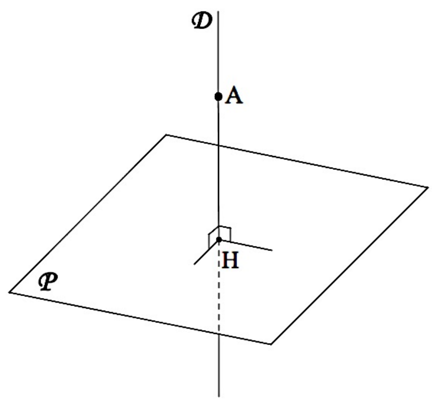
L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne : $2x - z - 3 = 0$.
On note A le point de coordonnées $(1\,;a\,;a^2)$, où a est un nombre réel.

1. Justifier que, quelle que soit la valeur du réel a, le point A n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$.

2. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ (de paramètre noté t) passant par le point A et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

b. Soit M un point appartenant à la droite $\mathcal{D}$, associé à la valeur t du paramètre dans la représentation paramétrique précédente.
Exprimer la distance AM en fonction du réel t.

On note H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale à $\mathcal{P}$ et passant par le point A. Le point H est appelé le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$, et la distance AH est appelée distance du point A au plan $\mathcal{P}$.

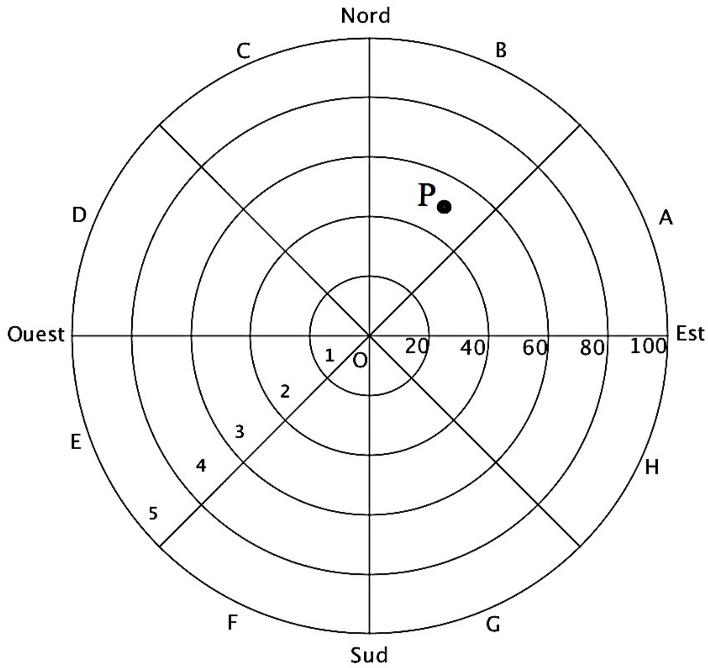


3. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle la distance AH du point A de coordonnées $(1\,;a\,;a^2)$ au plan $\mathcal{P}$ est minimale ? Justifier la réponse.

Exercice 3 (5 points) : **commun à tous les candidats**

Dans une vaste plaine, un réseau de capteurs permet de détecter la foudre et de produire une image des phénomènes orageux. Ces données servent en particulier aux services météorologiques pour améliorer leurs prévisions et pour permettre des interventions plus rapides sur les lieux, notamment en cas d'incendie.

Le but de l'exercice est d'étudier les impacts de foudre détectés par un capteur.
L'écran radar, sur lequel les points d'impact de foudre sont observés, a l'allure suivante :



Le capteur de foudre étant représenté par le centre de l'écran, cinq cercles concentriques correspondant aux rayons respectifs 20, 40, 60, 80 et 100 kilomètres délimitent dans l'ordre cinq zones, numérotées de 1 à 5, définies par leur distance au capteur. De plus, huit segments partant du capteur délimitent huit portions, de même ouverture angulaire, nommées dans le sens trigonométrique de A à H.

L'écran est ainsi partagé en quarante secteurs dénommés par une lettre et un nombre entre 1 et 5. Par exemple, le point P positionné sur la figure est situé dans le secteur B3.

On assimile l'écran radar à une partie du plan complexe en définissant un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$ de la manière suivante :

- l'origine O marque la position du capteur ;
- l'axe des abscisses est orienté d'Ouest en Est ;
- l'axe des ordonnées est orienté du Sud au Nord ;
- l'unité choisie est le kilomètre.

Dans la suite, un point de l'écran radar est associé à un point d'affixe z.

Partie A

1. On note z_{P} l'affixe du point P situé dans le secteur B3 sur le graphique précédent. On appelle r le module de z_{P} et θ son argument dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.
Parmi les quatre propositions suivantes, déterminer la seule qui propose un encadrement correct pour r et pour θ (aucune justification n'est demandée) :

Proposition A	**Proposition B**	**Proposition C**	**Proposition D**
$40 < r < 60$ et $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$	$20 < r < 40$ et $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4}$	$40 < r < 60$ et $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$0 < r < 60$ et $-\frac{\pi}{2} < \theta < -\frac{\pi}{4}$

2. Un impact de foudre est matérialisé sur l'écran en un point d'affixe z. Dans chacun des deux cas suivants, déterminer le secteur auquel ce point appartient :

a. $z = 70\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$;

b. $z = -45\sqrt{3} + 45i$.

Partie B

On suppose dans cette partie que le capteur affiche un impact au point P d'affixe $50e^{i\frac{\pi}{3}}$.

En raison d'imprécisions de mesures, le point d'impact affiché ne donne qu'une indication approximative du point d'impact réel de la foudre.

Ainsi, lorsque le capteur affiche le point d'impact P d'affixe $50e^{i\frac{\pi}{3}}$, l'affixe z du point d'impact réel de la foudre admet :

- un module qui peut être modélisé par une variable aléatoire M suivant une loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart type $\sigma = 5$;
- un argument qui peut être modélisé par une variable aléatoire T suivant une loi normale d'espérance $\frac{\pi}{3}$ et d'écart type $\frac{\pi}{12}$.

On suppose que les variables aléatoires M et T sont indépendantes, c'est à dire que quels que soient les intervalles I et J, les événements $(M \in I)$ et $(T \in J)$ sont indépendants.

Dans la suite les probabilités seront arrondies à 10^{-3} *près.*

1. Calculer la probabilité $P(M < 0)$ et interpréter le résultat obtenu.

2. Calculer la probabilité $P(M \in]40;60[)$.

3. On admet que : $P(T \in]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}[) = 0{,}819$.

En déduire la probabilité que la foudre ait effectivement frappé le secteur B3 selon cette modélisation.

Exercice 4 (5 points) : pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine.

Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

- soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S » ;
- soit malade (atteint par le virus) ;
- soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.

Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

- Parmi les individus de type S en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$:
  85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés ;
- Parmi les individus malades en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$:
  65 % restent malades, et 35 % sont guéris et deviennent immunisés.
- Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n+1$.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les événements suivants :

S_n : « l'individu est de type S en semaine n » ;

M_n : « l'individu est malade en semaine n » ;

I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

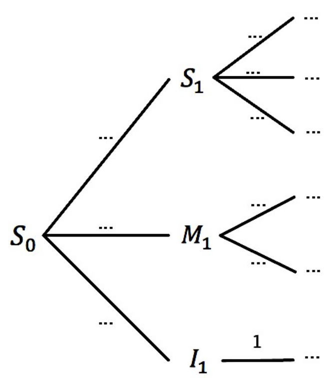
En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes :

$$P(S_0) = 1, P(M_0) = 0 \text{ et } P(I_0) = 0.$$

Partie A

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilités donné ci-dessous :



2. Montrer que $P(I_2) = 0{,}2025$.

3. Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'il ait été malade en semaine 1 ?

Partie B

On étudie dans cette partie l'évolution à long terme de l'épidémie.
Pour tout entier naturel n, on note $u_n = P(S_n)$, $v_n = P(M_n)$ et $w_n = P(I_n)$ les probabilités respectives des événements S_n, M_n et I_n.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n + v_n + w_n = 1$.

On admet que la suite (v_n) est définie par $v_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = 0{,}65v_n + 0{,}05u_n.$$

2. À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites (u_n), (v_n) et (w_n) :

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	0,8500	0,0500	0,1000
4	2	0,7225	0,0750	0,2025
5	3	0,6141	0,0849	0,3010
6	4	0,5220	0,0859	0,3921
7	5	0,4437	0,0819	0,4744
8	6	0,3771	0,0754	0,5474
...	...	...	...	...
20	18	0,0536	0,0133	0,9330
21	19	0,0456	0,0113	0,9431
22	20	0,0388	0,0096	0,9516

Pour répondre aux questions **a** et **b** *suivantes, on utilisera la feuille de calcul reproduite ci-dessus.*

a. Quelle formule, saisie dans la cellule C3, permet, par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (v_n) ?

b. On admet que les termes de (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'un certain rang N, appelé le « pic épidémique » : c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande.
Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par le modèle.

3. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0{,}85\, u_n$.
En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

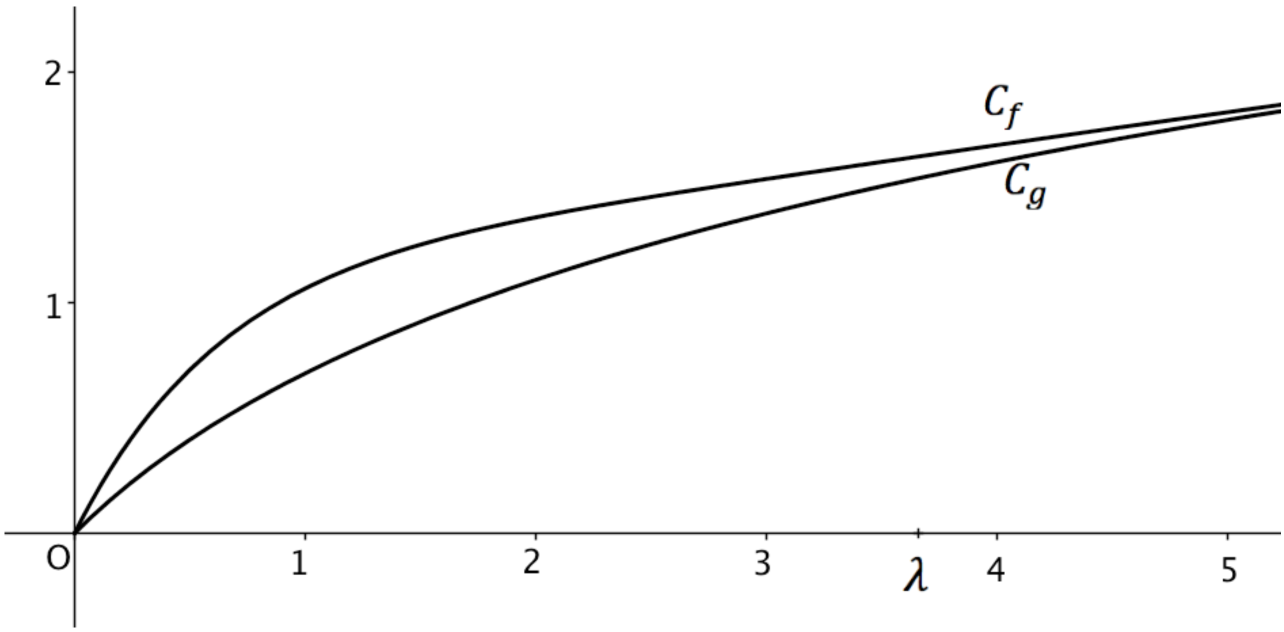
b. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$v_n = \frac{1}{4}\left(0{,}85^n - 0{,}65^n\right).$$

4. Calculer les limites de chacune des trois suites (u_n), (v_n) et (w_n).
Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ?

Annexe à remettre avec la copie

Exercice 1



Corrigé du bac 2017 : Mathématiques Obligatoire Série S – Métropole

Exercice 1

Partie A

$h(x)=x e^{-x}$

1) On peut écrire h sous la forme : $h(x)=\dfrac{x}{e^{x}}$.

La fonction x croît moins vite de la fonction e^{x} quand $x \rightarrow \infty$.
Donc $\lim_{\infty} h(x)=0$ *(on peut le vérifier avec la calculatrice)*

2) Variation de h :
Calcul de la dérivée h' : $h=u v$ avec $u=x$ et $v=e^{-x}$ et $u'=1$ et $v'=-e^{-x}$.
$h'=u'v+uv'=e^{-x}+x(-e^{-x})=(1-x)e^{-x}$
h' s'annule pour x = 1 .

x	0		1		∞
e^{-x}	1	+		+	0
1-x	1	+	0	−	
Signe de h'(x)	1	+	0	−	0
Variation de h(x)	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

3) Primitive de h.
3.a) Vérification : $e^{-x}-h'(x)=e^{-x}-(1-x)e^{-x}=x e^{-x}=h(x)$.

3.b) $\int e^{-x} dx=-e^{-x}$ en effet : $(-e^{-x})'=-(-e^{-x})=e^{-x}$.

3.c) h(x) est la somme de 2 termes dont on connaît les primitives :
$\int h(x) dx=\int e^{-x} dx-\int h'(x) dx=-e^{-x}-h(x)=-e^{-x}-x e^{-x}=-(x+1)e^{-x}$.
Une primitive de h(x) sur $[0;+\infty[$ est $-(x+1)e^{-x}$.
(on vérifie en re-dérivant : $u'v+uv'=-e^{-x}-(x+1)(-e^{-x})=-e^{-x}+x e^{-x}+e^{-x}=x e^{-x}=h(x)$ *)*

Partie B

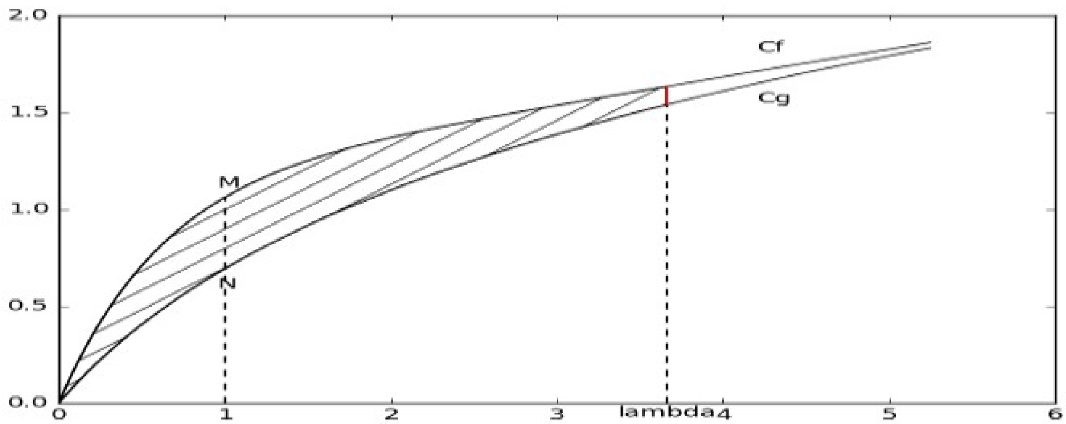
$f(x)=x e^{-x}+\ln(x+1)$ et $g(x)=\ln(x+1)$

1.a) Distance MN : $f(x)-g(x)=x e^{-x}=h(x)$.

La distance MN est maximale pour $x=1$ et vaut $\frac{1}{e}$ (d’après le résultat de la question 2 de la partie A).

1.b) Voir graphique. (*remarque : f(x) – g(x) est maximal quand leurs tangentes sont parallèles).*

2.a) Domaine D_k entre g(x) et f(x) :



2.b) L’aire A_λ est la différence entre l’aire sous la courbe C_f et l’aire sous la courbe C_g :

$A_\lambda=\int_0^\lambda f(x)dx-\int_0^\lambda g(x)dx=\int_0^\lambda f(x)-g(x)dx=\int_0^\lambda h(x)dx$

$A_\lambda=-(\lambda+1)e^{-\lambda}-[-(0+1)e^0]=1-(\lambda+1)e^{-\lambda}$

Que l’on peut écrire sous la forme :

$A_\lambda=1-\frac{(\lambda+1)}{e^\lambda}$

2.c) Quand $\lambda\to\infty$ la fonction e^λ croît plus vite que $\lambda+1$.

Le quotient $\frac{(\lambda+1)}{e^\lambda}\to 0$ donc $A_\lambda\to 1$.

La limite de A_λ est 1.

L’aire entre les deux courbes tend vers l’unité d’aire.

3.a) Initialisation : $S=0,8\,;\lambda=0$.

Premier passage : $1-\frac{\lambda+1}{e^\lambda}=0 < 0,8$ on continue la boucle : $\lambda=1$.

Deuxième passage : $1-\frac{\lambda+1}{e^\lambda}=0,2642 < 0,8$ on continue la boucle : $\lambda=2$.

Troisième passage : $1-\frac{\lambda+1}{e^\lambda}=0,5940 < 0,8$ on continue la boucle : $\lambda=3$.

Quatrième passage : $1-\frac{\lambda+1}{e^\lambda}=0,8009 > 0,8$ on sort de la boucle.

Et l’on affiche la valeur de λ qui vaut 3.

3.b) Le rôle de cet algorithme est de déterminer l’intervalle $[0;\lambda]$ à prendre en compte pour obtenir au moins l’aire S entre les courbes f et g.

Exercice 2

1) Le point A n'appartient pas au plan P si ses coordonnées ne satisfont pas l'équation du plan.
Calculons $2x-z-3$ pour $x=1$ et $z=a^2$.
Nous obtenons : $2-a^2-3=-1-a^2 < 0$ qui ne peut jamais être nul, quelque soit a.
Le point A ne peut pas appartenir au plan P.

2.a) Pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan $ax+by+cz=d$, elle doit être colinéaire au vecteur normal au plan : $\vec{n}=(a,b,c)$ soit : $\vec{n}=(2,0,-1)$ pour le plan P.
Équation vectorielle de la droite D orthogonale à P : $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+t\vec{n}$.
En décomposant cette équation sur les trois axes de coordonnées :

$x=1+2t$
$y=a$
$z=a^2-t$

2.b) Distance $AM=|t\vec{n}|=|t|\sqrt{2^2+1^2}=|t|\sqrt{5}$.

3) H appartient à la droite D et au plan P : ses coordonnées vérifient les deux systèmes d'équations :

$2x-z-3=0$
$x=1+2t$
$y=a$
$z=a^2-t$

En remplaçant x, y, z, dans l'équation du plan : $2(1+2t)-(a^2-t)-3=0$.
Soit : $2+4t-a^2+t-3=0$ on obtient : $t=\dfrac{a^2+1}{5}$.
Donc : $AH=|n||t|=\sqrt{5}\dfrac{a^2+1}{5}$.
AH est minimal pour a = 0 car il est une somme de deux termes positifs.

Exercice 3

Partie A

1) Le rayon du point P est compris dans l'intervalle $[40;60]$

L'angle du point P est compris dans l'intervalle $[45°;90°]=[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}]$

C'est la **proposition C** qui propose un encadrement correct du point P.

2.a) $z=70e^{-i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow r=70\in]60;80[$ et $-\frac{\pi}{2}<\frac{-\pi}{3}<\frac{-\pi}{4}$ z correspond au **secteur G4**.

2.b) $z=-45\sqrt{3}+45i \Rightarrow r=45\sqrt{3+1}=90$ $z=r(\frac{-\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})$

$\cos\theta=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta=\frac{1}{2}$ correspondent à $\theta=\frac{5\pi}{6} \in [\frac{3\pi}{4};\pi]$

z correspond au **secteur D5**.

(remarque : avec la calculatrice, on pouvait convertir z en notation exponentielle)

Partie B

(remarque : arrondi à 10^{-3} près)

1) P(M<0) où M suit une loi normale $N(\mu=50,\sigma=5)$

Calcul à faire à la calculatrice : $P(M<0)=8\times10^{-24}=0$ (après arrondi).

Ce résultat est totalement négligeable car la valeur 0 est à 10 écart-types de la moyenne. C'est tout à fait logique car il est impossible que le module du nombre complexe z soit strictement négative.

(résultat Excel : LOI.NORMALE(0 ; 50 ; 5 ; vrai) = 8e-24)

2) $P(M\in]40;60[)=P(M<60)-P(M<40)=0{,}954$

(résultat Excel : LOI.NORMALE(60 ; 50 ; 5 ; 1) - LOI.NORMALE(40 ; 50 ; 5 ; 1) = 0,95449974 en calculant avec moins de chiffres : 0,954500 , on pouvait aussi arrondir à 0,955)

3) On admet que $P(T\in]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}[)=0{,}819$

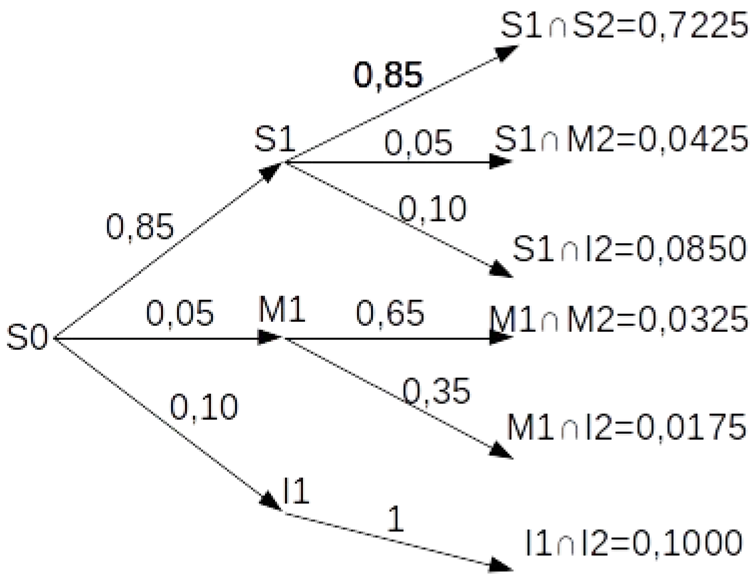
Comme les probabilités M et T sont indépendantes, $P(M\in I \cap T\in J)=P(M\in I)\times P(T\in J)$.

La probabilité que la foudre ait frappé le secteur B3 est $0{,}954\times0{,}819=0{,}781$.

Exercice 4

Partie A

1) Probabilités sur les deux premières semaines :



2) Probabilité totale :

$P(I_2)$ est la somme des probabilités d'arriver à I_2 par 3 chemins possibles :

1) en ayant été susceptible d'être atteint la première semaine S_1
2) en ayant été malade la première semaine M_1
3) en ayant été immunisé dès la première semaine I_1

$P(I_2)=P(S_1\cap I_2)+P(M_1\cap I_2)+P(I_1\cap I_2)$

Que l'on peut écrire : $P(I_2)=P(S_1)P_{S_1}(I_2)+P(M_1)P_{M_1}(I_2)+P(I_1)P_{I_1}(I_2)$

$P(I_2)=0{,}085+0{,}0175+0{,}100=0{,}2025$

3) Probabilité conditionnelle :

$P_{I_2}(M_1)=\dfrac{P(I_2\cap M_1)}{P(I_2)}=\dfrac{0{,}0175}{0{,}2025}=0{,}086$ *(après arrondi au millième)*

Partie B

1) Puisque les individus ne peuvent être que S, M ou I, la somme des probabilités est 1.

2.a) Formule pour la case $C3=v_1=P(M_1)$ (n = 1).

Cases de la ligne 2 :

$\text{A2}=n=0\,;\text{B2}=u_0=P(S_0)=1\,;\text{C2}=v_0=P(M_0)=0\,;\text{D2}=w_0=P(I_0)=0$

Comme nous avons la relation : $v_{n+1}=0{,}65\,v_n+0{,}05\,u_n$

Appliquée à n = 0, elle devient : $v_1=0{,}65\,v_0+0{,}05\,u_0=P(M_1)=\text{C3}$

On remplace v_0 par C2 et u_0 par B2.

Il faut donc écrire la formule : **= 0,65 * C2 + 0,05 * B2** dans la case C3.

2.b) Par lecture dans le tableau : ligne 6 : $n=4$ et $v_4=0{,}086$, le pic épidémique est atteint la semaine 4 pendant laquelle **8,6 %** des individus sont malades.

3.a) Pour qu'un patient soit susceptible d'être atteint, il faut qu'il n'ait jamais été malade ni immunisé. Il a donc dû toujours être susceptible d'être atteint (S)

$S_0=1\,;S_1=0{,}85\,S_0;S_2=0{,}85\,S_1;\ldots$ $\quad (S_n)$ est une suite géométrique de raison 0,85.

Soit : $u_{n+1}=0{,}85\,u_n$ donc $u_n=u_0 0{,}85^n=0{,}85^n$ car $u_0=P(S_0)=1$.

$u_n=0{,}85^n$

3.b) Démontrons par récurrence que : $v_n=\frac{1}{4}(0{,}85^n-0{,}65^n)$

1) **Initialisation** : pour n = 0 : $v_0=0$ et $\frac{1}{4}(0{,}85^0-0{,}65^0)=\frac{1}{4}(1-1)=0$

La formule est vraie pour n = 0

2) **Hérédité** :

Supposons que pour une valeur n fixée, la formule est vraie $v_n=\frac{1}{4}(0{,}85^n-0{,}65^n)$

Nous cherchons à démontrer la formule au rang n+1 : $v_{n+1}=\frac{1}{4}(0{,}85^{n+1}-0{,}65^{n+1})$.

Nous évaluons le membre de gauche v_{n+1} :

Appliquons la relation de récurrence de (v_n) : $v_{n+1}=0{,}65\,v_n+0{,}05\,u_n$

D'une part : le membre de gauche au rang n+1 vaut :

$$v_{n+1}=0{,}65\times\frac{1}{4}(0{,}85^n-0{,}65^n)+0{,}05\times 0{,}85^n$$

$$v_{n+1}=\left(\frac{0{,}65}{4}+0{,}05\right)0{,}85^n-\frac{0{,}65}{4}\,0{,}65^n$$

$$v_{n+1}=0{,}2125\times 0{,}85^n-0{,}1625\times 0{,}65^n$$

D'autre part : le membre de droite au rang n+1 vaut :

$$\frac{1}{4}(0{,}85^{n+1}-0{,}65^{n+1})=\frac{0{,}85}{4}\,0{,}85^n-\frac{0{,}65}{4}\,0{,}65^n=0{,}2125\times 0{,}85^n-0{,}1625\times 0{,}65^n$$

Nous avons bien l'égalité : $v_{n+1}=\frac{1}{4}(0{,}85^{n+1}-0{,}65^{n+1})$ au rang n+1.

La relation est héréditaire.

3) Par application du **raisonnement par récurrence**, comme la relation $v_n=\frac{1}{4}(0{,}85^n-0{,}65^n)$ est vraie au rang 0 et héréditaire, elle est vraie pour tout n supérieur ou égal à 0.

4) La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $0{,}65<1$: sa **limite est nulle**.

La suite (v_n) est une combinaison linéaire de deux suites géométriques de raisons < 1 : sa **limite est nulle**.

La suite (w_n) **tend vers 1** afin de conserver la relation $u_n+v_n+w_n=1$.

A long terme, **toute la population sera immunisée** contre la maladie.

B A C C A L A U R É A T   G É N É R A L

SESSION 2017

ÉPREUVE DU MERCREDI 21 JUIN 2017

MATHÉMATIQUES

- Série S -

Enseignement Spécialité **Coefficient : 9**

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées de 1 à 7.

La page 7 est une annexe à rendre avec la copie.

Exercice 1 (7 points) : **commun à tous les candidats**

Partie A

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $h(x) = xe^{-x}$.

1. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

3. L'objectif de cette question est de déterminer une primitive de la fonction h.

   a. Vérifier que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$, on a :
   $$h(x) = e^{-x} - h'(x)$$
   où h' désigne la fonction dérivée de h.

   b. Déterminer une primitive sur l'intervalle $[0;+\infty[$ de la fonction $x \longmapsto e^{-x}$.

   c. Déduire des deux questions précédentes une primitive de la fonction h sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Partie B

On définit les fonctions f et g sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :
$$f(x) = xe^{-x} + \ln(x+1) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \ln(x+1).$$

On note C_f et C_g les représentations graphiques respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé.
Ces deux courbes sont tracées en annexe page 7. Cette annexe est à rendre avec la copie.

1. Pour un nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$, on appelle M le point de coordonnées $(x; f(x))$ et N le point de coordonnées $\left(x; g(x)\right)$: M et N sont donc les points d'abscisse x appartenant respectivement aux courbes C_f et C_g.

   a. Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN est maximale et donner cette distance maximale.

   b. Placer sur le graphique fourni en annexe **page 7** les points M et N correspondant à la valeur maximale de MN.

2. Soit λ un réel appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$. On note D_λ le domaine du plan délimité par les courbes C_f et C_g et par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

   a. Hachurer le domaine D_λ correspondant à la valeur λ proposée sur le graphique en annexe **page 7**.

   b. On note A_λ l'aire du domaine D_λ, exprimée en unités d'aire. Démontrer que :
   $$A_\lambda = 1 - \frac{\lambda+1}{e^\lambda}.$$

   c. Calculer la limite de A_λ lorsque λ tend vers $+\infty$ et interpréter le résultat.

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	
	λ est un réel positif
	S est un réel strictement compris entre 0 et 1.
Initialisation :	
	Saisir S
	λ prend la valeur 0
Traitement :	
	Tant Que $1 - \frac{\lambda+1}{e^{\lambda}} < S$ faire
	$\quad\lambda$ prend la valeur $\lambda + 1$
	Fin Tant Que
Sortie :	
	Afficher λ

a. Quelle valeur affiche cet algorithme si on saisit la valeur $S = 0{,}8$?

b. Quel est le rôle de cet algorithme ?

Exercice 2 (3 points) : **commun à tous les candidats**

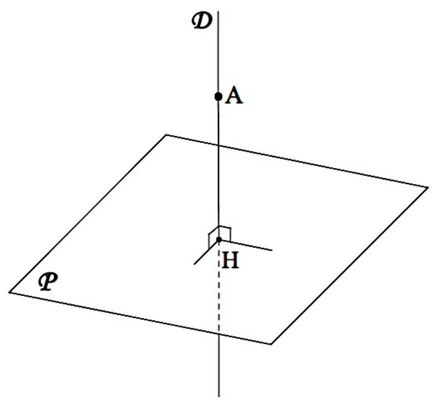
L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne : $2x - z - 3 = 0$.
On note A le point de coordonnées $(1\,;a\,;a^2)$, où a est un nombre réel.

1. Justifier que, quelle que soit la valeur du réel a, le point A n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$.

2. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ (de paramètre noté t) passant par le point A et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

b. Soit M un point appartenant à la droite $\mathcal{D}$, associé à la valeur t du paramètre dans la représentation paramétrique précédente.
Exprimer la distance AM en fonction du réel t.

On note H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale à $\mathcal{P}$ et passant par le point A. Le point H est appelé le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$, et la distance AH est appelée distance du point A au plan $\mathcal{P}$.

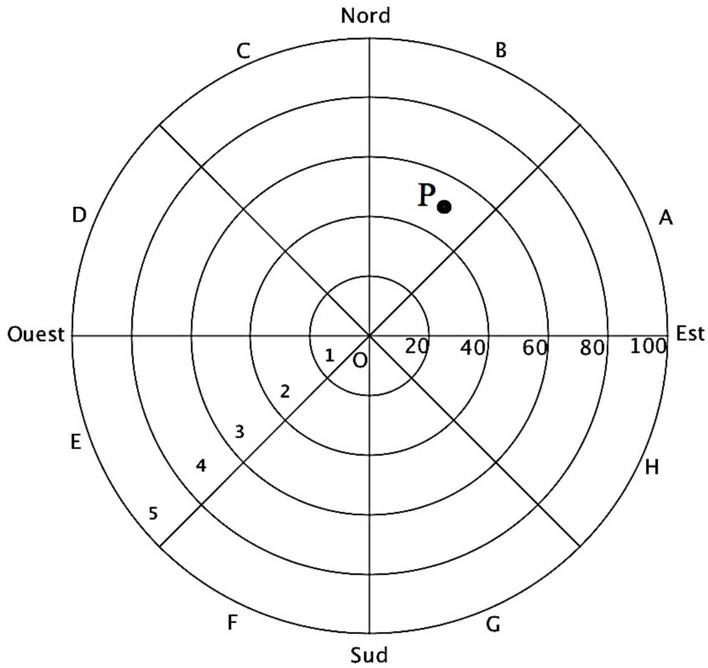


3. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle la distance AH du point A de coordonnées $(1\,;a\,;a^2)$ au plan $\mathcal{P}$ est minimale ? Justifier la réponse.

Exercice 3 (5 points) : **commun à tous les candidats**

Dans une vaste plaine, un réseau de capteurs permet de détecter la foudre et de produire une image des phénomènes orageux. Ces données servent en particulier aux services météorologiques pour améliorer leurs prévisions et pour permettre des interventions plus rapides sur les lieux, notamment en cas d'incendie.

Le but de l'exercice est d'étudier les impacts de foudre détectés par un capteur.
L'écran radar, sur lequel les points d'impact de foudre sont observés, a l'allure suivante :



Le capteur de foudre étant représenté par le centre de l'écran, cinq cercles concentriques correspondant aux rayons respectifs 20, 40, 60, 80 et 100 kilomètres délimitent dans l'ordre cinq zones, numérotées de 1 à 5, définies par leur distance au capteur. De plus, huit segments partant du capteur délimitent huit portions, de même ouverture angulaire, nommées dans le sens trigonométrique de A à H.

L'écran est ainsi partagé en quarante secteurs dénommés par une lettre et un nombre entre 1 et 5. Par exemple, le point P positionné sur la figure est situé dans le secteur B3.

On assimile l'écran radar à une partie du plan complexe en définissant un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ de la manière suivante :

- l'origine O marque la position du capteur ;
- l'axe des abscisses est orienté d'Ouest en Est ;
- l'axe des ordonnées est orienté du Sud au Nord ;
- l'unité choisie est le kilomètre.

Dans la suite, un point de l'écran radar est associé à un point d'affixe z.

Partie A

1. On note z_{P} l'affixe du point P situé dans le secteur B3 sur le graphique précédent. On appelle r le module de z_{P} et θ son argument dans l'intervalle $\left]-\pi;\pi\right]$.
Parmi les quatre propositions suivantes, déterminer la seule qui propose un encadrement correct pour r et pour θ (aucune justification n'est demandée) :

Proposition A	**Proposition B**	**Proposition C**	**Proposition D**
$40 < r < 60$ et $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$	$20 < r < 40$ et $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4}$	$40 < r < 60$ et $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$0 < r < 60$ et $-\frac{\pi}{2} < \theta < -\frac{\pi}{4}$

2. Un impact de foudre est matérialisé sur l'écran en un point d'affixe z. Dans chacun des deux cas suivants, déterminer le secteur auquel ce point appartient :

a. $z = 70\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$;

b. $z = -45\sqrt{3} + 45i$.

Partie B

On suppose dans cette partie que le capteur affiche un impact au point P d'affixe $50e^{i\frac{\pi}{3}}$.

En raison d'imprécisions de mesures, le point d'impact affiché ne donne qu'une indication approximative du point d'impact réel de la foudre.

Ainsi, lorsque le capteur affiche le point d'impact P d'affixe $50e^{i\frac{\pi}{3}}$, l'affixe z du point d'impact réel de la foudre admet :

- un module qui peut être modélisé par une variable aléatoire M suivant une loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart type $\sigma = 5$;
- un argument qui peut être modélisé par une variable aléatoire T suivant une loi normale d'espérance $\frac{\pi}{3}$ et d'écart type $\frac{\pi}{12}$.

On suppose que les variables aléatoires M et T sont indépendantes, c'est à dire que quels que soient les intervalles I et J, les événements $(M \in I)$ et $(T \in J)$ sont indépendants.

Dans la suite les probabilités seront arrondies à 10^{-3} près.

1. Calculer la probabilité $P(M < 0)$ et interpréter le résultat obtenu.

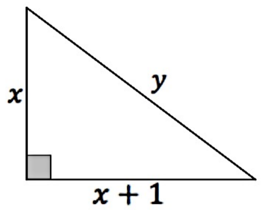
2. Calculer la probabilité $P(M \in]40; 60[)$.

3. On admet que : $P\left(T \in \left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[\right) = 0{,}819$.

En déduire la probabilité que la foudre ait effectivement frappé le secteur B3 selon cette modélisation.

Exercice 4 (5 points) : pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On appelle « triangle rectangle presque isocèle », en abrégé TRPI, un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs x et $x+1$, et dont l'hypoténuse a pour longueur y, où x et y sont des entiers naturels.
Ainsi, un TRPI est un triangle rectangle dont les longueurs des côtés de l'angle droit sont deux nombres entiers consécutifs et dont la longueur de l'hypoténuse est un nombre entier.



Si le triangle de côtés $x,\ x+1$ et y, où y est la longueur de l'hypoténuse, est un TRPI, on dira que le couple $(x\,;y)$ définit un TRPI.

Partie A

1. Démontrer que le couple d'entiers naturels $(x;y)$ définit un TRPI si et seulement si on a :
$$y^2 = 2x^2 + 2x + 1$$
2. Montrer que le TRPI ayant les plus petits côtés non nuls est défini par le couple (3 ; 5).
3. **a.** Soit n un entier naturel. Montrer que si n^2 est impair alors n est impair.

   b. Montrer que dans un couple d'entiers $(x\,;y)$ définissant un TRPI, le nombre y est nécessairement impair.
4. Montrer que si le couple d'entiers naturels $(x\,;y)$ définit un TRPI, alors x et y sont premiers entre eux.

Partie B

On note A la matrice carrée : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, et B la matrice colonne : $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Soient x et y deux entiers naturels ; on définit les entiers naturels x' et y' par la relation :
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B\ .$$

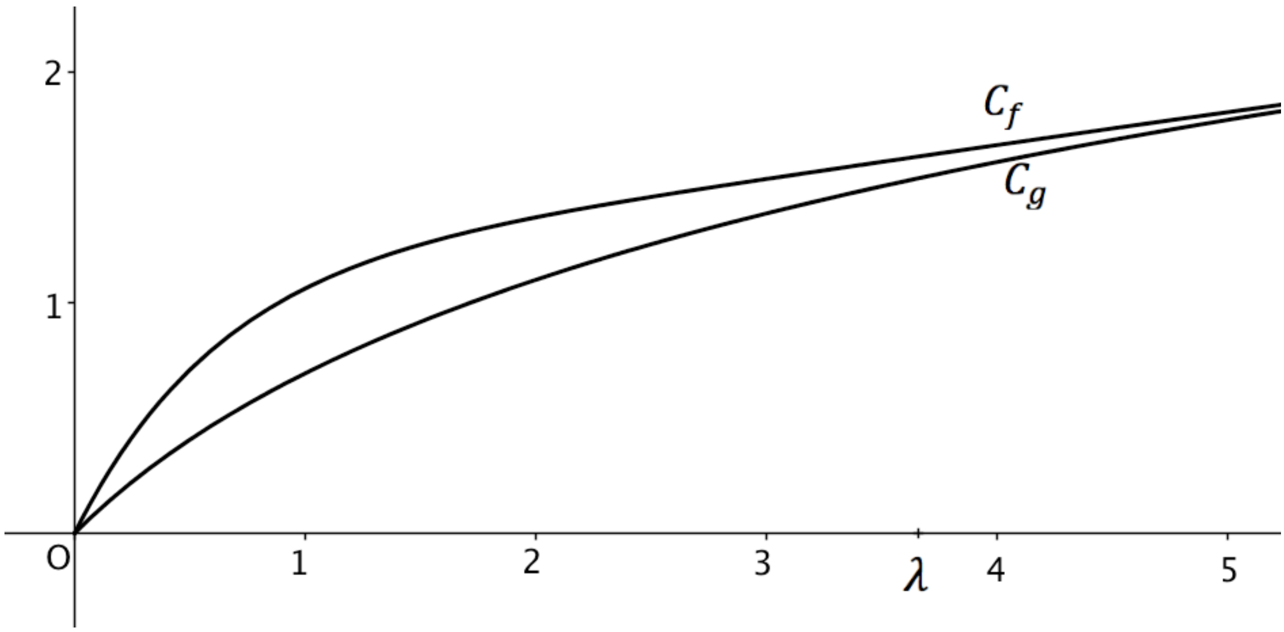
1. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
2. **a.** Montrer que : $y'^2 - 2x'(x'+1) = y^2 - 2x(x+1)$.

   b. En déduire que si le couple $(x\,;y)$ définit un TRPI, alors le couple $(x';y')$ définit également un TRPI.
3. On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'entiers naturels, définies par $x_0 = 3, y_0 = 5$ et pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + B.$

   Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, le couple $(x_n\,;y_n)$ définit un TRPI.
4. Déterminer, par la méthode de votre choix que vous préciserez, un TRPI dont les longueurs des côtés sont supérieures à 2017.

Annexe à remettre avec la copie

Exercice 1



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2017

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 5

MATHÉMATIQUES – Série L

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 4

SUJET

EPREUVE DU MERCREDI 21 JUIN 2017

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 7 pages, y compris celle-ci.

Exercice 1 (6 points)

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis au millième près.

1. Un supermarché dispose de plusieurs caisses. Un client qui se présente à une caisse doit attendre un certain temps T_1 avant d'être pris en charge par le caissier. On considère que ce temps d'attente T_1, exprimé en minute, est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle [0 ; 12].

a. Quelle est la probabilité qu'un client attende au moins 5 minutes avant d'être pris en charge ?

b. Quel est le temps moyen d'attente à une caisse ?

2. Le gérant du magasin décide de mettre à disposition des clients des caisses automatiques, de façon à réduire le temps d'attente pour les clients ayant un panier contenant peu d'articles.
Le temps d'attente T_2, exprimé en minute, à chacune de ces caisses automatiques est modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne 5 et d'écart type 1,5.
Calculer la probabilité que le temps d'attente à une caisse automatique soit compris entre 0,75 minute et 6 minutes.

3. Ces caisses automatiques tombent souvent en panne. On donne les informations suivantes.

- Le nombre de caisses automatiques est $n = 10$.
- La probabilité qu'une caisse automatique tombe en panne pendant une journée donnée est $p = 0{,}1$.
- Une panne constatée sur une caisse automatique n'influence pas les autres caisses automatiques.

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de caisses automatiques qui tombent en panne pendant une journée donnée.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.

b. Calculer la probabilité pour qu'aucune caisse automatique ne tombe en panne pendant une journée donnée.

4. Sur la devanture de son magasin, le gérant du supermarché affiche :
« Plus de 90% des clients de notre magasin sont satisfaits par la mise en place de nos caisses automatiques. »
Une association de consommateurs souhaite examiner cette affirmation. Pour cela, elle réalise un sondage : 860 clients sont interrogés, et 763 d'entre eux se disent satisfaits par la mise en place de ces caisses automatiques.
Cela remet-il en question l'affirmation du gérant ?

Exercice 2 (5 points)

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Au 1er janvier 2017, une association sportive compte 900 adhérents. On constate que chaque mois :

- 25% des adhérents de l'association ne renouvellent pas leur adhésion ;
- 12 nouvelles personnes décident d'adhérer à l'association.

PARTIE A

On modélise le nombre d'adhérents de l'association par la suite (u_n) telle que $u_0 = 900$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 0{,}75u_n + 12.$$

Le terme u_n donne ainsi une estimation du nombre d'adhérents de l'association au bout de n mois.

1. Déterminer une estimation du nombre d'adhérents au 1er mars 2017.

2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 48$ pour tout entier naturel n.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75.

b. Préciser v_0 et exprimer v_n en fonction de n.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 852 \times 0{,}75^n + 48.$$

3. La présidente de l'association déclare qu'elle démissionnera si le nombre d'adhérents devient inférieur à 100. Si on fait l'hypothèse que l'évolution du nombre d'adhérents se poursuit de la même façon, faudra-t-il que la présidente démissionne ? Si oui, au bout de combien de mois ?

PARTIE B

Chaque adhérent verse une cotisation de 10 euros par mois. Le trésorier de l'association souhaite prévoir le montant total des cotisations pour l’année 2017.
Le trésorier souhaite utiliser l’algorithme suivant dans lequel la septième et la dernière ligne sont restées incomplètes (pointillés).

1. Recopier et compléter l’algorithme de façon qu’il affiche le montant total des cotisations de l’année 2017.

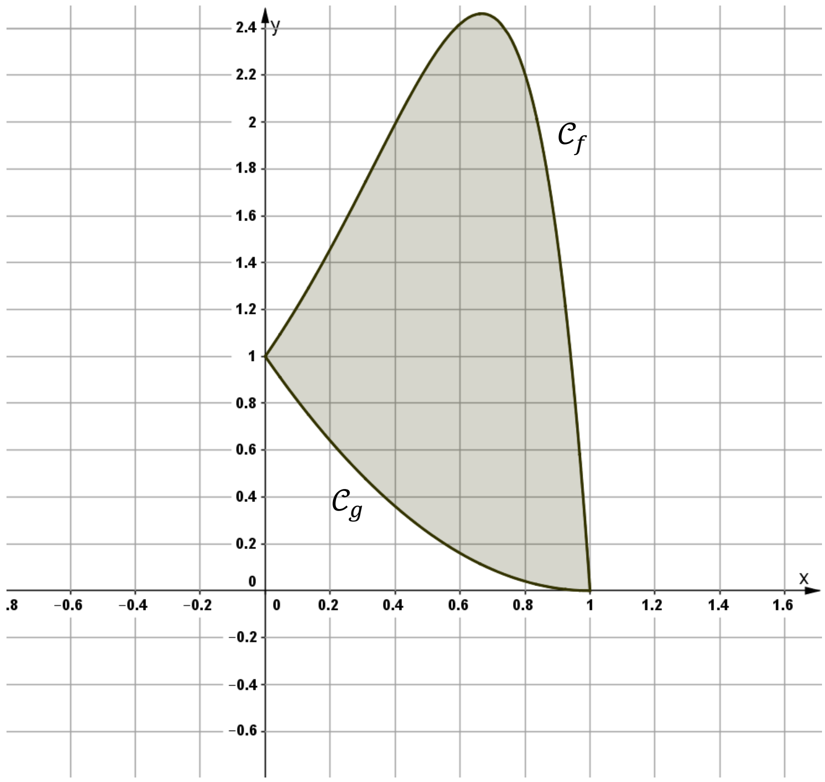
Variables	S est un nombre réel N est un entier U est un nombre réel
Initialisation	S prend la valeur 0 U prend la valeur 900
	Pour N allant de 1 à 12 : Affecter à S la valeur **………** Affecter à U la valeur 0,75U+12 Fin pour
Sortie	**………**

2. Quelle est la somme totale des cotisations perçues par l’association pendant l’année 2017 ?

Exercice 3 (6 points)

Commun à tous les candidats

Une entreprise souhaite utiliser un motif décoratif pour sa communication.
Pour réaliser ce motif, on modélise sa forme à l'aide de deux fonctions f et g définies par : pour tout réel x de $[0\,;1]$, $f(x) = (1-x)\mathrm{e}^{3x}$ et $g(x) = x^2 - 2x + 1$.
Leurs courbes représentatives seront notées respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.



Partie A

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants.

```
dériver((1-x)*exp(3x))
                : -3x*exp(3*x)+2*exp(3*x)

factoriser(-3x*exp(3*x)+2*exp(3*x))
                : exp(3x)*(-3x+2)

factoriser(dériver(exp(3x)*(-3x+2)))
                : 3*exp(3*x)(1-3x)
```

Lecture : la dérivée de la fonction f est donnée par $f'(x) = -3x\mathrm{e}^{3x} + 2\mathrm{e}^{3x}$, ce qui, après factorisation, donne $f'(x) = (-3x+2)\mathrm{e}^{3x}$.

1. Étudier sur $[0\,;1]$ le signe de la fonction dérivée f', puis donner le tableau de variation de f sur $[0\,;1]$ en précisant les valeurs utiles.

2. La courbe $\mathcal{C}_f$ possède un point d'inflexion. Déterminer ses coordonnées.

Partie B

On se propose de calculer l'aire de la partie grisée sur le graphique.

1. Vérifier que les points A et B de coordonnées respectives $(1\ ;0)$ et $(0\ ;1)$ sont des points communs aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

2. On admet que : pour tout x dans $[0\ ;1]$, $f(x) - g(x) = (1 - x)(\mathrm{e}^{3x} - 1 + x)$.

a. Justifier que pour tout x dans $[0\ ;1]$, $\mathrm{e}^{3x} - 1 \geq 0$.

b. En déduire que pour tout x dans $[0\ ;1]$, $\mathrm{e}^{3x} - 1 + x \geq 0$.

c. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ pour tout x dans $[0\ ;1]$.

3. a. Calculer $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

b. On admet que :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^3 - 4}{9}.$$

Calculer l'aire S, en unité d'aire, de la partie grisée. Arrondir le résultat au dixième.

Exercice 4 (3 points)

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, on considère le premier chiffre des entiers naturels non nuls, en écriture décimale. Par exemple, le premier chiffre de 2017 est 2 et le premier chiffre de 95 est 9.

Dans certaines circonstances, le premier chiffre d'un nombre aléatoire non nul peut être modélisé par une variable aléatoire X telle que pour tout entier c compris entre 1 et 9,

$$P(X = c) = \frac{\ln(c + 1) - \ln(c)}{\ln(10)}.$$

Cette loi est appelée loi de Benford.

1. Que vaut $P(X = 1)$?

2. On souhaite examiner si la loi de Benford est un modèle valide dans deux cas particuliers.

a. *Premier cas.*

Un fichier statistique de l'INSEE indique la population des communes en France au 1er janvier 2016 (champ : France métropolitaine et départements d'outre-mer de la Guadeloupe, de la Guyane, de la Martinique et de la Réunion).

À partir de ce fichier, on constate qu'il y a 36 677 communes habitées. Parmi elles, il y a 11 094 communes dont la population est un nombre qui commence par le chiffre 1.

Cette observation vous semble-t-elle compatible avec l'affirmation : « le premier chiffre de la population des communes en France au 1er janvier 2016 suit la loi de Benford » ?

b. *Deuxième cas*.

Pour chaque candidat au baccalauréat de la session 2017, on considère sa taille en centimètres.

On désigne par X la variable aléatoire égale au premier chiffre de la taille en centimètres d'un candidat pris au hasard.

La loi de Benford vous semble-t-elle une loi adaptée pour X ?

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2017

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

EPREUVE DU MERCREDI 21 JUIN 2017

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 7 pages, y compris celle-ci.

Exercice 1 (6 points)

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis au millième près.

1. Un supermarché dispose de plusieurs caisses. Un client qui se présente à une caisse doit attendre un certain temps T_1 avant d'être pris en charge par le caissier. On considère que ce temps d'attente T_1, exprimé en minute, est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle [0 ; 12].

a. Quelle est la probabilité qu'un client attende au moins 5 minutes avant d'être pris en charge ?

b. Quel est le temps moyen d'attente à une caisse ?

2. Le gérant du magasin décide de mettre à disposition des clients des caisses automatiques, de façon à réduire le temps d'attente pour les clients ayant un panier contenant peu d'articles.
Le temps d'attente T_2, exprimé en minute, à chacune de ces caisses automatiques est modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne 5 et d'écart type 1,5.
Calculer la probabilité que le temps d'attente à une caisse automatique soit compris entre 0,75 minute et 6 minutes.

3. Ces caisses automatiques tombent souvent en panne. On donne les informations suivantes.

- Le nombre de caisses automatiques est $n = 10$.
- La probabilité qu'une caisse automatique tombe en panne pendant une journée donnée est $p = 0{,}1$.
- Une panne constatée sur une caisse automatique n'influence pas les autres caisses automatiques.

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de caisses automatiques qui tombent en panne pendant une journée donnée.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.

b. Calculer la probabilité pour qu'aucune caisse automatique ne tombe en panne pendant une journée donnée.

4. Sur la devanture de son magasin, le gérant du supermarché affiche :
« Plus de 90% des clients de notre magasin sont satisfaits par la mise en place de nos caisses automatiques. »
Une association de consommateurs souhaite examiner cette affirmation. Pour cela, elle réalise un sondage : 860 clients sont interrogés, et 763 d'entre eux se disent satisfaits par la mise en place de ces caisses automatiques.
Cela remet-il en question l'affirmation du gérant ?

Exercice 2 (5 points)

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A

Dans un jeu vidéo, une suite d'énigmes est proposée au joueur. Ces énigmes sont classées en deux catégories : les énigmes de catégorie A sont les énigmes faciles ; les énigmes de catégorie B sont les énigmes difficiles.

Le choix des énigmes successives est aléatoire et vérifie les conditions suivantes :

- la première énigme est facile ;
- si une énigme est facile, la probabilité que la suivante soit difficile est égale à 0,15 ;
- si une énigme est difficile, la probabilité que la suivante soit facile est égale à 0,1.

Pour $n \geq 1$, on note :

- a_n la probabilité que l'énigme numéro n soit facile (de catégorie A) ;
- b_n la probabilité que l'énigme numéro n soit difficile (de catégorie B) ;
- $P_n = (a_n \ \ b_n)$ l'état probabiliste pour l'énigme numéro n.

1. Donner la matrice P_1.

2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.

3. Écrire la matrice M associée à ce graphe, puis donner la matrice ligne P_2.

4. Sachant que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $a_n + b_n = 1$, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $a_{n+1} = 0{,}75\, a_n + 0{,}1$.

5. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $v_n = a_n - 0{,}4$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Exprimer v_n en fonction de n, puis montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

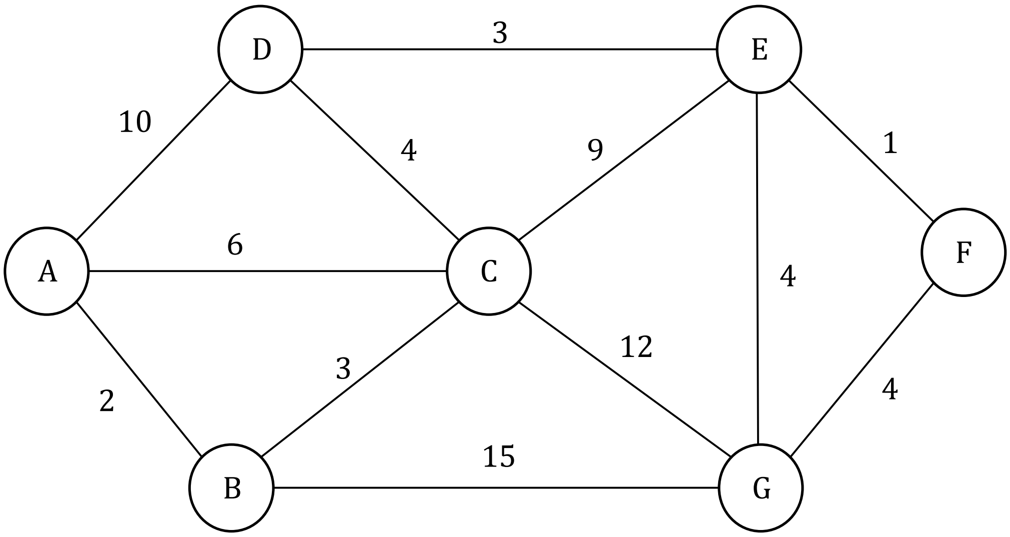
$$a_n = 0{,}8 \times 0{,}75^n + 0{,}4.$$

c. Préciser la limite de la suite (v_n).

d. Une revue spécialisée dans les jeux vidéo indique que plus le joueur évolue dans le jeu plus il risque d'avoir à résoudre des énigmes difficiles. Que penser de cette analyse ?

PARTIE B

Une des énigmes consiste à réaliser un parcours en le minimum de temps. Le graphe suivant schématise le parcours. L'étiquette de chaque arête indique le temps de parcours en minute entre les deux sommets qu'elle relie. Par exemple, le temps de parcours de C vers D, ou de D à C, est égal à quatre minutes.

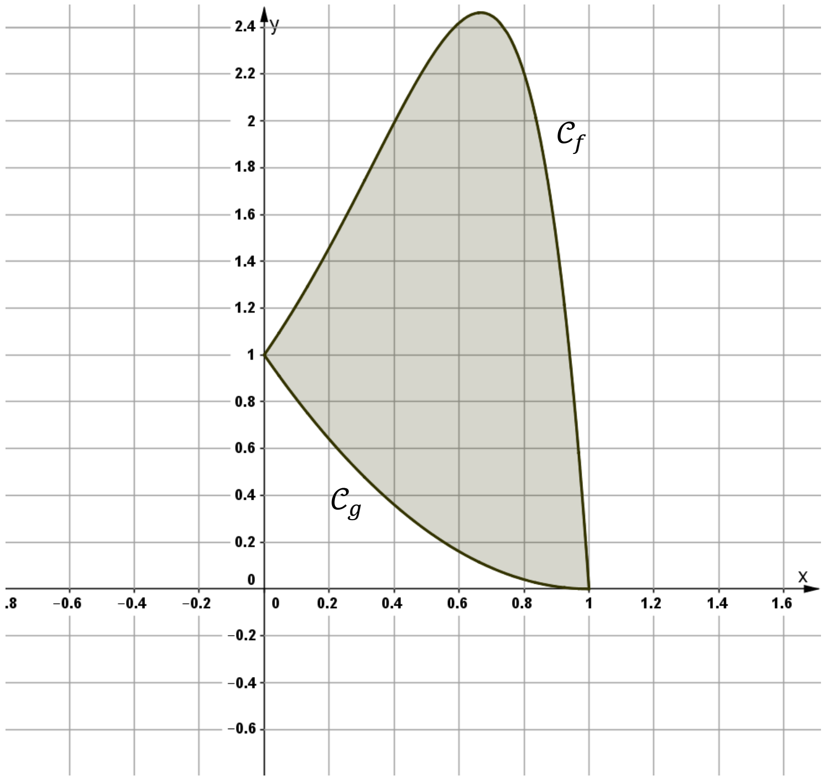


Quel chemin le joueur doit-il prendre pour aller de A à G en minimisant son temps de parcours ? Expliquer la démarche utilisée.

Exercice 3 (6 points)

Commun à tous les candidats

Une entreprise souhaite utiliser un motif décoratif pour sa communication.
Pour réaliser ce motif, on modélise sa forme à l'aide de deux fonctions f et g définies par :
pour tout réel x de $[0\,;1]$, $f(x) = (1-x)\mathrm{e}^{3x}$ et $g(x) = x^2 - 2x + 1$.
Leurs courbes représentatives seront notées respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.



Partie A

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants.

```
dériver((1-x)*exp(3x))
            : -3x*exp(3*x)+2*exp(3*x)

factoriser(-3x*exp(3*x)+2*exp(3*x))
            : exp(3x)*(-3x+2)

factoriser(dériver(exp(3x)*(-3x+2)))
            : 3*exp(3*x)(1-3x)
```

Lecture : la dérivée de la fonction f est donnée par $f'(x) = -3x\mathrm{e}^{3x} + 2\mathrm{e}^{3x}$, ce qui, après factorisation, donne $f'(x) = (-3x+2)\mathrm{e}^{3x}$.

1. Étudier sur [0 ; 1] le signe de la fonction dérivée f', puis donner le tableau de variation de f sur [0 ; 1] en précisant les valeurs utiles.

2. La courbe $\mathcal{C}_f$ possède un point d'inflexion. Déterminer ses coordonnées.

Partie B

On se propose de calculer l'aire de la partie grisée sur le graphique.

1. Vérifier que les points A et B de coordonnées respectives (1 ; 0) et (0 ; 1) sont des points communs aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

2. On admet que : pour tout x dans [0 ; 1], $f(x) - g(x) = (1 - x)(\mathrm{e}^{3x} - 1 + x)$.

a. Justifier que pour tout x dans [0 ; 1], $\mathrm{e}^{3x} - 1 \geq 0$.

b. En déduire que pour tout x dans [0 ; 1], $\mathrm{e}^{3x} - 1 + x \geq 0$.

c. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ pour tout x dans [0 ; 1].

3. a. Calculer $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

b. On admet que :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^3 - 4}{9}.$$

Calculer l'aire S, en unité d'aire, de la partie grisée. Arrondir le résultat au dixième.

Exercice 4 (3 points)

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, on considère le premier chiffre des entiers naturels non nuls, en écriture décimale. Par exemple, le premier chiffre de 2017 est 2 et le premier chiffre de 95 est 9.
Dans certaines circonstances, le premier chiffre d'un nombre aléatoire non nul peut être modélisé par une variable aléatoire X telle que pour tout entier c compris entre 1 et 9,

$$P(X = c) = \frac{\ln(c + 1) - \ln(c)}{\ln(10)}.$$

Cette loi est appelée loi de Benford.

1. Que vaut $P(X = 1)$?

2. On souhaite examiner si la loi de Benford est un modèle valide dans deux cas particuliers.

a. *Premier cas.*

Un fichier statistique de l'INSEE indique la population des communes en France au 1er janvier 2016 (champ : France métropolitaine et départements d'outre-mer de la Guadeloupe, de la Guyane, de la Martinique et de la Réunion).

À partir de ce fichier, on constate qu'il y a 36 677 communes habitées. Parmi elles, il y a 11 094 communes dont la population est un nombre qui commence par le chiffre 1.

Cette observation vous semble-t-elle compatible avec l'affirmation : « le premier chiffre de la population des communes en France au 1er janvier 2016 suit la loi de Benford » ?

b. *Deuxième cas.*

Pour chaque candidat au baccalauréat de la session 2017, on considère sa taille en centimètres.

On désigne par X la variable aléatoire égale au premier chiffre de la taille en centimètres d'un candidat pris au hasard.

La loi de Benford vous semble-t-elle une loi adaptée pour X ?

B A C C A L A U R É A T   G É N É R A L

SESSION 2018

ÉPREUVE DU VENDREDI 22 JUIN 2018

MATHÉMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire **Coefficient : 7**

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages numérotées de 1 à 8.

Exercice 1 (6 points) **Commun à tous les candidats**

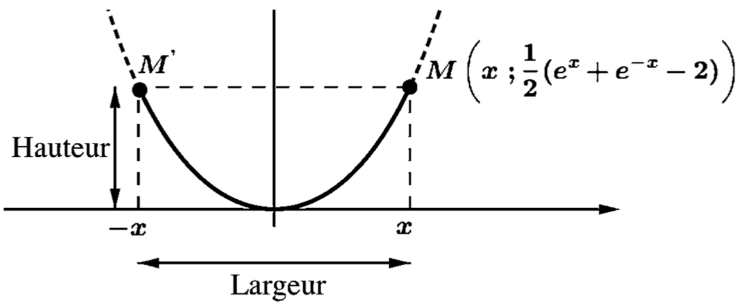
Dans cet exercice, on munit le plan d'un repère orthonormé.

On a représenté ci-dessous la courbe d'équation :

$$y = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 2\right).$$

Cette courbe est appelée une « chaînette ».

On s'intéresse ici aux « arcs de chaînette » délimités par deux points de cette courbe symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
Un tel arc est représenté sur le graphique ci-dessous en trait plein.
On définit la « largeur » et la « hauteur » de l'arc de chaînette délimité par les points M et M' comme indiqué sur le graphique.



Le but de l'exercice est d'étudier les positions possibles sur la courbe du point M d'abscisse x strictement positive afin que la largeur de l'arc de chaînette soit égale à sa hauteur.

1. Justifier que le problème étudié se ramène à la recherche des solutions strictement positives de l'équation (E) : $\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 4x - 2 = 0$.

2. On note f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 4x - 2.$$

   a. Vérifier que pour tout $x > 0$, $f(x) = x\left(\frac{\mathrm{e}^{x}}{x} - 4\right) + \mathrm{e}^{-x} - 2$.

   b. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$, où x appartient à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

   b. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ équivaut à l'équation : $(\mathrm{e}^{x})^2 - 4\mathrm{e}^{x} - 1 = 0$.

   c. En posant $X = \mathrm{e}^{x}$, montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet pour unique solution réelle le nombre $\ln(2 + \sqrt{5})$.

4. On donne ci-dessous le tableau de signes de la fonction dérivée f' de f :

x	0		$\ln(2+\sqrt{5})$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

   a. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

   b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive que l'on notera α.

5. On considère l'algorithme suivant où les variables a, b et m sont des nombres réels :

```
Tant que b − a > 0,1  faire :
      m ← (a+b)/2
      Si e^m + e^(−m) − 4m − 2 > 0, alors :
                  b ← m
      Sinon :
                  a ← m
      Fin Si
Fin Tant que
```

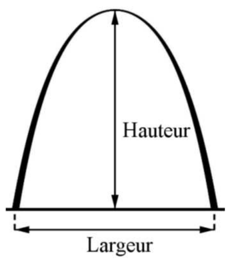
a. Avant l'exécution de cet algorithme, les variables a et b contiennent respectivement les valeurs 2 et 3.
Que contiennent-elles à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau ci-contre avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme.

$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{b-a}$
	2	**3**	**1**
2,5			
…	…	…	…

b. Comment peut-on utiliser les valeurs obtenues en fin d'algorithme à la question précédente ?

6.

La *Gateway Arch*, édifiée dans la ville de Saint-Louis aux États-Unis, a l'allure ci-contre.
Son profil peut être approché par un arc de chaînette renversé dont la largeur est égale à la hauteur.



La largeur de cet arc, exprimée en mètre, est égale au double de la solution strictement positive de l'équation :

$$(E') : \ \mathrm{e}^{\frac{t}{39}} + \mathrm{e}^{-\frac{t}{39}} - 4\frac{t}{39} - 2 = 0.$$

Donner un encadrement de la hauteur de la *Gateway Arch.*

Exercice 2 (4 points) **Commun à tous les candidats**

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville.
La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.

Partie A

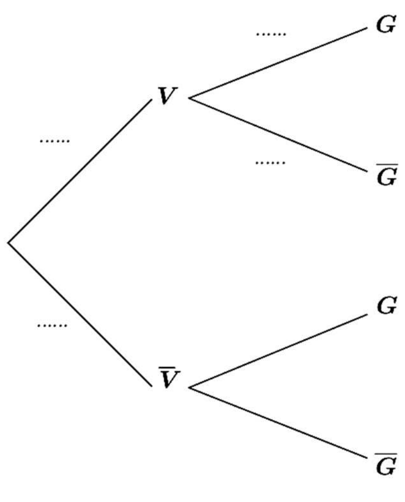
L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.
Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

- 40% de la population est vaccinée ;
- 8% des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20% de la population a contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les événements :
V : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;
G : « la personne a contracté la grippe ».

1. **a.** Donner la probabilité de l'événement G.

b. Reproduire l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.



2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.

3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28.

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} *près.*

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.

Après la période hivernale, on interroge au hasard n habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à n tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?

2. Dans cette question, on suppose que $n = 40$.

a. Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.

b. Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.

3. On interroge un échantillon de 3750 habitants de la ville, c'est-à-dire que l'on suppose ici que $n = 3750$.
On note Z la variable aléatoire définie par : $Z = \frac{X-1500}{30}$.

On admet que la loi de probabilité de la variable aléatoire Z peut être approchée par la loi normale centrée réduite.

En utilisant cette approximation, déterminer la probabilité qu'il y ait entre 1450 et 1550 individus vaccinés dans l'échantillon interrogé.

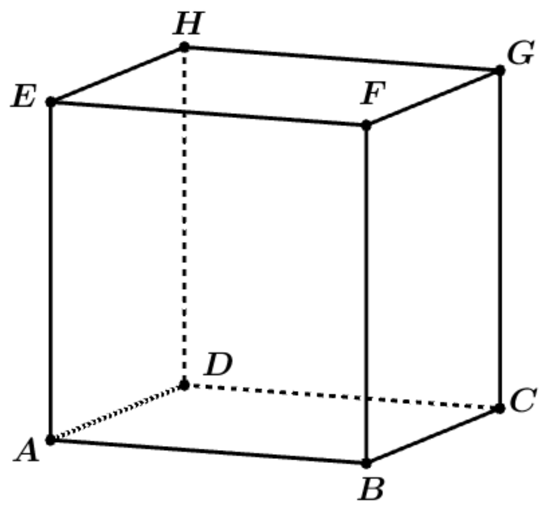
Exercice 3 (5 points) Commun à tous les candidats

Le but de cet exercice est d'examiner, dans différents cas, si les hauteurs d'un tétraèdre sont concourantes, c'est-à-dire d'étudier l'existence d'un point d'intersection de ses quatre hauteurs.

On rappelle que dans un tétraèdre $MNPQ$, la hauteur issue de M est la droite passant par M orthogonale au plan (NPQ).

Partie A Étude de cas particuliers

On considère un cube $ABCDEFGH$.



On admet que les droites $(AG), (BH), (CE)$ et (DF), appelées « grandes diagonales » du cube, sont concourantes.

1. On considère le tétraèdre $ABCE$.

   a. Préciser la hauteur issue de E et la hauteur issue de C dans ce tétraèdre.

   b. Les quatre hauteurs du tétraèdre $ABCE$ sont-elles concourantes ?

2. On considère le tétraèdre $ACHF$ et on travaille dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

   a. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ACH) est : $x - y + z = 0$.

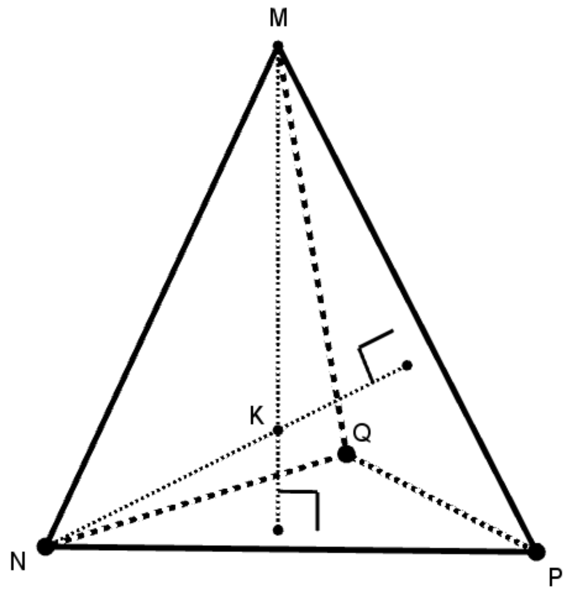
   b. En déduire que (FD) est la hauteur issue de F du tétraèdre $ACHF$.

   c. Par analogie avec le résultat précédent, préciser les hauteurs du tétraèdre $ACHF$ issues respectivement des sommets A, C et H.
   Les quatre hauteurs du tétraèdre $ACHF$ sont-elles concourantes ?

Dans la suite de cet exercice, un tétraèdre dont les quatre hauteurs sont concourantes sera appelé un ***tétraèdre orthocentrique****.*

Partie B Une propriété des tétraèdres orthocentriques

Dans cette partie, on considère un tétraèdre $MNPQ$ dont les hauteurs issues des sommets M et N sont sécantes en un point K. Les droites (MK) et (NK) sont donc orthogonales aux plans (NPQ) et (MPQ) respectivement.



1. **a.** Justifier que la droite (PQ) est orthogonale à la droite (MK) ; on admet de même que les droites (PQ) et (NK) sont orthogonales.

   b. Que peut-on déduire de la question précédente relativement à la droite (PQ) et au plan (MNK) ? Justifier la réponse.

2. Montrer que les arêtes $[MN]$ et $[PQ]$ sont orthogonales.

Ainsi, on obtient la propriété suivante :
Si un tétraèdre est orthocentrique, alors ses arêtes opposées sont orthogonales deux à deux.
(On dit que deux arêtes d'un tétraèdre sont « opposées » lorsqu'elles n'ont pas de sommet commun.)

Partie C Application

Dans un repère orthonormé, on considère les points :

$$R\,(-3\,;5\,;2)\ ,\ S(1\,;\,4\,;\,-2)\ ,\ T\,(4\,;\,-1\,;5)\ \text{ et }\ U\,(4\,;7\,;3).$$

Le tétraèdre $RSTU$ est-il orthocentrique ? Justifier.

Exercice 4 (5 points) **Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On pose $z_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{4} z_n \, .$$

On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. **a.** Vérifier que :

$$\frac{3 - i\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} \, .$$

b. En déduire l'écriture de chacun des nombres complexes z_1, z_2 et z_3 sous forme exponentielle et vérifier que z_3 est un imaginaire pur dont on précisera la partie imaginaire.

c. Représenter graphiquement les points A_0 , A_1 , A_2 et A_3 ; on prendra pour unité le centimètre.

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*,

$$z_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{6}} \, .$$

b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

Déterminer la nature et la limite de la suite (u_n).

3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel k,

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} i \, .$$

En déduire que, pour tout entier naturel k, on a l'égalité : $A_kA_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} OA_{k+1}$.

b. Pour tout entier naturel *n*, on appelle ℓ_n la longueur de la ligne brisée reliant dans cet ordre les points $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$.

On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$.

Démontrer que la suite (ℓ_n) est convergente et calculer sa limite.

Baccalauréat 2018 série S, France métropolitaine 22 Juin 2018

Exercice 1

1) La largeur de la chaînette vaut $2x$ (on a supposé $x \geq 0$). Sa hauteur est l'ordonnée du point M soit $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2)$. L'égalité entre la hauteur et la largeur équivaut donc à trouver les $x \geq 0$ vérifiant $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2) = 2x$, ce qu'on peut re-écrire $e^x + e^{-x} - 2 = 4x$ ou encore $e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0$.
Connaissances requises 2^{nde}. Difficulté : facile.

2a) Comme on suppose dans cette question que x est non nul, on peut mettre x en facteur dans l'expression $e^x - 4x$ ce qui donne $x(\frac{e^x}{x} - 4)$. $f(x)$ s'écrit alors: $x(\frac{e^x}{x} - 4) + e^{-x} - 2$.
Connaissances requises 4^e. Difficulté : très facile.

2b) On sait que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} - 4 = +\infty$ et donc $\lim_{x\to+\infty} x(\frac{e^x}{x} - 4) = +\infty$.
D'autre part on sait que $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} - 2 = -2$ et en ajoutant les deux expressions, la première tendant vers l'infini, la deuxième vers une constante, la somme tend vers $+\infty$. En conclusion, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Connaissances requises TS. Difficulté : assez facile.

3a) $f'(x) = e^x + (-1)e^{-x} - 4 = e^x - e^{-x} - 4$.
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

3b) Si x vérifie $f'(x) = 0$, x vérifie donc $e^x - e^{-x} - 4 = 0$. En multipliant cette égalité par e^x on obtient $(e^x)^2 - e^{x-x} - 4e^x = 0 = (e^x)^2 - 1 - 4e^x$ qui est l'égalité demandée.
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

3c) En notant $X = e^x$, la précédente égalité devient $X^2 - 4X - 1 = 0$. $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 20$. Les racines du polynôme sont donc :

$$X_1 = \frac{4 - \sqrt{20}}{2} = 2 - \sqrt{4 \times 5}/2 = 2 - \sqrt{5}$$

et

$$X_2 = \frac{4 + \sqrt{20}}{2} = 2 + \sqrt{4 \times 5}/2 = 2 + \sqrt{5}$$

On cherche donc x tel que $e^x = X_1$ ou bien tel que $e^x = X_2$. La première équation n'a pas de solution car X_1 est négatif alors que l'exponentielle est toujours strictement positive. En effet $\sqrt{5} > \sqrt{4}$ car la fonction racine carrée est croissante, donc $\sqrt{5} > 2$ et donc $X_1 = 2 - \sqrt{5} < 0$. Reste l'équation $e^x = X_2$, donc $ln(e^x) = ln(X_2)$ et donc $x = ln(X_2) = ln(2 - \sqrt{5})$
Connaissances requises 2^{nde} pour les solutions du polynôme, TS pour la suite. Difficulté : assez facile.

4a) Le travail est déjà à moitié fait par la donnée du tableau de signe de la dérivée. En 0 on a $f(0) = e^0 + e^0 - 4 \times 0 - 2 = 0$. La limite de f en $+\infty$ est $+\infty$ car e^x tend vers $+\infty$ et e^{-x} tend vers 0 en $+\infty$. On obtient le tableau de variation suivant :

x	0	$ln(2+\sqrt{5})$	$+\infty$
$f(x)$	0 $\searrow$		$\nearrow$ $+\infty$

Connaissances requises 1^{ere} *excepté le calcul de* $f(0)$ *et la limite en* $+\infty$ *(TS). Difficulté : très facile.*

4b) *Le seul théorème du cours de terminale permettant de justifier l'existence d'une solution unique d'une équation* $f(x) = 0$ *que l'on ne sait pas résoudre de façon algébrique est le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions monotones. Pas de mystère donc, c'est cela qu'il faut utiliser ici.*

Comme $f(0) = 0$ et que f est strictement décroissante sur $[0; ln(2+\sqrt{5})]$, f ne peut s'annuler que en 0 sur cet intervalle. Comme on cherche une solution strictement positive il faut chercher sur $[ln(2+\sqrt{5}); +\infty[$. De ce qui précède on déduit aussi que $f(ln(2+\sqrt{5})) < 0$. De plus, comme la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$, il existe un réel $x_0 > ln(2+\sqrt{5})$ tel que pour tout $x > x_0$, alors $f(x) > 0$. f ne peut donc s'annuler au delà de x_0 et f change de signe entre $ln(2+\sqrt{5})$ et x_0. Comme sur cet intervalle f est continue (car les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont continues), et qu'elle est de plus monotone, elle s'annule une fois et une seule sur cet intervalle, en un nombre réel qu'on notera α.
Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne.

5a)

m	a	b	$b-a$
	2	3	1
2.5	2	2.5	0.5
2.25	2.25	2.5	0.25
2.375	2.375	2.5	0.125
2.4375	2.4375	2.5	0.0625

Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne.

5b) En fin d'algorithme les valeurs de a et b obtenues donnent un encadrement à $0,1$ près du nombre α cherché à la question précédente.

On peut dire que c'était une des rares questions difficiles de ce sujet, car il y a en effet fort à parier que les algorithmes ont été survolés rapidement par beaucoup d'enseignants par manque de temps. Pour autant, la plupart des sujets proposés ces derniers temps contenaient des algorithmes simples de ce type, il n'y avait donc aucune surprise à en trouver un dans cet énoncé.... Ici il s'agissait de reconnaître l'algorithme de résolution d'une équation par dichotomie, algorithme très classique en terminale S.
Connaissances requises TS. Difficulté : difficile.

6) La solution t de E' vérifie $\dfrac{t}{39} = \alpha$ d'après la question 4, donc $t = 39\alpha$ et la hauteur cherchée valant le double de t, cette hauteur vaut 78α, qui d'après la question 6 est dans l'intervalle $[190,125; 195]$, les nombres étant exprimés en metres.
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

Exercice 2

A 1a) L'énoncé indique que 20% de la population a contracté la grippe donc on a $P(G) = 0,2$.
Connaissances requises TS. Difficulté : très facile.

A 1b)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & 0,08 \quad G \\
 & & & \nearrow & \\
 & & 0,4 \quad V & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 & & & & 0,92 \quad \bar{G} \\
\nearrow & & & & \\
\searrow & & & & \\
 & & & & p_1 \quad G \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & 0,6 \quad \bar{V} & & \\
 & & & \searrow & \\
 & & & & p_2 \quad \bar{G}
\end{array}$$

Remarque: dans cette question on ne demandait même pas p_1 ni p_2 qui sont demandés plus tard.
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

A 2) La probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée vaut d'après le 1b $0,4 \times 0,08 = 0,032$.
Connaissances requises TS. Difficulté : très facile.

A 3) En lisant l'arbre du 1b on a $P(G) = 0,4 \times 0,08 + 0,6 \times p_1$. Donc on a $0,2 = 0,032 + 0,6 \times p_1$ soit $p_1 = \dfrac{0,168}{0,6} = 0,28$. On en déduit $p_2 = 1 - p_1 = 0,72$
Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne.

B 1) Il n'y a que 2 possibilités de résultat à chaque expérience individuelle ; vacciné ou non vacciné. De plus, le fait qu'une personne soit vaccinée est indépendante du fait qu'une autre le soit (ou pas). X suit donc une loi binomiale dont le paramètre est $p = 0,4$
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

B 2a) Calcul de $P(X = 15)$. Je ne pense pas que les correcteurs exigent d'utiliser la formule $P(X = 15) = \dbinom{40}{15} \times 0,4^{15} \times 0,6^{25} \simeq 0.1228$ environ. Donc direction la calculatrice. Pour une TI par exemple on tapera :
binomFdP
nbreEssais:40
p: 0,4
valeur de x: 15
Sur une Casio : STAT $\Rightarrow$ DIST $\Rightarrow$ BINM : **BinomialPD(15,40,0.4)**
Connaissances requises TS. Difficulté : assez facile.

B 2b) Calcul de $P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19)$. Pour ce calcul, il n'y a pas de formule toute faite à moins de faire à la main la somme de tous les $P(X = k)$ pour k allant de 0 à 19 inclu, donc là encore, pas de scrupule à utiliser la calculatrice. Pour une TI par exemple on tapera :
binomFRep
nbreEssais:40
p: 0,4
valeur de x: 19
Sur une Casio : STAT $\Rightarrow$ DIST $\Rightarrow$ BINM : **BinomialCD(19,40,0.4)**
Ce qui donne environ $0,8702$ et donc la probabilité qu'au moins la moitié des personnes soient vaccinées est environ de $1 - 0,8702 = 0,1298$.
Connaissances requises TS. Difficulté : assez facile.

B 3) Calcul classique pour se ramener à une loi normale centrée ($\mu = 0$) et réduite ($\sigma = 1$): on écrit que $P(1450 \leq X \leq 1550) = P(\frac{1450 - 1500}{30} \leq \frac{X - 1500}{30} \leq \frac{1550 - 1500}{30}) = P(-\frac{5}{3} \leq Z \leq \frac{5}{3})$. Cette dernière probabilité correspond donc à une loi normale centrée et réduite. Direction donc la TI (ou Casio ou autre) en prenant $\frac{5}{3} \simeq 1,6666$:
normFrep
borne inf: -1,6666
borne sup: 1,6666
μ**:**0
σ**:**1
Sur une Casio : STAT $\Rightarrow$ DIST $\Rightarrow$ NORM : **NormCD(-1,6666,1,6666,1,0)**
On obtient alors $P(1450 \leq X \leq 1550) \simeq 0,9044$
Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne.

Exercice 3

A 1a) La hauteur issue de E est la droite passant par E et perpendiculaire à la face opposée (ABC), il s'agit donc de la droite (EA). La hauteur issue de C est la droite passant par C et perpendiculaire à la face opposée (EAB), il s'agit donc de la droite (BC).
Connaissances requises $3^e/2^{nde}$. *Difficulté : très facile.*

A 1b) (BC) et (EA) ne se coupent pas et sont des hauteurs du tétraèdre, donc les 4 hauteurs ne sont pas concourrantes.
Connaissances requises $3^e/2^{nde}$. *Difficulté : très facile.*

A 2a) Notons $ax + by + cz + d$ l'équation du plan (ACH). Le point $A(0; 0; 0)$ doit vérifier l'équation, ce qui donne $d = 0$. Le point $C(1; 1; 0)$ doit vérifier l'équation, ce qui donne $a + b = 0$. Le point $H(0; 1; 1)$ doit vérifier l'équation, ce qui donne $b + c = 0$. Si on choisit de prendre $c = 1$ alors on déduit de l'égalité précédente $b = -c = -1$ puis que $a = -b = 1$. $x - y + z = 0$ est donc bien une équation du plan (ACH).
Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne voire facile.

A 2b) On sait que les coefficients a b et c du plan (ACH) donnent les coordonnées d'un vecteur $\vec{n} = (a; b; c)$ perpendiculaire (on dit aussi normal) au plan. D'autre part les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ sont $(1; 0; 1) - (0; 1; 0) = (1; -1; 1)$ qui est justement égal à $\vec{n}$ (si on avait choisi $\overrightarrow{\mathrm{FD}}$ on n'aurait pas égalité mais l'important est qu'ils soient colinéaires). Donc la doite (DF) est bien perpendiculaire au plan (ACH), par conséquent il s'agit bien de la hauteur issue de F du tétraèdre $ACHF$.
Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne à difficile.

A 2c) La figure représentant un cube, par symétrie de cette figure on a donc que la hauteur issue d'un des sommets du tétraèdre est à chaque fois la grande diagonale du cube issue de ce point, donc (CE) est la hauteur issue de E, (AG) est la hauteur issue de A et (HB) est la hauteur issue de B.
Comme ces hauteurs sont des grandes diagonales du cube, elles se coupent donc toutes au centre du cube et sont donc concourrantes.
Connaissances requises TS. Difficulté : difficile.

B 1a) (PQ) appartient au plan (NPQ) qui par hypothèse est perpendiculaire à la hauteur (MK), donc (MK) est perpendiculaire à (PQ). Même raisonnement pour (NK) qui est aussi perpendiculaire à (PQ).
Connaissances requises TS. Difficulté : assez facile.

B 1b) Les 2 droites sécantes (par hypothèse) (MK) et (NK) sont distinctes, elles sont donc dans un unique plan (MKN). D'après le 1a, (PQ) est perpendiculaire à ces 2 droites de ce plan (droites qui sont non parallèles) donc (PQ) est perpendiculaire au plan (MKN).
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

B 2) La droite (MN) est dans le plan (MKN) qui, d'après le 1b, est perpendiculaire à (PQ), donc les arêtes [MN] et [PQ] sont bien orthogonales.
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

C) On calcule les coordonnées des vecteurs des 6 arêtes. Les arêtes opposées devront être orthogonales (3 couples d'arêtes possibles), ce qu'on peut vérifier en faisant le produit scalaire de ces vecteurs:
$\overrightarrow{\mathrm{RS}}(4; -1; -4)$ $\overrightarrow{\mathrm{TU}}(0; 8; -2)$ $\overrightarrow{\mathrm{RS}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{TU}} = 4 \times 0 + (-1) \times 8 + (-4) \times (-2) = 0$

$\overrightarrow{\mathrm{ST}}(3; -5; 7)$ $\overrightarrow{\mathrm{RU}}(7; 2; 1)$ $\overrightarrow{\mathrm{ST}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RU}} = 3 \times 7 + (-5) \times 2 + 7 \times 1 = 18$

$\overrightarrow{\mathrm{RT}}(7; -6; 3)$ $\overrightarrow{\mathrm{SU}}(3; 3; 5)$ $\overrightarrow{\mathrm{RT}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{SU}} = 7 \times 3 + (-6) \times 3 + 3 \times 5 = 18$

Au moins 2 arêtes opposées ne sont pas orthogonales donc le tétraèdre proposé n'est pas orthocentrique.
Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne.

Exercice 4

1a) Le module du nombre complexe proposé vaut $r = \left|\frac{3-i\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{1}{4}\sqrt{3^2+\sqrt{3}^2} = \frac{1}{4}\sqrt{12}$ qui se simplifie en $r = \frac{1}{4}\sqrt{4\times 3} = \frac{2}{4}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Pour l'argument on doit trouver l'angle θ (modulo 2π) tel que :

$$r\cos(\theta) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

et

$$r\sin(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \sin(\theta) = -\frac{1}{2}$$

On reconnait dans les valeurs d'angles "classiques" l'angle $\theta = -\frac{\pi}{6}$
En conclusion l'expression sous forme exponentielle du nombre complexe est donc :

$$\frac{3-i\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\pi/6}$$

1b)

$z_1 = \frac{3-i\sqrt{3}}{4}z_0 = \frac{3-i\sqrt{3}}{4}\times 8 = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\pi/6}\times 8 = 4\sqrt{3}e^{-i\pi/6}$

$z_2 = \frac{3-i\sqrt{3}}{4}z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\pi/6}\times 4\sqrt{3}e^{-i\pi/6} = 6e^{-2i\pi/6} = 6e^{-i\pi/3}$

$z_3 = \frac{3-i\sqrt{3}}{4}z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\pi/6}\times 6e^{-i\pi/3} = 3\sqrt{3}e^{-i\pi/6-i\pi/3} = 3\sqrt{3}e^{-i\pi/2}$

Montrons que z_3 est imaginaire pur : $e^{-i\pi/2} = \cos(-\pi/2)+i\sin(-\pi/2) = 0+i\times(-1) = -i$ par conséquent $z_3 = -3\sqrt{3}i$ et sa partie imaginaire vaut $-3\sqrt{3}$.
Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne.

1c) Pour tracer les points le plus simple est d'utiliser la forme exponentielle de z_0, z_1, z_2 et z_3 en utilisant un raporteur pour tracer la droite entre l'origine et le point considéré, puis en utilisant le module du nombre complexe pour mesurer la distance entre l'origine et le point. On avait donc en résumé $|z_0| = 8$ et $arg(z_0) = 0$, $|z_1| \simeq 6,9$ et $arg(z_1) = -30°$, $|z_2| = 6$ et $arg(z_2) = -60°$, $|z_3| \simeq 5,2$ et $arg(z_3) = -90°$. Sinon à l'aide de la relation $z = |z|\cos(\theta) + i|z|\sin(\theta)$ où $\theta = arg(z)$, on obtient les coordonnées des points, soit environ $A_0(8;0)$, $A_1(6;-3,5)$, $A_2(3;-5,2)$ et $A_3(0;-5,2)$.
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

2a) Pour $n = 0$, $z_0 = 8$ et $8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^0 e^{-i\frac{\pi}{6}\times 0} = 8$ donc la propriété demandée est vraie pour $n = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'égalité $z_n = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-i\frac{\pi}{6}\times n}$ soit vraie. On sait que $z_{n+1} = \frac{3-i\sqrt{3}}{4}z_n = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\pi/6}z_n$.
En utilisant l'hypothèse de récurrence on peut donc remplacer z_n par son expression en fonction de n ce qui donne :

$$z_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\pi/6} \times 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-i\frac{\pi}{6}\times n} = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} e^{-i\frac{\pi}{6}\times n - i\pi/6} = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} e^{-i\frac{\pi}{6}\times(n+1)}$$

La propriété est donc vraie pour tout n entier naturel.
Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne.

2b) $u_n = |z_n| = \left|8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-in\frac{\pi}{6}}\right|$

Or on sait que dans l'écriture d'un nombre complexe sous forme exponentielle, le facteur (réel positif) devant l'exponentielle n'est autre que le module de ce nombre complexe. On a donc $u_n = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ le nombre $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est plus petit que 1 car $\sqrt{3} < \sqrt{4}$ du fait que la racine carré est une fonction croissante, et donc $\sqrt{3} < 2$ ou encore $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$. On sait alors que la suite géométrique $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ tend vers 0 en $+\infty$, donc u_n tend vers 0 en l'infini.
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

3a)

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = 1 - \frac{z_k}{z_{k+1}} = 1 - \frac{8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k e^{-ik\frac{\pi}{6}}}{8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k+1} e^{-i(k+1)\frac{\pi}{6}}}$$

Cette expression se simplifie en :

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = 1 - \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

On peut alors utiliser la forme algébrique du 2e terme ce qui donne

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})) = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2})) = 1 - 1 - \frac{i}{\sqrt{3}} = -\frac{i}{\sqrt{3}}$$

Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne.

3b) On peut exprimer les longueurs des segments comme étant des modules de nombres complexes, plus précisément on a $A_kA_{k+1} = |z_{k+1} - z_k|$ et $OA_{k+1} = |z_{k+1}|$. D'après le 3a on a

$$\left|\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}}\right| = \left|-\frac{i}{\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Donc

$$\frac{|z_{k+1} - z_k|}{|z_{k+1}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

On en déduit que $A_kA_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}OA_{k+1}$. La longueur de la ligne brisée l_n peut donc s'écrire :

$$l_n = \frac{1}{\sqrt{3}}(OA_1 + OA_2 + ... + OA_n)$$

Or d'après le 2b on a $OA_k = |z_k| = u_k = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k$ On a donc :

$$l_n = \frac{8}{\sqrt{3}}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)$$

La parenthèse contient une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique qui vaut donc en appliquant les formules du cours (attention au fait que la somme commence à $k = 1$ et non à $k = 0$):

$$\frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} - 1$$

La limite de $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ en plus l'infini vaut 0, comme on l'a mentionné au 2b.
Cette expression tend donc vers :

$$\frac{1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} - 1 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

et donc l_n est convergente et a pour limite :

$$\frac{8}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

On peut éventuellement re-écrire cette expression sous une forme plus simple à l'aide de l'expression dite "conjuguée" du dénominateur ce qui donne :

$$\frac{4\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{\frac{1}{4}} = 16 + 8\sqrt{3}$$

On a donc une forme spirale formée d'une infinité de segments, mais sa longueur totale n'est pas infinie.
Connaissances requises TS. Difficulté : difficile.

zeta1859 at gmail, 29/06/2018

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

ÉPREUVE DU VENDREDI 22 JUIN 2018

MATHÉMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité **Coefficient : 9**

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages numérotées de 1 à 8.

Exercice 1 (6 points) **Commun à tous les candidats**

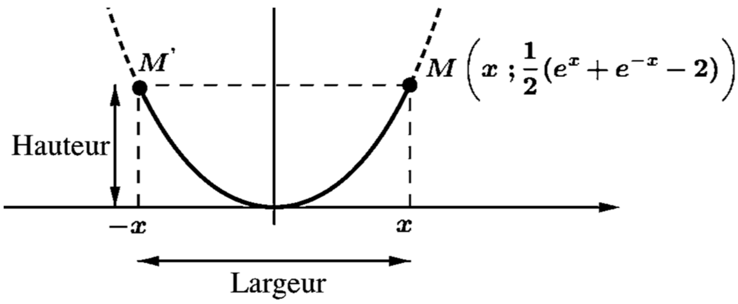
Dans cet exercice, on munit le plan d'un repère orthonormé.

On a représenté ci-dessous la courbe d'équation :

$$y = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2).$$

Cette courbe est appelée une « chaînette ».

On s'intéresse ici aux « arcs de chaînette » délimités par deux points de cette courbe symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
Un tel arc est représenté sur le graphique ci-dessous en trait plein.
On définit la « largeur » et la « hauteur » de l'arc de chaînette délimité par les points M et M' comme indiqué sur le graphique.



Le but de l'exercice est d'étudier les positions possibles sur la courbe du point M d'abscisse x strictement positive afin que la largeur de l'arc de chaînette soit égale à sa hauteur.

1. Justifier que le problème étudié se ramène à la recherche des solutions strictement positives de l'équation (E) : $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 4x - 2 = 0$.

2. On note f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 4x - 2.$$

   a. Vérifier que pour tout $x > 0$, $f(x) = x\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - 4\right) + \mathrm{e}^{-x} - 2$.

   b. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

3. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$, où x appartient à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

   b. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ équivaut à l'équation : $(\mathrm{e}^x)^2 - 4\mathrm{e}^x - 1 = 0$.

   c. En posant $X = \mathrm{e}^x$, montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet pour unique solution réelle le nombre $\ln(2 + \sqrt{5})$.

4. On donne ci-dessous le tableau de signes de la fonction dérivée f' de f :

x	0		$\ln(2+\sqrt{5})$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

   a. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

   b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive que l'on notera α.

5. On considère l’algorithme suivant où les variables a, b et m sont des nombres réels :

```
Tant que b − a > 0,1  faire :
        m ← (a+b)/2
        Si e^m + e^(−m) − 4m − 2 > 0, alors :
                b ← m
        Sinon :
                a ← m
        Fin Si
Fin Tant que
```

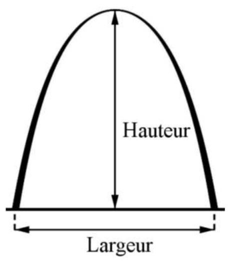
a. Avant l’exécution de cet algorithme, les variables a et b contiennent respectivement les valeurs 2 et 3.
Que contiennent-elles à la fin de l’exécution de l’algorithme ?
On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau ci-contre avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l’algorithme.

$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{b-a}$
	2	**3**	**1**
$\mathbf{2,5}$			
…	…	…	…

b. Comment peut-on utiliser les valeurs obtenues en fin d’algorithme à la question précédente ?

6.

La *Gateway Arch*, édifiée dans la ville de Saint-Louis aux États-Unis, a l’allure ci-contre.
Son profil peut être approché par un arc de chaînette renversé dont la largeur est égale à la hauteur.



La largeur de cet arc, exprimée en mètre, est égale au double de la solution strictement positive de l’équation :

$$(E') : \; \mathrm{e}^{\frac{t}{39}} + \mathrm{e}^{-\frac{t}{39}} - 4\frac{t}{39} - 2 = 0.$$

Donner un encadrement de la hauteur de la *Gateway Arch.*

Exercice 2 (4 points) **Commun à tous les candidats**

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville.
La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.

Partie A

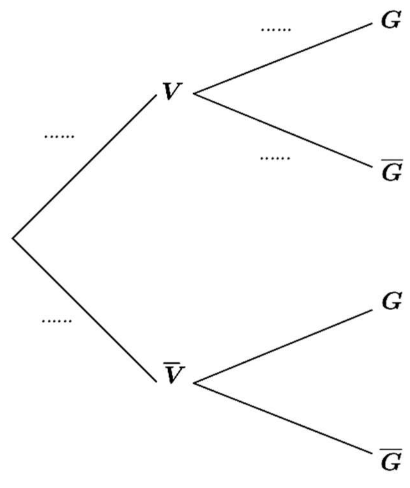
L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.
Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

- 40% de la population est vaccinée ;
- 8% des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20% de la population a contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les événements :
V : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;
G : « la personne a contracté la grippe ».

1. **a.** Donner la probabilité de l'événement G.

b. Reproduire l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.



2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.

3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28.

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} près.

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.

Après la période hivernale, on interroge au hasard n habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à n tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?

2. Dans cette question, on suppose que $n = 40$.

a. Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.

b. Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.

3. On interroge un échantillon de 3750 habitants de la ville, c'est-à-dire que l'on suppose ici que $n = 3750$.
On note Z la variable aléatoire définie par : $Z = \frac{X-1500}{30}$.

On admet que la loi de probabilité de la variable aléatoire Z peut être approchée par la loi normale centrée réduite.

En utilisant cette approximation, déterminer la probabilité qu'il y ait entre 1450 et 1550 individus vaccinés dans l'échantillon interrogé.

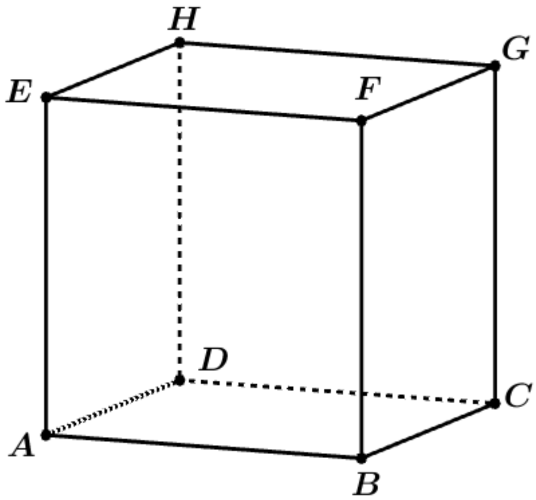
Exercice 3 (5 points) **Commun à tous les candidats**

Le but de cet exercice est d'examiner, dans différents cas, si les hauteurs d'un tétraèdre sont concourantes, c'est-à-dire d'étudier l'existence d'un point d'intersection de ses quatre hauteurs.

On rappelle que dans un tétraèdre $MNPQ$, la hauteur issue de M est la droite passant par M orthogonale au plan (NPQ).

Partie A Étude de cas particuliers

On considère un cube $ABCDEFGH$.



On admet que les droites $(AG), (BH), (CE)$ et (DF), appelées « grandes diagonales » du cube, sont concourantes.

1. On considère le tétraèdre $ABCE$.

a. Préciser la hauteur issue de E et la hauteur issue de C dans ce tétraèdre.

b. Les quatre hauteurs du tétraèdre $ABCE$ sont-elles concourantes ?

2. On considère le tétraèdre $ACHF$ et on travaille dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

a. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ACH) est : $x - y + z = 0$.

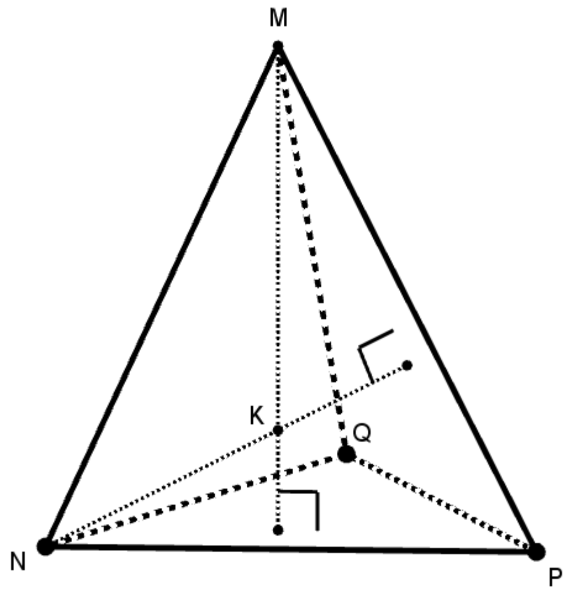
b. En déduire que (FD) est la hauteur issue de F du tétraèdre $ACHF$.

c. Par analogie avec le résultat précédent, préciser les hauteurs du tétraèdre $ACHF$ issues respectivement des sommets A, C et H.
Les quatre hauteurs du tétraèdre $ACHF$ sont-elles concourantes ?

Dans la suite de cet exercice, un tétraèdre dont les quatre hauteurs sont concourantes sera appelé un ***tétraèdre orthocentrique****.*

Partie B Une propriété des tétraèdres orthocentriques

Dans cette partie, on considère un tétraèdre $MNPQ$ dont les hauteurs issues des sommets M et N sont sécantes en un point K. Les droites (MK) et (NK) sont donc orthogonales aux plans (NPQ) et (MPQ) respectivement.



1. **a.** Justifier que la droite (PQ) est orthogonale à la droite (MK) ; on admet de même que les droites (PQ) et (NK) sont orthogonales.

   b. Que peut-on déduire de la question précédente relativement à la droite (PQ) et au plan (MNK) ? Justifier la réponse.

2. Montrer que les arêtes $[MN]$ et $[PQ]$ sont orthogonales.

Ainsi, on obtient la propriété suivante :
Si un tétraèdre est orthocentrique, alors ses arêtes opposées sont orthogonales deux à deux.
(On dit que deux arêtes d'un tétraèdre sont « opposées » lorsqu'elles n'ont pas de sommet commun.)

Partie C Application

Dans un repère orthonormé, on considère les points :

$$R\,(-3\,;5\,;2)\ ,\ S(1\,;\ 4\,;\ -2)\ ,\ T\,(4\,;\ -1\,;5)\ \text{ et }\ U\,(4\,;7\,;3).$$

Le tétraèdre $RSTU$ est-il orthocentrique ? Justifier.

Exercice 4 (5 points) **Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Partie A

On considère l'équation suivante dont les inconnues x et y sont des entiers naturels :

$$x^2 - 8y^2 = 1\,. \qquad (E)$$

1. Déterminer un couple solution $(x\,;y)$ où x et y sont deux entiers naturels.

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On définit les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) par :

$$x_0 = 1,\ y_0 = 0, \text{ et pour tout entier naturel } n,\ \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, le couple $(x_n; y_n)$ est solution de l'équation (E).

b. En admettant que la suite (x_n) est à valeurs strictement positives, démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $x_{n+1} > x_n$.

3. En déduire que l'équation (E) admet une infinité de couples solutions.

Partie B

Un entier naturel n est appelé un nombre *puissant* lorsque, pour tout diviseur premier p de n, p^2 divise n.

1. Vérifier qu'il existe deux nombres entiers consécutifs inférieurs à 10 qui sont puissants.

L'objectif de cette partie est de démontrer, à l'aide des résultats de la **partie A**, qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers naturels consécutifs puissants et d'en trouver quelques exemples.

2. Soient a et b deux entiers naturels.
Montrer que l'entier naturel $n = a^2b^3$ est un nombre puissant.

3. Montrer que si $(x\,;y)$ est un couple solution de l'équation (E) définie dans la **partie A**, alors $x^2 - 1$ et x^2 sont des entiers consécutifs puissants.

4. Conclure quant à l'objectif fixé pour cette partie, en démontrant qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers consécutifs puissants.
Déterminer deux nombres entiers consécutifs puissants supérieurs à 2018.

Baccalauréat 2018 série S, France métropolitaine 22 Juin 2018

Exercice 1

1) La largeur de la chaînette vaut $2x$ (on a supposé $x \geq 0$). Sa hauteur est l'ordonnée du point M soit $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2)$. L'égalité entre la hauteur et la largeur équivaut donc à trouver les $x \geq 0$ vérifiant $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2) = 2x$, ce qu'on peut re-écrire $e^x + e^{-x} - 2 = 4x$ ou encore $e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0$.
Connaissances requises 2^{nde}. Difficulté : facile.

2a) Comme on suppose dans cette question que x est non nul, on peut mettre x en facteur dans l'expression $e^x - 4x$ ce qui donne $x(\frac{e^x}{x} - 4)$. $f(x)$ s'écrit alors: $x(\frac{e^x}{x} - 4) + e^{-x} - 2$.
Connaissances requises 4^e. Difficulté : très facile.

2b) On sait que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} - 4 = +\infty$ et donc $\lim_{x\to+\infty} x(\frac{e^x}{x} - 4) = +\infty$.
D'autre part on sait que $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} - 2 = -2$ et en ajoutant les deux expressions, la première tendant vers l'infini, la deuxième vers une constante, la somme tend vers $+\infty$. En conclusion, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Connaissances requises TS. Difficulté : assez facile.

3a) $f'(x) = e^x + (-1)e^{-x} - 4 = e^x - e^{-x} - 4$.
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

3b) Si x vérifie $f'(x) = 0$, x vérifie donc $e^x - e^{-x} - 4 = 0$. En multipliant cette égalité par e^x on obtient $(e^x)^2 - e^{x-x} - 4e^x = 0 = (e^x)^2 - 1 - 4e^x$ qui est l'égalité demandée.
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

3c) En notant $X = e^x$, la précédente égalité devient $X^2 - 4X - 1 = 0$. $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 20$. Les racines du polynôme sont donc :

$$X_1 = \frac{4 - \sqrt{20}}{2} = 2 - \sqrt{4 \times 5}/2 = 2 - \sqrt{5}$$

et

$$X_2 = \frac{4 + \sqrt{20}}{2} = 2 + \sqrt{4 \times 5}/2 = 2 + \sqrt{5}$$

On cherche donc x tel que $e^x = X_1$ ou bien tel que $e^x = X_2$. La première équation n'a pas de solution car X_1 est négatif alors que l'exponentielle est toujours strictement positive. En effet $\sqrt{5} > \sqrt{4}$ car la fonction racine carrée est croissante, donc $\sqrt{5} > 2$ et donc $X_1 = 2 - \sqrt{5} < 0$. Reste l'équation $e^x = X_2$, donc $ln(e^x) = ln(X_2)$ et donc $x = ln(X_2) = ln(2 - \sqrt{5})$
Connaissances requises 2^{nde} pour les solutions du polynôme, TS pour la suite. Difficulté : assez facile.

4a) Le travail est déjà à moitié fait par la donnée du tableau de signe de la dérivée. En 0 on a $f(0) = e^0 + e^0 - 4 \times 0 - 2 = 0$. La limite de f en $+\infty$ est $+\infty$ car e^x tend vers $+\infty$ et e^{-x} tend vers 0 en $+\infty$.
On obtient le tableau de variation suivant :

x	0	$ln(2+\sqrt{5})$	$+\infty$
$f(x)$	0 $\searrow$		$\nearrow$ $+\infty$

Connaissances requises 1^{ere} *excepté le calcul de $f(0)$ et la limite en $+\infty$ (TS). Difficulté : très facile.*

4b) *Le seul théorème du cours de terminale permettant de justifier l'existence d'une solution unique d'une équation $f(x) = 0$ que l'on ne sait pas résoudre de façon algébrique est le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions monotones. Pas de mystère donc, c'est cela qu'il faut utiliser ici.*

Comme $f(0) = 0$ et que f est strictement décroissante sur $[0; ln(2+\sqrt{5})]$, f ne peut s'annuler que en 0 sur cet intervalle. Comme on cherche une solution strictement positive il faut chercher sur $[ln(2+\sqrt{5}); +\infty[$. De ce qui précède on déduit aussi que $f(ln(2+\sqrt{5})) < 0$. De plus, comme la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$, il existe un réel $x_0 > ln(2+\sqrt{5})$ tel que pour tout $x > x_0$, alors $f(x) > 0$. f ne peut donc s'annuler au delà de x_0 et f change de signe entre $ln(2+\sqrt{5})$ et x_0. Comme sur cet intervalle f est continue (car les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont continues), et qu'elle est de plus monotone, elle s'annule une fois et une seule sur cet intervalle, en un nombre réel qu'on notera α.
Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne.

5a)

m	a	b	$b-a$
	2	3	1
2.5	2	2.5	0.5
2.25	2.25	2.5	0.25
2.375	2.375	2.5	0.125
2.4375	2.4375	2.5	0.0625

Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne.

5b) En fin d'algorithme les valeurs de a et b obtenues donnent un encadrement à $0,1$ près du nombre α cherché à la question précédente.

On peut dire que c'était une des rares questions difficiles de ce sujet, car il y a en effet fort à parier que les algorithmes ont été survolés rapidement par beaucoup d'enseignants par manque de temps. Pour autant, la plupart des sujets proposés ces derniers temps contenaient des algorithmes simples de ce type, il n'y avait donc aucune surprise à en trouver un dans cet énoncé.... Ici il s'agissait de reconnaître l'algorithme de résolution d'une équation par dichotomie, algorithme très classique en terminale S.
Connaissances requises TS. Difficulté : difficile.

6) La solution t de E' vérifie $\dfrac{t}{39} = \alpha$ d'après la question 4, donc $t = 39\alpha$ et la hauteur cherchée valant le double de t, cette hauteur vaut 78α, qui d'après la question 6 est dans l'intervalle $[190,125; 195]$, les nombres étant exprimés en metres.
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

Exercice 2

A 1a) L'énoncé indique que 20% de la population a contracté la grippe donc on a $P(G) = 0,2$.
Connaissances requises TS. Difficulté : très facile.

A 1b)

$$\begin{array}{ccccc} & & & 0,08 & G\\ & & & \nearrow & \\ & 0,4 & V & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ & & & 0,92 & \bar{G} \\ \nearrow & & & & \\ \searrow & & & & \\ & & & p_1 & G\\ & \searrow & & \nearrow & \\ & 0,6 & \bar{V} & & \\ & & & \searrow & \\ & & & p_2 & \bar{G}\end{array}$$

Remarque: dans cette question on ne demandait même pas p_1 ni p_2 qui sont demandés plus tard.
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

A 2) La probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée vaut d'après le 1b $0,4 \times 0,08 = 0,032$.
Connaissances requises TS. Difficulté : très facile.

A 3) En lisant l'arbre du 1b on a $P(G) = 0,4 \times 0,08 + 0,6 \times p_1$. Donc on a $0,2 = 0,032 + 0,6 \times p_1$ soit $p_1 = \dfrac{0,168}{0,6} = 0,28$. On en déduit $p_2 = 1 - p_1 = 0,72$
Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne.

B 1) Il n'y a que 2 possibilités de résultat à chaque expérience individuelle ; vacciné ou non vacciné. De plus, le fait qu'une personne soit vaccinée est indépendante du fait qu'une autre le soit (ou pas). X suit donc une loi binomiale dont le paramètre est $p = 0,4$
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

B 2a) Calcul de $P(X = 15)$. Je ne pense pas que les correcteurs exigent d'utiliser la formule $P(X = 15) = \binom{40}{15} \times 0,4^{15} \times 0,6^{25} \simeq 0.1228$ environ. Donc direction la calculatrice. Pour une TI par exemple on tapera :
binomFdP
nbreEssais:40
p: 0,4
valeur de x: 15
Sur une Casio : STAT $\Rightarrow$ DIST $\Rightarrow$ BINM : **BinomialPD(15,40,0.4)**
Connaissances requises TS. Difficulté : assez facile.

B 2b) Calcul de $P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19)$. Pour ce calcul, il n'y a pas de formule toute faite à moins de faire à la main la somme de tous les $P(X = k)$ pour k allant de 0 à 19 inclu, donc là encore, pas de scrupule à utiliser la calculatrice. Pour une TI par exemple on tapera :
binomFRep
nbreEssais:40
p: 0,4
valeur de x: 19
Sur une Casio : STAT $\Rightarrow$ DIST $\Rightarrow$ BINM : **BinomialCD(19,40,0.4)**
Ce qui donne environ $0,8702$ et donc la probabilité qu'au moins la moitié des personnes soient vaccinées est environ de $1 - 0,8702 = 0,1298$.
Connaissances requises TS. Difficulté : assez facile.

B 3) Calcul classique pour se ramener à une loi normale centrée ($\mu = 0$) et réduite ($\sigma = 1$): on écrit que $P(1450 \leq X \leq 1550) = P(\frac{1450-1500}{30} \leq \frac{X-1500}{30} \leq \frac{1550-1500}{30}) = P(-\frac{5}{3} \leq Z \leq \frac{5}{3})$. Cette dernière probabilité correspond donc à une loi normale centrée et réduite. Direction donc la TI (ou Casio ou autre) en prenant $\frac{5}{3} \simeq 1,6666$:
normFrep
borne inf: -1,6666
borne sup: 1,6666
μ**:**0
σ**:**1
Sur une Casio : STAT $\Rightarrow$ DIST $\Rightarrow$ NORM : **NormCD(-1,6666,1,6666,1,0)**
On obtient alors $P(1450 \leq X \leq 1550) \simeq 0,9044$
Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne.

Exercice 3

A 1a) La hauteur issue de E est la droite passant par E et perpendiculaire à la face opposée (ABC), il s'agit donc de la droite (EA). La hauteur issue de C est la droite passant par C et perpendiculaire à la face opposée (EAB), il s'agit donc de la droite (BC).
Connaissances requises $3^e/2^{nde}$*. Difficulté : très facile.*

A 1b) (BC) et (EA) ne se coupent pas et sont des hauteurs du tétraèdre, donc les 4 hauteurs ne sont pas concourrantes.
Connaissances requises $3^e/2^{nde}$*. Difficulté : très facile.*

A 2a) Notons $ax + by + cz + d$ l'équation du plan (ACH). Le point $A(0;0;0)$ doit vérifier l'équation, ce qui donne $d = 0$. Le point $C(1;1;0)$ doit vérifier l'équation, ce qui donne $a + b = 0$. Le point $H(0;1;1)$ doit vérifier l'équation, ce qui donne $b + c = 0$. Si on choisit de prendre $c = 1$ alors on déduit de l'égalité précédente $b = -c = -1$ puis que $a = -b = 1$. $x - y + z = 0$ est donc bien une équation du plan (ACH).
Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne voire facile.

A 2b) On sait que les coefficients a b et c du plan (ACH) donnent les coordonnées d'un vecteur $\vec{n} = (a; b; c)$ perpendiculaire (on dit aussi normal) au plan. D'autre part les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ sont $(1; 0; 1) - (0; 1; 0) = (1; -1; 1)$ qui est justement égal à $\vec{n}$ (si on avait choisi $\overrightarrow{\mathrm{FD}}$ on n'aurait pas égalité mais l'important est qu'ils soient colinéaires). Donc la doite (DF) est bien perpendiculaire au plan (ACH), par conséquent il s'agit bien de la hauteur issue de F du tétraèdre $ACHF$.
Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne à difficile.

A 2c) La figure représentant un cube, par symétrie de cette figure on a donc que la hauteur issue d'un des sommets du tétraèdre est à chaque fois la grande diagonale du cube issue de ce point, donc (CE) est la hauteur issue de E, (AG) est la hauteur issue de A et (HB) est la hauteur issue de B.
Comme ces hauteurs sont des grandes diagonales du cube, elles se coupent donc toutes au centre du cube et sont donc concourrantes.
Connaissances requises TS. Difficulté : difficile.

B 1a) (PQ) appartient au plan (NPQ) qui par hypothèse est perpendiculaire à la hauteur (MK), donc (MK) est perpendiculaire à (PQ). Même raisonnement pour (NK) qui est aussi perpendiculaire à (PQ).
Connaissances requises TS. Difficulté : assez facile.

B 1b) Les 2 droites sécantes (par hypothèse) (MK) et (NK) sont distinctes, elles sont donc dans un unique plan (MKN). D'après le 1a, (PQ) est perpendiculaire à ces 2 droites de ce plan (droites qui sont non parallèles) donc (PQ) est perpendiculaire au plan (MKN).
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

B 2) La droite (MN) est dans le plan (MKN) qui, d'après le 1b, est perpendiculaire à (PQ), donc les arêtes [MN] et [PQ] sont bien orthogonales.
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

C) On calcule les coordonnées des vecteurs des 6 arêtes. Les arêtes opposées devront être orthogonales (3 couples d'arêtes possibles), ce qu'on peut vérifier en faisant le produit scalaire de ces vecteurs:
$\overrightarrow{\mathrm{RS}}(4; -1; -4)$ $\overrightarrow{\mathrm{TU}}(0; 8; -2)$ $\overrightarrow{\mathrm{RS}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{TU}} = 4 \times 0 + (-1) \times 8 + (-4) \times (-2) = 0$

$\overrightarrow{\mathrm{ST}}(3; -5; 7)$ $\overrightarrow{\mathrm{RU}}(7; 2; 1)$ $\overrightarrow{\mathrm{ST}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RU}} = 3 \times 7 + (-5) \times 2 + 7 \times 1 = 18$

$\overrightarrow{\mathrm{RT}}(7; -6; 3)$ $\overrightarrow{\mathrm{SU}}(3; 3; 5)$ $\overrightarrow{\mathrm{RT}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{SU}} = 7 \times 3 + (-6) \times 3 + 3 \times 5 = 18$

Au moins 2 arêtes opposées ne sont pas orthogonales donc le tétraèdre proposé n'est pas orthocentrique.
Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne.

Exercice 4 (spé)

A 1) On cherche dans les plus petites valeurs possibles en commencant par y car le facteur 8 laisse penser que x sera plus grand que y. On tombe facilement sur les nombres $x = 1$ et $y = 0$ ou bien $x = 3$ et $y = 1$.
Connaissances requises 4^e. *Difficulté : très facile.*

A 2a) L'initialisation de la récurrence permet de répondre a posteriori à la question 1 ce qui la rend d'autant plus facile. Le couple $(1; 0)$ est bien solution de l'équation (E) (vu au 1).
Soit maintenant un entier naturel n quelconque. Supposons que (x_n, y_n) soit solution de (E). Dans ce cas comme on a $x_{n+1} = 3x_n + 8y_n$ et $y_{n+1} = x_n + 3y_n$ on a :

$$x_{n+1}^2 - 8y_{n+1}^2 = (3x_n + 8y_n)^2 - 8(x_n + 3y_n)^2 = 9x_n^2 + 64y_n^2 + 12x_ny_n - 8(x_n^2 + 9y_n^2 + 6x_ny_n) = x_n^2 - 8y_n^2$$

L'hypothèse de récurrence permet donc d'affirmer qu'on a donc aussi $x_{n+1}^2 - 8y_{n+1}^2 = 0$ et par conséquent que (x_{n+1}, y_{n+1}) est solution de (E), ce qui termine la preuve par récurrence.
Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne.

A 2b) Comme $x_{n+1} = 3x_n + 8y_n$, $x_{n+1} - x_n = 2x_n + 8y_n > 0$ car x_n et y_n sont des entiers naturels donc positifs et comme on suppose x_n non nul,on a donc $x_{n+1} - x_n > 0$ ou encore $x_{n+1} > x_n$.
Si on a zappé que les entiers sont supposés naturels donc positifs on peut toujours démontrer par récurrence que $y_n \geq 0$ pour tout entier n. C'est vrai en effet pour $n = 0$ car $y_0 = 0$, et si on suppose que pour un entier n quelconque fixé on a $y_n \geq 0$, alors du fait que $y_{n+1} = x_n + 3y_n$ et que $x_n > 0$ on a bien $y_{n+1} \geq 0$ ce qui termine la récurrence. On aurait pu d'ailleurs démontrer directement par récurrence que pour tout entier n on a $x_n > 0$ et $y_n \geq 0$ ce qui ne demandait guère plus d'effort et évitait d'avoir à faire l'hypothèse $x_n > 0$, mais bon..... En réalité l'énoncé fait l'hypothèse que la suite est bien définie, à savoir que la relation de récurrence donnée pour $(x_n; y_n)$ permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, x_n et y_n sont bien des entiers naturels. C'est presque évident mais il n'empèche que l'énoncé fait l'impasse sur cette précision.
Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne.

A 3) D'après le 2a la suite $(x_n; y_n)$ est formée de couples de solutions de (E). Comme de plus, d'après le 2b nous savons que $x_{n+1} > x_n$, ces couples sont tous distincts 2 à 2 et il y en a donc une infinité.
Connaissances requises $2^{nde}/1^{ere}$ *(savoir ce qu'est une suite). Difficulté : facile.*

B 1) On trouve assez facilement que les entiers 8 et 9 conviennent car 8 n'a comme diviseur premier que 2 et $2^2 = 4$ divise bien 8, et pour 9 on n'a bien que 3 comme diviseur premier et $3^2 = 9$ divise bien 9.
Connaissances requises 3^e. *Difficulté : facile.*

B 2) Soit $n = a^2b^3$. Si p est un nombre premier divisant n, il est soit dans la décomposition en facteurs premiers de a^2 soit dans celle de b^3 (ou dans les 2), donc aussi dans celle de a ou dans celle de b. S'il est dans celle de a, p^2 sera un diviseur de a^2 et donc de n. S'il est dans celle de b, p^2 sera un diviseur de b^2 donc aussi de b^3 et donc de n.
Connaissances requises 3^e. *Difficulté : moyenne.*

B 3) x^2 est toujours un nombre puissant car il s'écrit $x^2 \times 1^3$ et on applique la question 2. Comme (x, y) est solution de (E) on a $x^2 - 1 = 8y^2 = y^2 \times 2^3$ et on peut appliquer encore la question 2. x^2 et $x^2 - 1$ sont consécutifs car ils différent de 1, et sont donc puissants tous les deux.
Connaissances requises 3^e. *Difficulté : moyenne.*

B 4) A la question 3 de la partie A on a montré qu'il existe une infinité de couples de solutions de (E), et pour tous ces couples les x_n sont 2 à 2 distincts. On a donc une infinité d'entiers consécutifs x_n^2 et $x_n^2 - 1$ qui sont puissants.
En appliquant successivement la rêgle de récurrence de la suite $(x_n; y_n)$ on peut facilement calculer les premiers couples de valeurs, jusqu'à ce que x_n^2 dépasse 2018 ce qui arrive assez vite. Ces couples sont $(1; 0)$, $(3; 1)$, $(17; 6)$ $(99; 25)$. Comme $99^2 = 9801$ on s'arrête là et les nombres cherchés sont donc $x_3^2 = 9801$ et $x_3^2 - 1 = 9800$.
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

zeta1859 at gmail, 29/06/2018

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

VENDREDI 22 JUIN 2018

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : **5**

MATHÉMATIQUES – Série L

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : **4**

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6*, *dont l'annexe page 6 est à rendre avec la copie.

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Exercice 1 (5 points)
Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Le temps passé par un client, en minute, dans un supermarché peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 45$ et d'écart type $\sigma = 12$.

Pour tout événement E, on note $p(E)$ sa probabilité.

1. Déterminer, en justifiant :
   a) $p(X = 10)$
   b) $p(X \geq 45)$
   c) $p(21 \leq X \leq 69)$
   d) $p(21 \leq X \leq 45)$

2. Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'un client passe entre 30 et 60 minutes dans ce supermarché.

3. Déterminer la valeur de a, arrondie à l'unité, telle que $P(X \leq a) = 0{,}30$. Interpréter la valeur de a dans le contexte de l'énoncé.

Partie B

En 2013, une étude a montré que 89 % des clients étaient satisfaits des produits de ce supermarché.

1. Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la proportion de clients satisfaits pour un échantillon de 300 clients pris au hasard en 2013.

Lors d'une enquête réalisée en 2018 auprès de 300 clients choisis au hasard, 286 ont déclaré être satisfaits.

2. Calculer la fréquence de clients satisfaits dans l'enquête réalisée en 2018.

3. Peut-on affirmer, au seuil de 95 %, que le taux de satisfaction des clients est resté stable entre 2013 et 2018 ? Justifier.

Exercice 2 (4 points)
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

Reporter sur la copie le numéro de la question ainsi que la lettre correspondant à la réponse choisie.

Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Aucune justification n'est demandée.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

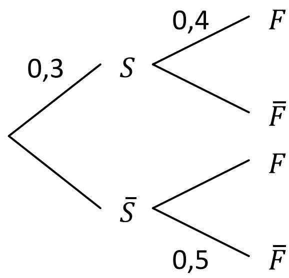
Dans un établissement scolaire, 30 % des élèves sont inscrits dans un club de sport, et parmi eux, 40 % sont des filles. Parmi ceux n'étant pas inscrits dans un club de sport, 50 % sont des garçons.

Pour tout événement E, on note $\bar{E}$ l'événement contraire de E et $p(E)$ sa probabilité. Pour tout événement F de probabilité non nulle, on note $p_F(E)$ la probabilité de E sachant que F est réalisé.

On interroge un élève au hasard et on considère les événements suivants :

- S : « l'élève est inscrit dans un club de sport »
- F : « l'élève est une fille »

La situation est représentée par l'arbre pondéré ci-contre.



1. La probabilité $p_{\bar{F}}(S)$ est la probabilité que l'élève soit :

   a) inscrit dans un club de sport sachant que c'est un garçon ;
   b) un garçon inscrit dans un club de sport ;
   c) inscrit dans un club de sport ou un garçon ;
   d) un garçon sachant qu'il est inscrit dans un club de sport.

2. On admet que $p(F) = 0{,}47$. La valeur arrondie au millième de $p_F(S)$ est :

   a) $0{,}141$ b) $0{,}255$ c) $0{,}400$ d) $0{,}638$

Partie B

Soit g la fonction définie sur $[-1\,;\,4]$ par $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$ et C_g sa courbe représentative dans un repère.

1. La tangente à la courbe C_g au point d'abscisse 1 a pour équation :

   a) $y = -3x^2 + 6x$ b) $y = 3x - 2$ c) $y = 3x - 3$ d) $y = 2x - 1$

2. La valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[-1\,;\,a]$ est nulle pour :

   a) $a = 0$ b) $a = 1$ c) $a = 2$ d) $a = 3$

Exercice 3 (5 points)
Candidats de série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de série L

Un lac de montagne est alimenté par une rivière et régulé par un barrage, situé en aval, d'une hauteur de 10 m.
On mesure le niveau d'eau du lac chaque jour à midi.

Le 1er janvier 2018, à midi, le niveau d'eau du lac était de 6,05 m.

Entre deux mesures successives, le niveau d'eau du lac évolue de la façon suivante :

- d'abord une augmentation de 6 % (apport de la rivière) ;
- ensuite une baisse de 15 cm (écoulement à travers le barrage).

1. On modélise l'évolution du niveau d'eau du lac par une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, le terme u_n représentant le niveau d'eau du lac à midi, en cm, n jours après le 1er janvier 2018. Ainsi le niveau d'eau du lac le 1er janvier 2018 à midi est donné par $u_0 = 605$.
   a) Calculer le niveau du lac, en cm, le 2 janvier 2018 à midi.
   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}06u_n - 15$.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 250$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $1{,}06$.
   Préciser son terme initial.
   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 355 \times 1{,}06^n + 250$.

3. Lorsque le niveau du lac dépasse 10 m, l'équipe d'entretien doit agrandir l'ouverture des vannes du barrage.
   a) Déterminer la limite de la suite (u_n).
   b) L'équipe d'entretien devra-t-elle ouvrir les vannes afin de réguler le niveau d'eau ? Justifier la réponse.

4. Afin de déterminer la première date d'intervention des techniciens, on souhaite utiliser l'algorithme incomplet ci-dessous.

```
N ← 0
U ← 605
Tant que …………… faire
    U ←…………..
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

   a) Recopier et compléter l'algorithme.
   b) À la fin de l'exécution de l'algorithme, que contient la variable N ?
   c) En déduire la première date d'intervention des techniciens sur les vannes du barrage.

Exercice 4 (6 points)
Commun à tous les candidats

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$ par

$$f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-2x} + 3.$$

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère. Une représentation graphique est donnée en annexe.

1. On note f' la fonction dérivée de f. Montrer que, pour tout $x \in [-2\,;4]$,

$$f'(x) = -4x\mathrm{e}^{-2x}.$$

2. Étudier les variations de f.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-2\,;0]$ et donner une valeur approchée au dixième de cette solution.

4. On note f'' la fonction dérivée de f'. On admet que, pour tout $x \in [-2\,;4]$,

$$f''(x) = (8x-4)\mathrm{e}^{-2x}.$$

   a) Étudier le signe de f'' sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$.

   b) En déduire le plus grand intervalle dans $[-2\,;\,4]$ sur lequel f est convexe.

5. On note g la fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;4]$ par $g(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-2x}$.

   a) Vérifier que la fonction G définie pour tout $x \in [-2\,;4]$ par $G(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-2x}$ est une primitive de la fonction g.

   b) En déduire une primitive F de f.

6. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine $\mathcal{D}$ compris entre la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

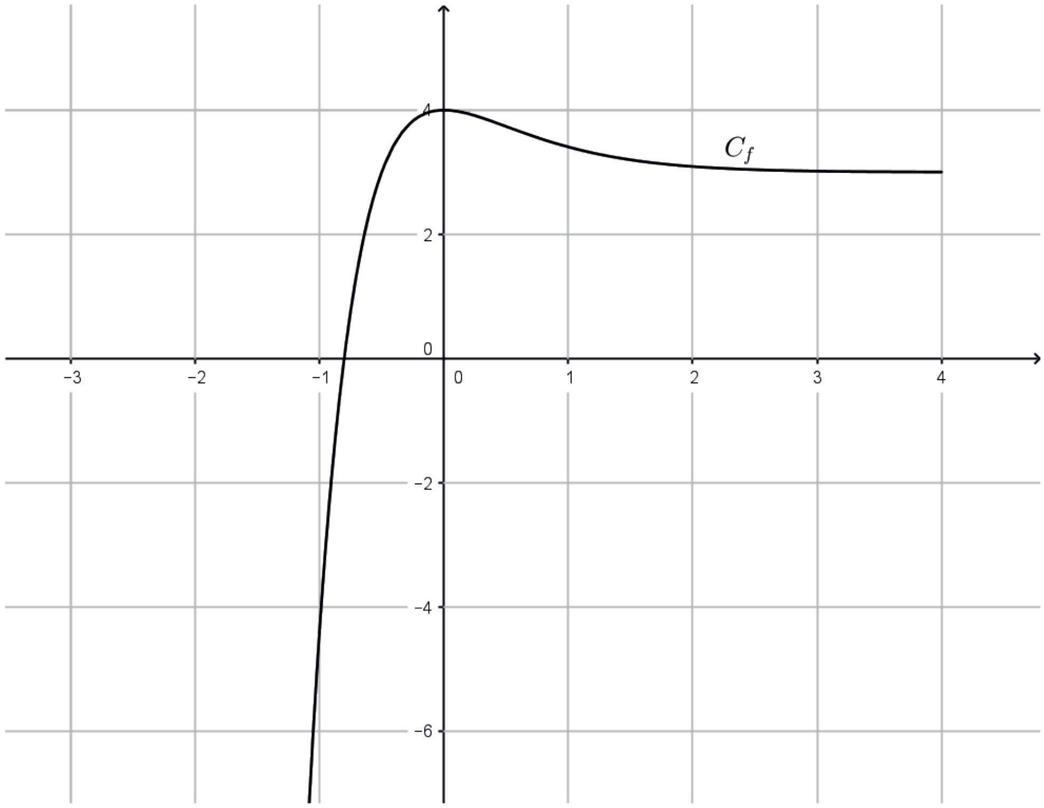
   a) Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique donné en annexe, à rendre avec la copie.

   b) Par lecture graphique, donner un encadrement de $\mathcal{A}$, en unité d'aire, par deux entiers consécutifs.

   c) Calculer la valeur exacte de $\mathcal{A}$, puis une valeur approchée au centième.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 4 – Commun à tous les candidats



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

VENDREDI 22 JUIN 2018

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : **7**

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7*, *dont les annexes page 7 sont à rendre avec la copie.

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Exercice 1 (5 points)
Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Le temps passé par un client, en minute, dans un supermarché peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 45$ et d'écart type $\sigma = 12$.

Pour tout événement E, on note $p(E)$ sa probabilité.

1. Déterminer, en justifiant :
   a) $p(X = 10)$
   b) $p(X \geq 45)$
   c) $p(21 \leq X \leq 69)$
   d) $p(21 \leq X \leq 45)$

2. Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'un client passe entre 30 et 60 minutes dans ce supermarché.

3. Déterminer la valeur de a, arrondie à l'unité, telle que $P(X \leq a) = 0{,}30$. Interpréter la valeur de a dans le contexte de l'énoncé.

Partie B

En 2013, une étude a montré que 89 % des clients étaient satisfaits des produits de ce supermarché.

1. Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la proportion de clients satisfaits pour un échantillon de 300 clients pris au hasard en 2013.

Lors d'une enquête réalisée en 2018 auprès de 300 clients choisis au hasard, 286 ont déclaré être satisfaits.

2. Calculer la fréquence de clients satisfaits dans l'enquête réalisée en 2018.

3. Peut-on affirmer, au seuil de 95 %, que le taux de satisfaction des clients est resté stable entre 2013 et 2018 ? Justifier.

Exercice 2 (4 points)
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

Reporter sur la copie le numéro de la question ainsi que la lettre correspondant à la réponse choisie.

Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Aucune justification n'est demandée.

Les parties A et B sont indépendantes.

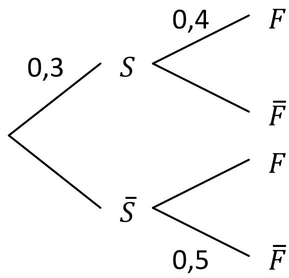
Partie A

Dans un établissement scolaire, 30 % des élèves sont inscrits dans un club de sport, et parmi eux, 40 % sont des filles. Parmi ceux n'étant pas inscrits dans un club de sport, 50 % sont des garçons.
Pour tout événement E, on note $\bar{E}$ l'événement contraire de E et $p(E)$ sa probabilité. Pour tout événement F de probabilité non nulle, on note $p_F(E)$ la probabilité de E sachant que F est réalisé.

On interroge un élève au hasard et on considère les événements suivants :

- S : « l'élève est inscrit dans un club de sport »
- F : « l'élève est une fille »

La situation est représentée par l'arbre pondéré ci-contre.



1. La probabilité $p_{\bar{F}}(S)$ est la probabilité que l'élève soit :
   a) inscrit dans un club de sport sachant que c'est un garçon ;
   b) un garçon inscrit dans un club de sport ;
   c) inscrit dans un club de sport ou un garçon ;
   d) un garçon sachant qu'il est inscrit dans un club de sport.

2. On admet que $p(F) = 0{,}47$. La valeur arrondie au millième de $p_F(S)$ est :

   a) $0{,}141$ b) $0{,}255$ c) $0{,}400$ d) $0{,}638$

Partie B

Soit g la fonction définie sur $[-1\,;\,4]$ par $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$ et C_g sa courbe représentative dans un repère.

1. La tangente à la courbe C_g au point d'abscisse 1 a pour équation :

   a) $y = -3x^2 + 6x$ b) $y = 3x - 2$ c) $y = 3x - 3$ d) $y = 2x - 1$

2. La valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[-1\,;\,a]$ est nulle pour :

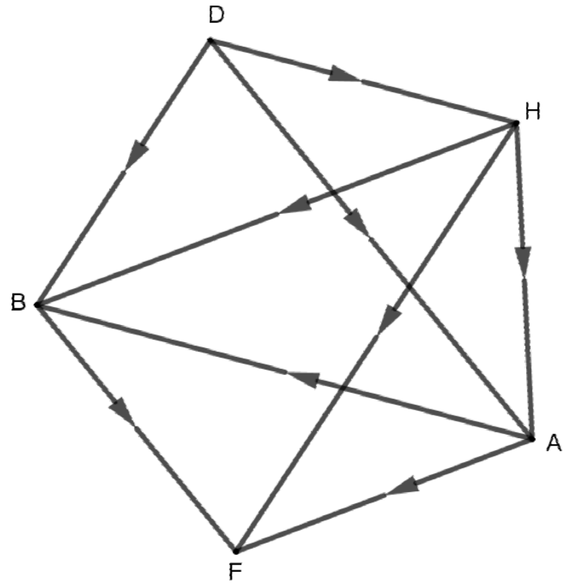
   a) $a = 0$ b) $a = 1$ c) $a = 2$ d) $a = 3$

Exercice 3 (5 points)
Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Un parcours sportif est composé d'un banc pour abdominaux, de haies et d'anneaux. Le graphe orienté ci-contre indique les différents parcours conseillés partant de D et terminant à F.

Les sommets sont : D (départ), B (banc pour abdominaux), H (haies), A (anneaux) et F (fin du parcours).
Les arêtes représentent les différents sentiers reliant les sommets.



1. Quel est l'ordre du graphe ?

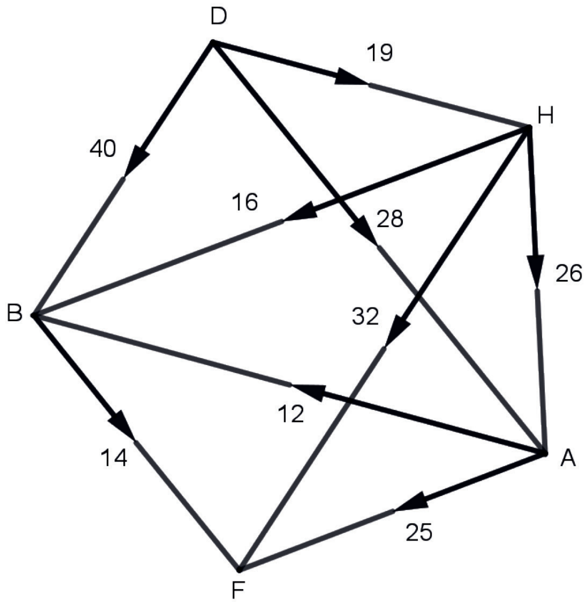
2. On note M la matrice d'adjacence de ce graphe où les sommets sont rangés dans l'ordre alphabétique.

   a) Déterminer M.

   b) On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Assia souhaite aller de D à F en faisant un parcours constitué de 3 arêtes.
   Est-ce possible ? Si oui, combien de parcours différents pourra-t-elle emprunter ?
   Préciser ces trajets.

3. Assia a relevé ses temps de course en minute entre les différents sommets. Ces durées sont portées sur le graphe ci-dessous.
   Lors d'un entraînement, Assia souhaite courir le moins longtemps possible en allant de D à F. Déterminer le trajet pour lequel le temps de course est minimal et préciser la durée de sa course.



Partie B

Le responsable souhaite ajouter une barre de traction notée T. De nouveaux sentiers sont construits et de nouveaux parcours sont possibles.

La matrice d'adjacence N associée au graphe représentant les nouveaux parcours, dans lequel les sommets sont classés dans l'ordre alphabétique, est

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Compléter l'annexe 1 à rendre avec la copie, en ajoutant les arêtes nécessaires au graphe orienté correspondant à la matrice N.

Exercice 4 (6 points)
Commun à tous les candidats

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$ par

$$f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-2x} + 3.$$

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère. Une représentation graphique est donnée en annexe 2.

1. On note f' la fonction dérivée de f. Montrer que pour tout $x \in [-2\,;4]$,

$$f'(x) = -4x\mathrm{e}^{-2x}.$$

2. Étudier les variations de f.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-2\ ;0]$ et donner une valeur approchée au dixième de cette solution.

4. On note f'' la fonction dérivée de f'. On admet que, pour tout $x \in [-2\,;4]$,

$$f''(x) = (8x-4)\mathrm{e}^{-2x}.$$

   a) Étudier le signe de f'' sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$.

   b) En déduire le plus grand intervalle dans $[-2\ ;\ 4]$ sur lequel f est convexe.

5. On note g la fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;4]$ par $g(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-2x}$.

   a) Vérifier que la fonction G définie pour tout $x \in [-2\,;4]$ par $G(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-2x}$ est une primitive de la fonction g.

   b) En déduire une primitive F de f.

6. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine $\mathcal{D}$ compris entre la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

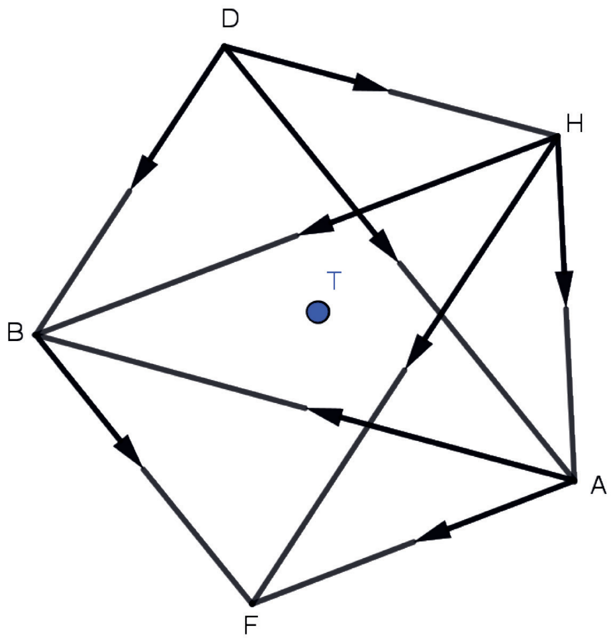
   a) Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique donné en annexe 2, à rendre avec la copie.

   b) Par lecture graphique, donner un encadrement de $\mathcal{A}$, en unité d'aire, par deux entiers consécutifs.

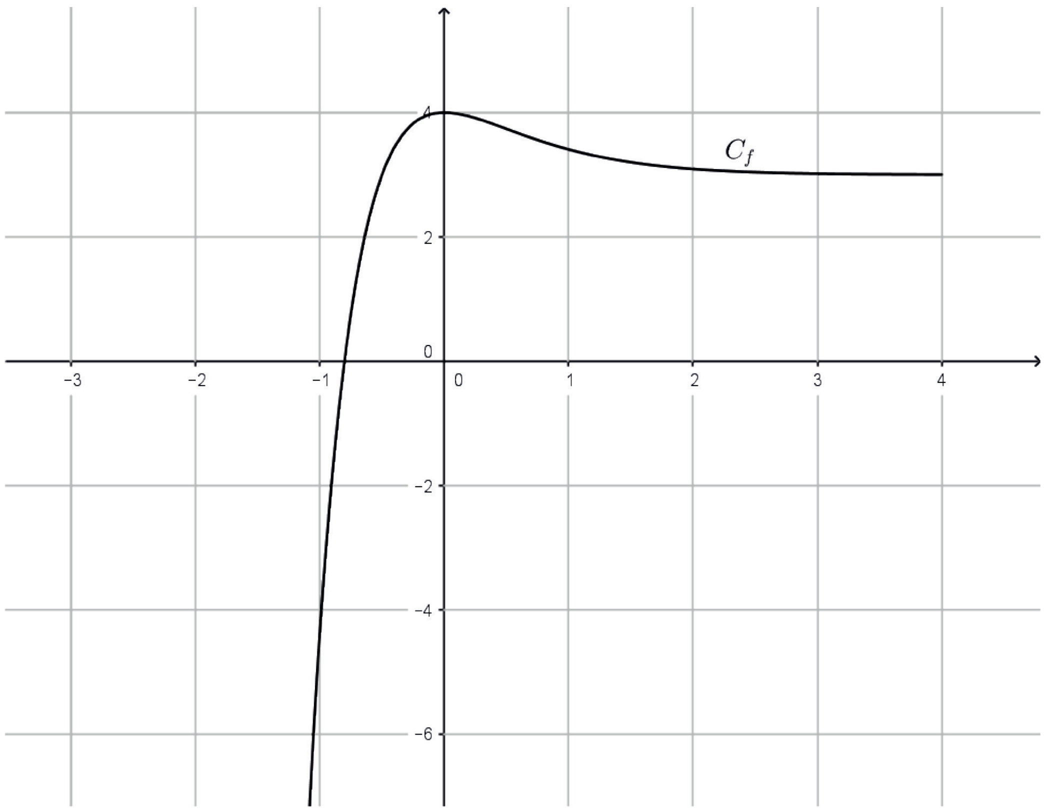
   c) Calculer la valeur exacte de $\mathcal{A}$, puis une valeur approchée au centième.

ANNEXES À RENDRE AVEC LA COPIE

Annexe 1
Exercice 3 - Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité



Annexe 2
Exercice 4 – Commun à tous les candidats



B A C C A L A U R É A T G É N É R A L

SESSION 2019

ÉPREUVE DU VENDREDI 21 JUIN 2019

MATHÉMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire **Coefficient : 7**

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées de 1 à 7.

La page 7 est une annexe à rendre avec la copie.

Exercice 1 (6 points) : commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'ensemble **R** des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

1.

a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

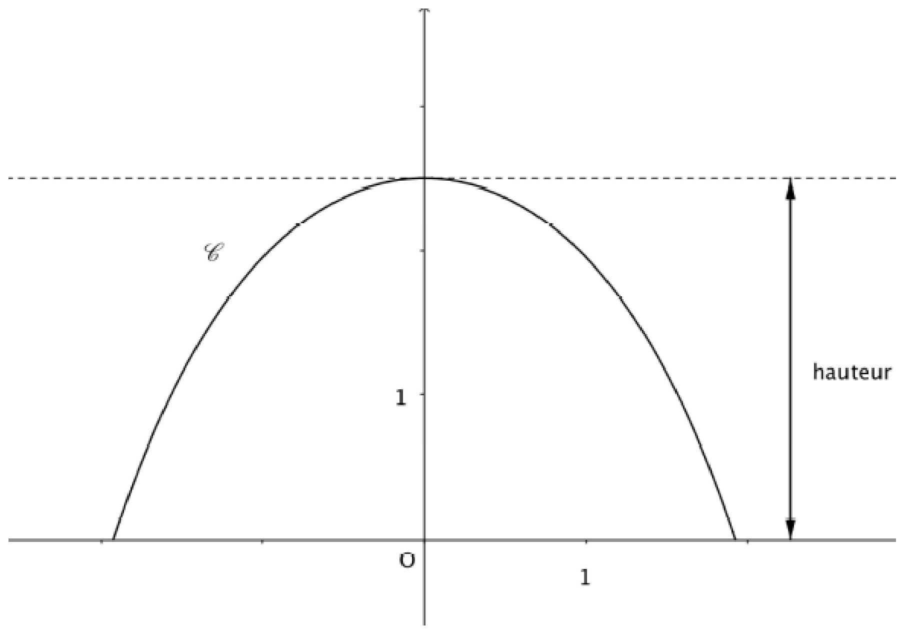
c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, une unique solution, qu'on note α.

2. En remarquant que, pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$, justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans **R** et qu'elles sont opposées.

Partie B

Les **serres en forme de tunnel** sont fréquemment utilisées pour la culture des plantes fragiles ; elles limitent les effets des intempéries ou des variations de température.
Elles sont construites à partir de plusieurs arceaux métalliques identiques qui sont ancrés au sol et supportent une bâche en plastique.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité 1 mètre. La fonction f et le réel α sont définis dans la **partie A**. Dans la suite de l'exercice, on modélise un arceau de serre par la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f sur l'intervalle $[-\alpha; \alpha]$.
On a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[-\alpha; \alpha]$.



On admettra que la courbe $\mathscr{C}$ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

1. Calculer la hauteur d'un arceau.

2. **a.** Dans cette question, on se propose de calculer la valeur exacte de la longueur de la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0;\alpha]$. On admet que cette longueur est donnée, en mètre, par l'intégrale :

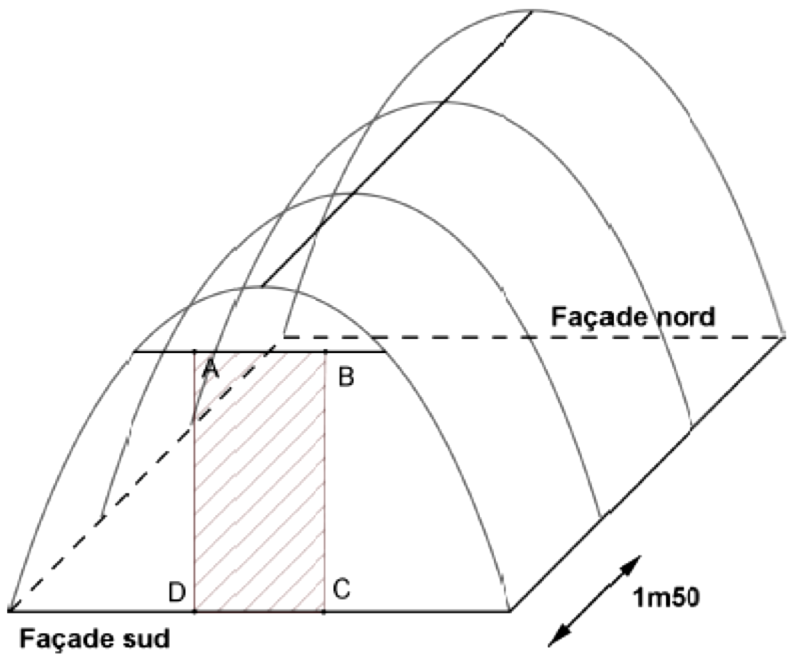
$$I=\int_0^{\alpha}\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Montrer que pour tout réel x, on a : $1+(f'(x))^2=\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2$.

b. En déduire la valeur de l'intégrale I en fonction de α.
Justifier que la longueur d'un arceau, en mètre, est égale à : $e^{\alpha}-e^{-\alpha}$.

Partie C

On souhaite construire une serre de jardin en forme de tunnel.
On fixe au sol quatre arceaux métalliques, dont la forme est celle décrite dans la partie précédente, espacés de 1,5 mètre, comme indiqué sur le schéma ci-dessous.
Sur la façade sud, on prévoit une ouverture modélisée sur le schéma par le rectangle ABCD de largeur 1 mètre et de longueur 2 mètres.



On souhaite connaître la quantité, exprimée en m², de bâche plastique nécessaire pour réaliser cette serre.
Cette bâche est constituée de trois parties, l'une recouvrant la façade nord, l'autre la façade sud (sauf l'ouverture), la troisième partie de forme rectangulaire recouvrant le dessus de la serre.

1. Montrer que la quantité de bâche nécessaire pour recouvrir les façades sud et nord est donnée, en m^2, par :

$$\mathcal{A}=4\int_0^{\alpha}f(x)dx-2.$$

2. On prend 1,92 pour valeur approchée de α. Déterminer, au m^2 près, l'aire totale de la bâche plastique nécessaire pour réaliser cette serre.

Exercice 2 (5 points) : commun à tous les candidats

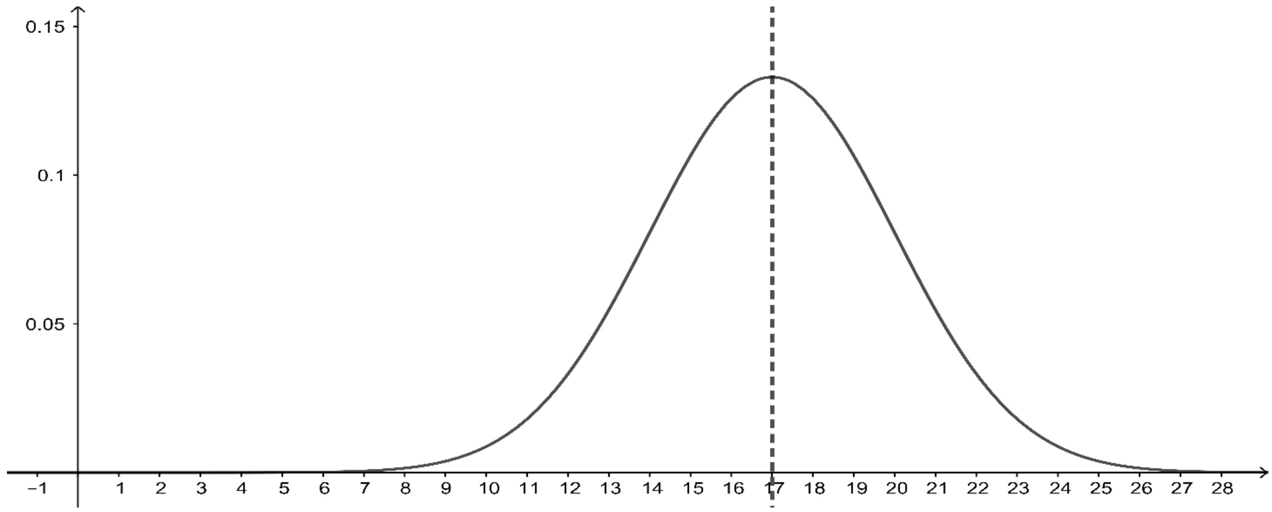
Une plateforme informatique propose deux types de jeux vidéo : un jeu de type A et un jeu de type B.

Partie A

Les durées des parties de type A et de type B, exprimées en minutes, peuvent être modélisées respectivement par deux variables aléatoires notées X_A et X_B.

La variable aléatoire X_A suit la loi uniforme sur l'intervalle $[9; 25]$.

La variable aléatoire X_B suit la loi normale de moyenne μ et d'écart type 3. La représentation graphique de la fonction de densité de cette loi normale et son axe de symétrie sont donnés ci-dessous.



1.

a. Calculer la durée moyenne d'une partie de type A.

b. Préciser à l'aide du graphique la durée moyenne d'une partie de type B.

2. On choisit au hasard, de manière équiprobable, un type de jeu. Quelle est la probabilité que la durée d'une partie soit inférieure à 20 minutes ? On donnera le résultat arrondi au centième.

Partie B

On admet que, dès que le joueur achève une partie, la plateforme lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant :

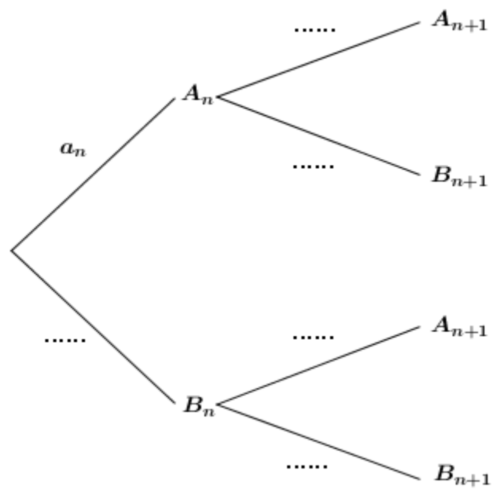
- si le joueur achève une partie de type A, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type A avec une probabilité de 0,8 ;
- si le joueur achève une partie de type B, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type B avec une probabilité de 0,7.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note A_n et B_n les évènements :

A_n : « la n-ième partie est une partie de type A. »

B_n : « la n-ième partie est une partie de type B. »

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n.



1.

a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.

b. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3.$$

Dans la suite de l'exercice, on note a la probabilité que le joueur joue au jeu A lors de sa première partie, où a est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0; 1]$. La suite (a_n) est donc définie par :
$a_1 = a$, et pour tout entier naturel $n \geq 1$, $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 0{,}3$.

2. *Étude d'un cas particulier* : Dans cette question, on suppose que $a = 0{,}5$.

a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $0 \leq a_n \leq 0{,}6$.

b. Montrer que la suite (a_n) est croissante.

c. Montrer que la suite (a_n) est convergente et préciser sa limite.

3. *Étude du cas général* : Dans cette question, le réel a appartient à l'intervalle $[0; 1]$.
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par : $u_n = a_n - 0{,}6$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a : $a_n = (a - 0{,}6) \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}6$.

c. Déterminer la limite de la suite (a_n). Cette limite dépend-elle de la valeur de a ?

d. La plateforme diffuse une publicité insérée en début des parties de type A et une autre publicité insérée en début des parties de type B. Quelle devrait être la publicité la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéo ?

Exercice 3 (4 points) : commun à tous les candidats

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Dans l'ensemble **C** des nombres complexes, on considère l'équation (E) : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.
On note A et B les points du plan dont les affixes sont les solutions de (E).

Affirmation 1 : Le triangle OAB est équilatéral.

2. On note u le nombre complexe : $u = \sqrt{3} + i$ et on note $\bar{u}$ son conjugué.

Affirmation 2 : $u^{2019} + \bar{u}^{\,2019} = 2^{2019}$.

3. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = xe^{-nx+1}.$$

Affirmation 3 : Pour tout entier naturel $n \geq 1$, la fonction f_n admet un maximum.

4. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur **R** par : $f(x) = \cos(x)\, e^{-x}$.

Affirmation 4 : La courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote en $+\infty$.

5. Soit A un nombre réel strictement positif.
On considère l'algorithme ci-contre.

```
I ← 0
Tant que 2^I ≤ A
    I ← I + 1
Fin Tant que
```

On suppose que la variable I contient la valeur 15 en fin d'exécution de cet algorithme.

Affirmation 5 : $15\ln(2) \leq \ln(A) \leq 16\ln(2)$

Exercice 4 (5 points) : pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1, dont la figure est donnée en **annexe, page 7**.
On note I le milieu du segment [EF], J le milieu du segment [EH] et K le point du segment [AD] tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.
On note $\mathcal{P}$ le plan passant par I et parallèle au plan (FHK).

Partie A

Dans cette partie, les constructions demandées seront effectuées sans justification sur la figure donnée en **annexe**, **page 7, à rendre avec la copie.**

1. Le plan (FHK) coupe la droite (AE) en un point qu'on note M. Construire le point M.

2. Construire la section du cube par le plan $\mathcal{P}$.

Partie B

Dans cette partie, on munit l'espace du repère orthonormé $(A\,;\ \overrightarrow{AB}\,;\ \overrightarrow{AD}\,;\ \overrightarrow{AE})$.
On rappelle que $\mathcal{P}$ est le plan passant par I et parallèle au plan (FHK).

1.

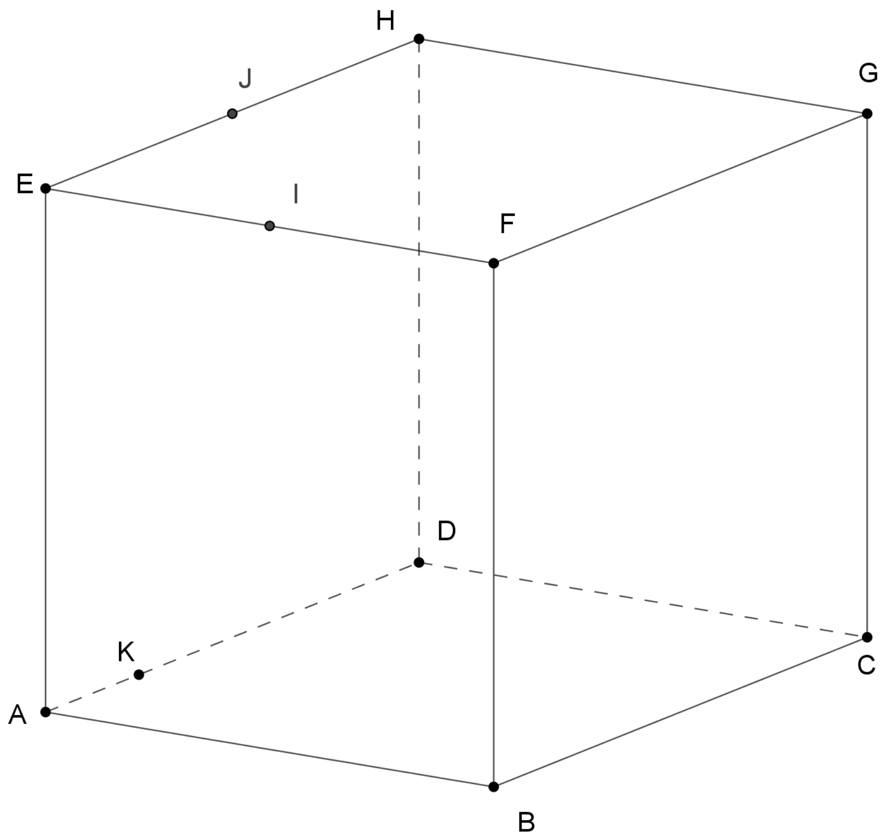
- **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (FHK).
- **b.** En déduire qu'une équation cartésienne du plan (FHK) est : $4x + 4y - 3z - 1 = 0$.
- **c.** Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
- **d.** Calculer les coordonnées du point M', point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (AE).

2. On note Δ la droite passant par le point E et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

- **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
- **b.** Calculer les coordonnées du point L, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
- **c.** Tracer la droite Δ sur la figure donnée en **annexe page 7, à rendre avec la copie**.
- **d.** Les droites Δ et (BF) sont-elles sécantes ? Qu'en est-il des droites Δ et (CG) ? Justifier.

ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 4 : pour les candidats n’ayant pas suivi l’enseignement de spécialité



Baccalauréat S

Session 2019 Métropole - Mathématiques

Proposition de corrigé par Thomas Harbreteau et complété par www.sujetdebac.fr. Pour toute question ou remarque éventuelle, vous pouvez me contacter à l'adresse mail suivante : `tharbreteau@protonmail.com`.

Exercice n° 1 *Commun à tous les candidats*

Partie A

1. (**a**) Comme $-x \to_{(x\to+\infty)} -\infty$, par continuité de l'exponentielle, $e^{-x} \to_{(x\to+\infty)} 0$. De plus, $e^x \to_{(x\to+\infty)} +\infty$, donc par opérations sur les limites, $f(x) \to_{(x\to+\infty)} -\infty$.

(**b**) Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont définies et dérivables sur $\mathbf{R}_+$ donc par opérations, f l'est également, avec

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad f'(x) = -\frac{1}{2}(e^x + (-e^{-x})) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x).$$

La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbf{R}_+$, si $x \in \mathbf{R}_+$,

$$e^{-x} - e^x < 0 \iff e^{-x} < e^x \iff 1 < e^x e^x = e^{2x}.$$

La fonction logarithme étant strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$, elle conserve les inégalités strictes, d'où

$$1 < e^{2x} \iff \ln 1 < \ln e^{2x} \iff 0 < 2x \iff x > 0, \quad \text{et} \quad f'(x) = 0 \iff x = 0.$$

La fonction f' est donc strictement négative sur $\mathbf{R}_+^*$ et nulle en un unique point, qui est 0, donc f est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$.

(**c**) D'après **1.a**, $f(x) \to_{(x\to+\infty)} -\infty$ donc il existe $A > 0$ tel que $f(A) < 0$. De plus, $f(0) = 7/2-(e^0+e^{-0})/2 = 7/2 > 0$ et f est continue sur $[0, A]$. Par théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule au moins une fois sur $]0, A[$, donc sur $\mathbf{R}_+$, notons $\alpha > 0$ un tel point d'annulation. La stricte décroissance de f sur $\mathbf{R}_+$ démontrée en **1.b** montre l'unicité de α.

2. Remarquons que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(-x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{-(-x)}) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^{-x} + e^x) = f(x),$$

donc f est paire. On a donc, si $x \in \mathbf{R}_-^*$, $f(x) = 0$ si et seulement si $f(-x) = 0$, mais $-x \in \mathbf{R}_+$. D'après **1.c**, f s'annule en α uniquement sur $\mathbf{R}_+$, donc $f(x) = 0$ si et seulement si $-x = \alpha$, si et seulement si $x = -\alpha$. Ainsi, $-\alpha < 0$ est l'unique point d'annulation de f sur $\mathbf{R}_-^*$. La fonction f s'annule donc une unique fois sur $\mathbf{R}_+$ et une unique fois sur $\mathbf{R}_-^*$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions, qui sont α et $-\alpha$, donc qui sont opposées.

Partie B

1. *Remarque : On a montré en* ***Partie A, 2*** *que f était paire, ce qui se traduit bien par une symétrie de son graphe par rapport à l'axe des ordonnées.*

Remarque bis : La hauteur n'est pas proprement définie par l'énoncé. On peut soit l'interpréter comme la différence entre le maximum et le minimum de f sur $[-\alpha, \alpha]$, soit comme ce que semble indiquer le dessin, à savoir la valeur de $f(0)$. Les deux seraient sans doutes acceptés, à condition d'expliquer sur sa copie quelle définition on utilise.

Définissons la hauteur h d'un arceau comme la différence entre le maximum et le minimum de f sur $[-\alpha, \alpha]$. On a montré en **Partie A, b** que f était strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$. Comme elle est paire, elle est strictement croissante sur $\mathbf{R}_-$, donc elle atteint son maximum en 0, et son minimum est 0, atteint en α et $-\alpha$. On a donc $h = f(0) - 0 = 7/2 - (e^0 + e^{-0})/2 = 7/2 - 2/2 = 5/2 = 2,5\text{m}$.

2. (**a**) De même qu'en **Partie A, 1.b**, on montre que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{x}),$$

d'où

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad 1+(f'(x))^2 = 1+\frac{1}{2^2}(e^{-x}-e^{x})^2 = \frac{4}{4}+\frac{1}{4}((e^{-x})^2-2e^{-x}e^{x}+(e^{x})^2) = \frac{1}{4}((e^{-x})^2+2+(e^{x})^2) = \frac{1}{4}(e^{x}+e^{-x})^2.$$

(**b**) D'après **2.a**,

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \sqrt{1+(f'(x))^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(e^{x}+e^{-x})^2} = \frac{1}{2}|e^{x}+e^{-x}| = \frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}),$$

car la fonction exponentielle est positive sur $\mathbf{R}$. Par conséquent,

$$I = \int_0^{\alpha} \sqrt{1+(f'(x))^2)}\mathrm{d}x = \int_0^{\alpha} \frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[e^{x}+(-e^{-x})\right]_0^{\alpha} = \frac{1}{2}((e^{\alpha}-e^{0})-(e^{-\alpha}-e^{0})) = \frac{1}{2}(e^{\alpha}-e^{-\alpha}).$$

Mais on a montré en **Partie A, 2** que f est paire, donc la longueur de la courbe $\mathcal{C}$ sur $[-\alpha, 0]$ est égale à celle sur $[0, \alpha]$, qui vaut I. On en déduit que la longueur d'un arceau est égale à $2I$, c'est-à-dire à $e^{\alpha} - e^{-\alpha}$.

Partie C

1. La quantité $\mathcal{A}_N$ de bâche nécéssaire pour recouvrir la façade nord est égale à l'aire délimitée par un arceau et le sol, donc à l'aire sous la courbe représentative de f entre $-\alpha$ et α. Par conséquent,

$$\mathcal{A}_N = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x.$$

Mais d'après **Partie A, 2**, f est paire donc

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x.$$

De plus, la quantité $\mathcal{A}_S$ de bâche nécéssaire pour recouvrir la façade sud est la même que celle pour la façade nord, moins l'aire de l'ouverture, égale à $1 \times 2 = 2\mathrm{m}^2$. Ainsi, $\mathcal{A}_S = \mathcal{A}_N - 2$, et

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_N + \mathcal{A}_S = 2\mathcal{A}_N - 2 = 2\times 2\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x - 2 = 4\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x - 2.$$

2. *Remarque : Une valeur approchée de α peut-être trouvée par dichotomie.*
D'après **1**,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = 4\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x - 2 &= 4\int_0^{\alpha}\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})\right)\mathrm{d}x - 2\\
&= 4\left[\frac{7}{2}x - \frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})\right]_0^{\alpha} - 2\\
&= 4\left[\frac{7}{2}\alpha - \frac{1}{2}(e^{\alpha}-e^{0}-(e^{-\alpha}-e^{0}))\right] - 2\\
&= 4\left[\frac{7}{2}\alpha - \frac{1}{2}(e^{\alpha}-e^{-\alpha})\right] - 2\\
&= 14\alpha - 2(e^{\alpha}-e^{-\alpha}) - 2.
\end{aligned}$$

De plus, la distance délimitée entre le premier et le dernier arceau est $3 \times 1,5 = 4,5\mathrm{m}$ et la longueur d'un arceau est, d'après **2.b**, $I = e^{\alpha} - e^{-\alpha}$. La bâche recouvrant le dessus de la serre est donc un rectangle de côtés I et $4,5$, donc d'aire $\mathcal{A}_D = 4,5I = 4,5(e^{\alpha} - e^{-\alpha})$. La quantité totale de bâche $\mathcal{A}_T$ nécessaire pour réaliser cette serre est donc

$$\mathcal{A}_T = \mathcal{A} + \mathcal{A}_D = 14\alpha - 2(e^{\alpha}-e^{-\alpha}) - 2 + 4,5(e^{\alpha}-e^{-\alpha}) = 14\alpha + 2,5(e^{\alpha}-e^{-\alpha}) - 2 \simeq 42\mathrm{m}^2.$$

Remarque : Le résultat était prévisible, 42 étant la réponse à la grande question sur la vie, l'univers et le reste. Les lecteurs d'H2G2 comprendront.

Exercice n° 2 *Commun à tous les candidats*

Partie A

1. (**a**) La variable aléatoire X_A suit une loi uniforme sur $[9, 25]$, donc $\mathbf{E}(X_A) = (25 + 9)/2 = 34/2 = 17$. La durée moyenne d'une partie de type A est 17min.

(**b**) La variable aléatoire X_B suit une loi normale, donc son espérance est égale à l'abscisse du point au sommet de la courbe en cloche qui est la représentation de sa fonction de densité, représentée sur le graphique. On peut y lire $\mathbf{E}(X_B) \simeq 17$, donc la durée moyenne d'une partie de type B est 17min.

2. Notons X la variable aléatoire modélisant le choix d'un type de jeu. X prend la valeur A avec une probabilité $0,5$ et la valeur B avec la même probabilité. Notons T la variable aléatoire modélisant la durée d'une partie. D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(T < 20) = \mathbf{P}(T < 20, X = A) + \mathbf{P}(T < 20, X = B) = \mathbf{P}(X_A < 20, X = A) + \mathbf{P}(X_B < 20, X = B).$$

Les variables aléatoires X, X_A et X_B étant indépendantes,

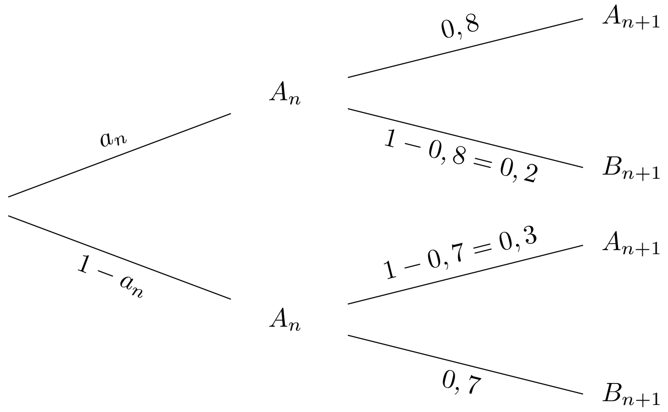
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_A < 20, X = A) + \mathbf{P}(X_B < 20, X = B) &= \mathbf{P}(X_A < 20)\mathbf{P}(X = A) + \mathbf{P}(X_B < 20)\mathbf{P}(X = B)\\ &= 0,5[\mathbf{P}(X_A < 20) + \mathbf{P}(X_B < 20)].\end{aligned}$$

La variable aléatoire X_A suivant une loi uniforme sur $[9, 25]$, $\mathbf{P}(X_A < 20) = (20 - 9)/(25 - 9) = 0,6875$. La variable aléatoire X_B suivant une loi normale de moyenne $\mu = 17$ d'après **1.b**, et d'écart type 3 donc $\mathbf{P}(X_B < 20)$ s'obtient à l'aide de la calculatrice et a pour résultat 0,8413. On en déduit que

$$\mathbf{P}(T < 20) = 0,5(0,6875 + 0,8413) \simeq 0,76.$$

Partie B

1. (**a**) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, les données de l'énoncé permettent de construire l'arbre de probabilités suivant :



(**b**) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(A_{n+1}) = \mathbf{P}(A_{n+1} \cap A_n) + \mathbf{P}(A_{n+1} \cap B_n) = \mathbf{P}(A_{n+1} \mid A_n)\mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}(A_{n+1} \mid B_n)\mathbf{P}(B_n),$$

donc l'arbre construit en **1.a** montre que $\mathbf{P}(A_{n+1}) = 0,8\mathbf{P}(A_n) + 0,3\mathbf{P}(B_n)$, soit

$$a_{n+1} = 0,8a_n + 0,3(1 - a_n) = 0,5a_n + 0,3.$$

2. (**a**) Notons pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $(H_n) : 0 \leq a_n \leq 0,6$.

- Initialisation : Comme $a_1 = a = 0,5$, (H_1) est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que (H_n) soit vraie. D'après **1.b**, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$ mais d'après (H_n), $0 \leq a_n \leq 0,6$ donc $0,3 \leq 0,5a_n + 0,3 \leq 0,5 \times 0,6 + 0,3$, soit $0 \leq a_{+1} \leq 0,6$, d'où (H_{n+1}) est vraie.

Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 0 \leq a_n \leq 0,6$.

(**b**) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, d'après **1.b**, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$ donc $a_{n+1} - a_n = -0,5a_n + 0,3$. Mais d'après **2.a**, $0 \leq a_n \leq 0,6$ donc $0 \geq -0,5a_n \geq -0,5 \times 0,6 = -0,3$, d'où $a_{n+1} - a_n \geq -0,3 + 0,3 = 0$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $a_{n+1} \geq a_n$, donc que la suite (a_n) est croissante.

(**c**) D'après **2.b**, (a_n) est croissante et d'après **2.a**, elle est majorée, donc elle converge. Notons l sa limite, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans la relation $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$, l vérifie

$$l = 0,5l + 0,3, \quad \text{donc} \quad 0,5l = 0,3, \quad \text{soit} \quad l = 0,6.$$

3. (**a**) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, d'après **1.b**, $a_{n+1} = 0,5a_n+0,3$, donc $a_{n+1}-0,6 = 0,5a_n+0,3-0,6 = 0,5a_n-0,3 = 0,5(a_n-0,6)$, donc $u_{n+1} = 0,5u_n$. La suite (u_n) est donc bien géométrique, de raison $0,5$.

(**b**) D'après **3.a**, (u_n) est une suite géometrique de raison $0,5$ et de premier terme $u_1 = a_1 - 0,6 = a - 0,6$. Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = u_1 \times 0,5^{n-1} = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1},$$

donc par définition de (u_n),

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6.$$

(**c**) Comme $-1 < 0,5 < 1$, la suite géométrique de raison $0,25$ a une limite nulle, donc pas opérations sur les limites, $a_n \to_{(n\to+\infty)} 0,6$. Cette limite est indépendante de la valeur de a.

(**d**) Comme pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $a_n + b_n = 1$, $b_n = 1 - a_n$, mais d'après **3.c**, $a_n \to_{(n\to+\infty)} 0,6$ donc par opérations sur les limites, $b_n \to_{(n\to+\infty)} 0,4$. On bout d'un certain nombre de parties, la probabilité de faire une partie A est plus grande que celle de faire une partie B, donc la publicité qui sera la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéos sera celle insérée en début des parties de type A.

Exercice n° 3 *Commun à tous les candidats*

1. Notons Δ le discriminant de (E),

$$\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 4 = 4 \times 3 - 16 = 12 - 16 = -4 < 0.$$

L'équation (E) admet donc deux racines complexes conjuguées distinctes, que l'on note z_A et z_B, avec

$$z_A = \frac{2\sqrt{3} - \mathrm{i}\sqrt{4}}{2} = \frac{2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}}{2} = \sqrt{3} - \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_B = \sqrt{3} + \mathrm{i}.$$

Comme z_A et z_B sont conjugués, $|z_A| = |z_B| = |\sqrt{3} + \mathrm{i}| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$ et $OA = OB$. De plus,

$$AB = |z_B - z_A| = |\sqrt{3} + \mathrm{i} - (\sqrt{3} - \mathrm{i})| = |2\mathrm{i}| = 2,$$

donc $OA = OB = AB$, donc le triangle OAB est équilatéral, <u>l'affirmation 1 est vraie.</u>

2. Mettons u sous forme exponentielle, $|u| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$, et

$$u = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = 2e^{\mathrm{i}\pi/6}.$$

Ainsi, $u^{2019} = 2^{2019}e^{2019\mathrm{i}\pi/6}$, or $2019 = 6 \times 336 + 3$, d'où $u^{2019} = 2^{2019}e^{\mathrm{i}336\pi+\mathrm{i}\pi/2} = 2^{2019}\mathrm{i}$.
De plus, $u^{2019} + \overline{u}^{2019} = 2^{2019}\mathrm{i} + \overline{2^{2019}\mathrm{i}} = 0$. <u>L'affirmation 2 est donc fausse.</u>

3. Soit $n \geq 1$, notons $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto e^{-nx+1}$, définies et dérivables sur $\mathbf{R}_+$. Comme $f_n = u \times v$, par opérations f_n l'est aussi et par formule de dérivation d'un produit de fonctions,

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad f_n'(x) = e^{-nx+1} + x(-n)e^{-nx+1} = (1 - xn)e^{-nx+1}.$$

Si $x \in \mathbf{R}_+$, la fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbf{R}_+$,

$$f_n'(x) > 0 \iff 1 - xn > 0 \iff xn < 1 \iff x < \frac{1}{n}, \quad \text{et} \quad f_n'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{n}.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Pour tout entier n non nul, f_n admet bien un maximum, et ce en $1/n$. L'affirmation 3 est bien vraie.

4. Par positivité de la fonction exponentielle sur $\mathbf{R}$,

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad |f(x)| = |\cos x|e^{-x} \leq e^{-x},$$

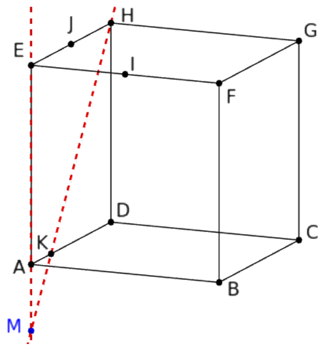
car la fonction cosinus est majorée par 1 sur $\mathbf{R}$, donc $|f(x)| \to_{(x\to+\infty)} 0$, d'où $f(x) \to_{(x\to+\infty)} 0$. La courbe représentative de f admet donc une asymptote horizontale d'équation $x = 0$, ce qui prouve que l'affirmation 4 est vraie.

5. Si la variable I contient la valeur 15 en fin d'algorithme, on a alors $2^{14} \leq A$ et $2^{15} > A$.
Par conséquent : $2^{14} \leq A < 2^{15}$. Par stricte croissance de la fonction logarithme sur $\mathbf{R}_+^*$, on obtient $\ln(2^{14}) \leq \ln(A) < \ln(2^{15})$ et donc $14\ln(2) \leq \ln(A) < 15\ln(2)$.
L'affirmation 5 est donc fausse.

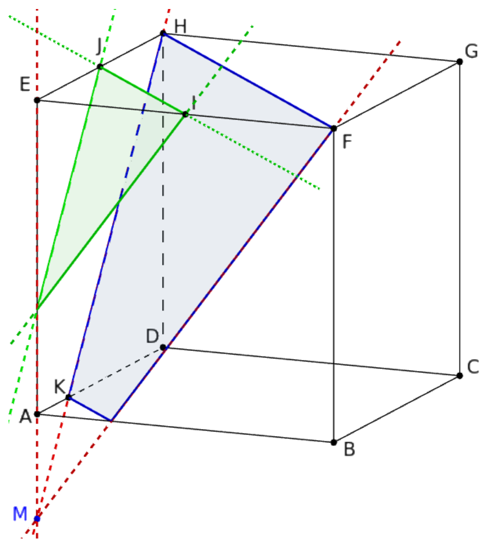
Exercice n° 4 *Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Partie A

1. La droite (HK) est incluse dans le plan (FHK), donc l'intersection entre (HK) et (AE) est l'intersection entre (AE) et (FHK), car (AE) n'est pas incluse dans (FHK).



2. Le point M appartient au plan (FHK), donc la droite (FM) est incluse dans (FHK), ce qui permet de la section du cube par le plan (FHK), représentée en bleu. On trace ensuite la droite parallèle à (FH) passant par I, puis celle parallèle à (FM) passant par I, et enfin comme celle parallèle à (HK) passant par J. Ces trois droites délimitent la section du cube par le plan $\mathcal{P}$, parallèle à (FHK) et passant par I, représentée en vert.



Partie B

1. (**a**) Les coordonnées de F sont $(1;0;1)$, celles de H sont $(0;1;1)$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, donc les coordonnées de K sont $(0;1/4;0)$. On en déduit que $\overrightarrow{FH} = (0-1;1-0;1-1) = (-1;1;0)$ et que $\overrightarrow{FK} = (0-1;1/4-0;0-1) = (-1;1/4;-1)$. Ces deux vecteurs ne sont donc pas colinéaires donc sont deux vecteurs directeurs de (FHK). De plus,

$$\begin{cases} \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{FH} = 4 \times (-1) + 4 \times 1 + (-3) \times 0 = 0 \\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{FK} = 4 \times (-1) + 4 \times \dfrac{1}{4} + (-3) \times (-1) = -4 + 1 + 3 = 0 \end{cases},$$

donc $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs de (FHK), donc est normal à ce plan.

(**b**) D'après **1.a**, le vecteur $\overrightarrow{n}(4;4;-3)$ est normal à (FHK) donc une équation cartésienne de ce plan est de la forme

$$4x + 4y - 3z + a = 0,$$

où a est un réel à déterminer. Le point $F(1;0;1)$ appartient à (FHK) donc a vérifie

$$4 \times 1 + 4 \times 0 - 3 \times 1 + a = 0, \quad \text{soit} \quad a = -1.$$

Une équation cartésienne de (FHK) est donc $4x + 4y - 3z - 1 = 0$.

(**c**) Le plan $\mathcal{P}$ est parallèle à (FHK) donc tout vecteur orthogonal à (FHK) est orthogonal à $\mathcal{P}$. En particulier, $\overrightarrow{n}(4;4;-3)$ est orthogonal à (FHK) d'après **1.a**, donc à $\mathcal{P}$. Une équation cartésienne de ce plan est de la forme

$$4x + 4y - 3z + b = 0,$$

où b est un réel à déterminer. Le point I appartient à $\mathcal{P}$ et est le milieu du segment $[EF]$, donc ses coordonnées sont $((0+1)/2;(0+0)/2;(1+1)/2) = (1/2;0;1)$. Ainsi, b vérifie

$$4 \times \frac{1}{2} + 4 \times 0 - 3 \times 1 + b = 0, \quad \text{soit} \quad b = 1.$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donc $4x + 4y - 3z + 1 = 0$.

(**d**) Un vecteur directeur de (AE) est $\overrightarrow{AE}(0;0;1)$ et $A(0;0;0)$ est sur (AE), donc une équation paramétrique de cette droite est

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}.$$

Soit M' un point de l'espace, notons $(x;y;z)$ ses coordonnées. D'après la représentation paramétrique de (AE) et l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$ établie en **1.d**,

$$M' \in (AE) \cap \mathcal{P} \iff \exists t \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} (x;y;z) = (0;0;t) \\ 4x + 4y - 3z + 1 = 0 \end{cases} \iff \exists t \in \mathbf{R}, \begin{cases} x = y = 0 \\ z = t \\ z = \dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

Il existe donc un unique point d'intersection M' entre (AE) et $\mathcal{P}$, de coordonnées $(0;0;1/3)$.

2. (**a**) La droite Δ est orthogonale à $\mathcal{P}$, donc tout vecteur normal à ce plan est un vecteur directeur de cette droite. En particulier, on a montré en **1.c** que le vecteur $\overrightarrow{n}(4;4;-3)$ est normal à $\mathcal{P}$, donc est un vecteur directeur de Δ. Le point $E(0;0;1)$ appartenant à Δ, une représentation paramétrique de cette droite est

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 4t \\ z = -3t + 1 \end{cases}.$$

(**b**) Le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ étant orthonormé, $\overrightarrow{AE}$ est orthogonal aux deux autres vecteurs, qui sont des vecteurs directeurs de (ABC). Ainsi, $\overrightarrow{AE}(0;0;1)$ est un vecteur normal à (ABC). Une équation cartésienne de ce plan est donc de la forme

$$z + c = 0,$$

où c est un réel à déterminer. Le point $A(0;0;0)$ appartient à (ABC) donc c vérifie

$$0+c=0, \quad \text{soit} \quad c=0.$$

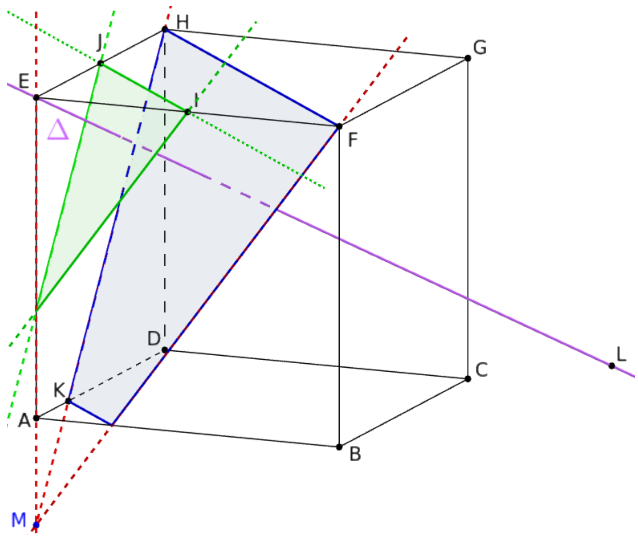
Une équation cartésienne de (ABC) est donc $z=0$.

Soit L un point de l'espace, notons $(x;y;z)$ ses coordonnées. D'après la représentation paramétrique de Δ établie en **2.a**, et l'équation cartésienne de (ABC),

$$\begin{aligned} L \in \Delta \cap (ABC) &\iff \exists t \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} (x;y;z) = (4t;4t;-3t+1) \\ z=0 \end{cases} \\ &\iff \exists t \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} x=y=4t \\ z=-3t+1 \\ -3t+1=0 \end{cases} \\ &\iff \exists t \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} x=y=4t \\ z=-3t+1 \\ t=\dfrac{1}{3} \end{cases}. \end{aligned}$$

Il existe donc un unique point d'intersection L entre Δ et (ABC), de coordonnées $(4/3;4/3;0)$.

(**c**) On place le point L, puis on trace $\Delta=(EL)$, représentée en violet.



(**d**) Le vecteur $\overrightarrow{BF}=(1-1;0-0,1-0)=(0;0;1)$ est un vecteur directeur de la droite (BF), et $B(1;0;0) \in (BF)$, donc une représentation paramétrique de (BF) est

$$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}.$$

Soit T un point de l'espace, notons $(x;y;z)$ ses coordonnées. D'après la représentation paramétrique de Δ établie en **2.a**, et celle de (BF),

$$\begin{aligned} T \in \Delta \cap (BF) &\iff \exists t,t' \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} (x;y;z) = (4t;4t;-3t+1) \\ (x;y;z) = (1;0;t') \end{cases} \\ &\iff \exists t,t' \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} (x;y;z) = (1;0;t') \\ 4t=1 \\ 4t=0 \\ -3t+1=t' \end{cases} \\ &\iff \exists t,t' \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} (x;y;z) = (1;0;t') \\ t=1 \\ t=0 \\ -3t+1=t' \end{cases}. \end{aligned}$$

C'est impossible car $1 \neq 0$, donc les droites Δ et (BF) ne sont pas sécantes.

Le vecteur $\overrightarrow{CG} = (1-1; 1-1, 1-0) = (0; 0; 1)$ est un vecteur directeur de la droite (CG), et $C(1; 1; 0) \in (CG)$, donc une représentation paramétrique de (CG) est

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} .$$

Soit T' un point de l'espace, notons $(x; y; z)$ ses coordonnées. D'après la représentation paramétrique de Δ établie en **2.a**, et celle de (CG),

$$\begin{aligned} T' \in \Delta \cap (CG) &\iff \exists t, t' \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} (x; y; z) = (4t; 4t; -3t+1) \\ (x; y; z) = (1; 1; t') \end{cases} \\ &\iff \exists t, t' \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} (x; y; z) = (1; 1; t') \\ 4t = 1 \\ -3t + 1 = t' \end{cases} \\ &\iff \exists t, t' \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} (x; y; z) = (1; 1; t') \\ t = \dfrac{1}{4} \\ t' = \dfrac{1}{4} \end{cases} . \end{aligned}$$

Les droites Δ et (CG) sont donc sécantes en $(1; 1; 1/4)$.

B A C C A L A U R É A T   G É N É R A L

SESSION 2019

ÉPREUVE DU VENDREDI 21 JUIN 2019

MATHÉMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité **Coefficient : 9**

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1 à 6.

Exercice 1 (6 points) : commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'ensemble **R** des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

1.

a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

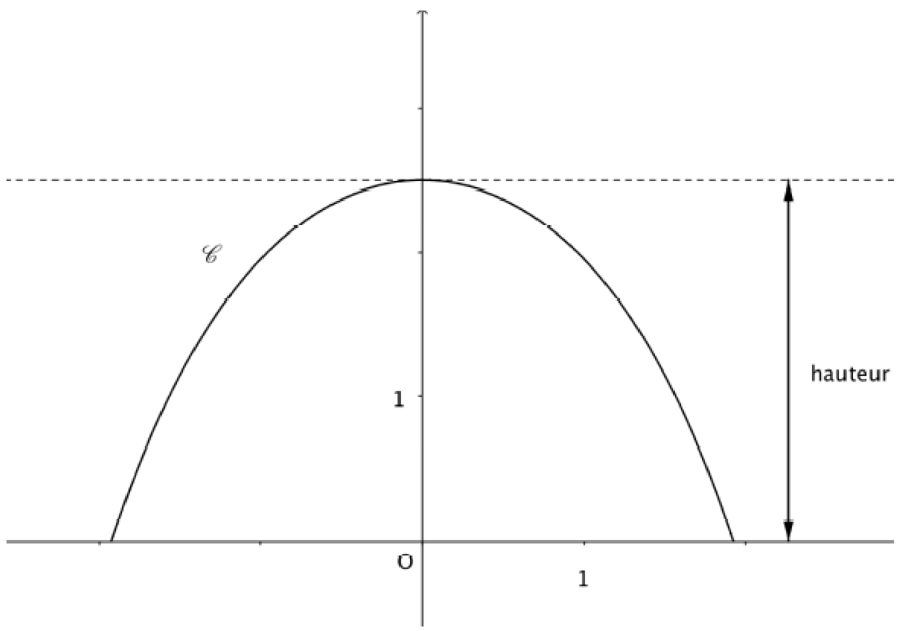
c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, une unique solution, qu'on note α.

2. En remarquant que, pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$, justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans **R** et qu'elles sont opposées.

Partie B

Les **serres en forme de tunnel** sont fréquemment utilisées pour la culture des plantes fragiles ; elles limitent les effets des intempéries ou des variations de température.
Elles sont construites à partir de plusieurs arceaux métalliques identiques qui sont ancrés au sol et supportent une bâche en plastique.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité 1 mètre. La fonction f et le réel α sont définis dans la **partie A**. Dans la suite de l'exercice, on modélise un arceau de serre par la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f sur l'intervalle $[-\alpha; \alpha]$.
On a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[-\alpha; \alpha]$.



On admettra que la courbe $\mathscr{C}$ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

1. Calculer la hauteur d'un arceau.

2. **a.** Dans cette question, on se propose de calculer la valeur exacte de la longueur de la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0;\alpha]$. On admet que cette longueur est donnée, en mètre, par l'intégrale :

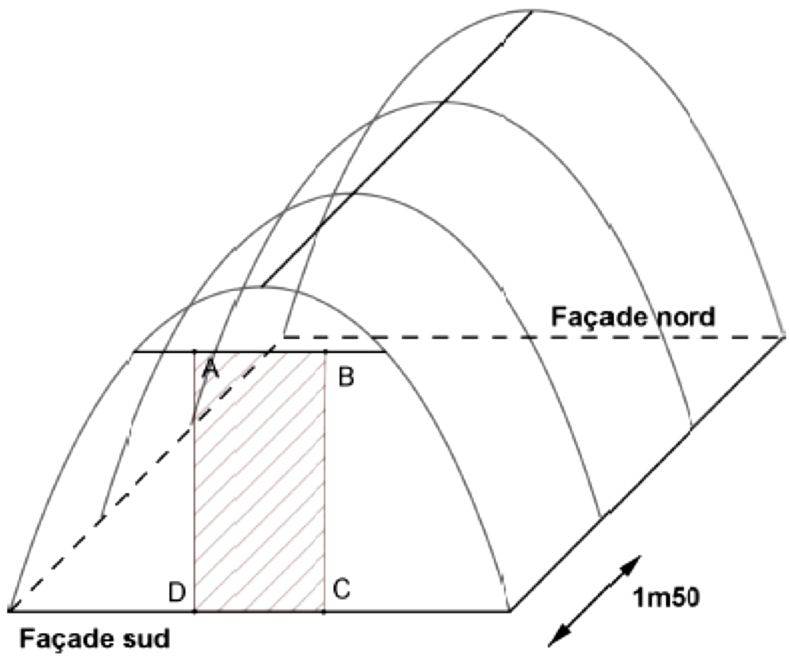
$$I = \int_0^\alpha \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Montrer que pour tout réel x, on a : $1 + (f'(x))^2 = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2$.

b. En déduire la valeur de l'intégrale I en fonction de α.
Justifier que la longueur d'un arceau, en mètre, est égale à : $e^\alpha - e^{-\alpha}$.

Partie C

On souhaite construire une serre de jardin en forme de tunnel.
On fixe au sol quatre arceaux métalliques, dont la forme est celle décrite dans la partie précédente, espacés de 1,5 mètre, comme indiqué sur le schéma ci-dessous.
Sur la façade sud, on prévoit une ouverture modélisée sur le schéma par le rectangle ABCD de largeur 1 mètre et de longueur 2 mètres.



On souhaite connaître la quantité, exprimée en m², de bâche plastique nécessaire pour réaliser cette serre.
Cette bâche est constituée de trois parties, l'une recouvrant la façade nord, l'autre la façade sud (sauf l'ouverture), la troisième partie de forme rectangulaire recouvrant le dessus de la serre.

1. Montrer que la quantité de bâche nécessaire pour recouvrir les façades sud et nord est donnée, en m^2, par :

$$\mathcal{A} = 4\int_0^\alpha f(x)dx - 2.$$

2. On prend 1,92 pour valeur approchée de α. Déterminer, au m^2 près, l'aire totale de la bâche plastique nécessaire pour réaliser cette serre.

Exercice 2 (5 points) : commun à tous les candidats

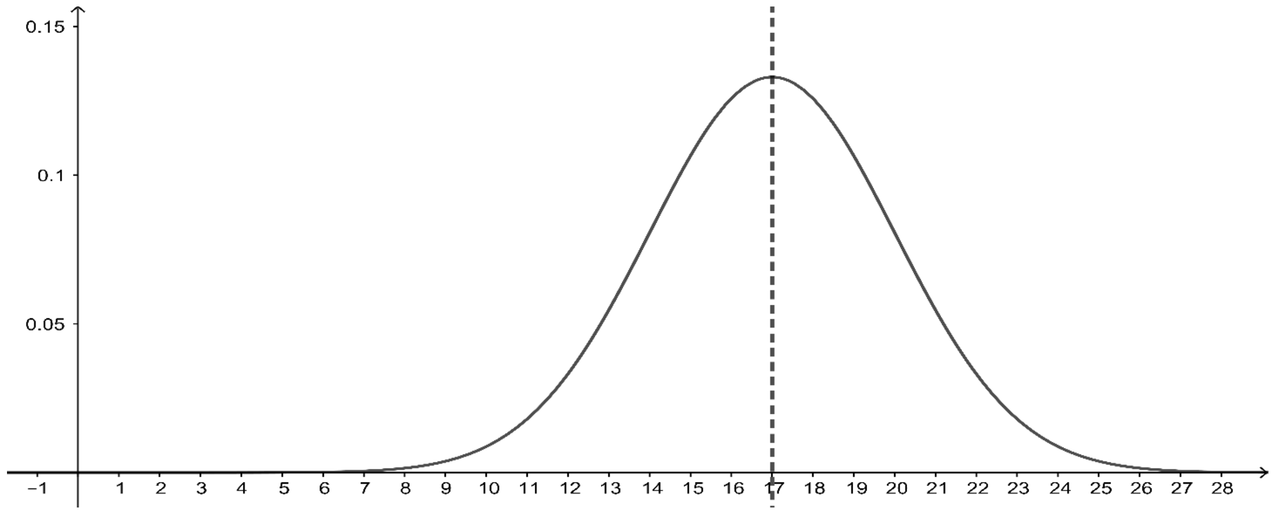
Une plateforme informatique propose deux types de jeux vidéo : un jeu de type A et un jeu de type B.

Partie A

Les durées des parties de type A et de type B, exprimées en minutes, peuvent être modélisées respectivement par deux variables aléatoires notées X_A et X_B.

La variable aléatoire X_A suit la loi uniforme sur l'intervalle $[9; 25]$.

La variable aléatoire X_B suit la loi normale de moyenne μ et d'écart type 3. La représentation graphique de la fonction de densité de cette loi normale et son axe de symétrie sont donnés ci-dessous.



1.

a. Calculer la durée moyenne d'une partie de type A.

b. Préciser à l'aide du graphique la durée moyenne d'une partie de type B.

2. On choisit au hasard, de manière équiprobable, un type de jeu. Quelle est la probabilité que la durée d'une partie soit inférieure à 20 minutes ? On donnera le résultat arrondi au centième.

Partie B

On admet que, dès que le joueur achève une partie, la plateforme lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant :

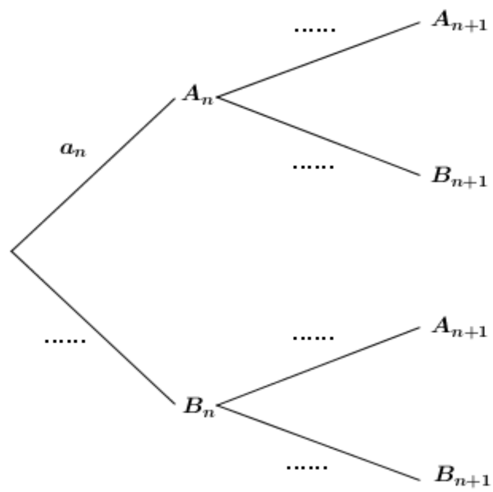
- si le joueur achève une partie de type A, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type A avec une probabilité de 0,8 ;
- si le joueur achève une partie de type B, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type B avec une probabilité de 0,7.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note A_n et B_n les évènements :

A_n : « la n-ième partie est une partie de type A. »

B_n : « la n-ième partie est une partie de type B. »

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n.



1.

a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.

b. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3.$$

Dans la suite de l'exercice, on note a la probabilité que le joueur joue au jeu A lors de sa première partie, où a est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0; 1]$. La suite (a_n) est donc définie par :
$a_1 = a$, et pour tout entier naturel $n \geq 1$, $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 0{,}3$.

2. *Étude d'un cas particulier* : Dans cette question, on suppose que $a = 0{,}5$.

- **a.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $0 \leq a_n \leq 0{,}6$.
- **b.** Montrer que la suite (a_n) est croissante.
- **c.** Montrer que la suite (a_n) est convergente et préciser sa limite.

3. *Étude du cas général* : Dans cette question, le réel a appartient à l'intervalle $[0; 1]$.
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par : $u_n = a_n - 0{,}6$.

- **a.** Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.
- **b.** En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a : $a_n = (a - 0{,}6) \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}6$.
- **c.** Déterminer la limite de la suite (a_n). Cette limite dépend-elle de la valeur de a ?
- **d.** La plateforme diffuse une publicité insérée en début des parties de type A et une autre publicité insérée en début des parties de type B. Quelle devrait être la publicité la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéo ?

Exercice 3 (4 points) : commun à tous les candidats
Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Dans l'ensemble **C** des nombres complexes, on considère l'équation (E) : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.
On note A et B les points du plan dont les affixes sont les solutions de (E).

Affirmation 1 : Le triangle OAB est équilatéral.

2. On note u le nombre complexe : $u = \sqrt{3} + i$ et on note $\bar{u}$ son conjugué.

Affirmation 2 : $u^{2019} + \bar{u}^{\,2019} = 2^{2019}$.

3. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = xe^{-nx+1}.$$

Affirmation 3 : Pour tout entier naturel $n \geq 1$, la fonction f_n admet un maximum.

4. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur **R** par : $f(x) = \cos(x)\, e^{-x}$.

Affirmation 4 : La courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote en $+\infty$.

5. Soit A un nombre réel strictement positif.
On considère l'algorithme ci-contre.

On suppose que la variable I contient la valeur 15 en fin d'exécution de cet algorithme.

```
I ← 0
Tant que 2^I ≤ A
    I ← I + 1
Fin Tant que
```

Affirmation 5 : $15\ln(2) \leq \ln(A) \leq 16\ln(2)$

Exercice 4 (5 points) : pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On note **Z** l'ensemble des entiers relatifs.

Dans cet exercice, on étudie l'ensemble S des matrices A qui s'écrivent sous la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où a, b, c et d appartiennent à l'ensemble **Z** et vérifient : $ad - bc = 1$.

On note I la matrice identité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie A : Quelques exemples de matrices appartenant à l'ensemble *S*

1. Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ appartient à l'ensemble S.

2. Montrer qu'il existe exactement quatre matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & d \end{pmatrix}$ appartenant à l'ensemble S ; les expliciter.

3.

a. Résoudre dans **Z** l'équation $(E) : 5x - 2y = 1$. On pourra remarquer que le couple $(1; 2)$ est une solution particulière de cette équation.

b. En déduire qu'il existe une infinité de matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ qui appartiennent à l'ensemble S. Décrire ces matrices.

Partie B : Quelques propriétés des matrices appartenant à l'ensemble *S*

Dans cette partie, on note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice appartenant à l'ensemble S. On rappelle que a, b, c et d sont des nombres entiers relatifs tels que $ad - bc = 1$.

1. Montrer que les entiers a et b sont premiers entre eux.

2. Soit B la matrice : $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

a. Calculer le produit AB. On admet que l'on a $AB = BA$.

b. En déduire que la matrice A est inversible et donner sa matrice inverse A^{-1}.

c. Montrer que la matrice A^{-1} appartient à l'ensemble S.

3. Soient x et y deux entiers relatifs. On note x' et y' les entiers relatifs tels que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

a. Montrer que $x = dx' - by'$. On admet de même que $y = ay' - cx'$.

b. On note D le PGCD de x et y et on note D' le PGCD de x' et y'. Montrer que $D = D'$.

4. On considère les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) définies par : $x_0 = 2019$, $y_0 = 673$ et pour tout entier naturel n : $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \end{cases}$.

En utilisant la question précédente, déterminer, pour tout entier naturel n, le PGCD des entiers x_n et y_n.

Baccalauréat S

Session 2019 Métropole - Mathématiques

Proposition de corrigé par Thomas Harbreteau et complété par www.sujetdebac.fr. Pour toute question ou remarque éventuelle, vous pouvez me contacter à l'adresse mail suivante : `tharbreteau@protonmail.com`.

Exercice n° 1 *Commun à tous les candidats*

Partie A

1. (**a**) Comme $-x \to_{(x\to+\infty)} -\infty$, par continuité de l'exponentielle, $e^{-x} \to_{(x\to+\infty)} 0$. De plus, $e^{x} \to_{(x\to+\infty)} +\infty$, donc par opérations sur les limites, $f(x) \to_{(x\to+\infty)} -\infty$.

(**b**) Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont définies et dérivables sur $\mathbf{R}_+$ donc par opérations, f l'est également, avec

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad f'(x) = -\frac{1}{2}(e^x + (-e^{-x})) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x).$$

La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbf{R}_+$, si $x \in \mathbf{R}_+$,

$$e^{-x} - e^x < 0 \iff e^{-x} < e^x \iff 1 < e^x e^x = e^{2x}.$$

La fonction logarithme étant strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$, elle conserve les inégalités strictes, d'où

$$1 < e^{2x} \iff \ln 1 < \ln e^{2x} \iff 0 < 2x \iff x > 0, \quad \text{et} \quad f'(x) = 0 \iff x = 0.$$

La fonction f' est donc strictement négative sur $\mathbf{R}_+^*$ et nulle en un unique point, qui est 0, donc f est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$.

(**c**) D'après **1.a**, $f(x) \to_{(x\to+\infty)} -\infty$ donc il existe $A > 0$ tel que $f(A) < 0$. De plus, $f(0) = 7/2-(e^0+e^{-0})/2 = 7/2 > 0$ et f est continue sur $[0, A]$. Par théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule au moins une fois sur $]0, A[$, donc sur $\mathbf{R}_+$, notons $\alpha > 0$ un tel point d'annulation. La stricte décroissance de f sur $\mathbf{R}_+$ démontrée en **1.b** montre l'unicité de α.

2. Remarquons que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(-x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{-(-x)}) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^{-x} + e^x) = f(x),$$

donc f est paire. On a donc, si $x \in \mathbf{R}_-^*$, $f(x) = 0$ si et seulement si $f(-x) = 0$, mais $-x \in \mathbf{R}_+$. D'après **1.c**, f s'annule en α uniquement sur $\mathbf{R}_+$, donc $f(x) = 0$ si et seulement si $-x = \alpha$, si et seulement si $x = -\alpha$. Ainsi, $-\alpha < 0$ est l'unique point d'annulation de f sur $\mathbf{R}_-^*$. La fonction f s'annule donc une unique fois sur $\mathbf{R}_+$ et une unique fois sur $\mathbf{R}_-^*$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions, qui sont α et $-\alpha$, donc qui sont opposées.

Partie B

1. *Remarque : On a montré en **Partie A, 2** que f était paire, ce qui se traduit bien par une symétrie de son graphe par rapport à l'axe des ordonnées.*

Remarque bis : La hauteur n'est pas proprement définie par l'énoncé. On peut soit l'interpréter comme la différence entre le maximum et le minimum de f sur $[-\alpha, \alpha]$, soit comme ce que semble indiquer le dessin, à savoir la valeur de $f(0)$. Les deux seraient sans doutes acceptés, à condition d'expliquer sur sa copie quelle définition on utilise.

Définissons la hauteur h d'un arceau comme la différence entre le maximum et le minimum de f sur $[-\alpha, \alpha]$. On a montré en **Partie A, b** que f était strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$. Comme elle est paire, elle est strictement croissante sur $\mathbf{R}_-$, donc elle atteint son maximum en 0, et son minimum est 0, atteint en α et $-\alpha$. On a donc $h = f(0) - 0 = 7/2 - (e^0 + e^{-0})/2 = 7/2 - 2/2 = 5/2 = 2,5\text{m}$.

2. (**a**) De même qu'en **Partie A, 1.b**, on montre que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{x}),$$

d'où

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad 1+(f'(x))^2 = 1+\frac{1}{2^2}(e^{-x}-e^{x})^2 = \frac{4}{4}+\frac{1}{4}((e^{-x})^2-2e^{-x}e^{x}+(e^{x})^2) = \frac{1}{4}((e^{-x})^2+2+(e^{x})^2) = \frac{1}{4}(e^{x}+e^{-x})^2.$$

(**b**) D'après **2.a**,

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \sqrt{1+(f'(x))^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(e^{x}+e^{-x})^2} = \frac{1}{2}|e^{x}+e^{-x}| = \frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}),$$

car la fonction exponentielle est positive sur $\mathbf{R}$. Par conséquent,

$$I = \int_0^{\alpha} \sqrt{1+(f'(x))^2)}\mathrm{d}x = \int_0^{\alpha} \frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\big[e^{x}+(-e^{-x})\big]_0^{\alpha} = \frac{1}{2}((e^{\alpha}-e^{0})-(e^{-\alpha}-e^{0})) = \frac{1}{2}(e^{\alpha}-e^{-\alpha}).$$

Mais on a montré en **Partie A, 2** que f est paire, donc la longueur de la courbe $\mathcal{C}$ sur $[-\alpha, 0]$ est égale à celle sur $[0, \alpha]$, qui vaut I. On en déduit que la longueur d'un arceau est égale à $2I$, c'est-à-dire à $e^{\alpha} - e^{-\alpha}$.

Partie C

1. La quantité $\mathcal{A}_N$ de bâche nécéssaire pour recouvrir la façade nord est égale à l'aire délimitée par un arceau et le sol, donc à l'aire sous la courbe représentative de f entre $-\alpha$ et α. Par conséquent,

$$\mathcal{A}_N = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x.$$

Mais d'après **Partie A, 2**, f est paire donc

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x.$$

De plus, la quantité $\mathcal{A}_S$ de bâche nécéssaire pour recouvrir la façade sud est la même que celle pour la façade nord, moins l'aire de l'ouverture, égale à $1 \times 2 = 2\text{m}^2$. Ainsi, $\mathcal{A}_S = \mathcal{A}_N - 2$, et

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_N + \mathcal{A}_S = 2\mathcal{A}_N - 2 = 2 \times 2\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x - 2 = 4\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x - 2.$$

2. *Remarque : Une valeur approchée de α peut-être trouvée par dichotomie.*

D'après **1**,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = 4\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x - 2 &= 4\int_0^{\alpha}\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})\right)\mathrm{d}x - 2 \\
&= 4\left[\frac{7}{2}x - \frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})\right]_0^{\alpha} - 2 \\
&= 4\left[\frac{7}{2}\alpha - \frac{1}{2}(e^{\alpha}-e^{0}-(e^{-\alpha}-e^{0}))\right] - 2 \\
&= 4\left[\frac{7}{2}\alpha - \frac{1}{2}(e^{\alpha}-e^{-\alpha})\right] - 2 \\
&= 14\alpha - 2(e^{\alpha}-e^{-\alpha}) - 2.
\end{aligned}$$

De plus, la distance délimitée entre le premier et le dernier arceau est $3 \times 1,5 = 4,5$m et la longueur d'un arceau est, d'après **2.b**, $I = e^{\alpha} - e^{-\alpha}$. La bâche recouvrant le dessus de la serre est donc un rectangle de côtés I et $4,5$, donc d'aire $\mathcal{A}_D = 4,5I = 4,5(e^{\alpha} - e^{-\alpha})$. La quantité totale de bâche $\mathcal{A}_T$ nécessaire pour réaliser cette serre est donc

$$\mathcal{A}_T = \mathcal{A} + \mathcal{A}_D = 14\alpha - 2(e^{\alpha}-e^{-\alpha}) - 2 + 4,5(e^{\alpha}-e^{-\alpha}) = 14\alpha + 2,5(e^{\alpha}-e^{-\alpha}) - 2 \simeq 42\text{m}^2.$$

Remarque : Le résultat était prévisible, 42 étant la réponse à la grande question sur la vie, l'univers et le reste. Les lecteurs d'H2G2 comprendront.

Exercice n° 2 *Commun à tous les candidats*

Partie A

1. (a) La variable aléatoire X_A suit une loi uniforme sur $[9, 25]$, donc $\mathbf{E}(X_A) = (25+9)/2 = 34/2 = 17$. La durée moyenne d'une partie de type A est 17min.

(b) La variable aléatoire X_B suit une loi normale, donc son espérance est égale à l'abscisse du point au sommet de la courbe en cloche qui est la représentation de sa fonction de densité, représentée sur le graphique. On peut y lire $\mathbf{E}(X_B) \simeq 17$, donc la durée moyenne d'une partie de type B est 17min.

2. Notons X la variable aléatoire modélisant le choix d'un type de jeu. X prend la valeur A avec une probabilité $0,5$ et la valeur B avec la même probabilité. Notons T la variable aléatoire modélisant la durée d'une partie. D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(T < 20) = \mathbf{P}(T < 20, X = A) + \mathbf{P}(T < 20, X = B) = \mathbf{P}(X_A < 20, X = A) + \mathbf{P}(X_B < 20, X = B).$$

Les variables aléatoires X, X_A et X_B étant indépendantes,

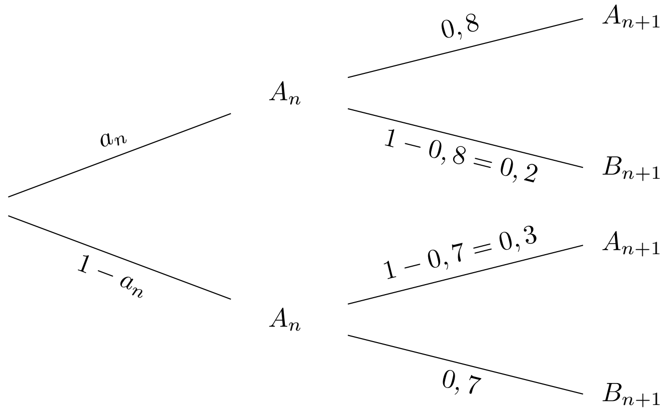
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_A < 20, X = A) + \mathbf{P}(X_B < 20, X = B) &= \mathbf{P}(X_A < 20)\mathbf{P}(X = A) + \mathbf{P}(X_B < 20)\mathbf{P}(X = B)\\ &= 0,5[\mathbf{P}(X_A < 20) + \mathbf{P}(X_B < 20)].\end{aligned}$$

La variable aléatoire X_A suivant une loi uniforme sur $[9, 25]$, $\mathbf{P}(X_A < 20) = (20-9)/(25-9) = 0,6875$. La variable aléatoire X_B suivant une loi normale de moyenne $\mu = 17$ d'après **1.b**, et d'écart type 3 donc $\mathbf{P}(X_B < 20)$ s'obtient à l'aide de la calculatrice et a pour résultat 0,8413. On en déduit que

$$\mathbf{P}(T < 20) = 0,5(0,6875 + 0,8413) \simeq 0,76.$$

Partie B

1. (a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, les données de l'énoncé permettent de construire l'arbre de probabilités suivant :



(b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(A_{n+1}) = \mathbf{P}(A_{n+1} \cap A_n) + \mathbf{P}(A_{n+1} \cap B_n) = \mathbf{P}(A_{n+1} \mid A_n)\mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}(A_{n+1} \mid B_n)\mathbf{P}(B_n),$$

donc l'arbre construit en **1.a** montre que $\mathbf{P}(A_{n+1}) = 0,8\mathbf{P}(A_n) + 0,3\mathbf{P}(B_n)$, soit

$$a_{n+1} = 0,8a_n + 0,3(1 - a_n) = 0,5a_n + 0,3.$$

2. (a) Notons pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $(H_n) : 0 \leq a_n \leq 0,6$.

- Initialisation : Comme $a_1 = a = 0,5$, (H_1) est vraie.
- Hérédité : $n \in \mathbf{N}^*$ tel que (H_n) soit vraie. D'après **1.b**, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$ mais d'après (H_n), $0 \leq a_n \leq 0,6$ donc $0,3 \leq 0,5a_n + 0,3 \leq 0,5 \times 0,6 + 0,3$, soit $0 \leq a_{+1} \leq 0,6$, d'où (H_{n+1}) est vraie.

Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 0 \leq a_n \leq 0,6$.

(b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, d'après **1.b**, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$ donc $a_{n+1} - a_n = -0,5a_n + 0,3$. Mais d'après **2.a**, $0 \leq a_n \leq 0,6$ donc $0 \geq -0,5a_n \geq -0,5 \times 0,6 = -0,3$, d'où $a_{n+1} - a_n \geq -0,3 + 0,3 = 0$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $a_{n+1} \geq a_n$, donc que la suite (a_n) est croissante.

(**c**) D'après **2.b**, (a_n) est croissante et d'après **2.a**, elle est majorée, donc elle converge. Notons l sa limite, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans la relation $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$, l vérifie

$$l = 0,5l + 0,3, \quad \text{donc} \quad 0,5l = 0,3, \quad \text{soit} \quad l = 0,6.$$

3. (**a**) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, d'après **1.b**, $a_{n+1} = 0,5a_n+0,3$, donc $a_{n+1}-0,6 = 0,5a_n+0,3-0,6 = 0,5a_n-0,3 = 0,5(a_n-0,6)$, donc $u_{n+1} = 0,5u_n$. La suite (u_n) est donc bien géométrique, de raison $0,5$.

(**b**) D'après **3.a**, (u_n) est une suite géométrique de raison $0,5$ et de premier terme $u_1 = a_1 - 0,6 = a - 0,6$. Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = u_1 \times 0,5^{n-1} = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1},$$

donc par définition de (u_n),

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6.$$

(**c**) Comme $-1 < 0,5 < 1$, la suite géométrique de raison $0,25$ a une limite nulle, donc pas opérations sur les limites, $a_n \to_{(n\to+\infty)} 0,6$. Cette limite est indépendante de la valeur de a.

(**d**) Comme pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $a_n + b_n = 1$, $b_n = 1 - a_n$, mais d'après **3.c**, $a_n \to_{(n\to+\infty)} 0,6$ donc par opérations sur les limites, $b_n \to_{(n\to+\infty)} 0,4$. On bout d'un certain nombre de parties, la probabilité de faire une partie A est plus grande que celle de faire une partie B, donc la publicité qui sera la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéos sera celle insérée en début des parties de type A.

Exercice n° 3 *Commun à tous les candidats*

1. Notons Δ le discriminant de (E),

$$\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 4 = 4 \times 3 - 16 = 12 - 16 = -4 < 0.$$

L'équation (E) admet donc deux racines complexes conjuguées distinctes, que l'on note z_A et z_B, avec

$$z_A = \frac{2\sqrt{3} - \mathrm{i}\sqrt{4}}{2} = \frac{2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}}{2} = \sqrt{3} - \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_B = \sqrt{3} + \mathrm{i}.$$

Comme z_A et z_B sont conjugués, $|z_A| = |z_B| = |\sqrt{3} + \mathrm{i}| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$ et $OA = OB$. De plus,

$$AB = |z_B - z_A| = |\sqrt{3} + \mathrm{i} - (\sqrt{3} - \mathrm{i})| = |2\mathrm{i}| = 2,$$

donc $OA = OB = AB$, donc le triangle OAB est équilatéral, <u>l'affirmation 1 est vraie.</u>

2. Mettons u sous forme exponentielle, $|u| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$, et

$$u = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = 2e^{\mathrm{i}\pi/6}.$$

Ainsi, $u^{2019} = 2^{2019}e^{2019\mathrm{i}\pi/6}$, or $2019 = 6 \times 336 + 3$, d'où $u^{2019} = 2^{2019}e^{\mathrm{i}336\pi+\mathrm{i}\pi/2} = 2^{2019}\mathrm{i}$.
De plus, $u^{2019} + \overline{u}^{2019} = 2^{2019}\mathrm{i} + \overline{2^{2019}\mathrm{i}} = 0$. <u>L'affirmation 2 est donc fausse.</u>

3. Soit $n \geq 1$, notons $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto e^{-nx+1}$, définies et dérivables sur $\mathbf{R}_+$. Comme $f_n = u \times v$, par opérations f_n l'est aussi et par formule de dérivation d'un produit de fonctions,

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad f_n'(x) = e^{-nx+1} + x(-n)e^{-nx+1} = (1 - xn)e^{-nx+1}.$$

Si $x \in \mathbf{R}_+$, la fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbf{R}_+$,

$$f_n'(x) > 0 \iff 1 - xn > 0 \iff xn < 1 \iff x < \frac{1}{n}, \quad \text{et} \quad f_n'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{n}.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{1}{n}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Pour tout entier n non nul, f_n admet bien un maximum, et ce en $1/n$. L'affirmation 3 est bien vraie.

4. Par positivité de la fonction exponentielle sur $\mathbf{R}$,

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad |f(x)| = |\cos x| e^{-x} \leq e^{-x},$$

car la fonction cosinus est majorée par 1 sur $\mathbf{R}$, donc $|f(x)| \rightarrow_{(x\to+\infty)} 0$, d'où $f(x) \rightarrow_{(x\to+\infty)} 0$. La courbe représentative de f admet donc une asymptote horizontale d'équation $x = 0$, ce qui prouve que l'affirmation 4 est vraie.

5. Si la variable I contient la valeur 15 en fin d'algorithme, on a alors $2^{14} \leq A$ et $2^{15} > A$.
Par conséquent : $2^{14} \leq A < 2^{15}$. Par stricte croissance de la fonction logarithme sur $\mathbf{R}_+^*$, on obtient $\ln(2^{14}) \leq \ln(A) < \ln(2^{15})$ et donc $14\ln(2) \leq \ln(A) < 15\ln(2)$.
L'affirmation 5 est donc fausse.

Exercice n° 4 *Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Partie A Quelques exemples de matrices appartenant à l'ensemble $\mathcal{S}$

1. Comme $6 \times (-4) - 5 \times (-5) = 1$ et que les coefficients de A sint bien des entiers, A appartient à $\mathcal{S}$.

2. Analyse : Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que la matrice

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & d \end{pmatrix}$$

soit un élément de $\mathcal{S}$. Tout d'abord, a et b sont des entiers. De plus, $ad - 2 \times 3 = 1$, donc $ad = 7$. Le produit ad est positif, donc a et d sont de même signe. De plus, a et d sont des diviseurs entiers de 7, un nombre premier, dont les seuls diviseurs entiers sont 1, -1, 7 et -7. On en déduit que

$$(a, d) \in \{(1,7), (7,1), (-1,-7), (-7,-1)\}.$$

Synthèse : Soit $(a, b) \in \{(1,7), (7,1), (-1,-7), (-7,-1)\}$, alors $ad = 7$ donc $ad - 6 = 1$. Les nombres a et d étant des entiers, on a

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & d \end{pmatrix} \in \mathcal{S}.$$

Il existe donc exactement quatre matrices de la forme donnée par l'énoncé appartenant à S, à savoir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. **(a)** Analyse : Soit $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$ solution de (E). Le couple $(1, 2)$ est solution de cette équation, donc

$$\begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ 5 \times 2 - 2 \times 2 = 1 \end{cases}.$$

En soustrayant la deuxième ligne à la première, il vient que $5(x-1) - 2(y-2) = 0$, soit $5(x-1) = 2(y-2)$. L'entier 5 divise donc $2(y-2)$, mais la relation $5 - 2 \times 2 = 1$ montre, d'après le théorème de Bézout, que 2 et 5 sont premiers entre eux. D'après le théorème de Gauss, 5 divise alors $y - 2$, donc il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $5k = y - 2$, donc $y = 5k + 2$. En injectant cette relation dans la précédente, on trouve que $5(x-1) = 2(5k+2-2) = 10k$, d'où $x = 2k+1$. L'ensemble des solutions de (E) est donc inclus dans l'ensemble $\{(2k+1, 5k+2) \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

Synthèse : Soit $k \in \mathbf{Z}$, $5(2k+1) - 2(5k+2) = 10k + 5 - 10k - 4 = 1$, d'où $(2k+1, 5k+2)$ est solution de (E).

L'ensemble des solutions de (E) est donc exactement $\{(2k+1, 5k+2) \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

(**b**) Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, notons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

La matrice A appartient donc à $\mathcal{S}$ si et seulement si a et b sont des entiers et $5a - 2b = 1$, si et seulement si a et b sont des entiers solutions de (E). D'après **3.a**, ceci équivaut à dire que $(a,b) \in \{(2k+1, 5k+2) \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Mais cet ensemble est infini, en effet si k et k' sont des entiers,

$$(2k+1, 5k+2) = (2k'+1, 5k'+2) \iff \begin{cases} 2k+1 = 2k'+1 \\ 5k+2 = 5k'+2 \end{cases} \iff k = k'.$$

Cet ensemble contient donc au moins autant d'éléments distincts qu'il existe d'entiers, il est donc infini. L'ensemble des matrices de la forme donnée par l'énoncé qui sont solutions de $\mathcal{S}$ est donc infini, et il s'agit de

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2k+1 & 5k+2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Partie B Quelques propriétés des matrices appartenant à l'ensemble $\mathcal{S}$

1. Comme $ad - bc = 1$, le théorème de Bézout montre que a et d sont permiers entre eux.

2. (**a**) *Remarque : Un produit matriciel montre directement que $AB = BA$.*
Par produit matriciel,

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & bd - bd \\ ac - ca & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

(**b**) Comme d'après la relation admise et **2.a**, $AB = BA = I$, A est inversible, d'inverse B.

(**c**) D'après **2.c**, l'inverse de A est B. Ses coefficients sont entiers et si l'on note $\alpha = d$, $\beta = -b$, $\gamma = -c$ et $\delta = a$,

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

On a bien $\alpha\delta - \beta\gamma = da - (-b)(-c) = ad - bc = 1$, donc $B \in \mathcal{S}$.

3. (**a**) Par produit matriciel,

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}, \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}.$$

En soustrayant b fois la deuxième ligne à d fois la première, on obtient $dx' - by' = d(ax+by) - b(cx+dy) = (ad-bc)x = x$.

Remarque : La relation admise est obtenue en soustrayant c fois la première ligne à a fois la deuxième.

(**b**) Comme $D' = \text{pgcd}(x,y)$, il divise x' et y'. D'après **3.a**, $x = dx' - by'$ donc D' divise x, et la relation admise $y = ay' + cx'$ montre que D' divise y. C'est donc un diviseur commun de x et y, donc il divise D. Le calcul de **3.a** montré également que $x' = ax + by$ et que $y' = cx + dy$, donc par les mêmes arguments D divise D'. Par conséquent, $D = \pm D'$ mais ces nombres étant positifs, on a bien $D = D'$.

4. Notons

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

alors comme $2 \times 2 - 3 \times 1 = 1$ et que les coefficients de A sont entiers, $A \in \mathcal{S}$. De plus, par produit matriciel,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_n + 3y_n \\ x_n + 2y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}.$$

D'après **3.a**, comme $A \in \mathcal{S}$,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \text{pgcd}(x_{n+1}, y_{n+1}) = \text{pgcd}(x_n, y_n). \tag{1}$$

Notons pour tout $n \in \mathbf{N}$, (H_n) : $\text{pgcd}(x_n, y_n) = \text{pgcd}(x_0, y_0)$.

- Initialisation : D'après (1), $\text{pgcd}(x_1, y_1) = \text{pgcd}(x_0, y_0)$ donc (H_0) est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que (H_n) soit vraie. D'après (1), $\text{pgcd}(x_{n+1}, y_{n+1}) = \text{pgcd}(x_n, y_n)$, donc d'après (H_n), $\text{pgcd}(x_{n+1}, y_{n+1}) = \text{pgcd}(x_0, y_0)$, d'où (H_{n+1}) est vraie.

Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbf{N}, \quad \text{pgcd}(x_n, y_n) = \text{pgcd}(x_0, y_0)$. Pour trouver $\text{pgcd}(x_0, y_0)$, on applique l'algorithme d'Euclide. Mais à la première itération, on obtient que $2019 = 673 \times 3$, donc $\text{pgcd}(x_0, y_0) = 673$. Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \text{pgcd}(x_n, y_n) = 673.$$

B A C C A L A U R É A T G É N É R A L

SESSION 2019

Vendredi 21 juin 2019

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : **5**

MATHÉMATIQUES – Série L

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : **4**

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7*, *dont l'annexe 1 et l'annexe 2 page 7/7 sont à rendre avec la copie.

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

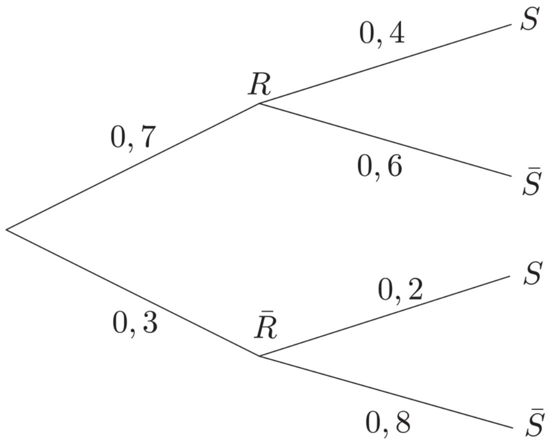
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Exercice 1 (5 points)
Commun à tous les candidats

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

1. *Pour tout événement E, on note $\bar{E}$ l'événement contraire de E.*
   On considère l'arbre pondéré suivant :



   Affirmation 1 : La probabilité de $\bar{R}$ sachant S est $0{,}06$.

2. Soit k un réel tel que $0 \leq k < 18$. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle [k ; 18]. On suppose que l'espérance de X est égale à 12.

   Affirmation 2 : La valeur de k est 9.

3. On considère l'équation suivante :
$$\ln(x^2) - \ln\left(\frac{x^5}{\mathrm{e}}\right) + \ln(2) = \ln(2x) + 5$$
   Affirmation 3 : $\frac{1}{\mathrm{e}}$ est l'unique solution de cette équation.

4. Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[0\,;15]$. On suppose que sa fonction dérivée, notée f', est continue sur $[0\,;15]$. Les variations de f' sont représentées dans le tableau ci-dessous.

x	0	5	15
$f'(x)$	30 ↘	-5	↗ 20

   Affirmation 4 : La courbe représentative C_f de la fonction f admet une et une seule tangente parallèle à l'axe des abscisses.

   Affirmation 5 : La fonction f est convexe sur $[5\,;15]$.

Exercice 2 (5 points)
Candidats de ES n'ayant pas suivi la spécialité ou candidats de L

En 2018, Laurence, souhaitant se lancer dans l'agriculture biologique, a acheté une ferme de 14 hectares de pommiers. Elle estime qu'il y a 300 pommiers par hectare. Chaque année, Laurence éliminera $4\,\%$ des pommiers existants et replantera 22 nouveaux pommiers par hectare.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de pommiers par hectare l'année $2018+n$. On a ainsi $u_0 = 300$.

1. a) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 0{,}96u_n + 22$.
   b) Estimer le nombre de pommiers par hectare, arrondi à l'unité, en 2020.

2. Laurence veut savoir à partir de quelle année la densité de pommiers dépassera 400 pommiers par hectare. Pour cela, on utilise l'algorithme suivant :

```
N ← 0
U ← 300
Tant que U ...
        N ← N + 1
        U ← ⋯
Fin Tant que
```

   a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessus pour qu'il détermine le rang de l'année cherchée.
   b) Quelle est la valeur de N en sortie de l'algorithme ?

3. On définit la suite (v_n) en posant $v_n = u_n - 550$, pour tout entier naturel n.
   a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.
   b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n puis démontrer que :
   $$u_n = 550 - 250 \times 0{,}96^n$$
   c) Estimer le nombre de pommiers de l'exploitation de Laurence en 2025.
   d) En résolvant l'inéquation $u_n > 400$, retrouver le résultat obtenu à la question 2. b).

Exercice 3 (5 points)
Commun à tous les candidats

Les trois parties peuvent être traitées de manière indépendante.
Les résultats seront arrondis au centième.

Partie A

Les cours d'eau français sont surveillés quotidiennement afin de prévenir la population en cas de crue ou pénurie d'eau.
Dans une station hydrométrique, on mesure le débit quotidien d'une rivière.
Ce débit en mètre cube par seconde ($m^3.s^{-1}$) peut être modélisé par une variable aléatoire D qui suit la loi normale de paramètres $\mu = 15{,}5$ et $\sigma = 6$.
On estime qu'il y a pénurie d'eau lorsque le débit de la rivière est inférieur à 8 $m^3.s^{-1}$.
On estime qu'il y a un risque de crue lorsque le débit est supérieur à 26 $m^3.s^{-1}$.
Entre ces deux débits, il n'y a pas de vigilance particulière.

1. Calculer la probabilité qu'il y ait pénurie d'eau.
2. Calculer la probabilité qu'il n'y ait pas de vigilance particulière.
3. Justifier, sans utiliser la calculatrice, que la probabilité que le débit observé soit compris entre $3{,}5$ $m^3.s^{-1}$ et $27{,}5$ $m^3.s^{-1}$ est d'environ $0{,}95$.

Partie B

Deux équipes effectuent les relevés de débit du cours d'eau sur la station hydrométrique. Sébastien appartient à la première équipe.
Un quart des relevés est effectué par l'équipe de Sébastien, le reste par la seconde équipe.
On choisit 10 relevés au hasard sur l'ensemble des relevés de la station, ensemble qui est suffisamment grand pour que ce choix puisse être assimilé à 10 tirages avec remise. On s'intéresse au nombre de relevés effectués par l'équipe de Sébastien parmi ces 10 relevés.

1. Quelle loi de probabilité modélise cette situation ? Préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que 4 relevés exactement soient effectués par l'équipe de Sébastien.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 2 relevés soient effectués par l'équipe de Sébastien.

Partie C

Ces relevés sont utilisés pour tester la qualité de l'eau : « satisfaisante » ou « non satisfaisante ». On s'intéresse à la proportion de relevés de qualité « satisfaisante ».
Combien, au minimum, faut-il effectuer de relevés pour obtenir un intervalle au niveau de confiance de 95 % dont l'amplitude est inférieure à 0,1 ?

Exercice 4 (5 points)
Commun à tous les candidats

Un ébéniste décide de refaire les accoudoirs d'un fauteuil (ébauche du fauteuil en **annexe 1**). On modélise l'accoudoir à l'aide de la fonction f définie sur $[0\,;60]$ par :

$$f(x) = 70 + (14x + 42)\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}$$

La courbe représentative de f, notée C_f est donnée en **annexe 2**.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[0\,;60]$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Partie A

*Dans toute cette partie, les réponses sont obtenues graphiquement à partir de la courbe représentative de f donnée en **annexe 2**.*

On admet que le point A de C_f d'abscisse 7 est un point d'inflexion de C_f.

1. Déterminer une valeur approchée de $f(0)$ et $f(60)$.
2. Déterminer $f''(7)$.
3. On considère la surface située entre l'axe des abscisses, la courbe C_f, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 60$.
   a) Hachurer la surface décrite ci-dessus sur l'**annexe 2**.
   b) L'ébéniste estime l'aire de cette surface à 3800 unités d'aire. Cette estimation est-elle correcte ?

Partie B

1. Justifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;60]$ on a :
$$f'(x) = \frac{1}{5}(-14x + 28)\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}$$
2. a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;60]$.
   b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;60]$.
   On arrondira à l'unité près les valeurs numériques qui apparaissent dans le tableau de variations.
3. Un logiciel de calcul formel permet d'afficher les lignes suivantes :

1	Dérivée $\left(\text{Dérivée}\left(70 + (14\,x + 42)\ e^{-\frac{x}{5}}\right)\right)$
	$\rightarrow\ \mathbf{\frac{1}{25}\ (14\,x + 42)\ e^{-\frac{1}{5}x} - \frac{28}{5}\ e^{-\frac{1}{5}x}}$
2	Factoriser $\left(\frac{1}{25}\ (14\,x + 42)\ e^{-\frac{1}{5}x} - \frac{28}{5}\ e^{-\frac{1}{5}x}\right)$
	$\rightarrow\ \mathbf{14\ e^{-\frac{1}{5}x} \cdot \frac{x - 7}{25}}$

En utilisant les résultats ci-dessus, étudier la convexité de f.

4. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;60]$, on pose :

$$g(x) = (14x + 42)\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}$$

et

$$G(x) = (-70x - 560)\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}$$

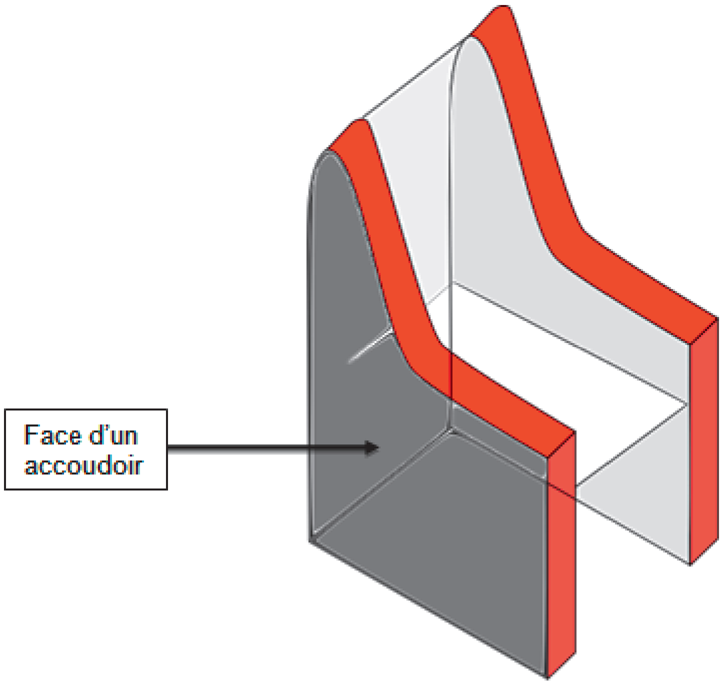
a) Montrer que G est une primitive de g sur l'intervalle $[0\,;60]$.
b) En déduire une primitive de f sur l'intervalle $[0\,;60]$.
c) Calculer la valeur exacte de $\int_0^{60} f(x)\mathrm{d}x$, puis en donner une valeur approchée à l'unité d'aire près.

Partie C
L'ébéniste découpe 2 accoudoirs identiques sur le modèle de la surface hachurée de l'annexe 1 en choisissant comme unité le cm.
Il souhaite vernir les deux faces de chaque accoudoir (**annexe 1**) ainsi que le dossier du fauteuil dont l'aire est égale à 5400 cm^2. Or il lui reste le quart d'un petit pot de vernis pouvant couvrir 10 m^2. Aura-t-il suffisamment de vernis ?

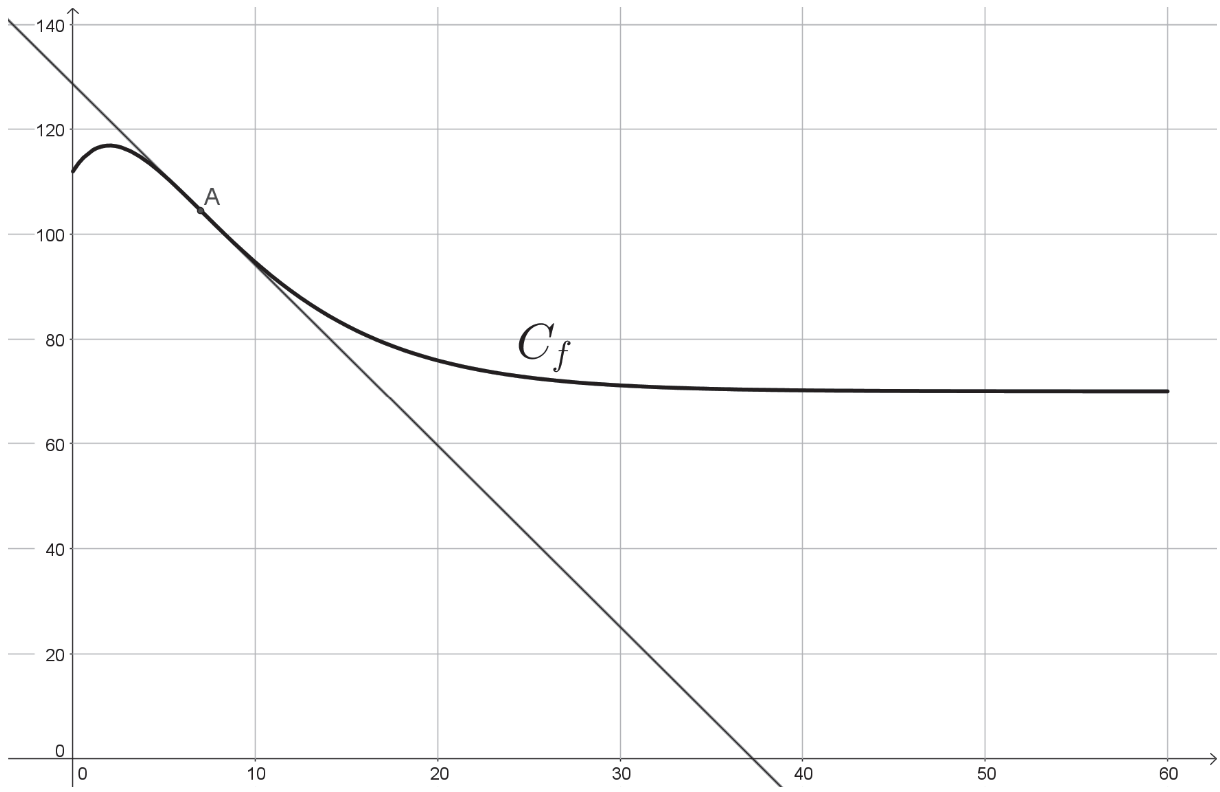
Annexes : à rendre avec la copie

Exercice 4

Annexe 1 : ébauche du fauteuil



Annexe 2



B A C C A L A U R É A T G É N É R A L

SESSION 2019

Vendredi 21 juin 2019

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : **7**

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1/8 à 8/8**,**
dont l'annexe 1 et l'annexe 2 page 8/8 sont à rendre avec la copie.

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

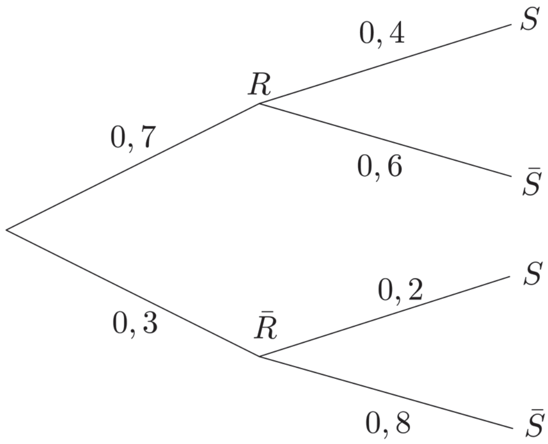
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche,
même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements
entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et
à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité)

Exercice 1 (5 points)
Commun à tous les candidats

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

1. *Pour tout événement E, on note $\bar{E}$ l'événement contraire de E.*
   On considère l'arbre pondéré suivant :



   Affirmation 1 : La probabilité de $\bar{R}$ sachant S est $0{,}06$.

2. Soit k un réel tel que $0 \leq k < 18$. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle [k ; 18]. On suppose que l'espérance de X est égale à 12.

   Affirmation 2 : La valeur de k est 9.

3. On considère l'équation suivante :
$$\ln(x^2) - \ln\left(\frac{x^5}{\mathrm{e}}\right) + \ln(2) = \ln(2x) + 5$$
   Affirmation 3 : $\frac{1}{\mathrm{e}}$ est l'unique solution de cette équation.

4. Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[0\,;15]$. On suppose que sa fonction dérivée, notée f', est continue sur $[0\,;15]$. Les variations de f' sont représentées dans le tableau ci-dessous.

x	0	5	15
$f'(x)$	30 ↘	-5 ↗	20

   Affirmation 4 : La courbe représentative C_f de la fonction f admet une et une seule tangente parallèle à l'axe des abscisses.

   Affirmation 5 : La fonction f est convexe sur $[5\,;15]$.

Exercice 2 (5 points)
Candidats de ES ayant suivi la spécialité

Pour se rendre à l'université, Julie peut emprunter deux itinéraires, l'un passant par des routes départementales, l'autre par une voie rapide. Elle teste les deux itinéraires.
Lorsque Julie emprunte la voie rapide un jour, la probabilité qu'elle emprunte le même itinéraire le lendemain est de 0,6.
Lorsque Julie emprunte les routes départementales un jour, la probabilité qu'elle emprunte la voie rapide le lendemain est de 0,2.
Le premier jour, Julie emprunte la voie rapide.

On note :

- D l'événement « Julie emprunte les routes départementales » ;
- R l'événement « Julie emprunte la voie rapide ».

1. a) Traduire ces informations à l'aide d'un graphe probabiliste dont les sommets seront notés D et R.
   b) Donner la matrice d'adjacence M correspondant au graphe probabiliste. Les sommets du graphe seront rangés dans l'ordre alphabétique.

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, l'état probabiliste le n-ième jour est défini par la matrice $P_n = (d_n \quad r_n)$ où d_n désigne la probabilité que Julie emprunte les routes départementales le n-ième jour et r_n la probabilité que Julie emprunte la voie rapide le n-ième jour.
   a) Donner P_1.
   b) Calculer M^2 et en déduire la probabilité que Julie emprunte les routes départementales le 3^{e} jour.

3. a) Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, P_{n+1} en fonction de P_n et en déduire les expressions de d_{n+1} et r_{n+1} en fonction de d_n et r_n.
   b) Parmi les algorithmes suivants, lequel donne les termes d_3 et r_3 ?

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3

$D \leftarrow 0$
$R \leftarrow 1$
Pour N allant de 1 à 3
    $D \leftarrow 0{,}8D + 0{,}4R$
    $R \leftarrow 0{,}2D + 0{,}6R$
Fin Pour
	$D \leftarrow 0$
	$R \leftarrow 1$
	Pour N allant de 1 à 3
	    $D \leftarrow 0{,}8D + 0{,}4R$
	    $R \leftarrow 1 - D$
	Fin Pour
		$D \leftarrow 0$
		$R \leftarrow 1$
		Pour N allant de 2 à 3
		    $D \leftarrow 0{,}8D + 0{,}4R$
		    $R \leftarrow 1 - D$
		Fin Pour

4. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0{,}4\, r_n + 0{,}2$.

5. On définit la suite (v_n) par $v_n = r_n - \frac{1}{3}$ pour tout entier naturel n non nul.
   a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_1.
   b) Exprimer v_n en fonction de n puis démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :
   $$r_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0{,}4^{n-1} = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} \times 0{,}4^{n}$$
   c) Que peut-on prévoir sur le long terme ?

Exercice 3 (5 points)
Commun à tous les candidats

Les trois parties peuvent être traitées de manière indépendante.
Les résultats seront arrondis au centième.

Partie A

Les cours d'eau français sont surveillés quotidiennement afin de prévenir la population en cas de crue ou pénurie d'eau.
Dans une station hydrométrique, on mesure le débit quotidien d'une rivière.
Ce débit en mètre cube par seconde ($m^3.s^{-1}$) peut être modélisé par une variable aléatoire D qui suit la loi normale de paramètres $\mu = 15{,}5$ et $\sigma = 6$.
On estime qu'il y a pénurie d'eau lorsque le débit de la rivière est inférieur à 8 $m^3.s^{-1}$.
On estime qu'il y a un risque de crue lorsque le débit est supérieur à 26 $m^3.s^{-1}$.
Entre ces deux débits, il n'y a pas de vigilance particulière.

1. Calculer la probabilité qu'il y ait pénurie d'eau.
2. Calculer la probabilité qu'il n'y ait pas de vigilance particulière.
3. Justifier, sans utiliser la calculatrice, que la probabilité que le débit observé soit compris entre $3{,}5$ $m^3.s^{-1}$ et $27{,}5$ $m^3.s^{-1}$ est d'environ $0{,}95$.

Partie B

Deux équipes effectuent les relevés de débit du cours d'eau sur la station hydrométrique. Sébastien appartient à la première équipe.
Un quart des relevés est effectué par l'équipe de Sébastien, le reste par la seconde équipe.
On choisit 10 relevés au hasard sur l'ensemble des relevés de la station, ensemble qui est suffisamment grand pour que ce choix puisse être assimilé à 10 tirages avec remise. On s'intéresse au nombre de relevés effectués par l'équipe de Sébastien parmi ces 10 relevés.

1. Quelle loi de probabilité modélise cette situation ? Préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que 4 relevés exactement soient effectués par l'équipe de Sébastien.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 2 relevés soient effectués par l'équipe de Sébastien.

Partie C

Ces relevés sont utilisés pour tester la qualité de l'eau : « satisfaisante » ou « non satisfaisante ». On s'intéresse à la proportion de relevés de qualité « satisfaisante ».
Combien, au minimum, faut-il effectuer de relevés pour obtenir un intervalle au niveau de confiance de 95 % dont l'amplitude est inférieure à 0,1 ?

Exercice 4 (5 points)
Commun à tous les candidats

Un ébéniste décide de refaire les accoudoirs d'un fauteuil (ébauche du fauteuil en **annexe 1**). On modélise l'accoudoir à l'aide de la fonction f définie sur $[0\,;60]$ par :

$$f(x) = 70 + (14x + 42)\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}$$

La courbe représentative de f, notée C_f est donnée en **annexe 2**.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[0\,;60]$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Partie A

*Dans toute cette partie, les réponses sont obtenues graphiquement à partir de la courbe représentative de f donnée en **annexe 2**.*

On admet que le point A de C_f d'abscisse 7 est un point d'inflexion de C_f.

1. Déterminer une valeur approchée de $f(0)$ et $f(60)$.
2. Déterminer $f''(7)$.
3. On considère la surface située entre l'axe des abscisses, la courbe C_f, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 60$.
   a) Hachurer la surface décrite ci-dessus sur l'**annexe 2**.
   b) L'ébéniste estime l'aire de cette surface à 3800 unités d'aire. Cette estimation est-elle correcte ?

Partie B

1. Justifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;60]$ on a :
$$f'(x) = \frac{1}{5}(-14x + 28)\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}$$
2. a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;60]$.
   b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;60]$.
   On arrondira à l'unité près les valeurs numériques qui apparaissent dans le tableau de variations.
3. Un logiciel de calcul formel permet d'afficher les lignes suivantes :

1	Dérivée $\left(\text{Dérivée}\left(70 + (14\,x + 42)\ e^{-\frac{x}{5}}\right)\right)$
	$\rightarrow\ \dfrac{1}{25}\ (14\,x + 42)\ e^{-\frac{1}{5}x} - \dfrac{28}{5}\ e^{-\frac{1}{5}x}$
2	Factoriser $\left(\dfrac{1}{25}\ (14\,x + 42)\ e^{-\frac{1}{5}x} - \dfrac{28}{5}\ e^{-\frac{1}{5}x}\right)$
	$\rightarrow\ 14\,e^{-\frac{1}{5}x} \cdot \dfrac{x - 7}{25}$

En utilisant les résultats ci-dessus, étudier la convexité de f.

4. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;60]$, on pose :

$$g(x) = (14x + 42)\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}$$

et

$$G(x) = (-70x - 560)\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}$$

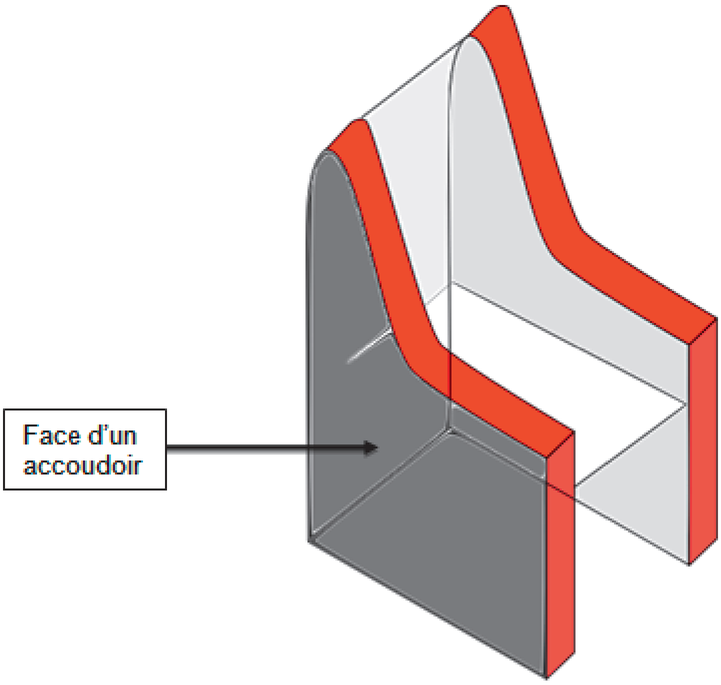
a) Montrer que G est une primitive de g sur l'intervalle $[0\,;60]$.
b) En déduire une primitive de f sur l'intervalle $[0\,;60]$.
c) Calculer la valeur exacte de $\int_0^{60} f(x)\mathrm{d}x$, puis en donner une valeur approchée à l'unité d'aire près.

Partie C
L'ébéniste découpe 2 accoudoirs identiques sur le modèle de la surface hachurée de l'annexe 1 en choisissant comme unité le cm.
Il souhaite vernir les deux faces de chaque accoudoir (**annexe 1**) ainsi que le dossier du fauteuil dont l'aire est égale à 5400 cm^2. Or il lui reste le quart d'un petit pot de vernis pouvant couvrir 10 m^2. Aura-t-il suffisamment de vernis ?

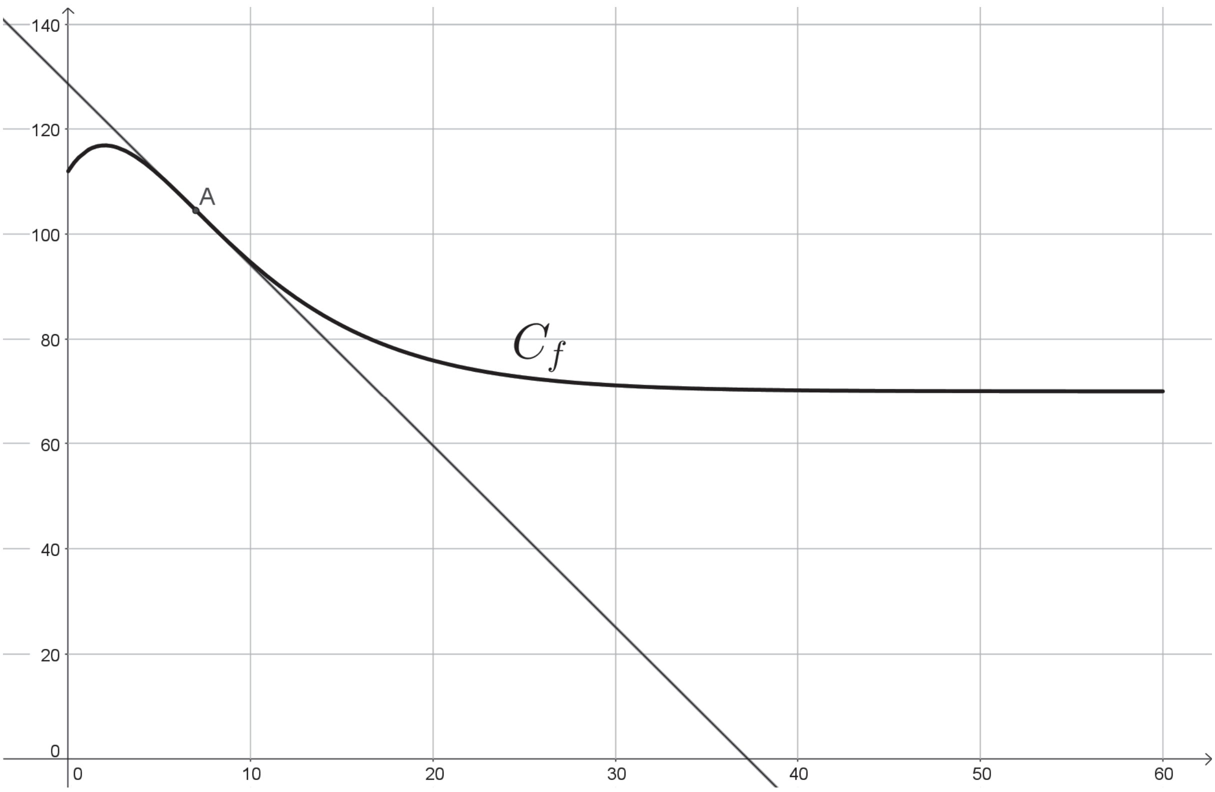
Annexes : à rendre avec la copie

Exercice 4

Annexe 1 : ébauche du fauteuil



Annexe 2



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2021

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le candidat traite **4 exercices :** les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1, commun à tous les candidats (5 points)

Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :

- 10 % des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20 % d'entre eux sont admis à l'école.

Partie I

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement.
On notera :

- D l'événement « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- A l'événement « le candidat a été admis à l'école » ;
- $\overline{D}$ et $\overline{A}$ les événements contraires des événements D et A respectivement.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.

3. Montrer que la probabilité de l'événement A est égale à 0,24.

4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

Partie II

1. On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à 0,24.
On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.

a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de cette loi ?

b. Calculer la probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école. On donnera une réponse arrondie au centième.

c. Calculer la probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école. On donnera une réponse arrondie au centième.

2. Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul.
On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à 0,24 et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.

a. Donner l'expression, en fonction de n, de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.

b. À partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à 0,99 ?

Exercice 2, commun à tous les candidats (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{e^x}{x}.$$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1.

a. Préciser la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe C_f.

2. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a :

$$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

3. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On établira un tableau de variations de la fonction f dans lequel apparaîtront les limites.

4. Soit m un nombre réel. Préciser, en fonction des valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.

5. On note Δ la droite d'équation $y=-x$.
On note A un éventuel point de C_f d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe C_f est parallèle à la droite Δ.

a. Montrer que a est solution de l'équation $e^x(x-1)+x^2=0$.

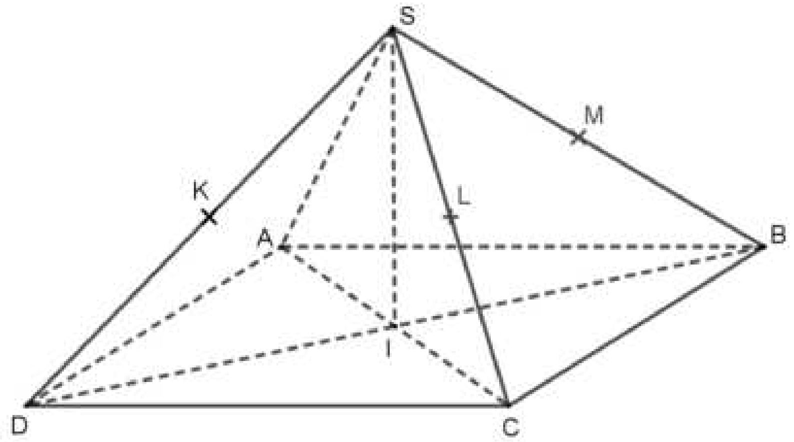
On note g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=e^x(x-1)+x^2$.
On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.

b. Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g sur $[0;+\infty[$.

c. Montrer qu'il existe un unique point A en lequel la tangente à C_f est parallèle à la droite Δ.

Exercice 3, commun à tous les candidats (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.
Le point I est le centre du carré ABCD. On suppose que : $IC = IB = IS = 1$.
Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace$(I ; \overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IS})$.
Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$I(0 ; 0 ; 0) ; A(-1 ; 0 ; 0) ; B(0 ; 1 ; 0) ; C(1 ; 0 ; 0) ; D(0 ; -1 ; 0) ; S(0 ; 0 ; 1).$$

2. Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

a. $\left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$ **b.** $\left(\frac{1}{4} ; -\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2} ; 1\right)$

3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AS}$ sont :

a. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

a. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ **b.** $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 0 \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ **c.** $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ **d.** $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

5. Une équation cartésienne du plan (SCB) est :

a. $y + z - 1 = 0$ **b.** $x + y + z - 1 = 0$ **c.** $x - y + z = 0$ **d.** $x + z - 1 = 0$

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A

Principaux domaines abordés :
Suites numériques ; raisonnement par récurrence ; suites géométriques.

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 .$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,5625
5	3	3,421875
6	4	4,31640625

2.

a. Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B ?

b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

3.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leq u_n \leq n + 1$.

b. En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

c. Démontrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = 1 .$$

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.

Exercice B

Principaux domaines abordés :   ***Fonction logarithme ; convexité.***

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \frac{3}{x}$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

On note $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

Démontrer que, pour tout nombre réel $x > 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}.$$

3.

a. Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On y fera figurer les valeurs exactes des extremums et les limites de f en 0 et en $+\infty$. On admettra que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

b. Par simple lecture du tableau de variations, préciser le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \frac{5}{3}$.

4. Étudier la convexité de la fonction f, c'est-à-dire préciser les parties de l'intervalle $]0; +\infty[$ sur lesquelles f est convexe, et celles sur lesquelles f est concave. On justifiera que la courbe $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion, dont on précisera les coordonnées.

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

Mercredi 11 mai 2022

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices.**

Chaque exercice est noté sur **7 points (le total sera ramené sur 20 points).**
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Exercice 1 (7 points) **Thèmes : fonction exponentielle, suites.**

Dans le cadre d'un essai clinique, on envisage deux protocoles de traitement d'une maladie.
L'objectif decet exercice est d'étudier, pour ces deux protocoles, l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient en fonction du temps.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Etude du premier protocole

Le premier protocole consiste à faire absorber un médicament, sous forme de comprimé, au patient.
On modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient, exprimée en mg, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par $f(t) = 3te^{-0,5t+1}$, où t désigne le temps, exprimé en heure, écoulé depuis la prise du comprimé.

1. a. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 10]$ et on note f' sa fonction dérivée.

Montrer que, pour tout nombre réel t de $[0; 10]$, on a : $f'(t) = 3(-0,5t + 1)e^{-0,5t+1}$.

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 10]$.

c. Selon cette modélisation, au bout de combien de temps la quantité de médicament présente dans le sang du patient sera-t-elle maximale ? Quelle est alors cette quantité maximale ?

2. a. Montrer que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0; 2]$, notée α, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

On admet que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[2; 10]$, notée β, et qu'une valeur approchée de β à 10^{-2} près est 3,46.

b. On considère que ce traitement est efficace lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5 mg.
Déterminer, à la minute près, la durée d'efficacité du médicament dans le cas de ce protocole.

Partie B : Etude du deuxième protocole

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg.

On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.

On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.

On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ème heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1 de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leq u_{n+1} < 6$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

c. Déterminer la valeur de ℓ. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7 dont on précisera le premier terme.

b. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

c. Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg.

Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

Exercice 2 (7 points) **Thème : géométrie dans l'espace**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère :

• le point A de coordonnées $(-1; 1; 3)$,

• la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

On admet que le point A n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$.

1. a. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathcal{D}$.

b. Montrer que le point $B(-1; 3; 0)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.

c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\vec{u}$.

2. On note $\mathcal{P}$ le plan passant par le point A et orthogonal à la droite $\mathcal{D}$, et on appelle H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$. Ainsi, H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathcal{D}$.

a. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne : $2x - y + 2z - 3 = 0$.

b. En déduire que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9}; \frac{19}{9}; \frac{16}{9}\right)$.

c. Calculer la longueur AH. On donnera une valeur exacte.

3. Dans cette question, on se propose de retrouver les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathcal{D}$, par une autre méthode.

On rappelle que le point $B(-1; 3; 0)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ et que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

a. Justifier qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.

b. Montrer que $k = \frac{\overrightarrow{AB}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.

c. Calculer la valeur du nombre réel k et retrouver les coordonnées du point H.

4. On considère un point C appartenant au plan $\mathcal{P}$ tel que le volume du tétraèdre $ABCH$ soit égal à $\frac{8}{9}$.
Calculer l'aire du triangle ACH.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

Exercice 3 (7 points) **Thème : probabilités**

Le directeur d'une grande entreprise a proposé à l'ensemble de ses salariés un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel.

Ce stage a été suivi par 25 % des salariés.

1. Dans cette entreprise, 52 % des salariés sont des femmes, parmi lesquelles 40 % ont suivi le stage.

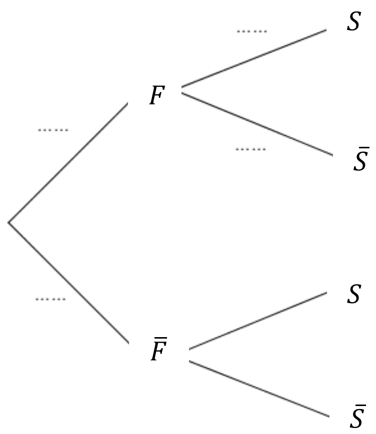
On interroge au hasard un salarié de l'entreprise et on considère les événements :

- F : « le salarié interrogé est une femme »,
- S : « le salarié interrogé a suivi le stage ».

$\bar{F}$ et $\bar{S}$ désignent respectivement les événements contraires des événements F et S.

a. Donner la probabilité de l'événement S.

b. Recopier et compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-contre sur les quatre branches indiquées.



c. Démontrer que la probabilité que la personne interrogée soit une femme ayant suivi le stage est égale à $0{,}208$.

d. On sait que la personne interrogée a suivi le stage. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

e. Le directeur affirme que, parmi les hommes salariés de l'entreprise, moins de 10 % ont suivi le stage.
Justifier l'affirmation du directeur.

2. On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 20 salariés de cette entreprise choisis au hasard associe le nombre de salariés de cet échantillon ayant suivi le stage. On suppose que l'effectif des salariés de l'entreprise est suffisamment important pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.

a. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X.

b. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que 5 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.

c. Le programme ci-contre, écrit en langage Python, utilise la fonction **binomiale**$(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{p})$ créée pour l'occasion qui renvoie la valeur de la probabilité $P(X = i)$ dans le cas où la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

```
def proba(k):
      P=0
      for i in range(0,k+1):
          P=P+binomiale(i,20,0.25)
      return P
```

Déterminer, à 10^{-3} près, la valeur renvoyée par ce programme lorsque l'on saisit proba(5) dans la console Python. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

d. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'au moins 6 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.

3. Cette question est indépendante des questions **1** et **2**.
Pour inciter les salariés à suivre le stage, l'entreprise avait décidé d'augmenter les salaires des salariés ayant suivi le stage de 5%, contre 2% d'augmentation pour les salariés n'ayant pas suivi le stage.
Quel est le pourcentage moyen d'augmentation des salaires de cette entreprise dans ces conditions ?

Exercice 4 (7 points) **Thème : fonctions numériques**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Les six questions sont indépendantes.

1. La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{-2x^2+3x-1}{x^2+1}$ admet pour asymptote la droite d'équation :

a. $x = -2$; **b.** $y = -1$;

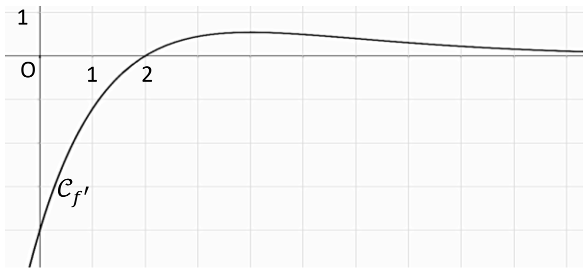
c. $y = -2$; **d.** $y = 0$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x^2}$.
La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(0) = 1$ est définie par :

a. $F(x) = \frac{x^2}{2}e^{x^2}$; **b.** $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$;

c. $F(x) = (1 + 2x^2)e^{x^2}$; **d.** $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{1}{2}$.

3. On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathcal{C}_{f'}$ **de la fonction dérivée** f' d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



On peut affirmer que la fonction f est :

a. concave sur $]0; +\infty[$;

b. convexe sur $]0; +\infty[$;

c. convexe sur $[0; 2]$;

d. convexe sur $[2; +\infty[$.

4. Parmi les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{-x^2} + 2$:

a. toutes sont croissantes sur $\mathbb{R}$; **b.** toutes sont décroissantes sur $\mathbb{R}$;

c. certaines sont croissantes sur $\mathbb{R}$ et d'autres décroissantes sur $\mathbb{R}$; **d.** toutes sont croissantes sur $]-\infty; 0]$ et décroissantes sur $[0; +\infty[$.

5. La limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2\ln x}{3x^2+1}$ est égale à :

a. $\frac{2}{3}$; **b.** $+\infty$; **c.** $-\infty$; **d.** 0 .

6. L'équation $e^{2x} + e^x - 12 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$:

a. trois solutions ; **b.** deux solutions ; **c.** une seule solution ; **d.** aucune solution.

Baccalauréat général

Session 2022 – Métropole

Épreuve de Mathématiques

Sujet de spécialité — Proposition de corrigé
Sujet 1

Ce corrigé est composé de 10 pages.

Exercice 1 — Exponentielle, suites

Partie A : Étude du premier protocole

$$f : t \mapsto 3te^{-0,5t+1}$$

1. **a.** Soit $t \in [0;10]$. D'une part, par dérivée d'une composée, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(e^{-0,5t+1}) = -0,5e^{-0,5t+1}$.
D'autre part, la dérivation du produit donne :

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,t}(t) = 3e^{-0,5t+1} + 3t \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(e^{-0,5t+1}\right) \\ &= 3e^{-0,5t+1} - 1,5te^{-0,5t+1} \\ &= 3\left(e^{-0,5t+1} - 0,5te^{-0,5t+1}\right) \end{aligned}$$

Finalement, en factorisant par l'exponentielle, on a bien :

$$\boxed{f'(t) = 3\,(-0,5t+1)\,e^{-0,5t+1}}$$

b. Soit $t \in [0;10]$. La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, le signe de $f'(t)$ est celui de $-0,5t+1$, *i.e.* positif pour $t < 2$ et négatif sinon.
Il vient donc le tableau de variations de f sur son domaine de définition :

t	0		2		10
signe de $f'(t)$		$+$	0	$-$	
variations de f			6		
	0	$\nearrow$		$\searrow$	$30e^{-4}$

c. Il est alors possible de remarquer que f sera maximale pour $\underline{t = 2}$, alors la quantité de médicament présente dans le sang du patient vaudra $\underline{f(2) = 6}$

2. **a.** Premièrement, on a montré que sur $[0,2]$ f est strictement croissante. De plus, $f([0,2]) = [0,6]$ (question précédente).
Et comme $5 \in [0,6]$, il est possible, par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires[1], d'affirmer que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution $\alpha \in [0,2]$.
Finalement, par lecture graphique, on trouve, à 10^{-2} près, $\underline{\alpha \approx 1,02}$.

b. D'après les données, le médicament est efficace lorsque sa quantité dans le sang est supérieure à 5 mg. Autrement dit, il est efficace tant que $f(t) > 5$.
Or, $f(t) > 5$ pour $t \in [\alpha, \beta]$. D'où, le médicament est efficace pendant $\beta - \alpha = 3,46 - 1,02 = 2,44\,\text{heures} = 2\,\text{heures}, 26,4\,\text{minutes}$
Le médicament sera donc efficace pendant une durée $\underline{\Delta t = 2\,\text{heures}\,26\,\text{minutes}}$ environ.

Partie B : Étude du second protocole

1. Au bout de la première heure, la quantité de médicament a diminué de 30 %, mais on a réinjecté 1,8 mg.
Il vient donc $u_1 = 0,7u_0 + 1,8 = 0,7 \times 2 + 1,8 = 3,2\,\text{mg}$.

1. il est également possible d'invoquer le théorème de la bijection

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. À chaque heure, on sait que la quantité de médicament diminue de 30 %. Il restera alors, à l'heure $(n+1)$, une quantité $0,7 \times u_n$ dans le sang. Mais comme 1,8 mg sont réinjectés chaque heure, il vient finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8}$$

3. **a.** On souhaite montrer par récurrence que pout tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1} < 6$. On va donc dérouler étape par étape un raisonnement par récurrence.

— Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et $u_1 = 3,2$. On a alors bien $u_0 \leq u_1 < 6$, la propriété est vérifiée au rang 0.

— Hérédité : Supposons la propriété vraie à un rang n quelconque, et montrons qu'elle reste vérifiée au rang $(n+1)$.
On a :

$$\begin{aligned} & u_n \leq u_{n+1} < 6 \\ \iff & 0,7u_n \leq 0,7u_{n+1} < 0,7 \times 6 \\ \iff & 0,7u_n + 1,8 \leq 0,7u_{n+1} + 1,8 < 0,7 \times 6 + 1,8 \\ \iff & u_{n+1} \leq 0,7u_{n+1} + 1,8 < 0,7 \times 6 + 1,8 \end{aligned}$$

Et comme $0,7u_{n+1} + 1,8 = u_{n+2}$ et $0,7 \times 6 + 1,8 \approx 5,99 < 6$, il vient finalement :

$$u_{n+1} \leq u_{n+2} < 6$$

La propriété est donc vérifiée au rang $(n+1)$, elle est héréditaire.

— Conclusion : La propriété étant vérifiée au rang zéro et héréditaire, elle est vraie pour tout entier naturel n.

b. Nous avons, par récurrence, montré deux choses :

— Premièrement, pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc croissante.

— Secondement, nous avons montré que pour tout entier naturel n, $u_n < 6$. La suite (u_n) est donc majorée.

Finalement, la suite (u_n) étant croissante et majorée, alors elle est bien convergente de limite ℓ.

c. Il vient alors très logiquement $\underline{\ell = 6}$. Autrement dit, quelle que soit la durée du traitement, la quantité de médicament présente dans le sang du patient ne pourra pas dépasser 6 mg.

4. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_n = 6 - u_n$. Alors il vient :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 6 - u_{n+1} \\ &= 6 - (0,7u_n + 1,8) \\ &= -0,7u_n + 4,2 \\ &= 0,7(6 - u_n) = 0,7v_n \end{aligned}$$

Alors finalement, pour tout entier naturel n, $\boxed{v_{n+1} = 0,7v_n}$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = 0,7$ et premier terme $v_0 = 6 - u_0 = 6 - 2 = 4$.

b. On a donc, pour la suite géométrique (v_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = 4 \times 0,7^n$$

Et finalement, comme $v_n = 6 - u_n \iff u_n = 6 - v_n$, il vient :

$$\boxed{u_n = 6 - 4 \times 0,7^n}$$

c. On cherche à savoir au bout de combien d'injections la quantité de médicament présente dans le sang sera supérieure à $5,5\,\text{mg}$. Il va donc nous falloir résoudre, pour n entier naturel, $u_n \geq 5,5$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} & u_n \geq 5,5 \\ & \iff 6 - 4 \times 0,7^n \geq 5,5 \\ & \iff -4 \times 0,7^n \geq -0,5 \\ & \iff 4 \times 0,7^n \leq 0,5 \qquad \text{(on a multiplié par un nombre négatif)} \\ & \iff 0,7^n \leq 0,5/4 = 0,125 \\ & \iff e^{n \ln(0,7)} \leq 0,125 \\ & \iff n \ln(0,7) \leq \ln(0,125) \qquad \text{(ln strictement croissant)} \\ & \iff n \geq \frac{\ln(0,125)}{\ln(0,7)} \approx 6 \qquad (\ln(0,7) < 0) \end{aligned}$$

Il aura été nécessaire de réaliser $\underline{N = 7}$ injections avec ce protocole car u_6 correspond à la 7ème injection.

Exercice 2 — Géométrie dans l'espace

1. **a.** À partir de sa représentation paramétrique, on déduit que $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

b. Par définition de la représentation paramétrique d'une droite, on sait que le point $M(1; 2; 2) \in \mathcal{D}$. Alors $B \in \mathcal{D} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{MB} = t\vec{u}$.
On a le vecteur :

$$\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Et on remarque alors que $\boxed{\overrightarrow{MB} = -\vec{u}}$, les deux vecteurs sont donc colinéaires, le point B appartient bien à la droite $\mathcal{D}$.

c. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. D'où, on calcule le produit scalaire :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \times 2 + 2 \times -1 + -3 \times 2 = 0 - 2 - 6 = -8$$

2. **a.** Le plan $\mathcal{P}$ étant orthogonal à la droite $\mathcal{D}$, le vecteur $\vec{u}$ directeur de la droite est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

Le plan admet alors une équation cartésienne de la forme $2x - y + 2z + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$. Il reste alors à déterminer la valeur de c.

Sachant que $A(-1, 1, 3) \in \mathcal{P}$, on a nécessairement $2 \times (-1) - 1 + 2 \times 3 + c = 0 \implies -2 - 1 + 6 + c = 0 \implies \underline{c = -3}$.

Le plan $\mathcal{P}$ admet donc bien comme équation cartésienne $2x - y + 2z - 3 = 0$.

b. On cherche les coordonnées du point H d'intersection entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$.

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ coordonnées du point H.

Premièrement, $H \in \mathcal{P}$, donc a des coordonnées vérifiant l'équation $2x-y+2z-3 = 0$.

De plus, $H \in \mathcal{D}$, donc vérifie $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Il vient donc :

$$H \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D} \iff \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \\ 2x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \\ 2(1 + 2t) - (2 - t) + 2(2 + 2t) - 3 = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \\ 2 + 4t - 2 + t + 4 + 4t - 3 = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \\ 9t + 1 = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Il vient donc $t = -\frac{1}{9}$, et dans ce cas avec l'équation paramétrique de $\mathcal{D}$, on a :

$$\begin{cases} x = 1 + 2 \times \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{7}{9} \\ y = 2 + \frac{1}{9} = \frac{19}{9} \\ z = 2 + 2 \times \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{16}{9} \end{cases}$$

Finalement, on a donc bien $\boxed{H\left(\frac{7}{9}; \frac{19}{9}; \frac{16}{9}\right)}$ coordonnées du point d'intersection entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$.

c. On a la distance euclidienne :

$$d = \sqrt{\left(\frac{7}{9}+1\right)^2 + \left(\frac{19}{9}-1\right)^2 + \left(\frac{16}{9}-3\right)^2} = \sqrt{\frac{256}{81}+\frac{100}{81}+\frac{121}{81}}$$

$$d = \sqrt{\frac{477}{81}} = \sqrt{\frac{53}{9}}$$

Alors finalement, $\boxed{AH = \frac{\sqrt{53}}{3}}$.

3. **a.** Les points B et H appartiennent tous deux à la droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}$. Alors par définition, $\exists k \in \mathbb{R}, \overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.

b. On cherche à faire apparaître le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et exprimer k en fonction de son produit scalaire avec $\vec{u}$.

On commence par appliquer la relation de Chasles à l'égalité montrée prédédemment :

$$\overrightarrow{HB} = k\vec{u} \implies \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} = k\vec{u}$$

On prend alors, des deux côtés, le produit scalaire par $\vec{u}$:

$$(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \vec{u} = k\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} \implies \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u} = k \parallel \overrightarrow{u} \parallel^2$$

Or, on sait que H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathcal{D}$. D'où, par définition, $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{u} = 0$. L'égalité devient donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u} = k \parallel \overrightarrow{u} \parallel^2$$

Et finalement, on obtient bien :

$$\boxed{k = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u}}{\parallel \overrightarrow{u} \parallel^2}}$$

c. On calcule alors $k = -\frac{8}{9}$ (la valeur de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u}$ ayant été calculée précédemment).

Il vient donc $\overrightarrow{HB} = -\frac{8}{9}\vec{u} = -\frac{8}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Alors :

$$\begin{pmatrix} -1 - x_H \\ 3 - y_H \\ 0 - z_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} \\ \frac{8}{9} \\ -\frac{16}{9} \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x_H = \frac{16}{9} - 1 \\ y_H = 3 - \frac{8}{9} \\ z_H = \frac{16}{9} \end{cases}$$

Et finalement, on trouve bien $\boxed{H\left(\frac{7}{9}, \frac{19}{9}, \frac{16}{9}\right)}$, *i.e.* le même résultat que celui obtenu par l'autre méthode.

4. On étudie le tétraèdre ABCH. On sait que B et H sont sur la droite $\mathcal{D}$, que les points C et H sont sur le plan $\mathcal{P}$. On sait également que la droite $\mathcal{D} = (BH)$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$. De plus, H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathcal{D}$ et $A \in \mathcal{P}$, il vient donc $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH} = 0$

Ainsi, la hauteur issue de ACH est le segment HB. Il vient donc, en notant S l'aire du triangle ACH :

$$V = \frac{1}{3} \times S \times \parallel \overrightarrow{HB} \parallel \Longrightarrow S = \frac{3 \times V}{\parallel \overrightarrow{HB} \parallel}$$

Et comme $\overrightarrow{HB} = \begin{pmatrix} \frac{16}{9} \\ -\frac{8}{9} \\ \frac{16}{9} \end{pmatrix}$, il vient $\parallel \overrightarrow{HB} \parallel = \frac{8}{3}$.

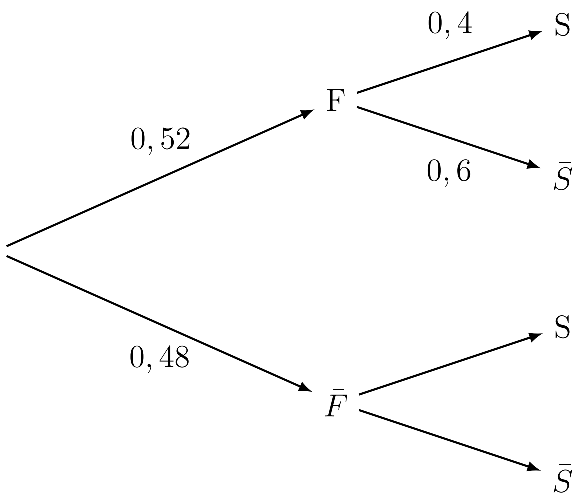
Finalement, on a $S = \frac{3 \times \frac{8}{9}}{\frac{8}{3}} = 1$ unités d'aire.

Exercice 3 — Probabilités

1. **a.** On nous précise que 25 % des salariés ont suivi le stage.

Ce qui signifie que $\underline{p(S) = 0,25}$.

b. On recopie et complète l'arbre pondéré :



c. On cherche à calculer la probabilité que la personne interrogée soit une femme ayant suivi le stage, ce qui revient à calculer la probabilité $p(F \cap S)$.

On a alors, les événements étant indépendants :

$$p(F \cap S) = p(F) \times p_F(S) = 0,52 \times 0,4 \approx 0,208$$

D'où, on a bien $\underline{p(F \cap S) = 0,208}$.

d. On cherche la probabilité que la personne soit une femme, sachant qu'elle a suivi le stage. Ce qui revient à calculer la probabilité $p_S(F)$.

Or, d'après la formule de Bayes :

$$p_S(F) = \frac{p(F \cap S)}{p(S)}$$

$$\boxed{p_S(F) = \frac{p(F)p_F(S)}{p(S)}}$$

D'où, $p_S(F) = \frac{0,208}{0,25} \underline{= 0,832}$.

e. On sait que, d'après la loi des probablités totales,

$$p(S) = p(F \cap S) + p(\bar{F} \cap S) = p(F \cap S) + p(\bar{F})p_{\bar{F}}(S)$$

$$\Longrightarrow \boxed{p_{\bar{F}}(S) = \frac{p(S) - p(F \cap S)}{p(\bar{F})}} = \frac{0,25 - 0,208}{0,48} = 0,09$$

La part d'hommes ayant suivi le stage étant de 9 %, l'affirmation du directeur est vraie.

2. **a.** On prend un échantillon de 20 salariés, et on étudie le suivi du stage dans cet échantillon supposé être un tirage avec remise. La variable aléatoire X mesure donc le nombre de salariés ayant suivi le stage dans cet échantillon de 20, et suit alors la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,25$.

D'où, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(20; 0,25)$

b. Il vient donc $P(X = 5) = \binom{20}{5} \times 0,25^5 \times 0,75^{15} \underline{\approx 0,202}$ probabilité que 5 salariés sur les 20 aient suivi le stage.

c. En saisissant `proba(5)` dans la console Python, le programme renvoie $0,617$.

On remarque que le programme Python ainsi écrit somme les $P(X = i)$ de 0 à $k \in \mathbb{N}$, donnant alors la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

Autrement dit, `proba(5)` donne la probabilité $P(X \leq 5)$ qu'au plus 5 salariés aient suivi le stage sur les 20.

d. La probabilité qu'au moins 6 salariés aient suivi le stage correspond à la probabilité $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5)$.

D'où, $P(X \geq 6) = 1 - 0,617 \underline{\approx 0,383}$ la probabilité qu'au moins 6 salariés aient suivi le stage.

3. On sait que 25 % des salariés ont suivi le stage. Ces derniers étant augmentés à hauteur de 5 % ; les 75 % restants étant augmentés à hauteur de 2 %, il vient l'augmentation moyenne :

$$A_T = 0,25 \times 0,05 + 0,75 \times 0,02 = 0,0275$$

L'augmentation totale moyenne sera donc de $\underline{A_T = 2,8\,\%}$.

Exercice 4 — Fonctions numériques (QCM)

NB : Dans cet exercice QCM, aucune justification n'était demandée.
On les donne cependant dans ce corrigé, pour des raisons évidentes.

1. Réponse c.

Explication :

On cherche l'asymptote de la fonction $f : x \mapsto \frac{-2x^2+3x-1}{x^2+1}$. Son dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, cette question revient à une étude de ses branches infinies (*i.e.* les limites en $\pm\infty$).

Soit $x > 0$. En $+\infty$, on remarque que la limite de la fonction f est une forme indéterminée. Il va donc falloir lever cette incertitude. On a :

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 3x - 1}{x^2 + 1} = \frac{x^2(-2 + 3/x - 1/x^2)}{x^2(1 + 1/x^2)}$$

D'où, comme $x > 0$:

$$f(x) = \frac{-2 + 3/x - 1/x^2}{1 + 1/x^2}$$

Et on remarque que ce résultat est valable également pour $x < 0$. D'où, il vient naturellement :

$$\boxed{\lim_{\pm\infty} f = -2}$$

La droite d'équation $y = -2$ est donc asymptote à la courbe représentative de f.

2. Réponse d.

Explication :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On remarque que $f(x)$ est de la forme $au'e^u$ avec $a \in \mathbb{R}$ et u une fonction continue et dérivable.

On identifie alors $u(x) = x^2$, donc $u'(x) = 2x$. Dans ce cas, il vient $a = \frac{1}{2}$.

Donc les primitives de f sont les fonctions $F : x \mapsto \frac{1}{2}e^{x^2} + C$, $C \in \mathbb{R}$ une constante.

Reste alors à chercher la valeur de la constante C permettant de vérifier la condition imposée. On a :

$$F(0) = \frac{1}{2}e^0 + C = \frac{1}{2} + C$$

Et comme il faut $F(0) = 1$, il vient $C = 1 - 1/2 \underline{= 1/2}$.

Finalement, la primitive cherchée est définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $\boxed{F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{1}{2}}$.

3. Réponse c.

Explication :

On souhaite étudier la convexité de la fonction f. Pour cela, on nous donne la courbe représentative de sa fonction dérivée.

On remarque dans un premier temps que cette fonction dérivée n'est pas monotone sur $[2; +\infty[$, et ne l'est donc pas d'avantage sur $[0; +\infty[$, ce qui permet d'éliminer immédiatement toutes les réponses évoquant une convexité unique sur ces domaines.

Il ne reste alors, pour se convaincre, plus qu'à vérifier que f' est bien croissante sur $[0; 2]$, ce qui implique bien que la fonction f est convexe sur cet intervalle.

4. Réponse a.

Explication :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On peut sans trop de difficultés affirmer que $f(x) = 2e^{-x^2} + 2$ est une quantité positive (strictement) comme somme de deux termes positifs (strictement).

Il vient donc naturellement de ce résultat que toutes les primitives de f sont croissantes sur $\mathbb{R}$.

5. Réponse d.

Explication :

Soit $x > 0$. On a :

$$f(x) = \frac{2\ln(x)}{3x^2 + 1} = \frac{\ln(x)}{x^2} \times \frac{2}{3 + 1/x^2}$$

Or, par somme et quotient de limites, $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3+1/x^2}) = 2/3$.

Et par croissance comparée, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$

Alors finalement,

$$\boxed{\lim_{+\infty} f = 0}$$

6. Réponse c.

Explication :

On cherche à résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$e^{2x} + e^x - 12 = 0 \qquad (\mathcal{E})$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = e^x$. Alors :

$$(\mathcal{E}) \iff X^2 + X - 12 = 0$$

Il suffit donc de chercher les racines de ce polynôme. Ce dernier a pour discriminant :

$$\Delta = 1 + 4 \times 12 \underline{= 49 = 7^2 > 0}$$

Le polynôme admettra donc deux racines :

$$X_1 = \frac{-1-7}{2} = -4 \qquad ; \qquad X_2 = \frac{-1+7}{2} = 3$$

Il reste alors à FAIRE BIEN ATTENTION ET NE PAS RÉPONDRE TROP VITE !
En effet, on a trouvé au polynôme deux racines réelles, $X_1 = -4$ et $X_2 = 3$. Or, il ne faut pas oublier que $X = e^x$, et on cherche les solutions pour $x \in \mathbb{R}$, il faut donc maintenant revenir de X à x.
Pour cela, on se rappelle qu'une exponentielle est positive, il est donc impossible dans $\mathbb{R}$ d'avoir $e^x = -4$; cela ne nous laisse donc qu'une seule solution, qui peut être trouvée rapidement par bijectivité de l'exponentielle :

$$X_2 = 3 = e^x \implies \boxed{x = \ln(3)}$$

L'équation admet donc une unique solution réelle.

* *
*

Proposé par T. Prévost (thomas.prevost@protonmail.com),
pour le site https://www.sujetdebac.fr/
Compilé le 19 septembre 2022.

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

Jeudi 12 mai 2022

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

Chaque exercice est noté sur **7 points (le total sera ramené sur 20 points).**
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte

Exercice 1 (7 points) **Thème : probabilités**

Le coyote est un animal sauvage proche du loup, qui vit en Amérique du Nord.
Dans l'état d'Oklahoma, aux États-Unis, 70 % des coyotes sont touchés par une maladie appelée ehrlichiose.

Il existe un test aidant à la détection de cette maladie. Lorsque ce test est appliqué à un coyote, son résultat est soit positif, soit négatif, et on sait que:

- Si le coyote est malade, le test est positif dans 97 % des cas.
- Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans 95% des cas.

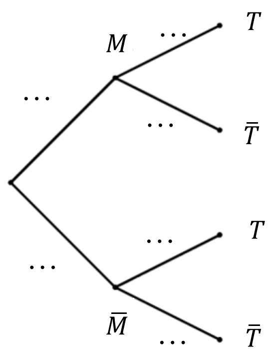
Partie A

Des vétérinaires capturent un coyote d'Oklahoma au hasard et lui font subir un test pour l'ehrlichiose.
On considère les événements suivants :

- M : « le coyote est malade » ;
- T : « le test du coyote est positif ».

On note $\overline{M}$ et $\overline{T}$ respectivement les événements contraires de M et T.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation.



2. Déterminer la probabilité que le coyote soit malade et que son test soit positif.
3. Démontrer que la probabilité de T est égale à 0,694.
4. On appelle « valeur prédictive positive du test » la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif.
   Calculer la valeur prédictive positive du test. On arrondira le résultat au millième.
5. **a.** Par analogie avec la question précédente, proposer une définition de la « valeur prédictive négative du test », et calculer cette valeur en arrondissant au millième.
   b. Comparer les valeurs prédictives positive et négative du test, et interpréter.

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un coyote capturé au hasard présente un test positif est de 0,694.

1. Lorsqu'on capture au hasard cinq coyotes, on assimile ce choix à un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard associe le nombre de coyotes dans cet échantillon ayant un test positif.
   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier et préciser ses paramètres.
   b. Calculer la probabilité que dans un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard, un seul ait un test positif. On arrondira le résultat au centième.
   c. Un vétérinaire affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins quatre coyotes sur cinq aient un test positif : cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.
2. Pour tester des médicaments, les vétérinaires ont besoin de disposer d'un coyote présentant un test positif. Combien doivent-ils capturer de coyotes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux présente un test positif soit supérieure à 0,99 ?

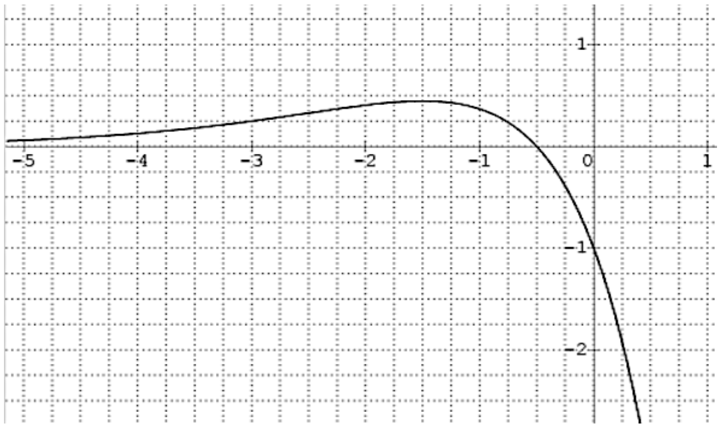
Exercice 2 (7 points) **Thèmes : fonctions numériques et suites**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Pour les questions **1** à **3** ci-dessous, on considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
La courbe de sa fonction dérivée f' est donnée ci-dessous.
On admet que f' admet un maximum en $-\frac{3}{2}$ et que sa courbe coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(-\frac{1}{2}; 0)$.

On rappelle que **la courbe ci-dessous représente la fonction dérivée f' de f.**



Question 1 :

a. La fonction f admet un maximum en $-\frac{3}{2}$;

b. La fonction f admet un maximum en $-\frac{1}{2}$;

c. La fonction f admet un minimum en $-\frac{1}{2}$;

d. Au point d'abscisse -1, la courbe de la fonction f admet une tangente horizontale.

Question 2 :

a. La fonction f est convexe sur $]-\infty; -\frac{3}{2}[$;

b. La fonction f est convexe sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$;

c. La courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f n'admet pas de point d'inflexion ;

d. La fonction f est concave sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$.

Question 3 :
La dérivée seconde f'' de la fonction f vérifie :

a. $f''(x) \geq 0$ pour $x \in \left]-\infty; \frac{-1}{2}\right[$;

b. $f''(x) \geq 0$ pour $x \in [-2; -1]$;

c. $f''\left(\frac{-3}{2}\right) = 0$;

d. $f''(-3) = 0$.

Question 4 : On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n).
On sait que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leq v_n \leq w_n$ et de plus : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 3$.
On peut alors affirmer que :

a. La suite (v_n) converge ;

b. Si la suite (u_n) est croissante alors la suite (v_n) est minorée par u_0 ;

c. $1 \leq v_0 \leq 3$;

d. La suite (v_n) diverge.

Question 5 :

On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n non nul : $u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{n}$.

On peut alors affirmer que :

a. La suite (u_n) diverge ;

b. La suite (u_n) converge ;

c. $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$;

d. $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Question 6 :

On considère (u_n) une suite réelle telle que pour tout entier naturel n, on a : $n < u_n < n + 1$.

On peut affirmer que :

a. Il existe un entier naturel N tel que u_N est un entier ;

b. La suite (u_n) est croissante ;

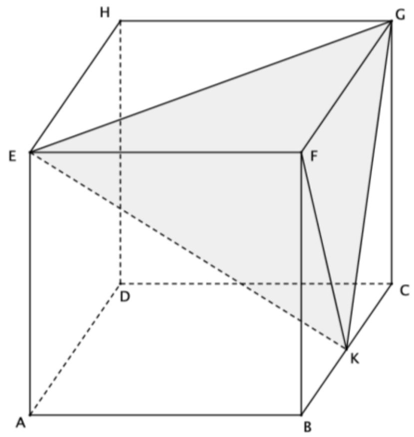
c. La suite (u_n) est convergente ;

d. La suite (u_n) n'a pas de limite.

Exercice 3 (7 points) **Thème : géométrie dans l'espace**

On considère un cube $ABCDEFGH$ et on appelle K le milieu du segment $[BC]$.

On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ et on considère le tétraèdre $EFGK$.



On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$

où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

1. Préciser les coordonnées des points E, F, G et K .
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (EGK).
3. Démontrer que le plan (EGK) admet pour équation cartésienne : $2x - 2y + z - 1 = 0$.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EGK) passant par F.
5. Montrer que le projeté orthogonal L de F sur le plan (EGK) a pour coordonnées $\left(\frac{5}{9}; \frac{4}{9}; \frac{7}{9}\right)$.
6. Justifier que la longueur LF est égale à $\frac{2}{3}$.
7. Calculer l'aire du triangle EFG. En déduire que le volume du tétraèdre $EFGK$ est égal à $\frac{1}{6}$.
8. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle EGK.
9. On considère les points P milieu du segment $[EG]$, M milieu du segment $[EK]$ et N milieu du segment $[GK]$. Déterminer le volume du tétraèdre $FPMN$.

Exercice 4 (7 points) **Thèmes : fonctions numériques, fonction exponentielle**

Partie A : études de deux fonctions

On considère les deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 0{,}06\,(-x^2 + 13{,}7x) \quad \text{et} \quad g(x) = (-0{,}15x + 2{,}2)e^{0{,}2x} - 2{,}2\,.$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables et on note f' et g' leurs fonctions dérivées respectives.

1. On donne le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

x	0	$6{,}85$	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	$f(6{,}85)$	↘ $-\infty$

a. Justifier la limite de f en $+\infty$.

b. Justifier les variations de la fonction f.

c. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

2. a. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

b. Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $[0\,;+\infty[$ on a : $g'(x) = (-0{,}03x + 0{,}29)e^{0{,}2x}$.

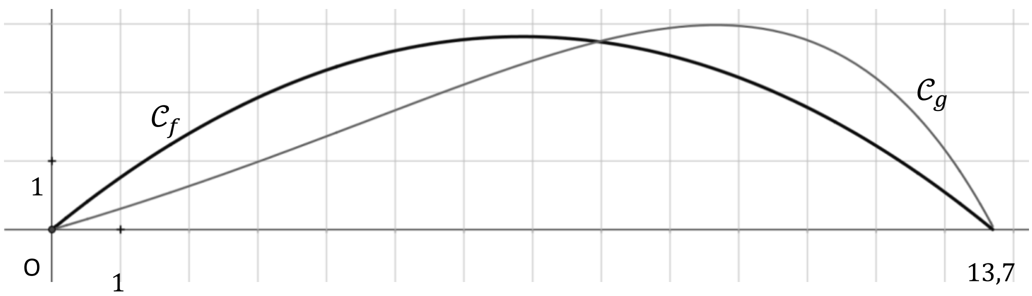
c. Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations sur $[0\,;+\infty[$.
Préciser une valeur approchée à 10^{-2} près du maximum de g.

d. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle et déterminer, à 10^{-2} près, une valeur approchée de cette solution.

Partie B : trajectoires d'une balle de golf

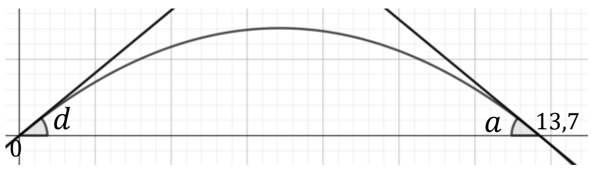
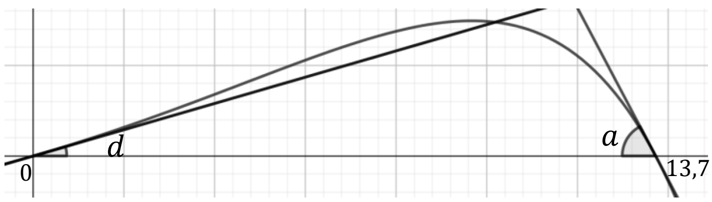
Pour frapper la balle, un joueur de golf utilise un instrument appelé « club » de golf.
On souhaite exploiter les fonctions f et g étudiées en **Partie A** pour modéliser de deux façons différentes la trajectoire d'une balle de golf. On suppose que le terrain est parfaitement plat.

On admettra ici que 13,7 est la valeur qui annule la fonction f et une approximation de la valeur qui annule la fonction g.
On donne ci-dessous les représentations graphiques de f et g sur l'intervalle $[0; 13{,}7]$.



Pour x représentant la distance horizontale parcourue par la balle en dizaine de yards après la frappe, (avec $0 \leq x \leq 13{,}7$), $f(x)$ (ou $g(x)$ selon le modèle) représente la hauteur correspondante de la balle par rapport au sol, en dizaine de yards (1 yard correspond à environ 0,914 mètre).

On appelle « angle de décollage » de la balle, l’angle entre l’axe des abscisses et la tangente à la courbe (C_f ou C_g selon le modèle) en son point d’abscisse 0. Une mesure de l’angle de décollage de la balle est un nombre réel d tel que $\tan(d)$ est égal au coefficient directeur de cette tangente.
De même, on appelle « angle d’atterrissage » de la balle, l’angle entre l’axe des abscisses et la tangente à la courbe (C_f ou C_g selon le modèle) en son point d’abscisse 13,7. Une mesure de l’angle d’atterrissage de la balle est un nombre réel a tel que $\tan(a)$ est égal à l’opposé du coefficient directeur de cette tangente.
Tous les angles sont mesurés en degré.

Le schéma illustre les angles de décollage et d’atterrissage associés à la courbe C_f.	Le schéma illustre les angles de décollage et d’atterrissage associés à la courbe C_g.
	

1. *Première modélisation :* on rappelle qu’ici, l’unité étant la dizaine de yards, x représente la distance horizontale parcourue par la balle après la frappe et $f(x)$ la hauteur correspondante de la balle. Selon ce modèle :

- **a.** Quelle est la hauteur maximale, en yard, atteinte par la balle au cours de sa trajectoire ?
- **b.** Vérifier que $f'(0) = 0{,}822$.
- **c.** Donner une mesure en degré de l’angle de décollage de la balle, arrondie au dixième. (On pourra éventuellement utiliser le tableau ci-dessous).
- **d.** Quelle propriété graphique de la courbe C_f permet de justifier que les angles de décollage et d’atterrissage de la balle sont égaux ?

2. *Seconde modélisation :* on rappelle qu’ici, l’unité étant la dizaine de yards, x représente la distance horizontale parcourue par la balle après la frappe et $g(x)$ la hauteur correspondante de la balle. Selon ce modèle :

- **a.** Quelle est la hauteur maximale, en yard, atteinte par la balle au cours de sa trajectoire ?

On précise que $g'(0) = 0{,}29$ et $g'(13{,}7) \approx -1{,}87$.

- **b.** Donner une mesure en degré de l’angle de décollage de la balle, arrondie au dixième. (On pourra éventuellement utiliser le tableau ci-dessous).
- **c.** Justifier que 62 est une valeur approchée, arrondie à l’unité près, d’une mesure en degré de l’angle d’atterrissage de la balle.

Tableau : extrait d’une feuille de calcul donnant une mesure en degré d’un angle quand on connait sa tangente :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	tan(θ)	0,815	0,816	0,817	0,818	0,819	0,82	0,821	0,822	0,823	0,824	0,825	0,826
2	θ en degrés	39,18	39,21	39,25	39,28	39,32	39,35	39,39	39,42	39,45	39,49	39,52	39,56
3													
4	tan(θ)	0,285	0,286	0,287	0,288	0,289	0,29	0,291	0,292	0,293	0,294	0,295	0,296
5	θ en degrés	15,91	15,96	16,01	16,07	16,12	16,17	16,23	16,28	16,33	16,38	16,44	16,49

Partie C : interrogation des modèles

À partir d'un grand nombre d'observations des performances de joueurs professionnels, on a obtenu les résultats moyens suivants :

Angle de décollage en degré	Hauteur maximale en yard	Angle d'atterrissage en degré	Distance horizontale en yard au point de chute
24	**32**	**52**	**137**

Quel modèle, parmi les deux étudiés précédemment, semble le plus adapté pour décrire la frappe de la balle par un joueur professionnel ? La réponse sera justifiée.

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2023

MATHÉMATIQUES

Lundi 20 mars 2023

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse inexacte.
Les questions sont indépendantes.

Un technicien contrôle les machines équipant une grande entreprise. Toutes ces machines sont identiques.

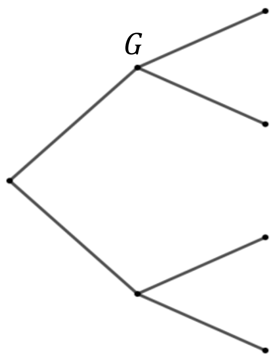
On sait que :

- 20% des machines sont sous garantie ;
- 0,2% des machines sont à la fois défectueuses et sous garantie ;
- 8,2% des machines sont défectueuses.

Le technicien teste une machine au hasard.

On considère les événements suivants :

- G : « la machine est sous garantie » ;
- D : « la machine est défectueuse » ;
- $\overline{G}$ et $\overline{D}$ désignent respectivement les événements contraires de G et D.



Pour répondre aux questions **1** à **3**, on pourra s'aider de l'arbre proposé ci-contre.

1. La probabilité $p_G(D)$ de l'événement D sachant que G est réalisé est égale à :

a. 0,002 **b.** 0,01
c. 0,024 **d.** 0,2

2. La probabilité $p(\overline{G} \cap D)$ est égale à :

a. 0,01 **b.** 0,08
c. 0,1 **d.** 0,21

3. La machine est défectueuse. La probabilité qu'elle soit sous garantie est environ égale, à 10^{-3} près, à :

a. 0,01 **b.** 0,024
c. 0,082 **d.** 0,1

Pour les questions **4** et **5,** on choisit au hasard et de façon indépendante n machines de l'entreprise, où n désigne un entier naturel non nul. On assimile ce choix à un tirage avec remise, et on désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque lot de n machines le nombre de machines défectueuses dans ce lot.
On admet que X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}082$.

4. Dans cette question, on prend $n = 50$.

La valeur de la probabilité $p(X > 2)$, arrondie au millième, est de :

a. 0,136 **b.** 0,789
c. 0,864 **d.** 0,924

5. On considère un entier n pour lequel la probabilité que toutes les machines d'un lot de taille n fonctionnent correctement est supérieure à $0{,}4$. La plus grande valeur possible pour n est égale à :

a. 5 **b.** 6 **c.** 10 **d.** 11

Exercice 2 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 8\ln(x)$, où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

On admet que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. On admet que, pour tout $x > 0$, $f(x) = x^2\left(1 - 8\frac{\ln(x)}{x^2}\right)$.
En déduire la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. Montrer que, pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \frac{2(x^2-4)}{x}$.

4. Étudier les variations de f sur $]0\,;+\infty[$ et dresser son tableau de variations complet.
On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $]0\,;+\infty[$.

5. Démontrer que, sur l'intervalle $]0\,;\,2]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de α).

6. On admet que, sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de β).
En déduire le signe de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

7. Pour tout nombre réel k, on considère la fonction g_k définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g_k(x) = x^2 - 8\ln(x) + k\ .$$

En s'aidant du tableau de variations de f, déterminer la plus petite valeur de k pour laquelle la fonction g_k est positive sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Exercice 3 (5 points)

Une entreprise a créé une Foire Aux Questions (« FAQ ») sur son site internet.

On étudie le nombre de questions qui y sont posées chaque mois.

Partie A : Première modélisation

Dans cette partie, on admet que, chaque mois :

- 90% des questions déjà posées le mois précédent sont conservées sur la FAQ ;
- 130 nouvelles questions sont ajoutées à la FAQ.

Au cours du premier mois, 300 questions ont été posées.

Pour estimer le nombre de questions, en centaines, présentes sur la FAQ le n-ième mois, on modélise la situation ci-dessus à l'aide de la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 3 \text{ et, pour tout entier naturel } n \geq 1,\ u_{n+1} = 0{,}9\, u_n + 1{,}3.$$

1. Calculer u_2 et u_3 et proposer une interprétation dans le contexte de l'exercice.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$:
$$u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^n .$$
3. En déduire que la suite (u_n) est croissante.
4. On considère le programme ci-contre, écrit en langage Python.

   Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de `seuil(8.5)` et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(p) :
    n=1
    u=3
    while u<=p :
        n=n+1
        u=0.9*u+1.3
    return n
```

Partie B : Une autre modélisation

Dans cette partie, on considère une seconde modélisation à l'aide d'une nouvelle suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$v_n = 9 - 6 \times \mathrm{e}^{-0{,}19\times(n-1)} .$$

Le terme v_n est une estimation du nombre de questions, en centaines, présentes le n-ième mois sur la FAQ.

1. Préciser les valeurs arrondies au centième de v_1 et v_2.
2. Déterminer, en justifiant la réponse, la plus petite valeur de n telle que $v_n > 8{,}5$.

Partie C : Comparaison des deux modèles

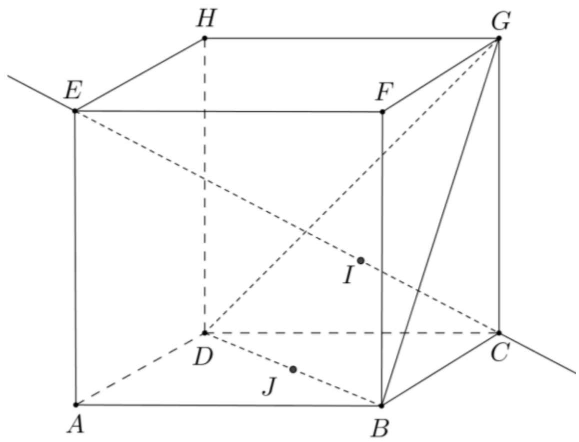
1. L'entreprise considère qu'elle doit modifier la présentation de son site lorsque plus de 850 questions sont présentes sur la FAQ. Parmi ces deux modélisations, laquelle conduit à procéder le plus tôt à cette modification ? Justifier votre réponse.
2. En justifiant la réponse, pour quelle modélisation y a-t-il le plus grand nombre de questions sur la FAQ à long terme ?

Exercice 4 (5 points)

On considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.

On appelle I le point d'intersection du plan (GBD) avec la droite (EC).

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. Donner dans ce repère les coordonnées des points E, C, G.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).
3. Démontrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (GBD).
4. **a.** Justifier qu'une équation cartésienne du plan (GBD) est : $x + y - z - 1 = 0$.

   b. Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

   c. En déduire que la distance du point E au plan (GBD) est égale à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
5. **a.** Démontrer que le triangle BDG est équilatéral.

   b. Calculer l'aire du triangle BDG. On pourra utiliser le point J, milieu du segment $[BD]$.
6. Justifier que le volume du tétraèdre $EGBD$ est égal à $\frac{1}{3}$.

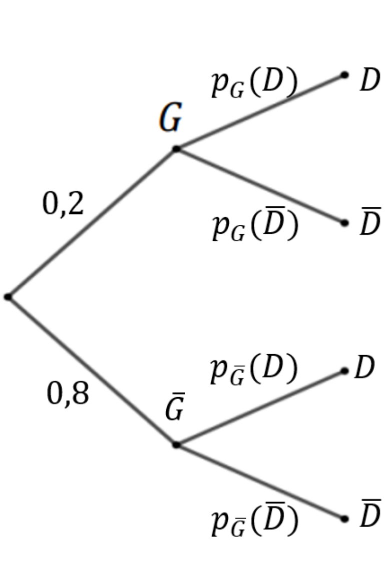
   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$ *où* $\mathcal{B}$ *est l'aire d'une base du tétraèdre et* h *est la hauteur relative à cette base.*

Mathématiques - Métropole 1 - 2023

Merci d'adresser vos éventuelles remarques à `anthony.le.bihan@icloud.com`. Je ne réponds pas aux questions.

Exercice 1 (5 points)

D'après les données, on peut à l'avance établir l'arbre pondéré suivant :



On sait de plus que $p(G \cap D) = 0,002$ et $p(D) = 0,082$.

1. Par définition d'une probabilité conditionnelle : $p_G(D) = \dfrac{p(G \cap D)}{p(G)} = \dfrac{0,2}{20} = 0,01$. **La réponse est B.**
2. Puisque $(G, \bar{G})$ forme un système complet d'événements (ou une partition de l'univers), la formule des probabilités totales nous dit que :

$$p(D) = p(D \cap G) + p(D \cap \bar{G}) \implies p(D \cap \bar{G}) = p(D) - p(D \cap G) = 0,082 - 0,002 = 0,08$$

   La réponse est B.

3. On cherche $p_D(G)$. Par définition d'une probabilité conditionnelle : $p_D(G) = \dfrac{p(G \cap D)}{p(D)} = \dfrac{0,2}{8,2} = 0,0244 \simeq 0,024$. **La réponse est B.**
4. D'après le cours sur les lois binomiales, si $X \sim \mathcal{B}(50; 0,082)$, alors $p(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Ici, en utilisant les événements contraires :

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2)$$

   car $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots, 50\}$. Arrivé ici, il y a 2 possibilités. Soit on utilise la calculatrice et :
   — fonction de partition pour $X = 0$, $X = 1$ et $X = 2$
   — fonction de répartition pour $X \leq 2$
   Dans les deux cas, on trouve $P(X > 2) \simeq 0,78858 \simeq 0,789$. Ainsi,

$$P(X > 2) = 1 - (1 - 0,082)^{50} - 50 \times 0,082 \times (1 - 0,082)^{49} = 0,78858 \simeq 0,789$$

   La réponse est B.

5. On cherche désormais n tel que $p(X = 0) > 0,4$ où $X \sim \mathcal{B}(n; 0,082)$. Or,

$$P(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0,082^0 \times (1 - 0,082)^n = (1 - 0,082)^n$$

   On doit donc résoudre : $(1 - 0,082)^n > 0,4$.

$$(1 - 0,082)^n > 0,4 \iff n \log(1 - 0,082) > \log(0,4)$$

par application de la fonction log, strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$. Ainsi,

$$n\log(0,918) > \log(0,4) \iff n < \frac{\log(0,4)}{\log(0,918)} \quad \text{changement du sens de l'inégalité car } \log(0{,}918)<0$$

Après calculs, $n < 10,7 \iff n \leq 10$. **La réponse est C.**

Exercice 2

$$\begin{array}{cccc} f & : &]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2 - 8\ln(x) \end{array}$$

1. Par le cours sur les limites de fonctions usuelles, on sait que $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ donc par opérations sur les limites
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 - 8\times(-\infty) = +\infty$$
2. Par le cours sur les croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$. Donc, par opérations sur les limites
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \times (1 - 8\times 0) = +\infty$$
3. f est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc en dérivant terme à terme l'expression première de f, il vient que
$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad f'(x) = 2x - \frac{8}{x} = \frac{2x^2}{x} - \frac{8}{x} = \frac{2x^2 - 8x}{x} = \frac{2(x^2-4)}{x}$$
4. On étudie successivement le signe du numérateur et du dénominateur de f' pour en déduire son signe :

x	0		2		$+\infty$
$2(x^2-4)$		$-$	0	$+$	
x	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(2)$	↗	$+\infty$

Avec $f(2) = 4 - 8\ln(2) = 4(1-\ln(4)) \simeq -1,54$.

5. On sait que :
   — f est continue sur $]0;2]$
   — f est strictement décroissante sur $]0;2]$
   — $[f(2), f(0)[= [4 - 8\ln(2); +\infty[$ et donc $0 \in [f(2), f(0)[$
   d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0;2]$.
6. A partir des 2 questions précédentes, on peut déduire le tableau de signe de f :

x	0		α		β		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

7. On a finalement $\forall x \in]0;+\infty[, g_k(x) = f(x)+k$. On peut tout simplement retracer le tableau de variations de g_k à partir de celui de f :

x	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(2)$	↗ $+\infty$
$g_k(x)$	$+\infty$ ↘	$f(2)+k$	↗ $+\infty$

Il suffit juste de "décaler de k". Et on veut donc g_k positive c'est-à-dire $f(2)+k \geq 0 \iff k \geq -f(2)$. La plus petite valeur de k telle que g_k reste positive est $8\ln(2)-4$.

Exercice 3

Première modélisation

1. $u_1 = 0,9 \times 3 + 1,3 = 4$ et $u_2 = 0,9 \times 4 + 1,3 = 4,9$. Au 2ème mois de la FAQ, la modélisation prévoit 400 questions et au 3ème mois elle en prévoit 490.
2. Notons, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$ la propriété "$u_n = 13 - \dfrac{100}{9} \times 0,9^n$".
   Initialisation : $u_0 = 3$ et $13 - \frac{100}{9} \times 0,9 = 13 - 10 = 3$. Donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie.
   Hérédité : soit $N \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{H}(N)$ est vraie, *i.e.* $u_N = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^N$. Montrons $\mathcal{H}(N+1)$. On part de la définition de la suite
   $$u_{N+1} = 0,9u_N+1,3 = 0,9\times\left(13 - \frac{100}{9} \times 0,9^N\right)+1,3 = 11,7-\frac{100}{9}\times 0,9^{N+1}+1,3 = 13-\frac{100}{9}\times 0,9^{N+1}$$
   C'est $\mathcal{H}(N+1)$!
   Conclusion : on a prouvé que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie.
   La propriété est démontrée par principe de récurrence.
3. $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{100}{9} \times (0,9^{n+1} - 0,9^n) = \dfrac{100}{9} \times 0,9^n \times (1-0,9) = \dfrac{10}{9} \times 0,9^n = 0,9^{n-1} \geq 0$. Ainsi, la suite (u_n) est croissante.
4. Ce programme renvoie le premier rang N tel que $u_N > p$. Dans le cas présent,
   $$u_n > 8,5 \iff 13-\frac{100}{9}\times 0,9^n > 8,5 \iff \frac{100}{9}\times 0,9^n < 4,5 \iff 0,9^n < 4,5\times 0,09 \iff 0,9^n < 0,405$$
   Par application du log strictement croissant sur $\mathbb{R}_*^+$,
   $$n\log(0,9) < \log(0,405) \iff n > \frac{\log(0,405)}{\log(0,9)} \iff n > 8,57$$
   Le programme renvoie donc $N = 9$.

Une autre modélisation

1. $v_1 = 9 - 6 = 3,00$ et $v_2 = 9 - 6e^{-0,19} \simeq 4,04$.
2. On cherche n tel que $v_n = 8,5$:
   $$9 - 6e^{-0,19(n-1)} = 8,5 \iff e^{-0,19(n-1)} = \frac{0,5}{6} \iff -0,19(n-1) = -\ln(12) \iff n = 1 + \frac{\ln(12)}{0,19}$$
   On trouve après calculs $n = 15$.

Comparaison des deux modèles

1. Il s'agit de comparer les questions A.4. et B.2. . La première modélisation dépasse les 850 questions au 9ème mois alors que la deuxième ne les dépasse qu'au 15ème mois. La première modélisation conduit donc à la modification la plus prématurée.
2. Il s'agit en fait de calculer les limites des deux suites (u_n) et (v_n). Le cours sur les suites géométriques nous assure que pour $-1 < q < 1$, $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$. Donc par opérations sur les limites

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0 = 13$$

De plus, on sait que $\lim_{n\to+\infty} \exp(-n) = 0$ donc par opérations sur les limites :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 9 - 6 \times 0 = 9$$

La 1ère modélisation prévoit le plus de questions : au maximum 1300 alors que la 2ème modélisation n'en prévoit que 900.

Exercice 4

1. $E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.
2. Il faut un point appartenant et (EC) : on a $E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Il faut également un vecteur directeur de (EC) : on a $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$. Une représentation paramètre de (EC) est donc

$$\begin{cases} x &= 0+1t \\ y &= 0+1t \\ z &= 1-1t \end{cases} \implies \begin{cases} x &= t \\ y &= t \\ z &= 1-t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

3. $\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}1-1\\0-1\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GD}\begin{pmatrix}0-1\\1-1\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ sont 2 vecteurs directeurs du plan (GBD) et $\overrightarrow{EC}$ est un vecteur directeur de la droite (EC). Or,

$$\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{EC} = 1 \times 0 - 1 \times 1 + (-1) \times (-1) = 0$$

De même,

$$\overrightarrow{GD} \cdot \overrightarrow{EC} = 1 \times (-1) + 0 \times 1 + (-1) \times (-1) = 0$$

Ainsi, $\overrightarrow{EC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GD}$ donc (EC) est orthogonal au plan (GBD).

4a. Un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ suffit généralement à caractériser un plan. Dans ce cas, l'équation cartésienne du plan est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.
Puisque (EC) est orthogonale à (BDG), $\overrightarrow{EC}$ est un vecteur normal à (BCG). Donc l'équation cartésienne de (BDG) est de la forme $1x + 1y - 1z + d = 0$. Il reste à déterminer d. On sait qu'un point qui appartient au plan vérifie les coordonnées du plan. Or, $B \in (BDG)$ donc

$$x_B + y_B - z_B + d = 0 \implies 1 + 0 + 0 + d = 0 \implies d = -1$$

Donc une équation cartésienne de (BDG) est $x + y - z - 1 = 0$.

4b. I est l'intersection de (BDG) est de (EC). Il vérifie à la fois l'équation cartésienne de (BDG) et l'équation paramétrique de (EC). Ainsi,

$$\begin{cases} x_B + y_B - z_B - 1 &= 0 \\ x_B &= t_B \\ y_B &= t_B \\ z_B &= 1 - t_B \end{cases} \implies \begin{cases} t_B + t_B + t_B - 1 &= 0 \\ x_B &= t_B \\ y_B &= t_B \\ z_B &= 1 - t_B \end{cases} \implies \begin{cases} 3t_B &= 2 \\ x_B &= t_B \\ y_B &= t_B \\ z_B &= 1 - t_B \end{cases} \implies t_B = \frac{2}{3}$$

Les coordonnées de I sont donc $I\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

4c. Un schéma permet de se rendre compte que $d(E;GBD) = ||\overrightarrow{EI}||EI$. Or, $\overrightarrow{EI}\begin{pmatrix}2/3-0\\2/3-0\\1/3-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix}$

Donc,

$$EI = \sqrt{3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

5a. Pour montrer que BDG est équilatéral, il suffit de montrer que ses 3 côtés sont de même longueur. On calcule donc la norme des vecteurs associés aux 3 côtés : $\overrightarrow{GD}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ de norme $\sqrt{2}$, $\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ de norme $\sqrt{2}$ et $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ de norme $\sqrt{2}$. Donc BDG est équilatéral de côté $\sqrt{2}$.

5b. Géométriquement, on a :

$$\mathcal{A}_{BDG} = 2\mathcal{A}_{BJG}$$

Or, BJG est un triangle rectangle en J grâce aux propriétés sur les triangles équilatéraux. Donc en appliquant le théorème de Pythagore dans BJG, on trouve :

$$JG^2 + JB^2 = BG^2 \implies JG = \sqrt{BG^2 - JB^2} = \sqrt{2-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

car $JB = DB/2 = \sqrt{2}/2 = 1/\sqrt{2}$. Donc l'aire du triangle BJG est :

$$\mathcal{A}_{BJG} = \frac{JG\times JB}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \qquad \text{(moitié de l'aire d'un rectangle)}$$

Et donc,

$$\mathcal{A}_{BDG} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

6. Le tétraèdre EGBD a pour base BDG et pour hauteur relative EI. Donc,

$$\mathcal{V}_{EBD} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{BDG}\times EI = \frac{\sqrt{3}\times 2}{3\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D’ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2023

MATHÉMATIQUES

Mardi 21 mars 2023

Durée de l’épreuve : **4 heures**

L’usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L’usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu’il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu’il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l’appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse inexacte.

Un jeu vidéo possède une vaste communauté de joueurs en ligne. Avant de débuter une partie, le joueur doit choisir entre deux « mondes » : soit le monde A, soit le monde B.

On choisit au hasard un individu dans la communauté des joueurs.
Lorsqu'il joue une partie, on admet que :

- la probabilité que le joueur choisisse le monde A est égale à $\frac{2}{5}$;
- si le joueur choisit le monde A, la probabilité qu'il gagne la partie est de $\frac{7}{10}$;
- la probabilité que le joueur gagne la partie est de $\frac{12}{25}$.

On considère les évènements suivants :

- A : « Le joueur choisit le monde A » ;
- B : « Le joueur choisit le monde B » ;
- G : « Le joueur gagne la partie ».

1. La probabilité que le joueur choisisse le monde A et gagne la partie est égale à :

a. $\frac{7}{10}$ **b.** $\frac{3}{25}$ **c.** $\frac{7}{25}$ **d.** $\frac{24}{125}$

2. La probabilité $P_B(G)$ de l'événement G sachant que B est réalisé est égale à :

a. $\frac{1}{5}$ **b.** $\frac{1}{3}$ **c.** $\frac{7}{15}$ **d.** $\frac{5}{12}$

Dans la suite de l'exercice, un joueur effectue 10 parties successives. On assimile cette situation à un tirage aléatoire avec remise. On rappelle que la probabilité de gagner une partie est de $\frac{12}{25}$.

3. La probabilité, arrondie au millième, que le joueur gagne exactement 6 parties est égale à:

a. $0{,}859$ **b.** $0{,}671$ **c.** $0{,}188$ **d.** $0{,}187$

4. On considère un entier naturel n pour lequel la probabilité, arrondie au millième, que le joueur gagne au plus n parties est de $0{,}207$. Alors :

a. $n = 2$ **b.** $n = 3$ **c.** $n = 4$ **d.** $n = 5$

5. La probabilité que le joueur gagne au moins une partie est égale à :

a. $1 - \left(\frac{12}{25}\right)^{10}$ **b.** $\left(\frac{13}{25}\right)^{10}$ **c.** $\left(\frac{12}{25}\right)^{10}$ **d.** $1 - \left(\frac{13}{25}\right)^{10}$

Exercice 2 (5 points)

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique.
Au début de l'étude la population est de $100\,000$ insectes.
Pour préserver l'équilibre du milieu naturel le nombre d'insectes ne doit pas dépasser $400\,000$.

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire
L'observation de l'évolution de ces populations d'insectes en laboratoire, en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre d'insectes augmente de $60\ \%$ chaque mois.
En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois. On a donc $u_0 = 0{,}1$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n : $u_n = 0{,}1 \times 1{,}6^n$.

2. Déterminer la limite de la suite (u_n).

3. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel $u_n > 0{,}4$.

4. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé ? Justifier la réponse.

Partie B : Étude d'un second modèle
En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation.
Ils modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (v_n), définie par : $v_0 = 0{,}1$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 1{,}6v_n - 1{,}6v_n^2$, où, pour tout entier naturel n, v_n est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

1. Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 1{,}6x - 1{,}6x^2$.

a. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

b. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.

3. **a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

b. Montrer que la suite (v_n) est convergente.

On note ℓ la valeur de sa limite. On admet que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

c. Déterminer la valeur de ℓ. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé ? Justifier la réponse.

4. On donne ci-contre la fonction `seuil`, écrite en langage Python.

a. Qu'observe-t-on si on saisit `seuil(0.4) ?`

b. Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de `seuil(0.35)`.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(a) :
    v=0.1
    n=0
    while v<a :
      v=1.6*v-1.6*v*v
      n=n+1
    return n
```

Exercice 3 (5 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère :

- le plan $\mathcal{P}_1$ dont une équation cartésienne est $2x + y - z + 2 = 0$,
- le plan $\mathcal{P}_2$ passant par le point $B(1\,;1\,;2)$ et dont un vecteur normal est $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

1. a. Donner les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n_1}$ normal au plan $\mathcal{P}_1$.

b. On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si un vecteur normal à l'un des plans est orthogonal à un vecteur normal à l'autre plan.
Montrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

2. a. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2$.

b. On note Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 + t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Montrer que la droite Δ est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

On considère le point $A(1\,;1\,;1)$ et on admet que le point A n'appartient ni à $\mathcal{P}_1$ ni à $\mathcal{P}_2$.
On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite Δ.

3. On rappelle que, d'après la question **2.b**, la droite Δ est l'ensemble des points M_t de coordonnées $(0\,;-2+t\,;t)$, où t désigne un nombre réel quelconque.

a. Montrer que, pour tout réel t, $AM_t = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$.

b. En déduire que $AH = \sqrt{3}$.

4. On note $\mathcal{D}_1$ la droite orthogonale au plan $\mathcal{P}_1$ passant par le point A et H_1 le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}_1$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_1$.

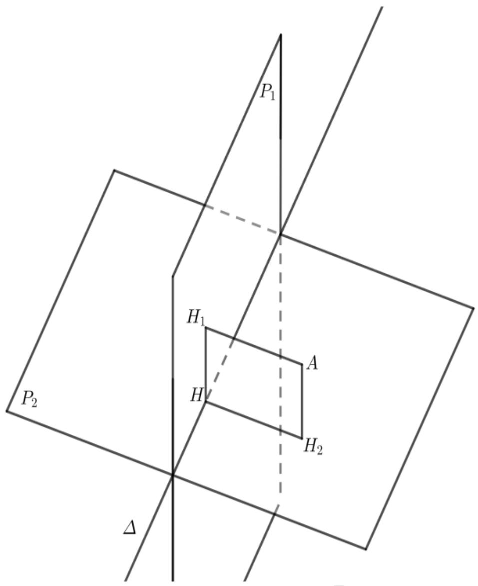
b. En déduire que le point H_1 a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{5}{3}\right)$.

5. Soit H_2 le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}_2$.

On admet que H_2 a pour coordonnées $\left(\frac{4}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{4}{3}\right)$
et que H a pour coordonnées $(0\,;\,0\,;\,2)$.

Sur le schéma ci-contre, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont représentés, ainsi que les points A, H_1, H_2, H.

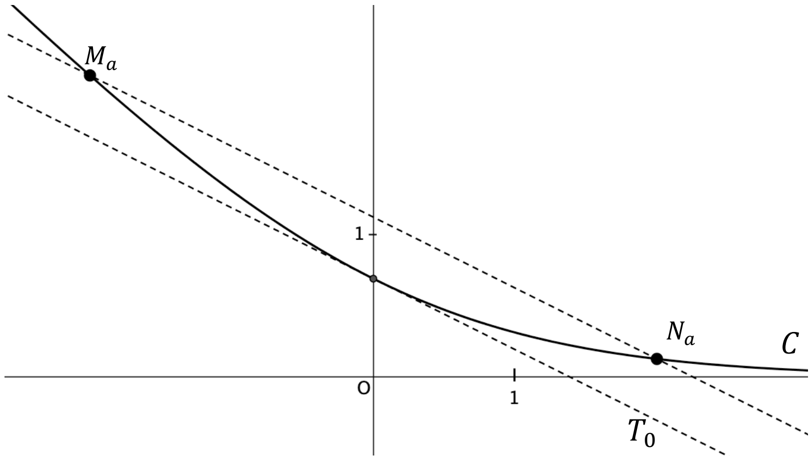
Montrer que AH_1HH_2 est un rectangle.



Exercice 4 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)$, où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
La courbe C est tracée ci-dessous.



1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

c. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
Calculer $f'(x)$ puis montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \frac{-1}{1+\mathrm{e}^{x}}$.

d. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. On note T_0 la tangente à la courbe C en son point d'abscisse 0.

a. Déterminer une équation de la tangente T_0.

b. Montrer que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire que, pour tout nombre réel x, on a : $f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln(2)$.

3. Pour tout nombre réel a différent de 0, on note M_a et N_a les points de la courbe C d'abscisses respectives $-a$ et a. On a donc : $M_a\big(-a\,;f(-a)\big)$ et $N_a\big(a\,;f(a)\big)$.

a. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f(x) - f(-x) = -x$.

b. En déduire que les droites T_0 et (M_aN_a) sont parallèles.

CORRECTION DU BAC : SUJET DE SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

METROPOLE – ANTILLES – GUYANE 2023 – JOUR 2

Exercice 1 : QCM sur les probabilités

D'après l'énoncé : $P(A) = \frac{2}{5}$ $\quad P_A(G) = \frac{7}{10}$ $\quad$ et $\quad P(G) = \frac{12}{25}$

1. On calcule la probabilité que le joueur choisisse le monde et gagne la partie, soit $P(A \cap G)$.
   $P(A \cap G) = P(A) \times P_A(G) = \frac{2}{5} \times \frac{7}{10} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$ **Réponse c**

2. On calcule $P_B(G)$.
   $P_B(G) = \frac{P(B \cap G)}{P(B)} = \frac{P(B \cap G)}{1 - P(A)}$
   Or, d'après la formule des probabilités totales, $P(G) = P(B \cap G) + P(A \cap G)$
   Soit, $P(B \cap G) = P(G) - P(A \cap G) = \frac{12}{25} - \frac{7}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$.
   Donc, $P_B(G) = \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}$ **Réponse b**

3. Jouer une partie est une épreuve de Bernoulli dont le succès est « le joueur gagne la partie » de probabilité $\frac{12}{25}$.
   On répète 10 fois cette épreuve de façon identique et indépendante (on assimile la situation à un tirage avec remise). On a donc un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{12}{25}$.
   On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès (le nombre de parties gagnées). X suit donc la loi binomiale $B\left(10\,; \frac{12}{25}\right)$.
   On calcule $P(X = 6)$.
   $P(X = 6) = \binom{10}{6} \times \left(\frac{12}{25}\right)^6 \times \left(\frac{13}{25}\right)^4 = 210 \times \left(\frac{12}{25}\right)^6 \times \left(\frac{13}{25}\right)^4 \approx 0{,}188$ au millième près
   Réponse c

4. On programme sur la calculatrice la fonction $BinomialCD\left(X, 10, \frac{12}{25}\right)$.
   D'après la calculatrice, $P(X \leq 3) \approx 0{,}207$. Donc l'entier naturel n pour lequel la probabilité, arrondie au millième, de gagner au plus n parties est de 0,207 est 3.
   Réponse b

5. On calcule $P(X \geq 1)$.
   $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \times \left(\frac{12}{25}\right)^0 \times \left(\frac{13}{25}\right)^{10}$
   $P(X \geq 1) = 1 - 1 \times 1 \times \left(\frac{13}{25}\right)^{10} = 1 - \left(\frac{13}{25}\right)^{10}$ **Réponse d**

Exercice 2 : Suites

Partie A : Etude d'un premier modèle en laboratoire

1. Chaque mois, la population d'insectes dans le jardin botanique augmente de 60%, elle est donc multipliée par 1,6.
   Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}6u_n$.
   Donc, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}6$ et de premier terme $u_0 = 0{,}1$. Donc, pour tout entier naturel, $u_n = u_0 \times q^n$ soit $\boldsymbol{u_n = 0{,}1 \times 1{,}6^n}$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}6^n = +\infty$ car $1{,}6 > 1$. Donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{u_n} = +\infty$

3. On cherche n tel que $u_n > 0{,}4$. Pour tout entier naturel n, $u_n > 0{,}4 \Leftrightarrow 0{,}1 \times 1{,}6^n > 0{,}4 \Leftrightarrow 1{,}6^n > 4 \Leftrightarrow \ln 1{,}6^n > \ln 4$ car la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;\ +\infty[$.

   $\Leftrightarrow n \ln 1{,}6 > \ln 4 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 4}{\ln 1{,}6}$ car $1{,}6 > 1$ donc $\ln 1{,}6 > 0$

   Or, $\frac{\ln 4}{\ln 1{,}6} \approx 2{,}95$ donc $n \geq 3$. Ainsi, **le plus petit entier naturel $\boldsymbol{n}$ tel que $\boldsymbol{u_n > 0{,}4}$ est 3.**

4. D'après la question précédente, la population d'insectes dans le jardin botanique dépassera les 0,4 million d'insectes, soit 400 000 insectes au bout de 3 mois. Ainsi, selon ce modèle, **l'équilibre du milieu naturel sera préservé.**

Partie B : Etude d'un second modèle

1. On calcule v_1.
   $v_1 = 1{,}6v_0 - 1{,}6v_0^2 = 1{,}6 \times 0{,}1 - 1{,}6 \times 0{,}1^2 = 0{,}144$
   Ainsi, **au bout d'un mois, il y aura 0,144 million, soit 144 000 insectes dans le jardin botanique.**

2. **a.** Pour tout $x \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$, $f(x) = x \Leftrightarrow 1{,}6x - 1{,}6x^2 - x = 0 \Leftrightarrow 0{,}6x - 1{,}6x^2 = 0 \Leftrightarrow x(0{,}6 - 1{,}6x) = 0 \Leftrightarrow x = 0\ ou\ 0{,}6 - 1{,}6x = 0 \Leftrightarrow x = 0\ ou\ x = 0{,}375$
   $\boldsymbol{S = \{0\,;0{,}375\}}$

   b. Dérivons f afin de trouver ses variations.
   La fonction f est dérivable sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ comme fonction polynôme du second degré.
   Pour tout $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$, $f'(x) = 1{,}6 - 3{,}2x$
   Pour tout $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1{,}6 - 3{,}2x \geq 0 \Leftrightarrow 1{,}6 \geq 3{,}2x \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$.
   Ainsi, pour tout $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$, $f'(x) \geq 0$ donc **la fonction $\boldsymbol{f}$ est croissante sur $\boldsymbol{\left[0;\frac{1}{2}\right]}$.**

3. **a.** Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.
Initialisation : $v_0 = 0{,}1$ et $v_1 = 0{,}144$ or $0 \leq 0{,}1 \leq 0{,}144 \leq \frac{1}{2}$ donc $0 \leq v_0 \leq v_1 \leq \frac{1}{2}$.
La propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Supposons que pour un entier naturel k, $0 \leq v_k \leq v_{k+1} \leq \frac{1}{2}$ et montrons qu'alors $0 \leq v_{k+1} \leq v_{k+2} \leq \frac{1}{2}$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $0 \leq v_k \leq v_{k+1} \leq \frac{1}{2}$
La fonction f est croissance sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ donc elle conserve l'ordre donc, on a :
$f(0) \leq f(v_k) \leq f(v_{k+1}) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$.
Or, par définition, $f(v_k) = v_{k+1}$ et $f(v_{k+1}) = v_{k+2}$. De plus, $f(0) = 0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}4$ et $0{,}4 \leq \frac{1}{2}$. On a donc : $0 \leq v_{k+1} \leq v_{k+2} \leq 0{,}4 \leq \frac{1}{2}$ soit $0 \leq v_{k+1} \leq v_{k+2} \leq \frac{1}{2}$.
La propriété est héréditaire.

Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n : $\boldsymbol{0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}}$.

b. D'après la question précédente, la suite (v_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$ donc, d'après le théorème de convergence des suites monotones, **la suite (v_n) est convergente vers $l \leq \frac{1}{2}$.**

c. On sait que l est solution de l'équation $f(x) = x$. Donc, d'après la question 2-a, on a $l = 0$ ou $l = 0{,}375$. Or, la suite (v_n) est croissante et $v_0 = 0{,}1 > 0$ donc l ne peut être égale à 0. Ainsi, **la limite l de la suite (v_n) est 0,375.**
Ainsi, à long terme, la population d'insectes dans le jardin botanique va se rapprocher de 0,375 million d'individus, soit 375 000 insectes, et, comme la suite (v_n) est croissante, elle ne les dépassera pas. Ainsi, cette population n'atteindra jamais 400 000 insectes. Donc, **selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera respecté**.

4. **a.** Cet algorithme renvoie le plus petit entier naturel n tel que $v_n \geq a$. Or, d'après la question précédente, la suite (v_n) ne dépasse jamais la valeur 0,4 car la population d'insectes ne dépasse pas les 400 000 individus. Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n < 0{,}4$, donc **la saisie de « seuil(0.4) » ne renvoie rien.**

b. La saisie de « seuil(0.35) » renvoie le plus petit entier naturel n tel que $v_n \geq 0{,}35$. D'après la calculatrice, $v_5 < 0{,}35$ et $v_6 > 0{,}35$. Donc, **la saisie de « seuil(0.35) » renvoie la valeur 6.** Ainsi, **la population d'insectes dépassera les 0,35 million d'individus, soit 350 000 insectes au bout du sixième mois.**

Exercice 3 : Géométrie dans l'espace

1. **a.** D'après son équation cartésienne, le plan P_1 a pour vecteur normal $\boldsymbol{\overrightarrow{n_1}(2;1;-1)}$.

   b. Vérifions si les vecteurs normaux aux plans P_1 et P_2 sont orthogonaux.
   $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 2 \times 1 + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 = 2 - 1 - 1 = 0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont orthogonaux donc **les plans $\boldsymbol{P_1}$ et $\boldsymbol{P_2}$ sont perpendiculaires.**

2. **a.** Le plan P_2 a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_2}(1;-1;1)$, donc le plan P_2 a pour équation cartésienne : $x - y + z + d$ où d est un réel.
   De plus, $B(1\,;1\,;2) \in P_2$, donc
   $x_B - y_B + z_B + d = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$
   Donc, le plan P_2 a pour équation cartésienne : $\boldsymbol{x - y + z - 2}$.

   b. Soit M un point quelconque de la droite Δ. Ainsi, pour tout réel t, $M(0;-2+t;t)$.
   Vérifions que $M \in P_1$.
   Pour tout réel t, $2x_M + y_M - z_M + 2 = 2 \times 0 + (-2) + t - t + 2 = 0$. Donc le point M appartient au plan P_1 donc la droite Δ est incluse dans le plan P_1.
   Vérifions si $M \in P_2$.
   Pour tout réel t, $x_M - y_M + z_M - 2 = 0 - (-2+t) + t - 2 = 2 - t + t - 2 = 0$.
   Donc le point M appartient au plan P_2 donc la droite Δ est incluse dans le plan P_2.
   Ainsi, la droite Δ est incluse dans le plan P_1 et dans le plan P_2. Ainsi, **la droite $\boldsymbol{\Delta}$ est la droite d'intersection des plans $\boldsymbol{P_1}$ et $\boldsymbol{P_2}$.**

3. **a.** Pour tout réel t, $\overrightarrow{AM_t}(x_{M_t} - x_A\,;y_{M_t} - y_A\,;z_{M_t} - z_A)$ $\overrightarrow{AM_t}(-1\,;\,-2+t-1;t-1)$. $\overrightarrow{AM_t}(-1\,;t-3\,;t-1)$
   Donc pour tout réel t, $AM_t = \left\|\overrightarrow{AM_t}\right\| = \sqrt{(-1)^2 + (t-3)^2 + (t-1)^2}$
   $AM_t = \sqrt{1 + t^2 - 6t + 9 + t^2 - 2t + 1} = \boldsymbol{\sqrt{2t^2 - 8t + 11}}$

   b. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = AM_t^2 = \left(\sqrt{2t^2 - 8t + 11}\right)^2 = 2t^2 - 8t + 11$.
   Le point H est le projeté orthogonal du point A sur la droite Δ. Ainsi, H est le point de la droite Δ tel que la distance AM_t est minimale. On étudie donc les variations de la fonction f.
   f est une fonction polynôme de degré 2 avec $a = 2\,; b = -8$ et $c = 11$.
   Donc on a : $\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{8}{2\times 2} = \frac{8}{4} = 2$
   Et $\beta = f(\alpha) = f(2) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 11 = 3$
   $a = 2 > 0$ donc, on a :

t	$-\infty$	2	$+\infty$
Variations de f	↘	3	↗

Ainsi, f admet pour minimum 3. Donc, la valeur minimale de AM_t^2 est 3, donc la valeur minimale de AM_t est $\sqrt{3}$, AM_t étant une longueur qui est donc positive. Ainsi, on peut en déduire que $\boldsymbol{AH = \sqrt{3}}$**.**

4. a. La droite D_1 est orthogonale au plan P_1 donc elle a pour vecteur directeur un vecteur normal au plan P_1. Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{n_1}(2\,;1\,;\,-1)$ est un vecteur directeur de la droite D_1 qui passe par le point $A(1\,;1\,;1)$.

La droite D_1 a donc pour représentation paramétrique : $\begin{cases} \boldsymbol{x = 1 + 2k} \\ \boldsymbol{y = 1 + k} \\ \boldsymbol{z = 1 - k} \end{cases} \quad \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}.$

b. La droite D_1 est orthogonale au plan P_1 et passe par le point A. Ainsi, le projeté orthogonal H_1 du point A sur la droite D_1 est le point d'intersection de la droite D_1 et du plan P_1. Donc, les coordonnées de H_1 vérifient :

$$\begin{cases} 2x + y - z + 2 = 0 \\ x = 1 + 2k \\ y = 1 + k \\ z = 1 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1 + 2k) + 1 + k - (1 - k) + 2 = 0 \\ x = 1 + 2k \\ y = 1 + k \\ z = 1 - k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2 + 4k + 1 + k - 1 + k + 2 = 0 \\ x = 1 + 2k \\ y = 1 + k \\ z = 1 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6k + 4 = 0 \\ x = 1 + 2k \\ y = 1 + k \\ z = 1 - k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} k = -\frac{2}{3} \\ x = 1 + 2k = 1 + 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3} \\ y = 1 + k = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ z = 1 - k = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \end{cases} \quad \text{donc } \boldsymbol{H_1\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)}.$$

5. Montrons que le quadrilatère AH_1HH_2 est un rectangle.
Montrons d'abord que ce quadrilatère est un parallélogramme.

$\overrightarrow{HH_1}(x_{H_1} - x_H; y_{H_1} - y_H; z_{H_1} - z_H)$ $\overrightarrow{HH_1}\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$

$\overrightarrow{H_2A}(x_A - x_{H_2}; y_A - y_{H_2}; z_A - z_{H_2})$ $\overrightarrow{H_2A}\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$

On remarque : $\overrightarrow{HH_1} = \overrightarrow{H_2A}$. Ainsi, le quadrilatère AH_1HH_2 est un parallélogramme.

Montrons maintenant que le quadrilatère AH_1HH_2 est un rectangle. Pour cela, montrons qu'il a deux côtés consécutifs perpendiculaires.

$\overrightarrow{AH_1}(x_{H_1} - x_A\,; y_{H_1} - y_A\,; z_{H_1} - z_A)$ $\overrightarrow{AH_1}\left(-\frac{4}{3};-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$

Donc, $\overrightarrow{AH_1}\,.\,\overrightarrow{H_2A} = -\frac{4}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} = 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AH_1}$ et $\overrightarrow{H_2A}$ sont orthogonaux, donc les droites (AH_1) et (H_2A) sont perpendiculaires, donc le parallélogramme AH_1HH_2 a deux côtés consécutifs perpendiculaires, donc **le quadrilatère $\boldsymbol{AH_1HH_2}$ est un rectangle**.

<u>Exercice 4 :</u> Fonctions

1. **a.** $\lim_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$ et $\lim_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ donc par composition $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc par somme $\lim_{x \to -\infty} (1 + e^{-x}) = +\infty$
Or, $\lim_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$ donc par composition $\boldsymbol{\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$.

   b. $\lim_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$ et $\lim_{X \to -\infty} e^X = 0$ donc par composition $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc par somme $\lim_{x \to +\infty} (1 + e^{-x}) = 1$
Or, $\lim_{X \to 1} \ln X = \ln 1 = 0$ donc par composition $\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$.
Ainsi, **la courbe $\boldsymbol{C}$ admet pour asymptote horizontale la droite d'équation $\boldsymbol{y = 0}$ en $\boldsymbol{+\infty}$.**

   c. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On pose : $f = \ln u$ avec $u(x) = 1 + e^{-x}$
Donc $f' = \frac{u'}{u}$ avec $u'(x) = -e^{-x}$
Pour tout réel x, $\boldsymbol{f'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{-e^{-x}}{e^{-x}(e^x+1)} = \frac{-1}{1+e^x}}$

   d. Pour tout réel x, $e^x > 0$ donc $1 + e^x > 1 > 0$ et $-1 < 0$ donc par quotient, $f'(x) < 0$.
Donc, la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
On a donc :

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$	$+\infty$
Variations de $\boldsymbol{f}$	$+\infty$ $\searrow$	**0**

2. **a.** <u>Equation de T_0 :</u> $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ soit $y = f'(0)x + f(0)$
Or, $f'(0) = \frac{-1}{1+e^0} = -\frac{1}{2}$ et $f(0) = \ln(1 + e^{-0}) = \ln 2$
Donc, T_0 a pour équation : $\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x + \ln 2}$.

   b. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de -1 par la somme de 1 et de la fonction exponentielle (qui ne s'annule donc pas).
Pour tout réel x, $f''(x) = \frac{-1\times(-e^x)}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$
Or, pour tout réel x, $e^x > 0$ et $(1 + e^x)^2 > 0$ donc par quotient, $f''(x) > 0$ donc **la fonction $\boldsymbol{f}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.**

   c. La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$ donc la courbe C est au-dessus de ses tangentes, et en particulier de T_0. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + \ln 2\right) \geq 0$
soit $\boldsymbol{f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln 2}$

3. **a.** Pour tout réel x, $f(x) - f(-x) = \ln(1 + e^{-x}) - \ln(1 + e^{x}) = \ln\left(\frac{1+e^{-x}}{1+e^{x}}\right)$

$\boldsymbol{f(x) - f(-x) = \ln\left(\frac{e^{-x}(e^{x}+1)}{1+e^{x}}\right) = \ln e^{-x} = -x}$

b. Déterminons le coefficient directeur de T_0 et de $(M_a N_a)$

T_0 est la tangente à C au point d'abscisse 0 donc son coefficient directeur est $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

Calculons le coefficient directeur m de la droite $(M_a N_a)$.

Pour tout réel a, $m = \frac{y_{N_a} - y_{M_a}}{x_{N_a} - x_{M_a}} = \frac{f(a) - f(-a)}{a - (-a)} = \frac{-a}{2a} = -\frac{1}{2}$ car pour tout réel x, $f(x) - f(-x) = -x$.

Ainsi, les droites T_0 et $(M_a N_a)$ ont le même coefficient directeur donc **elles sont parallèles.**